LEHRBUCH

Leonhard Stiny

Aufgabensammlung zur Elektrotechnik und Elektronik

Übungsaufgaben mit ausführlichen Musterlösungen

3. Auflage

Springer Vieweg

Aufgabensammlung zur Elektrotechnik und Elektronik

Leonhard Stiny

Aufgabensammlung zur Elektrotechnik und Elektronik

Übungsaufgaben mit ausführlichen Musterlösungen

3., überarbeitete und erweiterte Auflage

Mit 560 Aufgaben und 517 Abbildungen

Springer Vieweg

Leonhard Stiny
Haag a. d. Amper, Deutschland

ISBN 978-3-658-14380-0 ISBN 978-3-658-14381-7 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-14381-7

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Vieweg
Die erste Auflage erschien unter dem Titel „Aufgaben mit Lösungen zum Grundwissen Elektrotechnik“ im Franzis Verlag, 2005.
Die zweite Auflage erschien unter dem Titel „Aufgaben mit Lösungen zur Elektrotechnik“ im Franzis Verlag 2008.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Vieweg ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Strasse 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Vorwort zur 3. Auflage

Nach der 1. und 2. Auflage beim Franzis-Verlag ist nun die 3. Auflage beim Springer-Verlag erschienen. In meiner bisher zehnjährigen Tätigkeit als Lehrbeauftragter für das Fach „Grundlagen der Elektrotechnik und Elektronik“ an der Ostbayerischen Technischen Hochschule Regensburg wurde sehr deutlich, dass Studierende dringend genügend Beispiele benötigen, um den in den Lehrveranstaltungen dargebotenen Stoff im Detail zu verstehen, ihn wiederholen und vor allem einüben zu können. Um eine anspruchsvolle Prüfung zu bestehen, müssen nicht nur Ansätze und Vorgehensweisen zur Berechnung und Lösung von Aufgaben bekannt sein, auch das „handwerkliche“ Können, das Rechnen selbst, muss beherrscht werden, um nicht in Zeitnot zu geraten. Alle diese Fertigkeiten können mit den vorliegenden Aufgaben geübt werden.

Viele Aufgaben fanden in meinen Vorlesungen als „Vorlesungsübungen“ Verwendung, die gemeinsam bearbeitet oder vorgerechnet wurden. Dadurch ergab sich einerseits eine sehr genaue Betrachtung und Verifizierung der Ergebnisse, welche durch vorgeschlagene alternative Lösungswege ergänzt werden konnten. Andererseits wurde klar, welche Stoffgebiete und Darstellungsweisen Probleme bereiten und besonders ausführlich und eingängig erklärt werden müssen. Als Beispiel sei hier die komplexe Wechselstromrechnung genannt.

Die Gliederung des Buches blieb zum größten Teil unverändert und ist entsprechend neu hinzugekommener Themengebiete erweitert. Die Anzahl der Übungsaufgaben wurde erheblich erhöht, es wurden auch mathematisch schwierigere Aufgaben aufgenommen.

Teilweise sind die Fragestellungen und Lösungen in Form einer allgemeinen Erläuterung eines Themengebietes gestaltet und zugehörigen Berechnungen vorangestellt. Dadurch werden einführende Abschnitte wie in einem Lehrbuch erreicht.

Für Hinweise auf mögliche Änderungen und Ergänzungen bin ich dankbar.

Haag a. d. Amper, im April 2016 — Leonhard Stiny

Vorwort

Dieses Buch richtet sich an alle, die Aufgaben der Elektrotechnik zu lösen haben, ihr Wissen auf diesem Gebiet durch Übungen festigen wollen oder sich auf eine Prüfung vorbereiten müssen. Auszubildende elektrotechnischer Berufe, Schüler weiterführender Schulen und Fachschulen, angehende Industriemeister oder Techniker, Studierende der Elektrotechnik oder einer verwandten Fachrichtung an Berufsakademien, Fachhochschulen oder Universitäten finden entsprechenden und ausgiebigen Übungsstoff. Berufserfahrene oder an der Lösung konkreter Aufgaben interessierte Hobbyelektroniker können ihr Wissen auffrischen oder ergänzen. Hier stehen genügend Beispiele mit Lösungen als Vorbereitungshilfe und zum Selbststudium zur Verfügung. Durch die Bearbeitung der Übungen werden Kenntnisse der Elektrotechnik gefestigt und erweitert.

Das Werk enthält 280 Übungsaufgaben samt ausführlich erläuterten Lösungswegen mit detaillierten algebraischen und numerischen Berechnungen zu Grundgebieten der Elektrotechnik. Lösungsergebnisse werden nicht nur angegeben, sondern gründlich erarbeitet. Somit wird im Zuge der Musterlösungen die allgemeine Vorgehensweise zur Problembewältigung geübt. Auch aufeinander folgende Lösungsschritte mit Zahlenwerten sind aufgenommen, damit Übende feststellen können, an welcher Stelle sie sich verrechnet haben.

Die inhaltliche Strukturierung meines erfolgreichen Lehrbuches „Grundwissen Elektrotechnik“ (Franzis Verlag) wurde für den vorliegenden Übungsband so weit als möglich übernommen. Somit besteht die Möglichkeit, den Stoff der einzelnen Lehrbuchkapitel zu vertiefen und die eigenen Fertigkeiten in der Anwendung des Erlernten zu trainieren. Das vorliegende Werk kann aber völlig unabhängig zum selbstständigen Lernen benutzt werden. Nach im Lehrbuch bewährter Weise wird im Verlaufe der einzelnen Kapitel von einfachen zu schwierigeren Aufgaben vorgegangen.

Die einzelnen Abschnitte werden mit Zusammenfassungen des anschließenden Wissensgebietes und dort möglicherweise verwendeter Formeln eingeleitet. Diese kurzen Abrisse erheben keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder Notwendigkeit zur Bearbeitung der daran anschließenden Aufgaben. Sie bereiten jedoch auf das Folgende vor und dienen, ebenso wie einige allgemeine Ausführungen zu elektrotechnischen Grundlagen und Vorgehensweisen innerhalb der Lösungen, zu einem Verständnis des Teilgebietes.

Die Bereiche der Übungen reichen von den Grundlagen der Elektrotechnik, einfachen sowie umfangreichen Schaltungen der Gleich-, Wechsel- und Drehstromtechnik, Analyse von Einschwingvorgängen und Netzwerken über elektronische Bauteile bis zur elektronischen Schaltungstechnik.

Zur Lösung der Aufgaben sind mathematische Kenntnisse der Algebra, Winkelfunktionen und komplexen Rechnung i. a. ausreichend. „Höhere" Mathematik (im Sinne von Integrieren, Differenzieren) wird kaum verwendet.

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!

Haag a. d. Amper, im Juli 2005 Leonhard Stiny

Inhaltsverzeichnis

1 Elektrischer Strom

Zusammenfassung

Als Einführung werden die Grundlagen des elektrischen Stromes hinterfragt. Arten und Zusammensetzungen von Stoffen ergeben mittels eines einfachen Atommodells anschauliche Vorstellungen von den physikalischen Vorgängen beim Fließen von Strom. Der Aufbau der Materie führt von Begriffen wie Elektronen, Ladung, Ladungsträger, Kräfte zwischen Ladungen über die Definition des Stromes zum elektrischen Widerstand und zu Grundgesetzen im einfachen Stromkreis. Die Bedeutung von Spannung, Spannungsabfall, Potenzial und Masse wird erläutert. Es folgt die Einteilung in Leiter, Nichtleiter und Halbleiter und deren Eigenschaften. Der Unterschied zwischen ruhender und bewegter elektrischer Ladung ergibt die Einteilung in die Gebiete Elektrostatik und Elektrodynamik. Der Begriff des elektrischen Feldes und die verschiedenen Arten von Feldern führen zu einer ersten allgemeinen Betrachtungsweise der Feldwirkungen. Die verschiedenen Arten von Strömen (Leitungsstrom, Verschiebungsstrom, Diffusionsstrom, Feldstrom, Driftstrom, Raumladungsstrom) ergeben eine differenzierte Betrachtung des Strombegriffes.

1.1 Grundwissen – kurz und bündig

1.1.1 Stoffe

- Stoffe treten in den drei Aggregatzuständen *fest*, *flüssig* oder *gasförmig* auf.
- *Stoffgemische* setzen sich aus verschiedenen *Reinstoffen* zusammen.
- *Verbindungen* sind Reinstoffe, die durch chemische Verfahren in *Elemente* zersetzt werden können.
- Ein *Molekül* ist das kleinste Masseteilchen einer Verbindung, das noch die chemischen Eigenschaften der Verbindung besitzt.
- Ein Molekül ist ein fester Verbund mehrerer Atome von Elementen.

L. Stiny, *Aufgabensammlung zur Elektrotechnik und Elektronik*,
DOI 10.1007/978-3-658-14381-7_1

- *Elemente* sind *Reinstoffe*, die nicht mehr in andere Stoffe zerlegbar sind.
- Ein *Atom* ist das kleinste Masseteilchen eines Elements.
- Ein Atom ist auf chemischem Weg nicht mehr weiter zerlegbar.

1.1.2 Atombau, elektrischer Strom

- Ein Atom besteht aus dem elektrisch positiv geladenen *Atomkern* und der *Atomhülle*.
- Der Atomkern besteht aus den elektrisch positiv geladenen Protonen und den elektrisch neutralen Neutronen (ohne elektrische Ladung). Im Atomkern ist fast die gesamte Masse des Atoms vereinigt.
- Ein *Proton* besitzt die *positive* elektrische *Elementarladung* „$+e$“.
- Die Atomhülle besteht aus Elektronen, welche den Atomkern umkreisen.
- Ein *Elektron* besitzt die *negative* elektrische *Elementarladung* „$-e$“. Elektrizitätsmengen treten nur als *ganzzahlige Vielfache* der Elementarladung auf.
- Jede Atomart hat eine bestimmte Anzahl von Elektronen in der Hülle.
- Die Anzahl der Elektronen in der Hülle entspricht der Anzahl der Protonen im Atomkern.
- Elektronen mit gleichem Abstand vom Atomkern fasst man zu einer Schale zusammen.
- Die Elektronen der äußersten Schale nennt man *Valenzelektronen*.
- Die äußerste Schale ist nicht immer vollständig mit Elektronen besetzt. Sie kann Elektronen abgeben oder aufnehmen.
- Elektrische *Ladung* ist Überschuss oder Mangel ruhender, elektrischer Ladungsträger.
- Elektrische Ladung kann nicht erzeugt oder vernichtet sondern nur transportiert werden.
- Es gibt zwei verschiedene Arten der Elektrizität: positive und negative Ladungen.
- Positive Ladung ist Elektronenmangel, negative Ladung ist Elektronenüberschuss.
- Elektronen sind Träger negativer Ladung.
- *Gleichnamige* Ladungen (mit gleichem Vorzeichen) *stoßen sich ab*, *ungleichnamige* Ladungen *ziehen sich an* (Coulomb'sches Gesetz).
- *Strom ist Ladungstransport*, d. h. strömende Ladung (bewegte elektrische Ladung).
- Damit Strom fließen kann, muss der Stromkreis geschlossen werden. Die Elektronen fließen vom negativen Pol der Spannungsquelle zu deren positiven Pol.
- Die *technische Stromrichtung* ist entgegengesetzt zur Flussrichtung der Elektronen definiert. Ein Strompfeil zeigt die positive Richtung des Stromes außerhalb der Spannungsquelle vom Pluspol zum Minuspol an.
- Eine Spannungsquelle wirkt im geschlossenen Stromkreis wie eine Pumpe für Elektronen.
- Es gibt *Leiter*, *Halbleiter* und *Nichtleiter* (Isolierstoffe oder Isolatoren).
- Ein *Potenzial* ist die Spannung eines Punktes gegenüber einem Bezugspunkt.
- Eine Spannung ist eine *Potenzialdifferenz*.

- *Widerstand* ist das Unvermögen eines Leiters, elektrischen Strom fließen zu lassen.
- *Leitfähigkeit* ist das Vermögen eines Leiters, elektrischen Strom fließen zu lassen.
- Je größer der Widerstand ist, umso kleiner ist die Leitfähigkeit und umgekehrt.
- Ein stromdurchflossener Leiter erwärmt sich (Joule'sche Wärme).
- Der Widerstand eines Leiters ist abhängig von dem Material und von der Temperatur des Leiters.

1.1.3 Halbleiter

- Der Widerstand von Metallen nimmt mit steigender Temperatur *zu*.
- Der Widerstand eines Halbleiters nimmt mit steigender Temperatur *ab*.
- Es gibt *Elementhalbleiter* und *Verbindungshalbleiter*.
- Reines Silizium ist wegen der festen Elektronenpaarbindung ein sehr schlechter Leiter.
- Das Entstehen eines Elektron-Loch-Paares wird als *Generation* bezeichnet.
- Ein Elektronenfehlplatz wird als Defektelektron oder *Loch* bezeichnet.
- Ein Loch ist Träger der positiven Elementarladung „$+e$“.
- Füllt ein freies Elektron den Platz eines Loches aus, so spricht man von *Rekombination*.
- Die Leitfähigkeit von Halbleitern nimmt erheblich zu, wenn in den Halbleiterkristall durch Dotierung bestimmte Fremdatome eingebaut werden (*Störstellenleitung*).
- Bei dotierten Halbleitern unterscheidet man zwischen p- und n-Halbleitern. p-Halbleiter entstehen durch Dotieren mit *Akzeptoren*, n-Halbleiter durch Dotieren mit *Donatoren*.
- Die wichtigsten Halbleiter sind Silizium und Germanium.

1.2 Der Aufbau der Materie

Aufgabe 1.1
Wie heißen Stoffe die nur aus einer einzigen Atomart bestehen: Moleküle, Elemente, Ionen, Elektronen oder Neutronen?

Lösung
Elemente

Aufgabe 1.2
Wie nennt man chemisch nicht mehr trennbare Teilchen der Materie: Verbindungen, Moleküle, Elemente, Protonen oder Atome?

Lösung
Atome

Aufgabe 1.3
Wie heißen die Teilchen die sich nur durch chemische Vorgänge, d. h. Zersetzung des Stoffes trennen lassen: Atome, Elemente, Moleküle, Chemische Grundstoffe oder Protonen?

Lösung
Moleküle

Aufgabe 1.4
Welche Aussage über den Aufbau von Atomen ist *richtig*?

- Der Atomkern besteht aus positiven Protonen und negativen Elektronen.
- Die Neutronen sind negativ geladene Teilchen die den Atomkern auf Kreisbahnen (Schalen) umlaufen.
- Die äußerste Elektronenschale wird Valenzschale genannt und die Elektronen auf ihr Valenzelektronen.
- Ein Atom kann maximal 5 Elektronenschalen besitzen, die von innen nach außen mit den Buchstaben K, L, M, N, O bezeichnet werden.
- Bei Atomen ist die Anzahl der Elektronen immer gleich der Anzahl der Protonen.

Lösung
Die äußerste Elektronenschale wird Valenzschale genannt und die Elektronen auf ihr Valenzelektronen.

Aufgabe 1.5
Welche Aussage über den Aufbau von Atomen ist *falsch*?

- Ein Atom besteht aus Protonen und Neutronen im Kern und wird von Elektronen auf Schalen umgeben.
- Die Elektronen auf der äußersten Schale heißen Valenzelektronen.
- Elektronen sind negativ geladene Teilchen und Neutronen sind positiv geladene Teilchen.
- Der Atomkern wird von maximal 7 Elektronenschalen umgeben, die von innen nach außen mit den Buchstaben K, L, M, N, O, P, Q bezeichnet werden.
- Der Atomkern besteht aus Protonen und Neutronen.

Lösung
Elektronen sind negativ geladene Teilchen und Neutronen sind positiv geladene Teilchen.

Aufgabe 1.6
Welche Aussage über den Aufbau von Atomen ist *richtig*?

- Der Atomkern besteht aus positiven Protonen und negativen Elektronen.
- Der Atomkern besteht aus positiven Elektronen und negativen Neutronen.

- Der Atomkern besteht aus negativen Neutronen und positiven Protonen.
- Neutronen sind elektrisch neutrale Teilchen.
- Der Atomkern besteht aus negativen Protonen und positiven Neutronen.

Lösung
Neutronen sind elektrisch neutrale Teilchen.

Aufgabe 1.7
Was entsteht, wenn ein Atom ein Elektron aufnimmt?

- Ein negatives Ion
- Ein Molekül
- Ein Dipol
- Ein positives Ion
- Ein Halbleiter.

Lösung
Ein negatives Ion

Aufgabe 1.8
Unter welchen Umständen gilt ein Atom als chemisch stabil?

- Bei gleicher Anzahl von Elektronen in der Hülle wie Protonen im Kern.
- Wenn die Valenzschale des Atoms mit 4 Valenzelektronen bestückt ist.
- Bei gleicher Anzahl von Neutronen und Protonen im Atomkern.
- Wenn die Valenzschale mit 8 Elektronen voll besetzt ist (einzige Ausnahme Helium mit 2 Valenzelektronen).
- Bei gleicher Anzahl von Neutronen im Kern wie Elektronen in der Hülle.

Lösung
Wenn die Valenzschale mit 8 Elektronen voll besetzt ist (einzige Ausnahme Helium mit 2 Valenzelektronen).

Aufgabe 1.9
Was entsteht, wenn ein Atom ein Elektron abgibt?

- Ein Molekül
- Ein Halbleiter
- Ein negatives Ion
- Eine chemische Verbindung
- Ein positives Ion.

Lösung
Ein positives Ion

1.3 Elektrische Ladung

Aufgabe 1.10

a) Was versteht man unter elektrischer Ladung?
b) Nennen Sie ein Beispiel, wie elektrische Ladung getrennt werden kann.
c) Wie wird ruhende elektrische Ladung genannt?
d) Mit welcher Polaritätsbezeichnung wird ein Elektronenüberschuss bzw. ein Elektronenmangel gekennzeichnet?

Lösung

a) Die elektrische Ladung Q eines Körpers (die Elektrizitätsmenge) ist ein Maß für Überschuss oder Mangel an *ruhenden*, elektrischen Ladungsträgern (z. B. Elektronen).
b) Reibt man einen Glasstab mit Seide, so wird der Glasstab positiv, die Seide negativ geladen. Auf dem Glasstab ist ein Mangel, auf der Seide ein Überschuss von Elektronen. Glasstab und Seide sind elektrisch geladen.
c) Ruhende elektrische Ladung nennt man *statische* Elektrizität. Die Elektrostatik ist die Lehre der ruhenden (mit der Zeit gleichbleibenden, also statischen) Ladungen. Zur Elektrostatik gehören das elektrische Feld, das elektrostatische Potenzial, die Effekte der elektrischen Polarisation bei Stoffen ohne frei bewegliche Ladungsträger und die Vorgänge der Influenz (der Ladungstrennung) in Materie mit freien Ladungsträgern (Leitern).
d) Elektronenüberschuss wird als Minuspol (negative Ladung), Elektronenmangel als Pluspol (positive Ladung) bezeichnet. Diese Bezeichnungsweise ist willkürlich und lediglich historisch bedingt.

Aufgabe 1.11

a) Welche Wirkung hat ein elektrisch geladener Körper in seiner Umgebung auf andere elektrisch geladene Körper?
b) Wie wird die Eigenschaft des Raumes in der Umgebung eines elektrisch geladenen Körpers genannt? Wie kann diese Eigenschaft veranschaulicht und in ihrer Auswirkung beschrieben werden? Verwenden Sie zur Erläuterung den Begriff „Vektorfeld".
c) Welche Kräfte wirken zwischen elektrisch ungleich bzw. gleich geladenen Körpern?

Lösung

a) Ein elektrisch geladener Körper zieht andere elektrisch geladene Körper entweder an oder stößt sie ab. Der Zustand eines Körpers kann durch seine Wirkung auf andere Körper und somit durch seine Ladung Q beschrieben werden.
b) Der Raum um einen elektrisch geladenen Körper wird in einen besonderen Zustand versetzt der dadurch gekennzeichnet ist, dass auf andere elektrisch geladene Körper Kräfte ausgeübt werden. Ein Raum mit besonderen Eigenschaften wird in der Physik als *Feld* bezeichnet. Elektrisch geladene Körper sind also von einem elektrischen Feld umgeben. Die Eigenschaft eines elektrischen Feldes, dass in ihm Kräfte auf gelade-

ne Körper ausgeübt werden, kann durch *Feldlinien* (dies sind Kraftlinien) dargestellt werden. Die *Dichte* von Feldlinien trifft eine Aussage über die lokale Stärke der Kraft (Betrag der Feldstärke) und der durch kleine Pfeile gekennzeichnete *Linienverlauf* über die lokale Richtung der Kraftausübung (Richtung der Feldstärke in einem bestimmten Punkt im Raum). Das elektrische Feld ist ein so genanntes *Vektorfeld*, das durch einen Vektor mit Betrag und Richtung in jedem Raumpunkt festgelegt ist. Sind Betrag und Richtung eines Feldes in einem betrachteten Gebiet konstant, so nennt man das Feld *homogen*, ansonsten *inhomogen*. Homogene Felder haben *gerade* Feldlinien, bei inhomogenen Feldern sind die Feldlinien *gekrümmt*.

c) Ladungen mit unterschiedlichem Vorzeichen ziehen sich an, Ladungen mit gleichem Vorzeichen stoßen einander ab.

Aufgabe 1.12

a) Was ist die Einheit der elektrischen Ladung im SI-System?
b) Welcher Anzahl n von Elektronen entspricht die Ladungsmenge 1 A s?
c) Ein elektrisches Gerät wird oft als „Verbraucher“ bezeichnet. Kann elektrische Ladung verbraucht werden?

Lösung

a) Die Einheit der elektrischen Ladung ist A s (Amperesekunde), abgekürzt mit „C“ entsprechend dem speziellen Einheitennamen „Coulomb“. Kurz: $[Q] = \text{A s} = \text{C}$ (Coulomb).
b) Die Ladungsmenge 1 A s entspricht einem Strom mit der Stärke 1 Ampere, der 1 Sekunde lang fließt. Dabei bewegen sich n Elektronen mit der Elementarladung $e = -1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{A s}$.

$$n = \frac{I \cdot t}{e} = \frac{1\,\text{A} \cdot 1\,\text{s}}{|-1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{A s}|} = \underline{\underline{6{,}2422 \cdot 10^{18}}}$$

c) Ladungen können weder erzeugt noch vernichtet werden. Befindet sich in einem abgeschlossenen (von einer für Materie undurchlässigen Hüllfläche A begrenzten) Raumgebiet mit dem Volumen V eine elektrische Ladung, so bleibt die gesamte Ladung Q innerhalb dieses Raumgebietes konstant. Es gibt keinen physikalischen Vorgang, der die Gesamtladung Q innerhalb von V ändern kann. Dieses experimentell bewiesene Naturgesetz wird *Ladungserhaltungssatz* genannt. Der Satz beruht auf der Unveränderbarkeit der Elementarladung (zeitlich konstant und unabhängig vom Bezugssystem) und darauf, dass sich die Wirkungen von zwei gleich großen Ladungen mit entgegengesetztem Vorzeichen aufheben. Erzeugung oder Vernichtung geladener Teilchen erfolgt immer in gleichen Mengen und mit entgegengesetztem Vorzeichen. Im nichtstationären Fall (bei zeitlich veränderlichen Strömen) kann sich eine Ladungsmenge in einem abgeschlossenen Volumen nur durch Zufluss oder Abfluss von Ladungsträgern durch die Hüllfläche A ändern.

Aus der Bezeichnung „Verbraucher“ darf also nicht geschlossen werden, dass beim Betrieb des Gerätes Ladung verbraucht (im Sinne von vernichtet) wird. Energie kann ebenso wie Ladung weder erzeugt noch vernichtet werden (*Energieerhaltungssatz*), sie kann nur von einer Form in eine andere Form *umgewandelt* werden. Ein Verbraucher ist ein Energiewandler, es wird z. B. elektrische Energie in Wärmeenergie umgewandelt. Statt „Verbraucher“ wir in der Elektrotechnik häufig der Begriff „Last“ verwendet.

1.4 Elektrischer Strom

Aufgabe 1.13
Was ist (im Unterschied zur ruhenden elektrischen Ladung) der elektrische Strom?

Lösung
Elektrischer Strom ist *fließende* elektrische Ladung, er entsteht durch die *Bewegung* elektrischer Ladungsträger. Elektrischer Strom ist die gerichtete Bewegung von Ladungsträgern. In Metallen sind die Ladungsträger Elektronen. In Flüssigkeiten oder Gasen können auch positive oder negative Ionen als Ladungsträger zum Stromfluss beitragen. Ursache für die Bewegung von Ladungen in eine Vorzugsrichtung sind in erster Linie elektrische Felder. Die Bewegung der Ladungsträger wird als *Driftbewegung* bezeichnet. Die mittlere Geschwindigkeit der Ladungsträger in eine Richtung heißt *Driftgeschwindigkeit*.

Aufgabe 1.14
In welche Arten und mit welchen Eigenschaften kann elektrischer Strom eingeteilt werden?

Lösung

- Bewegung geladener Körper durch eine äußere Kraft
  Geladene Körper (z. B. Staubteilchen, Flüssigkeitströpfchen) können nicht durch Einwirken eines elektrischen Feldes sondern durch eine äußere Kraft als Träger von Ladung bewegt und somit Ladung transportiert werden. Diese Art von Strom wird im eigentlichen Sinne als *Konvektionsstrom* bezeichnet. Er ist technisch nicht von Interesse.
- Leitungsstrom
  Fließen bei Vorhandensein eines elektrischen Feldes die Ladungsträger durch einen Leiter, so spricht man von einem *Leitungsstrom* oder *Leiterstrom*. Da Ladungen immer an Materie gebunden sind, mit der Strömung von Ladungsträgern also immer eine Bewegung von Masse (ein Stofftransport) verbunden ist, wird dieser Strom oft ebenfalls als Konvektionsstrom bezeichnet. Man nennt ihn auch *Teilchenstrom*.
- Verschiebungsstrom
  Durch zeitliche Ladungsänderungen von zwei Elektroden, zwischen denen sich ein Nichtleiter befindet, entsteht ein *Verschiebungsstrom*. Es ist ein elektrischer Strom

ohne Bewegung von Masse, er braucht somit auch keinen materiellen Leiter. Dieser Strom entspricht einem sich *zeitlich ändernden elektrischen Feld*, er wird durch die zeitliche Änderung einer elektrischen Feldstärke verursacht. – In einem Dielektrikum zwischen den Elektroden ist der Verschiebungsstrom durch eine Verschiebung von Ladungen in der Elektronenhülle der Atome (*Verschiebungspolarisation*) oder durch eine Ausrichtung bereits vorhandener Dipole (*Orientierungspolarisation*) noch anschaulich vorstellbar. Diese Verlagerung elektrischer Ladungen kann als Fortsetzung des Leitungsstromes in den Verbindungsleitungen der Elektroden betrachtet werden. Im Vakuum, in dem der Verschiebungsstrom ebenfalls existiert, ist dieser nicht mit einer Verlagerung elektrischer Ladungen verknüpft und kann nicht mehr anschaulich gedeutet werden.

- Diffusionsstrom
  Existiert ein örtlicher Konzentrationsunterschied von Ladungsträgern, so kann eine Ladungsbewegung auch ohne elektrisches Feld auftreten. Eine Teilchenbewegung, die durch *Konzentrationsunterschiede* hervorgerufen wird, nennt man *Diffusionsstrom*. Ein solcher Strom tritt z. B. in der Sperrschicht von bipolaren Halbleiterbauelementen (Dioden, Transistoren) auf, da auf beiden Seiten der Grenzschicht sehr starke Konzentrationsunterschiede freier Ladungsträger bestehen. An der Grenzschicht trifft ein Gebiet mit sehr vielen freien negativen Ladungsträgern auf ein Gebiet mit sehr vielen freien positiven Ladungsträgern. Ein Teil der freien Ladungen eines jeden Bereiches wandert dann in den jeweiligen anderen Bereich. Eine höhere Temperatur beschleunigt die Diffusion.
- Feldstrom, Driftstrom
  Den unter dem Einfluss eines elektrischen Feldes fließenden Strom in einem Halbleiter nennt man *Feldstrom* oder *Driftstrom*.
- Raumladungsstrom
  In einem Glaskolben mit Vakuum befinden sich zwei entgegengesetzt geladene Elektroden, zwischen denen sich eine Ansammlung von Elektronen befindet. Durch das elektrische Feld zwischen den Elektroden werden die Elektronen von der Anode angezogen. Dieser Strom stellt einen *Raumladungsstrom* dar. Eine Anwendung ist die Kathodenstrahlröhre (Braun'sche Röhre).

1.5 Nichtleiter, Leiter und Halbleiter

Aufgabe 1.15
In welche drei Gruppen können Stoffe entsprechend ihrer elektrischen Leitfähigkeit eingeteilt werden? Wie sind diese Stoffe aufgebaut, welche Eigenschaften haben sie?

Lösung
Stoffe können bezüglich ihrer Fähigkeit elektrischen Strom zu leiten in Nichtleiter, Leiter und Halbleiter eingeteilt werden.

Nichtleiter werden auch *Isolatoren* oder *Dielektrika* genannt. Bei ihnen sind fast alle Elektronen der Elektronenhülle fest an Atomkerne gebunden. Freie Elektronen zur Bildung fließender Ladung für einen Stromfluss sind nur sehr wenige vorhanden. Öl, Papier und viele Kunststoffe sind Isolatoren. Das Vakuum ist ein idealer Nichtleiter.

Leiter sind vor allem Metalle. Bei Metallen ist die Bindungsenergie der Elektronen der äußeren Elektronenschalen relativ gering, so dass sich diese von ihren Atomen lösen können. Metalle besitzen sehr viele freie Elektronen (ca. 10^{23} je cm^3). Elektronen werden als frei bezeichnet, wenn sie nicht an ein Atom gebunden sind, sich zwischen den Atomen hindurchbewegen und somit zu einem Leitungsstrom beitragen können. Beim Elektronengasmodell besteht das Metall aus einem Gitter positiv geladener Atomrümpfe, zwischen dem sich ein Gas aus frei beweglichen Valenzelektronen befindet. Der Widerstand von Metallen wird mit steigender Temperatur *größer*.

Halbleiter sind Stoffe mit speziellen Eigenschaften des Leitvermögens, ihre Leitfähigkeit liegt zwischen der von Leitern und Nichtleitern. Sie verhalten sich bei niedrigen Temperaturen ähnlich wie Isolatoren. Bei Erwärmung erhöht die zugeführte Energie die Schwingungen der Gitteratome. Lösen sich dabei Elektronen aus ihren Plätzen, so können sie als freie Elektronen zu einem Ladungstransport beitragen, es kann ein Strom fließen. Der Widerstand von Halbleitern wird mit steigender Temperatur *kleiner*. Bei der reinen *Eigenleitung* des Halbleiters befindet sich immer die gleiche Anzahl positiver und negativer Ladungen im Werkstoff. Eine Erhöhung der Leitfähigkeit wird durch das gezielte Einbringen von Fremdatomen (*Dotieren*) in das Kristallgitter eines Halbleiters erreicht (*Fremdleitung*). *Elementhalbleiter* sind Germanium und Silizium. Ein *Verbindungshalbleiter* ist z. B. Galliumarsenid (GaAs).

Aufgabe 1.16
Nennen Sie je zwei Beispiele für einen Isolator, einen elektrischen Leiter und einen Halbleiter.

Lösung
Isolator: Glas, Porzellan
Leiter: Gold, Kupfer
Halbleiter: Germanium, Silizium

1.6 Widerstand und Leitfähigkeit

Aufgabe 1.17
Was versteht man unter dem elektrischen Widerstand, was ist seine Ursache?

Lösung
Durch den elektrischen Widerstand wird die Eigenschaft eines Leiters beschrieben, elektrischen Strom mehr oder weniger gut hindurchzulassen, ihn entweder zu leiten oder einen

Widerstand entgegenzusetzen. Der elektrische Widerstand eines Materialstückes ist ein Maß dafür, wie stark sich das Material einem Stromdurchgang widersetzt. Der Widerstand wird wesentlich von den Materialeigenschaften bestimmt, ist also eine *materialspezifische* Größe. Er hängt von der Anzahl freier Elektronen und von ihrer Beweglichkeit ab.

Die Ursache des elektrischen Widerstandes ist die Reibungskraft auf die Elektronen bei ihrer Bewegung im Metall. Diese Reibungskraft kann durch die Vorstellung erklärt werden, dass die sich bewegenden Elektronen durch die Atomrümpfe abgelenkt und gebremst werden. So ist auch verständlich, warum sich der Widerstand von Metallen mit steigender Temperatur erhöht: Die Wahrscheinlichkeit eines Zusammenstoßes eines fließenden Elektrons mit einem stärker um seine Ruhelage schwingenden Atomrumpf nimmt zu.

Aufgabe 1.18

a) Was versteht man unter Joule'scher Wärme?
b) Wie sind Widerstand und Leitfähigkeit miteinander verknüpft?

Lösung

a) Joule'sche Wärme tritt bei allen stromdurchflossenen Leitern auf. Sie entsteht durch Zusammenstöße fließender Elektronen mit den Atomrümpfen. Die Elektronen geben dabei die ihnen von der Spannungsquelle zugeführte Energie an die Atomrümpfe ab, wodurch sich deren Wärmeschwingungen verstärken und sich das Leitermaterial erwärmt.
b) Der Widerstand ist der Kehrwert der Leitfähigkeit und umgekehrt.

1.7 Elektrische Spannung, Potenzial

Aufgabe 1.19

a) Erläutern Sie die Begriffe „Skalarfeld", „Potenzial" und „Potenzialfeld". Was ist eine „Äquipotenzialfläche" bzw. eine „Äquipotenziallinie"?
b) Welche zwei grundlegenden Arten von Feldern gibt es in der Elektrotechnik?
c) Wie kann sinnbildlich die elektrische Spannung bezeichnet bzw. beschrieben werden?

Lösung

a) Bei einem *Vektorfeld* (ein gerichtetes Feld) wird jedem *Raumpunkt ein Vektor* (ein Feldvektor) zugeordnet (siehe Aufgabe 1.11). Ist die den Raumzustand beschreibende physikalische Größe ein Skalar, so wird jedem *Raumpunkt ein Skalar* (eine Zahl) zugeordnet. Wir sprechen dann von einem *Skalarfeld* (ein nicht gerichtetes Feld). Ein Beispiel für ein Skalarfeld ist die Temperaturverteilung in einem Raum. Dabei wird jedem Raumpunkt durch eine Zahl eine bestimmte Temperatur zugeordnet. Die Zahl, die in einem Skalarfeld einem Raumpunkt zugeordnet ist, nennt man *Potenzial*. Ein *Potenzialfeld* liegt vor, wenn jedem Raumpunkt eines Vektorfeldes ein Potenzial zugeordnet werden kann. Ein Vektorfeld ist dann durch das Potenzial in jedem Punkt des Feldes eindeutig bestimmt.

Alle Punkte in einem räumlichen Skalarfeld, denen die gleiche Zahl zugeordnet ist (die das gleiche Potenzial haben), bilden eine *Äquipotenzialfläche*. Ein Skalarfeld wird durch eine Schar von Äquipotenzialflächen beschrieben bzw. grafisch dargestellt. *Äquipotenziallinien* ergeben sich als Schnittkurven von festgelegten Ebenen mit Äquipotenzialflächen. Ein Beispiel für Äquipotenziallinien sind ebene Kreise um eine Punktladung, welche Schnittlinien mit den Kugeloberflächen darstellen, die wiederum Äquipotenzialflächen einer sich im Mittelpunkt der Kugeln befindlichen Punktladung sind.

b) Felder in der Elektrotechnik sind *elektrische* und *magnetische* Felder.

c) Die elektrische Spannung kann sinnbildlich als der „Drang" oder „Druck" bezeichnet werden, mit dem sich ein Ladungsträgerunterschied (z. B. eine Ansammlung von Elektronen gegenüber einem Elektronenmangel) ausgleichen will. Die elektrische Spannung ist ein Maß für das Ausgleichsbestreben unterschiedlicher elektrischer Ladungen.

Aufgabe 1.20

a) Geben Sie eine in der Physik übliche Definition des elektrischen Potenzials und der elektrischen Spannung mit Hilfe des homogenen elektrischen Feldes an.

b) Was versteht man in einer elektronischen Schaltung unter „Masse"?

Lösung

a) In einem (statischen) elektrischen Feld werden auf Ladungen Kräfte ausgeübt. Die Kraft auf eine Ladung ist direkt proportional zum Betrag der Ladung Q und direkt proportional zur Stärke des Feldes (Feldstärke) E. Für ein homogenes elektrisches Feld gilt: $F = Q \cdot E$.

Wird eine Ladung Q im homogenen elektrischen Feld vom Punkt P_1 zum Punkt P_2 um die Verbindungsstrecke s zwischen den Punkten verschoben, so muss Kraft aufgewendet und somit mechanische Arbeit W_{12} verrichtet werden. Entsprechend „Arbeit = Kraft mal Weg" gilt: $W_{12} = F \cdot s = Q \cdot E \cdot s$. Nach der Verschiebung hat die Ladung die an ihr verrichtete Arbeit in Form von *potenzieller Energie* gespeichert. War das Potenzial φ der Ladung vor der Verschiebung in einem Punkt P_0 gleich null (die Ladung hatte keine Arbeitsfähigkeit), so ist die potenzielle Energie der Ladung nach der Verschiebung zu P_1: $W_1 = \varphi_1 \cdot Q$. Das elektrische Potenzial der Ladung (ihre Fähigkeit Arbeit zu verrichten) ist im Punkt P_1 in Bezug auf P_0: $\varphi_1 = \frac{W_1}{Q}$. Wird die Ladung unter Aufwendung von Energie um eine weitere Wegstrecke zu einem Punkt P_2 verschoben, so ist ihre potenzielle Energie gegenüber P_0: $W_2 = \varphi_2 \cdot Q$. Das Potenzial der Ladung ist jetzt im Punkt P_2 gegenüber dem Punkt P_0: $\varphi_2 = \frac{W_2}{Q}$.

Die Differenz der beiden potenziellen Energien ist: $\Delta W = W_2 - W_1 = (\varphi_2 - \varphi_1) \cdot Q$. Wird die Energiedifferenz ΔW auf die zu verschiebende Ladung bezogen, so wird die Differenz der Potenziale unabhängig von der Ladung.

Das Verhältnis $U = \Delta W/Q$ wird als elektrische Spannung U bezeichnet: $U_{21} = \varphi_2 - \varphi_1$.
In der Umgebung einer elektrischen Ladung kann jedem Raumpunkt ein elektrisches Potenzial zugeordnet werden.
Die elektrische Spannung zwischen zwei Punkten im elektrischen Feld ist gleich der Differenz der elektrischen Potenziale dieser Punkte.
Das elektrische Potenzial ist ein Maß für die potenzielle Energie (für die Arbeitsfähigkeit, die Leistungsfähigkeit) einer Ladung im elektrischen Feld. Als Potenzialdifferenz ist die elektrische Spannung ein Maß für die Arbeit, die eine Ladung im Feld verrichten kann.
Eine elektrische Spannung besteht immer zwischen zwei Punkten.
Sowohl die Spannung als auch das Potenzial haben die Einheit Volt.

b) Zu einem Potenzial gehört immer ein *Bezugspunkt* (ein *Nullniveau*) mit dem Potenzial $\varphi = 0\,\text{V}$. In der Elektronik wird das *Bezugspotenzial* als *Massepotenzial* bezeichnet, ihm wird meist das elektrische Potenzial der Erdoberfläche zugeordnet. In elektronischen Schaltungen ist die *Masse* der Bezugspunkt (das Bezugspotenzial), auf das sich alle Spannungen anderer Punkte in der Schaltung beziehen. Die Masse wird in einem Schaltplan mit dem *Schaltzeichen* »⊥« versehen.

Aufgabe 1.21

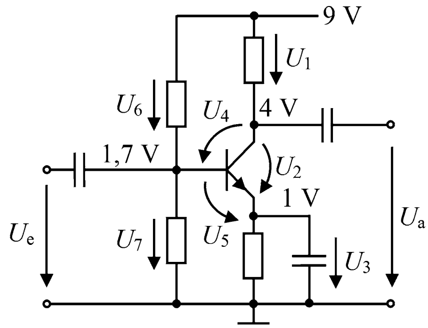
a) Was versteht man unter einem Spannungsabfall?
b) Was ist eine passive Spannung?

Lösung

a) Wird ein Leiter von einem Strom durchflossen, so besteht zwischen den Enden des Leiters eine Potenzialdifferenz. Man sagt, an dem Leiter fällt eine Spannung ab. Dieser *Spannungsabfall* entspricht dem *Potenzialgefälle* vom Anfang bis zum Ende des Leiters (des Verbrauchers). Der Seite des Leiters mit positiver Ladung (bzw. Elektronenmangel), also dem Pluspol einer angeschlossenen Spannungsquelle, wird ein hohes Potenzial (hohes Arbeitsvermögen) zugeordnet. Die Seite mit negativer Ladung, also dem Minuspol der Spannungsquelle, kann als Referenzpunkt mit dem Potenzial null festgelegt werden. Beim Durchlaufen des Leiters verlieren Ladungsträger immer mehr an Energie, die in Wärmeenergie umgesetzt wird.
Die Fähigkeit Arbeit zu verrichten (das Potenzial) nimmt entlang des Leiters immer mehr ab.
Durch diese Potenzialabnahme entsteht ein Spannungsunterschied zwischen zwei beliebigen Punkten entlang der Leiterstrecke. Üblicherweise wird die Spannung zwischen Anfang und Ende des Leiters als Spannungsabfall am Verbraucher bezeichnet.

b) Der Spannungsabfall ist eine *passive Spannung*. Eine passive Spannung ist nicht in der Lage einen Strom hervorzurufen, sie entsteht erst durch die Wirkung eines Stromes. Einen Stromfluss bewirkt die Spannung einer (technischen) Spannungsquelle,

Abb. 1.1 Transistorverstärker für Wechselspannungen



welche als *aktive Spannung* bezeichnet wird. Diese Spannung entsteht durch die innere Wirkungsweise der Quelle und ist auch ohne Strom vorhanden, sie kann aber einen Stromfluss herbeiführen.

Aufgabe 1.22
In den Schaltplänen elektronischer Geräte werden an bestimmten Punkten der Schaltung auf Masse (Gehäuse, Chassis) bezogene Gleichspannungen als Potenzial angegeben. Der Masse ist das Potenzial null zugeordnet. Die Spannungen können so schnell gemessen und die Funktionsweise des Gerätes überprüft werden. Berechnen Sie für den Transistorverstärker in Abb. 1.1 aus den angegebenen Potenzialen die Spannungen U_1 bis U_7.

Lösung
$U_1 = 9\,\mathrm{V} - 4\,\mathrm{V} = \underline{\underline{5\,\mathrm{V}}}$; $U_2 = 4\,\mathrm{V} - 1\,\mathrm{V} = \underline{\underline{3\,\mathrm{V}}}$; $U_3 = \underline{\underline{1\,\mathrm{V}}}$; $U_4 = 4\,\mathrm{V} - 1{,}7\,\mathrm{V} = \underline{\underline{2{,}3\,\mathrm{V}}}$
$U_5 = 1{,}7\,\mathrm{V} - 1\,\mathrm{V} = 0{,}7\,\mathrm{V}$; $U_6 = 9\,\mathrm{V} - 1{,}7\,\mathrm{V} = \underline{\underline{7{,}3\,\mathrm{V}}}$; $U_7 = \underline{\underline{1{,}7\,\mathrm{V}}}$

1.8 Halbleiter

Aufgabe 1.23
Die Skizze in Abb. 1.2 zeigt symbolisch die unbeweglichen Atomrümpfe der Fremdatome als Vierecke und die beweglichen Ladungsträger als kleine Kreise in einem dotierten Halbleiterkristall.

a) Wie nennt man die Fremdatome (positiv geladenen Atomrümpfe)?
b) Wie nennt man die negativen beweglichen Ladungsträger?
c) Ist hier ein p-Halbleiter oder ein n-Halbleiter dargestellt?

Lösung
a) Die positiv geladenen Atomrümpfe haben Elektronen abgegeben, man nennt sie Donatoren.
b) Die negativen Ladungsträger sind Elektronen.
c) Es handelt sich um einen n-Halbleiter.

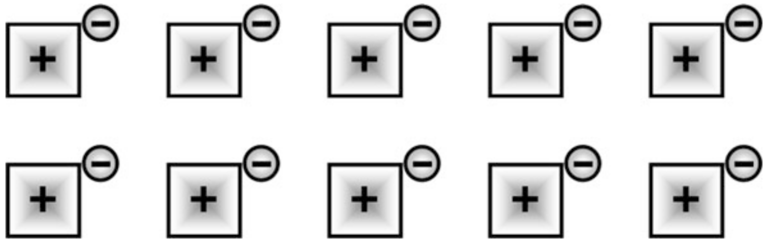


Abb. 1.2 Atomrümpfe und bewegliche Ladungsträger

Aufgabe 1.24
Wie bezeichnet man den Vorgang, wenn in einem Halbleiter ein Elektron den Platz eines Defektelektrons einnimmt?

Lösung
Der Vorgang wird als *Rekombination* bezeichnet.

Aufgabe 1.25
Wie verhält sich der Widerstand eines Halbleiters und eines metallischen Leiters mit steigender Temperatur? Erläutern Sie jeweils dieses Verhalten.

Lösung
Der Widerstand eines Halbleiters nimmt mit steigender Temperatur stark *ab*, da sich durch Aufbrechen von Atombindungen die Anzahl freier Elektronen mit steigender Temperatur erhöht. Bei einem Metall nimmt der Widerstand mit steigender Temperatur *zu*, da die freien Elektronen öfter mit den stärker um ihre Ruhelage schwingenden Atomrümpfen zusammenstoßen und gebremst werden.

Aufgabe 1.26
Wie wird der Vorgang bezeichnet, wenn in einen Halbleiterkristall gezielt Fremdatome eingebaut werden? Wie wird durch diesen Vorgang die Leitfähigkeit des Halbleiters beeinflusst? Welche Halbleiter werden je nach Art der Fremdatome unterschieden?

Lösung
Der Vorgang wird *Dotierung* genannt. Die Leitfähigkeit des Halbleiters nimmt durch die Dotierung erheblich zu. Je nach eingebauten Fremdatomen herrscht im dotierten Halbleiter ein Löcher- oder ein Elektronenüberschuss vor und es liegt ein p- oder ein n-Halbleiter vor.

2 Der unverzweigte Gleichstromkreis

Zusammenfassung

Es folgen Definitionen für Größen im unverweigten Gleichstromkreis mit ihren Einheiten und Formelzeichen: Ampere, Volt, Ohm, Ladungsmenge, Arbeit. Das ohmsche Gesetz mit seinen verschiedenen Umstellungen der Formel ergibt einfache Berechnungen von Größen im Grundstromkreis. Es wird anhand von Rechnungen gezeigt wie wichtig es ist, die Festlegungen von Erzeuger- und Verbraucherzählpfeilsystem zu beachten. Die Bestimmung elektrischer Arbeit und Leistung wird an Gebrauchsgegenständen wie Lampen oder elektrischen Geräten und an elektronischen Bauelementen wie Widerständen durchgeführt. Berechnungen des Wirkungsgrades im Gleich- und Wechselstromkreis und einfachen elektronischen Schaltungen zeigen, wie groß die Wirksamkeit bei der Umwandlung von Energie von einer Form in eine andere Form sein kann.

2.1 Grundwissen – kurz und bündig

2.1.1 Größen im Gleichstromkreis

- Das Einheitenzeichen für Ampere (Stromstärke) ist „A“, das Formelzeichen ist „I“.
- Das Einheitenzeichen für Volt (Spannung) ist „V“, das Formelzeichen ist „U“.
- Das Einheitenzeichen für Ohm (Widerstand) ist „Ω“, das Formelzeichen ist „R“.
- Das Einheitenzeichen für die Ladungsmenge ist „C“ (Coulomb), das Formelzeichen ist „Q“.
- Das Einheitenzeichen für die Arbeit ist „J“ (Joule), das Formelzeichen ist „W“.

L. Stiny, *Aufgabensammlung zur Elektrotechnik und Elektronik*,
DOI 10.1007/978-3-658-14381-7_2

2.1.2 Wichtige Formeln

$I = \frac{Q}{t}$; $U = \frac{W}{Q}$; $R = \frac{U}{I}$; $G = \frac{1}{R}$; $W = U \cdot I \cdot t$; $P = U \cdot I$; $\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}}$; $R = \rho \cdot \frac{l}{A}$; $S = \frac{I}{A}$; $E = \frac{U}{l} = \frac{F}{Q}$

2.2 Die Größe für den elektrischen Strom

Aufgabe 2.1

a) Wie viel Elektronen (Anzahl n) passieren in fünf Sekunden den kreisförmigen Querschnitt eines Kupferdrahtes, der von einem Gleichstrom $I = 2\,\text{A}$ durchflossen wird?
b) Welche Strömungsgeschwindigkeit v haben die Elektronen in diesem Draht, wenn der Drahtdurchmesser 0,6 mm beträgt und in Kupfer $8{,}6 \cdot 10^{22}$ freie Elektronen je cm^3 angenommen werden?

Gegeben: Elementarladung $e = -1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{C}$.

Lösung

a)

$$Q = I \cdot t; \quad n = \frac{Q}{e} = \frac{I \cdot t}{e}; \quad n = \frac{2\,\text{A} \cdot 5\,\text{s}}{|-1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{A s}|} = \underline{\underline{6{,}24 \cdot 10^{19}}}$$

b) $1\,\text{cm}^3 \mathrel{\hat{=}} 8{,}6 \cdot 10^{22}$ freie Elektronen
$x\,\text{cm}^3 \mathrel{\hat{=}} 6{,}24 \cdot 10^{19}$ freie Elektronen $\Rightarrow x = \frac{6{,}24 \cdot 10^{19}}{8{,}6 \cdot 10^{22}} = 7{,}3 \cdot 10^{-4}$
Die $7{,}3 \cdot 10^{-4}\,\text{cm}^3$ entsprechen dem Volumen V des Kupferdrahtes, welches sich aus Querschnittsfläche (Kreisfläche) mal Länge berechnet.

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot l \Rightarrow l = \frac{V}{r^2 \cdot \pi} = \frac{7{,}3 \cdot 10^{-4}\,\text{cm}^3}{0{,}3^2\,\text{mm}^2 \cdot \pi}; \quad l = \frac{7{,}3 \cdot 10^{-1}\,\text{mm}^3}{0{,}3^2\,\text{mm}^2 \cdot \pi} = 2{,}6\,\text{mm}$$

Die Geschwindigkeit v ist: $v = \frac{l}{t} = \frac{2{,}6\,\text{mm}}{5\,\text{s}} = \underline{\underline{0{,}5\,\frac{\text{mm}}{\text{s}}}}$

Aufgabe 2.2

In dem Wolfram-Glühfaden einer Glühlampe mit 40 W, 230 V fließt ein Gleichstrom von $I = 174\,\text{mA}$.

a) Welche Ladungsmenge Q fließt in 30 Minuten durch den Glühfaden?
b) Mit welcher Geschwindigkeit v bewegen sich die Elektronen in dem Glühfaden? Die Elektronendichte in dem Wolframdraht mit dem Durchmesser $d = 24{,}5\,\mu\text{m}$ beträgt

$$n_W = 6{,}28 \cdot 10^{22}\,\frac{\text{Elektronen}}{\text{cm}^3}.$$

Lösung

a) Bei Gleichstrom gilt $Q = I \cdot t$; $Q = 0{,}174\,\text{A} \cdot 30 \cdot 60\,\text{s} = \underline{\underline{313{,}2\,\text{C}}}$

b) Es wird ein Volumenelement des Wolframdrahtes $V = A \cdot l$ mit der Querschnittsfläche A und der Länge l betrachtet. In diesem Volumenelement befindet sich die Ladungsmenge

$$Q = n_\text{W} \cdot e \cdot A \cdot l \text{ mit } e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{A s (Betrag der Elementarladung).}$$

Mit $I = \frac{Q}{t}$ erhält man:

$$I = \frac{n_\text{W} \cdot e \cdot A \cdot l}{t} = n_\text{W} \cdot e \cdot A \cdot v \text{ mit } v = \frac{l}{t} \text{ (Geschwindigkeit = Weg : Zeit).}$$

Nach v aufgelöst:

$$\begin{aligned} v &= \frac{I}{n_\text{W} \cdot e \cdot A} \\ &= \frac{0{,}174\,\text{A}}{6{,}28 \cdot 10^{22} \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100\,\frac{1}{\text{m}^3} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{A s} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 24{,}5^2 \cdot (10^{-6})^2\,\text{m}^2} \\ v &= \frac{0{,}174}{4742{,}9 \cdot 10^{22} \cdot 10^6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-12}}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 3{,}67 \cdot 10^{-2}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}; \quad \underline{\underline{v = 3{,}67\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}}} \end{aligned}$$

Aufgabe 2.3

Wie viel Elektronen (Anzahl n) sind an einem Stromimpuls mit der Dauer $t = 5\,\text{ns}$ und der Stromstärke $I = 10\,\mu\text{A}$ durch einen metallischen Draht beteiligt?

Lösung

Die Ladungsträger im Metall sind Elektronen.

Ein Elektron hat die Elementarladung $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{C}$.

Die Gesamtladung Q wird durch n Elektronen transportiert: $Q = n \cdot e$ (Gl. 1)

Der Strom ist konstant, es gilt: $Q = I \cdot t$ (Gl. 2)

Gleichsetzen und nach n auflösen gibt:

$$n = \frac{I \cdot t}{e}; \quad n = \frac{10^{-5}\,\text{A} \cdot 5 \cdot 10^{-9}\,\text{s}}{|-1{,}6 \cdot 10^{19}\,\text{A s}|} = 3{,}125 \cdot 10^5 = \underline{\underline{312.500}}$$

Damit die Anzahl positiv ist, musste der Betrag von e eingesetzt werden.

Aufgabe 2.4

Das Diagramm in Abb. 2.1 zeigt das Entladen einer Batterie (Batterieladung in Abhängigkeit der Zeit). Gesucht ist der Stromverlauf $I(t)$.

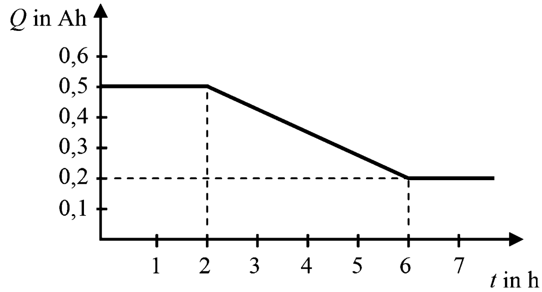


Abb. 2.1 Entladekurve einer Batterie

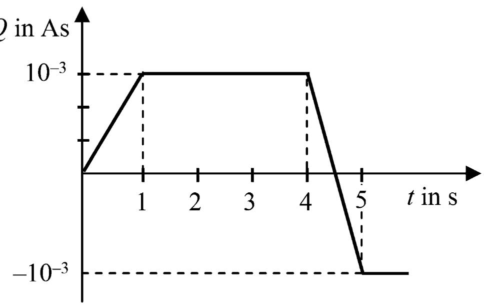


Abb. 2.2 Zeitverlauf der Ladungsverschiebung

Lösung

$I(t) = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$

$0 \le t < 2\,\text{h}$: Die Ladung bleibt konstant, $\underline{\underline{I(t) = 0}}$

$2\,\text{h} \le t \le 6\,\text{h}$: $I(t) = \frac{0{,}5\,\text{A h} - 0{,}2\,\text{A h}}{6\,\text{h} - 2\,\text{h}} = \underline{\underline{0{,}075\,\text{A}}}$

$t > 6\,\text{h}$: Die Ladung bleibt konstant, $\underline{\underline{I(t) = 0}}$

Aufgabe 2.5

Ein Ladungsspeicher wird nach folgender Funktion aufgeladen: $Q(t) = 1\,\text{A s}\cdot\left(1 - \text{e}^{-\frac{t}{2\,\text{s}}}\right)$

Gesucht: Stromverlauf $I(t)$, $I(t = 0\,\text{s})$, $I(t \to \infty)$

Lösung

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}; \quad \underline{\underline{I(t) = 0{,}5\,\text{A} \cdot \text{e}^{-\frac{t}{2\,\text{s}}}}}; \underline{\underline{I(0) = 0{,}5\,\text{A}}}; \quad \underline{\underline{I(\infty) = 0}}$$

Aufgabe 2.6

Durch den Querschnitt eines Leiters wird elektrische Ladung mit dem Zeitverlauf nach Abb. 2.2 verschoben. Berechnen Sie die Stromstärken I_1, I_2, I_3 in den Zeitabschnitten 0 bis 1 s, 1 s bis 4 s und 4 s bis 5 s. Zeichnen Sie den zeitlichen Verlauf der Stromstärke.

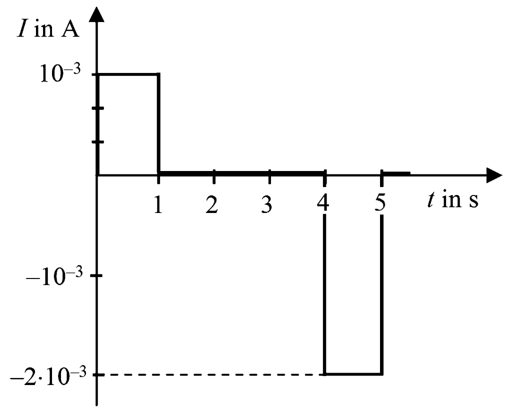


Abb. 2.3 Zeitlicher Verlauf der Stromstärke

Lösung

0 bis 1 s: $I_1 = \frac{10^{-3}\,\mathrm{A\,s}}{1\,\mathrm{s}} = \underline{\underline{1\,\mathrm{mA}}}$
1 s bis 4 s: $\underline{\underline{I_2 = 0\,\mathrm{A}}}$
4 s bis 5 s: $I_3 = -2 \cdot \frac{10^{-3}\,\mathrm{A\,s}}{1\,\mathrm{s}} = \underline{\underline{-2\,\mathrm{mA}}}$

Den zeitlichen Verlauf der Stromstärke zeigt Abb. 2.3.

Aufgabe 2.7

Gegeben ist ein Draht mit rechteckigem Querschnitt der Länge $l = 10\,\mathrm{m}$, der Höhe $h = 1\,\mathrm{mm}$ und der Breite $b = 5\,\mathrm{mm}$.

Durch den Draht fließt ein zeitlich konstanter Strom mit der Stromdichte $S = 200\,\frac{\mathrm{mA}}{\mathrm{mm}^2}$.

a) Wie groß ist der Strom I durch den Draht?
b) Wie groß ist die Ladungsmenge Q, die in einer Sekunde durch den Drahtquerschnitt dringt?
c) Wie viel Elektronen (Anzahl n) fließen in einer Sekunde durch den Drahtquerschnitt?

Lösung

a) Die Querschnittsfläche ist $A = h \cdot b = 5\,\mathrm{mm}^2$.
$S = \frac{dI(A)}{dA}$; der Strom I ist keine Funktion von A, somit gilt: $S = \frac{I}{A}$ bzw. $I = S \cdot A$
$I = 200\,\mathrm{mA/mm^2} \cdot 5\,\mathrm{mm}^2 = 1000\,\mathrm{mA} = \underline{\underline{1\,\mathrm{A}}}$
b) $Q = I \cdot t = 1\,\mathrm{A} \cdot 1\,\mathrm{s} = 1\,\mathrm{A\,s} = \underline{\underline{1\,\mathrm{C}}}$
c) $Q = n \cdot e$; $n = \frac{Q}{e}$; $n = \frac{1\,\mathrm{C}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}} = \underline{\underline{6{,}25 \cdot 10^{18}}}$

2.3 Die Größe für die elektrische Spannung

Aufgabe 2.8
Wie lautet die Einheit der elektrischen Spannung, wenn sie nicht durch das Einheitenzeichen „V“ sondern ausschließlich durch SI-Basiseinheiten ausgedrückt werden soll?

Lösung

$$[U] = \frac{[W]}{[Q]} = \frac{\frac{\mathrm{kg \cdot m^2}}{\mathrm{s^2}}}{\mathrm{A \cdot s}} = \underline{\underline{\frac{\mathrm{kg \cdot m^2}}{\mathrm{A \cdot s^3}}}}$$

Aufgabe 2.9
Wie groß ist die Ladungsmenge Q die durch ein Leiterstück fließt, wenn an dessen Enden ein Spannungsabfall von 5 V gemessen wird und durch den Ladungsfluss eine Wärmeenergie von 0,8 Ws freigesetzt wird?

Lösung

$$Q = \frac{W}{U} = \frac{0{,}8\,\mathrm{Ws}}{5\,\mathrm{V}} = \underline{\underline{0{,}16\,\mathrm{A\,s}}}$$

Aufgabe 2.10
Die Potenziale von drei Punkten sind:

$$P_1\colon\ \varphi_1 = 400\,\mathrm{V}, \quad P_2\colon\ \varphi_2 = 300\,\mathrm{V}, \quad P_3\colon\ \varphi_3 = -50\,\mathrm{V}.$$

Wie groß ist der Potenzialunterschied bzw. die Spannung U_{12} zwischen den Punkten P_1 und P_2? Wie groß ist die Spannung U_{13} zwischen den Punkten P_1 und P_3?

Lösung

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = 400\,\mathrm{V} - 300\,\mathrm{V} = \underline{\underline{100\,\mathrm{V}}}$$
$$U_{13} = \varphi_1 - \varphi_3 = 400\,\mathrm{V} - (-50\,\mathrm{V}) = \underline{\underline{450\,\mathrm{V}}}$$

Aufgabe 2.11
Eine Ladung von $Q = 1\,\mathrm{mC}$ wird vom Ort 1 zum Ort 2 transportiert. Der Arbeitsaufwand beim Trennen der elektrischen Ladung ist $W_{12} = -1\,\mathrm{J}$.

a) Welche Spannung U_{12} wird zwischen den Punkten 1 und 2 gemessen?
b) Welche Leistung P war für den Trennvorgang erforderlich, wenn dieser 10 µs gedauert hat?
c) Die potenzielle Energie W_1 am Ort 1 beträgt 3,5 J. Wie groß ist die potenzielle Energie W_2 am Ort 2?

Lösung

a) Die elektrische Spannung ist $U_{12} = \dfrac{\Delta W}{Q} = \dfrac{W_1 - W_2}{Q} = \dfrac{W_{12}}{Q}$.

$$U_{12} = \frac{-1\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{mC}} = \frac{-1\,\mathrm{Ws}}{1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A\,s}} = \underline{\underline{-1\,\mathrm{kV}}}$$

Das Minuszeichen bedeutet, dass das Potenzial am Ort 2 positiv gegenüber dem Potenzial am Ort 1 ist. Der Zählpfeil der Spannung zeigt also vom Ort 2 zum Ort 1.

b) Bei Gleichstrom ist $P = U \cdot I$. Mit $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ erhält man:

$$P = U \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -1\,\mathrm{kV} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A\,s}}{10^{-5}\,\mathrm{s}} = \underline{\underline{-100\,\mathrm{kW}}}$$

$$\text{Alternativ: } P = \frac{W}{t} = \frac{-1\,\mathrm{Ws}}{10^{-5}\,\mathrm{s}} = \underline{\underline{-100\,\mathrm{kW}}}$$

Das Minuszeichen bedeutet, dass die Leistung dem System zugeführt wird.

c) $W_{12} = W_1 - W_2 \Rightarrow W_2 = W_1 - W_{12}$; $W_2 = 3{,}5\,\mathrm{J} - (-1\,\mathrm{J}) = \underline{\underline{4{,}5\,\mathrm{J}}}$

2.4 Das Ohm'sche Gesetz

Aufgabe 2.12

Welchen Wert hat ein ohmscher Widerstand, wenn am Widerstand eine Spannung von $U = 0{,}5\,\mathrm{V}$ liegt und durch ihn ein Strom von $I = 2\,\mathrm{A}$ fließt?

Lösung

Durch Anwendung des ohmschen Gesetzes erhält man $R = \frac{U}{I} = \frac{0{,}5\,\mathrm{V}}{2\,\mathrm{A}} = \underline{\underline{0{,}25\,\Omega}}$.

Aufgabe 2.13

Welche Spannung liegt an einem Widerstand der Größe $R = 50\,\mathrm{k}\Omega$, wenn er von dem Strom $I = 20\,\mathrm{mA}$ durchflossen wird?

Lösung

Das ohmsche Gesetz ergibt $U = R \cdot I = 50.000\,\Omega \cdot 0{,}02\,\mathrm{A} = \underline{\underline{1000\,\mathrm{V}}}$.

Aufgabe 2.14

Bei Gleichströmen ab 40 mA besteht für den Menschen Lebensgefahr. Welcher Spannung gegen Erde entspricht dieser Strom, wenn der Widerstand des menschlichen Körpers 2500 Ω beträgt?

Lösung

Nach dem ohmschen Gesetz ist $U = R \cdot I = 2500\,\Omega \cdot 0{,}04\,\mathrm{A}$; $\underline{\underline{U = 100\,\mathrm{V}}}$

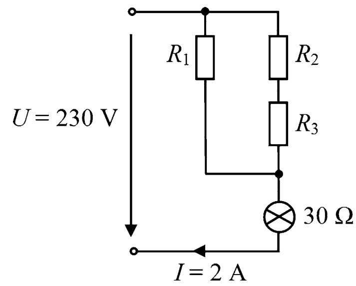


Abb. 2.4 Schaltung mit Widerständen und Glühlampe

Aufgabe 2.15

Wie groß darf der Strom durch einen Widerstand $R = 270\,\Omega$ höchstens sein, damit die an ihm liegende Spannung den Wert $U = 20\,\text{V}$ nicht überschreitet?

Lösung

Mit dem ohmschen Gesetz erhält man $I = \frac{U}{R} = \frac{20\,\text{V}}{270\,\Omega} = 0{,}074\,\text{A}$; $\underline{\underline{I = 74\,\text{mA}}}$

Aufgabe 2.16

Eine Spannungsversorgung $U = 230\,\text{V}$ ist mit einer Sicherung von 6 Ampere abgesichert. Welchen Widerstand müssen Geräte mindestens aufweisen, die an diese Spannungsversorgung angeschlossen werden?

Lösung

$$R = \frac{U}{I} = \frac{230\,\text{V}}{6\,\text{A}} = \underline{\underline{38{,}3\,\Omega}}$$

Die Geräte müssen mindestens einen Widerstand von 38,3 Ω haben.

Aufgabe 2.17

Gegeben ist in Abb. 2.4 eine Schaltung zur Versorgung einer Glühlampe.

Bekannt sind die Werte $R_1 = 470\,\Omega$, $R_2 = 68\,\Omega$, Lampenwiderstand $= 30\,\Omega$.

Welchen Wert muss R_3 haben, damit der Lampenstrom 2 A beträgt?

Lösung

$$I = \frac{U}{R_{\text{ges}}} = \frac{230\,\text{V}}{R_{\text{ges}}} = 2\,\text{A} \Rightarrow R_{\text{ges}} = 30\,\Omega + R_1 \parallel (R_2 + R_3) \text{ muss } 115\Omega \text{ sein.}$$

$$R_1 \parallel (R_2 + R_3) \text{ muss also } 85\Omega \text{ sein.} \Rightarrow \frac{470\,\Omega \cdot (68\,\Omega + R_3)}{470\,\Omega + 68\,\Omega + R_3} = 85\,\Omega \Rightarrow \underline{\underline{R_3 = 35{,}8\,\Omega}}$$

Alternative Lösung

Der Widerstand der Glühlampe wird mit R_4, die daran abfallende Spannung mit U_{R4} bezeichnet.

$$U_{\text{R4}} = 30\,\Omega \cdot 2\,\text{A} = 60\,\text{V} \Rightarrow \text{Spannung an } R_1\text{: } U_{\text{R1}} = 230\,\text{V} - 60\,\text{V} = 170\,\text{V}$$

Strom durch R_1: $I_{\mathrm{R1}} = \frac{170\,\mathrm{V}}{470\,\Omega} = 0{,}362\,\mathrm{A}$
Strom durch die Reihenschaltung von R_2, R_3: $I_{\mathrm{R23}} = 2\,\mathrm{A} - 0{,}362\,\mathrm{A} = 1{,}638\,\mathrm{A}$
Spannung an R_2: $U_{\mathrm{R2}} = 1{,}638\,\mathrm{A} \cdot 68\,\Omega = 111{,}4\,\mathrm{V}$
Spannung an R_3: $U_{\mathrm{R3}} = 170\,\mathrm{V} - 111{,}4\,\mathrm{V} = 58{,}6\,\mathrm{V}$

$$R_3 = \frac{U_{\mathrm{R3}}}{I_{\mathrm{R23}}} = \frac{58{,}6\,\mathrm{V}}{1{,}638\,\mathrm{A}} = \underline{\underline{35{,}8\,\Omega}}$$

2.5 Erzeuger- und Verbraucher- Zählpfeilsystem

Aufgabe 2.18
Bei den Widerständen und Spannungsquellen in Abb. 2.5 sind Zählpfeile für Strom und Spannung angegeben. Jedem Bauelement kann eine Wirkleistung zugeordnet werden. Wie lautet jeweils die Formel zur Berechnung dieser Wirkleistung? Was bedeutet es, wenn die Wirkleistung positiv bzw. negativ ist?

Lösung
Bei dem Widerstand links sind die Zählpfeile für Strom und Spannung gleich gerichtet. Die Wirkleistung berechnet sich nach: $P = U \cdot I$. Beim Widerstand rechts daneben sind die Zählpfeile für Strom und Spannung entgegengesetzt gerichtet. Die Wirkleistung ist: $P = -U \cdot I$.

Bei der ersten Spannungsquelle sind die Zählpfeile für Strom und Spannung gleich gerichtet. Die Wirkleistung ist: $P = U_{\mathrm{q}} \cdot I$. Bei der Spannungsquelle ganz rechts sind die Zählpfeile für Strom und Spannung entgegengesetzt gerichtet. Die Wirkleistung ist: $P = -U_{\mathrm{q}} \cdot I$.

Haben die Zählpfeile für Spannung und Strom an einem Bauelement die gleiche Richtung, so ist die Wirkleistung positiv ($P > 0$), andernfalls ist sie negativ ($P < 0$).

Ist $P > 0$, so bedeutet dies bei einem ohmschen Widerstand (der ein Verbraucher ist) einen „Leistungsverbrauch“, im Widerstand wird elektrische Energie in Wärme umgewandelt. Deshalb wird der ohmsche Widerstand als Wirkwiderstand bezeichnet (Wirkung = Wärmeentwicklung).

Ist bei einer Spannungsquelle $P > 0$, so nimmt sie Leistung auf. Dies kann geschehen, wenn in eine Spannungsquelle z. B. durch eine andere, parallel geschaltete Spannungsquelle ein Strom (bzw. Energie) eingespeist wird. Auch dann wird elektrische Energie in Wärme umgewandelt, die in diesem Fall verloren ist (Entstehung von Verlustwärme in

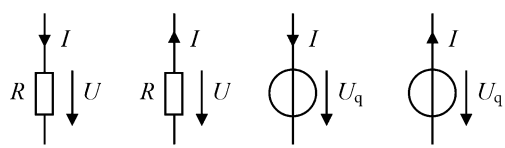


Abb. 2.5 Widerstände und Spannungsquellen mit Zählpfeilen

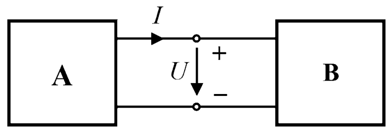


Abb. 2.6 Zwei verbundene Zweipole

der Spannungsquelle, in die eingespeist wird). Der Fall $P > 0$ kann aber auch dann auftreten, wenn ein Akkumulator aufgeladen wird, sich die Spannungsquelle also in einem Ladezustand befindet.

Der Fall $P < 0$ würde bei einem ohmschen Widerstand bedeuten, dass Wirkleistung von diesem Verbraucher bereitgestellt (abgegeben) wird. Da dies ein ohmscher Widerstand nicht kann, müssen beim ohmschen Widerstand die Zählpfeile für Strom und Spannung die gleiche Richtung besitzen, wie dies beim Verbraucherzählpfeilsystem vereinbart ist.

Ist bei einer Spannungsquelle $P < 0$, so gibt sie Leistung ab, sie stellt Wirkleistung bereit. Die Bereitstellung von Wirkleistung kann nur durch Spannungs- und Stromquellen erfolgen. In diesen Quellen wurde durch Aufwendung von Energie eine Energie gespeichert, die wieder abgegeben werden kann.

Für Verbraucher gilt das Verbraucherzählpfeilsystem, für Quellen das Erzeugerzählpfeilsystem. Abgegebene Wirkleistung ist negativ, „verbrauchte" (in Wärme umgewandelte) Wirkleistung ist positiv. Beide Leistungen sind gleich groß (Energieerhaltungssatz).

Aufgabe 2.19
Zwei Zweipole A und B sind wie in Abb. 2.6 gezeigt miteinander verbunden. Die Stromrichtung und die Polarität der Spannung sind gegeben. Geben Sie für die folgenden Wertepaare von Spannung und Strom jeweils an, ob A bzw. B ein Erzeuger oder Verbraucher ist und ob die Leistung von A nach B oder umgekehrt fließt.

a) $I = 15\,\text{A}, U = 20\,\text{V}$
b) $I = -5\,\text{A}, U = 100\,\text{V}$
c) $I = 4\,\text{A}, U = -50\,\text{V}$
d) $I = -16\,\text{A}, U = -25\,\text{V}$

Lösung
Beim Verbraucherzählpfeilsystem haben die Zählpfeile für Spannung und Strom die gleiche Richtung, beim Erzeugerzählpfeilsystem sind sie entgegengesetzt gerichtet. Die Leistung ist $P = U \cdot I$.

a) A ist Erzeuger, B ist Verbraucher. 300 W fließen von A nach B.
b) A ist Verbraucher, B ist Erzeuger. 500 W fließen von B nach A.
c) A ist Verbraucher, B ist Erzeuger. 200 W fließen von B nach A.
d) A ist Erzeuger, B ist Verbraucher. 400 W fließen von A nach B.

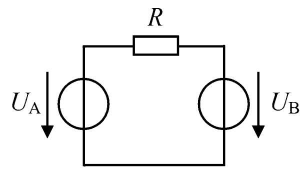


Abb. 2.7 Ein Starthilfevorgang

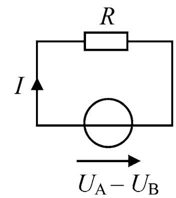


Abb. 2.8 Stromfluss beim Starthilfevorgang

Aufgabe 2.20

In Abb. 2.7 ist eine einfache Modellierung eines Starthilfevorgangs bei einem Auto gezeigt. U_A sei die Klemmenspannung der spendenden Batterie, U_B die der leeren Batterie. R ist der ohmsche Widerstand des Starthilfekabels.

Es sind $U_\mathrm{A} = 11\,\mathrm{V}$, $U_\mathrm{B} = 8\,\mathrm{V}$, $R = 10\,\mathrm{m\Omega}$.

a) Berechnen Sie den Strom I und geben Sie dessen Richtung an.
b) Welche Spannungsquelle nimmt Leistung auf, welche gibt Leistung ab?
c) Welche Leistungen werden in den Spannungsquellen sowie im Widerstand R umgesetzt?

Lösung

a) $I = \frac{U_\mathrm{A} - U_\mathrm{B}}{R} = \underline{\underline{300\,\mathrm{A}}}$
Der Strom fließt im Widerstand von links nach rechts, siehe Abb. 2.8.
b) Beim Verbraucher haben die Zählpfeile für Spannung und Strom die gleiche Richtung, beim Erzeuger sind sie entgegengesetzt gerichtet. U_B nimmt Leistung auf, U_A gibt Leistung ab.
c) $P_\mathrm{A} = -U_\mathrm{A} \cdot I = -11\,\mathrm{V} \cdot 300\,\mathrm{A} = \underline{\underline{-3300\,\mathrm{W}}}$; $P_\mathrm{B} = U_\mathrm{B} \cdot I = 8\,\mathrm{V} \cdot 300\,\mathrm{A} = \underline{\underline{2400\,\mathrm{W}}}$
$P_\mathrm{R} = U_\mathrm{R} \cdot I = 3\,\mathrm{V} \cdot 300\,\mathrm{A} = \underline{\underline{900\,\mathrm{W}}}$
Eine Leistungsbilanz muss null ergeben, die abgegebene Leistung muss gleich der aufgenommenen Leistung sein: $-3300\,\mathrm{W} + 2400\,\mathrm{W} + 900\,\mathrm{W} = 0$.

Aufgabe 2.21

Gegeben ist der Stromkreis in Abb. 2.9 mit den Werten: $U_1 = 3\,\mathrm{V}$, $U_2 = 2\,\mathrm{V}$, $R = 10\,\Omega$.

a) Berechnen Sie den Strom I und geben Sie dessen Richtung an.
b) Welche Spannungsquelle nimmt Leistung auf, welche gibt Leistung ab?
c) Welche Leistungen werden in den Spannungsquellen sowie im Widerstand R umgesetzt?

Abb. 2.9 Stromkreis mit zwei Spannungsquellen

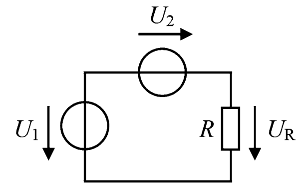
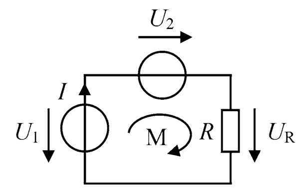


Abb. 2.10 Stromkreis mit Berechnungsgrößen



Lösung

a) Den Stromkreis mit den Berechnungsgrößen zeigt Abb. 2.10.
Eine Maschengleichung ergibt: $-U_1 + U_2 + U_R = 0$. Somit ist: $U_R = U_1 - U_2$.
Ohm'sches Gesetz: $I = \frac{U_R}{R} = \frac{U_1 - U_2}{R} = \underline{\underline{0{,}1\,\text{A}}}$
Beim Verbraucher R sind die Strom- und Spannungszählpfeile gleichgerichtet, der Strom fließt von oben nach unten durch R.

b) U_1 gibt Leistung ab (Zählpfeile entgegengesetzt gerichtet), U_2 nimmt Leistung auf (Zählpfeile gleich gerichtet).

c) $P_1 = -U_1 \cdot I = -3\,\text{V} \cdot 0{,}1\,\text{A} = \underline{\underline{-0{,}3\,\text{W}}}$; $P_2 = U_2 \cdot I = 2\,\text{V} \cdot 0{,}1\,\text{A} = \underline{\underline{0{,}2\,\text{W}}}$
$P_R = U_R \cdot I = 1\,\text{V} \cdot 0{,}1\,\text{A} = \underline{\underline{0{,}1\,\text{W}}}$
Leistungsbilanz: $-0{,}3\,\text{W} + 0{,}2\,\text{W} + 0{,}1\,\text{W} = 0$

2.6 Elektrische Arbeit

Aufgabe 2.22

Eine Beleuchtung mit einer Glühlampe 230 V, 40 W ist sieben Stunden eingeschaltet. Wie groß ist der Verbrauch an elektrischer Arbeit?

Lösung

$W = U \cdot I \cdot t$; $P = U \cdot I$; mit $P = 40\,\text{W}$ folgt: $W = P \cdot t = 40\,\text{W} \cdot 7\,\text{h} = \underline{\underline{280\,\text{Wh}}}$

Aufgabe 2.23

Ein Computer benötigt im Betrieb im Mittel 140 W, der zugehörige Monitor 50 W. Im Stand-by-Betrieb nehmen die Netzteile der beiden Geräte noch je 10 W auf. Computer und Monitor sind täglich 5 h eingeschaltet.

a) Wie groß ist der jährliche Energiebedarf? Wie groß sind die Energiekosten, wenn der Preis für 1 kWh 0,2 Euro beträgt?
b) Wie viel Geld können Sie sparen, wenn Sie den Computer und den Monitor über eine Steckerleiste mit Schalter bei Nichtbenutzung komplett vom Stromnetz trennen?

Lösung

a) $((140\,\text{W} + 50\,\text{W}) \cdot 5\,\text{h} + (10\,\text{W} + 10\,\text{W}) \cdot 19\,\text{h}) \cdot 365 = \underline{\underline{485{,}45\,\text{kWh}}} \mathrel{\widehat{=}} \underline{\underline{97{,}09\,\text{Euro}}}$

b) $(10\,\text{W} + 10\,\text{W}) \cdot 19\,\text{h} \cdot 365 = 138{,}7\,\text{kWh} \mathrel{\widehat{=}} \underline{\underline{27{,}74\ \text{Euro}}}$

Aufgabe 2.24

Eine Doppelleitung aus Kupfer der Länge $l = 100\,\text{m}$ (Distanz zwischen Anfang und Ende der Doppelleitung) mit dem Querschnitt $1\ \text{mm}^2$ wird von einem Strom $I = 6\,\text{A}$ durchflossen.

$$\rho_{\text{Cu}} = 0{,}0178\,\frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$$

Welche Wärmemenge (Wärmeenergie W) wird pro Stunde an die Umgebung abgegeben?

Lösung

$$P = I^2 \cdot R; \quad R = \rho_{\text{Cu}} \cdot \frac{l}{A_{\text{Kreis}}}; \quad P = (6\,\text{A})^2 \cdot 0{,}0178\,\frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}} \cdot \frac{2 \cdot 100\,\text{m}}{1\,\text{mm}^2};$$
$$P = 128{,}16\,\text{W}$$

Durch den Stromfluss entsteht eine Verlustleistung von 128,16 Watt. Die Energie oder elektrische Arbeit, die in Form von Wärme an die Umgebung pro Stunde abgegeben wird, beträgt 128,16 Wh (Wattstunden).

$$W = P \cdot t = \underline{\underline{128{,}16\,\text{Wh}}}$$

Die Energie in Joule:

$$1\,\text{J} = 1\,\text{Ws}; \quad 1\,\text{kWh} = 1000\,\text{Wh} = 3.600.000\,\text{Ws} = 3{,}6 \cdot 10^6\,\text{J};$$
$$0{,}12816\,\text{kWh} = \underline{\underline{461{,}4\,\text{kJ}}}$$

Aufgabe 2.25

Eine Ladung von einer Million Elektronen wird in einem homogenen elektrischen Feld der Feldstärke $6{,}0\,\frac{\text{kV}}{\text{cm}}$ um 3 mm entgegen der Feldrichtung verschoben. Wie groß ist die verrichtete Verschiebungsarbeit W_{12}?

Lösung

$$U = \frac{W}{Q}; \quad E = \frac{U}{l} \Rightarrow W = E \cdot l \cdot Q$$

Im elektrischen Feld verlaufen die Feldlinien von der positiven zur negativen Seite. Werden die Elektronen entgegen der Feldrichtung verschoben, so bewegen sie sich zur positiven Seite hin, von der sie angezogen werden. Bei der Verschiebung wird Leistung gewonnen bzw. abgegeben, die Arbeit hat negatives Vorzeichen.

$$W_{12} = 6{,}0 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{cm}} \cdot 0{,}3\,\mathrm{cm} \cdot 10^6 \cdot (-1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As}) = \underline{\underline{-2{,}88 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{Ws}}}$$

2.7 Elektrische Leistung

Aufgabe 2.26
Eine Glühlampe hat folgende Nenndaten: $U = 12\,\mathrm{V}$, $P = 55\,\mathrm{W}$.

a) Wie groß ist die Stromaufnahme I der Glühlampe?
b) Wie hoch ist der Widerstand R des Glühfadens für diesen Betriebspunkt?

Lösung
a) Aus $P = U \cdot I$ folgt $I = \frac{P}{U} = \frac{55\,\mathrm{W}}{12\,\mathrm{V}} = \underline{\underline{4{,}58\,\mathrm{A}}}$
b) Ohm'sches Gesetz: $R = \frac{U}{I} = \frac{12\,\mathrm{V}}{4{,}58\,\mathrm{A}} = \underline{\underline{2{,}62\,\Omega}}$

Aufgabe 2.27
An einem elektrischen Widerstand (z. B. einem elektrischen Heizofen) wird die Spannung von $U_1 = 230\,\mathrm{V}$ auf $U_2 = 245\,\mathrm{V}$ erhöht. Um wie viel Prozent steigt die Leistung an? Der Widerstand wird als konstant angenommen.

Lösung
Der Widerstand R eines elektrischen Verbrauchers nimmt bei der Spannung U_1 die Leistung P_1 und bei der Spannung U_2 die Leistung P_2 auf.

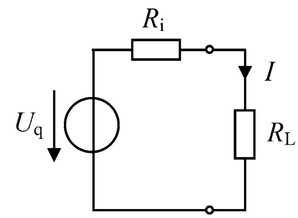
$$P_1 = \frac{(U_1)^2}{R}; \quad P_2 = \frac{(U_2)^2}{R}$$

Die relative Leistungsänderung beträgt dann

$$p = \frac{P_2 - P_1}{P_1} = \frac{\frac{(U_2)^2}{R} - \frac{(U_1)^2}{R}}{\frac{(U_1)^2}{R}} = \frac{(U_2)^2}{(U_1)^2} - 1; \quad p = 0{,}13468 = \underline{\underline{13{,}5\,\%}}$$

Aufgabe 2.28
Um wie viel Prozent muss die an einem ohmschen Widerstand anliegende Gleichspannung U_1 auf U_2 verringert werden, damit die vom Widerstand aufgenommene Leistung von P_1 um $\Delta P = 25\,\%$ auf P_2 sinkt?

Abb. 2.11 Spannungsquelle mit Innenwiderstand und Lastwiderstand



Lösung

Bei der Gleichspannung U_1 ist die vom Widerstand aufgenommene Leistung $P_1 = \frac{U_1^2}{R}$.

Bei der Gleichspannung U_2 soll die vom Widerstand aufgenommene Leistung das $(1 - \Delta P)$-fache der vorhergehenden Leistung sein.

$$P_2 = \frac{U_2^2}{R} \overset{!}{=} \frac{U_1^2}{R} \cdot (1 - \Delta P) \Rightarrow U_2 = U_1 \cdot \sqrt{1 - \Delta P}; \quad \frac{U_2}{U_1} = \sqrt{0{,}75} = 0{,}866$$

U_2 muss auf 86,6 % von U_1 reduziert werden. U_1 muss also um $\underline{\underline{13{,}4\,\%}}$ verringert werden.

Aufgabe 2.29

Die Spannungsquelle mit der Leerlaufspannung U_q und dem Innenwiderstand R_i wird mit dem Lastwiderstand R_L belastet (Abb. 2.11). Wie groß ist die vom Lastwiderstand aufgenommene Leistung P_L in Abhängigkeit von R_L?

Lösung

Allgemein: $P = R \cdot I^2$; hier ist:

$$I = \frac{U_q}{R_i + R_L}; \quad \underline{\underline{P_L = R_L \cdot \left(\frac{U_q}{R_i + R_L}\right)^2}}$$

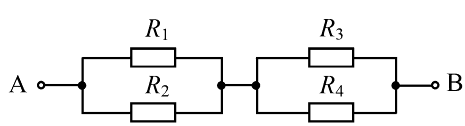
Aufgabe 2.30

Gegeben ist die Schaltung nach Abb. 2.12.

a) Wie groß ist der Widerstand zwischen den Klemmen A und B?
b) An die Klemmen A und B wird eine Spannung von 10 V angelegt. Wird ein Widerstand überlastet?

Gegeben sind folgende Werte: $R_1 = 12\,\Omega$ mit 1,5 W, $R_2 = 6\,\Omega$ mit 3,0 W, $R_3 = 12\,\Omega$ mit 1,5 W, $R_4 = 12\,\Omega$ mit 3,0 W

Abb. 2.12 Schaltung mit Widerständen



Lösung

a) Der Widerstand zwischen den Klemmen A und B ist:

$$R_{AB} = (R_1 \parallel R_2) + (R_3 \parallel R_4); \quad R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{72}{18}\,\Omega = 4\,\Omega;$$

$$R_3 \parallel R_4 = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = \frac{144}{24}\,\Omega = 6\,\Omega; \quad \underline{\underline{R_{AB} = 10\,\Omega}}$$

b) Nach der Spannungsteilerregel fällt an der Parallelschaltung von R_1 und R_2 folgende Spannung ab: $U_{12} = 10\,\mathrm{V} \cdot \frac{4\,\Omega}{10\,\Omega} = 4\,\mathrm{V}$. Damit liegt an der Parallelschaltung von R_3 und R_4 die Spannung $U_{34} = 10\,\mathrm{V} - 4\,\mathrm{V} = 6\,\mathrm{V}$. Es werden die Verlustleistungen in den Widerständen berechnet.

$$P_{V1} = \frac{U^2}{R} = \frac{16}{12}\,\mathrm{W} = 1{,}\overline{3}\,\mathrm{W} < 1{,}5\,\mathrm{W} \Rightarrow \text{nicht überlastet}$$

$$P_{V2} = \frac{16}{6}\,\mathrm{W} = 2{,}\overline{6}\,\mathrm{W} < 3{,}0\,\mathrm{W} \Rightarrow \text{nicht überlastet}$$

$$P_{V3} = \frac{36}{12}\,\mathrm{W} = 3{,}0\,\mathrm{W} > 1{,}5\,\mathrm{W} \Rightarrow \text{überlastet}$$

$$P_{V4} = \frac{36}{12}\,\mathrm{W} = 3{,}0\,\mathrm{W} \leq 3{,}0\,\mathrm{W} \Rightarrow \text{nicht überlastet, aber an der Belastungsgrenze}$$

Aufgabe 2.31

Eine Glühlampe mit den Daten 230 V, 40 W hat einen einfach gewendelten Wolframglühdraht mit der Länge $l = 657\,\mathrm{mm}$ und mit einem Durchmesser $d = 0{,}0226\,\mathrm{mm}$.

a) Berechnen Sie den Betriebswiderstand R_ϑ wenn die Glühlampe leuchtet und den Kaltwiderstand R_{20} im ausgeschalteten Zustand.
b) Wie groß ist der Strom I_ϑ im Betriebsfall und wie groß ist der Einschaltstrom I_{20}?

Der spezifische Widerstand von Wolfram bei 20 °C ist $\rho_{20} = 0{,}055\,\frac{\Omega\cdot\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$.

Lösung

a) Betriebswiderstand: $R_\vartheta = \frac{U^2}{P} = \frac{230^2\,\mathrm{V}^2}{40\mathrm{W}} = \underline{\underline{1{,}32\,\mathrm{k}\Omega}}$
Kaltwiderstand:

$$R_{20} = \rho_{20} \cdot \frac{l}{A} = \rho_{20} \cdot \frac{l \cdot 4}{\pi \cdot d^2} = 0{,}055\,\frac{\Omega \cdot \mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}} \cdot \frac{0{,}657\,\mathrm{m} \cdot 4}{\pi \cdot 0{,}0226^2\,\mathrm{mm}^2} = \underline{\underline{90{,}1\,\Omega}}$$

b) Strom im Betriebsfall: $I_\vartheta = \frac{P}{U} = \frac{40\,\mathrm{W}}{230\,\mathrm{V}} = \underline{\underline{0{,}17\,\mathrm{A}}}$
Einschaltstrom: $I_{20} = \frac{U}{R_{20}} = \frac{230\,\mathrm{V}}{90{,}1\,\Omega} = \underline{\underline{2{,}55\,\mathrm{A}}}$

2.8 Wirkungsgrad

Aufgabe 2.32
Ein Netzteil hat folgende Spannungsausgänge:

$$+5\,\mathrm{V}/25\,\mathrm{A}; \quad +12\,\mathrm{V}/9\,\mathrm{A}; \quad -5\,\mathrm{V}/0{,}5\,\mathrm{A}; \quad -12\,\mathrm{V}/-0{,}5\mathrm{A}$$

Welche Leistung P_{zu} nimmt das Netzteil auf, wenn der Wirkungsgrad $\eta = 70\,\%$ beträgt?

Lösung

$$\eta = \frac{\text{abgegebene Leistung}}{\text{zugeführte Leistung}} = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} = \frac{\text{Nutzleistung}}{\text{Nutzleistung} + \text{Verlustleistung}} = \frac{P_{ab}}{P_{ab} + P_V}$$

$$P_{ab} = 5\,\mathrm{V} \cdot 25\,\mathrm{A} + 12\,\mathrm{V} \cdot 9\,\mathrm{A} + 5\,\mathrm{V} \cdot 0{,}5\,\mathrm{A} + 12\,\mathrm{V} \cdot 0{,}5\,\mathrm{A} = 241{,}5\,\mathrm{W}$$

$$P_{zu} = \frac{P_{ab}}{\eta} = \frac{241{,}5\,\mathrm{W}}{0{,}7} = \underline{\underline{345\,\mathrm{W}}}$$

Aufgabe 2.33
Ein Gleichstrommotor wird bei einer Drehzahl $n = 1200\,1/\mathrm{min}$ mit dem Drehmoment $M = 30\,\mathrm{N\,m}$ belastet. Am Motor liegt die Spannung $U = 150\,\mathrm{V}$ an, der aufgenommene Strom beträgt 30 A. Wie groß ist der Wirkungsgrad η des Motors?

Lösung
Die vom Motor aufgenommene elektrische Leistung ist $P_{zu} = U \cdot I = 150\,\mathrm{V} \cdot 30\,\mathrm{A} = 4500\,\mathrm{W}$.

Die Drehzahl ist $n = 1200\,1/\mathrm{min} = \frac{1200}{60}\,1/\mathrm{s} = 20\,1/\mathrm{s}$.

Die Winkelgeschwindigkeit ergibt sich zu $\omega = 2 \cdot \pi \cdot n = 2 \cdot \pi \cdot 20\,\frac{1}{\mathrm{s}} = 125{,}7\,\frac{1}{\mathrm{s}}$.

Mit $\mathrm{W} = \frac{\mathrm{N\,m}}{\mathrm{s}}$ (Leistung = Arbeit pro Zeiteinheit, Watt = Newtonmeter pro Sekunde) folgt die vom Motor an der Welle abgegebene mechanische Leistung:

$$P_{ab} = M \cdot \omega = 30\,\mathrm{N\,m} \cdot 125{,}7\,\frac{1}{\mathrm{s}} = 3771\,\mathrm{W}.$$

Der Wirkungsgrad η des Motors ist $\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} = \frac{3771\,\mathrm{W}}{4500\,\mathrm{W}} \cdot 100\,\% = \underline{\underline{84\,\%}}$.

Die Betrachtung des Wirkungsgrades wird jetzt auf den Wechselstromkreis erweitert.

Aufgabe 2.34
Eine Glühlampe mit den Nenndaten 24 V und 2,4 W wird über einen Vorwiderstand an einer Wechselspannung $U = 60\,\mathrm{V}$ (Effektivwert), $f = 50\,\mathrm{Hz}$ mit seiner Nennleistung betrieben.

a) Berechnen Sie den Wirkungsgrad η.
b) Anstelle des Vorwiderstandes wird jetzt ein Kondensator mit der Glühlampe in Reihe geschaltet. Wie groß muss der Kapazitätswert C für den Betrieb der Glühlampe mit Nennleistung sein? Wie groß ist jetzt der Wirkungsgrad η?
c) Welche Blindleistung Q nimmt die gesamte Schaltung auf? Wie groß ist der Leistungsfaktor $\cos(\varphi)$?

Lösung

a) Bei Nennbetrieb ist der Strom durch die Glühlampe $I = \frac{P}{U} = \frac{2{,}4\,\mathrm{W}}{24\,\mathrm{V}} = 0{,}1\,\mathrm{A}$, ihr Widerstand ist somit $R = \frac{U}{I} = \frac{24\,\mathrm{V}}{0{,}1\,\mathrm{A}} = 240\,\Omega$. Damit bei 60 V ebenfalls 0,1 A fließen, muss der Vorwiderstand den Wert $360\,\Omega$ haben. In ihm entsteht die Verlustleistung 3,6 W. Der Wirkungsgrad ist $\eta = \frac{2{,}4\,\mathrm{W}}{2{,}4\,\mathrm{W}+3{,}6\,\mathrm{W}} = \underline{\underline{0{,}4}}$ (40 %).
b) Der Blindwiderstand X_C des Kondensators muss $360\,\Omega$ sein: $X_\mathrm{C} = \frac{1}{\omega C} = 360\,\Omega$.

$$C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 50\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 360\,\Omega} = 8{,}8 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F} = \underline{\underline{8{,}8\,\mu\mathrm{F}}}$$

Es entsteht keine Verlustleistung: $\underline{\underline{\eta = 100\,\%}}$.
c) Die Scheinleistung ist $S = U \cdot I$.
Der Leistungsfaktor ist

$$\cos(\varphi) = \frac{P}{S} = \frac{2{,}4\,\mathrm{W}}{60\,\mathrm{V} \cdot 0{,}1\,\mathrm{A}} = \frac{2{,}4\,\mathrm{W}}{6\,\mathrm{VA}} = \underline{\underline{0{,}4}}.$$

Die Blindleistung ist:

$$Q = S \cdot \sin(\varphi) = S \cdot \sin\left[\arccos\left(\frac{P}{S}\right)\right] = \underline{\underline{5{,}5\,\mathrm{var}}}.$$

Aufgabe 2.35

Ein Einphasen-Wechselstrommotor und ein Heizgerät sind an das Stromversorgungsnetz $U = 230\,\mathrm{V}$, $f = 50\,\mathrm{Hz}$ angeschlossen. Das Heizgerät nimmt eine Leistung $P = 1{,}8\,\mathrm{kW}$ auf. Der Motor hat eine Nennleistung (mechanische Wellenleistung) $P_\mathrm{N} = 1{,}2\,\mathrm{kW}$. Sein Nennstrom ist $I_\mathrm{N} = 8{,}0\,\mathrm{A}$, der Leistungsfaktor ist $\cos(\varphi_\mathrm{N}) = 0{,}8$.

a) Wie groß ist der Wirkungsgrad η des Motors?
b) Skizzieren Sie das Zeigerbild der Leistungen.
c) Berechnen Sie den Leistungsfaktor $\cos(\varphi_\mathrm{ges})$, der sich insgesamt ergibt.

Lösung

a)

$$\eta = \frac{P_\mathrm{ab}}{P_\mathrm{zu}} = \frac{P_\mathrm{N}}{U \cdot I_\mathrm{N} \cdot \cos(\varphi_\mathrm{N})} = \frac{1{,}2\,\mathrm{kW}}{230\,\mathrm{V} \cdot 8{,}0\,\mathrm{A} \cdot 0{,}8} = \underline{\underline{0{,}815}}$$

b) Das Zeigerbild der Leistungen zeigt Abb. 2.13.

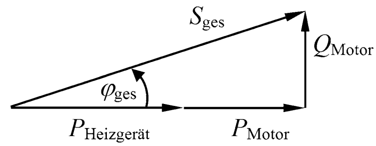


Abb. 2.13 Skizze des Zeigerbildes der Leistungen

c) Der sich insgesamt ergebende Leistungsfaktor ist $\cos(\varphi_{ges}) = \dfrac{P_{ges}}{S_{ges}}$ mit

$$P_{ges} = P_{Heizgerät} + P_{Motor};\ P_{Motor} = U \cdot I_N \cdot \cos(\varphi_N)$$
$$P_{Motor} = 230\,V \cdot 8{,}0\,A \cdot 0{,}8 = 1472\,W; \quad P_{ges} = 1800\,W + 1472\,W = 3272\,W$$

Die Scheinleistung ist $S_{ges} = \sqrt{(P_{ges})^2 + (Q_{Motor})^2}$.
Die Blindleistung des Motors ist $Q_{Motor} = U \cdot I_N \cdot \sin(\varphi_N)$.

$$Q_{Motor} = 230\,V \cdot 8{,}0\,A \cdot \sin[\arccos(0{,}8)] = 1104\,\text{var}$$
$$S_{ges} = \sqrt{(3272\,W)^2 + (1104\,\text{var})^2} = 3453\,VA$$
$$\cos(\varphi_{ges}) = \frac{P_{ges}}{S_{ges}} = \frac{3272\,W}{3453\,VA} = \underline{\underline{0{,}948}}\ (94{,}8\,\%)$$

Aufgabe 2.36
Ein Verstärker mit dem Eingangswiderstand $R_e = 100\,k\Omega$ wird mit einer Eingangsspannung $U_e = 100\,mV$ angesteuert. Am Ausgang wird am Lastwiderstand $R_L = 8\,\Omega$ eine Spannung $U_a = 10\,V$ gemessen. Die Betriebsspannung ist $U_B = 15\,V$, die mittlere Stromaufnahme beträgt $I_B = 1{,}0\,A$. Berechnen Sie die entstehende Verlustleistung und den Wirkungsgrad des Verstärkers.

Lösung
Die Wirkleistung am Verstärkereingang ist $P_e = \frac{U_e^2}{R_e} = \frac{(0{,}1\,V)^2}{100.000\,\Omega} = 0{,}1\,\mu W$.
Die Wirkleistung am Ausgang ist $P_a = \frac{U_a^2}{R_L} = \frac{(10\,V)^2}{8\,\Omega} = 12{,}5\,W$.
Der Verstärker nimmt die Leistung $P_B = U_B \cdot I_B = 15\,W$ auf.
Die Verlustleistung ist $P_V = P_e + P_B - P_a = 0{,}1\,\mu W + 15\,W - 12{,}5\,W = \underline{\underline{2{,}5\,W}}$.

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} = \frac{12{,}5\,W}{15\,W} \cdot 100\,\% = \underline{\underline{83\,\%}}$$

Aufgabe 2.37
Mit einem integrierten Spannungsregler (so genannter linearer Längsregler) kann aus einer höheren Gleichspannung eine niedrigere (geregelte, stabilisierte) Gleichspannung gewonnen werden, die weitgehend unabhängig von Schwankungen sowohl der Eingangsspannung als auch des lastseitig aufgenommenen Stromes ist. In diesem Beispiel (Abb. 2.14)

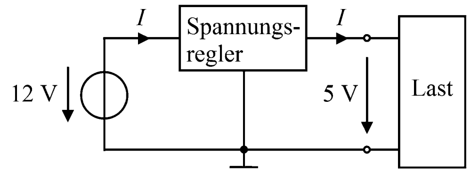


Abb. 2.14 Spannungsregler mit angeschlossener Last

ist der von der Last aufgenommene Strom $I = 100\,\text{mA}$. Dieser Strom fließt auch in den Eingang des Spannungsreglers.

Berechnen Sie die von der Last aufgenommene Leistung P_L, die von der Spannungsquelle abgegebene Leistung P_U und die im Spannungsregler auftretende Verlustleistung P_V. Wie groß ist der Wirkungsgrad η des linearen Spannungsreglers?

Lösung

$$P_\text{L} = 5\,\text{V} \cdot 0{,}1\,\text{A} = \underline{\underline{0{,}5\,\text{W}}}$$

$$P_\text{U} = 12\,\text{V} \cdot 0{,}1\,\text{A} = \underline{\underline{1{,}2\,\text{W}}}$$

$$P_\text{V} = 1{,}2\,\text{W} - 0{,}5\,\text{W} = 0{,}7\,\text{W}$$

$$\eta = \frac{P_\text{L}}{P_\text{U}} = \frac{0{,}5\,\text{W}}{1{,}2\,\text{W}} \cdot 100\,\% = \underline{\underline{41{,}7\,\%}}$$

Aufgabe 2.38

Um aus einer höheren Gleichspannung eine niedrigere Gleichspannung zu gewinnen, kann statt eines linearen Spannungsreglers ein Schaltregler verwendet werden. Ein solcher getakteter Stromsteller wird als Tiefsetz-Gleichstromsteller oder Abwärtswandler (buck converter, step down converter) bezeichnet. Die prinzipielle Arbeitsweise zeigt Abb. 2.15.

U_e = Eingangsspannung, U_a = Ausgangsspannung, I_e = Eingangsstrom, I_a = Ausgangsstrom (Laststrom), U_St = Steuerspannung, T = Transistor (MOSFET), L = Speicherdrossel, D = Freilaufdiode, R = Last

Der Transistor T wirkt als Halbleiterschalter, der durch die Steuerspannung U_St periodisch in einem bestimmten Tastverhältnis eingeschaltet (geschlossen) bzw. ausgeschaltet (geöffnet) wird. Ist T eingeschaltet, so nimmt die Speicherdrossel L Energie auf, der Laststrom I_a steigt an. Wird T ausgeschaltet, so gibt die Drossel die in ihr gespeicherte Energie ab. Für die jetzt in L induzierte Spannung ist die Freilaufdiode in Durchlassrichtung gepolt. Der abnehmende Strom I_a fließt in gleicher Richtung weiter durch die Last wie vor

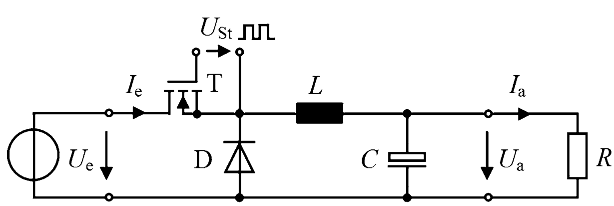


Abb. 2.15 Abwärtswandler

dem Ausschalten von T. Die Drossel erhält den Stromfluss aufrecht. Die Freilaufdiode verhindert Induktionsspannungsspitzen und sorgt gleichzeitig für einen gleichförmigen Stromfluss.

Man kann zeigen, dass die Ausgangsspannung (ihr zeitlicher Mittelwert) nur vom Tastverhältnis und der Eingangsspannung abhängig ist, sie ist unabhängig von der Last.

$$U_\mathrm{a} = \frac{t_\mathrm{ein}}{T} \cdot U_\mathrm{e}$$

Als Beispiel wird jetzt die vereinfachende Annahme getroffen, dass die Verlustleistung im eingeschalteten Transistor durch dessen Widerstandswert der Drain-Source-Schaltstrecke $R_{\mathrm{DS(on)}} = 3\,\Omega$ und der Spannungsabfall $U_\mathrm{S} = 0{,}7\,\mathrm{V}$ an der Freilaufdiode die einzigen Verluste sind. (In der Praxis kommen die wesentlich schwieriger zu berechnenden dynamischen Verluste beim Schalten des Transistors hinzu.)

Die Spannungen sind $U_\mathrm{e} = 12\,\mathrm{V}$ und $U_\mathrm{a} = 5\,\mathrm{V}$, die Ströme sind $I_\mathrm{e} = I_\mathrm{a} = 100\,\mathrm{mA}$. Zu berechnen sind die Verlustleistung P_V und der Wirkungsgrad η des Schaltreglers.

Lösung

$$U_\mathrm{a} = \frac{t_\mathrm{ein}}{T} \cdot U_\mathrm{e} \Rightarrow \frac{t_\mathrm{ein}}{T} = \frac{U_\mathrm{a}}{U_\mathrm{e}} = \frac{5\,\mathrm{V}}{12\,\mathrm{V}} = \frac{5}{12}$$

Die Verlustleistung im MOSFET ist während der Einschaltzeit:

$$P_\mathrm{ein} = I_\mathrm{e}^2 \cdot R_{\mathrm{DS(on)}} = (0{,}1\,\mathrm{A})^2 \cdot 3\,\Omega = 0{,}03\,\mathrm{W}.$$

Die Verlustleistung in der Freilaufdiode ist während der Ausschaltzeit:

$$P_\mathrm{aus} = U_\mathrm{S} \cdot I_\mathrm{a} = 0{,}7\,\mathrm{V} \cdot 0{,}1\,\mathrm{A} = 0{,}07\,\mathrm{W}.$$

Die gesamte Verlustleistung ist:

$$P_\mathrm{V} = P_\mathrm{ein} \cdot \frac{t_\mathrm{ein}}{T} + P_\mathrm{aus} \cdot \frac{t_\mathrm{aus}}{T} = 30\,\mathrm{mW} \cdot \frac{5}{12} + 70\,\mathrm{mW} \cdot \frac{7}{12} = \underline{\underline{53{,}3\,\mathrm{mW}}}.$$

Der Wirkungsgrad ist:

$$\eta = \frac{P_\mathrm{ab}}{P_\mathrm{ab} + P_\mathrm{V}} = \frac{5\,\mathrm{V} \cdot 0{,}1\,\mathrm{A}}{5\,\mathrm{V} \cdot 0{,}1\,\mathrm{A} + 0{,}0533\,\mathrm{W}} \cdot 100\,\% = \underline{\underline{90{,}4\,\%}}$$

Der Vorteil eines Schaltreglers ist seine geringe Verlustleistung und ein entsprechend hoher Wirkungsgrad. Die Ausgangsspannung eines Schaltreglers hat jedoch gegenüber einem linearen Spannungsregler eine größere Restwelligkeit. Ein Vergleich von Aufgabe 2.37 und Aufgabe 2.38 ergibt:

Schaltregler	Vorteil: hoher Wirkungsgrad, Nachteil: hohe Restwelligkeit.
Linearer Spannungsregler	Vorteil: kleine Restwelligkeit, Nachteil: kleiner Wirkungsgrad.

Lineare Bauelemente im Gleichstromkreis

3

Zusammenfassung

Der ohmsche Widerstand wird mit seinen Erscheinungsformen, der Festlegung von Strom-Spannungskennlinie und seiner Bauteilgleichung eingeführt. Mit dem spezifischen Widerstand von Leitermaterialien werden die Widerstände von Leitungen bestimmt. Zur Strombegrenzung dient der Vorwiderstand. Die Aufteilung einer Spannung durch die Reihenschaltung von Widerständen mit der Spannungsteilerregel zur Berechnung von Teilspannungen wird an zahlreichen Beispielen geübt. Ebenso wird die Aufteilung des Stromes und die Stromteilerregel geschult. Die Bedeutung der Temperaturabhängigkeit des Widerstandes zeigen entsprechende Anwendungen. Der zulässigen Verlustleistung, der Lastminderungskurve und dem Wärmewiderstand ist ein ausführlicher Abschnitt gewidmet. Die Beschreibung der technischen Ausführung von Festwiderständen vermittelt einen Bezug zur Praxis.

Es folgen der Kondensator, das elektrostatische Feld und die darin gespeicherte Energie. Bei technischen Ausführungen von Kondensatoren werden Kapazitätswerte berechnet, wobei geschichtete Dielektrika in unterschiedlichen Ausführungsformen berücksichtigt werden. Das radialsymmetrische wie auch das inhomogene elektrische Feld ergeben anspruchsvolle physikalische Berechnungen.

Mit der Spule wird das magnetische Feld eingeführt. Es werden die Induktivitäten unterschiedlich aufgebauter Spulen bestimmt. Bei magnetischen Kreisen wird der Einfluss eines Luftspalts auf magnetische Größen deutlich. Die Berechnung der Induktivität von Leiteranordnungen vervollständigt dieses Kapitel.

L. Stiny, *Aufgabensammlung zur Elektrotechnik und Elektronik*,
DOI 10.1007/978-3-658-14381-7_3

3.1 Grundwissen – kurz und bündig

3.1.1 Der ohmsche Widerstand

- Jeder elektrische Leiter hat einen bestimmten Widerstandswert.
- Der Widerstandswert ist abhängig von der Temperatur.
- Ein Widerstand begrenzt die Stromstärke in einem Stromkreis nach dem ohmschen Gesetz.
- Fließt durch einen Widerstand Strom, so fällt am Widerstand eine Spannung ab.
- Den Widerstand als Bauteil kann man in feste und veränderbare Widerstände (Potenziometer, Trimmer) einteilen.
- Festwiderstände werden nur in Normwerten hergestellt. Die Kennzeichnung des Widerstandes mit seinem Wert in Ohm erfolgt häufig durch einen Farbcode. Bei Festwiderständen unterscheidet man bedrahtete und SMD-Bauteile.
- Ein Widerstand (Bauteil) darf höchstens mit seiner Nennbelastbarkeit betrieben werden. Die Belastbarkeit verringert sich mit steigender Temperatur (Derating).

3.1.2 Kondensator, elektrostatisches Feld

- Ein Kondensator besteht aus zwei sich gegenüberstehenden, leitenden Flächen (Elektroden). Ein bekanntes Beispiel (für Lehrzwecke) ist der Plattenkondensator.
- Ein Kondensator speichert elektrische Ladung. Er wird durch Gleichspannung geladen.
- Die Kapazität eines Kondensators wird in Farad (F) angegeben.
- Ein Dielektrikum (Isolierstoff zwischen den Elektroden) erhöht die Kapazität eines Kondensators.
- Ein Kondensator sperrt Gleichspannung (nach dem Aufladen).
- Ein Kondensator lässt Wechselspannung umso besser durch, je höher die Frequenz ist.
- Kondensatoren werden u. a. zum Stützen und Glätten von Gleichspannungen, zur Trennung von Gleich- und Wechselspannung und zur Entstörung benutzt.
- Den Kondensator als Bauteil kann man in feste und veränderbare Kondensatoren einteilen.
- Es gibt ungepolte und gepolte Kondensatoren. Elektrolytkondensatoren (Elkos) sind gepolte Kondensatoren, bei Anschluss an eine Gleichspannung ist auf richtige Polung zu achten.
- Ein elektrisches Feld wird durch elektrische Feldlinien dargestellt.
- Im elektrischen Feld (z. B. zwischen zwei Kondensatorplatten) werden auf Ladungen Kräfte ausgeübt).

3.1.3 Grundlagen des Magnetismus

- Ferromagnetische Stoffe zeigen deutliche magnetische Eigenschaften.
- Es gibt zwei Arten magnetischer Pole, den Nordpol und den Südpol.
- Gleichnamige magnetische Pole stoßen sich ab, ungleichnamige ziehen sich an (Kraftwirkung des Magnetismus).
- Je kleiner der Abstand der magnetischen Pole ist, umso größer sind die magnetischen Kräfte.
- Einzelne magnetische Pole gibt es nicht.
- Die Kreisströme der Elektronen bilden Elementarmagnete. In den Weiss'schen Bezirken sind die Elementarmagnete in gleiche Richtung ausgerichtet.
- Beim Magnetisieren werden die Weiss'schen Bezirke in die gleiche Richtung ausgerichtet.
- Das Magnetisieren eines ferromagnetischen Stoffes durch einen anderen Magneten nennt man magnetische Influenz.
- Ein Magnetfeld ist ein Raum, in dem magnetische Kräfte wirksam sind. Die Kräfte werden durch gerichtete Feldlinien veranschaulicht.
- Außerhalb eines Magneten verlaufen die Feldlinien vom Nord- zum Südpol, innerhalb eines Magneten vom Süd- zum Nordpol.
- Magnetische Feldlinien sind stets in sich geschlossen.

3.1.4 Spule

- Eine Spule besteht aus Drahtwindungen.
- Ein Magnetfeld wird durch magnetische Feldlinien dargestellt.
- Ein stromdurchflossener Leiter ist stets von einem Magnetfeld umgeben. Die Stärke des Magnetfeldes ist proportional zur Stromstärke und der Windungszahl der Spule.
- *Ändert* sich das Magnetfeld durch eine Spule, so wird in der Spule eine Spannung induziert. Die Spannung wird umso größer, je schneller und je stärker die Feldänderung ist.
- Die Änderung eines Magnetfeldes kann durch Bewegung oder Stromänderung verursacht werden.
- Wird eine Spule von einem sich ändernden Strom durchflossen, so wird in der Spule eine Spannung induziert (Selbstinduktion). Die Spannung wirkt der Stromänderung, durch die sie entsteht, entgegen.
- Die Induktivität einer Spule wird in Henry (H) angegeben.
- Ein ferromagnetischer Kern erhöht die Induktivität einer Spule.

- Eine Spule sperrt Wechselspannung umso stärker, je höher die Frequenz ist.
- Eine Spule lässt Gleichspannung durch.
- Spulen werden u. a. beim Transformator, zur Trennung von Frequenzen und in Schwingkreisen benutzt.
- Im stationären Gleichstromkreis (die Ströme ändern sich nicht mehr) wirkt nur der ohmsche Widerstand der Spulenwicklung.

3.1.5 Wichtige Formeln

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}; \quad \Delta R = \alpha_{20} \cdot R_{20} \cdot \Delta\vartheta;$$

$$P_{\text{th}} = \frac{Q}{t}; \quad P_{\text{th}} = \frac{T - T_{\text{A}}}{R_{\text{th}}} = \frac{\Delta T}{R_{\text{th}}}; \quad R_{\text{th,JC}} = \frac{T_{\text{J}} - T_{\text{A}}}{P_{\text{V}}};$$

$$T_{\text{J}} = R_{\text{th,JA}} \cdot P_{\text{Vmax}} + T_{\text{A}}; \quad R_{\text{th,JC}} = \frac{\Delta T}{P_{\text{tot}}};$$

$$P_{\text{V}}(T_{\text{C}}) = P_{\text{tot}} \cdot \frac{T_{\text{Cmax}} - T_{\text{C}}}{T_{\text{Cmax}} - T_{\text{C,N}}} = \frac{T_{\text{Cmax}} - T_{\text{C}}}{R_{\text{th,JC}}};$$

$$R_{\text{th,HA}} = \frac{T_{\text{Jmax}} - (R_{\text{th,JC}} + R_{\text{th,CH}}) \cdot P_{\text{V}} - T_{\text{A}}}{P_{\text{V}}};$$

$$S = \kappa \cdot E; \quad E = \frac{F}{q}; \quad U_{12} = \frac{W_{12}}{q} = \vec{E} \cdot \vec{l}; \quad D = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{\text{r}} \cdot E = \frac{Q}{A};$$

$$C = \frac{Q}{U}; \quad C = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{\text{r}} \cdot \frac{A}{d};$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{\text{r}}; \quad \varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{A s}}{\text{V m}}; \quad W_{\text{C}} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QU;$$

$$F = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 \cdot A} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C \cdot d} = \frac{1}{2}\frac{U \cdot Q}{d} = \frac{1}{2}Q \cdot E = \frac{1}{2}\frac{U^2 \cdot C}{d}; \quad F = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2};$$

$$E = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}; \quad \rho = \frac{Q}{V};$$

$$Q = \oiint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 \oiint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}; \quad U_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \varphi(P_1) - \varphi(P_2);$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{V s}}{\text{A m}};$$

$$L = \mu_0 \cdot \mu_{\text{r}} \cdot \frac{A \cdot N^2}{l}; \quad \Theta = V = I \cdot N = H \cdot l; \quad H = \frac{\Theta}{l};$$

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_{\text{r}} \cdot \vec{H}; \quad \Phi = B \cdot A = \frac{\Theta}{R_m};$$

$$R_{\text{m}} = \frac{\Theta}{\Phi} = \rho_{\text{m}} \cdot \frac{l}{A}; \quad \rho_{\text{m}} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_0 \cdot \mu_{\text{r}}}; \quad L = \frac{N \cdot \Phi}{I};$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \oiint_A \vec{S} \cdot d\vec{A}; \quad \Phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A};$$

$$V_{AB} = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{s}; \quad W_\mathrm{L} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2; \quad H(r) = \frac{I}{2\pi \cdot r};$$

$$U_\mathrm{i} = -L \cdot \frac{dI(t)}{dt} = -L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}; \quad u_\mathrm{ind} = l \cdot v \cdot B;$$

$$u_\mathrm{ind} = N \cdot B \cdot \frac{\Delta A}{\Delta t}; \quad u_\mathrm{ind} = -N \cdot \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}; \quad F = N \cdot I \cdot l \cdot B \cdot \sin(\alpha)$$

3.2 Widerstand

3.2.1 Der ohmsche Widerstand

Aufgabe 3.1
Was versteht man unter einer Bauteilgleichung? Wie lautet die Bauteilgleichung des ohmschen Widerstandes?

Lösung
Die *Bauteilgleichung* gibt den *Zusammenhang zwischen Strom und Spannung* bei einem Zweipol an. Die Bauteilgleichung des ohmschen Widerstandes ist das ohmsche Gesetz: $I = \frac{U}{R} = \frac{1}{R} \cdot U = G \cdot U$ mit $R =$ Widerstand, $G = \frac{1}{R} =$ Leitwert.

Aufgabe 3.2
a) Was versteht man unter einer Strom-Spannungskennlinie?
b) Wie sieht die Strom-Spannungskennlinie des ohmschen Widerstandes aus?
c) Welche Formen (bezüglich des Verlaufs) können Strom-Spannungskennlinien haben?

Lösung
a) Eine Strom-Spannungskennlinie ist die grafische Darstellung der Bauteilgleichung, also des funktionalen Zusammenhangs zwischen Strom und Spannung an einem Bauelement (Zweipol).
b) Die Strom-Spannungskennlinie des ohmschen Widerstandes ist eine Gerade durch den Ursprung in einem kartesischem Koordinatensystem, mit der Spannung auf der Abszisse und dem Strom auf der Ordinate aufgetragen. Diese Funktion $I = f(U)$ ist die Geradengleichung der Bauteilgleichung des ohmschen Widerstandes $I = \frac{U}{R} = \frac{1}{R} \cdot U = G \cdot U$ (Abb. 3.1).
c) Strom-Spannungskennlinien können lineares oder nichtlineares Verhalten haben. Lineare Kennlinien haben einen *geraden* Verlauf, nichtlineare Kennlinien haben einen (irgendwie) *gekrümmten* Verlauf. Bei gekrümmten Kennlinien gilt das ohmsche Gesetz *nicht*.

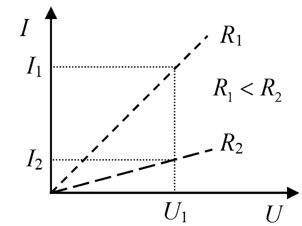


Abb. 3.1 Strom-Spannungskennlinien von ohmschen Widerständen

3.2.2 Spezifischer Widerstand

Aufgabe 3.3
Auf ein Porzellanrohr ist Konstantandraht mit der Länge $l = 300\,\text{m}$ und mit einem Durchmesser von $d = 0{,}4\,\text{mm}$ gewickelt. Der spezifische Widerstand von Konstantan beträgt $\rho = 0{,}5\,\frac{\Omega\cdot\text{mm}^2}{\text{m}}$. Wie groß ist der Widerstand R der Wicklung?

Lösung

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} = 0{,}5\,\frac{\Omega\cdot\text{mm}^2}{\text{m}} \cdot \frac{300\,\text{m}\cdot 4}{\pi\cdot(0{,}4\,\text{mm})^2} = 1193{,}7\,\Omega \approx \underline{\underline{1{,}2\,\text{k}\Omega}}$$

Aufgabe 3.4
Wie groß ist der Widerstand R_{Cu} eines Kupferdrahtes mit der Länge $l = 10\,\text{m}$ und dem Durchmesser $d = 1\,\text{mm}$? Wie groß wird der Widerstand R_{Al}, wenn der Kupferdraht durch Aluminiumdraht gleicher Länge und Stärke ersetzt wird?

Welcher Querschnitt A_{Al} müsste bei Aluminium gewählt werden, um bei gleicher Länge den Widerstand des Kupfers nicht zu überschreiten?

Als spezifische Leitfähigkeit σ wird der Kehrwert des spezifischen Widerstandes ρ bezeichnet: $\sigma = \frac{1}{\rho}$.

Die spezifische Leitfähigkeit des Kupfers beträgt $\sigma_{\text{Cu}} = 58\,\frac{\text{m}}{\Omega\cdot\text{mm}^2}$.

Die spezifische Leitfähigkeit des Aluminiums beträgt $\sigma_{\text{Al}} = 36\,\frac{\text{m}}{\Omega\cdot\text{mm}^2}$.

Lösung

$$R_{\text{Cu}} = \frac{l}{\sigma\cdot A} = \frac{l}{\sigma\cdot r^2\cdot\pi} = \frac{10\,\text{m}}{58\,\frac{\text{m}}{\Omega\cdot\text{mm}^2}\cdot 0{,}5^2\,\text{mm}^2\cdot\pi} = \frac{10\,\text{m}}{45{,}55\,\frac{\text{m}}{\Omega}} = \underline{\underline{0{,}22\,\Omega}}$$

$$R_{\text{Al}} = \frac{10\,\text{m}}{36\,\frac{\text{m}}{\Omega\cdot\text{mm}^2}0{,}5^2\,\text{mm}^2\cdot\pi} = \frac{10\,\text{m}}{28{,}27\,\frac{\text{m}}{\Omega}} = \underline{\underline{0{,}35\,\Omega}}$$

$$A_{\text{Al}} = \frac{l}{R_{\text{Cu}}\cdot\sigma_{\text{Al}}} = \underline{\underline{1{,}26\,\text{mm}^2}}$$

Aufgabe 3.5
An einem Vorschaltwiderstand soll bei einem vorgegebenen Strom $I = 6{,}0\,\text{A}$ ein Spannungsabfall $U = 1{,}5\,\text{V}$ auftreten. Der Widerstand wird aus Konstantandraht hergestellt,

dessen Querschnitt über seine ganze Länge gleich bleibt. Die zulässige Stromdichte im Draht beträgt $S = \frac{I}{A} = 3\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{mm}^2}$. Berechnen Sie die erforderliche Drahtlänge l.

Für Konstantan ist der spezifische Widerstand $\rho = 0{,}5\,\frac{\Omega\cdot\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$.

Lösung

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1{,}5\,\mathrm{V}}{6\,\mathrm{A}} = 0{,}25\,\Omega; \quad A = \frac{I}{S} = \frac{6\,\mathrm{A}}{3\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{mm}^2}} = 2\,\mathrm{mm}^2;$$

$$l = \frac{R \cdot A}{\rho} = \frac{0{,}25\,\Omega \cdot 2\,\mathrm{mm}^2}{0{,}5\,\frac{\Omega\cdot\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}} = \underline{\underline{1{,}0\,\mathrm{m}}}$$

Aufgabe 3.6

Ein Generator und ein Verbraucher sind mit Kupferleitungen verbunden. Hin- und Rückleiter haben zusammen die Länge $l = 600\,\mathrm{m}$.

Der Verbraucher hat eine Stromaufnahme von $I = 200\,\mathrm{A}$. Der Spannungsabfall an Hin- und Rückleitung soll $U_{\mathrm{ab}} = 40\,\mathrm{V}$ nicht überschreiten. Welchen Durchmesser d muss die Leitung aufweisen?

Der spezifische Widerstand von Kupfer ist $\rho = 0{,}0176\,\frac{\Omega\cdot\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$.

Lösung

Der Widerstand eines linienhaften, runden Leiters mit dem Durchmesser d ist $R = \rho \cdot \frac{l}{A}$ mit $A = \frac{\pi}{4} d^2$. Nach dem ohmschen Gesetz ist $U_{\mathrm{ab}} = I \cdot R$. Der Ausdruck für R wird eingesetzt. Es folgt:

$$U_{\mathrm{ab}} = I \cdot \rho \cdot \frac{l}{A} = I \cdot \rho \cdot \frac{4 \cdot l}{\pi \cdot d^2}.$$

Auflösen nach d ergibt $d = \sqrt{\frac{I \cdot \rho \cdot 4 \cdot l}{\pi \cdot U_{\mathrm{ab}}}}$.

$$d = \sqrt{\frac{200 \cdot 0{,}0176 \cdot 4 \cdot 600}{\pi \cdot 40}}\,\mathrm{mm}; \quad \underline{\underline{d = 8{,}2\,\mathrm{mm}}}$$

Die Kupferleitung ist für die Praxis viel zu dick.

3.2.3 Strombegrenzung durch einen Vorwiderstand

Aufgabe 3.7

Welcher Widerstand R_{V} muss einer Glühlampe mit den Daten 12 V, 10 W vorgeschaltet (mit ihr in Reihe geschaltet) werden, damit sie an 24 V angeschlossen werden kann, ohne durchzubrennen?

Lösung

Im Stromkreis dürfen maximal $I = \frac{P}{U} = \frac{10\,\mathrm{W}}{12\,\mathrm{V}} = 0{,}83\,\mathrm{A}$ fließen. Am Vorwiderstand müssen $U_\mathrm{V} = 12\,\mathrm{V}$ abfallen, damit an der Glühlampe $24\,\mathrm{V} - 12\,\mathrm{V} = 12\,\mathrm{V}$ anliegen. Der Vorwiderstand ist somit $R_\mathrm{V} = \frac{U_\mathrm{V}}{I} = \frac{12\,\mathrm{V}}{0{,}83\,\mathrm{A}} = \underline{\underline{14{,}5\,\Omega}}$.

Aufgabe 3.8

An einem Lötkolben mit den Daten $U = 230\,\mathrm{V}$, $P = 100\,\mathrm{W}$ soll in den Lötpausen eine kleinere Spannung $U_\mathrm{P} = 150\,\mathrm{V}$ anliegen. Welchen Wert muss ein Vorwiderstand R_V haben, um dies zu erreichen?

Lösung

Der Widerstand des Lötkolbens ist $R = \frac{U^2}{P} = 529\,\Omega$.

In den Lötpausen muss am Vorwiderstand die Spannung $U_\mathrm{RV} = 230\,\mathrm{V} - 150\,\mathrm{V} = 80\,\mathrm{V}$ anliegen.

Nach der Spannungsteilerregel ist:

$$U_\mathrm{RV} = U \cdot \frac{R_\mathrm{V}}{R_\mathrm{V} + R}.$$

Auflösen nach R_V: $U_\mathrm{RV} \cdot R_\mathrm{V} - U \cdot R_\mathrm{V} = -U_\mathrm{RV} \cdot R$; $R_\mathrm{V} = \frac{U_\mathrm{RV} \cdot R}{U - U_\mathrm{RV}}$

$$R_\mathrm{V} = \frac{80\,\mathrm{V} \cdot 529\,\Omega}{230\,\mathrm{V} - 80\,\mathrm{V}} = \underline{\underline{282\,\Omega}}$$

Aufgabe 3.9

Ein in Abb. 3.2 dargestellter Verbraucher benötigt eine Betriebsspannung von $U_2 = 5{,}0\,\mathrm{V}$, bei der er einen Strom von $I_2 = 100\,\mathrm{mA}$ aufnimmt. Er wird an einer Spannung $U_\mathrm{B} = 12\,\mathrm{V}$ über einen Vorwiderstand $R_1 = 75\,\Omega$ betrieben. Für einen Feinabgleich ist dem Vorwiderstand ein Trimmwiderstand R_x parallel geschaltet.

a) Wie groß ist der Lastwiderstand R_2 des Verbrauchers? Welcher Spannungsabfall U_1 tritt an der Parallelschaltung von R_1 und R_x auf?
b) Wie groß ist der Strom I_1 durch R_1, wie groß ist der Strom I_x durch R_x?

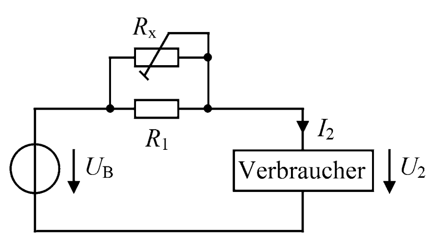


Abb. 3.2 Betrieb eines Verbrauchers über abgleichbaren Vorwiderstand

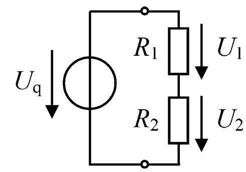


Abb. 3.3 Ein einfacher Spannungsteiler

c) Auf welchen Wert muss R_x eingestellt werden?
d) Wie groß sind die vom Verbraucher aufgenommene Nutzleistung P_2, die in R_x entstehende Verlustleistung P_x und die von U_B gelieferte Leistung P_{ges}? Wie groß ist der Wirkungsgrad η der Schaltung?

Lösung

a) Ohm'sches Gesetz: $R_2 = \frac{U_2}{I_2} = \frac{5\,\text{V}}{0{,}1\,\text{A}} = \underline{\underline{50\,\Omega}}$
Maschensatz: $U_1 = U_x = U_B - U_2 = 12\,\text{V} - 5\,\text{V} = \underline{\underline{7\,\text{V}}}$
b) Ohm'sches Gesetz: $I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{7\,\text{V}}{75\,\Omega} = \underline{\underline{93{,}3\,\text{mA}}}$
Knotengleichung: $I_x + I_1 - I_2 = 0$; $I_x = I_2 - I_1 = 100\,\text{mA} - 93{,}3\,\text{mA} = \underline{\underline{6{,}7\,\text{mA}}}$
c) $R_x = \frac{U_x}{I_x} = \frac{7\,\text{V}}{6{,}7\,\text{mA}} = \underline{\underline{1045\,\Omega}}$
d) $P_2 = U_2 \cdot I_2 = 5\,\text{V} \cdot 0{,}1\,\text{A} = \underline{\underline{0{,}5\,\text{W}}}$; $P_x = U_x \cdot I_x = 7\,\text{V} \cdot 6{,}7\,\text{mA} = \underline{\underline{46{,}9\,\text{mW}}}$
$P_{ges} = U_B \cdot I_2 = 12\,\text{V} \cdot 0{,}1\,\text{A} = \underline{\underline{1{,}2\,\text{W}}}$
$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} = \frac{0{,}5\,\text{W}}{1{,}2\,\text{W}} = \underline{\underline{0{,}417}}\ (41{,}7\,\%)$

3.2.4 Aufteilung einer Spannung, Spannungsteilerregel

Aufgabe 3.10

a) Geben Sie die Spannungsteilerregel in Worten an.
b) Gegeben ist der einfache Spannungsteiler in Abb. 3.3. Berechnen Sie die Spannungen U_1 und U_2 mit der Spannungsteilerregel. Gegeben sind die Werte: $U_q = 12\,\text{V}$, $R_1 = 22\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 10\,\text{k}\Omega$.

Lösung

a) Die Spannung an einem Widerstand in einer Reihenschaltung von Widerständen ist: Gesamtspannung an der Reihenschaltung mal (Widerstand, an dem ich die Spannung wissen will) geteilt durch (die Summe aller Widerstände).
b)
$$U_1 = U_q \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 12\,\text{V} \cdot \frac{22\,\text{k}\Omega}{22\,\text{k}\Omega + 10\,\text{k}\Omega} = \underline{\underline{8{,}25\,\text{V}}}$$
$$U_2 = U_q \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 12\,\text{V} \cdot \frac{10\,\text{k}\Omega}{22\,\text{k}\Omega + 10\,\text{k}\Omega} = \underline{\underline{3{,}75\,\text{V}}}$$

Probe: $U_q = U_1 + U_2$; $12\,\text{V} = 8{,}25\,\text{V} + 3{,}75\,\text{V}$

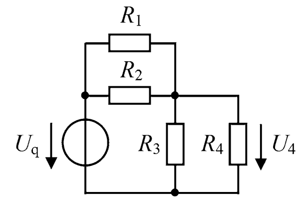


Abb. 3.4 Ein Widerstandsnetzwerk

Aufgabe 3.11
Gegeben ist das Widerstandsnetzwerk in Abb. 3.4. Bestimmen Sie mit Hilfe der Spannungsteilerregel die Spannung U_4. Gegeben sind die Werte: $U_q = 6\,\text{V}$, $R_1 = 2\,\Omega$, $R_2 = 6\,\Omega$, $R_3 = R_4 = 12\,\Omega$.

Lösung

$$U_4 = U_q \cdot \frac{R_3 \parallel R_4}{R_1 \parallel R_2 + R_3 \parallel R_4}$$

Die Parallelschaltung von zwei gleich großen Widerständen gibt den halben Widerstandswert.

$$R_3 \parallel R_4 = 12\,\Omega \parallel 12\,\Omega = 6\,\Omega$$
$$R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{12\,\Omega}{8\,\Omega} = 1{,}5\,\Omega$$
$$U_4 = 6\,\text{V} \cdot \frac{6\,\Omega}{1{,}5\,\Omega + 6\,\Omega} = \underline{\underline{4{,}8\,\text{V}}}$$

Aufgabe 3.12
Mit der Spannungsteilerregel sind die Spannungen U_2 und U_4 in Abb. 3.5 zu bestimmen.
Gegeben sind die Werte: $U_q = 6\,\text{V}$, $R_1 = 2\,\Omega$, $R_2 = 3\,\Omega$, $R_3 = R_4 = 12\,\Omega$.

Lösung
R_1 liegt parallel zur idealen Spannungsquelle U_q und beeinflusst somit die Strom- und Spannungsverteilung im übrigen Netzwerk nicht.

$$U_2 = U_q \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3 \parallel R_4} = 6\,\text{V} \cdot \frac{3\,\Omega}{3\,\Omega + 6\,\Omega} = \underline{\underline{2\,\text{V}}}$$
$$U_4 = U_q \cdot \frac{R_3 \parallel R_4}{R_2 + R_3 \parallel R_4} = 6\,\text{V} \cdot \frac{6\,\Omega}{3\,\Omega + 6\,\Omega} = \underline{\underline{4\,\text{V}}}$$

Probe: $U_q = U_2 + U_4$; $6\,\text{V} = 2\,\text{V} + 4\,\text{V}$

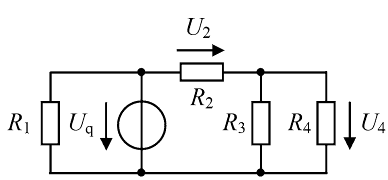


Abb. 3.5 Berechnung mit der Spannungsteilerregel

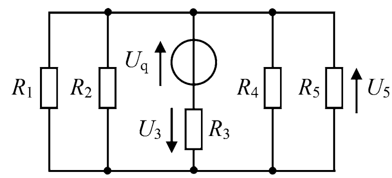


Abb. 3.6 Beispiel zur Spannungsteilerregel

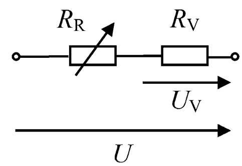


Abb. 3.7 Schaltung zur Einstellung einer Spannung

Aufgabe 3.13

In Abb. 3.6 sind die Spannungen U_3 und U_5 mit der Spannungsteilerregel zu berechnen.

Gegeben sind die Werte:

$U_q = 20\,\text{V}$, $R_1 = 20\,\Omega$, $R_2 = 8\,\Omega$, $R_3 = 6\,\Omega$, $R_4 = 24\,\Omega$, $R_5 = 30\,\Omega$.

Lösung

Die Widerstände R_1 und R_2 liegen parallel zu R_4 und R_5. Der Ersatzwiderstand R_g ist:

$$R_g = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} = 4\,\Omega; \quad U_3 = U_q \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_g} = 20\,\text{V} \cdot \frac{6\,\Omega}{6\,\Omega + 4\,\Omega} = \underline{\underline{12\,\text{V}}}$$

$$U_5 = U_q \cdot \frac{R_g}{R_3 + R_g} = 20\,\text{V} \cdot \frac{4\,\Omega}{6\,\Omega + 4\,\Omega} = \underline{\underline{8\,\text{V}}}$$

Probe: $U_q = U_3 + U_5$; $20\,\text{V} = 12\,\text{V} + 8\,\text{V}$

Aufgabe 3.14

In der in Abb. 3.7 angegebenen Schaltung mit $U = 24\,\text{V}$ und $R_V = 180\,\Omega$ soll die Spannung U_V im Bereich von 1 V bis 20 V stufenlos geregelt werden.

a) Zwischen welchen Grenzen R_{Rmax} und R_{Rmin} muss R_R veränderbar sein?
b) Für welche maximale Leistung P_{max} muss R_R ausgelegt werden?

Lösung

a)

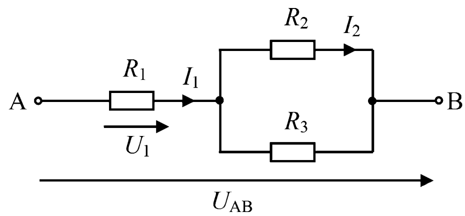
$$\frac{U_V}{U} = \frac{R_V}{R_R + R_V} \Rightarrow R_R = R_V \cdot \frac{U - U_V}{U_V}$$

$$R_{Rmax} = R_V \cdot \frac{U - U_{Vmin}}{U_{Vmin}} = 180\,\Omega \cdot \frac{24\,\text{V} - 1\,\text{V}}{1\,\text{V}} = \underline{\underline{4{,}14\,\text{k}\Omega}}$$

$$R_{Rmin} = R_V \cdot \frac{U - U_{Vmax}}{U_{Vmax}} = 180\,\Omega \cdot \frac{24\,\text{V} - 20\,\text{V}}{20\,\text{V}} = \underline{\underline{36\,\Omega}}$$

R_R muss im Bereich von 36 Ω bis 4140 Ω stufenlos veränderbar sein.

Abb. 3.8 Zur Strom- und Spannungsteilerregel



b) Die von R_R aufgenommene Leistung ist bei Leistungsanpassung maximal, d. h. bei $R_R = R_V$.
Dann ist $U_R = U_V = 12\,\text{V}$ und somit $P_{max} = \frac{(12\,\text{V})^2}{180\,\Omega} = \underline{\underline{0{,}8\,\text{W}}}$.

Aufgabe 3.15
Bestimmen Sie in Abb. 3.8 die Verhältnisse I_2/I_1 und U_1/U_{AB} mittels Strom- bzw. Spannungsteilerregel.
Gegeben sind die Werte: $R_1 = 9\,\Omega$; $R_2 = 6\,\Omega$; $R_3 = 2\,\Omega$

Lösung

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\frac{R_2 \cdot R_3}{R_2+R_3}}{R_2} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} = \frac{2\,\Omega}{6\,\Omega + 2\,\Omega} = \underline{\underline{0{,}25}}$$

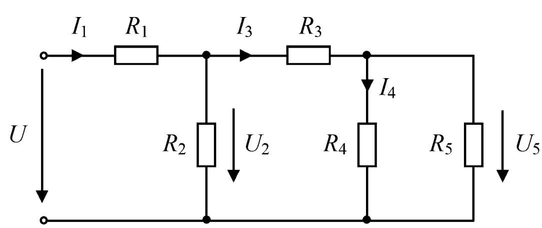
$$\frac{U_1}{U_{AB}} = \frac{R_1}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2+R_3}} = \frac{9\,\Omega}{9\,\Omega + \frac{6\,\Omega \cdot 2\,\Omega}{6\,\Omega+2\,\Omega}} = \underline{\underline{0{,}86}}$$

Aufgabe 3.16
a) Geben Sie für die in Abb. 3.9 angegebene Schaltung einen allgemeinen Ausdruck für den an der Spannung U liegenden Gesamtwiderstand R_{ges} an. Der Ausdruck braucht algebraisch nicht vereinfacht werden.
b) Berechnen Sie mit der Stromteilerregel allgemein (als Formel) das Verhältnis I_4/I_1.

Nun sind folgende Werte gegeben:
$R_1 = 10\,\Omega$; $R_2 = 5\,\Omega$; $R_3 = 10\,\Omega$; $R_4 = 2\,\Omega$; $R_5 = 2\,\Omega$; $U = 10\,\text{V}$

c) Wie groß ist der Zahlenwert von R_{ges}? Bestimmen Sie den Wert von U_2 und U_5. Berechnen Sie I_1 nach dem ohmschen Gesetz. Berechnen Sie I_4 mit dem Verhältnis I_4/I_1 und verifizieren Sie das Ergebnis mit dem Wert von U_5.

Abb. 3.9 Zu berechnendes Netzwerk



Lösung

a)

$$\underline{\underline{R_{\text{ges}} = \frac{\left(\frac{R_4R_5}{R_4+R_5} + R_3\right) \cdot R_2}{\frac{R_4R_5}{R_4+R_5} + R_3 + R_2} + R_1}}$$

b)

$$\frac{I_4}{I_1} = \frac{I_4}{I_3} \cdot \frac{I_3}{I_1}; \quad \frac{I_4}{I_3} = \frac{R_5}{R_4 + R_5}; \quad \frac{I_3}{I_1} = \frac{R_2}{R_2 + R_3 + \frac{R_4 \cdot R_5}{R_4+R_5}};$$

$$\underline{\underline{\frac{I_4}{I_1} = \frac{R_2R_5}{(R_2 + R_3) \cdot (R_4 + R_5) + R_4 \cdot R_5}}}$$

c)

$$R_{\text{ges}} = \frac{11\,\Omega \cdot 5\,\Omega}{11\,\Omega + 5\,\Omega} + 10\,\Omega; \quad R_{\text{ges}} = \frac{215}{16}\,\Omega = \underline{\underline{13{,}44\,\Omega}}$$

$$\text{Spannungsteiler: } U_2 = U \cdot \frac{R_{2345}}{R_1 + R_{2345}}; \quad R_{2345} = \frac{\left(\frac{R_4R_5}{R_4+R_5} + R_3\right) \cdot R_2}{\frac{R_4R_5}{R_4+R_5} + R_3 + R_2};$$

$$R_{2345} = \frac{55}{16} = 3{,}44\,\Omega$$

$$U_2 = 10\,\text{V} \cdot \frac{\frac{55}{16}\,\Omega}{10\,\Omega + \frac{55}{16}\,\Omega}; \quad U_2 = \frac{110}{43}\,\text{V} = \underline{\underline{2{,}56\,\text{V}}}$$

$$U_5 = U_2 \cdot \frac{\frac{R_4R_5}{R_4+R_5}}{\frac{R_4R_5}{R_4+R_5} + R_3}; \quad U_5 = \frac{110}{43}\,\text{V} \cdot \frac{1}{11} = \frac{10}{43}\,\text{V} = \underline{\underline{0{,}23\,\text{V}}}$$

$$I_1 = \frac{U}{R_{\text{ges}}} = \frac{10\,\text{V}}{13{,}44\,\Omega} = \underline{\underline{0{,}74\,\text{A}}}; \quad I_4 = I_1 \cdot \frac{R_2R_5}{(R_2 + R_3) \cdot (R_4 + R_5) + R_4 \cdot R_5}$$

$$I_4 = I_1 \cdot \frac{10\,\Omega}{64\,\Omega} = \underline{\underline{0{,}12\,\text{A}}}; \quad I_4 = \frac{U_5}{R_4} = \frac{0{,}23\,\text{V}}{2\,\Omega} = \underline{\underline{0{,}12\,\text{A}}}$$

Aufgabe 3.17

Berechnen Sie den Strom I_3 durch R_3 in der Schaltung nach Abb. 3.10 mit Hilfe

a) der Spannungsteilerregel
b) der Stromteilerregel.

Gegeben: $U_q = 12\,\text{V}$; $R_i = 1\,\Omega$; $R_1 = 9\,\Omega$; $R_2 = 8\,\Omega$; $R_3 = 2\,\Omega$.

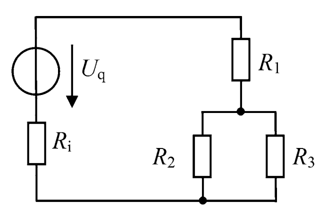


Abb. 3.10 Schaltung zu Spannungs- und Stromteilerregel

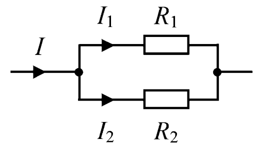


Abb. 3.11 Stromteiler

Lösung

a)

$$U_3 = U_q \cdot \frac{\frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}}{\frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} + R_i + R_1} = 12\,\mathrm{V} \cdot \frac{\frac{2 \cdot 8}{10}}{1{,}6 + 10} = 1{,}66\,\mathrm{V}$$

$$I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{1{,}66\,\mathrm{V}}{2\,\Omega} = \underline{\underline{0{,}83\,\mathrm{A}}}$$

b)

$$I_3 = I_1 \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} = \frac{U_q}{R_i + R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} = \frac{12\,\mathrm{V}}{11{,}6\,\Omega} \cdot \frac{8}{10} = \underline{\underline{0{,}83\,\mathrm{A}}}$$

3.2.5 Aufteilung des Stromes, Stromteilerregel

Aufgabe 3.18

Die Parallelschaltung von zwei Widerständen wird als Stromteiler bezeichnet (Abb. 3.11).

Bestimmen Sie mit der Stromteilerregel die Teilströme I_1 und I_2. Der Gesamtstrom ist $I = 0{,}7\,\mathrm{A}$, die Widerstandswerte sind $R_1 = 820\,\Omega$, $R_2 = 470\,\Omega$.

Lösung

$$I_1 = I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0{,}7\,\mathrm{A} \cdot \frac{470\,\Omega}{820\,\Omega + 470\,\Omega} = \underline{\underline{255\,\mathrm{mA}}}$$

$$I_2 = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 0{,}7\,\mathrm{A} \cdot \frac{820\,\Omega}{820\,\Omega + 470\,\Omega} = \underline{\underline{445\,\mathrm{mA}}}$$

Probe nach Knotenregel: $I = I_1 + I_2$; $0{,}7\,\mathrm{A} = 0{,}255\,\mathrm{A} + 0{,}445\,\mathrm{A}$

Aufgabe 3.19

Berechnen Sie in Abb. 3.12 den Strom I_{R2} durch R_2 allgemein und als Zahlenwert mit der Stromteilerregel.

Gegeben: $U_q = 40\,\mathrm{V}$, $R_1 = 2\,\Omega$, $R_2 = 47\,\Omega$, $R_3 = 220\,\Omega$.

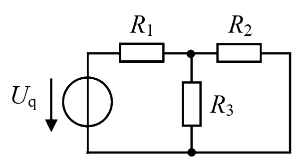
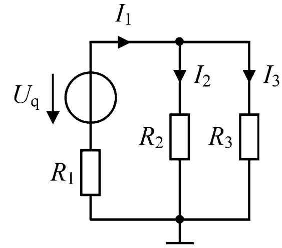


Abb. 3.12 Beispiel zur Stromteilerregel

Abb. 3.13 Zu berechnende Schaltung



Lösung

$$I = \frac{U_q}{R_1 + R_2 \parallel R_3}$$

$$I_{R2} = I \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3} = \frac{U_q}{R_1 + R_2 \parallel R_3} \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3} = \frac{U_q}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}} \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3}$$

$$= \underline{\underline{\frac{U_q \cdot R_3}{R_1 \cdot (R_2 + R_3) + R_2 \cdot R_3}}}$$

$$\underline{\underline{I_{R2} = 0{,}81\,\text{A}}}$$

Aufgabe 3.20

Gegeben ist die in Abb. 3.13 dargestellte Schaltung. Berechnen Sie den Gesamtstrom I_1 und dann mit der Stromteilerregel die Teilströme I_2 und I_3.

Gegeben: $U_q = 4{,}0\,\text{V}$, $R_1 = 2\,\Omega$, $R_2 = 3\,\Omega$, $R_3 = 6\,\Omega$.

Lösung

$$I_1 = \frac{U_q}{R_1 + R_2 \parallel R_3} = \frac{4\,\text{V}}{2\,\Omega + \frac{3\,\Omega \cdot 6\,\Omega}{3\,\Omega + 6\,\Omega}} = \underline{\underline{1{,}0\,\text{A}}}; \quad I_2 = I_1 \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3} = \underline{\underline{0{,}67\,\text{A}}}$$

$$I_3 = I_1 \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} = \underline{\underline{0{,}33\,\text{A}}}$$

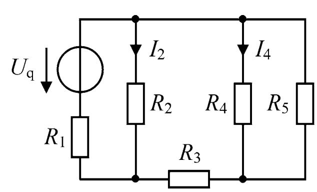
Probe nach Knotenregel: $I_1 = I_2 + I_3$; $1{,}0\,\text{A} = 0{,}67\,\text{A} + 0{,}33\,\text{A}$

Aufgabe 3.21

Bestimmen Sie für die in Abb. 3.14 gegebene Schaltung mit Hilfe des ohmschen Gesetzes, der Knotenregel und der Stromteilerregel die Ströme I_2 und I_4.

Gegeben: $U_q = 6\,\text{V}$, $R_1 = 50\,\Omega$, $R_2 = 80\,\Omega$, $R_3 = 20\,\Omega$, $R_4 = 30\,\Omega$, $R_5 = 60\,\Omega$

Abb. 3.14 Ströme sind zu berechnen



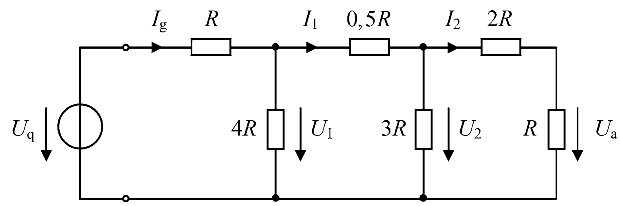


Abb. 3.15 Schaltung mit Widerständen

Lösung
Zunächst wird der Ersatzwiderstand R_g des Netzwerkes aus R_2 bis R_5 bestimmt.

$$R_g = R_2 \parallel (R_3 + R_4 \parallel R_5); \quad R_4 \parallel R_5 = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_4 + R_5} = \frac{30\,\Omega \cdot 60\,\Omega}{90\,\Omega} = 20\,\Omega$$

$$R_3 + R_4 \parallel R_5 = 40\,\Omega; \quad R_g = \frac{80\,\Omega \cdot 40\,\Omega}{80\,\Omega + 40\,\Omega} = 26{,}666\,\Omega$$

Der Gesamtstrom durch die Reihenschaltung aus R_1 und R_g ist:

$$I = \frac{U_q}{R_1 + R_g} = \frac{6\,\text{V}}{76{,}7\,\Omega} = 78{,}26\,\text{mA}$$

$$I_2 = I \cdot \frac{R_3 + R_4 \parallel R_5}{R_2 + R_3 + R_4 \parallel R_5} = 78{,}26\,\text{mA} \cdot \frac{40\,\Omega}{120\,\Omega} = \underline{\underline{26{,}09\,\text{mA}}}$$

Der Strom durch die Parallelschaltung von R_4 und R_5 ist:

$$I_{45} = I - I_2 = 78{,}26\,\text{mA} - 26{,}09\,\text{mA} = 52{,}17\,\text{mA}.$$

$$I_4 = I_{45} \cdot \frac{R_5}{R_4 + R_5} = 52{,}17\,\text{mA} \cdot \frac{60\,\Omega}{90\,\Omega} = \underline{\underline{34{,}78\,\text{mA}}}$$

Aufgabe 3.22
Gegeben ist die in Abb. 3.15 dargestellte Schaltung.

a) Berechnen Sie die Spannungsverhältnisse $\frac{U_a}{U_2}$, $\frac{U_2}{U_1}$, $\frac{U_1}{U_q}$ und $\frac{U_a}{U_q}$ mit Hilfe der Spannungsteilerregel.
b) Berechnen Sie die Stromverhältnisse $\frac{I_2}{I_1}$ und $\frac{I_1}{I_g}$ mit Hilfe der Stromteilerregel und bestimmen Sie daraus das Spannungsverhältnis $\frac{U_a}{U_q}$. Kontrollieren Sie das Ergebnis mit der Lösung aus a).

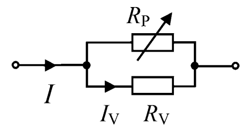


Abb. 3.16 Stufenlos einstellbarer Strom

Lösung

a)

$$U_a = U_2 \cdot \frac{R}{R+2R}; \quad \frac{U_a}{U_2} = \frac{R}{R+2R} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}; \quad (R+2R) \parallel 3R = 1{,}5\,\mathrm{R};$$

$$U_2 = U_1 \cdot \frac{1{,}5R}{0{,}5R + 1{,}5R}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1{,}5R}{0{,}5R + 1{,}5R} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}; \quad (1{,}5R + 0{,}5R) \parallel 4R = \frac{2R \cdot 4R}{2R + 4R} = \frac{4}{3}R;$$

$$\frac{U_1}{U_q} = \frac{\frac{4}{3}R}{R + \frac{4}{3}R} = \underline{\underline{\frac{4}{7}}}$$

$$\frac{U_a}{U_q} = \frac{U_a}{U_2} \cdot \frac{U_2}{U_1} \cdot \frac{U_1}{U_q} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{7} = \underline{\underline{\frac{1}{7}}}$$

b)

$$I_2 = I_1 \cdot \frac{3R}{3R+3R}; \quad \underline{\underline{\frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{2}}}; \quad I_1 = I_g \cdot \frac{4R}{4R+2R}; \quad \underline{\underline{\frac{I_1}{I_g} = \frac{2}{3}}}$$

$$U_a = I_2 \cdot R; \quad R_{ges} = \frac{4}{3R} + R = \frac{7}{3}R; \quad U_q = I_g \cdot R_{ges}$$

$$\frac{U_a}{U_q} = \frac{R}{R_{ges}} \cdot \frac{I_2}{I_g} = \frac{R}{R_{ges}} \cdot \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{I_1}{I_g} = \frac{1}{\frac{7}{3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{7}}}$$

Die Lösung in a) war ebenfalls $\frac{U_a}{U_q} = \frac{1}{7}$.

Aufgabe 3.23

In der Schaltung nach Abb. 3.16 mit $R_V = 820\,\Omega$ und einem Gesamtstrom $I = 0{,}5\,\mathrm{A}$ soll der Strom I_V von 10 mA bis 100 mA stufenlos einstellbar sein.

a) In welchem Widerstandsbereich R_{Pmax}, R_{Pmin} muss R_p veränderbar sein?
b) Für welche maximale Leistung P_{max} muss R_p ausgelegt werden?

Lösung

a)

$$\frac{I_V}{I} = \frac{R_P}{R_P + R_V} \Rightarrow R_P = R_V \cdot \frac{I_V}{I - I_V};$$

$$R_{\text{Pmax}} = R_V \cdot \frac{I_{\text{Vmax}}}{I - I_{\text{Vmax}}} = 820\,\Omega \cdot \frac{100\,\text{mA}}{500\,\text{mA} - 100\,\text{mA}} = \underline{\underline{205\,\Omega}}$$

$$R_{\text{Pmin}} = R_V \cdot \frac{I_{\text{Vmin}}}{I - I_{\text{Vmin}}} = 820\,\Omega \cdot \frac{10\,\text{mA}}{500\,\text{mA} - 10\,\text{mA}} = \underline{\underline{16{,}73\,\Omega}}$$

R_P muss im Bereich von 16,73 Ω bis 205 Ω stufenlos veränderbar sein.

b) Die von R_P aufgenommene Leistung wäre für den Fall der Leistungsanpassung mit $R_P = R_V$ maximal.

Da R_{Pmax} kleiner als R_V ist, ergibt sich die maximale Leistung P_{max}, für die R_P ausgelegt werden muss, aus R_{Pmax} und dem zugehörigen, durch R_P fließenden Strom $I_P(R_{\text{Pmax}})$.

$$P_{\text{max}} = [I_P(R_{\text{Pmax}})]^2 \cdot R_{\text{Pmax}} = (0{,}4\,\text{A})^2 \cdot 205\,\Omega = \underline{\underline{32{,}8\,\text{W}}}$$

3.2.6 Temperaturabhängigkeit des Widerstandes

Aufgabe 3.24

Ein Elektromotor hat eine Wicklung aus Kupferdraht. Bei 20 °C ist der Widerstand der Wicklung $R_{\text{kalt}} = 324\,\text{m}\Omega$. Im Betrieb erwärmt sich der Motor, dadurch steigt der Wicklungswiderstand auf $R_{\text{warm}} = 382\,\text{m}\Omega$. Welche Temperatur ϑ der Wicklung stellt sich ein?

Für 20 °C beträgt der Temperaturkoeffizient von Kupfer $\alpha_{20} = 3{,}9 \cdot 10^{-3}\,\text{K}^{-1}$.

Lösung

Die Widerstandsänderung eines metallischen Leiters durch eine von 20 °C abweichende Umgebungstemperatur wird nach folgender Formel berechnet: $\Delta R = \alpha_{20} \cdot R_{20} \cdot \Delta\vartheta$.

Hier ist $\Delta R = R_{\text{warm}} - R_{\text{kalt}} = 58\,\text{m}\Omega$. Somit ist:

$$\Delta\vartheta = \frac{\Delta R}{\alpha_{20} \cdot R_{20}} = \frac{58\,\text{m}\Omega}{3{,}9 \cdot 10^{-3}\,\text{K}^{-1} \cdot 324\,\text{m}\Omega} = 45{,}9\,\text{K}.$$

Um diese Temperatur hat sich die Wicklung über 20 °C erwärmt.

Die Temperatur der Wicklung ist somit $\vartheta = 20\,°\text{C} + 45{,}9\,°\text{C} = \underline{\underline{65{,}9\,°\text{C}}}$.

Aufgabe 3.25

Ein Präzisionswiderstand darf bei einer Änderung seiner Umgebungstemperatur seinen Wert um höchstens ±0,01 % gegenüber seinem Wert bei 20 °C ändern. In welchem Temperaturbereich kann der Widerstand verwendet werden? Der Temperaturkoeffizient bei 20 °C beträgt $\alpha_{20} = 4 \cdot 10^{-5}\,\text{K}^{-1}$.

Lösung

Die Widerstandsänderung in Ohm eines metallischen Leiters durch eine von 20 °C abweichende Umgebungstemperatur ergibt sich nach $\Delta R = \alpha_{20} \cdot R_{20} \cdot \Delta\vartheta$. Die relative (prozentuale) Widerstandsabweichung ist $\frac{\Delta R}{R_{20}} = \alpha_{20} \cdot \Delta\vartheta$. Es ist $\pm 0{,}01\,\% = \pm 10^{-4}$. Es folgt:

$$\pm 10^{-4} = \alpha_{20} \cdot \Delta\vartheta; \quad \Delta\vartheta = \frac{\pm 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}} = \pm 2{,}5\,\mathrm{K}$$

Als Abweichung von 20 °C ergibt sich damit ein Temperaturbereich zwischen 17,5 °C und 22,5 °C: $\underline{\underline{17{,}5\,°\mathrm{C} \leq \vartheta \leq 22{,}5\,°\mathrm{C}}}$. Der Temperaturbereich ist sehr klein.

Aufgabe 3.26

Die Wicklung eines mit Gleichstrom betriebenen Elektromagneten besteht aus Kupferdraht mit der Länge $l = 200\,\mathrm{m}$ und dem Querschnitt $A = 1{,}5\,\mathrm{mm}^2$. Der spezifische Widerstand von Kupfer bei 20 °C ist $\rho_{20} = 0{,}0175\,\frac{\Omega \cdot \mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$. Der Temperaturkoeffizient für 20 °C von Kupfer ist $\alpha_{20} = 3{,}9 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{°\mathrm{C}}$.

a) Wie groß ist der Widerstand R_{20} der Wicklung im kalten Zustand (bei der Temperatur $\vartheta = 20\,°\mathrm{C}$)?
b) Wie groß ist der Widerstand R_{120} der Wicklung bei einer Betriebstemperatur von 120 °C. Nehmen Sie an, der Widerstand hängt linear von der Temperatur ab.

Lösung

a)

$$R_{20} = \rho_{20} \cdot \frac{l}{A} = 0{,}0175\,\frac{\Omega \cdot \mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}} \cdot \frac{200\,\mathrm{m}}{1{,}5\,\mathrm{mm}^2} = \underline{\underline{2{,}\overline{3}\,\Omega}}$$

b) Der Temperaturkoeffizient ist positiv, der Widerstand nimmt also mit steigender Temperatur zu. Die Widerstandszunahme beträgt

$$\Delta R = \alpha_{20} \cdot R_{20} \cdot \Delta\vartheta = 3{,}9 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{°\mathrm{C}} \cdot 2{,}\overline{3}\,\Omega \cdot 100\,°\mathrm{C} = 0{,}91\,\Omega$$

Somit ist $R_{120} = R_{20} + \Delta R = 2{,}\overline{3}\,\Omega + 0{,}91\,\Omega = \underline{\underline{3{,}24\,\Omega}}$

Aufgabe 3.27

Die Kupferwicklung eines Transformators hat bei 15 °C einen Widerstand von $R_{15} = 18\,\Omega$. Im Dauerbetrieb steigt der Widerstand auf 23,5 Ω. Welche Temperatur hat die Wicklung angenommen?

Der Temperaturkoeffizient (Temperaturbeiwert) für 20 °C von Kupfer ist $\alpha_{20} = 0{,}0039\,\mathrm{K}^{-1}$.

Lösung

Der Widerstand eines metallischen Leiters bei der Temperatur ϑ ist $R_\vartheta = R_{20}(1 + \alpha_{20} \cdot \Delta\vartheta)$ mit R_{20} = Widerstandswert bei 20 °C und $\Delta\vartheta$ = Temperaturdifferenz zu 20 °C.

Somit ist $R_{15} = R_{20}\,[1 + \alpha_{20} \cdot (15\,°\text{C} - 20\,°\text{C})]$; daraus ergibt sich R_{20} zu

$$R_{20} = \frac{R_{15}}{1 + \alpha_{20}(-5\,\text{K})} = \frac{18\,\Omega}{1 + 0{,}0039\,\text{K}^{-1} \cdot (-5\,\text{K})} = 18{,}36\,\Omega\,.$$

Im Dauerbetrieb ist die Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta$ zu 20 °C:

$$\Delta\vartheta = \frac{1}{\alpha_{20}}\left(\frac{R_\vartheta}{R_{20}} - 1\right);$$

R_ϑ ist der Widerstandswert der Wicklung von 23,5 Ω im Dauerbetrieb.

$$\Delta\vartheta = \frac{1}{0{,}0039\,\text{K}^{-1}}\left(\frac{23{,}5\,\Omega}{18{,}36\,\Omega} - 1\right) = 71{,}8\,\text{K}$$

Die Wicklung hat somit die Temperatur $\vartheta = \Delta\vartheta + 20\,°\text{C} = \underline{\underline{91{,}8\,°\text{C}}}$

Aufgabe 3.28

Eine Spule ist aus Aluminiumdraht gewickelt und hat bei 20 °C einen Widerstand R_{20} von 50 Ω. Sie erwärmt sich auf 70 °C. Wie groß ist dann der Wicklungswiderstand R_{70} der Spule?

Der Temperaturkoeffizient für 20 °C von Aluminium ist $\alpha_{20} = 0{,}00377\,\text{K}^{-1}$.

Lösung

$R_\vartheta = R_{20}(1 + \alpha_{20} \cdot \Delta\vartheta)$; $R_{70} = 50\,\Omega(1 + 0{,}00377\,\text{K}^{-1} \cdot 50\,\text{K}) = \underline{\underline{59{,}43\,\Omega}}$

Aufgabe 3.29

Ein Kupferdraht mit kreisförmigem Querschnitt hat einen Durchmesser $d = 0{,}2$ mm und eine Länge $l = 20$ m. Wie groß ist der Widerstand R_{20} des Drahtes bei einer Temperatur $\vartheta = 20\,°\text{C}$? Welchen Widerstand R_{180} nimmt der Draht bei einer Erwärmung auf $\vartheta = 180\,°\text{C}$ an? Wie groß ist die prozentuale Widerstandserhöhung?

Von Kupfer sind jeweils bei 20 °C der spezifische Widerstand $\rho_{\text{Cu}20} = 0{,}0176\,\frac{\Omega\cdot\text{mm}^2}{\text{m}}$ und der Temperaturkoeffizient $\alpha_{\text{Cu}20} = 3{,}9 \cdot 10^{-3}\,\text{K}^{-1}$ gegeben.

Lösung

$$\vartheta = 20\,°\text{C}: R_{20} = \rho_{\text{Cu}20} \cdot \frac{l}{A} = 0{,}0176\,\frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}} \cdot \frac{20\,\text{m}}{(0{,}1\,\text{mm})^2 \cdot \pi} = \underline{\underline{11{,}2\,\Omega}}$$

$$\vartheta = 180\,°\text{C}: \Delta R = \alpha_{\text{Cu}20} \cdot R_{20} \cdot \Delta\vartheta = 3{,}9 \cdot 10^{-3}\,\text{K}^{-1} \cdot 11{,}2\,\Omega \cdot 160\,\text{K} = 7\,\Omega$$

$$R_{180} = 11{,}2\,\Omega + 7\,\Omega = \underline{\underline{18{,}2\,\Omega}}$$

Dies entspricht einer Widerstandserhöhung um 62,5 %.

Aufgabe 3.30

Zwei Adern mit $d = 0{,}9\,\text{mm}$ Durchmesser eines im Erdreich liegenden Fernsprechkabels haben gegeneinander einen Kurzschluss. Zur Bestimmung des Fehlerortes misst man am Kabelanfang zwischen den Anschlüssen der Adern einen Widerstand von $R = 13{,}1\,\Omega$.

a) An welcher Stelle muss aufgegraben werden, wenn im Erdreich eine Temperatur von $20\,°\text{C}$ angenommen wird?
b) Um welche Strecke Δl liegt der Fehlerort vom vermeintlichen Ort entfernt, wenn die mittlere Temperatur im Erdreich in Wirklichkeit $12\,°\text{C}$ beträgt?

Gegeben: $\rho_{20} = 0{,}0178\,\frac{\Omega\cdot\text{mm}^2}{\text{m}}$, $\alpha_{20} = 3{,}9\cdot 10^{-3}\,\text{K}^{-1}$ (Temperaturkoeffizient für $20\,°\text{C}$)

Lösung

a) Der Gesamtwiderstand der beiden kurzgeschlossenen Adern ist:

$$R = \rho_{20}\cdot\frac{2\cdot l}{A}$$

Die Entfernung vom Kabelanfang zum Fehlerort ist:

$$l = \frac{A\cdot R}{2\cdot\rho_{20}} = \frac{0{,}45^2\,\text{mm}^2\cdot\pi\cdot 13{,}1\,\Omega}{2\cdot 0{,}0178\,\frac{\Omega\cdot\text{mm}^2}{\text{m}}} = \underline{\underline{234{,}1\,\text{m}}}$$

In einer Entfernung von 234,1 m vom Kabelanfang muss aufgegraben werden.

b) Durch die tatsächlich niedrigere Temperatur erhöht sich der Widerstand $R = 13{,}1\,\Omega$ um ΔR. $\Delta R = \alpha_{20}\cdot R_{20}\cdot\Delta\vartheta$; $\Delta R = 0{,}0039\,\text{K}^{-1}\cdot 13{,}1\,\Omega\cdot 8\,\text{K} = 0{,}4087\,\Omega$

$$l = \frac{A\cdot R}{2\cdot\rho_{20}} = \frac{0{,}45^2\,\text{mm}^2\cdot\pi\cdot(13{,}1\,\Omega + 0{,}4087\,\Omega)}{2\cdot 0{,}0178\,\frac{\Omega\cdot\text{mm}^2}{\text{m}}} = 241{,}40\,\text{m};\ \underline{\underline{\Delta l = 7{,}30\,\text{m}}}$$

Es folgt eine alternative Betrachtung.
In Wirklichkeit ist $R = 13{,}1\,\Omega$ nicht der Widerstand bei $20\,°\text{C}$, sondern bei $12\,°\text{C}$.

$$R_{12} = 13{,}1\,\Omega;\quad R_{12} = R_{20}\cdot[1+\alpha_{20}\cdot(12\,°\text{C} - 20\,°\text{C})];$$
$$R_{20} = \frac{R_{12}}{1+\alpha_{20}\cdot(12\,°\text{C} - 20\,°\text{C})}$$

Der Widerstand bei $20\,°\text{C}$ ist:

$$R_{20} = \frac{13{,}1\,\Omega}{1 + 3{,}9\cdot 10^{-3}\,\text{K}^{-1}\cdot(-8\,\text{K})} = 13{,}522\,\Omega$$

Dieser Widerstandswert kann jetzt in die Formel mit ρ_{20} eingesetzt werden.

$$l = \frac{A\cdot R}{2\cdot\rho_{20}} = \frac{0{,}45^2\,\text{mm}^2\cdot\pi\cdot 13{,}522\,\Omega}{2\cdot 0{,}0178\,\frac{\Omega\cdot\text{mm}^2}{\text{m}}} = 241{,}64\,\text{m};\quad \underline{\underline{\Delta l = 7{,}54\,\text{m}}}$$

Woher kommt die Differenz der Ergebnisse für Δl von 24 cm? In der Formel $\Delta R = \alpha_{20} \cdot R_{20} \cdot \Delta\vartheta$ wurde für R_{20} der Wert des Widerstandes bei 12 °C mit 13,1 Ω eingesetzt (also R_{12} für R_{20}). Das berechnete ΔR ist deshalb ungenau bzw. falsch. Die alternative Betrachtungsweise ist der richtige Ansatz.

Aufgabe 3.31

Ein Elektromotor wird an einer idealen Gleichspannungsquelle U_G mit 24,0 Volt betrieben, die 20,0 Meter vom Motor entfernt ist. Für die Leitungen wird Kupferdraht mit kreisrundem Querschnitt und einem Durchmesser von 2,0 mm verwendet. Die Wicklung des Motors besteht aus Kupferdraht, ihr Widerstand beträgt $R_W = 1{,}000\,\Omega$ bei einer Wicklungstemperatur von 20 °C.

Der spezifische Widerstand von Kupfer ist $1{,}76 \cdot 10^{-6}\,\Omega \cdot \text{cm}$. Der Temperaturkoeffizient für 20 °C von Kupfer ist $\alpha_{20} = 0{,}0039\,\text{K}^{-1}$. Rechnen Sie mit drei Nachkommastellen.

a) Wie groß ist die nutzbare Motorleistung P_{20}bei einer Wicklungstemperatur von 20 °C?

b) Durch den Dauerbetrieb steigt die Wicklungstemperatur des Motors von 20 °C auf 120 °C an. Wie groß ist jetzt die nutzbare Motorleistung P_{120}?

Lösung

a) Die gesamte Länge der Leitung ist: $l = 2 \cdot 20\,\text{m} = 40\,\text{m}$.

$$1{,}76 \cdot 10^{-6}\,\Omega \cdot \text{cm} = 0{,}0176\,\frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$$

Der Widerstand R_L der Leitung ist:

$$R_L = \rho \cdot \frac{l}{A_{\text{Kreis}}} = 0{,}0176\,\frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}} \cdot \frac{40\,\text{m}}{(1\,\text{mm})^2 \cdot \pi} = 0{,}224\,\Omega$$

Die Widerstände aus Zuleitung und Motorwicklung addieren sich: $R_G = R_L + R_W$. Der Gesamtwiderstand im Stromkreis ist somit $R_G = 1{,}224\,\Omega$. Im Stromkreis fließt der Strom: $I = \frac{U_G}{R_G} = \frac{24\,\text{V}}{1{,}224\,\Omega} = 19{,}608\,\text{A}$
An den Zuleitungen fällt die Spannung $U_L = I \cdot R_L = 19{,}608\,\text{A} \cdot 0{,}224\,\Omega = 4{,}392\,\text{V}$ ab.
Am Motor stehen nur $U_M = U_G - U_L = 24\,\text{V} - 4{,}392\,\text{V} = 19{,}608\,\text{V}$ zur Verfügung.
Die nutzbare Motorleistung ist: $P_{20} = U_M \cdot I = 19{,}608\,\text{V} \cdot 19{,}608\,\text{A}$;
$\underline{\underline{P_{20} = 384{,}474\,\text{W}}}$
Alternative Rechnung: $P_{20} = I^2 \cdot R_W = (19{,}608\,\text{A})^2 \cdot 1{,}000\,\Omega = 384{,}474\,\text{W}$

b) Der Widerstand der Motorwicklung erhöht sich um $\Delta R = \alpha_{20} \cdot R_{W20} \cdot \Delta\vartheta = 0{,}0039\,\text{K}^{-1} \cdot 1{,}000\,\Omega \cdot 100\,\text{K} = 0{,}39\,\Omega$ auf $1{,}390\,\Omega$.
Der Gesamtwiderstand im Stromkreis ist jetzt $R_G = 1{,}390\,\Omega + 0{,}224\,\Omega = 1{,}614\,\Omega$.
Somit ist der Strom im Stromkreis $I = \frac{U_G}{R_G} = \frac{24\,\text{V}}{1{,}614\,\Omega} = 14{,}870\,\text{A}$.

An den Zuleitungen fällt die Spannung $U_L = I \cdot R_L = 14{,}870\,\text{A} \cdot 0{,}224\,\Omega = 3{,}331\,\text{V}$ ab.

Am Motor stehen nur $U_M = U_G - U_L = 24\,\text{V} - 3{,}331\,\text{V} = 20{,}669\,\text{V}$ zur Verfügung.

Die nutzbare Motorleistung ist: $P_{120} = U_M \cdot I = 20{,}669\,\text{V} \cdot 14{,}870\,\text{A}$;

$\underline{\underline{P_{120} = 307{,}348\,\text{W}}}$

3.2.7 Zulässige Verlustleistung, Lastminderungskurve, Wärmewiderstand

Aufgabe 3.32

a) Wie lautet das ohmsche Gesetz der Wärmelehre?

b) Was kann aus der Lastminderungskurve eines Bauelementes abgelesen werden?

Lösung

a) Zur Erläuterung des ohmschen Gesetzes der Wärmelehre wird ein thermisches Ersatzschaltbild Abb. 3.17 verwendet.

Sind zwei Körper wärmeleitend miteinander verbunden, so ergibt sich eine Wärmeströmung vom Körper mit der höheren Temperatur T zum Körper mit der niedrigeren Temperatur T_A (Index A = Ambient = Umgebung). Das Verhältnis der in der Zeit t strömenden Wärmemenge Q ist der Wärmestrom P_{th}.

$$P_{th} = \frac{Q}{t}; \quad [P_{th}] = \text{W (Watt)}$$

Das ohmsche Gesetz der Wärmelehre besagt, dass der Wärmestrom P_{th} proportional zum Temperaturunterschied (Übertemperatur) $\Delta T = T - T_A$ und umgekehrt propor-

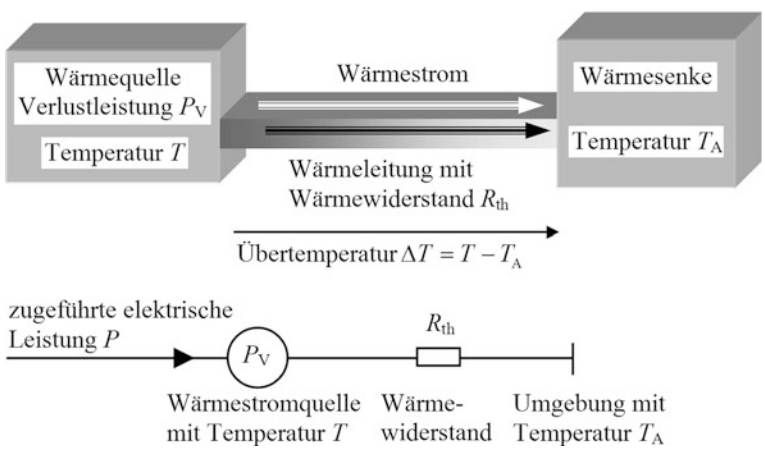


Abb. 3.17 Thermisches Ersatzschaltbild zur Wärmeleitung

tional zum Wärmeübergangswiderstand R_{th} ist:

$$P_{\text{th}} = \frac{T - T_{\text{A}}}{R_{\text{th}}} = \frac{\Delta T}{R_{\text{th}}}.$$

Daraus folgt: $R_{\text{th}} = \frac{T - T_{\text{A}}}{P_{\text{th}}}$
Bei elektronischen Bauelementen entsteht durch eine zugeführte elektrische Leistung P und daraus resultierender Verlustleistung P_{V} häufig eine Temperaturerhöhung des Bauteils oder der Sperrschicht des Halbleiters.
Mit
$R_{\text{th}} = R_{\text{th,JC}}$ = Wärmewiderstand Junction-Case (Sperrschicht zu Gehäuse, auch innerer Wärmewiderstand genannt)
$T = T_{\text{J}}$ = Temperatur der Sperrschicht
$P_{\text{th}} = P_{\text{V}}$ = Verlustleistung im Bauelement

folgt:

$$R_{\text{th,JC}} = \frac{T_{\text{J}} - T_{\text{A}}}{P_{\text{V}}}.$$

Häufig ist eine Zerlegung des Wärmewiderstandes in einzelne Komponenten möglich, die sich dann (wie bei der Reihenschaltung ohmscher Widerstände) summieren.

b) Für ein elektronisches Bauelement gibt die Lastminderungskurve oder Deratingkurve das Verhältnis von erlaubter Betriebsleistung P zur Nennleistung P_{N} (also P/P_{N}) in Abhängigkeit der Umgebungstemperatur T_{A} oder der Gehäusetemperatur T_{C} an. Bis zu einer bestimmten Temperatur ($T_{\text{A}} = 75\,°\text{C}$ Umgebungstemperatur oder $T_{\text{C}} = 25\,°\text{C}$ Gehäusetemperatur) ist dieses Verhältnis gleich 1,0 und fällt dann mit steigender Temperatur linear ab. Das heißt, das Bauelement ist dann mit steigender Umgebungstemperatur immer weniger belastbar.
Werden die Leistungen auf der Ordinate nicht im Verhältnis aufgetragen, so gibt der Wert $P_{\text{N}} = P_{\text{Vmax}} = P_{\text{tot}}$ auf der Ordinate die maximal zulässige Verlustleistung an. In Datenblättern ist diese als Nennbelastbarkeit, Nennleistung oder maximal erlaubte Verlustleistung angegeben. Bis zu der Temperatur $T_{\text{A,N}}$ (meist 75 °C Umgebungstemperatur) bzw. bis zu der Temperatur $T_{\text{C,N}}$ (meist 25 °C Gehäusetemperatur) darf die im Bauelement entstehende Verlustleistung P_{V} gleich P_{Vmax} sein. Oberhalb $T_{\text{A,N}}$ bzw. $T_{\text{C,N}}$ nimmt die zulässige Verlustleistung mit steigender Temperatur linear ab und erreicht bei der maximalen Betriebstemperatur des Bauelementes (entweder T_{Amax} oder T_{Cmax}) den Wert null.
Der Wärmewiderstand ist in Abb. 3.18: $R_{\text{th,JC}} = \frac{\Delta T}{P_{\text{tot}}}$.
Für die erlaubte Verlustleistung in Abhängigkeit der Gehäusetemperatur gilt:

$$P_{\text{V}}(T_{\text{C}}) = P_{\text{tot}} \cdot \frac{T_{\text{Cmax}} - T_{\text{C}}}{T_{\text{Cmax}} - T_{\text{C,N}}} = \frac{T_{\text{Cmax}} - T_{\text{C}}}{R_{\text{th,JC}}}.$$

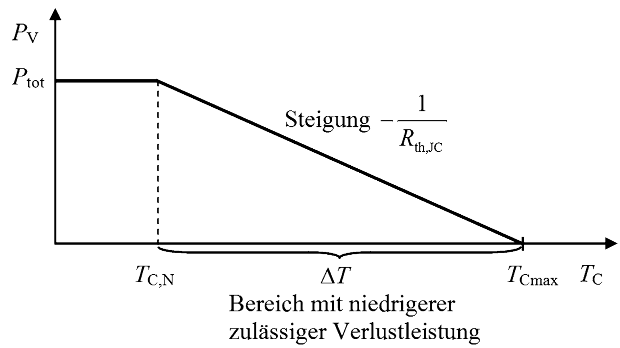


Abb. 3.18 Lastminderungskurve (P-Derating-Diagramm)

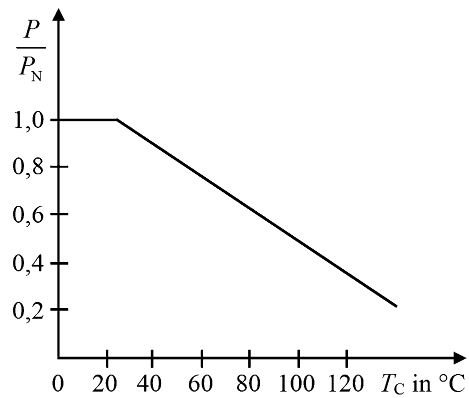


Abb. 3.19 Lastminderungskurve aus einem Datenblatt

Aufgabe 3.33
Dem Datenblatt eines Bauelementes wird die Lastminderungskurve in Abb. 3.19 entnommen. Um wie viel muss die Betriebslast bei einer Umgebungstemperatur $\vartheta_A = 100\,°C$ reduziert werden?

Lösung
Aus dem Diagramm Abb. 3.20 wird entnommen, dass die Last (Verlustleistung im Bauelement) um 50 % reduziert werden muss.

Aufgabe 3.34
Ein Bipolartransistor hat laut Datenblatt bei einer Umgebungstemperatur von $T_A = 25\,°C$ eine maximale Verlustleistung $P_{tot} = P_{Vmax} = 2\,W$. Die maximal erlaubte Sperrschichttemperatur ist mit $T_{Jmax} = 150\,°C$ angegeben.

a) Wie groß ist der Wärmeübergangswiderstand $R_{th,JA}$ von der Sperrschicht zur Umgebungsluft? In den Indizes bedeuten: J = Junction = Sperrschicht, A = Ambient = Umgebung.

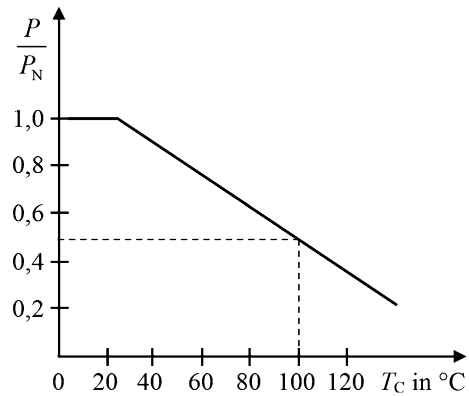


Abb. 3.20 Maximal erlaubte Last bei 100 °C

b) Wie groß darf die Verlustleistung P_{Vmax} im Transistor bei einer Umgebungstemperatur von 50 °C maximal sein?

c) Wie groß ist die Sperrschichttemperatur T_J, wenn bei der Umgebungstemperatur $T_A = 25\,°C$ die Verlustleistung im Transistor $P_V = 1\,W$ beträgt?

Lösung

a) Ohm'sches Gesetz der Wärmelehre: $P_{th} = \frac{\Delta T}{R_{th}}$.
P_{th} = Wärmestrom in Watt, ΔT = Temperaturunterschied zwischen zwei Orten bzw. Körpern, R_{th} = Wärmeübergangswiderstand (meist kurz als Wärmewiderstand bezeichnet) zwischen zwei Orten bzw. Körpern

$$\text{Es folgt: } R_{th,JA} = \frac{T_{Jmax} - T_A}{P_{Vmax}} \Rightarrow R_{th,JA} = \frac{150\,°C - 25\,°C}{2\,W} = \underline{\underline{62{,}5\,\frac{°C}{W}}}$$

b)

$$P_{Vmax} = \frac{T_{Jmax} - T_A}{R_{th,JA}}; \quad P_{Vmax} = \frac{150\,°C - 50\,°C}{62{,}5\,\frac{°C}{W}} = \underline{\underline{1{,}6\,W}}$$

c)

$$T_J = R_{th,JA} \cdot P_{Vmax} + T_A; \quad T_J = 62{,}5\,\frac{°C}{W} \cdot 1\,W + 25\,°C = \underline{\underline{87{,}5\,°C}}$$

Aufgabe 3.35

Durch eine Silizium-Halbleiterdiode fließt ein Gleichstrom $I = 1{,}2\,A$. Der Spannungsabfall an der Diode beträgt 0,8 V. Die Umgebungstemperatur ist $T_A = 65\,°C$. Der Wärmeübergangswiderstand zwischen Sperrschicht und Umgebung beträgt $R_{th,JA} = 90\,K/W$. Die maximal erlaubte Sperrschichttemperatur ist mit $T_{Jmax} = 170\,°C$ angegeben.

Wie hoch ist die Sperrschichttemperatur T_J? Ist die Diode überlastet?

Lösung

$$T_J = R_{th,JA} \cdot P_V + T_A = 90\,°C/W \cdot 0{,}8\,V \cdot 1{,}2\,A + 65\,°C = \underline{\underline{151{,}4\,°C}}$$

Es ist $T_J < T_{Jmax}$, die Diode ist nicht überlastet.

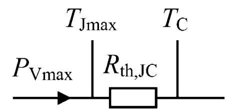


Abb. 3.21 Thermisches Ersatzschaltbild

Aufgabe 3.36
Für einen Transistor sind die folgenden höchstzulässigen Werte gegeben:

Maximale Kristalltemperatur $T_{\mathrm{Jmax}} = 100\,°\mathrm{C}$, maximale Verlustleistung $P_{\mathrm{Vmax}} = 1{,}0\,\mathrm{W}$.

Der Transistor wird auf ein Kühlblech montiert, der Wärmewiderstand des Transistors von der Sperrschicht zum Kühlblech beträgt $R_{\mathrm{th,JC}} = 20\,\mathrm{K/W}$.

a) Geben Sie das thermische Ersatzschaltbild an.
b) Wie groß darf die maximale Oberflächentemperatur T_C des Kühlblechs sein?

Lösung
a) Das thermische Ersatzschaltbild zeigt Abb. 3.21.
b) $P_{\mathrm{Vmax}} = \frac{T_{\mathrm{Jmax}}-T_\mathrm{C}}{R_{\mathrm{th,JC}}}$; $T_\mathrm{C} = T_{\mathrm{Jmax}} - P_{\mathrm{Vmax}} \cdot R_{\mathrm{th,JC}}$; $T_\mathrm{C} = 100\,°\mathrm{C} - 1{,}0\,\mathrm{W} \cdot 20\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}} = \underline{\underline{80\,°\mathrm{C}}}$

Aufgabe 3.37
Ein Transistor ist auf einen Kühlkörper montiert. Direkt am Gehäuse des Transistors wird eine Temperatur von $T_\mathrm{C} = 60\,°\mathrm{C}$ gemessen. Der Wärmewiderstand des Kühlkörpers zur Umgebungsluft ist $R_{\mathrm{th,HA}} = 10\,\mathrm{K/W}$. Der Wärmewiderstand der Sperrschicht (Kristall) zum Gehäuse des Transistors beträgt $R_{\mathrm{th,JC}} = 5\,\mathrm{K/W}$. Die Umgebungstemperatur ist $T_\mathrm{A} = 20\,°\mathrm{C}$.

a) Geben Sie das thermische Ersatzschaltbild an.
b) Wie groß ist die Verlustleistung P_V des Transistors?
c) Wie hoch ist die Temperatur T_J der Sperrschicht (des Kristalls)?

Lösung
a) Das thermische Ersatzschaltbild zeigt Abb. 3.22.
b)

$$P_\mathrm{V} = \frac{T_\mathrm{C} - T_\mathrm{A}}{R_{\mathrm{th,HA}}}; \quad P_\mathrm{V} = \frac{60\,\mathrm{K} - 20\,\mathrm{K}}{10\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}} = \underline{\underline{4\,\mathrm{W}}}$$

c)

$$T_\mathrm{J} = (R_{\mathrm{th,JC}} + R_{\mathrm{th,HA}}) \cdot P_\mathrm{V} + T_\mathrm{A}$$
$$T_\mathrm{J} = (5\,\mathrm{K/W} + 10\,\mathrm{K/W}) \cdot 4\,\mathrm{W} + 20\,°\mathrm{C} = \underline{\underline{80\,°\mathrm{C}}}$$

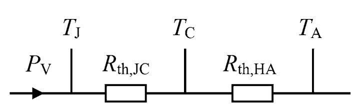


Abb. 3.22 Thermisches Ersatzschaltbild

Aufgabe 3.38
Aus dem Datenblatt eines Transistors werden folgende Daten entnommen:

- max. junction temperature $T_{Jmax} = 150\,°C$
- thermal resistance from junction to ambient $R_{th,JA} = \text{max. } 50\,K/W$
- thermal resistance junction-case $R_{th,JC} = \text{max. } 3\,K/W$.

Zwischen Transistor und Kühlkörper liegt eine elektrisch isolierende Wärmeleitfolie mit dem Wärmewiderstand $R_{th,F} = 0{,}5\,K/W$. Die Verlustleistung im Transistor beträgt $P_V = 10\,W$, die Umgebungstemperatur ist $T_A = 50\,°C$.

a) Welchen Wärmewiderstand $R_{th,HA}$ darf der Kühlkörper höchstens haben?
b) Wie groß dürfte die Verlustleistung P_{Vmax} ohne Kühlkörper maximal sein?

Lösung
a) Die Strecke für den Wärmestrom von der Sperrschicht des Halbleiterbauelementes bis zur Umgebungsluft setzt sich aus mehreren Wärmewiderständen zusammen. Die Summe aller Wärmewiderstände ergibt den gesamten Wärmewiderstand.

$$R_{th,JA} = R_{th,JC} + R_{th,CH} + R_{th,HA}$$

Hierin bedeuten: J = Junction = Sperrschicht, A = Ambient = Umgebung, C = Case = Gehäuse, H = Heatsink = Kühlkörper
Der gesamte Wärmewiderstand von der Sperrschicht bis zur Umgebungsluft ist:
$R_{th,JA}$ = Wärmewiderstand Junction-Ambient (Sperrschicht zu Umgebung).
Die einzelnen Komponenten des Wärmeübergangswiderstandes sind:
$R_{th,JC}$ = Wärmewiderstand Junction-Case (Sperrschicht zu Gehäuse),
$R_{th,CH}$ = Wärmewiderstand Case-Heatsink (Gehäuse zu Kühlkörper),
$R_{th,HA}$ = Wärmewiderstand Heatsink-Ambient (Kühlkörper zu Umgebung).
Die Gleichung zur Berechnung der Sperrschichttemperatur ist:

$$T_J = R_{th,JA} \cdot P_V + T_A.$$

Darin wird die Sperrschichttemperatur gleich der gegebenen maximalen Sperrschichttemperatur gesetzt. Man erhält: $T_{Jmax} = R_{th,JA} \cdot P_V + T_A$.
In diese Gleichung wird $R_{th,JA} = R_{th,JC} + R_{th,CH} + R_{th,HA}$ eingesetzt.

$$T_{Jmax} = (R_{th,JC} + R_{th,CH} + R_{th,HA}) \cdot P_V + T_A$$

Auflösen nach $R_{th,HA}$ ergibt:

$$R_{th,HA} = \frac{T_{Jmax} - (R_{th,JC} + R_{th,CH}) \cdot P_V - T_A}{P_V}$$

Der Wärmewiderstand zwischen Gehäuse und Kühlkörper entsteht durch die Wärmeleitfolie, es ist $R_{th,CH} = R_{th,F}$.

$$R_{th,HA} = \frac{150\,°C - (3\,°C/W + 0{,}5\,°C/W) \cdot 10\,W - 50\,°C}{10\,W} = \underline{\underline{6{,}5\,K/W}}$$

Der Kühlkörper darf höchstens einen Wärmewiderstand von 6,5 K/W haben.

b) Ohne Kühlkörper ist der Wärmewiderstand zwischen Sperrschicht und Umgebung $R_{th,JA} = 50\,K/W$. Die im Transistor entstehende Verlustleistung darf dann maximal sein:

$$P_{Vmax} = \frac{T_{Jmax} - T_A}{R_{th,JA}} = \frac{150\,°C - 50\,°C}{50\,°C/W} = \underline{\underline{2\,W}}$$

Aufgabe 3.39

Ein Transistor wird in dem Arbeitspunkt $U_{CE} = 20\,V$, $I_C = 100\,mA$ betrieben. Der Wärmewiderstand des Transistors ist $R_{th,JC} = 1\,K/W$, er wird auf einen Kühlkörper mit dem Wärmewiderstand $R_{th,HA} = 20\,K/W$ montiert. Die Umgebungstemperatur beträgt $T_A = 20\,°C$. Wie hoch ist die Sperrschichttemperatur T_J im Transistor?

Lösung

$T_J = (R_{th,JC} + R_{th,HA}) \cdot P_V + T_A = (1\,K/W + 20\,K/W) \cdot 20\,V \cdot 0{,}1\,A + 20\,°C = \underline{\underline{62\,°C}}$

Aufgabe 3.40

Zwei Transistoren sind auf einem gemeinsamen Kühlkörper befestigt. Beide Transistoren haben den inneren Wärmewiderstand $R_{th,JC} = 1\,K/W$ und sind durch eine Wärmeleitfolie mit dem Wärmewiderstand $R_{th,F} = 0{,}5\,K/W$ vom Kühlkörper galvanisch getrennt. In jedem Transistor entsteht maximal eine Verlustleistung von $P_V = 20\,W$. Die Umgebungstemperatur nimmt maximal 40 °C an, die Sperrschichttemperatur jedes Transistors darf $T_{Jmax} = 110\,°C$ nicht überschreiten. Welchen Wärmewiderstand $R_{th,HA}$ darf der Kühlkörper höchstens haben?

Lösung

Zunächst wird die in Aufgabe 3.38 hergeleitete Formel für einen Transistor verwendet.

$$R_{th,HA} = \frac{T_{Jmax} - (R_{th,JC} + R_{th,CH}) \cdot P_V - T_A}{P_V}$$

$$R_{th,HA} = \frac{110\,°C - (1\,K/W + 0{,}5\,K/W) \cdot 20\,W - 40\,°C}{20\,W} = 2\,K/W$$

Da der zweite Transistor die an die Umgebung abzuführende Verlustleistung verdoppelt, muss der Kühlkörper den halben Wärmewiderstand wie für einen Transistor haben. Somit muss gelten: $\underline{\underline{R_{th,HA} \leq 1\,K/W}}$.

Aufgabe 3.41

Zwei Transistoren sind auf einem gemeinsamen Kühlkörper befestigt. Beide Transistoren haben den inneren Wärmewiderstand $R_{\text{th,JC}} = 1\,\text{K/W}$ und sind durch eine Wärmeleitfolie mit dem Wärmewiderstand $R_{\text{th,F}} = 0{,}5\,\text{K/W}$ vom Kühlkörper galvanisch getrennt. Im Transistor T_1 entsteht maximal eine Verlustleistung von $P_{\text{V1}} = 10\,\text{W}$, im Transistor T_2 ist die maximale Verlustleistung $P_{\text{V2}} = 20\,\text{W}$. Die Umgebungstemperatur nimmt maximal 40 °C an, die Sperrschichttemperatur jedes Transistors darf $T_{\text{Jmax}} = 110\,°\text{C}$ nicht überschreiten. Welchen Wärmewiderstand $R_{\text{th,HA}}$ darf der Kühlkörper höchstens haben?

Lösung

Der Kühlkörper muss die Summe der Verlustleistungen $P_{\text{V1}} + P_{\text{V2}}$ an die Umgebung abführen. Für jeden der beiden Transistoren ergibt sich mit $R_{\text{th,CH}} = R_{\text{th,F}}$ folgende Sperrschichttemperatur:

$$T_{\text{J1,2}} = (R_{\text{th,JC}} + R_{\text{th,F}}) \cdot P_{\text{V1,2}} + R_{\text{th,HA}} \cdot (P_{\text{V1}} + P_{\text{V2}}) + T_{\text{A}}$$

Hätten die Transistoren einen unterschiedlichen inneren Wärmewiderstand, so wäre für $R_{\text{th,JC}}$ der jeweilige Wert einzusetzen.

Wäre z. B. der Wärmewiderstand des Kühlkörpers $R_{\text{th,HA}} = 1{,}6\,\text{K/W}$, so wäre die Sperrschichttemperatur von T_1

$$T_{\text{J1}} = (1\,\text{K/W} + 0{,}5\,\text{K/W}) \cdot 10\,\text{W} + 1{,}6\,\text{K/W} \cdot 30\,\text{W} + 40\,\text{K} = 103\,°\text{C}$$

und die Sperrschichttemperatur von T_2 wäre

$$T_{\text{J2}} = (1\text{K/W} + 0{,}5\,\text{K/W}) \cdot 20\,\text{W} + 1{,}6\,\text{K/W} \cdot 30\,\text{W} + 40\,\text{K} = 118\,°\text{C}.$$

Auflösen der Formel für die Sperrschichttemperatur nach $R_{\text{th,HA}}$ und Einsetzen von $T_{\text{J1,2}} = T_{\text{Jmax}}$ ergibt:

$$R_{\text{th,HA}} = \frac{T_{\text{Jmax}} - (R_{\text{th,JC}} + R_{\text{th,F}}) \cdot P_{\text{V1,2}} - T_{\text{A}}}{P_{\text{V1}} + P_{\text{V2}}}.$$

Da der Kühlkörper für den Transistor mit der größeren Verlustleistung bemessen sein muss, ist in diese Formel die größere Verlustleistung $P_{\text{V2}} = 20\,\text{W}$ einzusetzen.

$$R_{\text{th,HA}} = \frac{110\,\text{K} - 1{,}5\,\text{K/W} \cdot 20\,\text{W} - 40\,\text{K}}{30\,\text{W}} = \underline{\underline{1{,}33\,\text{K/W}}}$$

Aufgabe 3.42

Für einen ohmschen Widerstand ist eine maximale Verlustleistung von $P_{\text{Vmax}} = 0{,}22\,\text{W}$ bis zu einer Umgebungstemperatur von maximal $T_{\text{A,N}} = 70\,°\text{C}$ spezifiziert. Der Widerstand darf maximal eine Temperatur von $T_{\text{max}} = 125\,°\text{C}$ annehmen. Welchen thermischen Widerstand $R_{\text{th,A}}$ hat das Bauelement zur Umgebung? Wie groß darf die im Widerstand entstehende Verlustleistung maximal sein, wenn er bei einer Umgebungstemperatur von $T_{\text{A}} = 100\,°\text{C}$ betrieben wird? Zeichnen Sie die zugehörige Lastminderungskurve.

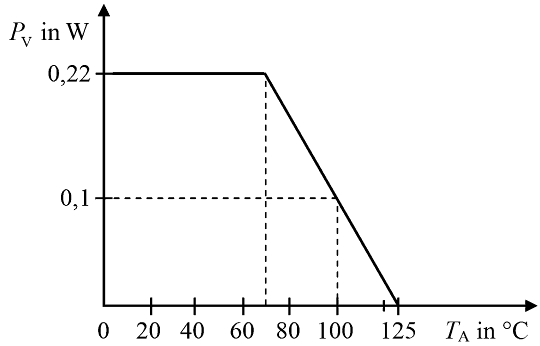


Abb. 3.23 Lastminderungskurve des Widerstandes

Lösung

$$R_{th,A} = \frac{T_{max} - T_{A,N}}{P_{Vmax}} = \frac{125\,°C - 70\,°C}{0{,}22\,W} = \underline{\underline{250\,\frac{K}{W}}}$$

$$P_V(T_A = 100\,°C) = P_{Vmax} \cdot \frac{T_{max} - T_A}{T_{max} - T_{A,N}} = 0{,}22\,W \cdot \frac{125\,°C - 100\,°C}{125\,°C - 70\,°C} = \underline{\underline{0{,}1\,W}}$$

Die zugehörige Lastminderungskurve zeigt Abb. 3.23.

3.2.8 Technische Ausführung von Festwiderständen

Aufgabe 3.43
Welche zwei grundsätzlichen Bauformen technischer ohmscher Widerstände gibt es? Welche Eigenschaften haben sie?

Lösung
Ohm'sche Widerstände gibt es in der Ausführung als bedrahtete Bauelemente mit Drahtanschlüssen und als oberflächenmontierbare Bauelemente. Diese werden als SMD-Bauelemente (Surface Mounted Device) bezeichnet. Bedrahtete Widerstände für die Durchsteckmontage (THT = Through Hole Technology) auf Leiterplatten sind wesentlich größer als SMD-Widerstände, besitzen aber wegen ihres größeren Körpers eine höhere Belastbarkeit in Watt. Ein Einsatzgebiet ist die Leistungselektronik. Eine automatische Bestückbarkeit ist in der Elektronikfertigung kaum möglich. SMD-Widerstände sind sehr klein und wenig belastbar. Sie sind mit hoher Geschwindigkeit mit Fertigungsautomaten auf Leiterplatten bestückbar und ermöglichen eine Miniaturisierung. Ein Einsatzgebiet ist die Mikroelektronik.

Aufgabe 3.44
Geben Sie Beispiele für Aufbauarten bezüglich des Materials von Festwiderständen an.

Lösung
Die Aufbauart von Festwiderständen kann nach dem Widerstandsmaterial unterschieden werden. Es gibt z. B. Kohleschicht- und Metallschichtwiderstände. Bei Drahtwiderständen wird Widerstandsdraht verwendet.

Aufgabe 3.45
Welches sind die wichtigsten Kennwerte eines Festwiderstandes?

Lösung
Die wichtigsten Kennwerte eines Festwiderstandes sind sein Widerstandswert in Ohm und seine Belastbarkeit in Watt. Widerstandstoleranz und Temperaturkoeffizient sind ebenfalls wichtige Kenngrößen.

Aufgabe 3.46
Ein bedrahteter Widerstand ist mit den Farbringen orange-orange-schwarz-rot-braun-gelb gekennzeichnet. Was bedeutet das?

Lösung
Der Widerstandswert ist $33\,\text{k}\Omega$, $\pm 1\,\%$, $\text{TK} = \pm 25\,\text{ppm/K}$ ($\text{TK} =$ Temperaturkoeffizient)

Aufgabe 3.47
Auf einem SMD-Widerstand ist 474 aufgedruckt. Was bedeutet das?

Lösung
Nach dem Dreizeichencode zur Kennzeichnung von SMD-Widerständen der Reihen E24 ($\pm 5\,\%$) und E48 ($\pm 2\,\%$) von $100\,\Omega$ bis $10\,\text{M}\Omega$ ist der Widerstandswert ABC mit A = erste Ziffer des Widerstandswertes, B = zweite Ziffer des Widerstandswertes, C = Anzahl anschließender Nullen. Der Widerstandswert ist also $470\,\text{k}\Omega$.

Aufgabe 3.48
Auf einem SMD-Widerstand ist 42R2 aufgedruckt. Was bedeutet das?

Lösung
Nach dem Dreizeichencode zur Kennzeichnung von SMD-Widerständen der Reihe E96 ($\pm 1\,\%$) ist der Widerstandswert $42{,}2\,\Omega$.

3.3 Kondensator, elektrisches Feld

3.3.1 Der Kondensator

Aufgabe 3.49
Welche Fähigkeit ist das Hauptmerkmal eines Kondensators? Was ist für eine technische Anwendung die wichtigste Eigenschaft eines Kondensators?

Lösung
Ein Kondensator speichert elektrische Ladung bzw. elektrische Energie. Für eine technische Anwendung ist die wichtigste Eigenschaft eines Kondensators, dass er Gleichspannung sperrt und Wechselspannung mit größer werdender Frequenz immer besser durchlässt (umgekehrtes Verhalten zu einer Spule).

Aufgabe 3.50
Was ist ein Dielektrikum bei einem Kondensator? Was bewirkt es?

Lösung
Ein Dielektrikum ist ein Isolierstoff zwischen zwei ungleichnamigen, getrennten Ladungen eines Kondensators. Durch ein Dielektrikum wird die Kapazität eines Kondensators erhöht.

Aufgabe 3.51
Für welche Zwecke wird ein Kondensator verwendet? Nennen Sie drei Beispiele.

Lösung
Ein *Stützkondensator* ist in einer elektronischen Schaltung parallel zu einem Verbraucher geschaltet und hält die Versorgungsspannung bei sprungartigen Änderungen des Verbraucherstromes aufrecht.

Ein *Entkopplungskondensator* trennt Gleichspannung von einer überlagerten Wechselspannung.

Entstörkondensatoren werden zur Funkentstörung eingesetzt.

Aufgabe 3.52
Was ist der Vorteil eines Elektrolytkondensators? Auf was ist beim Einsatz eines Elektrolytkondensators zu achten?

Lösung
Ein Elektrolytkondensator besitzt eine große Kapazität bei kleiner Baugröße. Ein Elko ist ein *gepolter* Kondensator, beim Anschließen ist auf richtige Polung zu achten.

Aufgabe 3.53
Welches sind die wichtigsten Kennwerte eines (nicht veränderbaren) Kondensators?

Lösung
Die wichtigsten Kennwerte eines Kondensators sind seine Kapazität und seine maximale Betriebsspannung.

Aufgabe 3.54
Welche technischen Ausführungen von Kondensatoren gibt es?

Lösung
Bauarten bzw. Bauformen von Kondensatoren mit festem Kapazitätswert sind: Folienkondensatoren, Papierkondensatoren, Metallpapier-Kondensatoren, Elektrolytkondensatoren, Keramikkondensatoren, Glaskondensatoren, Schichtkondensatoren.

Aufgabe 3.55
Auf welche Spannung U muss ein Kondensator mit der Kapazität $C = 33\,\text{mF}$ aufgeladen werden, damit er die Ladung $Q = 1\,\text{C}$ aufnimmt?

Lösung

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{1\,\text{As}}{33 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{s}}{\Omega}} = \underline{\underline{30{,}3\,\text{V}}}$$

Aufgabe 3.56
Ein Kondensator hat den Kapazitätswert $C = 1\,\text{nF}$ und ist mit der Ladung $Q = 10^{-7}\,\text{As}$ geladen. Auf welchen Wert ändert sich die Spannung U des Kondensators, wenn die Kapazität um 20 % abnimmt?

Lösung

$$C_1 = 0{,}8 \cdot C = 0{,}8 \cdot 10^{-9}\,\text{F}; \quad U = \frac{Q}{C_1}; \quad U = \frac{10^{-7}\,\text{As}}{0{,}8 \cdot 10^{-9}\,\frac{\text{s}}{\Omega}} = \underline{\underline{125\,\text{V}}}$$

Aufgabe 3.57
Ein Plattenkondensator mit dem Plattenabstand $d = 5\,\text{mm}$ und der Kapazität $C = 500\,\text{pF}$ wurde auf die Spannung $U = 5\,\text{kV}$ aufgeladen und dann von der Spannungsquelle getrennt.

a) Berechnen Sie die Ladung Q auf den Platten.
b) Mit welcher Kraft F ziehen sich die Kondensatorplatten an?
c) Der Plattenabstand wird auf $d = 10\,\text{mm}$ geändert. Wie groß ist jetzt die Spannung $U_{2\text{d}}$ an den Platten? Welche Arbeit W muss beim Verschieben der Platten verrichtet werden?

Lösung

a)

$$Q = C \cdot U = 500 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{s}}{\Omega} \cdot 5000\,\text{V} = \underline{\underline{2{,}5 \cdot 10^{-6}\,\text{A s}}}$$

b)

$$F = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 \cdot A} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C \cdot d} = \frac{1}{2}\frac{U \cdot Q}{d} = \frac{1}{2} Q \cdot E = \frac{1}{2}\frac{U^2 \cdot C}{d}$$

$$F = \frac{1}{2}\frac{U \cdot Q}{d} = \frac{1}{2}\frac{5000\,\text{V} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-6}\,\text{A s}}{5 \cdot 10^{-3}\,\text{m}} = \underline{\underline{1{,}25\,\text{N}}}$$

c) Der Plattenabstand wird auf $2d$ vergrößert. Die Kapazität ist dann: $C = \varepsilon\frac{A}{2d}$.
Die Spannung ist:

$$U_{2\text{d}} = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{\varepsilon\frac{A}{2d}} = \frac{2 \cdot Q}{\varepsilon\frac{A}{d}}.$$

Bei unveränderter Plattengröße A und konstanter Ladung Q verdoppelt sich die Spannung auf $\underline{\underline{U_{2\text{d}} = 10\,\text{kV}}}$.

Die im Kondensator gespeicherte Energie ist $W = \frac{1}{2}QU$. Bei doppelter Spannung ist also die doppelte Energie im Kondensator gespeichert. Die notwendige Arbeit entspricht somit

$$W = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-6}\,\text{A s} \cdot 5000\,\text{V} = \underline{\underline{6{,}25 \cdot 10^{-3}\,\text{J}}}.$$

Eine Rechnung mit Kraft mal Weg ist natürlich ebenfalls möglich.

$$W = F \cdot s = 1{,}25\,\text{N} \cdot 5 \cdot 10^{-3}\,\text{m} = \underline{\underline{6{,}25 \cdot 10^{-3}\,\text{J}}}$$

Aufgabe 3.58

Die planparallelen Platten eines Kondensators mit der Kapazität $C = 5\,\text{nF}$ sind kreisrund, haben einen Radius von $r = 6\,\text{mm}$ und einen Abstand von $d = 0{,}8\,\text{mm}$. Berechnen Sie die relative Permittivität ε_r des Dielektrikums.

Lösung

$$C = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_\text{r} \cdot \frac{A}{d} \Rightarrow \varepsilon_\text{r} = \frac{C \cdot d}{\varepsilon_0 \cdot A}; \quad \varepsilon_\text{r} = \frac{5 \cdot 10^{-9}\,\frac{\text{s}}{\Omega} \cdot 0{,}8 \cdot 10^{-3}\,\text{m}}{8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{A s}}{\text{Vm}} \cdot (6 \cdot 10^{-3}\,\text{m})^2 \cdot \pi}; \quad \underline{\underline{\varepsilon_\text{r} = 3996}}$$

3.3.2 Kondensator, elektrostatisches Feld, Energie

Aufgabe 3.59

Leiten Sie die Formel für die im Kondensator gespeicherte Energie $W = \frac{1}{2}CU^2$ her.

Lösung

Aus $W = U \cdot Q$ und $Q = I \cdot t$ folgt $W = U \cdot I \cdot t$. Das Differenzial ist $dW = U \cdot I \cdot dt$. Für I wird $I = \frac{dQ}{dt}$ eingesetzt. Man erhält $dW = U \cdot \frac{dQ}{\cancel{dt}} \cdot \cancel{dt} = U \cdot dQ$. Aus $Q = C \cdot U$ folgt $dQ = C \cdot dU$. Somit ist $dW = C \cdot U \cdot dU$. Beiderseitiges Integrieren der Gleichung:

$$\int\limits_0^W dW = C \cdot \int\limits_0^U U' dU'; \quad [W]_0^W = C \cdot \left[\frac{(U')^2}{2}\right]_0^U; \quad \underline{\underline{W = \frac{1}{2} C U^2}}$$

Die Energie wird im elektrischen Feld gespeichert.

Aufgabe 3.60

Bei einem Plattenkondensator mit Luft als Dielektrikum ist die Fläche einer Platte $A = 20\,\text{cm}^2$, der Plattenabstand beträgt $d = 0{,}5\,\text{mm}$.

a) Wie groß ist die Kapazität C des Kondensators?
b) Wie groß ist der Betrag der Ladung Q auf jeder der Platten, wenn an den Kondensator eine Gleichspannung $U = 220\,\text{V}$ angelegt wird? Wie groß ist die elektrische Feldstärke E zwischen den Platten?
c) Wie groß ist die elektrische Energie W, die im elektrischen Feld zwischen den Kondensatorplatten gespeichert ist?
d) Welche Werte C_d, Q_d und W_d ergeben sich, wenn statt Luft ein Dielektrikum mit $\varepsilon_\text{r} = 5$ verwendet wird?

Lösung

a)

$$C = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{A s}}{\text{Vm}} \cdot \frac{20 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2}{0{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{m}} = 35{,}4 \cdot 10^{-12}\,\text{F} = \underline{\underline{35{,}4\,\text{pF}}}$$

b)

$$Q = C \cdot U = 35{,}4 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{s}}{\Omega} \cdot 220\,\text{V} = \underline{\underline{7{,}8\,\text{nC}}}$$

$$E = \frac{U}{l} = \frac{220\,\text{V}}{0{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{m}} = 4{,}4 \cdot 10^5\,\frac{\text{V}}{\text{m}} = 440\,\frac{\text{kV}}{\text{m}} = 4{,}4\,\frac{\text{kV}}{\text{cm}} = \underline{\underline{440\,\frac{\text{V}}{\text{mm}}}}$$

c)

$$W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \cdot 35{,}4 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{s}}{\Omega} \cdot (220\,\text{V})^2 = 8{,}6 \cdot 10^{-7}\,\text{J} = \underline{\underline{0{,}86\,\mu\text{J}}}$$

d)

$$C_\text{d} = C \cdot \varepsilon_\text{r} = 35{,}4\,\text{pF} \cdot 5 = \underline{\underline{177\,\text{pF}}}; \quad Q_\text{d} = C_\text{d} \cdot U = 177\,\text{pF} \cdot 220\,\text{V} = \underline{\underline{38{,}9\,\text{nC}}}$$

$$W_\text{d} = \frac{1}{2} C_\text{d} \cdot U^2 = \frac{1}{2} 177 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{s}}{\Omega} \cdot (220\,\text{V})^2 = \underline{\underline{4{,}3\,\mu\text{J}}}$$

Aufgabe 3.61

Ein Plattenkondensator mit der Plattenfläche $A = 0{,}1\,\mathrm{m}^2$ und dem Plattenabstand $d = 2\,\mathrm{mm}$ hat ein Dielektrikum mit der Dielektrizitätszahl $\varepsilon_r = 7$. Der Kondensator ist auf die Spannung $U = 1000\,\mathrm{V}$ aufgeladen.

a) Wie groß ist die elektrische Feldstärke E zwischen den Platten?
b) Wie groß ist die elektrische Flussdichte D zwischen den Platten?
c) Wie groß ist der Betrag der auf jeder Platte vorhandenen Ladung Q?
d) Wie groß ist die Kapazität C des Kondensators?

Lösung

a)

$$E = \frac{U}{l} = \frac{1000\,\mathrm{V}}{2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{5 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}}}$$

b)

$$D = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot E = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{Vm}} \cdot 7 \cdot 5 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = \underline{\underline{3{,}1 \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{m}^2}}}$$

c)

$$U = E \cdot d; \quad Q = C \cdot U = C \cdot E \cdot d = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot E \cdot A = D \cdot A$$

$$Q = 3{,}1 \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{m}^2} \cdot 0{,}1\,\mathrm{m}^2 = 3{,}1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{A\,s} = \underline{\underline{3{,}1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}}}$$

d)

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{3{,}1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{A\,s}}{1000\,\mathrm{V}} = 3{,}1 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{F} = \underline{\underline{3{,}1\,\mathrm{nF}}}$$

$$\text{oder: } C = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{A}{d} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V\,m}} \cdot 7 \cdot \frac{0{,}1\,\mathrm{m}^2}{2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{3{,}1\,\mathrm{nF}}}$$

Aufgabe 3.62

Ein Kondensator mit Luft als Dielektrikum wird mit $U = 80\,\mathrm{V}$ Gleichspannung geladen und dann von der Spannungsquelle abgeklemmt. Der Raum zwischen den Elektroden wird anschließend mit einem Öl mit der Dielektrizitätszahl $\varepsilon_r = 2{,}1$ gefüllt. Auf welchen Wert Q_1 ändert sich dadurch die ursprüngliche Ladung Q? Welchen Wert U_1 nimmt die ursprüngliche Spannung U an?

Lösung

Die Ladung ändert sich nicht, da wegen der nicht angeschlossenen Spannungsquelle keine Ladung transportiert wird: $\underline{\underline{Q_1 = Q}}$.

Wegen $C = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{A}{d}$ wird die Kapazität um den Faktor 2,1 größer. Wegen $U = \frac{Q}{C}$ wird die Spannung um das $\frac{1}{2{,}1}$-fache kleiner. $U_1 = \frac{1}{2{,}1} \cdot 80\,\mathrm{V} = \underline{\underline{38{,}1\,\mathrm{V}}}$

Aufgabe 3.63

Ein Plattenkondensator mit Luft als Dielektrikum und einem Plattenabstand $d_1 = 0{,}5\,\text{mm}$ wird mit $U_1 = 100\,\text{V}$ Gleichspannung aufgeladen und dann von der Spannungsquelle abgeklemmt. Anschließend wird der Plattenabstand auf $d_2 = 0{,}8\,\text{mm}$ vergrößert. Welche Spannung U_2 liegt jetzt am Kondensator?

Lösung

Da die Spannungsquelle vom Kondensator abgeklemmt wurde, bleibt die auf den Platten vorhandene (im Kondensator gespeicherte) Ladung bei Vergrößerung des Plattenabstandes konstant. Somit bleibt auch die elektrische Feldstärke E zwischen den Platten konstant. Somit gelten die Gleichungen $U_1 = E \cdot d_1$ und $U_2 = E \cdot d_2$. Daraus folgt:

$$U_2 = \frac{U_1}{d_1} \cdot d_2 = \frac{100\,\text{V}}{0{,}5\,\text{mm}} \cdot 0{,}8\,\text{mm} = \underline{\underline{160{,}0\,\text{V}}}$$

Aufgabe 3.64

Ein Kondensator mit der Kapazität $C = 1{,}0\,\text{F}$ wird auf $U = 3{,}0\,\text{V}$ aufgeladen. Eine an den Kondensator angeschlossene Leuchtdiode (LED) leuchtet mit einer mittleren Leistung von 20 mW, wenn die ihr zugeführte Spannung zwischen 1,5 V und 3,0 V liegt. Wie groß ist die maximale Leuchtdauer t der LED?

Lösung

Zu Beginn des Leuchtens ist die im Kondensator gespeicherte Energie:

$$W_1 = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}0\,\text{F} \cdot (3{,}0\,\text{V})^2 = 4{,}5\,\text{J}.$$

Am Ende der Leuchtdauer beträgt die gespeicherte Energie nur noch:

$$W_1 = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}0\,\text{F} \cdot (1{,}5\,\text{V})^2 = 1{,}125\,\text{J}.$$

In der LED wurde während des Leuchtens eine Energie von

$$\Delta W = W_1 - W_2 = 4{,}5\,\text{J} - 1{,}125\,\text{J} = 3{,}375\,\text{J umgesetzt.}$$

Allgemein gilt: $t = \frac{W}{P}$. Somit ist die Zeit, in der die LED leuchtet:

$$t = \frac{3{,}375\,\text{J}}{20 \cdot 10^{-3}\,\text{W}} = \underline{\underline{168{,}75\,\text{s}}}$$

Aufgabe 3.65

Ein Kondensator ist mit 6,0 V geladen. Die gespeicherte Energie soll zur Zündung einer Blitzlichtlampe genutzt werden. Während der Dauer des Lichtblitzes von 100 µs wird die elektrische Leistung $P = 200\,\text{W}$ abgegeben. Welche Kapazität muss der Kondensator haben?

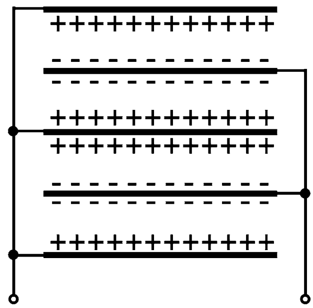


Abb. 3.24 Kondensator mit parallel geschalteten Platten

Lösung

Die im Kondensator gespeicherte Energie ist $W = \frac{1}{2}CU^2$. Damit die Blitzlichtlampe zündet, muss ihr eine Energie von $W = P \cdot t$ zugeführt werden, die der im Kondensator gespeicherten Energie entspricht. Es folgt:

$$\frac{1}{2}CU^2 = P \cdot t; \quad C = \frac{2 \cdot P \cdot t}{U^2} = \frac{2 \cdot 200\,\mathrm{W} \cdot 100 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}}{(6\,\mathrm{V})^2} = 1{,}111 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{F} = \underline{\underline{1111\,\mu\mathrm{F}}}$$

3.3.3 Technische Ausführungen von Kondensatoren

Erläuterungen

Bei einem Vielschichtkondensator werden mehrere Platten parallel geschaltet oder Metallfolien mit dazwischen liegendem Dielektrikum aufgewickelt, um bei kleiner Baugröße eine große Kapazität zu erreichen. Mit Ausnahme der äußeren Platten sind bei allen Elektroden beide Seiten wirksam. Die in Abb. 3.24 dargestellten fünf Platten bilden $5 - 1 = 4$ Kondensatoren. n Platten bilden also $(n - 1)$ Kondensatoren, die Kapazität beträgt das $(n - 1)$-fache gegenüber einem Kondensator mit zwei Platten bei gleicher Plattenfläche und gleichem Plattenabstand.

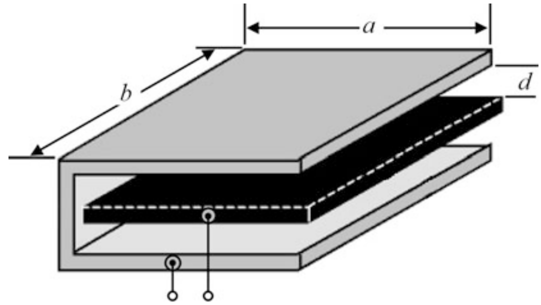
$$C = (n - 1) \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_\mathrm{r} \cdot \frac{A}{d}$$

Wir betrachten in Abb. 3.25 einen Teil eines Vielschichtkondensators mit Luft als Dielektrikum im Gegensatz zu einem einfachen Plattenkondensator. Die Kapazität dieses Kondensators mit drei Platten ist:

$$C = 2 \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_\mathrm{r} \cdot \frac{a \cdot b}{d}$$

Den schematischen Aufbau eines Vielschichtkondensators mit abwechselnder Metallschicht und dielektrischer Schicht zeigt Abb. 3.26. Ein solcher Kondensator kann z. B. als keramischer Vielschichtkondensator in Chipform (Abb. 3.27) oder als gewickelter Folienkondensator (Abb. 3.28) realisiert werden.

Abb. 3.25 Ausschnitt aus einem Vielschichtkondensator (Doppelschichtkondensator)



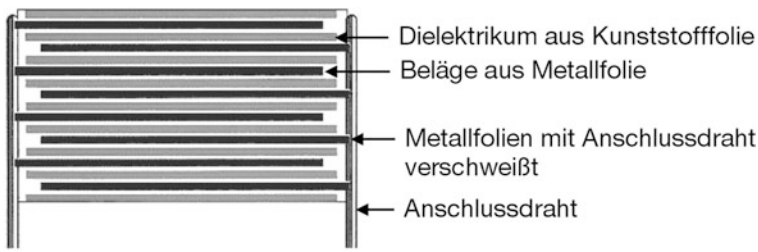


Abb. 3.26 Schematischer Aufbau eines Kondensators in Schichttechnologie

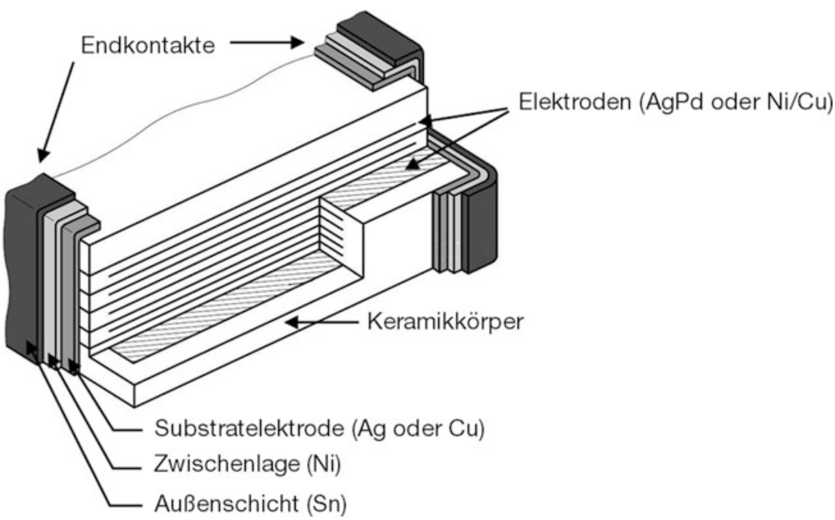
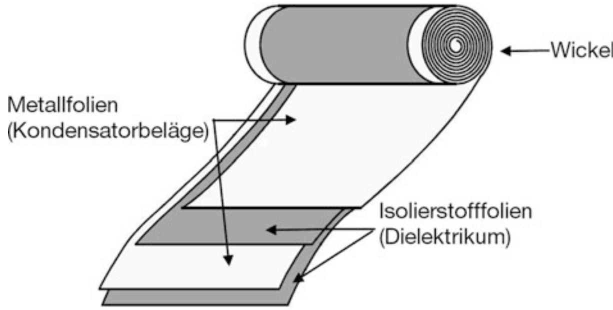


Abb. 3.27 Aufbau eines Keramik-Vielschicht-Chip-Kondensators

Abb. 3.28 Aufbau eines Folienkondensators als Wickel aus Metall- und Isolierstofffolien



Aufgabe 3.66
Ein Kondensator besteht aus $n = 14$ Metallschichten mit der wirksamen Oberfläche $A = 6\,\text{cm}^2$ und einem Dielektrikum zwischen den Metallschichten mit der Dicke $d = 0{,}2\,\text{mm}$ und der Permittivitätszahl $\varepsilon_\text{r} = 7$. Wie groß ist seine Kapazität C?

Lösung

$$C = (n-1)\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_\text{r}\cdot\frac{A}{d} = 13\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{\text{A s}}{\text{V m}}\cdot 7\cdot\frac{6\cdot 10^{-4}\,\text{m}^2}{0{,}2\cdot 10^{-3}\,\text{m}} = \underline{\underline{2{,}42\,\text{nF}}}$$

Aufgabe 3.67
Ein Wickelkondensator wird aus zwei einseitig beschichteten Kunststofffolien hergestellt. Die Kunststofffolie ist 0,1 mm dick, ihre Permittivitätszahl ist $\varepsilon_\text{r} = 3{,}0$. Die Durchschlagsfestigkeit der Folie beträgt 500 kV/cm. Jede Folie hat eine Fläche von $3{,}0\,\text{m}^2$.

a) Wie hoch ist die maximal zulässige Spannung U_max, die an den Kondensator angelegt werden darf?
b) Wie groß ist die Kapazität C des Kondensators?
c) Der Kondensator wird mit 100 V aufgeladen. Wie groß sind die im Kondensator gespeicherte Ladung Q und Energie W, wie groß ist die elektrische Feldstärke E in kV/cm?

Lösung

a) $U_\text{max} = 500\,\frac{\text{kV}}{\text{cm}}\cdot 0{,}01\,\text{cm} = \underline{\underline{5\,\text{kV}}}$
b) Durch das Aufwickeln der Folien wird die Fläche doppelt so groß, beide Seiten der Metallschicht tragen Ladung.

$$C = \varepsilon_0\cdot\varepsilon_\text{r}\cdot\frac{A}{d} = 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{\text{A s}}{\text{V m}}\cdot 3{,}0\cdot\frac{2\cdot 3{,}0\,\text{m}^2}{0{,}1\cdot 10^{-3}\,\text{m}} = 1{,}593\cdot 10^{-6}\,\text{F} = \underline{\underline{1{,}6\,\mu\text{F}}}$$

c)

$$Q = C \cdot U = 1{,}6 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{s}}{\Omega} \cdot 100\,\text{V} = \underline{\underline{1{,}6 \cdot 10^{-4}\,\text{A s}}}$$

$$W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{s}}{\Omega} \cdot (100\,\text{V})^2 = \underline{\underline{8\,\text{mJ}}}$$

$$E = \frac{U}{d} = \frac{100\,\text{V}}{0{,}1 \cdot 10^{-3}\,\text{m}} = 1 \cdot 10^6\,\frac{\text{V}}{\text{m}} = 10^4\,\frac{\text{V}}{\text{cm}} = \underline{\underline{10\,\frac{\text{kV}}{\text{cm}}}}$$

Aufgabe 3.68

Für die Herstellung eines Wickelkondensators stehen einseitig mit Metall beschichtete Polyethylenfolien mit einer Dicke von $d = 20\,\mu\text{m}$ und einer Breite von $b = 20\,\text{mm}$ zur Verfügung. Der Kondensator soll eine Kapazität von $C = 100\,\text{nF}$ haben. Die Permittivitätszahl von Polyethylen ist $\varepsilon_\text{r} = 2{,}3$.

a) Welche Länge l müssen die Folien haben?
b) Welchen Durchmesser D hat der gewickelte Kondensator? Die äußere Ummantelung durch eine Kunststoffmasse wird hier nicht betrachtet. Die Dicke der Metallschicht wird gegenüber der Dicke der Polyethylenfolie vernachlässigt.

Lösung

a) Da durch das Aufwickeln der Folien beide Seiten der Metallschicht Ladung tragen, wird die Fläche und damit die Kapazität im Vergleich zu zwei sich planparallel gegenüberstehenden Elektroden (Platten) verdoppelt.

$$C = 2 \cdot \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_\text{r} \cdot b \cdot l}{d} \Rightarrow l = \frac{d \cdot C}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_\text{r} \cdot b} = \frac{20 \cdot 10^{-6}\,\text{m} \cdot 100 \cdot 10^{-9}\,\frac{\text{A s}}{\text{V}}}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{A s}}{\text{V m}} \cdot 2{,}3 \cdot 20 \cdot 10^{-3}\,\text{m}}$$
$$= \underline{\underline{2{,}456\,\text{m}}}$$

b) Das Volumen eines geraden Kreiszylinders mit dem Durchmesser D und der Breite b ist $V = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot b$. Dieses Volumen entspricht dem Volumen $V = 2 \cdot l \cdot b \cdot d$ der beiden Folien.

$$\frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot b = 2 \cdot l \cdot b \cdot d \Rightarrow D = \sqrt{\frac{8 \cdot l \cdot d}{\pi}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 2{,}456\,\text{m} \cdot 20 \cdot 10^{-6}\,\text{m}}{\pi}}$$
$$= 1{,}12 \cdot 10^{-2}\,\text{m} = \underline{\underline{1{,}12\,\text{cm}}}$$

Aufgabe 3.69

Ein Kondensator besteht aus einem Wickel von je zwei Metall- und Kunststofffolien. Die Metallfolien sind $d_\text{Me} = 20\,\mu\text{m}$ dick, die Kunststofffolien haben eine Dicke von $d_\text{Ku} = 50\,\mu\text{m}$. Der Wickel ist $4\,\text{mm}$ breit und hat einen Radius von $r = 2\,\text{mm}$. Die Permittivitätszahl der Kunststofffolien ist $\varepsilon_\text{r} = 4$. Wie groß ist die Kapazität C des Kondensators?

Lösung

Das Volumen eines geraden Kreiszylinders mit dem Radius r und der Breite b ist $V = \pi \cdot r^2 \cdot b$. Dieses Volumen entspricht dem Volumen $V = l \cdot b \cdot d$ des Wickels mit $d = 2 \cdot (d_{\text{Me}} + d_{\text{Ku}})$.

$$\pi \cdot r^2 = l \cdot 2 \cdot (d_{\text{Me}} + d_{\text{Ku}}) \Rightarrow l = \frac{\pi \cdot r^2}{2 \cdot (d_{\text{Me}} + d_{\text{Ku}})} = \frac{\pi \cdot (2 \cdot 10^{-3}\,\text{mm})^2}{2 \cdot (20 \cdot 10^{-6}\,\text{m} + 50 \cdot 10^{-6}\,\text{m})}$$
$$= 8{,}98\,\text{cm}$$
$$C = 2 \cdot \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_\text{r} \cdot b \cdot l}{d} = 2 \cdot \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{A s}}{\text{V m}} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 10^{-3}\,\text{m} \cdot 8{,}98 \cdot 10^{-2}\,\text{m}}{50 \cdot 10^{-6}\,\text{m}} = \underline{\underline{509\,\text{pF}}}$$

Für die restlichen Aufgaben dieses Abschnitts ist es vorteilhaft, sich mit den Abschn. 5.3 „Reihenschaltung von Kondensatoren" und 8.3 „Parallelschaltung von Kondensatoren" vertraut zu machen. Außerdem sind in einigen der folgenden Aufgaben Kenntnisse in Vektoranalysis erforderlich.

3.3.4 Plattenkondensator, geschichtete Dielektrika

Aufgabe 3.70

Gegeben sind zwei Plattenkondensatoren mit jeweils zwei verschiedenen Stoffen als Dielektrikum. Die Dielektrika sind unterschiedlich angeordnet, das Dielektrikum ist einmal quer zu den Feldlinien (Abb. 3.29) und einmal längs den Feldlinien (Abb. 3.30) geschichtet. Wie groß ist jeweils die Gesamtkapazität C_{ges} des Kondensators? Überlegen Sie, welche Teilkapazitäten entstehen und welche Gesamtkapazität sich aus diesen jeweils ergibt. Wie verhalten sich in beiden Fällen Flussdichte D und Feldstärke E an der Grenze zwischen den verschiedenen Stoffen?

Lösung

Querschichtung

Der Kondensator mit Querschichtung des Dielektrikums nach Abb. 3.29 kann als Reihenschaltung von zwei Kondensatoren C_1 und C_2 aufgefasst werden. C_1 mit ε_{r1} hat den Plattenabstand d_1, C_2 mit ε_{r2} hat den Plattenabstand d_2. Die Plattenfläche A ist für beide

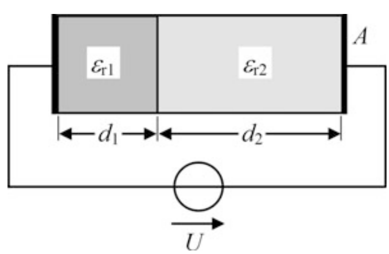


Abb. 3.29 Kondensator mit quer zu den Feldlinien geschichtetem Dielektrikum (Querschichtung)

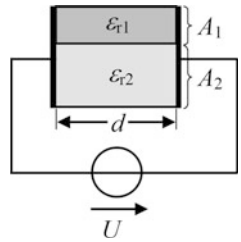


Abb. 3.30 Kondensator mit längs den Feldlinien geschichtetem Dielektrikum (Längsschichtung)

Kondensatoren gleich groß.

$$C_1 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1} \cdot \frac{A}{d_1}; \quad C_2 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2} \cdot \frac{A}{d_2}$$

$$C_{ges} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1} \cdot \frac{A}{d_1} \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2} \cdot \frac{A}{d_2}}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1} \cdot \frac{A}{d_1} + \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2} \cdot \frac{A}{d_2}} = \frac{\varepsilon_0^2 \cdot \varepsilon_{r1} \cdot \varepsilon_{r2} \cdot A^2}{\varepsilon_0 \cdot A \cdot (\varepsilon_{r1} \cdot d_2 + \varepsilon_{r2} \cdot d_1)}$$

$$= \underline{\underline{\frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1} \cdot \varepsilon_{r2} \cdot A}{\varepsilon_{r1} \cdot d_2 + \varepsilon_{r2} \cdot d_1}}}$$

Die Flussdichte D ändert sich nicht an der Grenze von ε_{r1} zu ε_{r2} (Abb. 3.31a).

Die Feldstärke E ändert sich sprunghaft an der Grenze von ε_{r1} zu ε_{r2} (Abb. 3.31b).

Längsschichtung

Der Kondensator mit Längsschichtung des Dielektrikums nach Abb. 3.30 kann als Parallelschaltung von zwei Kondensatoren C_1 und C_2 mit den Plattenflächen A_1 und A_2 aufgefasst werden. Der Plattenabstand d ist für beide Kondensatoren gleich groß.

$$C_1 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1} \cdot \frac{A_1}{d}; \quad C_2 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2} \cdot \frac{A_2}{d}; \quad C_{ges} = C_1 + C_2 = \underline{\underline{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1} \cdot \frac{A_1}{d} + \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2} \cdot \frac{A_2}{d}}}$$

Falls gilt $A_1 = A_2 = A$, so folgt:

$$C_1 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1} \cdot \frac{A}{d}; C_2 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2} \cdot \frac{A}{d}; C_{ges} = C_1 + C_2 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1} \cdot \frac{A}{d} + \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2} \cdot \frac{A}{d}$$

$$= \underline{\underline{\varepsilon_0 \cdot (\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}) \cdot \frac{A}{d}}}$$

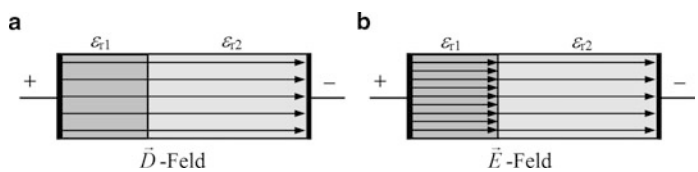
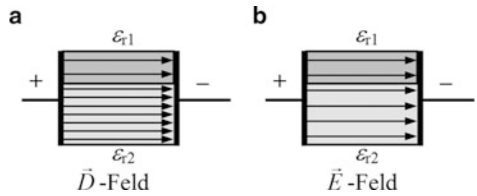


Abb. 3.31 Flussdichte D und Feldstärke E bei Querschichtung

Abb. 3.32 Flussdichte D und Feldstärke E bei Längsschichtung



Die Flussdichte D ändert sich sprunghaft an der Grenze von ε_{r1} zu ε_{r2} (Abb. 3.32a).

Die Feldstärke E ändert sich nicht an der Grenze von ε_{r1} zu ε_{r2} (Abb. 3.32b).

Aufgabe 3.71

In einem Plattenkondensator mit horizontal geschichtetem Dielektrikum nach Abb. 3.29 befinden sich zwei Isolierstoffplatten. Die linke Platte ist $d_1 = 1{,}0\,\text{mm}$ dick, ihre Permittivitätszahl ist $\varepsilon_{r1} = 2{,}5$. Die rechte Platte ist $d_2 = 1{,}5\,\text{mm}$ dick, ihre Permittivitätszahl ist $\varepsilon_{r2} = 4{,}5$. Die Fläche einer Platte beträgt $A = 900\,\text{cm}^2$. Im Kondensator ist die Ladung $Q = 1{,}5 \cdot 10^{-6}\,\text{A s}$ gespeichert.

a) Wie groß sind die elektrischen Flussdichten D_1 und D_2 in den Isolierstoffplatten?
b) Wie groß sind die zugehörigen elektrischen Feldstärken E_1 und E_2?
c) Mit welchen Teilspannungen U_1 und U_2 werden die Isolierstoffplatten beansprucht?
d) Welche Spannung U liegt am Kondensator?
e) Wie groß ist die Kapazität C des Kondensators?

Lösung

a) An einer Grenzfläche zwischen zwei verschiedenen Materialien, die quer zu den Feldlinien liegt, wobei sich die Materialien in einem elektrischen Feld befinden, beginnen und enden Feldlinien. Die elektrische Feldstärke E kann sich an der Grenzfläche sprunghaft ändern. Die elektrische Flussdichte D bleibt über die Grenzfläche hinweg konstant.

$$D_1 = D_2 = \frac{Q}{A} = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-6}\,\text{A s}}{900 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2} = \underline{\underline{16{,}7 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{A s}}{\text{m}^2}}}$$

b)

$$E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1}} = \frac{16{,}7 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{A s}}{\text{m}^2}}{8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{A s}}{\text{V m}} \cdot 2{,}5} = \underline{\underline{7{,}6 \cdot 10^5\,\frac{\text{V}}{\text{m}}}}$$

$$E_2 = \frac{D_1}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2}} = \frac{16{,}7 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{A s}}{\text{m}^2}}{8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{A s}}{\text{V m}} \cdot 4{,}5} = \underline{\underline{4{,}2 \cdot 10^5\,\frac{\text{V}}{\text{m}}}}$$

c)

$$U_1 = E_1 \cdot d_1 = 7{,}6 \cdot 10^5\,\frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-3}\,\text{m} = \underline{\underline{760\,\text{V}}}$$

$$U_2 = E_2 \cdot d_2 = 4{,}2 \cdot 10^5\,\frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{m} = \underline{\underline{630\,\text{V}}}$$

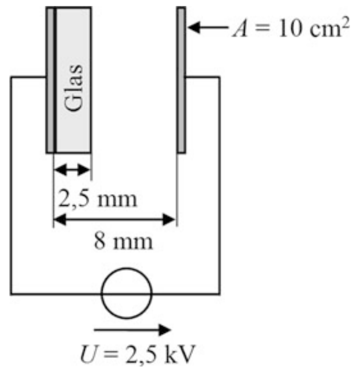


Abb. 3.33 Plattenkondensator mit Glasplatte

d)

$$U = U_1 + U_2 = 760\,\mathrm{V} + 630\,\mathrm{V} = \underline{\underline{1390\,\mathrm{V}}}$$

e)

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{A\,s}}{1390\,\mathrm{V}} = \underline{\underline{1{,}08\,\mathrm{nF}}}$$

Aufgabe 3.72
Zwischen die Platten eines Plattenkondensators mit dem Plattenabstand $d = 8\,\mathrm{mm}$ und einer Plattenfläche $A = 10\,\mathrm{cm}^2$ wird eine Glasplatte von $d_1 = 2{,}5\,\mathrm{mm}$ Dicke so eingebracht, dass sie an der linken Elektrode fest anliegt (Abb. 3.33). An den Platten liegt eine Spannung von $U = 2{,}5\,\mathrm{kV}$. Die Dielektrizitätszahl von Glas ist $\varepsilon_r = 7{,}5$.
Berechnen Sie

a) die Gesamtkapazität C_{ges} der Anordnung,
b) die Teilspannungsabfälle U_{Glas} und U_{Luft} an den Kapazitäten,
c) die elektrischen Teilfeldstärken E_{Glas} und E_{Luft}.

Lösung
a) Die Anordnung bildet zwei in Reihe geschaltete Kondensatoren.

$$C_{\mathrm{Glas}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d_1}; \quad C_{\mathrm{Glas}} = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V\,m}} \cdot 7{,}5 \cdot 10 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2}{2{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}; \quad \underline{\underline{C_{\mathrm{Glas}} = 26{,}58\,\mathrm{pF}}}$$

$$C_{\mathrm{Luft}} = \frac{\varepsilon_0 A}{d - d_1}; \quad C_{\mathrm{Luft}} = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V\,m}} \cdot 10 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2}{5{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}; \quad \underline{\underline{C_{\mathrm{Luft}} = 1{,}61\,\mathrm{pF}}}$$

$$C_{\mathrm{ges}} = \frac{C_{\mathrm{Glas}} \cdot C_{\mathrm{Luft}}}{C_{\mathrm{Glas}} + C_{\mathrm{Luft}}}; \quad C_{\mathrm{ges}} = \frac{26{,}58 \cdot 1{,}61}{26{,}58 + 1{,}61}\,\mathrm{pF}; \quad \underline{\underline{C_{\mathrm{ges}} = 1{,}52\,\mathrm{pF}}}$$

b)

$$U_{\mathrm{Glas}} = U\,\frac{C_{\mathrm{ges}}}{C_{\mathrm{Glas}}} = 2500\,\mathrm{V} \cdot \frac{1{,}52\,\mathrm{pF}}{26{,}58\,\mathrm{pF}} = \underline{\underline{143\,\mathrm{V}}}; \quad U_{\mathrm{Luft}} = 2500\,\mathrm{V} - 143\,\mathrm{V} = \underline{\underline{2357\,\mathrm{V}}}$$

c)

$$E_{\text{Glas}} = \frac{U_{\text{Glas}}}{d_1} = \frac{143\,\text{V}}{2{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{m}} = 5{,}72 \cdot 10^4\,\frac{\text{V}}{\text{m}} = \underline{\underline{57{,}2\,\frac{\text{V}}{\text{mm}}}}$$

$$E_{\text{Luft}} = \frac{U_{\text{Luft}}}{d - d_1} = \frac{2357\,\text{V}}{5{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{m}} = 4{,}285 \cdot 10^5\,\frac{\text{V}}{\text{m}} = \underline{\underline{428{,}5\,\frac{\text{V}}{\text{mm}}}}$$

Aufgabe 3.73

In einem Plattenkondensator mit der Plattenfläche $A = 0{,}15\,\text{m}^2$ und dem Plattenabstand $d_1 = 0{,}5\,\text{mm}$ befindet sich eine Isolierstoffplatte mit der Permittivitätszahl $\varepsilon_r = 4{,}5$. Das Dielektrikum füllt den gesamten Raum zwischen linker und rechter Kondensatorplatte aus. Der Kondensator wird mit $U_1 = 100\,\text{V}$ Gleichspannung aufgeladen und dann von der Spannungsquelle abgeklemmt. Anschließend wird der Plattenabstand auf $d_2 = 0{,}8\,\text{mm}$ vergrößert. Es entsteht ein mit Luft gefüllter Abstand zwischen Isolierstoffplatte und rechter Kondensatorplatte.

a) Welche Spannung U_2 liegt jetzt am Kondensator?
b) Welche Energie W ist jetzt im Kondensator gespeichert?

Lösung

a) Vor dem Vergrößern des Plattenabstandes ist die Kapazität des Kondensators

$$C_1 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{A}{d_1} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{A s}}{\text{V m}} \cdot 4{,}5 \cdot \frac{0{,}15\,\text{m}^2}{0{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{m}} = 11{,}95 \cdot 10^{-9}\,\text{F}.$$

Nach dem Vergrößern des Plattenabstandes liegt eine Reihenschaltung von zwei Kondensatoren vor. Die erste Kapazität ist C_1. Die zweite Kapazität ist

$$C_2 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{A}{d_2 - d_1} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{A s}}{\text{V m}} \cdot 1 \cdot \frac{0{,}15\,\text{m}^2}{0{,}3 \cdot 10^{-3}\,\text{m}} = 4{,}425 \cdot 10^{-9}\,\text{F}.$$

Die Gesamtkapazität des Kondensators ist jetzt

$$C_{\text{ges}} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{11{,}95 \cdot 4{,}425}{11{,}95 + 4{,}425} \cdot 10^{-9}\,\text{F} = 3{,}23 \cdot 10^{-9}\,\text{F}.$$

Da die Spannungsquelle vom Kondensator abgeklemmt wurde, bleibt die auf den Platten vorhandene (im Kondensator gespeicherte) Ladung bei Vergrößerung des Plattenabstandes konstant. Aus $Q = C_1 \cdot U_1 = C_{\text{ges}} \cdot U_2$ folgt:

$$U_2 = U_1 \cdot \frac{C_1}{C_{\text{ges}}} = 100\,\text{V} \cdot \frac{11{,}95 \cdot 10^{-9}\,\text{F}}{3{,}23 \cdot 10^{-9}\,\text{F}} = \underline{\underline{370\,\text{V}}}$$

b)

$$W = \frac{1}{2} \cdot C_{\text{ges}} \cdot U_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 3{,}23 \cdot 10^{-9}\,\text{F} \cdot (370\,\text{V})^2 = \underline{\underline{2{,}2 \cdot 10^{-4}\,\text{J}}}$$

Aufgabe 3.74

Ein Plattenkondensator mit Luft als Dielektrikum, einer Plattengröße $A = 1{,}0\,\mathrm{m}^2$ und einem Plattenabstand $d = 8\,\mathrm{mm}$ wird mit $U = 1000\,\mathrm{V}$ Gleichspannung aufgeladen.

a) Wie groß sind Kapazität C, Ladung Q und gespeicherte Energie W des Kondensators?

b) Der geladene Kondensator wird von der Spannungsquelle abgeklemmt. Anschließend wird eine Isolierstoffplatte der Größe $A = 1{,}0\,\mathrm{m}^2$, der Dicke $d_1 = 5\,\mathrm{mm}$ und mit der Permittivitätszahl $\varepsilon_\mathrm{r} = 2{,}3$ so zwischen den Platten des Kondensators angebracht, dass sie an einer Metallplatte des Kondensators mit der ganzen Fläche anliegt. Wie groß sind jetzt Spannung U_1, Kapazität C_1, Ladung Q_1 und gespeicherte Energie W_1 des Kondensators?

Lösung

a)

$$C = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V\,m}} \cdot \frac{1{,}0\,\mathrm{m}^2}{8 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{1{,}11\,\mathrm{nF}}}$$

$$Q = C \cdot U = 1{,}11 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{F} \cdot 1000\,\mathrm{V} = 1{,}11 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C} = \underline{\underline{1{,}11\,\mu\mathrm{C}}}$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}11 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{F} \cdot (1000\,\mathrm{V})^2 = 0{,}55 \cdot 10^3\,\mathrm{J} = \underline{\underline{0{,}55\,\mathrm{mJ}}}$$

b) Es liegt eine Reihenschaltung von zwei Kondensatoren vor. Die erste Kapazität ist C_a. Die zweite Kapazität ist C_b.

$$C_\mathrm{a} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_\mathrm{r} \cdot \frac{A}{d_1} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V\,m}} \cdot 2{,}3 \cdot \frac{1{,}0\,\mathrm{m}^2}{5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 4{,}1 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{F}$$

$$C_\mathrm{b} = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d - d_1} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V\,m}} \cdot \frac{1{,}0\,\mathrm{m}^2}{3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 2{,}95 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{F}$$

Die Kapazität ist jetzt:

$$C_1 = \frac{C_\mathrm{a} \cdot C_\mathrm{b}}{C_\mathrm{a} + C_b} = \frac{4{,}1 \cdot 2{,}95}{4{,}1 + 2{,}95} \cdot 10^{-9}\,\mathrm{F} = 1{,}72 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{F} = \underline{\underline{1{,}72\,\mathrm{nF}}}.$$

Die auf den Kondensatorplatten gespeicherte Ladung bleibt unverändert: $Q_1 = Q = \underline{\underline{1{,}11\,\mu\mathrm{C}}}$

$$Q = C \cdot U = C_1 \cdot U_1 \Rightarrow U_1 = \frac{C}{C_1} \cdot U = \frac{1{,}11\,\mathrm{nF}}{1{,}72\,\mathrm{nF}} \cdot 1000\,\mathrm{V} = \underline{\underline{645{,}4\,\mathrm{V}}}$$

$$W_1 = \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot U_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}72 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{F} \cdot (645{,}4\,\mathrm{V})^2 = 3{,}58 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{J} = \underline{\underline{0{,}36\,\mathrm{mJ}}}$$

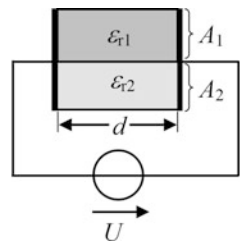


Abb. 3.34 Plattenkondensator mit Längsschichtung des Dielektrikums

Aufgabe 3.75
Gegeben ist ein Plattenkondensator mit einem Plattenabstand von $d = 10\,\text{mm}$ und mit Längsschichtung des Dielektrikums entsprechend Abb. 3.34. Die Permittivitätszahlen der Isolierstoffe sind ε_{r1} und ε_{r2}. Die Teilflächen der Kondensatorplatten sind $A_1 = A_2 = 100\,\text{cm}^2$. Der Kondensator liegt an der Spannungsquelle $U = 100\,\text{V}$.

a) Zunächst gelte $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2} = 1$. Wie groß sind die Kondensatorladung Q, die Flussdichte D, die elektrische Feldstärke E und die Kapazität C des Kondensators?
b) Nun gelte $\varepsilon_{r1} = 1$, $\varepsilon_{r2} = 3$. Wie groß ist jetzt die Kapazität C_1 des Kondensators? Wie groß sind die Werte von Q_1 und Q_2, D_1 und D_2, E_1 und E_2?

Lösung
a) Die Kapazität des Kondensators mit der Fläche $A_1 = 100\,\text{cm}^2$ ist

$$C_{A1} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1} \cdot \frac{A_1}{d} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{A s}}{\text{V m}} \cdot 1 \cdot \frac{100 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2}{0{,}01\,\text{m}} = 8{,}85\,\text{pF}.$$

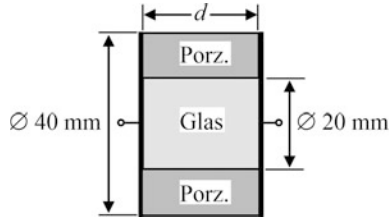
Der Kondensator mit der Fläche $A_2 = 100\,\text{cm}^2$ hat den gleichen Wert und ist parallel geschaltet. $C = 8{,}85\,\text{pF} + 8{,}85\,\text{pF} = \underline{\underline{17{,}7\,\text{pF}}}$

$$Q = C \cdot U = 17{,}7 \cdot 10^{-12}\,\text{F} \cdot 100\,\text{V} = \underline{\underline{1{,}77\,\text{nC}}}; \quad D = \frac{Q}{A} = \frac{1{,}77\,\text{nC}}{200 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2}$$
$$= \underline{\underline{88{,}5\,\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}}}$$
$$E = \frac{U}{d} = \frac{100\,\text{V}}{0{,}01\,\text{m}} = 10.000\,\frac{\text{V}}{\text{m}} = \underline{\underline{100\,\frac{\text{V}}{\text{cm}}}}$$

b) Die Kapazität des Kondensators mit der Fläche $A_2 = 100\,\text{cm}^2$ ist jetzt

$$C_{A2} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2} \cdot \frac{A_1}{d} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{A s}}{\text{V m}} \cdot 3 \cdot \frac{100 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2}{0{,}01\,\text{m}} = 26{,}55\,\text{pF}.$$

Abb. 3.35 Plattenkondensator mit kreisrundem Aufbau und Längsschichtung des Dielektrikums



Die Gesamtkapazität des Kondensators ist $C_1 = C_{A1} + C_{A2} = 8{,}85\,\text{pF} + 26{,}55\,\text{pF} = \underline{\underline{35{,}4\,\text{pF}}}$.

$$Q_1 = C_{A1} \cdot U = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\text{F} \cdot 100\,\text{V} = \underline{\underline{0{,}885\,\text{nC}}}$$

$$Q_2 = C_{A2} \cdot U = 26{,}55 \cdot 10^{-12}\,\text{F} \cdot 100\,\text{V} = \underline{\underline{2{,}655\,\text{nC}}}$$

$$D_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{0{,}885\,\text{nC}}{100 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2} = \underline{\underline{88{,}5\,\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}}}; \quad D_2 = \frac{Q_2}{A_2} = \frac{2{,}655\,\text{nC}}{100 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2} = \underline{\underline{265{,}5\,\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}}}$$

$$E_1 = E_2 = E = \frac{U}{d} = \frac{100\,\text{V}}{0{,}01\,\text{m}} = 10.000\,\frac{\text{V}}{\text{m}} = \underline{\underline{100\,\frac{\text{V}}{\text{cm}}}}$$

Aufgabe 3.76

Ein Plattenkondensator ist nach Abb. 3.35 aus einer kreisrunden Glasplatte in der Mitte und einem um die Glasplatte liegenden Kreisring aus Porzellan aufgebaut. Die Permittivitätszahl von Glas ist $\varepsilon_r = 9$, die von Porzellan ist $\varepsilon_r = 5$. Der Plattenabstand ist $d = 1{,}0\,\text{mm}$.

a) Wie groß ist die Kapazität C des Kondensators?
b) Wie groß sind elektrische Feldstärke E und Flussdichte D im Kondensator, wenn an ihn 500 V Gleichspannung angelegt werden?

Lösung

a)

$$A_{\text{Glas}} = r^2\pi = (10 \cdot 10^{-3}\,\text{m})^2 \cdot \pi = 3{,}14 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2$$

$$C_{\text{Glas}} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{A_{\text{Glas}}}{d} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{A s}}{\text{V m}} \cdot 9 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2}{10^{-3}\,\text{m}} = 25\,\text{pF}$$

Die Fläche des Kreisrings aus Porzellan ist:

$$A_{\text{Porz}} = \frac{\pi}{4} \cdot (D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4} \cdot \left[(40 \cdot 10^{-3}\,\text{m})^2 - (20 \cdot 10^{-3}\,\text{m})^2\right] = 9{,}425 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2$$

$$C_{\text{Porz}} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{A_{\text{Porz}}}{d} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{A s}}{\text{V m}} \cdot 5 \cdot \frac{9{,}425 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2}{10^{-3}\,\text{m}} = 41{,}7\,\text{pF}$$

$$C = C_{\text{Glas}} + C_{\text{Porz}} = 25\,\text{pF} + 41{,}7\,\text{pF} = \underline{\underline{66{,}7\,\text{pF}}}$$

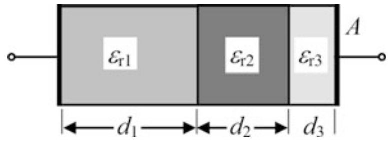


Abb. 3.36 Plattenkondensator mit drei quer geschichteten Dielektrika

b)

$$E_{\text{Glas}} = E_{\text{Porz}} = \frac{U}{d} = \frac{500\,\text{V}}{10^{-3}\,\text{m}} = 5 \cdot 10^5\,\frac{\text{V}}{\text{m}} = \underline{\underline{5\,\frac{\text{kV}}{\text{cm}}}}$$

$$D_{\text{Glas}} = \frac{C_{\text{Glas}} \cdot U}{A_{\text{Glas}}} = \frac{25 \cdot 10^{-12}\,\text{F} \cdot 500\,\text{V}}{3{,}14 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2} = \underline{\underline{3{,}98 \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{A s}}{\text{m}^2}}}$$

$$D_{\text{Porz}} = \frac{C_{\text{Porz}} \cdot U}{A_{\text{Porz}}} = \frac{41{,}7 \cdot 10^{-12}\,\text{F} \cdot 500\,\text{V}}{9{,}425 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2} = \underline{\underline{2{,}21 \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{A s}}{\text{m}^2}}}$$

Aufgabe 3.77

Gegeben ist ein Plattenkondensator mit drei quer geschichteten Dielektrika nach Abb. 3.36. Die Plattenfläche ist jeweils $A = 100\,\text{cm}^2$. Die Dicke des Dielektrikums mit $\varepsilon_{r1} = 3$ ist $d_1 = 3\,\text{mm}$, die Dicke des Dielektrikums mit $\varepsilon_{r2} = 1$ ist $d_2 = 2\,\text{mm}$ und die Dicke des Dielektrikums mit $\varepsilon_{r3} = 6$ ist $d_3 = 1\,\text{mm}$. Am Kondensator liegt eine Gleichspannung $U = 5\,\text{kV}$.

a) Wie groß ist die Kapazität C_{ges} des Kondensators?
b) Wie groß sind die Flussdichten D_1, D_2 und D_3 in den drei Schichten?
c) Wie groß sind die Feldstärken E_1, E_2, E_3 und die Spannungen U_1, U_2, U_3 in den drei Schichten?

Lösung

a)

$$C_1 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1} \cdot \frac{A}{d_1} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{A s}}{\text{V m}} \cdot 3 \cdot \frac{100 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2}{3 \cdot 10^{-3}\,\text{m}} = 88{,}5\,\text{pF}$$

$$C_2 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2} \cdot \frac{A}{d_1} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{A s}}{\text{V m}} \cdot 1 \cdot \frac{100 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2}{2 \cdot 10^{-3}\,\text{m}} = 44{,}25\,\text{pF}$$

$$C_3 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r3} \cdot \frac{A}{d_1} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{A s}}{\text{V m}} \cdot 6 \cdot \frac{100 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2}{1 \cdot 10^{-3}\,\text{m}} = 531\,\text{pF}$$

$$C_{\text{ges}} = \frac{1}{\frac{1}{88{,}5} + \frac{1}{44{,}25} + \frac{1}{531}}\,\text{pF} = \underline{\underline{27{,}9\,\text{pF}}}$$

b)

$$D_1 = D_2 = D_3 = \frac{C_{\text{ges}} \cdot U}{A} = \frac{27{,}9 \cdot 10^{-12}\,\text{F} \cdot 5000\,\text{V}}{100 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2} = \underline{\underline{1{,}4 \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{A s}}{\text{m}^2}}}$$

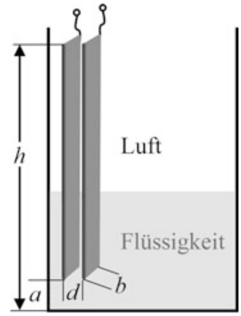


Abb. 3.37 Füllstandsmessung mit Plattenkondensator (nicht maßstabsgetreu)

c)

$$E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1}} = \frac{1{,}4 \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{m^2}}}{8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V\,m}} \cdot 3} = 5{,}27 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = \underline{\underline{5{,}27\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{cm}}}}$$

$$E_2 = \frac{D_1}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2}} = \frac{1{,}4 \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{m^2}}}{8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V\,m}} \cdot 1} = 15{,}8 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = \underline{\underline{15{,}8\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{cm}}}}$$

$$E_3 = \frac{D_1}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r3}} = \frac{1{,}4 \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{m^2}}}{8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V\,m}} \cdot 6} = 2{,}64 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = \underline{\underline{2{,}64\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{cm}}}}$$

$$U_1 = E_1 \cdot d_1 = 5{,}27\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{cm}} \cdot 0{,}3\,\mathrm{cm} = \underline{\underline{1{,}58\,\mathrm{kV}}}$$

$$U_2 = E_2 \cdot d_2 = 15{,}8\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{cm}} \cdot 0{,}2\,\mathrm{cm} = \underline{\underline{3{,}16\,\mathrm{kV}}}$$

$$U_3 = E_3 \cdot d_3 = 2{,}64\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{cm}} \cdot 0{,}1\,\mathrm{cm} = \underline{\underline{264\,\mathrm{V}}}$$

Aufgabe 3.78

Ein Plattenkondensator wird zur Füllstandsmessung einer dielektrischen Flüssigkeit mit der Permittivitätszahl $\varepsilon_r = 5$ verwendet (Abb. 3.37). Die Platten des Kondensators befinden sich im Abstand $a = 2\,\mathrm{cm}$ über dem Boden des Behälters, sie sind $l = h - a = 1{,}0\,\mathrm{m}$ lang bzw. hoch, $b = 5\,\mathrm{cm}$ breit und haben einen Abstand von $d = 4\,\mathrm{mm}$.

a) Wie groß ist die Kapazität C_0 des Kondensators bei leerem Behälter?
b) Wie groß ist der Füllstand h, wenn die Kapazität $2 \cdot C_0$ beträgt? Berechnen Sie den Ausdruck für h allgemein und als Zahlenwert.
c) Geben Sie h allgemein in Abhängigkeit des Kapazitätswertes C_0 des Kondensators und der Größen a, b, d und l an.
d) Nun sei $a = 0$. Geben Sie h allgemein in Abhängigkeit des Kapazitätswertes C_0 des Kondensators und der Größen b, d und l an. Welche Charakteristik ergibt sich für h in Abhängigkeit von C_0?

Lösung

a)

$$C_0 = \varepsilon_0 \cdot \frac{l \cdot b}{d} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V\,m}} \cdot \frac{1{,}0\,\mathrm{m} \cdot 5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}}{4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{110{,}6\,\mathrm{pF}}}$$

b) Es liegt eine Längsschichtung des Dielektrikums vor. Die Kapazitäten C_{Luft} und $C_{\mathrm{Flüss}}$ sind zu addieren.

$$2 \cdot C_0 = C_{\mathrm{Luft}} + C_{\mathrm{Flüss}} = \frac{\varepsilon_0 \cdot (l - h') \cdot b}{d} + \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot h' \cdot b}{d} \text{ mit } h' = h - a$$

$$2 \cdot C_0 \cdot d = \varepsilon_0 \cdot b \cdot l - \varepsilon_0 \cdot b \cdot h' + \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot b \cdot h'$$

$$h = \frac{2 \cdot C_0 \cdot d - \varepsilon_0 \cdot b \cdot l}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot b - \varepsilon_0 \cdot b} + a = \underline{\underline{\frac{\frac{2 \cdot C_0 \cdot d}{\varepsilon_0 \cdot b} - l}{\varepsilon_r - 1} + a}}$$

$$h = \frac{\frac{2 \cdot 110{,}6 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F} \cdot 4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}{8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V\,m}} \cdot 5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}} - 1{,}0\,\mathrm{m}}{5 - 1} + 2{,}0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$$

$$\underline{\underline{h = 27\,\mathrm{cm}}}$$

c)

$$\underline{\underline{h = \frac{\frac{C_0 \cdot d}{\varepsilon_0 \cdot b} - l}{\varepsilon_r - 1} + a}}$$

d)

$$\underline{\underline{h = C_0 \cdot \frac{d - l \cdot b \cdot \varepsilon_0}{b \cdot \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon_r - 1)} = C_0 \cdot \mathrm{const}}}$$

Der Füllstand h ist linear von C_0 abhängig.

Aufgabe 3.79

Die Metallplatten eines Kondensators werden zum Schutz gegen einen Kurzschluss mit Polystyrol mit der Permittivitätszahl $\varepsilon_{r2} = 2{,}8$ überzogen (Abb. 3.38). Das Dielektrikum zwischen den Kondensatorplatten ist Luft ($\varepsilon_{r1} = 1$). Die Plattenfläche ist $A = 15\,\mathrm{cm}^2$, der Plattenabstand beträgt $d_1 = 1{,}5\,\mathrm{mm}$.

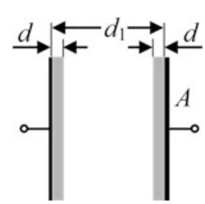


Abb. 3.38 Kondensatorplatten mit Schutzschicht

a) Wie groß darf die Dicke d der Schutzschicht sein, damit die Kapazität des Kondensators nicht größer als 10 pF ist?
b) Welche Spannung darf maximal an den Kondensator angelegt werden, damit die Feldstärke im verbleibenden Luftraum nicht größer wird als $E = 10\,\mathrm{kV/cm}$?

Lösung

a) Das Dielektrikum des Kondensators ist quer geschichtet. Die Kapazität C des Kondensators entspricht der Reihenschaltung von zwei Kondensatoren mit den Permittivitätszahlen ε_{r1} und ε_{r2}.

$$C_1 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1} \cdot \frac{A}{d_1 - 2d}; \quad C_2 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2} \cdot \frac{A}{2d}; \quad C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

$$C = \frac{\cancel{\varepsilon_0} \cdot \varepsilon_{r1} \cdot \frac{\cancel{A}}{d_1-2d} \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2} \cdot \frac{A}{2d}}{\cancel{\varepsilon_0} \cdot \varepsilon_{r1} \cdot \frac{\cancel{A}}{d_1-2d} + \cancel{\varepsilon_0} \cdot \varepsilon_{r2} \cdot \frac{\cancel{A}}{2d}} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1} \cdot \varepsilon_{r2} \cdot A}{2d \cdot (d_1 - 2d) \cdot \left(\frac{\varepsilon_{r1}}{d_1-2d} + \frac{\varepsilon_{r2}}{2d}\right)}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1} \cdot \varepsilon_{r2} \cdot A}{2d \cdot \varepsilon_{r1} + (d_1 - 2d) \cdot \varepsilon_{r2}}; \quad 2d \cdot \varepsilon_{r1} + (d_1 - 2d) \cdot \varepsilon_{r2} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1} \cdot \varepsilon_{r2} \cdot A}{C}$$

$$2d \cdot (\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2}) = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1} \cdot \varepsilon_{r2} \cdot A}{C} - d_1 \cdot \varepsilon_{r2};$$

$$d = \frac{1}{2(\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2})} \cdot \left(\frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1} \cdot \varepsilon_{r2} \cdot A}{C} - d_1 \cdot \varepsilon_{r2}\right)$$

$$d = \frac{1}{2(1 - 2{,}8)} \cdot \left(\frac{8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V\,m}} \cdot 1 \cdot 2{,}8 \cdot 15 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2}{10 \cdot 10^{12}\,\mathrm{F}} - 1{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \cdot 2{,}8\right);$$

$$d = 1{,}34 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m} = \underline{\underline{134\,\mu\mathrm{m}}}$$

b)

$$U = E \cdot (d_1 - 2d); \quad U = 10 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{cm}} \cdot (0{,}15\,\mathrm{cm} - 2 \cdot 1{,}34 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{cm}); \quad \underline{\underline{U = 1232\,\mathrm{V}}}$$

Aufgabe 3.80

Ein Plattenkondensator C_1, der mit einem Dielektrikum mit der Permittivitätszahl $\varepsilon_r = 3$ gefüllt ist, ist auf die Spannung $U_1 = 80\,\mathrm{V}$ aufgeladen. Ein ungeladener Plattenkondensator C_2 mit denselben geometrischen Abmessungen wie C_1, jedoch mit Luft als Dielektrikum, wird zu C_1 parallel geschaltet.

a) Wie groß ist jetzt die Spannung U_1'?
b) Um welchen Faktor k hat sich die im Kondensator C_1 gespeicherte Energie geändert?

Lösung

a) Nach dem Parallelschalten findet ein Ladungsausgleich statt. Die Gesamtladung in dem System bleibt bei diesem Umladevorgang erhalten.

$$Q = C \cdot U = \text{const} \Rightarrow C_1 \cdot U_1 = (C_1 + C_2) \cdot U_1'$$

$$\frac{U_1'}{U_1} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{A}{d}}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{A}{d} + \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d}} = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1} = \frac{3}{4}; \quad \underline{\underline{U_1' = 60\,\text{V}}}$$

b)

$$W = \frac{1}{2} C U^2; \quad k = \frac{W_1'}{W_1} = \frac{(U_1')^2}{U_1^2} = \frac{(60\,\text{V})^2}{(80\,\text{V})^2} = \underline{\underline{\frac{9}{16}}}$$

3.3.5 Radialsymmetrisches elektrisches Feld

Aufgabe 3.81

Leiten Sie anhand der Ladungsanordnung in Abb. 3.39 das Coulomb'sche Gesetz her.

Lösung

Eine punktförmige Ladung Q_1 befindet sich im Zentrum einer zunächst ungeladenen, sehr dünnen, metallischen Kugelschale mit kleinem Radius. Das elektrische Feld von Q_1 ist radialsymmetrisch. In der Kugelschale wird Ladung durch Influenz getrennt. Auf der Innenseite wird $-Q_1$, auf der Außenseite wird $+Q_1$ influenziert. Die durch Influenz hervorgerufene Ladung ist genau so groß wie die Ladung Q_1.

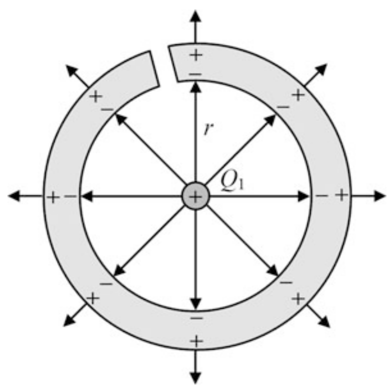


Abb. 3.39 Metallische Kugelschale um eine punktförmige Ladung

Auf beiden Seiten der Kugelschale sind die Ladungsträger gleichmäßig verteilt. Die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius r ist $A = 4\pi r^2$. Auf dieser Kugeloberfläche entsteht durch Influenz eine Flächenladungsdichte $\sigma = Q/A$. Diese Flächenladungsdichte entspricht im elektrostatischen Gleichgewicht der elektrischen Flussdichte D (früher als Verschiebungsdichte bezeichnet).

Somit gilt: $D = \sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q_1}{4\pi r^2}$.

Mit $E = D/\varepsilon_0$ folgt für die Feldstärke im Abstand r von der Punktladung Q_1:

$$E = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}$$

Das elektrostatische Feld einer homogen geladenen Kugelschale ist also nicht unterscheidbar vom elektrischen Feld einer Punktladung Q_1. Befindet sich in dem von Q_1 hervorgerufenen Feld der Feldstärke E eine ebenfalls punktförmige Ladung Q_2, so wirkt entsprechend $F = E \cdot Q$ auf sie eine Kraft mit dem Betrag

$$\underline{\underline{F = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}}}.$$

Dies ist das Coulomb'sche Gesetz in skalarer Schreibweise. Mit dieser Gleichung kann die Kraft zwischen zwei Punktladungen im Abstand r berechnet werden. Bei ungleichnamigen Ladungen ($Q_1 > 0$ und $Q_2 < 0$ oder umgekehrt) besteht Anziehung zwischen den beiden Ladungen, dann ist $F < 0$. Bei Abstoßung von Ladungen mit gleichem Vorzeichen ist $F > 0$.

Die vektorielle Schreibweise des Coulomb'schen Gesetzes ist:

$$\vec{F} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}\vec{e}_r.$$

Der Vektor $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{r}}{r}$ ist der Einheitsvektor in Richtung r mit der Länge 1.

$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ist der Ortsvektor von Q_2 nach Q_1. $\vec{F}$ ist die Kraft, die von Q_2 auf Q_1 ausgeübt wird.

Aufgabe 3.82

Leiten Sie das Coulomb'sche Gesetz mit dem Satz von Gauß her.

Lösung

Der Satz von Gauß lautet:

$$Q = \oiint\limits_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 \oiint\limits_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

In Worten: Der Wert des Integrals der elektrischen Flussdichte über eine geschlossene Fläche A entspricht der Summe der von der Fläche umschlossenen Ladungen Q. Oder: Der von der Ladung Q ausgehende Fluss ist stets gleich der innerhalb der Hülle vorhandenen Ladung.

Eine punktförmige Ladung Q_1 im Ursprung eines Koordinatensystems wird von einer kugelförmigen Hülle um den Ursprung eingeschlossen. Es folgt:

$$\frac{Q_1}{\varepsilon_0} = \iint\limits_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Da das elektrische Feld an allen Punkten der Kugeloberfläche gleich groß ist, kann es vor das Oberflächenintegral gezogen werden. Sowohl der Flächenvektor $d\vec{A}$ als auch das elektrische Feld zeigen an jedem Punkt der Gauß'schen Fläche (Kugeloberfläche) senkrecht nach außen, beide sind radialsymmetrisch. Das Skalarprodukt ist somit einfach zu berechnen, da der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{E}$ und $d\vec{A}$ null und der Cosinus dieses Winkels eins ist:

$$\vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot dA.\text{ Es folgt:}$$

$$\frac{Q_1}{\varepsilon_0} = |\vec{E}| \cdot \iint\limits_A d\vec{A} = |\vec{E}| \cdot 4\pi r^2.$$

Umstellen ergibt die Feldstärke im Abstand r von der Punktladung Q_1: $E = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}$.

Die Kraft auf eine Punktladung Q_2 in diesem elektrischen Feld ergibt sich wie in Aufgabe 3.81 zu:

$$F = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}.$$

Das elektrostatische Feld einer geladenen Kugel ist in deren Außenraum mit dem Feld einer Punktladung im Kugelmittelpunkt identisch. Das Coulomb'sche Gesetz darf nur angewandt werden, wenn die beiden Ladungen Q_1 und Q_2 als Punktladungen aufgefasst werden können.

Aufgabe 3.83

Es soll die Ladung Q_1 auf einer metallischen Hohlkugel mit dem Radius $r_1 = 60\,\text{mm}$ ermittelt werden. Bei einer Probekugel mit dem Radius $r_2 = 15\,\text{mm}$ und der Ladung $+Q_2 = 10^{-8}\,\text{C}$ wird im Abstand von $d = 30\,\text{mm}$ zwischen den Kugeloberflächen (auf der Verbindungslinie der Kugelmittelpunkte) eine Anziehungskraft von $F = 2{,}5\,\text{mN}$ gemessen. Bestimmen Sie das Vorzeichen und den Wert der Ladung Q_1.

Lösung

Die Ladungen Q_1 und Q_2 der beiden Kugeln werden als Punktladungen in deren Mittelpunkt aufgefasst. Der Abstand der beiden Mittelpunkte ist

$$r = r_1 + d + r_2 = 60\,\text{mm} + 30\,\text{mm} + 15\,\text{mm} = 105\,\text{mm}.$$

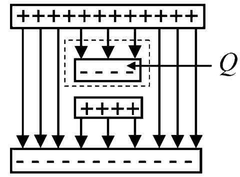


Abb. 3.40 Metallplatten mit influenzierter Ladung

Aus $F = \dfrac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}$ folgt durch auflösen nach Q_1: $Q_1 = 4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot F \cdot \dfrac{r^2}{Q_2}$.

$$Q_1 = 4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V\,m}} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N} \cdot \frac{(0{,}105\,\mathrm{m})^2}{10^{-8}\,\mathrm{A\,s}}; \quad \underline{\underline{Q_1 = 3{,}1 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C}}}$$

Die Ladung Q_1 ist negativ, da sich beide Kugeln anziehen und Q_2 positiv ist.

Aufgabe 3.84
Zwei aneinander gefügte Metallplatten der Größe 2,0 cm mal 2,5 cm befinden sich von Luft umgeben in einem homogenen elektrischen Feld der Feldstärke $E = 5{,}0 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$, sie sind senkrecht zu den Feldlinien hintereinander angeordnet. Die beiden Platten werden im elektrischen Feld voneinander getrennt (Abb. 3.40). Wie groß ist die auf einer Platte influenzierte elektrische Ladung Q? Welchen Betrag Q_1 hat diese Ladung, wenn sich die gesamte Anordnung bei gleicher Feldstärke in einem Bad aus Rizinusöl mit der Permittivitätszahl $\varepsilon_\mathrm{r} = 4{,}7$ befindet?

Lösung
Der Raum zwischen den Platten ist feldfrei. Die influenzierte Ladung wird mit Hilfe des Satzes von Gauß berechnet.

$Q = \varepsilon_0 \oint\!\!\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$; $\vec{E}$ und $d\vec{A}$ sind gleich gerichtet (parallel), somit folgt: $Q = \varepsilon_0 \cdot E \cdot A$.

$$Q = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V\,m}} \cdot 5 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \cdot 2{,}0 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 = \underline{\underline{2{,}2 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}}}$$

In dem Medium Rizinusöl ist $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_\mathrm{r}$. Die Ladung Q_1 ist um den Faktor ε_r größer.

$$\underline{\underline{Q_1 = 10{,}3 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}}}$$

Aufgabe 3.85
Eine metallische Hohlkugel mit dem Radius r_0 ist mit der positiven Ladung Q aufgeladen.

a) Zu berechnen sind Flussdichte D und elektrische Feldstärke E im Abstand r vom Kugelmittelpunkt. Stellen Sie $E(r)$ in normierter Form grafisch dar.

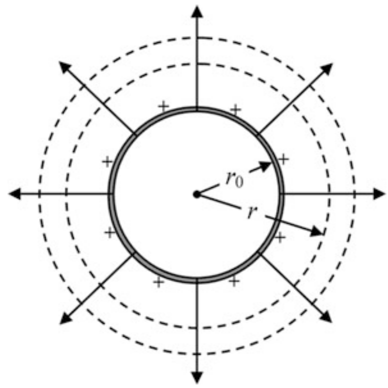


Abb. 3.41 Elektrostatisches Feld in der Umgebung einer geladenen Hohlkugel

b) Wie groß ist die Spannung U_{01} zwischen der Oberfläche der Hohlkugel mit dem Radius r_0 und einem Punkt auf der Oberfläche einer konzentrischen Hohlkugel mit dem Radius $r_1 > r_0$?
c) Wie groß ist die Kapazität C der metallischen Hohlkugel mit dem Radius r_0?

Lösung

a) Die Ladungsträger streben wegen ihrer gegenseitigen Abstoßung einen möglichst großen Abstand voneinander an, sie verteilen sich deshalb gleichmäßig auf der äußeren Oberfläche der Hohlkugel. Durch diese gleichmäßige Verteilung ist das elektrische Feld in allen Richtungen gleich, die Feldverteilung ist radial. Die elektrischen Feldlinien verlaufen von den Ladungen aus radial nach außen und sind gleichmäßig verteilt. Äquipotenzialflächen sind die Kugeloberfläche und die Oberflächen konzentrischer Kugeln (Abb. 3.41). Die Gegenladung $-Q$ kann man sich auf einer konzentrisch angeordneten Hohlkugel mit sehr großem Radius vorstellen.
Die Größe der Oberfläche einer beliebigen Äquipotenzialfläche mit dem Radius r ist:

$$A = 4\pi r^2.$$

Die dort vorhandene elektrische Flussdichte ist:

$$D = \frac{\Psi}{A} = \frac{Q}{A} = \underline{\underline{\frac{Q}{4\pi r^2}}}.$$

$\Psi = Q$ ist der elektrische Fluss (Verschiebungs-, Erregungsfluss).
Die elektrische Feldstärke im Abstand r vom Kugelmittelpunkt ist:

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} = \underline{\underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}}} \text{ für } r \geq r_0.$$

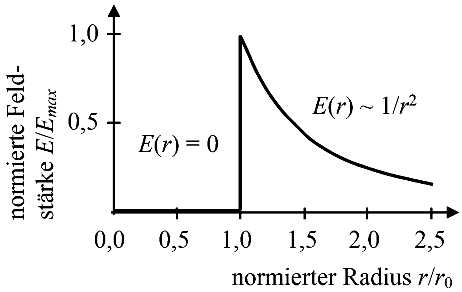


Abb. 3.42 Verlauf der elektrischen Feldstärke bei einer geladenen metallischen Hohlkugel

Im Inneren der Hohlkugel ($r < r_0$) verschwindet das elektrische Feld, da dort keine Ladungen eingeschlossen sind: $\underline{\underline{E = 0}}$ für $r < r_0$. Der normierte Verlauf der elektrischen Feldstärke ist in Abb. 3.42 dargestellt.

Ist der Radius r_0 der Metallkugel verschwindend klein, so handelt es sich um eine Punktladung. Das elektrische Feld einer geladenen Hohlkugel verhält sich im Außenraum der Kugel somit wie das elektrische Feld einer Punktladung mit der Ladung $Q_1 = Q$ bei $r = 0$.

Befindet sich im Abstand r von der Punktladung Q_1 eine weitere Punktladung Q_2, so gilt:

$$E = \frac{F}{Q_2} \text{ und damit } \frac{F}{Q_2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} \Rightarrow F = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$$

Dies ist das Coulomb'sche Gesetz (siehe auch Aufgabe 3.81, Aufgabe 3.82).

b) Für die Spannung zwischen zwei Punkten im elektrostatischen Feld gilt:

$$U_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \varphi(P_1) - \varphi(P_2).$$

φ ist das einem Raumpunkt zugeordnete elektrische Potenzial in Volt.
Mit dem Ergebnis $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$ aus Teilaufgabe a) folgt:

$$U_{01} = \int_{r_0}^{r_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{r_0}^{r_1} \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \int_{r_0}^{r_1} \frac{1}{r^2} dr = \underline{\underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}\right)}}$$

c) Ein Kugelkondensator besteht aus zwei konzentrischen Kugelschalen. Für seine Kapazität folgt:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}} = \frac{4\pi\varepsilon \cdot r_0 \cdot r_1}{r_1 - r_0}.$$

$r_0 =$ Radius der inneren Hohlkugel mit $+Q$,
$r_1 =$ Radius der äußeren Hohlkugel mit $-Q$

Mit $r_1 \to \infty$ folgt für die Kapazität einer Kugel mit dem Radius r_0 gegen die sehr weit entfernte Umgebung ($-Q$ befindet sich im Unendlichen): $\underline{\underline{C = 4\pi\varepsilon \cdot r_0}}$.

Aufgabe 3.86

Das Innere einer nicht leitenden Kugel mit dem Radius r_0 ist mit der Gesamtladung $+Q$ homogen geladen, die Ladung ist also in der Kugel gleichmäßig verteilt. Berechnen Sie die elektrische Feldstärke E innerhalb und außerhalb der Kugel. Stellen Sie $E(r)$ in normierter Form grafisch dar.

Lösung

Im Außenraum der Kugel kann E wie in Aufgabe 3.85 berechnet werden. Es ist:

$$\underline{\underline{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot \frac{1}{r^2}}} \text{ für } r > r_0.$$

Das Außenfeld der homogen geladenen Kugel ist wie bei der geladenen Hohlkugel gleich dem einer Punktladung im Mittelpunkt der Kugel.

Im Inneren der Kugel ist die Raumladungsdichte:

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi \cdot r_0^3}.$$

Von einer zur homogen geladenen Kugel konzentrischen Kugelschale mit $r < r_0$ ist die umschlossene Ladung:

$$Q' = \rho \cdot V(r) = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r^3.$$

Somit ist:

$$Q(r) = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi \cdot r_0^3} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{Q \cdot r^3}{r_0^3}.$$

Nach dem Satz von Gauß $Q = \varepsilon \oiint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$ ist $Q(r) = \varepsilon \oiint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \varepsilon \cdot E \cdot 4\pi \cdot r^2$.

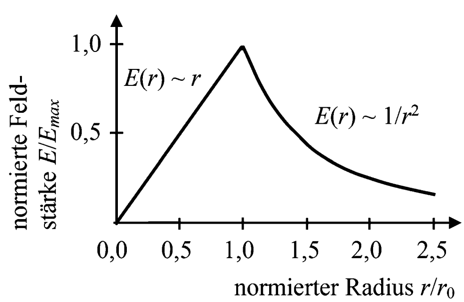


Abb. 3.43 Verlauf der Feldstärke einer homogen geladenen Kugel

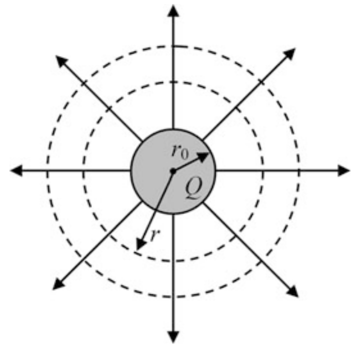


Abb. 3.44 Elektrisches Feld in der Umgebung eines langen geraden Leiters

Es folgt:

$$E(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\varepsilon \cdot r^2} = \frac{\frac{Q \cdot r^3}{r_0^3}}{4\pi\varepsilon \cdot r^2} = \underline{\underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon \cdot r_0^3} \cdot r}}.$$

Der normierte Verlauf der elektrischen Feldstärke ist in Abb. 3.43 dargestellt.

Aufgabe 3.87

Ein langer gerader Draht aus Metall mit dem Radius r_0 und der Länge l trägt die Ladung $+Q$. Zu berechnen sind die Flussdichte $D(r)$ und die elektrische Feldstärke $E(r)$ im Abstand r von der Mittellinie des drahtförmigen Leiters.

Lösung

Die Gegenladung –Q kann man sich sehr weit entfernt auf einem zur Mittellinie des Leiters koaxialen Rohr mit sehr großem Durchmesser vorstellen. Die elektrischen Feldlinien verlaufen von der Drahtoberfläche aus radial nach außen und sind gleichmäßig verteilt. Äquipotenzialflächen sind die Oberflächen koaxialer Zylinder (Abb. 3.44).

Die Oberfläche einer Äquipotenzialfläche mit dem Radius r ist $A = 2\pi \cdot r \cdot l$.

Im Abstand r ist die Flussdichte des vom Leiter ausgehenden Flusses:

$$D(r) = \frac{\Psi}{A} = \frac{\Psi}{2\pi \cdot r \cdot l} = \underline{\underline{\frac{Q}{2\pi \cdot l} \cdot \frac{1}{r}}}.$$

$\Psi = Q$ ist der elektrische Fluss (Verschiebungs-, Erregungsfluss).

Somit ist die elektrische Feldstärke im Abstand r von der Mittellinie des Leiters:

$$E(r) = \frac{D}{\varepsilon} = \underline{\underline{\frac{Q}{2\pi \cdot \varepsilon \cdot l} \cdot \frac{1}{r}}}.$$

Aufgabe 3.88

Ein Zylinderkondensator ist aus zwei konzentrischen, leitenden Zylindermänteln der Länge l aufgebaut (Abb. 3.45). Im Zwischenraum der Elektroden befindet sich ein Dielektrikum mit der Permittivitätszahl ε_r. Der innere Zylinder besteht meist aus einem massiven

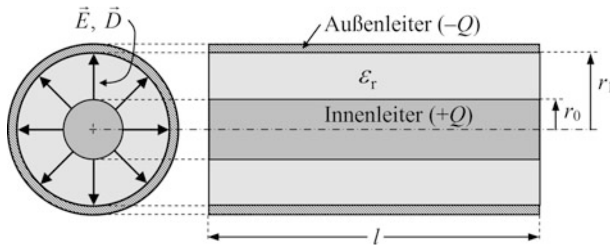


Abb. 3.45 Zylinderkondensator im Quer- und Längsschnitt

Leiter (Volldraht) mit dem Radius r_0 und trägt die Ladung $+Q$. Der äußere Zylinder besitzt den Radius r_1 (Radius vom gemeinsamen Mittelpunkt bis zur Innenwand des äußeren Zylinders) und trägt die Ladung $-Q$. Auf diese Weise ist ein Koaxialkabel aufgebaut, bei dem der Außenleiter aus einem Drahtgeflecht (zur Abschirmung des Innenleiters) gebildet wird. Solche Kabel werden in der Hochfrequenztechnik verwendet. Berechnen Sie die Kapazität C des Zylinderkondensators. Wo entstehen Randeffekte und wann sind diese vernachlässigbar?

Lösung

Randeffekte entstehen am linken und rechten Rand (den Deckeln) der Zylinder. Sie können vernachlässigt werden, wenn die Länge sehr groß gegenüber der Differenz der Radien ist, also wenn gilt: $l \gg r_1 - r_0$.

In Aufgabe 3.87 wurde für die elektrische Feldstärke im Abstand r von der Mittellinie eines Leiters hergeleitet:

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot l} \cdot \frac{1}{r}.$$

Die Spannung zwischen Innen- und Außenleiter ist somit:

$$U = \int_{r_0}^{r_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{r_0}^{r_1} E(r) dr = \int_{r_0}^{r_1} \frac{Q}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot l} \cdot \frac{1}{r} dr.$$

Der Ausdruck $\frac{Q}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot l}$ ist konstant.

$$U = \frac{Q}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot l} \cdot \int_{r_0}^{r_1} \frac{1}{r} dr = \frac{Q}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot l} \cdot [\ln(r_1) - \ln(r_0)]$$

$$= \frac{Q}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot l} \cdot \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)$$

$$C = \frac{U}{Q}; \quad \underline{\underline{C = \frac{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot l}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}}}$$

In Datenbüchern wird häufig die Kapazität pro Meter oder Kilometer Kabellänge als Kapazitätsbelag $C' = C/l$ angegeben.

Aufgabe 3.89
Eine metallische Hohlkugel mit dem Durchmesser $d = 10\,\text{cm}$ ist auf $100\,\text{kV}$ aufgeladen. Der Bezugspunkt mit $\varphi = 0\,\text{V}$ liegt im Unendlichen.

a) Wie groß ist die Ladung Q auf der Kugel?
b) Wie groß ist die Spannung U_{12} zwischen zwei Punkten mit den Abständen 20 cm und 22 cm vom Kugelmittelpunkt?
c) Welchen Wert hat das elektrische Feld E auf der Kugeloberfläche?

Lösung
a) In Aufgabe 3.85 wurde für die elektrische Feldstärke einer metallischen Hohlkugel im Abstand r vom Kugelmittelpunkt berechnet:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r} r^2} \text{ für } r \geq r_0.$$

$$\varphi(r_0) = \int_{r_0}^{\infty} E(r)dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}} \cdot \left[-\frac{1}{r}\right]_{r_0}^{\infty} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}} \cdot \frac{1}{r_0}$$

Laut Angabe: $r_0 = 0{,}05\,\text{m}$ und $\varphi(r_0) = 100\,\text{kV}$. Somit folgt mit $\varepsilon_r \approx 1$ für Luft:

$$Q = \varphi(r_0)\cdot 4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot r_0; \quad Q = 10^5\,\text{V}\cdot 4\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{\text{A s}}{\text{V m}}\cdot 0{,}05\,\text{m}; \quad \underline{\underline{Q = 5{,}56\cdot 10^{-7}\,\text{C}}}$$

b)
$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}} \cdot \frac{1}{r} = \frac{5{,}56\cdot 10^{-7}\,\text{C}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}} \cdot \frac{1}{r}$$

Potenzial bei 20 cm: $\varphi_1 = \varphi(r = 0{,}2\,\text{m}) = 2{,}5\cdot 10^4\,\text{V} = 25\,\text{kV}$
Potenzial bei 22 cm: $\varphi_2 = \varphi(r = 0{,}22\,\text{m}) = 2{,}27\cdot 10^4\,\text{V} = 22{,}7\,\text{kV}$
Spannung zwischen den beiden Punkten: $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \underline{\underline{2300\,\text{V}}}$

c)
$$E(r = 0{,}05\,\text{m}) = \frac{5{,}56\cdot 10^{-7}\,\text{C}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}} \cdot \frac{1}{(0{,}05\,\text{m})^2} = \underline{\underline{2\cdot 10^6\,\frac{\text{V}}{\text{m}}}}$$

Aufgabe 3.90
Auf der Verbindungsgeraden von zwei positiven Ladungen $Q_1 = 8{,}5\,\text{nC}$ und $Q_2 = 5{,}5\,\text{nC}$ befindet sich im Abstand $s = 10{,}0\,\text{cm}$ von der Ladung Q_1 ein Punkt P, in dem die elektrische Feldstärke null ist. Berechnen Sie den Abstand d der beiden Punktladungen, deren Umgebung Luft ist.

Lösung
Im Punkt P ist die Summe der von den Ladungen Q_1 und Q_2 erzeugten Feldstärken gleich null. Es gilt: $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0$ bzw. $\vec{E}_1 = -\vec{E}_2$. Für die Beträge der Feldstärken gilt somit: $E_1 = E_2$.

Für die Feldstärke einer von Luft umgebenen Punktladung gilt: $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Es folgt:

$$\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 s^2} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 (d-s)^2}; \quad Q_1 \cdot (d-s)^2 = Q_2 \cdot s^2; \quad d_{1,2} = s \cdot \left(1 \pm \sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}}\right)$$

$$d_{1,2} = 10{,}0 \cdot 10^{-2}\,\text{m} \cdot \left(1 \pm \sqrt{\frac{5{,}5\,\text{nC}}{8{,}5\,\text{nC}}}\right); \quad \underline{\underline{d_1 = 18\,\text{cm}}}; \quad \underline{\underline{d_2 = 2\,\text{cm}}}$$

Die Lösung d_2 ist physikalisch sinnlos, da $d > s$ gelten muss.

Aufgabe 3.91

Zwei aufgeladene metallische Hohlkugeln mit den Radien r_1 und r_2 ($r_1 > r_2$, Kugel 1 ist größer als Kugel 2) sind durch einen Draht leitend miteinander verbunden. Welcher Strom fließt durch den Draht? Bestimmen Sie jeweils in Abhängigkeit der Kugelradien das Verhältnis Q_1/Q_2 der Kugelladungen, das Verhältnis E_1/E_2 der elektrischen Feldstärken und das Verhältnis σ_1/σ_2 der Flächenladungsdichten. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

Lösung

Die gesamte Ladung der Kugeln verteilt sich durch die leitende Verbindung auf beide Kugeln. Beide Kugeln befinden sich auf gleichem Potenzial, durch den Draht fließt kein Strom.

Das Potenzial einer Kugel in der Umgebung Luft ist $\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$.

Bei gleichem Potenzial gilt:

$$\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_1} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_2}.$$

Das Verhältnis Q_1/Q_2 der Kugelladungen ist somit $\underline{\underline{\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{r_1}{r_2}}}$.

Die Kugelladungen verhalten sich wie die Kugelgrößen. Da die Kugeloberfläche $A = 4\pi r^2$ ist, sind die Ladungen nicht proportional zur Kugeloberfläche, sonst müsste $Q \sim r^2$ sein. Die Flächenladungsdichten auf den Kugeln sind also unterschiedlich.

Die elektrische Feldstärke an der Kugeloberfläche ist $E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}$ bzw. $E_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}$. Daraus folgt: $\frac{E_1}{E_2} = \frac{Q_1 \cdot r_2^2}{Q_2 \cdot r_1^2}$. Mit dem Ergebnis für Q_1/Q_2 ist $\underline{\underline{\frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2}{r_1}}}$.

Die Flächenladungsdichten der Kugeln sind

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \underline{\underline{\frac{Q_1}{4\pi r_1^2}}} \text{ und } \sigma_2 = \frac{Q_2}{A_2} = \underline{\underline{\frac{Q_2}{4\pi r_2^2}}}.$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{Q_1 \cdot r_2^2}{Q_2 \cdot r_1^2}; \quad \underline{\underline{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1}}}$$

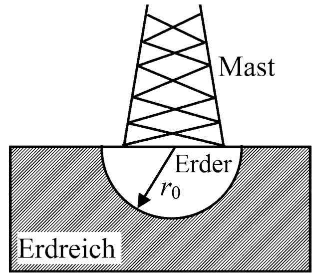


Abb. 3.46 Hochspannungsmast mit Erder

Die Feldstärken verhalten sich umgekehrt wie die Radien der Kugeln. An der kleineren Kugel tritt die höhere Feldstärke auf. Gleiches gilt für die Flächenladungsdichten auf den Kugeln. Dieser Sachverhalt gilt für beliebig geformte Leiter. Je kleiner der Krümmungsradius ist, desto größer sind die elektrische Feldstärke und die Ladungsdichte. An Spitzen treten besonders hohe Feldstärken auf.

Aufgabe 3.92
Die Erdung eines Freileitungsmastes einer Hochspannungsleitung kann als Halbkugel in der Erde unter dem Mast mit dem Radius $r_0 = 1\,\text{m}$ betrachtet werden, deren Mittelpunkt sich an der Grenze zwischen Erde und Erdoberfläche befindet (Abb. 3.46). Bei Kurzschluss fließt ein Strom $I = 100\,\text{A}$ in das Erdreich ab.

a) Welche Stromdichte S tritt an der Fläche zwischen Erder und Erdreich bei Kurzschluss auf?
b) Wie groß ist dann die Stromdichte S_1 im Abstand $r_1 = 3\,\text{m}$ vom Kugelmittelpunkt?

Lösung
a) Die Oberfläche einer Halbkugel mit dem Radius r_0 ist $A = 2\pi r_0^2$.

$$\Rightarrow S = \frac{I}{A} = \frac{100\,\text{A}}{2\pi r_0^2} = \frac{100\,\text{A}}{2\pi \cdot (1\,\text{m})^2} = \underline{\underline{15{,}9\,\frac{\text{A}}{\text{m}^2}}}$$

Es handelt sich um ein *Strömungs*feld und nicht um ein elektro*statisches* Feld.
b) Das Feld der Stromdichte ist radialsymmetrisch. Durch alle mit dem Erder konzentrischen Halbkugelflächen fließt der Strom $I = 100\,\text{A}$.

$$\Rightarrow S_1 = \frac{I}{A_1} = \frac{100\,\text{A}}{2\pi r_1^2} = \frac{100\,\text{A}}{2\pi \cdot (3\,\text{m})^2} = \underline{\underline{1{,}77\,\frac{\text{A}}{\text{m}^2}}}$$

Aufgabe 3.93
Welche Stromdichte S wird von einer elektrischen Feldstärke $E = 80\,\text{mV/m}$ in Kupfer erzeugt? Wie lang ist der Leiter, wenn an ihm eine Spannung von $U = 1{,}6\,\text{V}$ abfällt? Die spezifische Leitfähigkeit von Kupfer beträgt $\sigma_{\text{Cu}} = 58\,\frac{\text{m}}{\Omega\cdot\text{mm}^2}$.

Lösung
Beim elektrischen *Strömungs*feld gilt: $S = \sigma \cdot E$ mit σ = spezifische Leitfähigkeit.

▶ **Anmerkung** Beim elektrostatischen Feld gilt hingegen (betragsmäßig): $D = \varepsilon \cdot E$.

$$S = 58\,\frac{\mathrm{m}}{\Omega \cdot \mathrm{mm}^2} \cdot 80 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = \underline{\underline{4{,}64\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}}}$$

$$U = E \cdot l; \quad l = \frac{U}{E} = \frac{1{,}6\,\mathrm{V}}{80 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}} = \underline{\underline{20{,}0\,\mathrm{m}}}$$

3.3.6 Inhomogenes elektrisches Feld, Strömungsfeld

Erläuterungen
Existiert in einem leitfähigen Material eine elektrische Feldstärke $\vec{E}$, so liegt ein elektrisches *Strömungsfeld* vor. Die *mikroskopische* Schreibweise des ohmschen Gesetzes (auch als ohmsches Gesetz in seiner allgemeinen Form bezeichnet) verknüpft als Materialgleichung die Stromdichte $\vec{S}$ mit der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$.

$$\vec{S} = \sigma \cdot \vec{E} \tag{3.1}$$

$\vec{S}$ = Stromdichte,
σ = spezifische elektrische Leitfähigkeit oder spezifischer Leitwert (eine Materialkonstante),
$\vec{E}$ = elektrische Feldstärke.

In einem isotropen Material (einem Material ohne richtungsabhängige Eigenschaften) hat der Stromdichtevektor $\vec{S}$ die gleiche Richtung wie der Feldstärkevektor $\vec{E}$. Die Leitfähigkeit σ bestimmt dann die Stromdichte S, sie beschreibt vollständig die Materialeigenschaften hinsichtlich des Ladungsträgertransports, der durch die Kraftwirkung des elektrischen Feldes entsteht. Bei Isotropie kann man sich in Rechnungen auf die Beträge der Vektoren $\vec{S}$ und $\vec{E}$ beschränken.

Liegt isotropes Leitermaterial mit homogener Verteilung des elektrischen Feldes vor, so ist der Widerstand R eines Leiterstücks:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} \tag{3.2}$$

ρ = spezifischer Widerstand des Materials,
l = Länge des Leiterstücks,
A = Querschnittsfläche des Leiterstücks.

Die Größe R fasst den spezifischen elektrischen Widerstand und die Geometrie des Leiters zusammen. Mit Gl. 3.2 kann der Widerstand von Leitern in Abhängigkeit der Materialart und der Geometrie oder für ein Material eine Geometriekomponente aus dem gewünschten Widerstandswert berechnet werden.

Für das *homogene* elektrische Feld erhalten wir die bekannte Gleichung:

$$U = R \cdot I \tag{3.3}$$

Dies ist das allgemein bekannte *Ohm'sche Gesetz* in seiner gewohnten Form, in *makroskopischer* Formulierung. Es beschreibt den Zusammenhang zwischen Spannung und Strom am Bauelement „Widerstand". Für das Bauelement Widerstand sind ja die messbaren Größen Spannung (*Spannungsabfall*) und Strom interessant und nicht die Betrachtungen von Ladungsträgern.

Im allgemeinen Fall muss man zur Widerstandsberechnung in *inhomogenen* Feldern in die Definition des Widerstandes die Beziehungen für das inhomogene Strömungsfeld einsetzen. Für Spannung und Strom gilt allgemein:

$$U = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s} \tag{3.4}$$

$$I = \iint_A \vec{S} \cdot d\vec{A} \tag{3.5}$$

Somit ist der ohmsche Widerstand allgemein:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}}{\iint_A \vec{S} \cdot d\vec{A}} \tag{3.6}$$

Gl. 3.6 gilt, falls dass das Wegelement ds senkrecht auf dem Flächenelement dA steht. Damit dieses Integral ausgewertet werden kann, muss der Feldverlauf qualitativ vorliegen, d. h., die Richtung der Feldstärke und der Stromdichte müssen bekannt sein.

Häufig kann die Widerstandsberechnung einer geometrisch komplizierten Anordnung einfacher als mit Gl. 3.6 erfolgen. Dabei wird der Gesamtwiderstand in eine Vielzahl kleiner homogener Teilwiderstände zerlegt, auf die dann Gl. 3.2 angewendet werden kann. Die Teilwiderstände müssen also so klein sein, dass die Strömung in ihrem Inneren als homogen angenommen werden kann. Diese Teilwiderstände werden anschließend durch Reihenschaltung oder Parallelschaltung zu einem Gesamtwiderstand kombiniert. Der Gesamtwiderstand ergibt sich dann als Integral (Linienintegral) über die Teilwiderstände. – Bei diesem Vorgehen wird häufig der Begriff „Stromfaden" benutzt. Anschaulich versteht man darunter einen dünnen Draht, dessen Querschnitt gegen null geht, der also als eindimensionales Objekt einen linienförmigen Leiter darstellt, längs dem ein Linienstrom fließt. Den Strom in einem Leiter kann man sich aus einer großen Anzahl dünner Stromfäden zusammengesetzt vorstellen. Die Stromdichte $S = I/A$ in einem Leiter wird durch die Dichte von Stromfäden (Stromlinien) dargestellt. Die Ursache für den Stromfluss ist

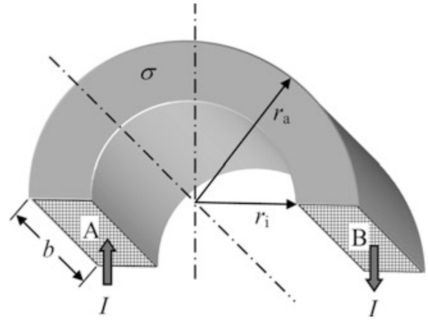


Abb. 3.47 Leiter in Form eines Bügels

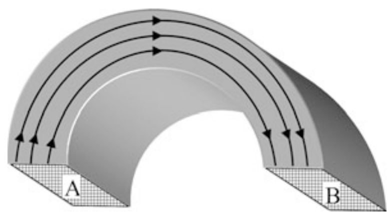


Abb. 3.48 Stromlinien im Leiter

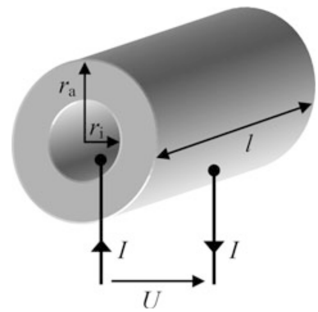
die elektrische Feldstärke, parallel zu jedem Stromfaden verläuft auch eine Feldlinie. Bei konstantem Querschnitt eines Leiters sind die Stromfäden gleichmäßig über die Strom führende Fläche verteilt.

Aufgabe 3.94
Ein elektrischer Leiter hat die Form eines der Länge nach halbierten Hohlzylinders (Halbzylindermantel), wie ein kreisrunder Bügel mit rechteckigem Querschnitt (Abb. 3.47). Gegeben sind folgende Daten: Innenradius r_i, Außenradius r_a, Länge b und Leitfähigkeit σ des Materials. Die Kontaktierungsflächen A und B sind ideal leitfähig, über sie wird ein Strom eingeleitet. Das Widerstandsmaterial ist isotrop, somit strömt der Strom I gleichmäßig in die Kontaktflächen ein und ist im Leiter gleichmäßig verteilt.

a) Skizzieren Sie die Feldlinien des sich ergebenden elektrischen Strömungsfeldes, wenn an die Kontaktflächen eine Spannung U angelegt und damit ein Strom I eingespeist wird.
b) Wie groß ist der Widerstand R des Drahtbügels zwischen den Leiterenden A und B?

Lösung
a) Die Feldlinien des Strömungsfeldes sind in Abb. 3.48 dargestellt.
b) Die Stromlinien sind Halbkreise und führen von der Kontaktfläche A zur Fläche B. Die einzelnen Stromfäden sind unterschiedlich lang. Die Länge eines Stromfadens ist ein halber Kreisumfang: $l = \pi \cdot r$. Der Strömungsquerschnitt des Leiters ist dagegen konstant, er entspricht der Fläche A (= B). Ein differenzielles Stück dieser Fläche ist $dA = b \cdot dr$. Diese Teilflächen gehören zu differenziellen, sich berührenden konzentrischen Halbrohren der Länge b zwischen r_i und r_a mit der Wandstärke dr. Der Leitwert

Abb. 3.49 Leiter in Form eines Rohres



eines solchen „dünnwandigen" Halbzylinders ist unter Zuhilfenahme von Gl. 3.2 und mit $\rho = 1/\sigma$ und $G = 1/R$:

$$dG = \sigma \cdot \frac{dA}{l} = \sigma \cdot \frac{b \cdot dr}{\pi \cdot r}$$

Die einzelnen Widerstände dieser differenziell dünnwandigen Halbrohre sind zwischen r_i und r_a parallel geschaltet, ihre Leitwerte addieren sich also. Das Aufsummieren erfolgt durch Integration über dG von r_i bis r_a.

$$G = \int_{r_i}^{r_a} dG = \int_{r_i}^{r_a} \frac{\sigma \cdot b}{\pi} \cdot \frac{1}{r} dr = \frac{\sigma \cdot b}{\pi} \cdot \int_{r_i}^{r_a} \frac{1}{r} dr = \frac{\sigma \cdot b}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)$$

Der Widerstand ist der Kehrwert des Leitwertes:

$$\underline{\underline{R = \frac{\pi}{\sigma \cdot b \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}}}$$

Aufgabe 3.95
Ein elektrischer Leiter aus isotropem Material hat die Form eines Rohres (Abb. 3.49), dessen Innen- und Außenbeschichtung unendlich gut leitet. Über die Kontaktierungen von Innen- und Außenbeschichtung wird ein Strom eingeleitet. Gegeben sind folgende Daten: Innenradius r_i, Außenradius r_a, Länge l und spezifischer Widerstand ρ des Materials. Zu bestimmen ist der Widerstand R des Leiters.

Lösung
Im Gegensatz zu Aufgabe 3.94 sind hier alle einzelnen Stromfäden gleich lang ($r_a - r_i$) und der Strömungsquerschnitt des Leiters wächst mit größer werdendem Radius an. Der Strom verteilt sich radial von innen nach außen, die Stromdichte wird von innen nach außen kleiner. Die Stromfäden verlaufen von der inneren Kontaktierung sternförmig zur äußeren Kontaktierung. Die Länge l des Leiters entspricht der Dicke des Rohres, sie erstreckt sich von r_i bis r_a. Die differenzielle Länge ist als Teilstück des Radius $dl = dr$.

Der Querschnitt des Leiters ändert sich, er entspricht der Mantelfläche A eines differenziell dünnwandigen Rohres mit dem Radius r und der Länge l:

$$A = 2\pi \cdot r \cdot l$$

Der differenzielle Widerstand eines solchen dünnwandigen Rohres ist

$$dR = \rho \cdot \frac{dl}{A} = \rho \cdot \frac{dr}{2\pi \cdot r \cdot l}$$

Die einzelnen dünnwandigen Rohre unterschiedlichen Durchmessers werden sozusagen zum Gesamtrohr ineinander gesteckt. Dies entspricht einer Reihenschaltung der Einzelwiderstände, die durch Integration aufsummiert werden:

$$R = \int_{r_\mathrm{i}}^{r_\mathrm{a}} dR = \rho \cdot \frac{1}{2\pi \cdot l} \cdot \int_{r_\mathrm{i}}^{r_\mathrm{a}} \frac{1}{r} dr = \underline{\underline{\frac{\rho}{2\pi \cdot l} \cdot \ln\left(\frac{r_\mathrm{a}}{r_\mathrm{i}}\right)}}$$

3.4 Spule, magnetisches Feld

3.4.1 Die Spule

Aufgabe 3.96
Was ist für eine technische Anwendung die wichtigste Eigenschaft einer Spule?

Lösung
Für eine technische Anwendung ist die wichtigste Eigenschaft einer Spule, dass sie Gleichspannung durchlässt und Wechselspannung mit größer werdender Frequenz immer stärker sperrt (umgekehrtes Verhalten zu einem Kondensator). Die Arbeitsweise des Transformators beruht auf der induktiven Kopplung von Spulen.

Aufgabe 3.97
Was bewirkt in einer Spule ein sich änderndes Magnetfeld, in dem sich die Spule befindet?

Lösung
In der Spule wird eine Spannung induziert. Je schneller und je stärker die Änderung des Magnetfeldes ist, umso größer ist die induzierte Spannung.

Aufgabe 3.98
Was sind die Einheiten für die Kapazität eines Kondensators und die Induktivität einer Spule?

Lösung
Die Einheit der Kapazität ist „Farad“ und der Induktivität „Henry“.

$$[C] = \mathrm{F} = \frac{\mathrm{s}}{\Omega}, \quad [L] = \mathrm{H} = \Omega \cdot \mathrm{s}$$

Aufgabe 3.99
Welche parasitäre Eigenschaft einer Spule muss in der Praxis häufig berücksichtigt werden?

Lösung
Beim Einsatz einer Spule muss häufig deren Wicklungswiderstand berücksichtigt werden. Der ohmsche Widerstand des Spulendrahtes bildet einen Wirkwiderstand, durch den elektrische Energie in Wärme (verbrauchte Wirkleistung, Verlustleistung) umgeformt wird.

Aufgabe 3.100
Ändert sich der Strom durch eine Spule sprunghaft, wenn sich die an der Spule anliegende Spannung sprungartig ändert?

Lösung
Der Strom durch eine Spule ändert sich nicht sprungartig, da die induzierte Spannung der erregenden Spannung entgegengerichtet ist.

Aufgabe 3.101
Beschreiben Sie den Vorgang der Selbstinduktion, wenn sich der Strom durch eine Spule ändert.

Lösung
Ändert sich der Strom durch eine Spule, so ändert sich auch der magnetische Fluss durch die Spule. Folglich wird in der Spule eine Spannung induziert. Dieser Vorgang heißt Selbstinduktion. Die Induktionsspannung ist immer so gerichtet, dass sie der Stromänderung entgegenwirkt. Wird z. B. der Strom durch eine Spule abgeschaltet (die Flussänderung $\Delta\Phi$ ist sehr groß), so wird eine hohe Spannung induziert, welche so gerichtet ist, dass der durch die Spannung erzeugte Strom das Magnetfeld aufrecht erhalten will.

Aufgabe 3.102
Eine Zylinderspule mit $N = 300$ Windungen und der Länge $l = 60\,\mathrm{cm}$ wird von einem Strom $I = 30\,\mathrm{A}$ durchflossen. Wie groß ist die magnetische Feldstärke H innerhalb der Spule?

Lösung

$$H = \frac{I \cdot N}{l} = \frac{30\,\mathrm{A} \cdot 300}{0{,}6\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{15.000\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}}}$$

Aufgabe 3.103

Eine zylinderförmige Luftspule hat $N = 20$ Windungen, einen Wicklungsradius von $r = 3\,\text{mm}$ und eine Wicklungslänge von $l = 10\,\text{mm}$. Wie groß ist die Induktivität L der Spule? Auf welchen Wert L_1 ändert sich L, wenn in die Spule ein Kern aus ferromagnetischem Material mit der Permeabilitätszahl $\mu_r = 500$ eingebracht wird?

Lösung

Die Induktivität einer langen Zylinderspule ist $L = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{A \cdot N^2}{l}$. Eine Zylinderspule ist „lang", wenn die Länge mindestens das 5 bis 10-fache des Durchmessers ist.

Für Luft ist $\mu_r = 1$.

$$L = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{V s}}{\text{A m}} \cdot \frac{(3 \cdot 10^{-3}\,\text{m})^2 \cdot \pi \cdot 20^2}{10 \cdot 10^{-3}\,\text{m}} = 1{,}42 \cdot 10^{-6}\,\text{H} = \underline{\underline{1{,}42\,\mu\text{H}}}$$

Kern mit $\mu_r = 500$: $L_1 = 1{,}42\,\mu\text{H} \cdot 500 = \underline{\underline{710\,\mu\text{H}}}$

Aufgabe 3.104

Auf einen Spulenkörper aus Kunststoff mit kreisrundem Querschnitt wird eine Wicklung aus rundem, isolierten Kupferdraht mit dem Drahtdurchmesser $d_{\text{Cu}} = 0{,}5\,\text{mm}$ aufgebracht. Der Durchmesser der Wicklung beträgt $d = 10\,\text{mm}$, ihre Länge ist $l = 10\,\text{cm}$. Die Anzahl der Windungen ist $N = 480$. Bei der Temperatur $\vartheta = 20\,°\text{C}$ ist der spezifische Widerstand von Kupfer $\rho_{\text{Cu},20} = 1{,}78 \cdot 10^{-6}\,\Omega\,\text{cm}$.

a) Wie groß ist die Induktivität L der Spule?
b) Wie groß ist der ohmsche Widerstand R_L der Spule bei der Temperatur $\vartheta = 20\,°\text{C}$?
c) Geben Sie das elektrische Ersatzschaltbild der Spule an.

Lösung

a)

$$L = \mu_0 \cdot \frac{A \cdot N^2}{l} = \mu_0 \cdot \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot N^2}{l}$$

$$L = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{V s}}{\text{A m}} \cdot \frac{(5 \cdot 10^{-3}\,\text{m})^2 \cdot \pi \cdot 480^2}{0{,}1\,\text{m}} = 2{,}27 \cdot 10^{-4}\,\text{H} = \underline{\underline{227\,\mu\text{H}}}$$

b) Die Drahtlänge ist $l_D = 2\pi \cdot \frac{d}{2} \cdot N = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-3}\,\text{m} \cdot 480 = 15{,}1\,\text{m}$.

$$R_L = \rho_{\text{Cu},20} \cdot \frac{l_D}{A} = 1{,}78 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4\,\frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}} \cdot \frac{15{,}1\,\text{m}}{(0{,}25\,\text{mm})^2 \cdot \pi} = \underline{\underline{1{,}37\,\Omega}}$$

c) Das Ersatzschaltbild entspricht dem einer realen Spule, bestehend aus idealer Induktivität und Wicklungswiderstand (Abb. 3.50).

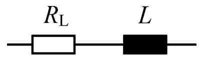


Abb. 3.50 Ersatzschaltbild der Spule mit Wicklungswiderstand

Aufgabe 3.105
Eine einlagige, zylinderförmige Luftspule hat $N = 1000$ Windungen, einen Wicklungsdurchmesser von $d = 3\,\text{cm}$ und eine Wicklungslänge von $l = 20\,\text{cm}$. Durch die Spule fließt der Strom $I = 1{,}5\,\text{A}$. Berechnen Sie:

a) die magnetische Durchflutung Θ,
b) die magnetische Feldstärke H innerhalb der Spule,
c) die magnetische Flussdichte B,
d) den magnetischen Fluss Φ,
e) die Induktivität L der Spule.

Lösung
a) $\Theta = I \cdot N = 1{,}5\,\text{A} \cdot 1000 = \underline{\underline{1500\,\text{A}}}$
b) $H = \frac{I \cdot N}{l} = \frac{1{,}5\,\text{A} \cdot 1000}{0{,}2\,\text{m}} = \underline{\underline{7500\,\frac{\text{A}}{\text{m}}}}$
c) $B = \mu_0 \cdot H = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{V s}}{\text{A m}} \cdot 7500\,\frac{\text{A}}{\text{m}} = 9{,}4 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{V s}}{\text{m}^2} = \underline{\underline{9{,}4\,\text{mT}}}$
d) $\Phi = B \cdot A = 9{,}4 \cdot 10^{3}\,\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \cdot (0{,}015\,\text{m})^2 \cdot \pi = \underline{\underline{6{,}7\,\text{V s}}}$
e) $L = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{A \cdot N^2}{l} = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{V s}}{\text{A m}} \cdot 1 \cdot \frac{(0{,}015\,\text{m})^2 \cdot \pi \cdot 1000^2}{0{,}2\,\text{m}} = \underline{\underline{4{,}4\,\text{mH}}}$

Aufgabe 3.106
Eine einlagige, zylinderförmige Luftspule hat $N = 200$ Windungen, einen Wicklungsdurchmesser von $d = 6\,\text{cm}$ und eine Wicklungslänge von $l = 40\,\text{cm}$. Durch die Spule fließt der Strom $I = 4{,}0\,\text{A}$. Im Spuleninneren ist das magnetische Feld homogen, dort wird eine Flussdichte (magnetische Induktion) $B = 2{,}2\,\text{mT}$ gemessen.

a) Wie groß ist die magnetische Spannung V_i über dem Spuleninnenraum?
b) Wie groß ist die magnetische Spannung V_a über dem Spulenaußenraum?
c) Wie groß ist der magnetische Fluss Φ innerhalb der Spule?

Lösung
Erläuterungen
Das Durchflutungsgesetz beschreibt den Zusammenhang zwischen dem elektrischen Strom als Ursache des magnetischen Feldes und der magnetischen Feldstärke. In allgemeiner Form lautet es:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \oiint_A \vec{S} \cdot d\vec{A} \;(\vec{H} = \text{Feldstärke}, \vec{S} = \text{Stromdichte})$$

In Worten: Das Umlaufintegral über die magnetische Feldstärke ist gleich dem eingeschlossenen Strom.

Die Größe $\Theta = \oiint_A \vec{S} \cdot d\vec{A}$ (ein Hüllenintegral, vektorielles Oberflächenintegral) wird als Durchflutung bezeichnet.

Der Ausdruck $V = \oint \vec{H} \cdot d\vec{s}$ ist die magnetische Umlaufspannung.

Die Durchflutung Θ baut das magnetische Feld H auf und ist die Ursache für den magnetischen Fluss Φ. Θ wird daher auch magnetische Quellenspannung genannt. Dies erfolgt analog zur elektrischen Quellenspannung, die Ursache für den elektrischen Stromfluss ist.

$$\Phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} (\vec{B} = \text{Flussdichte}); \quad \vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_\mathrm{r} \cdot \vec{H}$$

$$[B] = \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{T}\ (\text{Tesla}); \quad [\Phi] = \mathrm{T\,m}^2 = \mathrm{V\,s} = \mathrm{Wb}\ (\text{Weber})$$

Das Umlaufintegral $V = \oint \vec{H} \cdot d\vec{s}$ (ein Linien-, Kurven-, Wegintegral längs eines geschlossenen Weges) kann in eine Summe einzelner Teilstrecken zerlegt werden. Die magnetische Spannung der Teilstrecke zwischen den Punkten A und B wird als magnetischer Spannungsabfall bezeichnet: $V_{AB} = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{s}$.

Bei einer langen Spule kann die Durchflutung Θ gleich der Summe aller Ströme gesetzt werden, die beim Umlaufintegral längs dem geschlossenen Weg s umschlungen werden. Das Umlaufintegral über die magnetische Feldstärke längs einer geschlossenen Kurve ist dann gleich der Summe der Ströme in der geschlossenen Kurve.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum I$$

Bei der Spule mit N Windungen umschließt das Feld N vom Strom gleichsinnig durchflossene Leiter. Somit ist $\Sigma I = I \cdot N$. Die magnetische Umlaufspannung ist gleich der zu diesem Umlauf gehörenden Durchflutung. Für die lange Zylinderspule folgt für ihren Innenraum mit homogenem Magnetfeld:

$$\Theta = V = I \cdot N = H \cdot l.$$

Θ = Durchflutung, V = magnetische Umlaufspannung, I = Stromstärke, N = Windungszahl, H = magnetische Feldstärke, l = Länge der Spule

Man beachte: $[\Theta] = [V] = \mathrm{A}$ = Amperewindungen

Die gesamte Durchflutung ergibt sich durch Addition über einen geschlossenen Weg der magnetischen Teilspannungen von Spuleninnenraum und Spulenaußenraum:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta = I \cdot N = \int_{li} \vec{H}_\mathrm{i} \cdot d\vec{s} + \int_{la} \vec{H}_\mathrm{a} \cdot d\vec{s} = V_\mathrm{i} + V_\mathrm{a}$$

$\vec{H}_\mathrm{i}$ = Feldstärke im Inneren der Spule,
$\vec{H}_\mathrm{a}$ = Feldstärke im Außenraum der Spule
li = Integrationsweg im Inneren der Spule,
la = Integrationsweg außerhalb der Spule.

Zur Aufgabe

a) Für die Feldstärke im Spuleninnenraum gilt: $H_\mathrm{i} = \frac{B}{\mu_0}$.
Die magnetische Spannung V_i über dem Spuleninnenraum ist somit:

$$V_\mathrm{i} = H_\mathrm{i} \cdot l = \frac{B}{\mu_0} \cdot l = \frac{2{,}2 \cdot 10^{-3}\ \frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{m^2}}}{4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A\,m}}} \cdot 0{,}4\,\mathrm{m} = \underline{\underline{700\,\mathrm{A}}}\ \text{(700 Amperewindungen)}$$

b) Die magnetische Feldstärke außerhalb der Spule ist nicht bekannt. Sie ist ortsabhängig, also nicht homogen, sie nimmt mit zunehmendem Abstand von der Spule ab. Es gilt aber $\Theta = I \cdot N = V_\mathrm{i} + V_\mathrm{a}$ und somit $V_\mathrm{a} = I \cdot N - V_\mathrm{i}$.
Die magnetische Spannung V_a über dem Spulenaußenraum wird aus der Differenz der magnetischen Quellenspannung Θ (= Durchflutung) und dem magnetischen Spannungsabfall über dem Spuleninnenraum berechnet.

$$V_a = 4{,}0\,\mathrm{A} \cdot 200 - 700\,\mathrm{A} = \underline{\underline{100\,\mathrm{A}}}\ \text{(100 Amperewindungen)}$$

c)

$$\Phi = B \cdot A = 2{,}2 \cdot 10^{-3}\ \frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{m^2}} \cdot (0{,}03\,\mathrm{m})^2 \cdot \pi = \underline{\underline{6{,}2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{V\,s}}}$$

Aufgabe 3.107

Leiten Sie die Formel für die in einer Spule gespeicherte Energie $W_\mathrm{L} = \frac{1}{2} L I^2$ her.

Lösung

$$W_\mathrm{L} = \int_0^t U_\mathrm{L}(t) \cdot I(t) dt; \quad \text{Bauteilgleichung der Spule: } U_\mathrm{L}(t) = L \cdot \frac{dI(t)}{dt}$$

$$W_\mathrm{L} = L \cdot \int_0^t I(t) \cdot \frac{dI(t)}{\cancel{dt}} \cdot \cancel{dt} = L \cdot \int_0^I I'(t) \cdot dI'; \quad \underline{\underline{W_\mathrm{L} = \frac{1}{2} L I^2}} \text{ für } I = \text{const.}$$

Die Energie wird im magnetischen Feld gespeichert.

Aufgabe 3.108

Geben Sie Beispiele für den Verwendungszweck von Spulen im Gleichstromkreis und im Wechselstromkreis an.

Lösung

Gleichstromkreis: Elektromagnet, Relais.

Wechselstromkreis: Transformator, Trennung von Signalen mit unterschiedlicher Frequenz, Schwingkreis.

Aufgabe 3.109

Eine lange, zylinderförmige Luftspule mit $N = 1510$ Windungen eines isolierten Metalldrahtes, einer Länge von $l = 15\,\text{cm}$ und einem Windungsdurchmesser $d = 1{,}0\,\text{cm}$ ist an eine Gleichspannungsquelle angeschlossen. In der Spule soll eine Flussdichte (magnetische Induktion) von $B = 0{,}2\,\text{T}$ erreicht werden.

a) Wie groß ist die Induktivität L der Spule?
b) Wie groß muss der Strom I durch die Spule sein?
c) Wie groß muss der Drahtdurchmesser d sein, damit eine Stromdichte von $S = 4{,}0\,\text{A/mm}^2$ nicht überschritten wird?
d) Wie groß ist die in der Spule gespeicherte Energie W_L?

Lösung

a)

$$L = \mu_0 \cdot \frac{A}{l} \cdot N^2 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\Omega\,\text{s}}{\text{m}} \cdot \frac{(5 \cdot 10^{-3}\,\text{m})^2 \cdot \pi}{0{,}15\,\text{m}} \cdot 1510^2 = \underline{\underline{1{,}5\,\text{mH}}}$$

b)

$$H = \frac{I \cdot N}{l}; \quad B = \mu_0 \cdot H; \quad I = \frac{B \cdot l}{\mu_0 \cdot N}; \quad I = \frac{0{,}2\,\frac{\text{V s}}{\text{m}^2} \cdot 0{,}15\,\text{m}}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\Omega\,\text{s}}{\text{m}} \cdot 1510} = \underline{\underline{15{,}8\,\text{A}}}$$

c)

$$S = \frac{I}{A} = \frac{I}{\left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi}; \quad d = 2 \cdot \sqrt{\frac{I}{S \cdot \pi}}; \quad d = 2 \cdot \sqrt{\frac{15{,}8\,\text{A}}{4{,}0\,\frac{\text{A}}{\text{mm}^2} \cdot \pi}} = \underline{\underline{2{,}24\,\text{mm}}}$$

d)

$$W_L = \frac{1}{2} L I^2 = 0{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{H} \cdot (15{,}8\,\text{A})^2 = \underline{\underline{0{,}19\,\text{J}}}$$

Aufgabe 3.110

Der in Abb. 3.51 gezeigte ringförmige Körper aus ferromagnetischem Material mit der Permeabilitätszahl $\mu_r = 500$ besitzt einen kreisrunden Querschnitt mit dem Radius $r = 6\,\text{mm}$. Der mittlere Radius des Ringes beträgt $R = 32\,\text{mm}$. Der Ring ist über den gesamten Umfang gleichmäßig mit einem Kupferlackdraht umwickelt. Somit liegt eine in sich geschlossene, ringförmige Spule vor, welche vom Material des Ringes ganz ausgefüllt ist. Die Anzahl der Drahtwindungen beträgt $N = 1000$. In der Spule fließt der Strom $I = 1{,}0\,\text{A}$.

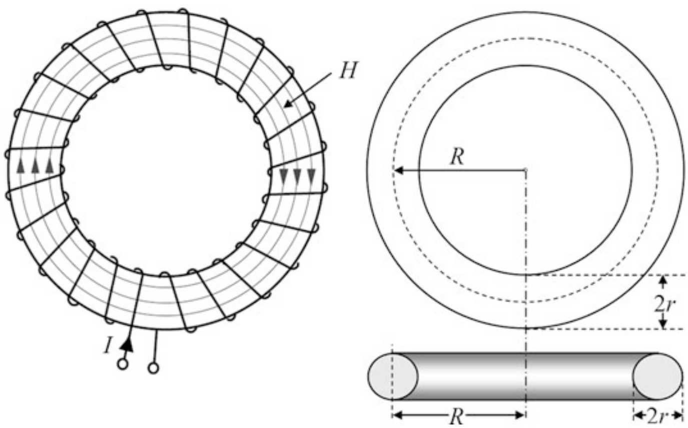


Abb. 3.51 Ringspule

a) Wie groß ist die magnetische Feldstärke H entlang der Mittellinie des Rings (gestrichelte Kreislinie in Abb. 3.51 rechts)?
b) Wie groß ist die magnetische Flussdichte B in der Mittellinie des Rings?
c) Wie groß ist der von der Spule erzeugte magnetische Fluss Φ?
d) Wie groß ist die Induktivität L der Spule?
e) Wie groß ist die in der Spule gespeicherte Energie W_L?
f) Nach dem Einschalten der an der Spule angeschlossenen Spannungsquelle steigt der Strom durch die Ringspule in zehn Millisekunden linear von $I = 0\,\text{A}$ auf $I = 2{,}0\,\text{A}$ an. Wie groß ist die durch Selbstinduktion in der Spule entstehende Spannung U_i?

Lösung

a)

$$H = \frac{I \cdot N}{l}; \quad l = 2 \cdot \pi \cdot R = 201\,\text{mm}; \quad H = \frac{1{,}0\,\text{A} \cdot 1000}{0{,}201\,\text{m}} = \underline{\underline{4975\,\frac{\text{A}}{\text{m}}}}$$

b)

$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H; \quad B = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{V s}}{\text{A m}} \cdot 500 \cdot 4975\,\frac{\text{A}}{\text{m}} = \underline{\underline{3{,}1\,\text{T}}} \left(\text{oder } \frac{\text{V s}}{\text{m}^2}\right)$$

c)

$$\Phi = B \cdot A; \quad A = r^2 \cdot \pi = (0{,}006\,\text{m})^2 \cdot \pi = 1{,}13 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2$$

$$\Phi = 3{,}1\,\text{T} \cdot 1{,}13 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2 = \underline{\underline{3{,}5 \cdot 10^{-4}\,\text{Wb}}}\ (\text{oder V s})$$

d)

$$L = \frac{N \cdot \Phi}{I} = \frac{1000 \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-4}\,\text{Wb}}{1{,}0\,\text{A}} = \underline{\underline{0{,}35\,\text{H}}}$$

e)

$$W_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}35\,\mathrm{H} \cdot (1{,}0\,\mathrm{A})^2 = \underline{\underline{0{,}175\,\mathrm{J}}}\ (\text{oder W s})$$

f)

$$U_i = -L \cdot \frac{dI(t)}{dt} = -L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} = -0{,}35\,\mathrm{H} \cdot \frac{2{,}0\,\mathrm{A}}{10^{-2}\,\mathrm{s}} = \underline{\underline{-70\,\mathrm{V}}}$$

Aufgabe 3.111
Durch eine Ringspule (siehe Abb. 3.51) mit $N = 850$ Windungen fließt der Strom $I = 0{,}9\,\mathrm{A}$. Der mittlere Durchmesser beträgt $d_1 = 2R_1 = 135\,\mathrm{mm}$.

a) Wie groß sind Durchflutung Θ und magnetische Feldstärke H im homogenen Feld innerhalb der Spule?
b) Wie groß ist die magnetische Feldstärke H, wenn der Durchmesser bei gleicher Durchflutung $d_2 = 2R_2 = 270\,\mathrm{mm}$ beträgt?
c) Wie groß sind magnetische Feldstärke H und Flussdichte B, wenn der Durchmesser $d_3 = 2R_3 = 12\,\mathrm{mm}$ beträgt und das Kernmaterial die Permeabilitätszahl $\mu_r = 300$ besitzt?

Lösung
a)

$$\Theta = I \cdot N = 0{,}9\,\mathrm{A} \cdot 850 = \underline{\underline{765\,\mathrm{A}}}$$

$$H = \frac{I \cdot N}{l} = \frac{\Theta}{l} = \frac{765\,\mathrm{A}}{2\pi R_1} = \frac{765\,\mathrm{A}}{2\pi \cdot \frac{135 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}{2}} = \underline{\underline{1803{,}8\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}}}$$

b)

$$H = \frac{\Theta}{2\pi R_2} = \frac{765\,\mathrm{A}}{2\pi \cdot \frac{270 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}{2}} = \underline{\underline{901{,}9\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}}}$$

c)

$$H = \frac{\Theta}{2\pi R_3} = \frac{765\,\mathrm{A}}{2\pi \cdot \frac{12 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}{2}} = \underline{\underline{20{,}3\,\frac{\mathrm{kA}}{\mathrm{m}}}}$$

$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A\,m}} \cdot 300 \cdot 20{,}3 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} = \underline{\underline{7{,}7\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{m}^2}}}\ (\text{Tesla})$$

3.4.2 Magnetischer Kreis

Aufgabe 3.112
Betrachtet werden „Magnetische Kreise".

a) Definieren Sie den Begriff „Magnetischer Kreis".
b) Wie können magnetische Kreise nach ihrem Aufbau eingeteilt werden?

c) Geben Sie die Voraussetzungen, an die vorliegen müssen, damit ein magnetischer Kreis in Analogie zu einem Gleichstromkreis berechnet werden kann.
d) Leiten Sie die formalen Analogien zwischen einem elektrischen Gleichstromkreis und einem magnetischen Kreis her. Stellen Sie jeweils die Definitionen und Größen zur Berechnung und die Ersatzschaltbilder gegenüber.
e) Erläutern Sie allgemein die Vorgehensweise bei der Berechnung magnetischer Kreise.
f) Erweitern Sie die Berechnung auf nichtlineare magnetische Kreise.

Lösung

a) Magnetfeldlinien sind in sich geschlossen, sie bilden ein Wirbelfeld ohne Anfang und Ende. Analog zum geschlossenen *Stromkreis* beim Leitungsstrom wird der Verlauf magnetischer Feldlinien als *magnetischer Kreis* bezeichnet. Ein magnetischer Kreis ist eine Anordnung, die den magnetischen Fluss entlang seiner ferromagnetischen Teile auf vorgeschriebene, in sich geschlossene Wege lenkt. Ein magnetischer Kreis dient zur kontrollierten Führung magnetischer Feldlinien (in elektrischen Maschinen).
b) Magnetische Kreise können *unverzweigt* oder *verzweigt* sein. Beim unverzweigten magnetischen Kreis gibt es nur *einen* in sich geschlossenen Weg, entlang dem die Magnetfeldlinien verlaufen. Der magnetische Fluss teilt sich dann nicht auf. Ein Beispiel hierfür ist eine Ringspule nach Abb. 3.51. Beim verzweigten magnetischen Kreis gib es mehrere Pfade für den Verlauf der magnetischen Feldlinien. Der magnetische Fluss teilt sich in Flussanteile auf, ähnlich der Aufteilung des Leitungsstromes (nach dem Knotensatz) in einem verzweigten Stromkreis. Ein Beispiel ist ein verzweigter Eisenkreis mit einer oder mehreren stromdurchflossenen Wicklungen, wie der Transformatorkern mit drei Schenkeln beim Drehstromtransformator.
c) Ein magnetischer Kreis kann aus verschiedenen Materialabschnitten bestehen, meistens Luft (in Form von einem oder mehreren Luftspalten) und Eisen. Die Abschnitte können verschiedene Längen und Querschnittsflächen aufweisen. Der magnetische Fluss wird durch ein hochpermeables Material (häufig Dynamoblech) weitgehend gebündelt, so dass die magnetische Flussdichte B innerhalb des Kreises möglichst groß wird und der von Streufeldern verursachte, außerhalb des Kreises verlaufende Fluss, vernachlässigt werden kann. Da die Länge des magnetischen Kreises meist groß gegenüber dem Eisenquerschnitt ist, liegt dann im Eisen annähernd ein homogenes Magnetfeld vor. – Luftspalte sind für die Funktion von elektrischen Maschinen mit rotierenden Eisenteilen (z. B. Elektromotoren) notwendig. Die Weite des Luftspalts ist meist deutlich kleiner als seine Querabmessungen, d. h., die Luftspaltlänge ist sehr viel kleiner als die Luftspaltbreite, die Feldverzerrungen am Rande des Luftspalts sind vernachlässigbar. Das Feld im Luftspalt kann dann ebenfalls als homogen und als genauso groß wie im Eisen betrachtet werden, der magnetische Fluss ist im Luftspalt derselbe wie im Eisen. Der magnetische Kreis muss außerdem als *linear* betrachtet werden können. Dies bedeutet, die Permeabilität $\mu = \mu_0 \cdot \mu_\mathrm{r}$ kann abschnittsweise als konstant angenommen werden. Die genannten Voraussetzungen für die Homogenität des Magnetfeldes und die Linearität des Kreises müssen erfüllt sein, damit ein magne-

tischer Kreis in Analogie zu einem Gleichstromkreis berechnet werden kann. Alle von der Berechnung von Gleichstromkreisen bekannten Verfahren wie Strom- und Spannungsteilerregel, Ersatzwiderstände von Reihen- und Parallelschaltung, Knoten- und Maschensatz können verwendet werden.

d) Ursache des magnetischen Feldes einer von Gleichstrom durchflossenen Spule ist die Summenwirkung des Stroms in allen Windungen, sie ergibt die magnetische Durchflutung Θ.

$$\Theta = I \cdot N = H \cdot l$$

Θ = Durchflutung in A (Ampere*windungen*), N = Windungszahl, I = Stromstärke in A (Ampere), H = magnetische Feldstärke in A/m, l = mittlere Feldlinienlänge in m (Meter).

Der magnetische Fluss eines homogenen Magnetfeldes ist:

$$\Phi = B \cdot A = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H \cdot A.$$

Φ = magnetischer Fluss in Wb (Weber oder V s), B = Flussdichte in T (Tesla oder V s/m^2), A = konstante, vom Magnetfeld in Richtung der Flächennormalen durchsetzte Querschnittsfläche in m^2,

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A\,m}} = \text{ magnetische Feldkonstante, } \mu_r = \text{Permeabilitätszahl.}$$

Mit $H = \frac{\Phi}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A}$ folgt für die Durchflutung

$$\Theta = \underbrace{\frac{1}{\mu_0 \cdot \mu_r} \cdot \frac{l}{A}}_{R_m} \cdot \Phi = R_m \cdot \Phi.$$

Formal besteht eine Ähnlichkeit zum ohmschen Gesetz für den Widerstand eines Drahtes:

$$U = R \cdot I \text{ mit } R = \rho \cdot \frac{l}{A}.$$

U = Spannung in V (Volt), R = ohmscher Widerstand in Ω (Ohm), ρ = spezifischer ohmscher Widerstand in Ω m (Ohm mal Meter), l = Drahtlänge in m (Meter), A = (abschnittsweise) konstante Querschnittsfläche des Drahtes in m^2.

Aus der Analogiebetrachtung erhält man das *ohmsche Gesetz des magnetischen Kreises* (Hopkinson'sches Gesetz[1]):

$$\Theta = R_m \cdot \Phi.$$

Die Größe R_m mit der Einheit $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V\,s}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Wb}} = \frac{1}{\Omega\,\mathrm{s}} = \frac{1}{\mathrm{H}}$ wird als *magnetischer Widerstand* bezeichnet.

[1] John Hopkinson, britischer Physiker und Elektroingenieur (1849–1898).

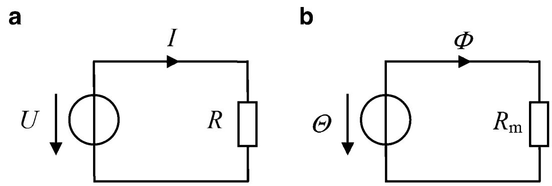


Abb. 3.52 Ersatzschaltbild des unverzweigten elektrischen (**a**) und magnetischen (**b**) Kreises

In Analogie zum spezifischen ohmschen Widerstand ρ wird $\rho_\mathrm{m} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_0 \cdot \mu_\mathrm{r}}$ als spezifischer magnetischer Widerstand bezeichnet. Die Einheit von ρ_m ist: $[\rho_\mathrm{m}] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{H}} = \frac{\mathrm{m}}{\Omega \mathrm{s}}$.

Ein Vergleich der beiden Gleichungen $U = R \cdot I$ und $\Theta = R_\mathrm{m} \cdot \Phi$ ergibt, dass der elektrischen Spannung U im Leitungsstromkreis die magnetische Durchflutung Θ im magnetischen Kreis entspricht, die wiederum gleich ist der magnetischen Spannung (Umlaufspannung) V. Der gesamte ohmsche Widerstand R im unverzweigten elektrischen Stromkreis entspricht dem gesamten magnetischen Widerstand R_m, den der magnetische Fluss Φ auf seinem geschlossenen Umlaufweg des magnetischen Kreises vorfindet. Die elektrische Stromstärke I entspricht somit dem magnetischen Fluss Φ.

Durch diese Gegenüberstellungen kann der magnetische Kreis in eine Ersatzschaltung aus Spannungsquelle und einem oder mehreren Widerständen überführt werden, die mit den Methoden (der Netzwerktheorie) zur Berechnung von Gleichstromkreisen analysiert werden kann.

Für einen *unverzweigten* elektrischen und einen unverzweigten magnetischen Kreis *ohne unterschiedliche Materialabschnitte* zeigt Abb. 3.52 die Ersatzschaltbilder. Es ergibt sich die Gegenüberstellung von elektrischen und magnetischen Größen mit einigen einfachen Zusammenhängen in Tab. 3.1.

Sind die Kreise zwar *unverzweigt*, bestehen aber aus *Abschnitten unterschiedlicher Widerstandswerte*, so liegt eine Reihenschaltung von Widerständen vor.

Im elektrischen Kreis sind dann mehrere ohmsche Widerstände in Reihe geschaltet, ihre elektrischen Spannungsabfälle addieren sich zur (an der Widerstandskette anliegenden) Gesamtspannung. Wir haben eine *elektrische* Reihenschaltung.

Im magnetischen Kreis durchlaufen in diesem Fall die Feldlinien Strecken mit unterschiedlichem Material, z. B. einen kreisförmig in sich (fast) geschlossenen Eisenkern, der von einem schmalen Luftspalt unterbrochen ist. Die magnetischen Teilspannungen addieren sich zur gesamten Umlaufspannung $V = \Theta$. Wir haben eine *magnetische* Reihenschaltung.

Die Ersatzschaltbilder für beide Fälle zeigt Abb. 3.53.

Liegt ein *verzweigter* magnetischer Kreis (z. B. bei einem mehrschenkligen Eisenkörper) vor, so können mehrere Schenkel Spulen tragen, die von unterschiedlichen Strömen durchflossen werden. Auch hier können in Analogie zu elektrischen Stromkreisen Knotengleichungen für die magnetischen Flüsse (z. B. $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0$) und Maschengleichungen für die Durchflutungen und magnetischen Spannungsabfälle (z. B. $\Theta_1 = R_\mathrm{m1} \cdot \Phi_1 - R_\mathrm{m3} \cdot \Phi_3$ und $\Theta_2 = R_\mathrm{m2} \cdot \Phi_2 - R_\mathrm{m3} \cdot \Phi_3$) aufgestellt werden.

Tab. 3.1 Analogien zwischen elektrischem und magnetischem Kreis

Elektrischer Stromkreis			Magnetischer Kreis		
Benennung	Formelzeichen, Beziehungen	Einheit	Benennung	Formelzeichen, Beziehungen	Einheit
Elektrische Spannung als Ursache	U $U = R \cdot I$	V (Volt)	Magnetische Spannung (Durchflutung) als Ursache	V, Θ $V = \Theta = I \cdot N = H \cdot l$	A (Amperewindungen)
Elektrischer Strom als Wirkung	$I = U/R$ Ohm'sches Gesetz	A (Ampere)	Magnetischer Fluss als Wirkung	$\Phi = \Theta/R_\mathrm{m}$ Hopkinson'sches Gesetz	Wb (Weber) $=$ V s
Stromdichte	$S = I/A$	$\mathrm{A/m^2}$	Flussdichte	$B = \Phi/A$	T (Tesla) $= \mathrm{Vs/m^2}$
Elektrischer Widerstand	$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$	Ω (Ohm)	Magnetischer Widerstand	$R_\mathrm{m} = \frac{\Theta}{\Phi} = \rho_\mathrm{m} \cdot \frac{l}{A}$	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V\,s}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Wb}} = \frac{1}{\Omega\,\mathrm{s}} = \frac{1}{\mathrm{H}}$
Material, spezifischer elektrischer Widerstand	ρ	Ω m	Material, spezifischer magnetischer Widerstand	$\rho_\mathrm{m} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_0 \cdot \mu_\mathrm{r}}$	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{H}} = \frac{\mathrm{m}}{\Omega\,\mathrm{s}}$
Elektrischer Leitwert	$G = \frac{1}{R}$	S (Siemens)	Magnetischer Leitwert	$G_\mathrm{m} = \frac{1}{R_\mathrm{m}}$	H (Henry) $= \Omega$ s
Material, spezifischer elektrischer Leitwert	$\kappa = \frac{1}{\rho}$	$\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}} = \frac{1}{\Omega\,\mathrm{m}}$	Material, spezifischer magnetischer Leitwert (Permeabilität)	$\mu = \mu_0 \cdot \mu_\mathrm{r}$	$\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}} = \frac{\Omega\,\mathrm{s}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A\,m}}$
Maschensatz	$\sum U = 0$	–	Durchflutungsgesetz	$\sum V = \Theta$	–
Knotensatz	$\sum I = 0$	–	Verzweigungssatz	$\sum \Phi = 0$	–

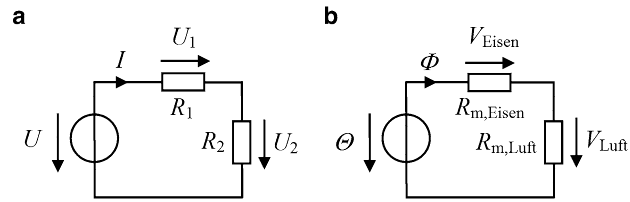


Abb. 3.53 Ersatzschaltbild des unverzweigten elektrischen (**a**) und magnetischen (**b**) Kreises im Falle der Reihenschaltung elektrischer und magnetischer Widerstände

Auf die Richtungen der Durchflutungen entsprechend dem Wicklungssinn der Spulen und der Stromrichtungen ist dabei zu achten.

e) Allgemeine Vorgehensweise bei der Berechnung magnetischer Kreise
In einem magnetischen Ersatzschaltbild werden einzelne Widerstände für diejenigen Bereiche eingeführt, in denen sich entweder die Permeabilität μ oder die Geometrie des Materials *nicht* ändert. Der zu berechnende magnetische Kreis wird somit in Abschnitte (Schenkel) mit konstantem Querschnitt und konstanter Permeabilität unterteilt. In einem Abschnitt können dann die Feldgrößen B und H als konstant betrachtet werden. Für jeden Abschnitt wird ein magnetischer Widerstand $R_{\mathrm{m}} = \frac{l}{\mu_0 \cdot \mu_{\mathrm{r}} \cdot A}$ definiert. Die Länge l ist dabei die *mittlere Schenkellänge*, dies ist der Weg durch die Mitte des Schenkelquerschnitts. Für die magnetische Ersatzschaltung werden die Knotengleichungen $\sum \Phi_{\mathrm{n}} = 0$ und Maschengleichungen $\Theta = \sum V_{\mathrm{n}} = \sum R_{\mathrm{m,n}} \cdot \Phi_{\mathrm{n}}$ aufgestellt und die unbekannten Flüsse Φ_{n} berechnet. Aus den magnetischen Flüssen Φ_{n} werden die Feldgrößen B und H in den einzelnen Abschnitten berechnet.
Die Methodik zusammengefasst:
1. Aus Stromstärke I und Windungszahl N wird die Durchflutung Θ berechnet: $\Theta = I \cdot N$.
2. Der magnetische Gesamtwiderstand $R_{\mathrm{m,ges}} = \sum R_{\mathrm{m,n}}$ eines geschlossenen magnetischen Kreises wird als Summe der magnetischen Widerstände des Kreises bestimmt. Die einzelnen Widerstände ergeben sich aus den Abschnitten mit konstantem Querschnitt und konstanter Permeabilität zu $R_{\mathrm{m,n}} = \frac{l_{\mathrm{n}}}{\mu_0 \cdot \mu_{\mathrm{r,n}} \cdot A_{\mathrm{n}}}$.
3. Der magnetische Fluss Φ innerhalb einer magnetischen Masche wird aus Durchflutung Θ und magnetischem Gesamtwiderstand der Masche berechnet: $\Phi = \frac{\Theta}{R_{\mathrm{m,ges}}}$.
4. In einem Abschnitt wird die Flussdichte $B = \frac{\Phi}{A}$ und die Feldstärke $H = \frac{B}{\mu_0 \cdot \mu_{\mathrm{r}}}$ berechnet.

f) Bei den bisherigen Berechnungen magnetischer Kreise war vorausgesetzt, dass die Permeabilität des Eisens $\mu = \mu_0 \cdot \mu_{\mathrm{r}}$ bekannt und abschnittsweise konstant ist. In der Praxis sind Eisenkreise nichtlinear. μ (und somit auch $B = \mu \cdot H$) wird (nach einem Maximum) mit zunehmendem H nichtlinear kleiner. Die Folge ist, dass mit wachsendem H die Flussdichte B immer weniger ansteigt, man spricht von einer *Sättigung* des Eisens. Ist $\mu_{\mathrm{r}} = \mu_{\mathrm{Eisen}}$ nicht bekannt und auch nicht annähernd konstant, so ist die Eigenschaft des Eisens meist über eine *Magnetisierungskennlinie* $B = f(H)$ gegeben. Die Bestimmung von B und H für einen bestimmten Arbeitspunkt mit einer festgelegten Durchflutung $\Theta = I \cdot N$ kann dann grafisch erfolgen.

Man kann folgenden linearen Zusammenhang zwischen B und H_{Eisen} herleiten:

$$H_{\mathrm{Eisen}} \cdot \frac{l_{\mathrm{Eisen}}}{\Theta} + B \cdot \frac{l_{\mathrm{Luft}}}{\mu_0 \cdot \Theta} = 1$$

Die Geradengleichung lautet:

$$B(H_{\mathrm{Eisen}}) = -\mu_0 \cdot \frac{l_{\mathrm{Eisen}}}{l_{\mathrm{Luft}}} \cdot H_{\mathrm{Eisen}} + \mu_0 \cdot \frac{\Theta}{l_{\mathrm{Luft}}}$$

In dieser Gleichung sind die beiden Unbekannten H_{Eisen} und $B = B_{\mathrm{Eisen}} = B_{\mathrm{Luft}}$ enthalten.
Für $B = 0$ folgt der Abschnitt auf der H-Achse: $H_0 = \frac{1}{l_{\mathrm{Eisen}}} \cdot \Theta$.
Für $H = 0$ folgt der Abschnitt auf der B-Achse: $B_0 = \frac{\mu_0}{l_{\mathrm{Luft}}} \cdot \Theta$.
Die beiden Achsenabschnitte legen im $B(H)$-Diagramm (Magnetisierungskennlinie des Eisens *ohne* Luftspalt) die so genannte *Scherungsgerade* oder *Luftspaltgerade* fest, die in das Diagramm eingetragen wird. Der Schnittpunkt der Geraden mit der Magnetisierungskurve ergibt den *Arbeitspunkt* AP, der sich für einen bestimmten Strom I und der daraus folgenden Durchflutung $\Theta = I \cdot N$ einstellt.
Im Arbeitspunkt kann auf der Abszisse der Wert $H_{\mathrm{Eisen,AP}}$ und auf der Ordinate der Wert $B_{\mathrm{Eisen,AP}}$ abgelesen werden.
Für die Werte im Luftspalt gilt im Arbeitspunkt: $B_{\mathrm{Luft,AP}} = B_{\mathrm{Eisen,AP}}$ und $H_{\mathrm{Luft,AP}} = B_{\mathrm{Luft,AP}}/\mu_0$.
Aus der Magnetisierungskennlinie des Eisens *ohne* Luftspalt kann mit der Scherungsgeraden die „gescherte“ Magnetisierungskennlinie des Eisens *mit* Luftspalt konstruiert werden (Abb. 3.54). Dazu muss die Luftspaltgerade gespiegelt und als durch die Punkte (0; 0) und $(H_0; B_0)$ verlaufende Widerstandsgerade eingezeichnet werden. Anschließend müssen die Feldstärken dieser Geraden und der Magnetisierungskennlinie in horizontaler Richtung punktweise addiert werden, um die Punkte der neuen, gescherten Magnetisierungskennlinie zu erhalten.

► **Anmerkung** Legt man an eine Induktivität mit Eisenkern eine Wechselspannung (z. B. die Netzspannung an einen Transformator), so wird durch die sinusförmige eingeprägte Spannung ein sinusförmiger magnetischer Fluss erzwungen. Durch die nichtlineare Magnetisierungskennlinie ist die Abhängigkeit des Stromes von der Spannung ebenfalls nichtlinear, der Magnetisierungsstrom weicht von der Sinusform ab, er ist verzerrt. Die Funktion $i(t)$ enthält ungerade harmonische Frequenzen, welche die Verluste im Eisen erhöhen. Eine Sättigung des Eisens sollte deshalb vermieden werden.

Aufgabe 3.113
Ein Eisenkern aus Elektroblech hat einen Luftspalt der Länge $l_{\mathrm{L}} = 3\,\mathrm{mm}$. Die mittlere Feldlinienlänge im Blech beträgt $l_{\mathrm{B}} = 70\,\mathrm{cm}$. Bei einem Strom von $I = 4{,}0\,\mathrm{A}$ durch eine

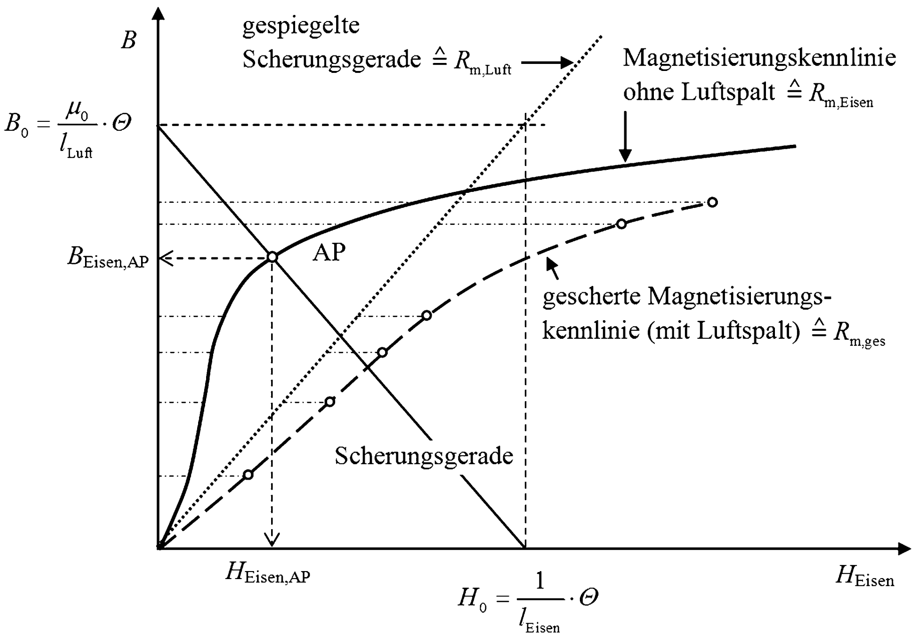


Abb. 3.54 Grafisches Verfahren zur Bestimmung von H und B im Eisen bei einem magnetischen Kreis mit Luftspalt und nichtlinearer Magnetisierungskennlinie, Verfahren der Scherung

Spule auf dem Eisenkern soll im Eisen eine Flussdichte $B = 1{,}4\,\mathrm{T}$ entstehen. Aus einer Materialtabelle (Magnetisierungskennlinie, Magnetisierungskurve $B = f(H)$) wird die zur Flussdichte gehörende magnetische Feldstärke im Eisen $H_B = 14{,}0\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ entnommen. Welche Windungszahl N muss die Spule haben?

Lösung
Die magnetische Spannung über dem Weg durch das Blech ist

$$V_B = H_B \cdot l_B = 14{,}0\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} \cdot 0{,}7\,\mathrm{m} = 9{,}8\,\mathrm{A}.$$

Wir nehmen näherungsweise an, dass der ganze magnetische Fluss im Querschnitt des Luftspalts konzentriert bleibt. Dann ist die Feldstärke in Luft:

$$H_L = \frac{B}{\mu_0} = \frac{1{,}4\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}} = 1{,}1 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}.$$

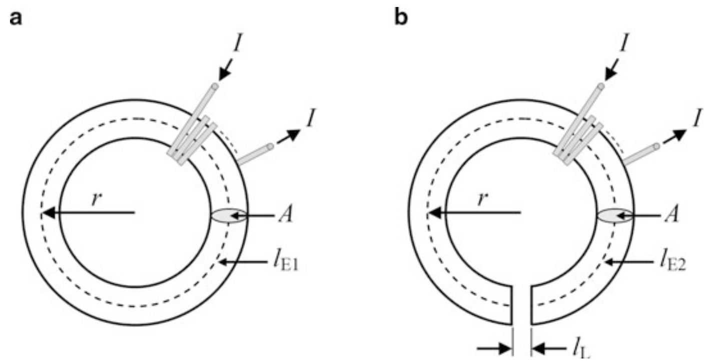


Abb. 3.55 Ringkern aus Eisen ohne (**a**) und mit (**b**) Luftspalt mit Drahtwicklung (nicht maßstäblich)

Die magnetische Spannung über dem Weg in Luft ist

$$V_L = H_L \cdot l_L = 1{,}1 \cdot 10^6 \, \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} \cdot 3 \cdot 10^{-3} \, \mathrm{m} = 3{,}3 \cdot 10^3 \, \mathrm{A}.$$

Wegen der geringen magnetischen Leitfähigkeit des Luftspalts steht fast die gesamte magnetische Umlaufspannung am Luftspalt an.

Die gesamte magnetische Umlaufspannung ist $V_{ges} = V_B + V_L = 9{,}8\,\mathrm{A} + 3300\,\mathrm{A} = 3309{,}8\,\mathrm{A}$.

Sie entspricht der Durchflutung $\Theta = V_{ges} = I \cdot N$. Für die Windungszahl folgt:

$$N = \frac{\Theta}{I} = \frac{3309{,}8\,\mathrm{A}}{4{,}0\,\mathrm{A}} = \underline{\underline{827}}$$

Aufgabe 3.114

Der in Abb. 3.55a gezeigte ringförmige Körper ohne Luftspalt besteht aus ferromagnetischem Material (Eisen) mit der Permeabilitätszahl $\mu_r = 500$ und besitzt einen kreisrunden Querschnitt mit der Fläche $A = 1{,}2\,\mathrm{cm}^2$. Der mittlere Radius des Ringes ist $r = 35\,\mathrm{mm}$. Die Anzahl der Drahtwindungen beträgt $N = 100$. In der Spule fließt der Strom $I = 100\,\mathrm{mA}$.

a) Berechnen Sie die Durchflutung Θ, den magnetischen Fluss Φ_{E1}, die magnetische Flussdichte B_{E1} und den magnetischen Widerstand $R_{m,E1}$ des magnetischen Kreises.
b) Der Ringkörper besitzt nun entsprechend Abb. 3.55b einen Luftspalt mit der Länge $l_L = 0{,}5\,\mathrm{mm}$. Wie groß sind jetzt Durchflutung Θ, magnetischer Fluss Φ_{E2}, magnetische Flussdichte B_{E2} und magnetischer Gesamtwiderstand $R_{m,ges}$?

Lösung

a) $\Theta = I \cdot N = 0{,}1\,\text{A} \cdot 100 = \underline{\underline{10\,\text{A}}}$ (Amperewindungen)

$$R_{\text{m,E1}} = R_{\text{m,ges}} = \frac{l_{\text{E1}}}{\mu_0 \cdot \mu_\text{r} \cdot A} = \frac{2\pi r}{\mu_0 \cdot \mu_\text{r} \cdot A} = \frac{2\pi \cdot 35 \cdot 10^{-3}\,\text{m}}{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{V s}}{\text{A m}} \cdot 500 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2}$$

$$= \underline{\underline{2{,}92 \cdot 10^6\,\frac{\text{A}}{\text{V s}}}}$$

$$\Phi_{\text{E1}} = \frac{\Theta}{R_{\text{m,E1}}} = \frac{10\,\text{A}}{2{,}917 \cdot 10^6\,\frac{\text{A}}{\text{V s}}} = \underline{\underline{3{,}43 \cdot 10^{-6}\,\text{V s}}}$$

$$B_{\text{E1}} = \frac{\Phi_{\text{E1}}}{A} = \frac{3{,}43 \cdot 10^{-6}\,\text{V s}}{1{,}2 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2} = \underline{\underline{2{,}86 \cdot 10^{-2}\,\frac{\text{V s}}{\text{m}^2}}}$$

b) $\Theta = I \cdot N = 0{,}1\,\text{A} \cdot 100 = \underline{\underline{10\,\text{A}}}$ (Amperewindungen)
Die Durchflutung bleibt natürlich unverändert. I und N sind ja unverändert.
Magnetischer Widerstand Eisen:

$$R_{\text{m,E2}} = \frac{l_{\text{E2}}}{\mu_0 \cdot \mu_\text{r} \cdot A} = \frac{2\pi r - l_\text{L}}{\mu_0 \cdot \mu_\text{r} \cdot A} = \frac{2\pi \cdot 35 \cdot 10^{-3}\,\text{m} - 0{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{m}}{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{V s}}{\text{A m}} \cdot 500 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2}$$

$$= 2{,}91 \cdot 10^6\,\frac{\text{A}}{\text{V s}}$$

Magnetischer Widerstand Luft:

$$R_{\text{m,L}} = \frac{l_\text{L}}{\mu_0 \cdot A} = \frac{0{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{m}}{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{V s}}{\text{A m}} \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2} = 3{,}32 \cdot 10^6\,\frac{\text{A}}{\text{V s}}$$

Magnetischer Gesamtwiderstand:

$$R_{\text{m,ges}} = R_{\text{m,E2}} + R_{\text{m,L}} = 2{,}91 \cdot 10^6\,\frac{\text{A}}{\text{V s}} + 3{,}32 \cdot 10^6\,\frac{\text{A}}{\text{V s}} = \underline{\underline{6{,}23 \cdot 10^6\,\frac{\text{A}}{\text{V s}}}}$$

Der Luftspalt vergrößert den magnetischen Gesamtwiderstand.

$$\Phi_{\text{E2}} = \frac{\Theta}{R_{\text{m,ges}}} = \frac{10\,\text{A}}{6{,}23 \cdot 10^6\,\frac{\text{A}}{\text{V s}}} = \underline{\underline{1{,}61 \cdot 10^{-6}\,\text{V s}}}$$

Der magnetische Fluss ist mit Luftspalt kleiner.

$$B_{\text{E2}} = \frac{\Phi_{\text{E2}}}{A} = \frac{1{,}61 \cdot 10^{-6}\,\text{V s}}{1{,}2 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2} = \underline{\underline{1{,}34 \cdot 10^{-2}\,\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}}}$$

Die magnetische Flussdichte ist mit Luftspalt kleiner.

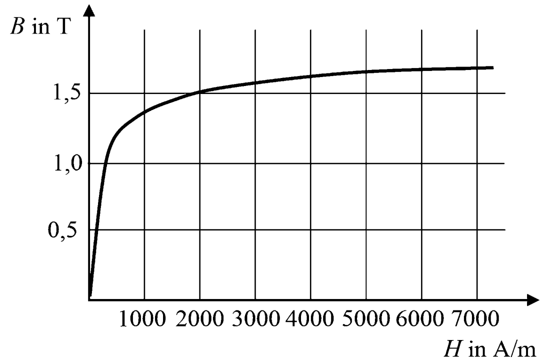


Abb. 3.56 Magnetisierungskurve von Weicheisen

Aufgabe 3.115

Eine Toroidspule mit einem Ringkern aus Eisen hat einen mittleren Umfang $l_{\text{Fe}} = 10\,\text{cm}$ und eine Querschnittsfläche von $A = 1\,\text{cm}^2$. Die Permeabilitätszahl des Kerns ist $\mu_{\text{r,Fe}} = 5000$, die Spule besteht aus $N = 1000$ Windungen. Wie groß ist die Induktivität L der Spule?

Lösung

$$L = \frac{1}{R_{\text{m,Fe}}} \cdot N^2; \quad R_{\text{m,Fe}} = \frac{l_{\text{Fe}}}{\mu_0 \cdot \mu_{\text{r,Fe}} \cdot A} = \frac{10 \cdot 10^{-2}\,\text{m}}{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{V s}}{\text{A m}} \cdot 5000 \cdot 1 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2}$$

$$= 1{,}6 \cdot 10^5\,\frac{\text{A}}{\text{V s}}$$

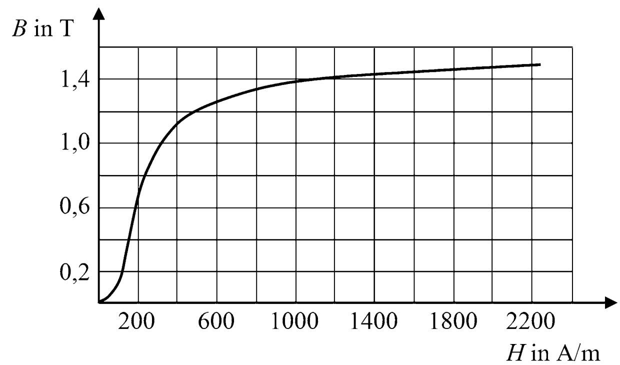
$$L = \frac{1}{1{,}6 \cdot 10^5\,\frac{\text{A}}{\text{V s}}} \cdot 1000^2 = \underline{\underline{6{,}25\,\text{H}}}$$

Aufgabe 3.116

Ein Ringkern aus Weicheisen hat einen mittleren Durchmesser $d_{\text{Fe}} = 32{,}0\,\text{cm}$ und eine Querschnittsfläche von $25\,\text{cm}^2$. Die Spule auf dem Kern hat $N = 800$ Windungen. Die Magnetisierungskurve von Weicheisen zeigt Abb. 3.56.

a) Welche magnetische Feldstärke H ist erforderlich, um dem Ringkern eine Magnetisierung von 1,5 T zu geben?
b) Welche Durchflutung Θ ist dafür nötig? Wie groß muss die Stromstärke durch die Spule sein?
c) Wie groß ist der magnetische Fluss Φ im Ringkern?
d) Wie groß ist bei dieser Flussdichte die Permeabilitätszahl $\mu_{\text{r,Fe}}$ des Weicheisens?

Abb. 3.57 Magnetisierungskurve des ferromagnetischen Materials



Lösung

a) Aus der Magnetisierungskurve Abb. 3.56 kann man für $B = 1{,}5\,\mathrm{T}$ entnehmen: $\underline{\underline{H = 2000\,\mathrm{A/m}}}$.

b) $\Theta = I \cdot N = H \cdot l$; $\Theta = 2000\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} \cdot \pi \cdot 0{,}32\,\mathrm{m} = \underline{\underline{2010\,\mathrm{A}}}$; $I = \frac{\Theta}{N} = \frac{2010\,\mathrm{A}}{800} = \underline{\underline{2{,}5\,\mathrm{A}}}$

c) $\Phi = B \cdot A = 1{,}5\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{m}^2} \cdot 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 = \underline{\underline{3{,}75 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{V\,s}}}$

d)

$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H; \quad \mu_{r,\mathrm{Fe}} = \frac{B}{\mu_0 \cdot H} = \frac{1{,}5\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}}{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A\,m}} \cdot 2000\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}} = \underline{\underline{597}}$$

Die Flussdichte ist bei 1,5 Tesla um den Faktor 597 größer als bei der Spule ohne Kern.

Aufgabe 3.117

Ein Ringkern aus ferromagnetischem Material nach Abb. 3.55b trägt eine Erregerwicklung mit $N = 480$ Windungen, durch sie fließt ein Strom von $I = 1{,}0\,\mathrm{A}$. Der mittlere Radius des Ringes ist $r = 38{,}2\,\mathrm{mm}$. Die Länge des Luftspalts beträgt $l_\mathrm{L} = 0{,}5\,\mathrm{mm}$. Die Magnetisierungskurve des Ringkernmaterials zeigt Abb. 3.57. Wie groß sind Flussdichte B_Fe und Feldstärke H_Fe im Eisen?

Lösung

Damit die Flussdichte im Eisen bestimmt werden kann, muss der magnetische Fluss Φ (und somit der magnetische Widerstand des Eisens) bzw. die Feldstärke H_Fe im Eisen bekannt sein. Hier ist jedoch nur die Gesamtdurchflutung Θ gegeben, aber nicht deren Verteilung auf den Eisenkern und den Luftspalt entsprechend dem Durchflutungsgesetz $\Theta = H_\mathrm{Fe} \cdot l_\mathrm{Fe} + H_\mathrm{L} \cdot l_\mathrm{L}$. Da mit H_Fe und H_L zwei Unbekannte vorliegen, müssen H_Fe und B_Fe mit Hilfe der Luftspaltgeraden grafisch ermittelt werden.

Hinweis: Dieses Lösungsverfahren kann nur angewendet werden, wenn die Streuung vernachlässigt werden kann. Außerdem müssen die Feldstärken im Eisen und im Luftspalt als gleich groß angenommen werden können (Feldverzerrungen am Rande des Luftspalts sind vernachlässigbar), sodass gilt: $B_\mathrm{Fe} = B_\mathrm{L} = B$.

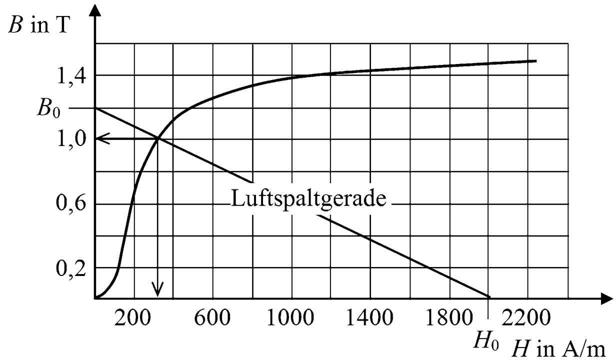


Abb. 3.58 Magnetisierungskurve und Luftspaltgerade

Unter diesen Voraussetzungen kann der Durchflutungssatz umgeformt werden.

$$\Theta = I \cdot N = \Theta_{\mathrm{Fe}} + \Theta_{\mathrm{L}} = H_{\mathrm{Fe}} \cdot l_{\mathrm{Fe}} + H_{\mathrm{L}} \cdot l_{\mathrm{L}};$$

$$\text{mit } H_L = \frac{B_L}{\mu_0} \text{ und } B_{\mathrm{L}} = B_{\mathrm{Fe}} = B \text{ folgt:}$$

$$\Theta = H_{\mathrm{Fe}} \cdot l_{\mathrm{Fe}} + \frac{B}{\mu_0} \cdot l_{\mathrm{L}} \Rightarrow B = -\mu_0 \cdot \frac{l_{\mathrm{Fe}}}{l_{\mathrm{L}}} \cdot H_{\mathrm{Fe}} + \frac{\mu_0}{l_{\mathrm{L}}} \cdot \Theta;$$

Dies ist ein linearer Zusammenhang zwischen B und H_{Fe}.

$$H_{\mathrm{Fe}} = 0\colon \underline{\underline{B_0 = \frac{\mu_0}{l_{\mathrm{L}}} \cdot \Theta}}; \quad B_0 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A\,m}} \cdot 1{,}0\,\mathrm{A} \cdot 480}{5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}} = 1{,}2\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{m}^2}$$

$$B = 0\colon \underline{\underline{H_0 = \frac{\Theta}{l_{Fe}}}}; \quad H_0 = \frac{500\,\mathrm{A}}{2\pi \cdot 38{,}2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} - 5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}} = 2004\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

Die Punkte $(0; B_0)$ und $(H_0; 0)$ sind die Achsenabschnitte der Scherungsgeraden. Diese kann jetzt in das $B(H)$-Diagramm mit der Magnetisierungskennlinie eingezeichnet werden (Abb. 3.58). Auf der Abszisse wird abgelesen: $\underline{\underline{H_{\mathrm{Fe}} \approx 320\,\mathrm{A/m}}}$. Auf der Ordinate kann man ablesen: $\underline{\underline{B_{\mathrm{Fe}} = 1{,}0\,\mathrm{T}}}$.

Aufgabe 3.118

Der Magnetische Kreis nach Abb. 3.59 hat folgende Daten: Gleichbleibende Querschnittsfläche des Eisenkerns $A = 25\,\mathrm{mm}^2$, Länge des Luftspalts $l_{\mathrm{L}} = 0{,}5\,\mathrm{mm}$, Windungszahl der Erregerwicklung $N = 40$, Strom $I = 10\,\mathrm{A}$. Die Permeabilität des Eisens wird als unendlich groß angenommen, $\mu_{\mathrm{r,Fe}} \to \infty$.

a) Wie groß ist die magnetische Feldstärke H_{L} im Luftspalt? Zeichnen Sie die Richtung der Feldstärke in beide Luftspalten ein. Verwenden Sie die Rechte-Hand-Regel für Spulen.

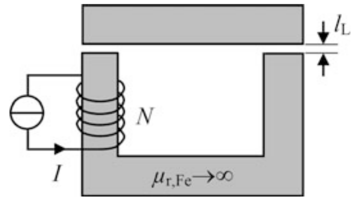


Abb. 3.59 Ein magnetischer Kreis

b) Wie groß ist die magnetische Flussdichte B_L im Luftspalt?
c) Wie groß ist der magnetische Fluss Φ?
d) Berechnen Sie die Induktivität L der Spule.

Lösung

a) Durchflutungsgesetz:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum I = \Theta = I \cdot N = \Theta_{Fe} + \Theta_L = H_{Fe} \cdot l_{Fe} + H_L \cdot l_L$$

Mit der Annahme $\mu_{r,Fe} \to \infty$ leitet das Eisen magnetisch ideal, sein magnetischer Widerstand ist null. Das Feld ist deshalb nur im Luftspalt vorhanden. Die Richtung zeigt Abb. 3.60. Umgreift die rechte Hand die Spule so, dass die gekrümmten Finger in die technische Stromrichtung des Stromes in den Windungen zeigen, so zeigt der Daumen in die Feldrichtung.

$$I \cdot N = H_L \cdot 2 \cdot l_L \Rightarrow H_L = \frac{I \cdot N}{2 \cdot l_L} = \frac{10\,\mathrm{A} \cdot 40}{2 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 400\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{mm}} = \underline{\underline{4{,}0 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}}}$$

b) $B = B_L = \mu_0 \cdot H_L = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A\,m}} \cdot 4{,}0 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} = \underline{\underline{0{,}5\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{m}^2}}}$ (Tesla)

c) $\Phi = B \cdot A = 0{,}5\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{m}^2} \cdot 25 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2 = \underline{\underline{1{,}25 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{V\,s}}}$ (Weber)

d) $L = \frac{N \cdot \Phi}{I} = \frac{40 \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{V\,s}}{10\,\mathrm{A}} = \underline{\underline{50\,\mu\mathrm{H}}}$

Aufgabe 3.119

Ein Ringkern aus ferromagnetischem Material (Eisen) mit der Permeabilitätszahl $\mu_r = 4000$ besitzt einen kreisrunden Querschnitt mit der Fläche $A = 4\,\mathrm{cm}^2$. Im Ringkern befindet sich ein Luftspalt mit der Länge $l_L = 0{,}5\,\mathrm{mm}$. Die mittlere Feldlinienlänge im

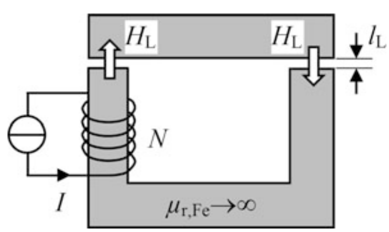


Abb. 3.60 Richtung der Feldstärke in den Luftspalten

Eisen ist $l_E = 20{,}0\,\text{cm}$. Durch die Erregerwicklung mit $N = 50$ Windungen fließt ein Gleichstrom $I = 2{,}0\,\text{A}$.

a) Berechnen Sie den magnetischen Widerstand $R_{m,Fe}$ in Eisen und $R_{m,L}$ in Luft.
b) Berechnen Sie den magnetischen Fluss Φ.
c) Wie groß sind die Flussdichte B_{Fe} und die Feldstärke H_{Fe} im Eisen? Wie groß sind die Flussdichte B_L und die Feldstärke H_L im Luftspalt?
d) Wie groß ist die Induktivität L der Spule?

Lösung

a)

$$R_{m,Fe} = \frac{l_E}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A} = \frac{0{,}2\,\text{m}}{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{V s}}{\text{A m}} \cdot 4000 \cdot 4 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2} = \underline{\underline{99.471\,\frac{\text{A}}{\text{V s}}}}$$

$$R_{m,L} = \frac{l_L}{\mu_0 \cdot A} = \frac{0{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{m}}{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{V s}}{\text{A m}} \cdot 4 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2} = \underline{\underline{994.718\,\frac{\text{A}}{\text{V s}}}}$$

b) Durchflutungsgesetz: $\Theta = \Phi \cdot R_m$.

$$I \cdot N = \Phi \cdot (R_{m,Fe} + R_{m,L}) \Rightarrow \Phi = \frac{I \cdot N}{R_{m,Fe} + R_{m,L}};$$

$$\Phi = \frac{2{,}0\,\text{A} \cdot 50}{99.471\,\frac{\text{A}}{\text{V s}} + 994.718\,\frac{\text{A}}{\text{V s}}} = \underline{\underline{9{,}1 \cdot 10^{-5}\,\text{V s}}}$$

c) Die Flussdichte ist im Eisen genauso groß wie im Lufspalt.

$$B_{Fe} = B_L = B = \frac{\Phi}{A} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-5}\,\text{V s}}{4 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2} = \underline{\underline{0{,}228\,\text{T}}}$$

$$H_{Fe} = \frac{B}{\mu_0 \cdot \mu_r} = \frac{0{,}228\,\frac{\text{V s}}{\text{m}^2}}{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{V s}}{\text{A m}} \cdot 4000} = \underline{\underline{45{,}4\,\frac{\text{A}}{\text{m}}}}$$

$$H_L = \frac{B}{\mu_0} = \frac{0{,}228\,\frac{\text{V s}}{\text{m}^2}}{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{V s}}{\text{A m}}} = \underline{\underline{1{,}82 \cdot 10^5\,\frac{\text{A}}{\text{m}}}}$$

d)

$$L = \frac{N \cdot \Phi}{I} = \frac{50 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-5}\,\text{V s}}{2{,}0\,\text{A}} = \underline{\underline{2{,}28\,\text{mH}}}$$

Aufgabe 3.120

Der in Abb. 3.61 gezeigte Eisenkern mit der relativen Permeabilität $\mu_r = 500$ hat einen mittleren Umfang (mittlere Feldlinienlänge im Eisen) von $l_E = 50\,\text{cm}$, einen Querschnitt von $A = 1\,\text{cm}^2$ und besitzt eine Spule mit $N = 100$ Windungen. Der Luftspalt ist $d = 1\,\text{mm}$. Der Strom durch die Spule ist $I = 4{,}0\,\text{A}$.

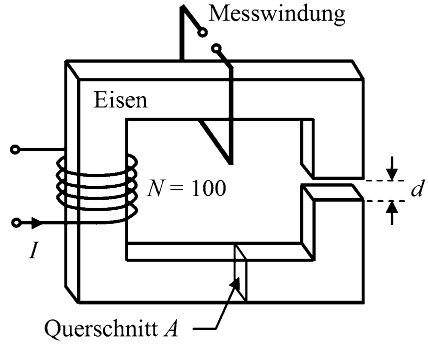


Abb. 3.61 Eisenkern mit Spule und Messwindung

a) Welche Voraussetzungen müssen erfüllt sein, damit die Anordnung analog zu einem elektrischen Stromkreis behandelt werden kann?
b) Berechnen Sie den magnetischen Fluss Φ.
c) I steigt in einer Millisekunde von 0 A auf 4,0 A linear an und bleibt dann konstant. Welche Spannung U_{Mess} tritt an den Klemmen der Messwindung auf?

Lösung

a) Die Voraussetzungen sind:
   1. Kein Streufluss, also $\Phi_{\text{Eisen}} = \Phi_{\text{Luft}}$.
   2. Homogene Flussdichte, somit $\Phi = B \cdot A$.

b)
$$\Phi = \frac{V_{\text{m}}}{R_{\text{m,Fe}} + R_{\text{m,L}}}$$

V_{m} = magnetische Umlaufspannung, $V_{\text{m}} = I \cdot N$
$R_{\text{m,Fe}}$ = magnetischer Widerstand Eisen: $R_{\text{m,Fe}} = \frac{l_E}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A}$ ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{V s}}{\text{A m}}$)
$R_{\text{m,L}}$ = magnetischer Widerstand Luft: $R_{\text{m,L}} = \frac{d}{\mu_0 \cdot A}$

$$R_{\text{m,Fe}} = \frac{0{,}5\,\text{m}}{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{V s}}{\text{A m}} \cdot 500 \cdot 1 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2} = 7{,}96 \cdot 10^6\,\frac{\text{A}}{\text{V s}}$$
$$R_{\text{m,L}} = \frac{10^{-3}\,\text{m}}{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{V s}}{\text{A m}} \cdot 1 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2} = 7{,}96 \cdot 10^6\,\frac{\text{A}}{\text{V s}}$$

Hier gilt speziell $R_{\text{m,Fe}} = R_{\text{m,L}}$, da $\frac{l_E}{\mu_r} = d$ ist.

$$\Phi = \frac{I \cdot N}{R_{\text{m,Fe}} + R_{\text{m,L}}}; \quad \Phi = \frac{100 \cdot 4\,\text{A}}{2 \cdot R_{\text{m,Fe}}} = \frac{400\,\text{A}}{2 \cdot 7{,}96 \cdot 10^6\,\frac{\text{A}}{\text{V s}}} = \underline{\underline{2{,}51 \cdot 10^{-5}\,\text{V s}}}$$

c) Für $0 < t \leq 1$ ms ist

$$I(t) = \frac{4\,\text{A}}{1\,\text{ms}} \cdot t = 4000\,\frac{\text{A}}{\text{s}} \cdot t; \quad \frac{dI(t)}{dt} = \begin{cases} 4000\,\frac{\text{A}}{\text{s}} & \text{für } 0 < t \leq 1\,\text{ms} \\ 0 & \text{für } t > 1\,\text{ms} \end{cases}$$

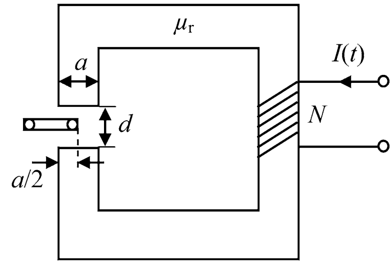


Abb. 3.62 Magnetischer Kreis mit Leiterschleife im Luftspalt

Induktionsgesetz:

$$U_{\text{Mess}} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{N}{R_{\text{m,Fe}} + R_{\text{m,L}}} \frac{dI(t)}{dt}; \quad U_{\text{Mess}} = \frac{100 \cdot 4000\,\frac{\text{A}}{\text{s}}}{2 \cdot \text{R}_{\text{m,Fe}}} = \underline{\underline{25{,}1\,\text{mV}}}$$

Aufgabe 3.121

Gegeben ist der in Abb. 3.62 dargestellte magnetische Kreis. Die Stromquelle liefert einen linear ansteigenden Strom $I(t) = k \cdot t$. Der Eisenkern hat einen quadratischen Querschnitt, sein mittlerer Umfang ist bekannt. Im Luftspalt des Eisenkerns befindet sich eine geschlossene Leiterschleife mit dem Widerstand R. Das Feld im Luftspalt sei homogen und ohne Randeffekte.

a) Berechnen Sie die Luftspaltinduktion $B(t)$ in allgemeiner Form (als Formel).
b) Berechnen Sie den in der Leiterschleife induzierten Strom $I_{\text{L}}(t)$ als Formel.

Lösung

a) Gegeben sind: Zeitabhängiger Stromverlauf $I(t) = k \cdot t$, Luftspaltlänge d, Feldlinienlänge im Eisen l_{Fe}, Eisenkernfläche $A_{\text{Fe}} = a^2$, relative Permeabilität μ_{r} des Eisenkerns.
Gesucht ist die Luftspaltinduktion $B(t)$.
Durchflutungsgesetz: $H_{\text{Fe}} \cdot l_{\text{Fe}} + H_{\text{L}} \cdot l_{\text{L}} = I \cdot N$; $B = \mu_0 \mu_{\text{r}} H$

$$\frac{B(t)}{\mu_0 \mu_{\text{r}}} \cdot l_{\text{Fe}} + \frac{B(t)}{\mu_0} \cdot d = I(t) \cdot N; \quad \frac{B(t)}{\mu_0}\left(\frac{l_{\text{Fe}}}{\mu_{\text{r}}} + d\right) = k \cdot t \cdot N; \quad \underline{\underline{B(t) = \frac{\mu_0 k N}{\frac{l_{\text{Fe}}}{\mu_{\text{r}}} + d} \cdot t}}$$

b) Induktionsgesetz: $U(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$ $(N = 1)$; $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = B \cdot A$; $I(t) = \frac{U(t)}{R}$
Flächennormale und magnetische Flussdichte zeigen in die gleiche Richtung.

$$U(t) = -\frac{d(B \cdot A)}{dt} = -\frac{A \cdot dB(t)}{dt}$$

Die Leiterschleife umschließt nur die Hälfte der Eisenfläche: $A = \frac{a^2}{2}$

$$U(t) = -\frac{a^2}{2} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0 k N}{\frac{l_{\text{Fe}}}{\mu_{\text{r}}} + d} \cdot t\right) = -\frac{a^2 \mu_0 k N}{2\left(\frac{l_{\text{Fe}}}{\mu_{\text{r}}} + d\right)}; \quad \underline{\underline{I_L(t) = -\frac{a^2 \mu_0 k N}{2R\left(\frac{l_{\text{Fe}}}{\mu_{\text{r}}} + d\right)}}}$$

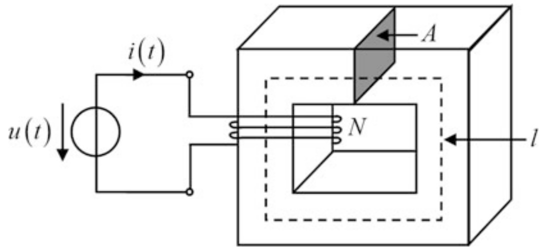


Abb. 3.63 Eisenkern mit Wicklung

Aufgabe 3.122

Der in Abb. 3.63 gezeigte Eisenkern mit der relativen Permeabilität $\mu_r = 3000$ hat einen mittleren Umfang von $l = 35\,\text{cm}$, einen Querschnitt von $A = 3\,\text{cm}^2$ und besitzt eine Wicklung mit $N = 1000$ Windungen. An der Wicklung liegt die Spannung $u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \sin(\omega t)$ mit $f = 400\,\text{Hz}$.

a) Wie groß darf der Effektivwert U maximal sein, wenn die Amplitude der magnetischen Flussdichte $\hat{B}$ im Kern höchstens 0,6 T betragen soll?
b) Welcher Strom I (Effektivwert) fließt bei dieser Spannung durch die Wicklung?

Lösung

Wird die Wicklung von einem Gleichstrom durchflossen, so gelten folgende Zusammenhänge:

$$H \cdot l = I \cdot N \text{ (Durchflutungsgesetz)},$$
$$B = \mu_0 \mu_r H$$
$$\left(\mu_r = \text{konstant, d. h. lineare Magnetisierungskennlinie, } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{Vs}}{\text{Am}}\right),$$
$$\Phi = B \cdot A.$$

Ist der Strom durch die Wicklung sinusförmig mit $i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t)$, so sind die magnetischen Größen auch sinusförmig. Für die Amplituden von $H(t)$, $B(t)$ und $\Phi(t)$ können dann obige Beziehungen direkt übernommen werden.

Wird die Wicklung von einer sinusförmigen Spannung gespeist und der Zusammenhang zwischen dieser und den magnetischen Größen ist gesucht, so gilt nach dem Induktionsgesetz $u(t) = -N\frac{d\Phi}{dt}$. Die magnetischen Größen sind wieder sinusförmig, aber zwischen U und Φ besteht eine Phasenverschiebung von 90°. Falls nur der Zusammenhang zwischen den Amplituden interessiert, kann man ansetzen:

$$\Phi(t) = \hat{\Phi} \cdot \sin(\omega t), \quad u(t) = N\frac{d\Phi(t)}{dt} = N \cdot \hat{\Phi} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) \text{ mit } \hat{U} = N \cdot \hat{\Phi} \cdot \omega$$

a)

$$\hat{U} = N \cdot \hat{\Phi} \cdot \omega \Rightarrow \hat{U} = N \cdot \hat{B} \cdot A \cdot \omega; \quad \underline{\underline{U_{\max} = \frac{N \cdot \hat{B} \cdot A \cdot \omega}{\sqrt{2}}}}; \quad \underline{\underline{U_{\max} = 319{,}9\,\mathrm{V}}}$$

b)

$$H \cdot l = \hat{I} \cdot N = \frac{\hat{B}}{\mu_0 \cdot \mu_r} \cdot l; \quad \underline{\underline{I = \frac{\hat{B} \cdot l}{\sqrt{2} \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot N}}}$$

$$I = \frac{0{,}6\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{m^2}} \cdot 0{,}35\,\mathrm{m}}{\sqrt{2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A\,m}} \cdot 3000 \cdot 1000}; \quad \underline{\underline{I = 39{,}4\,\mathrm{mA}}}$$

3.4.3 Leiteranordnungen

Aufgabe 3.123
Ein langer gerader Leiter in Luft wird von einem Strom $I = 100\,\mathrm{A}$ durchflossen. Wie groß sind die magnetische Feldstärke H und die Flussdichte B im Abstand $r = 5\,\mathrm{mm}$ von der Mittelachse des Leiters?

Lösung

$$H(r) = \frac{I}{2\pi \cdot r} \text{ (ohne Herleitung, z. B. aus einer Formelsammlung)}$$

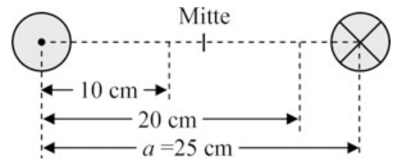
I = Strom durch den Leiter, r = Abstand von Mittelachse des langen, gestreckten Leiters

$$H = \frac{100\,\mathrm{A}}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{3{,}2 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}}}$$

$$B = \mu_0 \cdot H = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A\,m}} \cdot 3{,}2 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} = \underline{\underline{4{,}0 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{m^2}}}} \text{ (Tesla)}$$

Aufgabe 3.124
Der Achsabstand von zwei parallelen Leitern in Luft beträgt $a = 25\,\mathrm{cm}$. Es handelt sich um einen Hin- und einen Rückleiter, die Leiter sind also gegensinnig von Strom durchflossen. In jedem Leiter fließen 100 A. Berechnen Sie die magnetischen Feldstärken H_{10} im Abstand von 10 cm und H_{20} im Abstand von 20 cm vom linken Leiter (Abb. 3.64). Wie groß ist die Feldstärke H_M in der Mitte zwischen den beiden Leitern? Wirkt die Kraft zwischen beiden Leitern anziehend oder abstoßend? Leiten Sie eine Formel für den Betrag der Kraft her, welche die Leiter gegenseitig pro Länge l ausüben.

Abb. 3.64 Zwei stromdurchflossene Leiter



Lösung

Verwenden wir die Rechte-Hand-Regel für den stromdurchflossenen Leiter (Daumen in die technische Stromrichtung, die gekrümmten Finger zeigen in die Feldrichtung), so erhalten wir das Feldlinienbild für die beiden parallelen Leiter (Abb. 3.65). Auf der Verbindungslinie der beiden Leiter zeigen die Feldlinien in die gleiche Richtung, die Dichte der Feldlinien wird größer, die Feldstärke nimmt durch Addition der Anteile zu.

$$H = H_1 + H_2 = \frac{I_1}{2\pi r} + \frac{I_2}{2\pi(a-r)}; \quad |I_1| = |I_2|;$$

$$H_{10} = \frac{100\,\mathrm{A}}{2\pi \cdot 10 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}} + \frac{100\,\mathrm{A}}{2\pi \cdot (25-10) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{265{,}3\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}}}$$

$$H_{20} = \frac{100\,\mathrm{A}}{2\pi \cdot 20 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}} + \frac{100\,\mathrm{A}}{2\pi \cdot (25-20) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{397{,}9\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}}}$$

$$H_{10} = \frac{100\,\mathrm{A}}{2\pi \cdot 12{,}5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}} + \frac{100\,\mathrm{A}}{2\pi \cdot (25-12{,}5) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{254{,}7\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}}}$$

Bei gegensinniger Stromrichtung wirkt die Kraft zwischen zwei Leitern abstoßend.

Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld: $F = B \cdot l \cdot I = \mu_0 \cdot H \cdot l \cdot I$.

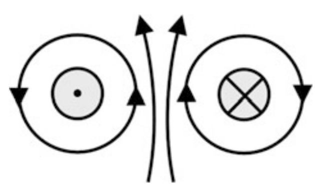
$$H = \frac{I}{2\pi \cdot a}; \quad a = \text{Achsabstand der beiden Leiter}$$

$$\underline{\underline{F = \frac{\mu_0}{2\pi \cdot a} \cdot l \cdot I^2}}$$

Aufgabe 3.125

Ein Leiter mit dem Radius $r_1 = 2{,}0\,\mathrm{cm}$ wird von dem Strom $I_1 = 5{,}0\,\mathrm{A}$ durchflossen. In einem Achsabstand von $d = 30\,\mathrm{cm}$ liegt parallel ein Leiter mit einem Radius von $r_2 = 0{,}5\,\mathrm{cm}$. In ihm fließt der Strom $I_2 = 7{,}0\,\mathrm{A}$ in die gleiche Richtung. Wie groß ist die magnetische Feldstärke H in der Mitte zwischen den beiden Oberflächen der Leiter? Wirkt die Kraft zwischen beiden Leitern anziehend oder abstoßend?

Abb. 3.65 Feldlinien der stromdurchflossenen Leiter mit entgegengesetzter Stromrichtung



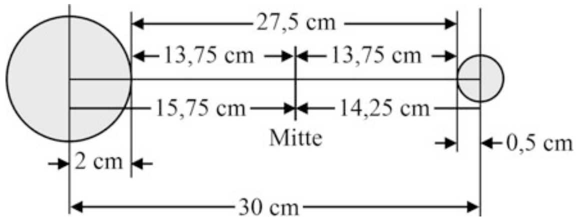


Abb. 3.66 Anordnung der Leiter (nicht maßstäblich)

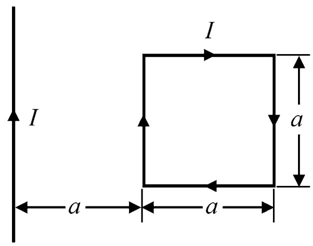


Abb. 3.67 Leiterschleife in der Nähe eines Drahtes

Lösung
Bei gleichsinniger Stromrichtung wirkt die Kraft zwischen zwei Leitern anziehend.

Zur Verdeutlichung der Maße und der Lage der Leiter fertigen wir eine Skizze an (Abb. 3.66).

$$H = H_1 - H_2 = \frac{I_1}{2\pi r} - \frac{I_2}{2\pi (a - r)}$$

$$H = \frac{5\,\text{A}}{2\pi \cdot 15{,}75 \cdot 10^{-2}\,\text{m}} - \frac{7\,\text{A}}{2\pi \cdot 14{,}25 \cdot 10^{-2}\,\text{m}} = \underline{\underline{-2{,}77\,\frac{\text{A}}{\text{m}}}}$$

Aufgabe 3.126
Ein gerader, unendlich langer Leiter wird von einem Gleichstrom I durchflossen. In der gleichen Ebene wie der Leiter liegt im Abstand a eine quadratische, ebenfalls von einem Gleichstrom gleicher Größe I durchflossene Leiterschleife mit der Seitenlänge a (Abb. 3.67). Wie groß ist die Kraft zwischen dem geraden Leiter und der Leiterschleife? In welche Richtung wirkt die Kraft?

Lösung
Zu der Kraft zwischen dem langen Leiter und der Leiterschleife tragen nur die zum Linienleiter parallelen Abschnitte der Leiterschleife bei. Die Kraft zwischen dem Linienleiter und dem parallelen Teil der Leiterschleife im Abstand a ist:

$$F_1 = B \cdot l \cdot I = \mu_0 \cdot H \cdot l \cdot I = \mu_0 \cdot \frac{I}{2\pi \cdot a} \cdot a \cdot I = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot I^2$$

Da beide Leiter gleichsinnig vom Strom durchflossen werden, wirkt die Kraft zwischen Linienleiter und Leiterstück anziehend.

Die Kraft zwischen dem Linienleiter und dem parallelen Teil der Leiterschleife im Abstand $2 \cdot a$ ist:

$$F_2 = B \cdot l \cdot I = \mu_0 \cdot H \cdot l \cdot I = \mu_0 \cdot \frac{I}{2\pi \cdot 2 \cdot a} \cdot a \cdot I = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I^2$$

Beide Leiter werden gegensinnig vom Strom durchflossen, die Kraft zwischen dem Linienleiter und dem Leiterstück der Länge a im Abstand $2 \cdot a$ wirkt abstoßend.

Da $|F_2| < |F_1|$ gilt, resultiert zwischen Linienleiter und Leiterschleife eine *anziehende* Kraft der Größe:

$$F = F_1 - F_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot I^2 - \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I^2 = \underline{\underline{\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I^2}}$$

3.4.4 Induktion

Aufgabe 3.127

Bei der in Abb. 3.68 gezeigten Leiteranordnung wird ein Draht mit konstanter Geschwindigkeit v nach links bewegt. Der Draht kontaktiert schleifend zwei Kupferschienen mit dem Abstand l, an die ein ohmscher Widerstand R angeschlossen ist. Kupferschienen und Schleifdraht liegen in einer Ebene, senkrecht zu dieser Ebene wirkt in gezeigter Richtung ein homogenes Magnetfeld mit der Flussdichte B.

Folgende Zahlenwerte sind gegeben: $B = 0{,}8\,\mathrm{T}$, $v = 10\,\mathrm{m/s}$, $l = 20\,\mathrm{cm}$, $R = 2{,}0\,\Omega$.

a) Warum fließt ein Strom I durch den Widerstand R?
b) Wie groß ist die Induktionsspannung U_i allgemein und als Zahlenwert?
c) Welchen Wert hat der Strom I, der durch den Widerstand R fließt?
d) Welche Kraft F ist zum Verschieben des Schleifdrahtes notwendig (allgemein und als Zahlenwert)? Die Reibung wird vernachlässigt.
e) Wie groß ist die mechanische Leistung P_M, die durch die Kraft zugeführt wird?
f) Welche elektrische Leistung P_E wird im Widerstand umgesetzt?
g) Was folgt für die Induktionsspannung U_i und den Strom I, wenn der Schleifdraht in umgekehrter Richtung von links nach rechts bewegt wird?

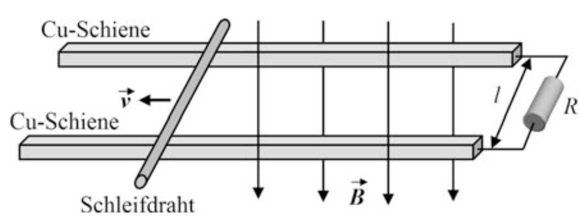
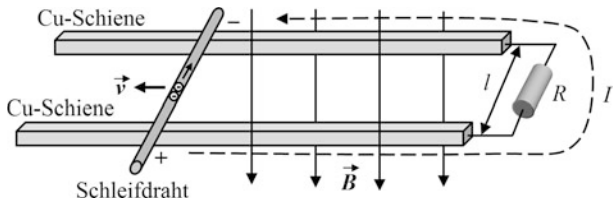


Abb. 3.68 Zur Induktion durch Bewegung

Abb. 3.69 Leiteranordnung mit induzierter Spannung und Stromrichtung



Lösung

a) Eine *Änderung* eines Magnetfeldes kann durch
   1. eine Änderung eines Stromes durch eine Leiterschleife (Spule) *oder*
   2. eine Bewegung einer Leiterschleife in einem Magnetfeld

   erfolgen.

   Durch die Bewegung des Schleifdrahtes ändert sich die Fläche der vom Magnetfeld durchsetzten Leiterschleife. Ähnlich ist es, wenn eine Leiterschleife mit fester Fläche aus einem Magnetfeld herausgezogen wird. Durch die Änderung der vom Magnetfeld durchsetzten Fläche ändert sich der magnetische Fluss durch die Fläche. Die Flussänderung erzeugt nach dem Induktionsgesetz in der Leiterschleife eine induzierte Spannung U_i. Diese führt zu einem Strom I durch den Widerstand R, der die Leiterschleife zu einem Stromkreis ergänzt.

   Betrachten wir die Vorgänge noch genauer. Die freien Elektronen im Schleifdraht werden mit diesem quer zum Magnetfeld transportiert. Auf die Elektronen wirkt die Lorentzkraft. Es gilt die UVW-Regel: Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand rechtwinklig zueinander abspreizen. Der Daumen zeigt in Richtung der Ursache, der Zeigefinger in Richtung der Vermittlung, der Mittelfinger zeigt dann in die Richtung der Wirkung (der Richtung der Ladungsbewegung durch das Magnetfeld). **U**rsache ist das Magnetfeld, **V**ermittlung ist die Bewegung, **W**irkung ist die Bewegung der Ladungsträger (Elektronen). Durch die Anwendung der UVW-Regel erkennt man, dass die Elektronen im Schleifdraht in Abb. 3.69 von vorn nach hinten bewegt werden. Zwischen den an den Kupferschienen aufliegenden Enden des Schleifdrahtes wird eine Spannung U_i induziert, die den Strom im Stromkreis verursacht. Die technische Stromrichtung ist entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung der Elektronen. Der Pluspol der induzierten Spannung liegt also in Abb. 3.69 vorn am Schleifdraht, der Strom fließt von oben auf die Leiteranordnung gesehen im Gegenuhrzeigersinn.

b) Der magnetische Fluss Φ ist $\Phi(t) = B \cdot A(t)$. Der vom Schleifdraht in der Zeit t zurückgelegte Weg ist $s = v \cdot t$. Die Fläche in Abhängigkeit der Zeit ist somit $A(t) = A(t_0) + l \cdot v \cdot t$. $A(t_0)$ = Fläche zum Zeitpunkt $t = 0$.

   Die Flächen*änderung* ist:

$$\frac{dA(t)}{dt} = l \cdot v.$$

Die induzierte Spannung ist (ohne Vorzeichen betrachtet):

$$U_\mathrm{i} = \frac{d\Phi(t)}{dt} = B \cdot \frac{dA(t)}{dt} = \underline{\underline{B \cdot l \cdot v}}.$$

$$U_\mathrm{i} = 0{,}8\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{m^2}} \cdot 0{,}2\,\mathrm{m} \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{1{,}6\,\mathrm{V}}}$$

c)

$$I = \frac{U_i}{R} = \frac{1{,}6\,\mathrm{V}}{2{,}0\,\Omega} = \underline{\underline{0{,}8\,\mathrm{A}}}$$

d) Entsprechend der Energieerhaltung: Mechanische Leistung = Elektrische Leistung.

$$F \cdot v = I^2 \cdot R \Rightarrow F = \frac{I^2 \cdot R}{v} = \frac{\left(\frac{B \cdot l \cdot v}{R}\right)^2 \cdot R}{v} = \underline{\underline{\frac{B^2 \cdot l^2 \cdot v}{R}}}$$

$$F = \frac{\left(0{,}8\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{m^2}}\right)^2 \cdot (0{,}2\,\mathrm{m})^2 \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2{,}0\,\Omega} = 0{,}128\,\frac{\mathrm{V^2 \cdot s}}{\mathrm{m} \cdot \Omega}$$

$$\frac{\mathrm{V^2 \cdot s}}{\mathrm{m} \cdot \Omega} = \frac{\mathrm{V^2 \cdot s}}{\mathrm{m} \cdot \frac{V}{A}} = \frac{\mathrm{V \cdot A \cdot s}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s^2}} = \mathrm{N}; \quad \underline{\underline{F = 0{,}128\,\mathrm{N}}}$$

Alternativer Ansatz
Die Kraft entspricht der Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld: $F = B \cdot l \cdot I$.

$$F = 0{,}8\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{m^2}} \cdot 0{,}2\,\mathrm{m} \cdot 0{,}8\,\mathrm{A} = 0{,}128\,\frac{\mathrm{V \cdot A \cdot s}}{\mathrm{m}} = \underline{\underline{0{,}128\,\mathrm{N}}}$$

e) $P_\mathrm{M} = F \cdot v = 0{,}128\,\mathrm{N} \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{1{,}28\,\mathrm{W}}}$

f) $P_\mathrm{E} = I^2 \cdot R = (0{,}8\,\mathrm{A})^2 \cdot 2\,\Omega = \underline{\underline{1{,}28\,\mathrm{W}}}$
Da die Reibung vernachlässigt wird, wird die mechanisch zugeführte Leistung im Widerstand R vollständig in Wärme umgewandelt.

g) Die Polarität der induzierten Spannung ist umgekehrt, der Strom hat somit umgekehrte Flussrichtung.

Aufgabe 3.128
Die Wicklung eines Gleichstrommotors hat einen ohmschen Widerstand $R = 1{,}5\,\Omega$. Ist der Motor bei einer Spannung $U_\mathrm{D} = 40\,\mathrm{V}$ mit voller Drehzahl in Betrieb, so fließt durch seine Wicklung der Strom $I_\mathrm{D} = 2{,}0\,\mathrm{A}$.

a) Wie groß ist die durch die Rotation im Magnetfeld in der Wicklung induzierte Spannung U_i bei voller Drehzahl?
b) Wie groß ist der Strom I_0 durch die Wicklung, wenn sich diese noch nicht dreht?

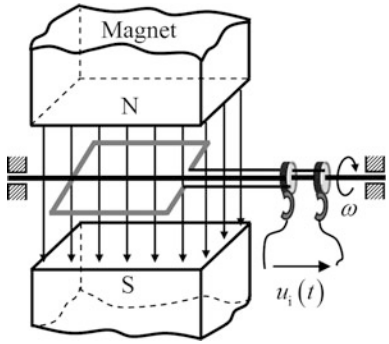


Abb. 3.70 Prinzip des Wechselstromgenerators zur Erzeugung einer sinusförmigen Spannung. Eine Spule (vereinfacht dargestellt als Leiterschleife) rotiert in einem stationären Magnetfeld

Lösung

a) Der Spannungsabfall am ohmschen Widerstand der Wicklung ist:

$$U_R = R \cdot I_D = 1{,}5\,\Omega \cdot 2{,}0\,\text{A} = 3\,\text{V}.$$

Die Induktionsspannung ist somit $U_i = U_D - U_R = 40\,\text{V} - 3\,\text{V} = \underline{\underline{37\,\text{V}}}$.

b) Steht der Rotor des Motors noch still, so entsteht noch keine Induktionsspannung. Die gesamte an der Wicklung anliegende Spannung fällt dann am ohmschen Widerstand ab.

$$I_0 = \frac{U_D}{R} = \frac{40\,\text{V}}{1{,}5\,\Omega} = \underline{\underline{26{,}7\,\text{A}}}$$

Der Einschaltstrom wird normalerweise durch einen Anlasswiderstand begrenzt.

Aufgabe 3.129

Das Prinzip eines Wechselstromgenerators beruht darauf, dass eine rechteckige Spule mit der Fläche A und der Windungszahl N mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω in einem homogenen Magnetfeld der Flussdichte B rotiert (Abb. 3.70).

a) Leiten Sie einen Ausdruck für die an den Schleifringen abgenommene Spannung $u_i(t)$ in Abhängigkeit von N, B, A und ω her.

b) Gegeben sind: $A = 2\,\text{cm}^2$, $N = 1000$, $B = 2{,}0\,\text{T}$. Mit welcher Drehzahl n (Umdrehungen pro Minute) muss die Spule rotieren, damit eine Spannung $\hat{U} = 110\,\text{V} \cdot \sqrt{2}$ erzeugt wird?

Lösung

a) Wegen der Rotation der Spule ändert sich der magnetische Fluss durch die Spule in Abhängigkeit des Drehwinkels α: $\Phi = N \cdot B \cdot A \cdot \cos(\alpha)$.

Φ = magnetischer Fluss, $[\Phi] = \text{V s} = \text{Wb}$ (Weber)

N = Anzahl der Windungen der Spule

B = magnetische Flussdichte, $[B] = \text{V s/m}^2 = \text{T}$ (Tesla)

A = Fläche der Spule, $[A] = m^2$
α = Winkel zwischen der Flächennormalen der Spule und den Feldlinien

Wird der waagrechten Lage der Spule zwischen zwei Polen eines Permanentmagneten der Zeitpunkt $t = 0$ zugeordnet, so bildet die Spule zu einem beliebigen Zeitpunkt t mit der Waagrechten den Winkel $\alpha = \omega t$. Das Induktionsgesetz lautet:

$$u_\mathrm{i}(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt}.$$

In der rotierenden Spule wird folgende Spannung induziert:

$$u_\mathrm{i}(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{d\left[N \cdot B \cdot A \cdot \cos(\omega t)\right]}{dt} = \underline{\underline{N \cdot B \cdot A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)}}.$$

Die Konstante $N \cdot B \cdot A \cdot \omega$ wird zum Scheitelwert $\hat{U}$ der Sinusspannung zusammengefasst. Die durch Induktion erzeugte sinusförmige Wechselspannung ist $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t)$.

b)

$$\hat{U} = N \cdot B \cdot A \cdot \omega \Rightarrow \omega = \frac{\hat{U}}{N \cdot B \cdot A} = \frac{110 \cdot \sqrt{2}\,\mathrm{V}}{1000 \cdot 2{,}0\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{m}^2} \cdot 2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2} = 388{,}9\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

$$n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{388{,}9}{2\pi}\,\frac{1}{\mathrm{s}} = 61{,}9\,\frac{1}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{3714\,\frac{1}{\mathrm{min}}}}$$

Aufgabe 3.130

Eine einlagige, zylinderförmige Luftspule hat $N = 500$ Windungen, einen Wicklungsdurchmesser von $d = 12\,\mathrm{cm}$ und eine Wicklungslänge von $l = 70\,\mathrm{cm}$. Der durch die Spule fließende Strom steigt in der Zeit $\Delta t = 4\,\mathrm{s}$ von $I_1 = 1{,}0\,\mathrm{A}$ auf $I_2 = 12{,}0\,\mathrm{A}$ linear an.

a) Wie groß ist die Induktivität L der Spule?
b) Wie groß ist die in der Spule erzeugte Selbstinduktionsspannung U_i?

Lösung

a)

$$L = \mu_0 \cdot \frac{A \cdot N^2}{l} = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A\,m}} \cdot \frac{(0{,}06\,\mathrm{m})^2 \cdot \pi \cdot 500^2}{0{,}7\,\mathrm{m}} = 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{H} = \underline{\underline{5\,\mathrm{mH}}}$$

b)

$$U_\mathrm{i} = -L \cdot \frac{dI(t)}{dt} = -L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} = -5 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A}} \cdot \frac{12{,}0\,\mathrm{A} - 1{,}0\,\mathrm{A}}{4\,\mathrm{s}} = \underline{\underline{-13{,}75\,\mathrm{mV}}}$$

Aufgabe 3.131
Durch eine Spule mit der Induktivität $L = 5{,}8\,\mathrm{H}$ fließt ein Strom $I = 92{,}3\,\mathrm{mA}$. Beim Ausschalten des Stromes nimmt der Stromfluss linear ab. Dabei soll die Selbstinduktionsspannung höchstens $U_{\mathrm{i,max}} = 500\,\mathrm{V}$ betragen. Wie groß muss die Dauer Δt des Ausschaltvorgangs mindestens sein?

Lösung
Der magnetische Fluss durch die Spule ist $\Phi = L \cdot I = 5{,}8\,\mathrm{H} \cdot 0{,}0923\,\mathrm{A} = 0{,}535\,\mathrm{V\,s}$.

$$U_{\mathrm{i}} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta\Phi}{U_{\mathrm{i}}} = \frac{0{,}535\,\mathrm{Vs}}{500\,\mathrm{V}} = \underline{\underline{1{,}07\,\mathrm{ms}}}$$

Gleichspannungsquellen

4

Zusammenfassung

Es werden Grundbegriffe bei Spannungsquellen wie Quellenspannung, Leerlaufspannung, Klemmenspannung und Kurzschlussstrom verwendet. Der Unterschied zwischen idealer und realer Spannungsquelle führt zu dem Begriff des Innenwiderstandes. Die Kennlinie der belasteten realen Gleichspannungsquelle wird vorgestellt. Als Möglichkeit zur Berechnung elektrischer Netzwerke werden Ersatzspannungsquelle und Ersatzstromquelle eingeführt und damit zahlreiche Schaltungen berechnet. Der Begriff des Kurzschlussstromes ebenso wie Spannungs-, Strom- und Leistungsanpassung erläutern diese Betriebsfälle.

4.1 Grundwissen – kurz und bündig

- Gleichspannungsquellen werden als Hilfsenergie zur Stromversorgung elektronischer Schaltungen benötigt.
- Netzunabhängige Gleichspannungsquellen kann man in Primärelemente (Batterien) und Sekundärelemente (Akkumulatoren) einteilen.
- Batterien sind für den einmaligen Gebrauch bis zur Entladung bestimmt und können nicht aufgeladen werden.
- Ein Akkumulator kann nach seiner Entladung wieder aufgeladen werden. Zu beachten ist die Betriebsanweisung für das Laden.
- Die Kapazität einer Batterie oder eines Akkumulators wird in Amperestunden (Ah) angegeben.
- Netzgeräte (Netzteile) sind vom Stromversorgungsnetz abhängige Gleichspannungsquellen.
- Für eine störungsfreie Versorgung einer elektronischen Schaltung mit Gleichspannung sind bestimmte Regeln zu beachten.

L. Stiny, *Aufgabensammlung zur Elektrotechnik und Elektronik*,
DOI 10.1007/978-3-658-14381-7_4

- Eine reale Spannungsquelle kann durch eine Ersatzspannungsquelle (mit Innenwiderstand) dargestellt werden.
- Die Klemmenspannung einer Spannungsquelle bricht umso stärker zusammen, je größer ihr Innenwiderstand und je größer der Laststrom ist.
- Man unterscheidet zwischen Spannungs-, Strom- und Leistungsanpassung.
- Eine Konstantstromquelle liefert einen vom Lastwiderstand unabhängigen Strom.
- Wichtige Formeln: $U_\mathrm{L} = U_0 - R_\mathrm{i} \cdot I_\mathrm{L}$; $P_\mathrm{Lmax} = \frac{U_0^2}{4 \cdot R_\mathrm{i}}$; $I_\mathrm{K} = \frac{U_0}{R_\mathrm{i}}$.

4.2 Die belastete Gleichspannungsquelle

Aufgabe 4.1
Was versteht man unter einer Leerlaufspannung?

Lösung
Leerlauf bedeutet, dass an die Anschlussklemmen einer Quelle kein Widerstand (kein Verbraucher) angeschlossen ist. Der Lastwiderstand ist unendlich groß: $R_\mathrm{L} = \infty$. Zwischen den Klemmen der Quelle fließt kein Strom. Die Klemmenspannung entspricht in diesem Fall der Leerlaufspannung.

Aufgabe 4.2
Eine Autobatterie hat ohne Belastung eine Klemmenspannung von $U_0 = 12\,\mathrm{V}$. Unter Belastung von $I_1 = 10\,\mathrm{A}$ sinkt die Klemmenspannung auf $U_1 = 11\,\mathrm{V}$. Wie groß ist der Innenwiderstand R_i der Batterie?

Lösung
Allgemein ist:

$$R_\mathrm{i} = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{U_0 - U_\mathrm{L}}{I_\mathrm{L}}$$

mit U_0 = Leerlaufspannung, U_L = Lastspannung, I_L = Laststrom, $I_0 = 0$ (Strom ohne Last)

$$R_\mathrm{i} = \frac{U_0 - U_1}{I_1 - I_0} = \frac{12\,\mathrm{V} - 11\,\mathrm{V}}{10\,\mathrm{A} - 0\,\mathrm{A}} = \underline{\underline{0{,}1\,\Omega}}$$

Aufgabe 4.3
Die Spannungsquelle in Abb. 4.1 hat eine Leerlaufspannung $U_\mathrm{L} = 12\,\mathrm{V}$.

a) Wie groß ist die Quellenspannung U_0?
b) An diese Spannungsquelle wird ein Widerstand $R = 5\,\Omega$ angeschlossen, dabei fließt ein Strom $I = 2\,\mathrm{A}$. Wie groß ist R_i?

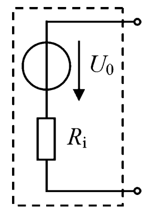


Abb. 4.1 Eine reale Spannungsquelle

Lösung

a) Die Quellenspannung ist die Leerlaufspannung (= Klemmenspannung): $U_0 = U_L = \underline{\underline{12\,\text{V}}}$

b) $U = R \cdot I$; $12\,\text{V} = (R_i + 5\,\Omega) \cdot 2\,\text{A}$; $R_i = \frac{12\,\text{V}}{2\,\text{A}} - 5\,\Omega$; $\underline{\underline{R_i = 1\,\Omega}}$

Zu beachten ist, dass Indizes unterschiedliche Bedeutungen haben können. Hier ist $U_\mathbf{L}$ die **L**eerlaufspannung, in Aufgabe 4.2 war es die Lastspannung.

Alternative Lösung

Maschenregel: $U_{Ri} - U_0 + U_R = 0$;
Bauteilgleichungen: $U_{Ri} = R_i \cdot I$; $U_R = R \cdot I$
Einsetzen: $R_i \cdot I - U_0 + R \cdot I = 0$; $R_i = \frac{U_0}{I} - R = \frac{12\,\text{V}}{2\,\text{A}} - 5\,\Omega = \underline{\underline{1\,\Omega}}$

Aufgabe 4.4

Eine reale Spannungsquelle (Abb. 4.2) hat die Leerlaufspannung $U_0 = 12\,\text{V}$ und den Innenwiderstand $R_i = 2\,\Omega$. Skizzieren Sie die Kennlinie $U_L = f(I)$ der Spannungsquelle. An welcher Stelle der Kennlinie kann man U_0 ablesen, wie erhält man aus der Kennlinie R_i?

Lösung

Ist an die Klemmen der Spannungsquelle eine Last angeschlossen, so fließt der Strom I in diesen Verbraucher. Ein Maschenumlauf ergibt die Gleichung $U_L = U_0 - R_i \cdot I$. Dies ist die Gleichung einer Geraden mit negativer Steigung, wie man durch Umstellen leicht erkennt: $U_L = -R_i \cdot I + U_0$ (ähnlich $y = -a \cdot x + b$). Setzt man den Strom zu $I = 0$, so erhält man den Schnittpunkt der Geraden mit der Ordinate als $U_L = U_0$ (*Leerlaufspannung*). Setzt man die Klemmenspannung zu $U_L = 0$ (bedeutet Kurzschluss), so erhält man den Schnittpunkt der Geraden mit der Abszisse als $I_K = \frac{U_0}{R_i}$ (*Kurzschlussstrom*). Durch

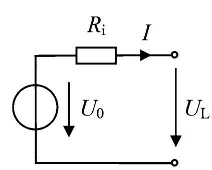


Abb. 4.2 Reale Spannungsquelle

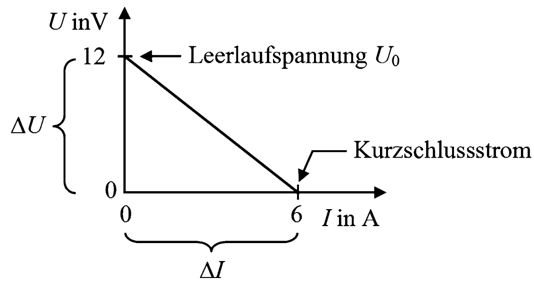


Abb. 4.3 Kennlinie der Spannungsquelle

die beiden Punkte ist die Gerade festgelegt (Abb. 4.3). Der Innenwiderstand R_i wird der Steigung der Geraden entnommen: $R_\mathrm{i} = \left|\frac{\Delta U}{\Delta I}\right|$.

Aufgabe 4.5
Die Quellenspannung U_q einer Batterie beträgt 4,5 V. An die Batterieklemmen wird ein ohmscher Widerstand R_L angeschlossen, die Klemmenspannung sinkt durch die Last auf $U_\mathrm{L} = 4{,}3\,\mathrm{V}$. Im Widerstand wird eine Verlustleistung von $P = 2\,\mathrm{W}$ umgesetzt. Welchen Innenwiderstand R_i hat die Batterie?

Lösung
Durch den Lastwiderstand fließt der Strom

$$I = \frac{P}{U} = \frac{2\,\mathrm{W}}{4{,}3\,\mathrm{V}} = 0{,}465\,\mathrm{A}.$$

Am Innenwiderstand liegt die Differenz aus Quellenspannung und Spannung am Lastwiderstand an. Mit dem bereits berechneten Strom ist

$$R_\mathrm{i} = \frac{U_\mathrm{q} - U_\mathrm{L}}{I} = \frac{4{,}5\,\mathrm{V} - 4{,}3\,\mathrm{V}}{0{,}465\,\mathrm{A}} = \underline{\underline{0{,}43\,\Omega}}.$$

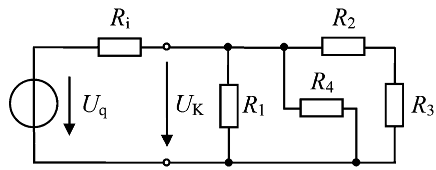
Aufgabe 4.6
Eine Gleichspannungsquelle mit der Quellenspannung U_q und dem Innenwiderstand R_i ist wie in Abb. 4.4 gezeigt mit Widerständen beschaltet.

a) Wie groß ist der Ersatzwiderstand R_ers der äußeren Beschaltung?
b) Wie groß ist die Klemmenspannung U_K?
c) Welche Verlustleistung P_i entsteht am Innenwiderstand R_i?

Gegeben: $U_\mathrm{q} = 16\,\mathrm{V}$, $R_\mathrm{i} = 40\,\Omega$, $R_1 = 160\,\Omega$, $R_2 = 50\,\Omega$, $R_3 = 30\,\Omega$, $R_4 = 160\,\Omega$

Lösung
a) Der Widerstand R_4 ist hier ungewöhnlich verwinkelt gezeichnet. Dies soll nur den Blick für das Lesen einer Schaltung schärfen. R_4 liegt parallel zu R_1. Die Parallelschaltung von R_1 und R_4 liegt parallel zur Reihenschaltung von R_2 und R_3.

Abb. 4.4 Spannungsquelle mit Widerständen



R_1 und R_4 sind mit 160 Ω gleich groß ⇒ $R_1 \| R_4 = 80\,\Omega$; Reihenschaltung: $R_2 + R_3 = 80\,\Omega$

Die Parallelschaltung der beiden 80 Ω-Widerstände ergibt den Ersatzwiderstand $\underline{\underline{R_{ers} = 40\,\Omega}}$.

Diese Vorgehensweise ist schneller und einfacher, als würde man $R_4 \| (R_2 + R_3)$ und das Ergebnis parallel zu R_1 berechnen.

b) R_i und R_{ers} bilden einen Spannungsteiler. Beide Widerstände sind gleich groß. Somit fällt am Lastwiderstand (Ersatzwiderstand) die halbe Quellenspannung (Leerlaufspannung) als Klemmenspannung ab.

$$U_K = \frac{U_q}{2} = \underline{\underline{8\,\text{V}}}$$

c) Da auch an R_i eine Spannung von $U_i = 8\,\text{V}$ abfällt, ist die an R_i entstehende Verlustleistung:

$$P_i = \frac{U_i^2}{R_i} = \frac{64\,\text{V}^2}{40\,\Omega} = \underline{\underline{1{,}6\,\text{W}}}$$

Aufgabe 4.7

Eine Autobatterie liefert ohne Belastung eine Spannung von $U_B = 12\,\text{V}$ (Leerlaufspannung) und besitzt einen Innenwiderstand von $R_i = 15\,\text{m}\Omega$. Beim Starten eines Pkw muss diese Autobatterie insgesamt im Sommer eine Leistung von $P_S = 800\,\text{W}$ und im Winter von $P_W = 1200\,\text{W}$ aufbringen.

a) Zeichnen Sie ein Ersatzschaltbild. Der Anlasser soll als rein ohmscher Widerstand R_A betrachtet werden.
b) Welcher Strom I_S fließt beim Startvorgang im Sommer, welcher Strom I_W beim Startvorgang im Winter?
c) Durch den Innenwiderstand des Akkus entsteht beim Startvorgang eine Verlustleistung, durch die sich der Akku selbst erwärmt. Wie groß ist die Verlustleistung P_{VS} im Sommer bzw. P_{VW} im Winter?
d) Welche Leistung P_{AS} wird im Sommer und welche Leistung P_{AW} wird im Winter an den Anlasser abgegeben?

Lösung

a) Das Ersatzschaltbild zeigt Abb. 4.5.
b) $I = \frac{P}{U}$; $I_S = \frac{P_S}{U_B} = \frac{800\,\text{W}}{12\,\text{V}} = \underline{\underline{66{,}7\,\text{A}}}$; $I_W = \frac{P_W}{U_B} = \frac{1200\,\text{W}}{12\,\text{V}} = \underline{\underline{100{,}0\,\text{A}}}$

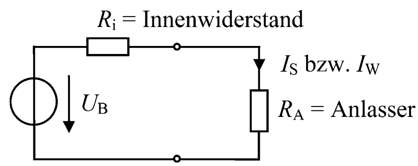


Abb. 4.5 Ersatzschaltbild mit Autoakku und Anlasser als Widerstand

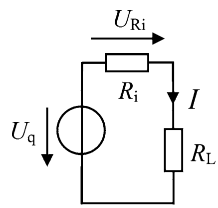


Abb. 4.6 Generator mit Innenwiderstand und Lastwiderstand

c) $P = R \cdot I^2$; $P_{VS} = 0{,}015\,\Omega \cdot (66{,}7\,\text{A})^2 = \underline{\underline{66{,}7\,\text{W}}}$; $P_{VW} = 0{,}015\,\Omega \cdot (100\,\text{A})^2 = \underline{\underline{150\,\text{W}}}$

d) $P_{AS} = P_S - P_{VS} = 800\,\text{W} - 66{,}7\,\text{W} = \underline{\underline{733{,}3\,\text{W}}}$;
$P_{AW} = P_W - P_{VW} = 1200\,\text{W} - 150\,\text{W} = \underline{\underline{1050\,\text{W}}}$

Aufgabe 4.8

Ein Generator hat eine Leerlaufspannung $U_q = 24\,\text{V}$ und einen Kurzschlussstrom $I_K = 3\,\text{A}$. Die zulässige innere Verlustleistung beträgt $P_V = 2\,\text{W}$.

a) Wie groß ist der Innenwiderstand R_i des Generators?
b) Wie groß darf der Strom I durch eine angeschlossene Last maximal werden um den Generator nicht zu überlasten? Welche Spannung U_{Ri} fällt dann am Innenwiderstand ab?
c) Wie groß muss der Lastwiderstand R_L mindestens sein, damit der zulässige Strom nicht überschritten wird? Wie groß ist dann die in der Last umgesetzte Leistung P_L?

Lösung

Das Ersatzschaltbild des Generators zeigt Abb. 4.6.

a) $R_i = \frac{U_q}{I_K} = \frac{24\,\text{V}}{3\,\text{A}} = \underline{\underline{8\,\Omega}}$

b) $P_V = I_{max}^2 \cdot R_i \;\Rightarrow\; I_{max} = \sqrt{\frac{P_V}{R_i}} = \sqrt{\frac{2\,\text{W}}{8\,\Omega}} = \underline{\underline{0{,}5\,\text{A}}}$
$U_{Ri} = I_{max} \cdot R_i = 0{,}5\,\text{A} \cdot 8\,\Omega = \underline{\underline{4\,\text{V}}}$

c) $I_{max} = \frac{U_q}{R_i + R_L} \;\Rightarrow\; R_L = \frac{U_q}{I_{max}} - R_i$; $R_L = \frac{24\,\text{V}}{0{,}5\,\text{A}} - 8\,\Omega = \underline{\underline{40\,\Omega}}$
$P_L = I_{max}^2 \cdot R_L = (0{,}25\,\text{A})^2 \cdot 40\,\Omega = \underline{\underline{10\,\text{W}}}$

Aufgabe 4.9

Ein Generator mit der Quellspannung U_q und dem Innenwiderstand R_i stellt für einen Verbraucher mit dem Widerstand R_a eine Nennleistung von $P_N = 40\,\text{kW}$ zur Verfügung.

Dies entspricht einem Wirkungsgrad von $\eta = 95\,\%$. Die Leerlaufspannung der Quelle beträgt $U_\mathrm{L} = 250\,\mathrm{V}$.

a) Welche Klemmenspannung U_a stellt sich ein?
b) Wie groß ist der bei Belastung fließende Strom I?
c) Wie groß sind R_i und R_a?
d) Welche Leistung P würde bei Leistungsanpassung in R_a umgesetzt und wie groß ist dann der Wirkungsgrad η?

Lösung

a) $U_\mathrm{a} = U_\mathrm{q} \cdot \eta = U_\mathrm{L} \cdot \eta = 250\,\mathrm{V} \cdot 0{,}95 = \underline{\underline{237{,}5\,\mathrm{V}}}$

b) $I = \frac{P_\mathrm{N}}{U_\mathrm{a}} = \frac{40\,\mathrm{kW}}{237{,}5\,\mathrm{V}} = \underline{\underline{168{,}4\,\mathrm{A}}}$

c) $R_\mathrm{a} = \frac{U_\mathrm{a}}{I} = \frac{237{,}5\,\mathrm{V}}{168{,}4\,\mathrm{A}} = \underline{\underline{1{,}41\,\Omega}}$

$R_\mathrm{i} = \frac{U_\mathrm{q}-U_\mathrm{a}}{I} = \frac{250\,\mathrm{V}-237{,}5\,\mathrm{V}}{168{,}4\,\mathrm{A}} = \frac{12{,}5\,\mathrm{V}}{168{,}4\,\mathrm{A}} = 0{,}0742\,\Omega = \underline{\underline{74{,}2\,\mathrm{m}\Omega}}$

d) Leistungsanpassung liegt vor bei $R_\mathrm{a} = R_\mathrm{i}$.

$I = \frac{U_\mathrm{q}}{2R_\mathrm{i}} = \frac{250\,\mathrm{V}}{2 \cdot 74{,}2\,\mathrm{m}\Omega} = 1685\,\mathrm{A}$

$P = R_\mathrm{a} \cdot I^2 = \underline{\underline{210{,}7\,\mathrm{kW}}}$; $\eta = \frac{P_\mathrm{a}}{P} = \frac{\cancel{I^2} \cdot R_\mathrm{a}}{\cancel{I^2} \cdot (R_\mathrm{a}+R_\mathrm{i})} = \underline{\underline{0{,}5}}$

Aufgabe 4.10

Die Messung der Klemmenspannung einer Spannungsquelle mit Hilfe eines Vielfachmessers (der Innenwiderstand des Messgerätes im benutzten Messbereich ist $R_\mathrm{V} = 20\,\mathrm{k}\Omega$) ergab einen Wert von $U_1 = 10\,\mathrm{V}$. Durch Parallelschalten eines Widerstandes von $R = 5\,\mathrm{k}\Omega$ zu den Klemmen der Spannungsquelle sank die Spannung auf $U_2 = 8\,\mathrm{V}$.

a) Wie groß sind Quellenspannung U_q, Innenwiderstand R_i und Kurzschlussstrom I_K der Spannungsquelle, wenn diese eine lineare U-I-Kennlinie hat?
b) Geben Sie allgemein die Gleichung der U-I-Kennlinie an. Zeichnen Sie den Verlauf der Klemmenspannung U_L als Funktion des Laststromes I_L.

Lösung

a) Der Innenwiderstand einer Spannungsquelle kann durch die Messung der Spannungen und Ströme von zwei beliebigen Lastfällen ermittelt werden. Da die U-I-Kennlinie linear ist, ergibt sich der Innenwiderstand als Verhältnis einer Spannungsdifferenz zur zugehörigen Stromdifferenz.

Erster Lastfall: Die Spannungsquelle wird nur durch den Innenwiderstand des Messgerätes belastet.

$$I_1 = \frac{U_1}{R_\mathrm{V}} = \frac{10\,\mathrm{V}}{20\,\mathrm{k}\Omega} = 0{,}5\,\mathrm{mA}$$

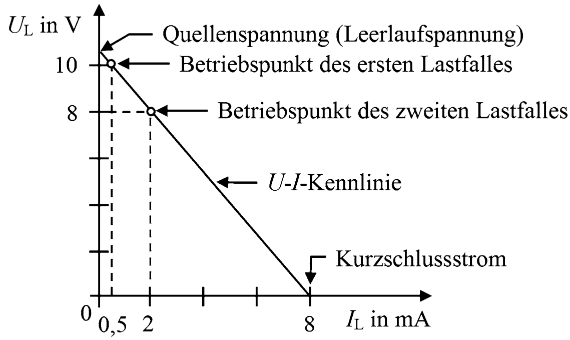


Abb. 4.7 Verlauf der Klemmenspannung als Funktion des Laststromes

Zweiter Lastfall: Die Spannungsquelle wird durch den Innenwiderstand des Messgerätes und dem hierzu parallel liegenden Widerstand R belastet.

$$I_2 = \frac{U_2}{R_V \| R} = \frac{U_2}{\frac{R_V \cdot R}{R_V + R}} = \frac{8\,\text{V} \cdot (20\,\text{k}\Omega + 5\,\text{k}\Omega)}{20\,\text{k}\Omega \cdot 5\,\text{k}\Omega} = 2\,\text{mA}$$

$$R_i = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{2\,\text{V}}{1{,}5\,\text{mA}} = \underline{\underline{1{,}333\,\text{k}\Omega}};$$

$$U_q = R_i \cdot I_1 + U_1 = 1{,}333\,\text{k}\Omega \cdot 0{,}5\,\text{mA} + 10\,\text{V} = \underline{\underline{10{,}67\,\text{V}}}$$

$$I_K = \frac{U_q}{R_i} = \frac{10{,}67\,\text{V}}{1333\,\Omega} = \underline{\underline{8\,\text{mA}}}$$

b) Die allgemeine Gleichung der U-I-Kennlinie ist $U_L = -R_i \cdot I_L + U_q$.

Den Verlauf der U-I-Kennlinie zeigt Abb. 4.7.

Aufgabe 4.11
Die U-I-Kennlinie einer Spannungsquelle kann näherungsweise durch den Ausdruck

$$U = U_q - \text{k} \cdot I^2 \quad \text{mit} \quad U_q = 10\,\text{V} \quad \text{und} \quad \text{k} = 1\,\text{V/A}^2$$

dargestellt werden.

a) Wie groß sind Leerlaufspannung U_0 und Kurzschlussstrom I_K der Quelle?
b) Welcher Arbeitspunkt mit $I = I_{AP}$ und $U = U_{AP}$ stellt sich ein, wenn an diese Quelle ein Lastwiderstand $R_L = 10\,\Omega$ geschaltet wird (analytische und grafische Lösung)?
c) Welche Leistung P_L wird im Lastwiderstand umgesetzt und welche Leistung P_i geht in der Quelle verloren?
d) Wie groß ist der Wirkungsgrad η für diesen Lastfall?

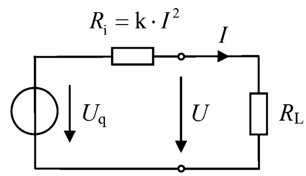


Abb. 4.8 Spannungsquelle mit stromabhängigem Innenwiderstand

Lösung

Die Schaltung der Spannungsquelle ist in Abb. 4.8 dargestellt.

$$U = U_0 \quad \text{für} \quad R_L = \infty; \quad I = I_K \quad \text{für} \quad R_L = 0\,\Omega$$
$$U = U_{AP} \quad \text{und} \quad I = I_{AP} \quad \text{für} \quad R_L = 10\,\Omega$$

a) Die Leerlaufspannung ist $U = U_0 = U_q = \underline{\underline{10\,\text{V}}}$.
Bei Kurzschluss ist die Spannung

$$U = 0\,\text{V} \;\Rightarrow\; 0 = U_q - k \cdot I_K^2; \quad I_K = \sqrt{\frac{U_q}{k}} = \underline{\underline{3{,}16\,\text{A}}}$$

b) *Analytische Lösung*
Maschengleichung:

$$U_q - R_L \cdot I_{AP} - k \cdot I_{AP}^2 = 0; \quad 10\,\text{V} - 10\,\Omega \cdot I_{AP} - 1\,\frac{\text{V}}{\text{A}^2} \cdot I_{AP}^2 = 0$$
$$I_{AP}^2 + 10 \cdot I_{AP} - 10 = 0$$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$$I_{AP1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 + 4 \cdot 10}}{2}; \quad \underline{\underline{I_{AP} = 0{,}916\,\text{A}}}$$

Der zweite Wert ist negativ und entfällt.

$$U_{AP} = R_L \cdot I_{AP} = \underline{\underline{9{,}16\,\text{V}}}$$

Grafische Lösung
Mit $U = U_q - k \cdot I^2$ kann folgende Wertetabelle aufgestellt werden:

I/A	0	0,5	1	2	3
U/V	10	9,75	9	6	1

Die Punkte der Wertetabelle werden in eine $U = f(I)$-Darstellung (Spannung in Abhängigkeit des Stromes) eingetragen und durch Geradenstücke verbunden (Abb. 4.9).

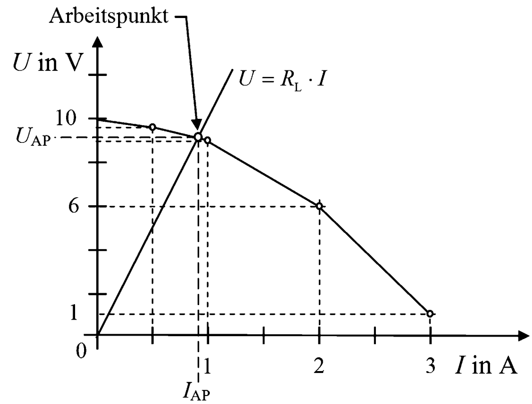


Abb. 4.9 Grafische Ermittlung der Werte des Arbeitspunktes

Man erhält die (stückweise linear angenäherte) nichtlineare U-I-Kennlinie der Spannungsquelle. Zusätzlich wird die Gerade $U = R_L \cdot I$ eingetragen. Der Schnittpunkt beider Kurven ergibt den Arbeitspunkt. Die Werte von U_{AP} und I_{AP} können jetzt auf den Koordinatenachsen abgelesen werden.

c) Leistung im Lastwiderstand: $P_L = U_{AP} \cdot I_{AP} = 9{,}16\,\text{V} \cdot 0{,}916\,\text{A} = \underline{\underline{8{,}39\,\text{W}}}$

Der Spannungsabfall am Innenwiderstand R_i ist $U_i = 1\,\frac{\text{V}}{\text{A}^2} \cdot (0{,}916\,\text{A})^2 = 0{,}839\,\text{V}$.
Verlustleistung innerhalb der Quelle: $P_i = U_i \cdot I_{AP} = 0{,}839\,\text{V} \cdot 0{,}916\,\text{A} = \underline{\underline{0{,}77\,\text{W}}}$.

d) $\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}}$; mit $P_{ab} = P_L$ und $P_{zu} = P_L + P_i$ folgt $\eta = \frac{8{,}39\,\text{W}}{8{,}39\,\text{W}+0{,}77\,\text{W}}$
$\underline{\underline{\eta = 0{,}92}}$ oder $\underline{\underline{\eta = 92\,\%}}$.

4.3 Ersatzspannungsquelle, Ersatzstromquelle

Aufgabe 4.12
Wandeln Sie die Schaltung in Abb. 4.10 in eine bezüglich der Klemmen A und B äquivalente Spannungsquelle um.

Lösung
Zur Bestimmung von R_i wird die Stromquelle geöffnet (deaktiviert, herausgenommen). Der linke Anschluss von R_1 in Abb. 4.10 ist dann offen (R_1 ist unwirksam). In die Klem-

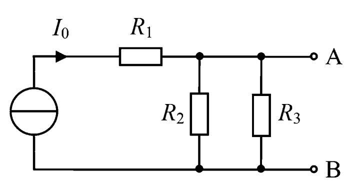


Abb. 4.10 Umwandlung einer Stromquelle in eine äquivalente Spannungsquelle

men A und B hinein sieht man nur noch die Parallelschaltung von R_2 und R_3 als wirksame Widerstände. Somit ist:

$$\underline{\underline{R_\mathrm{i} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}}}; \quad U_0 = I_0 \cdot R_\mathrm{i} = \underline{\underline{I_0 \cdot \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}}}$$

Die zur Stromquelle in Abb. 4.10 äquivalente Spannungsquelle zeigt Abb. 4.11.

Aufgabe 4.13

Von einem linearen Netzwerk sind bezogen auf die Klemmen A und B der Innenwiderstand R_i und die Leerlaufspannung U_{AB0} gesucht. Hierzu werden mit der angegebenen Messschaltung (Abb. 4.12) zwei Messungen mit unterschiedlichen Lastwiderständen R_L durchgeführt. Die Messwerte sind für

$$R_\mathrm{L} = 2\,\Omega\colon\ I = 40\,\mathrm{A}, U = 80\,\mathrm{V} \quad \text{und für} \quad R_\mathrm{L} = 23\,\Omega\colon\ I = 5\,\mathrm{A}, U = 115\,\mathrm{V}.$$

Lösung

Jedes lineare Netzwerk mit beliebig vielen Quellen und Widerständen lässt sich durch eine Ersatzspannungsquelle darstellen. Die zwei Messungen liefern zwei Punkte der Strom-Spannungs-Kennlinie der Ersatzspannungsquelle. Im vorliegenden Fall sind dies die Punkte (40 A, 80 V) und (5 A, 115 V). Durch diese beiden Punkte ist die Kennlinie, die wegen der Linearität des Netzwerkes eine Gerade ist, festgelegt. Die charakteristischen Größen der Ersatzspannungsquelle sind *Leerlaufspannung*, *Kurzschlussstrom* und *Innenwiderstand*. Sie können aus der Kennlinie abgeleitet werden. Durch zwei dieser drei Größen ist die Ersatzspannungsquelle eindeutig beschrieben. Die Ersatzspannungsquelle zeigt Abb. 4.13.

Der Innenwiderstand R_i entspricht der Steigung der Kennlinie.

$$R_\mathrm{i} = \left|\frac{\Delta U}{\Delta I}\right| = \left|\frac{U_2 - U_1}{I_2 - I_1}\right| = \left|\frac{115\,\mathrm{V} - 80\,\mathrm{V}}{5\,\mathrm{A} - 40\,\mathrm{A}}\right| = \underline{\underline{1\,\Omega}}$$

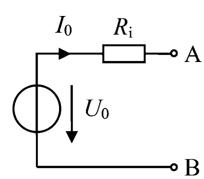


Abb. 4.11 Äquivalente Spannungsquelle

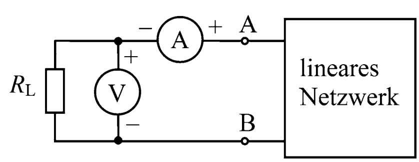
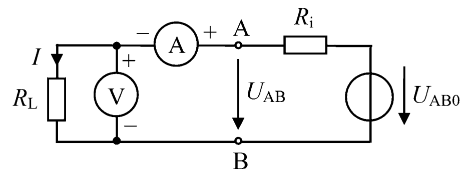


Abb. 4.12 Messungen an linearem Netzwerk

Abb. 4.13 Ersatzspannungsquelle des linearen Netzwerkes



Die Leerlaufspannung wird aus der Geradengleichung $U_L = -R_i \cdot I + U_{AB0}$ bzw.

$$U_{AB0} = U_L + R_i \cdot I$$

ermittelt.

$$U_{AB0} = 115\,\mathrm{V} + 1\,\Omega \cdot 5\,\mathrm{A} = \underline{\underline{120\,\mathrm{V}}} \quad \text{oder} \quad U_{AB0} = 80\,\mathrm{V} + 1\,\Omega \cdot 40\,\mathrm{A} = \underline{\underline{120\,\mathrm{V}}}$$

Der Kurzschlussstrom ist $I_K = \frac{U_{AB0}}{R_i} = \underline{\underline{120\,\mathrm{A}}}$.

Aufgabe 4.14

a) Wandeln Sie das Netzwerk in Abb. 4.14 bezüglich der Klemmen A und B in eine Ersatzstromquelle um.

b) Wie groß ist der Strom I_5 für $R_5 = 0\,\Omega$?

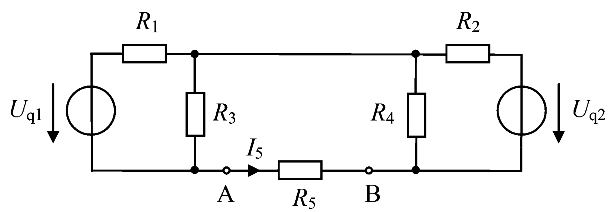
Gegeben: $U_{q1} = 24\,\mathrm{V}$, $U_{q2} = 20\,\mathrm{V}$, $R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$, $R_3 = 30\,\Omega$, $R_4 = 40\,\Omega$

Lösung

a) Jedes aktive lineare Netzwerk lässt sich bezüglich zweier beliebiger Klemmen durch eine Ersatzspannungs- oder Ersatzstromquelle nachbilden. Bezüglich der Klemmen verhalten sich beide Ersatzschaltungen genauso wie das ursprüngliche Netzwerk. Ob man eine Ersatzspannungs- oder Ersatzstromquelle verwendet, hängt von der jeweils vorliegenden Aufgabenstellung ab. Die Daten der Ersatzquellen können aus zwei der drei Größen *Leerlaufspannung*, *Kurzschlussstrom* und *Innenwiderstand* abgeleitet werden.

Der Innenwiderstand ist häufig am einfachsten zu bestimmen. Von den Klemmen A und B aus schauen wir in das Netzwerk hinein und denken uns Spannungsquellen

Abb. 4.14 Umwandlung in eine Ersatzstromquelle



kurzgeschlossen und Stromquellen unterbrochen (herausgenommen). Der Widerstand, den man dann sieht, ist der Innenwiderstand.
Für das gegebene Netzwerk folgt:

$$R_{\text{i}} = R_1 \| R_3 + R_2 \| R_4;$$
$$R_{\text{i}} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = 0{,}968\,\Omega + 1{,}905\,\Omega = \underline{\underline{2{,}873\,\Omega}}$$

Jetzt muss entweder die Leerlaufspannung oder der Leerlaufstrom bestimmt werden. Hier ist es günstiger, die Leerlaufspannung U_{AB0} zwischen den Klemmen A und B zu bestimmen (R_5 denkt man sich als nicht vorhanden). Die Spannung U_{AB0} ergibt sich aus den Spannungsabfällen an R_3 und R_4, die sich ihrerseits mit der Spannungsteilerregel berechnen lassen.

$$U_{\text{AB0}} = -U_{\text{R3}} + U_{\text{R4}} = -U_{\text{q1}} \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_3} + U_{\text{q2}} \cdot \frac{R_4}{R_2 + R_4}$$
$$U_{\text{AB0}} = -24\,\text{V} \cdot \frac{30}{31} + 20\,\text{V} \cdot \frac{40}{42} = -4{,}18\,\text{V}$$

Die Ersatzspannungsquelle wird jetzt in die gesuchte Ersatzstromquelle umgewandelt. Der Innenwiderstand bleibt gleich, die Stromquelle hat den Wert

$$I_{\text{AB0}} = \frac{U_{\text{AB0}}}{R_{\text{i}}} = \underline{\underline{-1{,}46\,\text{A}}}.$$

Abb. 4.15 zeigt die Ersatzstromquelle.

b) $R_5 = 0\,\Omega$ bedeutet, zwischen den Klemmen A und B ist ein Kurzschluss. Es fließt der Kurzschlussstrom $I_5 = I_{\text{AB0}} = \underline{\underline{-1{,}46\,\text{A}}}$.

Aufgabe 4.15
Gegeben ist das Netzwerk in Abb. 4.16.

Bezogen auf die Klemmen A, B sind gesucht: Leerlaufspannung U_{L}, Kurzschlussstrom I_{K}, Innenwiderstand R_{i}.

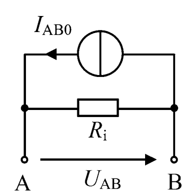


Abb. 4.15 Ersatzstromquelle zum Netzwerk in Abb. 4.14

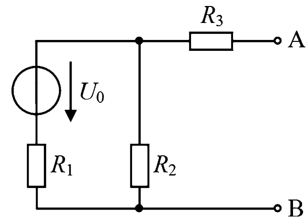


Abb. 4.16 Netzwerk zur Bestimmung der Daten der Ersatzspannungsquelle

Lösung

Zur Bestimmung von R_i werden *alle Spannungsquellen kurzgeschlossen* und alle *Stromquellen weggelassen*. Zwischen den Klemmen „sieht" man dann R_i (Abb. 4.17).

$$R_i = R_{AB} = R_1 \| R_2 + R_3; \quad \underline{\underline{R_i = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_3}}$$

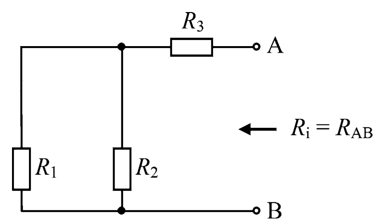
Jetzt wird die Leerlaufspannung U_L bestimmt. Da durch R_3 kein Strom fließt, fällt an ihm auch keine Spannung ab. Das Potenzial am linken Anschluss von R_3 ist gleich dem Potenzial am rechten Anschluss. R_3 kann also durch einen Kurzschluss ersetzt werden (Abb. 4.18).

Man sollte hier nicht sagen: R_3 kann weggelassen werden. Nimmt man R_3 aus dem Netzwerk heraus (dies versteht man meist unter „weglassen"), so ist der Anschlusspunkt A plötzlich ohne Verbindung zum restlichen Netzwerk.

Nach der Spannungsteilerregel ist:

$$\underline{\underline{U_L = U_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}}}.$$

Abb. 4.17 Zur Bestimmung des Innenwiderstandes



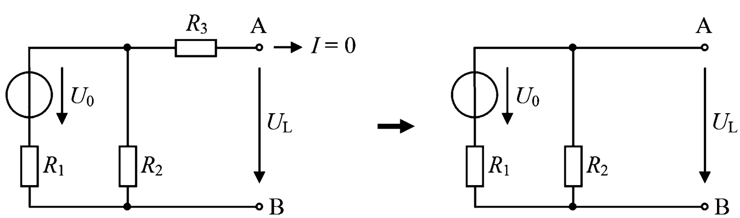


Abb. 4.18 R_3 ist ohne Funktion

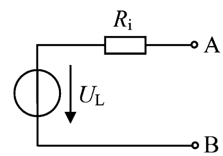


Abb. 4.19 Ersatzspannungsquelle für das Netzwerk in Abb. 4.16

Der Kurzschlussstrom I_K ist:

$$I_K = \frac{U_L}{R_i} = \frac{U_0 \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2}}{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1+R_2} + R_3} = \underline{\underline{U_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 \cdot R_2 + R_3 \cdot (R_1 + R_2)}}}.$$

Das Netzwerk in Abb. 4.16 kann bezüglich der Klemmen A, B durch die Ersatzspannungsquelle nach Abb. 4.19 mit den berechneten Werten von R_i und U_L ersetzt werden.

Aufgabe 4.16
Wie groß muss in Abb. 4.20 der Lastwiderstand R_L gewählt werden, damit die Spannung $U_L = \frac{1}{3} \cdot U_0$ beträgt?

Gegeben: $U_0 = 24\,\text{V}$, $R_0 = 20\,\Omega$, $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 10\,\Omega$, $R_3 = 60\,\Omega$

Lösung
Die Lösung erfolgt mit dem Verfahren der Ersatzspannungsquelle. Der Innenwiderstand des Netzwerkes bezüglich den Anschlüssen von R_L wird bestimmt, indem man an den beiden Klemmen von R_L in das Netzwerk hinein sieht, wobei die Spannungsquelle U_0 als kurzgeschlossen betrachtet wird.

$$R_i = R_2 + (R_0 + R_1) \,\|\, R_3;$$

$$R_i = R_2 + \frac{(R_0 + R_1) \cdot R_3}{R_0 + R_1 + R_3} = 10\,\Omega + \frac{30 \cdot 60}{90}\,\Omega = 30\,\Omega$$

Die Leerlaufspannung wird nach der Spannungsteilerregel berechnet.

$$U_{L0} = U_0 \frac{R_3}{R_0 + R_1 + R_3} = 24\,\text{V} \cdot \frac{60}{90} = 16\,\text{V}$$

Das Bild der Ersatzspannungsquelle zeigt Abb. 4.21.

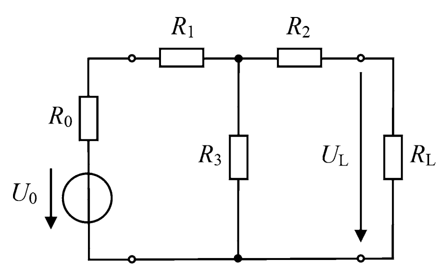


Abb. 4.20 Der Lastwiderstand ist für ein bestimmtes U_L zu bestimmen

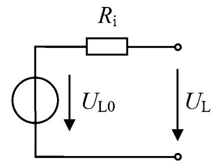


Abb. 4.21 Ersatzspannungsquelle für das Netzwerk nach Abb. 4.20

U_L soll durch das Anschließen des Widerstandes R_L ein Drittel von U_0 betragen. Die Spannungsteilerregel liefert $U_L = U_{L0}\frac{R_L}{R_i+R_L} = \frac{1}{3} \cdot U_0$. Diese Gleichung wird nach R_L aufgelöst.

$$3R_L U_{L0} = U_0 (R_i + R_L); \quad R_L (3 \cdot U_{L0} - U_0) = U_0 R_i; \quad R_L = \frac{U_0 R_i}{3 \cdot U_{L0} - U_0}$$

$$R_L = \frac{24\,\text{V} \cdot 30\,\Omega}{3 \cdot 16\,\text{V} - 24\,\text{V}}; \quad \underline{\underline{R_L = 30\,\Omega}}$$

Aufgabe 4.17
Ersetzen Sie die gegebenen Zusammenschaltungen a) und b) aktiver und passiver Elemente in Abb. 4.22 durch eine Ersatzspannungsquelle c) zwischen den Klemmen A und B und bestimmen Sie jeweils U_{qers} und R_{ers}.

Gegeben: $R_1 = R_2 = 12\,\Omega$; $R_3 = R_4 = 6\,\Omega$; $U_{q1} = 24\,\text{V}$; $U_{q3} = 16\,\text{V}$

Lösung
Bei der Berechnung von U_{qers} wird jeweils die Spannungsteilerregel angewandt.

a)

$$R_{ers} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} = \frac{12\,\Omega \cdot 6\,\Omega}{18\,\Omega} = \underline{\underline{4\,\Omega}};$$

$$U_{qers} = U_{q1} \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_3} = 24\,\text{V} \cdot \frac{6\,\Omega}{18\,\Omega} = \underline{\underline{8\,\text{V}}}$$

b)

$$R_{ers} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3+R_4}} = \frac{1}{\frac{1}{12\,\Omega} + \frac{1}{12\,\Omega} + \frac{1}{12\,\Omega}} = \underline{\underline{4\,\Omega}}$$

$$U_{qers} = -U_{q1} \cdot \frac{R_2 \| (R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 \| (R_3 + R_4)} + U_{q3} \cdot \frac{R_1 \| R_2}{R_3 + R_4 + R_1 \| R_2}$$

$$U_{qers} = -U_{q1} \cdot \frac{\frac{R_2(R_3+R_4)}{R_2+R_3+R_4}}{R_1 + \frac{R_2(R_3+R_4)}{R_2+R_3+R_4}} + U_{q3} \cdot \frac{\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}}{R_3 + R_4 + \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}}; \quad \underline{\underline{U_{qers} = -2{,}67\,\text{V}}}$$

Aufgabe 4.18
Berechnen Sie den Strom I_4 in Abb. 4.23 unter Verwendung

a) einer Ersatzspannungsquelle
b) einer Ersatzstromquelle.

Gegeben: $U_{q1} = 15\,\text{V}$; $U_{q2} = 40\,\text{V}$; $R_1 = R_3 = 25\,\Omega$; $R_2 = R_4 = 15\,\Omega$

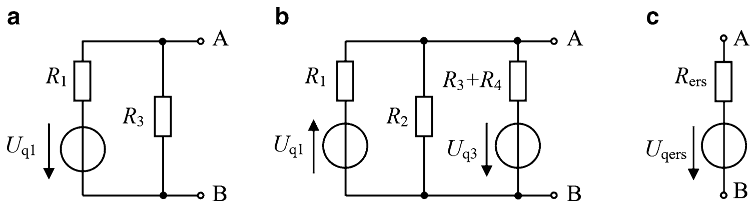


Abb. 4.22 Umwandlung von Schaltungen in Ersatzspannungsquellen

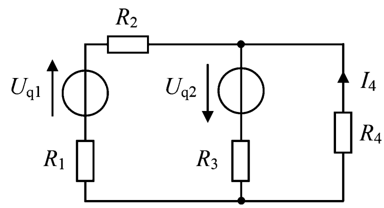


Abb. 4.23 Zu berechnen ist I_4

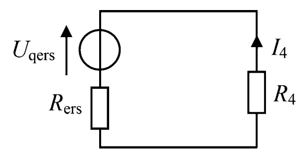


Abb. 4.24 Lösung mit Ersatzspannungsquelle

Lösung

a) Die Lösung zeigt Abb. 4.24.

$$R_{ers} = \frac{(R_1 + R_2) \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{40 \cdot 25}{65}\,\Omega = 15{,}38\,\Omega$$

$$U_{qers} = U_{q1}\frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} - U_{q2}\frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3}; \quad U_{qers} = -18{,}8\,\text{V}$$

$$I_4 = \frac{U_{qers}}{R_{ers} + R_4} = -\frac{18{,}8\,\text{V}}{30{,}38\,\Omega} = \underline{\underline{-0{,}62\,\text{A}}}$$

b) Die Lösung ist in Abb. 4.25 dargestellt.

$$R_{ers} = \frac{(R_1 + R_2) \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{40 \cdot 25}{65}\Omega = 15{,}38\,\Omega$$

$$I_{qers} = \frac{U_{q1}}{R_1 + R_2} - \frac{U_{q2}}{R_3} = \frac{15\,\text{V}}{40\,\Omega} - \frac{40\,\text{V}}{25\,\Omega} = -1{,}225\,\text{A}$$

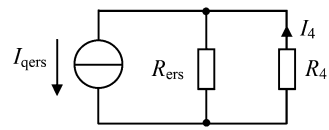
$$I_4 = I_{qers} \cdot \frac{R_{ers}}{R_{ers} + R_4} = -1{,}225\,\text{A} \cdot \frac{15{,}38}{30{,}38} = \underline{\underline{-0{,}62\,\text{A}}}$$

Aufgabe 4.19

Berechnen Sie in Abb. 4.26 den Strom I_6 unter Verwendung von Ersatzspannungsquellen.

Gegeben: $U_{q1} = 10\,\text{V}$; $U_{q2} = 20\,\text{V}$; $U_{q3} = 3\,\text{V}$; $U_{q4} = 6\,\text{V}$; $R_1 = R_2 = 2\,\Omega$; $R_3 = 3\,\Omega$; $R_4 = 4\,\Omega$; $R_5 = 6\,\Omega$; $R_6 = 12\,\Omega$

Abb. 4.25 Lösung mit Ersatzstromquelle



Lösung

Es werden zwei Ersatzspannungsquellen eingeführt (Abb. 4.27).

$$R_{ers1} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 1\,\Omega$$

$$U_{qers1} = U_{q1}\frac{R_2}{R_1 + R_2} + U_{q2}\frac{R_1}{R_1 + R_2} = 15\,\text{V}$$

$$R_{ers2} = \frac{R_3 \cdot R_4 \cdot R_5}{R_3 \cdot R_4 + R_3 \cdot R_5 + R_4 \cdot R_5} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 6}\,\Omega = \frac{4}{3}\,\Omega = 1{,}33\,\Omega$$

$$U_{qers2} = U_{q3}\frac{R_4 \| R_5}{R_3 + R_4 \| R_5} + U_{q4}\frac{R_3 \| R_5}{R_4 + R_3 \| R_5} = 3{,}33\,\text{V}$$

$$I_6 = \frac{U_{qers1} - U_{qers2}}{R_{ers1} + R_{ers2} + R_6} = \underline{\underline{0{,}814\,\text{A}}}$$

Aufgabe 4.20

Bestimmen Sie in Abb. 4.28 den Strom I_4 unter Verwendung von Ersatzspannungsquellen.

Gegeben: $U_{q1} = 6\,\text{V}$; $U_{q2} = 32\,\text{V}$; $R_1 = R_3 = 6\,\Omega$; $R_4 = 10\,\Omega$; $R_2 = R_5 = 16\,\Omega$; $R_6 = R_7 = R_8 = 1\,\Omega$

Lösung

Es wird eine Schaltung mit zwei Ersatzspannungsquellen eingeführt, die zu einer Ersatzspannungsquelle vereinfacht wird (Abb. 4.29).

$$R_{ers1} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} + R_6 = 4\,\Omega; \quad U_{qers1} = U_{q1}\frac{R_3}{R_1 + R_3} = 3\,\text{V}$$

$$R_{ers2} = \frac{R_2 \cdot R_5}{R_2 + R_5} + R_7 + R_8 = 10\,\Omega; \quad U_{qers2} = U_{q2}\frac{R_5}{R_2 + R_5} = 16\,\text{V}$$

Abb. 4.26 Zu berechnen ist I_6

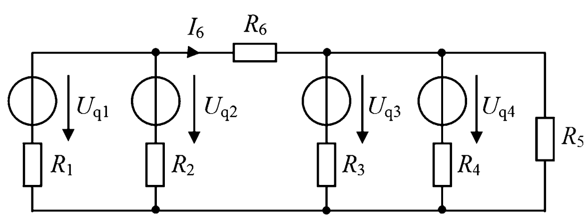
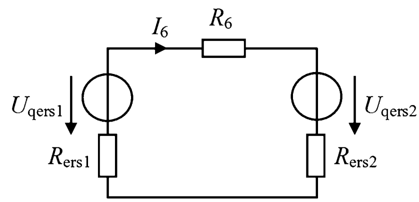


Abb. 4.27 Schaltung mit zwei Ersatzspannungsquellen



$$R_{\text{ers}} = \frac{R_{\text{ers1}} \cdot R_{\text{ers2}}}{R_{\text{ers1}} + R_{\text{ers2}}} = 2{,}86\,\Omega$$

$$U_{\text{qers}} = \left(\frac{U_{\text{qers1}}}{R_{\text{ers1}}} + \frac{U_{\text{qers2}}}{R_{\text{ers2}}}\right) \cdot R_{\text{ers}} = \left(\frac{3}{4} + \frac{16}{10}\right) \text{A} \cdot 2{,}86\,\Omega = 6{,}72\,\text{V}$$

$$I_4 = \frac{U_{\text{qers}}}{R_{\text{ers}} + R_4} = \frac{6{,}72}{2{,}86 + 10}\,\text{A} = \underline{\underline{0{,}52\,\text{A}}}$$

Aufgabe 4.21
Berechnen Sie I_6 in Abb. 4.30 unter Verwendung von Ersatzspannungsquellen.

Lösung
Die Schaltung mit zwei Ersatzspannungsquellen zeigt Abb. 4.31.

$$R_{\text{ers1}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}; \quad U_{\text{qers1}} = \left(\frac{U_{\text{q1}}}{R_1} + \frac{U_{\text{q2}}}{R_2}\right) \cdot R_{\text{ers1}}$$

$$R_{\text{ers2}} = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4}; \quad U_{\text{qers2}} = \frac{U_{\text{q3}}}{R_3} \cdot R_{\text{ers2}}; \quad \underline{\underline{I_6 = \frac{U_{\text{qers1}} + U_{\text{qers2}}}{R_{\text{ers1}} + R_{\text{ers2}} + R_5 + R_6}}}$$

Aufgabe 4.22
Berechnen Sie I_3 in Abb. 4.32 mit Hilfe von Ersatzspannungsquellen.

Gegeben: $U_{\text{q1}} = 10\,\text{V}$; $U_{\text{q2}} = 14\,\text{V}$; $R_1 = 700\,\Omega$; $R_2 = 300\,\Omega$; $R_3 = 51\,\Omega$; $R_4 = 100\,\Omega$; $R_5 = 200\,\Omega$; $R_6 = 68\,\Omega$

Abb. 4.28 Zu berechnen ist I_4

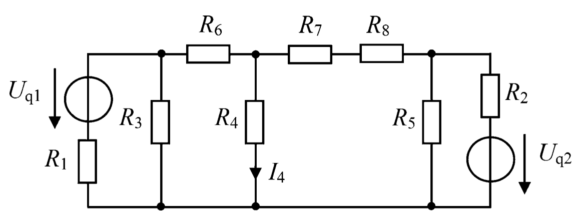


Abb. 4.29 Schaltung mit Ersatzspannungsquellen

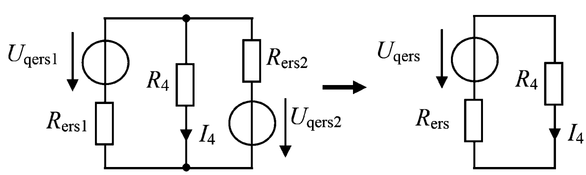


Abb. 4.30 Zu berechnen ist I_6

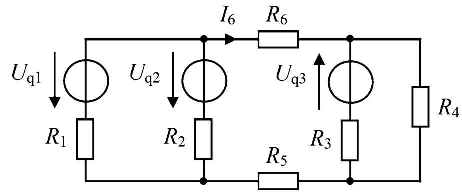
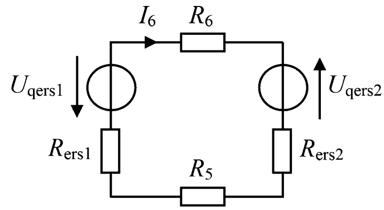


Abb. 4.31 Schaltung mit zwei Ersatzspannungsquellen



Lösung

Die Schaltung in Abb. 4.32 wird entsprechend Abb. 4.33 umgewandelt.

$$R_{ers1} = \frac{R_5 \cdot R_6}{R_5 + R_6} + R_4 = \left(\frac{200 \cdot 68}{268} + 100\right)\Omega = 150{,}75\,\Omega$$

$$U_{qers1} = \frac{U_{q2} \cdot R_5}{R_5 + R_6} = \frac{14 \cdot 200}{268}\,\text{V} = 10{,}45\,\text{V}$$

$$R_{ers} = \frac{R_1 \cdot R_{ers1}}{R_1 + R_{ers1}} = \frac{700 \cdot 150{,}75}{850{,}75}\,\Omega = 124\,\Omega$$

$$U_{qers} = U_{q1} \cdot \frac{R_{ers1}}{R_1 + R_{ers1}} - U_{qers1} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_{ers1}}$$

$$= 10\,\text{V} \cdot 0{,}177 - 10{,}45\,\text{V} \cdot 0{,}823 = -6{,}83\,\text{V}$$

$$I_3 = \frac{U_{qers}}{R_{ers} + R_2 + R_3} = \frac{-6{,}83\,\text{V}}{(124 + 300 + 51)\,\Omega} = \underline{\underline{-14{,}38\,\text{mA}}}$$

Abb. 4.32 Zu berechnen ist I_3

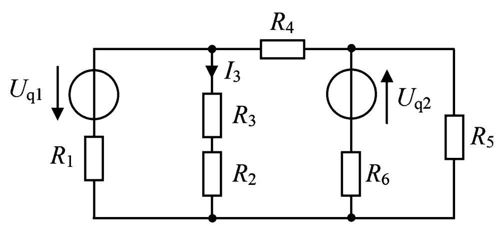
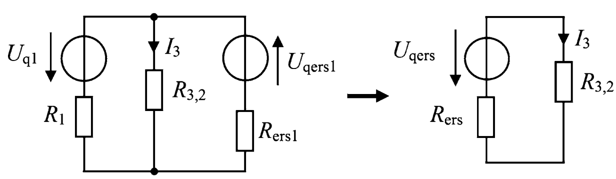


Abb. 4.33 Schaltungen mit Ersatzspannungsquelle



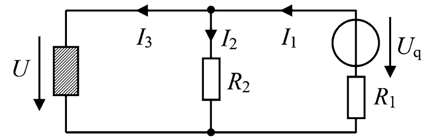


Abb. 4.34 Schaltung mit nichtlinearem Widerstand

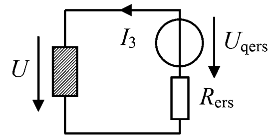


Abb. 4.35 Schaltung nach Einführung einer Ersatzspannungsquelle

Aufgabe 4.23
Berechnen Sie in der Schaltung nach Abb. 4.34 die Zweigströme I_1, I_2, I_3.
Gegeben: $U = \mathrm{K} \cdot I_3^2$; $\mathrm{K} = 5\,\mathrm{V/A^2}$; $U_q = 10\,\mathrm{V}$; $R_1 = 3\,\Omega$; $R_2 = 7\,\Omega$

Lösung
Eine Umwandlung in eine Ersatzspannungsquelle ergibt (Abb. 4.35):

$$R_{ers} = \frac{R_2 \cdot R_1}{R_2 + R_1} = 2{,}1\,\Omega; \quad U_{qers} = U_q \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 7\,\mathrm{V}$$

Maschengleichung:

$$I_3 \cdot R_{ers} + \mathrm{K} \cdot I_3^2 = U_{qers}; \quad I_3^2 + \frac{R_{ers}}{\mathrm{K}} \cdot I_3 - \frac{U_{qers}}{\mathrm{K}} = 0$$

Lösen der quadratischen Gleichung von I_3:

$$I_{3\,1,2} = \frac{-\frac{R_{ers}}{\mathrm{K}} \pm \sqrt{\left(\frac{R_{ers}}{\mathrm{K}}\right)^2 + 4\frac{U_{qers}}{\mathrm{K}}}}{2}; \quad I_{3\,1,2} = \frac{-\frac{2,1}{5} \pm \sqrt{0{,}1764 + 5{,}6}}{2}\,\mathrm{A}$$

Der negative Wert entfällt. $\underline{\underline{I_3 = 0{,}992\,\mathrm{A}}}$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{\mathrm{K} \cdot I_3^2}{R_2} = \frac{5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}^2} \cdot 0{,}992^2\,\mathrm{A}^2}{7\,\Omega} = \underline{\underline{0{,}703\,\mathrm{A}}}; \quad I_1 = I_2 + I_3 = \underline{\underline{1{,}695\,\mathrm{A}}}$$

Aufgabe 4.24
In der Schaltung nach Abb. 4.36 ist I_3 zu bestimmen.
Gegeben: $R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$, $R_3 = 3\,\Omega$, $R_4 = 4\,\Omega$, $R_5 = 5\,\Omega$, $U_1 = 1\,\mathrm{V}$, $U_2 = 2\,\mathrm{V}$, $U_3 = 3\,\mathrm{V}$, $U_4 = 4\,\mathrm{V}$

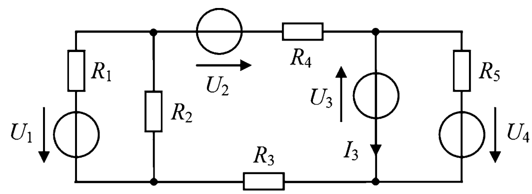


Abb. 4.36 Zu berechnen ist I_3

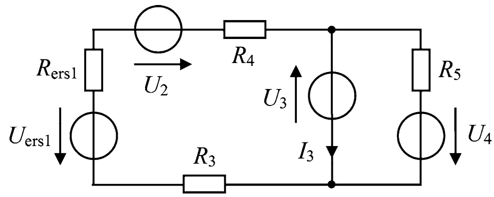


Abb. 4.37 Erste Ersatzspannungsquelle

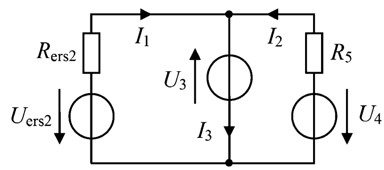


Abb. 4.38 Zweite Ersatzspannungsquelle

Lösung

Die erste Ersatzspannungsquelle zeigt Abb. 4.37.

$$R_{ers1} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2}{3}\,\Omega; \quad U_{ers1} = U_1 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2}{3}\,\mathrm{V}$$

Die zweite Ersatzspannungsquelle zeigt Abb. 4.38.

$$R_{ers2} = R_3 + R_4 + R_{ers1} = 7\frac{2}{3}\,\Omega; \quad U_{ers2} = U_{ers1} - U_2 = -\frac{4}{3}\,\mathrm{V} = -1\frac{1}{3}\,\mathrm{V}$$

$$I_3 = I_1 + I_2; \quad I_1 = \frac{3\,\mathrm{V} - 1\frac{1}{3}\,\mathrm{V}}{7\frac{2}{3}\,\Omega} = 0{,}217\,\mathrm{A};$$

$$I_2 = \frac{3\,\mathrm{V} + 4\,\mathrm{V}}{5\,\Omega} = 1{,}4\,\mathrm{A}; \quad \underline{\underline{I_3 = 1{,}617\,\mathrm{A}}}$$

Aufgabe 4.25

In der Schaltung nach Abb. 4.39 ist I_4 zu bestimmen.

Gegeben: $R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$, $R_3 = 3\,\Omega$, $R_4 = 4\,\Omega$, $U_2 = 2\,\mathrm{V}$, $U_3 = 1\,\mathrm{V}$, $I_1 = 1\,\mathrm{A}$

Lösung

Die Stromquelle wird in eine Spannungsquelle umgewandelt (Abb. 4.40).

U_1 und U_3 heben sich auf, somit bleibt die Schaltung in Abb. 4.41 übrig.

$$R_{ers} = R_1 + R_2 = 3\,\Omega; \quad I_4 = \frac{U_2}{R_4 + R_{ers} \| R_3} = \frac{2\,\mathrm{V}}{4\,\Omega + 1{,}5\,\Omega} = \underline{\underline{0{,}364\,\mathrm{A}}}$$

Abb. 4.39 Zu berechnen ist I_4

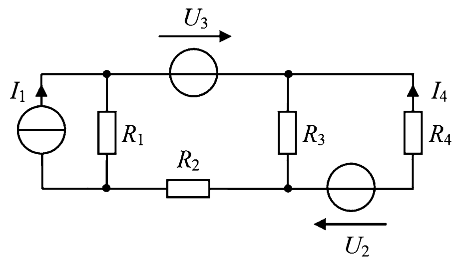


Abb. 4.40 Stromquelle umgewandelt in eine Spannungsquelle

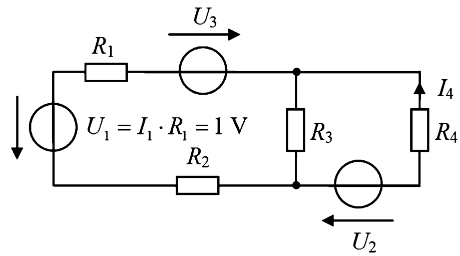
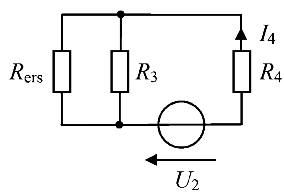


Abb. 4.41 Verbleibende Schaltung

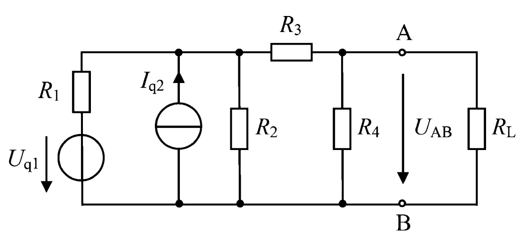


Aufgabe 4.26

a) Das Netzwerk links von den Klemmen A und B in Abb. 4.42 soll als Ersatzspannungsquelle dargestellt werden.
b) Welche Leistung wird im Lastwiderstand R_L umgesetzt?
c) Wie müsste R_L gewählt werden, damit die in ihm umgesetzte Leistung maximal wird? Wie groß ist die Leistung in diesem Fall?

Gegeben: $U_{q1} = 10\,\text{V}$, $I_{q2} = 2\,\text{A}$, $R_1 = 2\,\Omega$, $R_2 = 0{,}5\,\Omega$, $R_3 = 3\,\Omega$, $R_4 = 6\,\Omega$, $R_L = 4\,\Omega$

Abb. 4.42 Umzuwandelndes Netzwerk



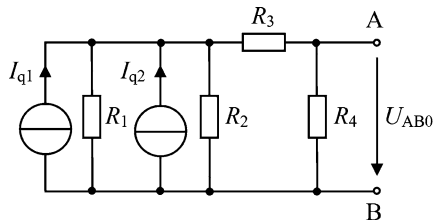


Abb. 4.43 Zur Ermittlung der Leerlaufspannung

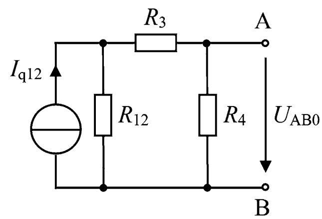


Abb. 4.44 Zusammenfassung der Stromquellen

Lösung

a) Der Innenwiderstand R_i der Ersatzspannungsquelle mit den Klemmen A und B wird bestimmt, indem zunächst alle Spannungsquellen im Netzwerk kurzgeschlossen und alle Stromquellen aufgetrennt werden. Anschließend schaut man von den Klemmen A und B in das Netzwerk hinein und ermittelt den Widerstand, den man von dort aus sieht.

$$R_i = R_4 \| (R_1 \| R_2 + R_3); \quad R_i = R_4 \| \frac{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_3}{R_1 + R_2};$$

$$R_i = 6\,\Omega \| 3{,}4\,\Omega; \quad \underline{\underline{R_i = 2{,}17\,\Omega}}$$

Nun soll die Leerlaufspannung U_{AB0} bestimmt werden. Hierzu wird die Spannungsquelle U_{q1} in eine Stromquelle umgewandelt, R_L entfällt (Leerlauf). Man erhält das Netzwerk in Abb. 4.43.

$$I_{q1} = \frac{U_{q1}}{R_1} = 5\,\text{A}$$

Die beiden parallel liegenden Stromquellen werden zusammengefasst (Abb. 4.44).

$$I_{q12} = I_{q1} + I_{q2} = 7\,\text{A}; \quad R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 0{,}4\,\Omega$$

Das Ergebnis wird wieder in eine Spannungsquelle umgewandelt (Abb. 4.45).

$$U_{q12} = I_{q12} \cdot R_{12} = 2{,}8\,\text{V}$$

U_{AB0} ist nach der Spannungsteilerregel $U_{AB0} = U_{q12} \frac{R_4}{R_{12}+R_3+R_4}$. $\underline{\underline{U_{AB0} = 1{,}79\,\text{V}}}$
Es folgt die Darstellung des ursprünglichen Netzwerkes mit der Ersatzspannungsquelle (Abb. 4.46).

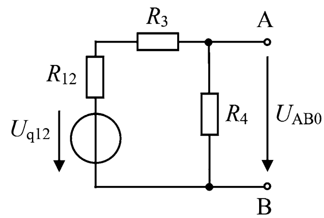


Abb. 4.45 Umwandlung in eine Spannungsquelle

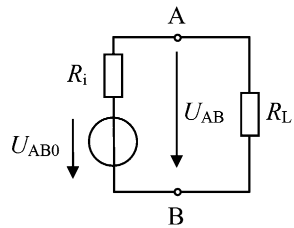


Abb. 4.46 Netzwerk nach Abb. 4.42 mit Ersatzspannungsquelle

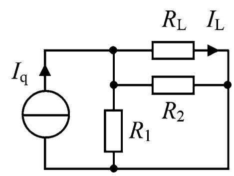


Abb. 4.47 Umzuwandelndes Netzwerk

b) Am Lastwiderstand fällt folgende Spannung ab:

$$U_{AB} = U_{AB0} \cdot \frac{R_L}{R_i + R_L} = 1{,}79\,\text{V} \cdot \frac{4\,\Omega}{6{,}17\,\Omega} = 1{,}16\,\text{V}$$

An R_L entsteht die Leistung: $P_L = \frac{U_{AB}^2}{R_L} = \underline{\underline{0{,}34\,\text{W}}}$

c) R_L müsste gleich dem Innenwiderstand R_i gewählt werden, damit Leistungsanpassung vorliegt. Die Klemmenspannung U_{AB} ist in diesem Fall die Hälfte von U_{AB0}. Die an R_L verbrauchte Leistung ist dann $P_{Lmax} = \frac{\left(\frac{1{,}79\,\text{V}}{2}\right)^2}{2{,}17\,\Omega} = \underline{\underline{0{,}37\,\text{W}}}$.

Aufgabe 4.27

a) Wandeln Sie die Schaltung mit dem Lastwiderstand R_L in Abb. 4.47 in eine Schaltung mit einer Ersatzspannungsquelle um. Wie groß ist der Strom I_L?
Gegeben: $R_1 = R_2 = 100\,\Omega$, $R_L = 10\,\Omega$, $I_q = 120\,\text{mA}$

b) Der Widerstand R_L wird durch einen nichtlinearen Widerstand R_a ausgetauscht. Der Zusammenhang zwischen Spannung U_a und Strom I_a an diesem Bauelement wird durch eine quadratische Funktion beschrieben:

$$U_a = \text{k} \cdot I_a^2 \quad \text{mit} \quad \text{k} = 312{,}5\,\Omega/\text{A}.$$

Berechnen Sie U_a und I_a für den Fall $R_1 = R_2 = 100\,\Omega$ und $I_q = 120\,\text{mA}$.

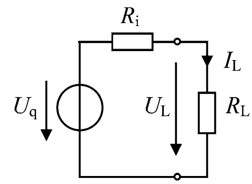


Abb. 4.48 Umgewandelte Schaltung mit Ersatzspannungsquelle

Lösung

a) Den Innenwiderstand R_i der Schaltung mit Ersatzspannungsquelle erhält man, wenn man die Stromquelle herauslöst und von den Klemmen am Ausgang (an die R_L angeschlossen ist) in das Netzwerk „hineinschaut“ (ohne R_L!). Wir erhalten:

$$R_i = R_1 \| R_2 = \underline{\underline{50\,\Omega}}.$$

Die Spannung der Ersatzspannungsquelle ist die Spannung am Ausgang, an die der Lastwiderstand R_L angeschlossen ist.

$$U_q = U_L = I_q \cdot R_1 \| R_2 = 120\,\text{mA} \cdot 50\,\Omega = \underline{\underline{6\,\text{V}}}$$

Die Schaltung mit Ersatzspannungsquelle zeigt Abb. 4.48.
Der Strom I_L ist:

$$I_L = \frac{U_q}{R_i + R_L} = \frac{6\,\text{V}}{50\,\Omega + 10\,\Omega} = \underline{\underline{100\,\text{mA}}}.$$

b) Es werden I_L durch I_a und U_L durch U_a ersetzt. Die Maschenregel ergibt nach Abb. 4.48:

$$U_q = I_a \cdot R_i + U_a.$$

Der Spannungsabfall U_a am nichtlinearen Widerstand R_a wird durch das gegebene Verhalten zwischen Strom I_a und Spannung U_a ersetzt.

$$U_q = I_a \cdot R_i + \text{k} \cdot I_a^2$$

Durch Umstellen wird die quadratische Gleichung für den Strom ersichtlich.

$$I_a^2 + \frac{R_i}{\text{k}} \cdot I_a - \frac{U_q}{\text{k}} = 0$$

$$I_{a1,2} = \frac{-\frac{R_i}{\text{k}} \pm \sqrt{\left(-\frac{R_i}{\text{k}}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{U_q}{\text{k}}\right)}}{2}; \quad I_{a1,2} = -\frac{R_i}{2 \cdot \text{k}} \pm \sqrt{\left(\frac{R_i}{2 \cdot \text{k}}\right)^2 + \frac{U_q}{\text{k}}}$$

$$I_{a1,2} = \frac{-50\,\Omega\,\text{A}}{2 \cdot 312{,}5\,\Omega} \pm \sqrt{\left(\frac{50\,\Omega\,\text{A}}{2 \cdot 312{,}5\,\Omega}\right)^2 + \frac{6\,\text{VAA}}{312{,}5\,\text{V}}}; \quad \underline{\underline{I_{a1} = 0{,}08\,\text{A}}}$$

$I_{a2} = -0{,}24\,\text{A}$ stimmt nicht mit dem Erzeugerzählpfeilsystem überein und entfällt.
Mit dem Stromwert I_{a1} folgt aus dem nichtlinearen Zusammenhang zwischen Spannung und Strom:

$$U_a = \text{k} \cdot I_a^2 = 312{,}5\,\frac{\Omega}{\text{A}} \cdot (0{,}08\,\text{A})^2 = \underline{\underline{2{,}0\,\text{V}}}$$

4.4 Kurzschlussstrom

Aufgabe 4.28
Was versteht man unter einem Kurzschlussstrom?

Lösung
Kurzschluss bedeutet, die Anschlussklemmen einer Quelle sind unendlich gut leitend miteinander verbunden. Der Lastwiderstand ist null: $R_L = 0\,\Omega$. Somit ist nach dem ohmschen Gesetz $U_K = R_L \cdot I_K = 0 \cdot I_K = 0\,\text{V}$ die Spannung zwischen den beiden Klemmen null. Dies gilt unabhängig vom Strom I_K (Kurzschlussstrom), der durch die Klemmen fließt. Eine *ideale* Spannungsquelle besitzt den Innenwiderstand $R_i = 0$, der Kurzschlussstrom würde somit unendlich groß werden. Eine *reale* Spannungsquelle hat einen Innenwiderstand $R_i > 0$, der Kurzschlussstrom ist dann $I_K = U_0/R_i$.

I_K = Kurzschlussstrom, U_0 = Quellenspannung, R_i = Innenwiderstand der Spannungsquelle

Aufgabe 4.29
Welchen Strom I_K würde ein Bleiakkumulator mit der Leerlaufspannung $U_L = 4\,\text{V}$ und dem Innenwiderstand $R_i = 0{,}05\,\Omega$ bei vollständigem (idealen) Kurzschluss liefern?

Lösung
$I_K = \frac{U_L}{R_i} = \frac{4\,\text{V}}{0{,}05\,\Omega} = \underline{\underline{80\,\text{A}}}$

Aufgabe 4.30
Berechnen Sie in der Schaltung nach Abb. 4.49 den Innenwiderstand R_i, die Leerlaufspannung U_{AB0} und den Kurzschlussstrom I_{ABK} bezüglich der Klemmen A und B. Wie groß ist der Strom I_L?

Gegeben: $R_1 = 50\,\Omega$, $R_2 = 40\,\Omega$, $R_3 = 60\,\Omega$, $R_L = 70\,\Omega$, $U_1 = 10{,}0\,\text{V}$, $U_2 = 5{,}0\,\text{V}$

Lösung
Zur Bestimmung von R_i werden die Spannungsquellen kurzgeschlossen. Der Widerstand, den man dann zwischen den Klemmen A und B „sieht“, ist R_i.

$$R_i = 50\,\Omega + 40\,\Omega + 60\,\Omega = \underline{\underline{150\,\Omega}}$$

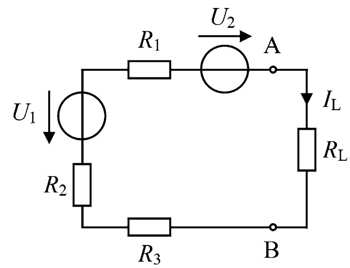


Abb. 4.49 Zu berechnende Schaltung

Die Leerlaufspannung bei nicht angeschlossenem R_L ist:

$$U_{AB0} = U_1 - U_2 = 10{,}0\,\text{V} - 5{,}0\,\text{V} = \underline{\underline{5{,}0\,\text{V}}}$$

Kurzschlussstrom:

$$I_{ABK} = \frac{U_{AB0}}{R_i} = \frac{5{,}0\,\text{V}}{150\,\Omega} = \underline{\underline{33{,}3\,\text{mA}}}$$

Strom durch R_L:

$$I_L = \frac{U_{AB0}}{R_i + R_L} = \frac{5{,}0\,\text{V}}{150\,\Omega + 70\,\Omega} = \underline{\underline{22{,}7\,\text{mA}}}$$

Aufgabe 4.31
Gegeben ist die Schaltung in Abb. 4.50 mit den Werten: $U_q = 12\,\text{V}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 3\,\Omega$, $R_4 = R_5 = 8\,\Omega$.

a) Berechnen Sie die Spannung U_{AB} zwischen den Klemmen A und B.
b) Die beiden Klemmen A und B werden jetzt kurzgeschlossen. Wie groß ist der Kurzschlussstrom I_{ABK}?
c) Bestimmen Sie die Quellenspannung U_0 und den Innenwiderstand R_i einer Ersatzspannungsquelle, die sich bezüglich der Klemmen A, B genauso verhält, wie die gegebene Schaltung.

Lösung
a) Spannungsteiler:

$$U_{AB} = U_q \cdot \frac{R_4 \| R_5}{R_2 + R_4 \| R_5 + R_3} = 12\,\text{V} \cdot \frac{4\,\Omega}{10\,\Omega} = \underline{\underline{4{,}8\,\text{V}}}$$

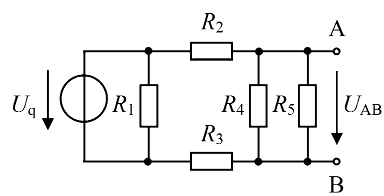


Abb. 4.50 Zur Berechnung des Kurzschlussstromes

R_1 geht nicht in das Ergebnis ein, weil er parallel zur idealen Spannungsquelle U_q liegt.

b) R_4 und R_5 werden durch den Kurzschluss ersetzt. Durch den Kurzschluss fließt der Strom, der auch durch R_2 und R_3 fließt.

$$I_{ABK} = \frac{U_q}{R_2 + R_3} = \frac{12\,\text{V}}{6\,\Omega} = \underline{\underline{2\,\text{A}}}$$

c) Zur Bestimmung von R_i wird U_q (und somit R_1) kurzgeschlossen. Der Widerstand zwischen den Klemmen A, B ist R_i.

$$R_i = (R_2 + R_3) \parallel (R_4 \| R_5) = 6\,\Omega \| 4\,\Omega = \underline{\underline{2{,}4\,\Omega}}$$

U_0 entspricht der Leerlaufspannung U_{AB}. $U_0 = U_{AB} = \underline{\underline{4{,}8\,\text{V}}}$

Aufgabe 4.32

An die Klemmen A und B der Schaltung in Abb. 4.51 ist ein nichtlinearer Lastwiderstand R_L mit einer I-U-Kennlinie nach Abb. 4.52 angeschlossen.

a) Wie groß ist der Kurzschlussstrom I_{ABK} zwischen den Klemmen A und B?
b) Bestimmen Sie grafisch mit Hilfe einer Ersatzspannungsquelle die Werte I_L und U_L der Schaltung im Arbeitspunkt AP.

Gegeben: $U_q = 150\,\text{V}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 18\,\text{k}\Omega$, $R_4 = 4\,\text{k}\Omega$.

Abb. 4.51 Schaltung mit nichtlinearem Lastwiderstand

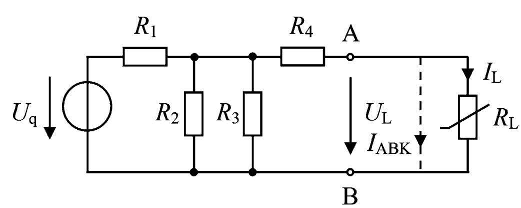
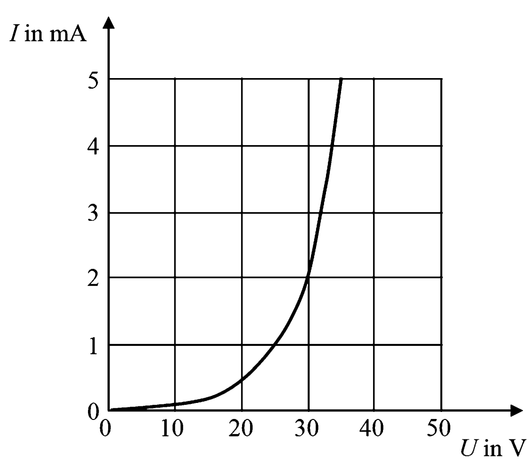


Abb. 4.52 Kennlinie des nichtlinearen Lastwiderstandes



Lösung

a) Der Kurzschlussstrom I_{ABK} fließt durch R_4. Die Spannung an R_4 ist:

$$U_{\mathrm{R4}} = U_{\mathrm{q}} \cdot \frac{R_2 \| R_3 \| R_4}{R_1 + R_2 \| R_3 \| R_4} = 150\,\mathrm{V} \cdot \frac{\frac{9 \cdot 4}{9+4}}{18 + \frac{9 \cdot 4}{9+4}} = 20\,\mathrm{V}.$$

$$I_{\mathrm{ABK}} = \frac{U_{\mathrm{R4}}}{R_4} = \frac{20\,\mathrm{V}}{4\,\mathrm{k\Omega}} = \underline{\underline{5\,\mathrm{mA}}}$$

b) Der Innenwiderstand der Ersatzspannungsquelle ist:

$$R_{\mathrm{i}} = R_4 + R_1 \| R_2 \| R_3 = 10\,\mathrm{k\Omega}.$$

Die Leerlaufspannung der Ersatzspannungsquelle ist:

$$U_0 = U_{\mathrm{q}} \cdot \frac{R_2 \| R_3}{R_1 + R_2 \| R_3} = 150\,\mathrm{V} \cdot \frac{9}{27} = 50\,\mathrm{V}.$$

Der Kurzschlussstrom der Ersatzspannungsquelle ist:

$$I_{\mathrm{K}} = \frac{U_0}{R_{\mathrm{i}}} = \frac{50\,\mathrm{V}}{10\,\mathrm{k\Omega}} = 5\,\mathrm{mA}.$$

Dieses Ergebnis muss natürlich mit dem Ergebnis der Teilaufgabe a) übereinstimmen. Die Kennlinie der Ersatzspannungsquelle ist durch die beiden Punkte (0; 5 mA) und (50 V; 0) festgelegt und wird in das Diagramm des nichtlinearen Lastwiderstandes als Gerade eingezeichnet. Der Schnittpunkt beider Kennlinien ist der Arbeitspunkt AP der Schaltung. In diesem Punkt kann auf der Abszisse $\underline{\underline{U_{\mathrm{L}} = 30\,\mathrm{V}}}$ und auf der Ordinate $\underline{\underline{I_{\mathrm{L}} = 2\,\mathrm{mA}}}$ abgelesen werden (Abb. 4.53).

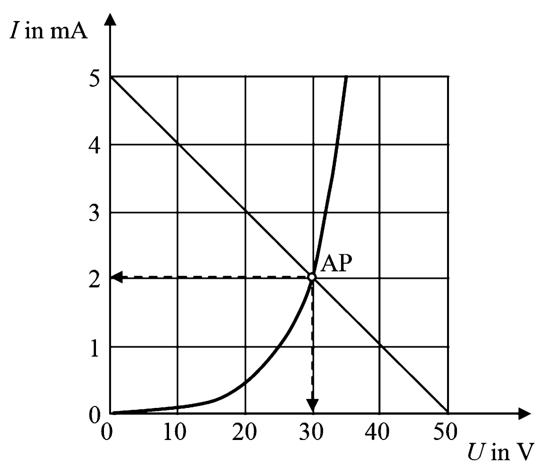


Abb. 4.53 Kennlinie der Ersatzspannungsquelle und grafische Bestimmung des Arbeitspunktes

4.5 Spannungs-, Strom-, Leistungsanpassung

Aufgabe 4.33

Was versteht man unter einer *Spannungsanpassung*? Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Innenwiderstand R_i der Spannungsquelle und dem Widerstand R_L des Verbrauchers bei Spannungsanpassung?

Lösung

Bei einer Spannungsanpassung soll ein Maximum der Spannung, die von einer Spannungsquelle abgegeben werden kann, zu einem Verbraucher übertragen werden. Damit Spannungsanpassung vorliegt, muss der Lastwiderstand R_L sehr viel größer als der Innenwiderstand R_i der Spannungsquelle sein: $\underline{\underline{R_L \gg R_i}}$. Anders gesagt: Der Innenwiderstand der Spannungsquelle muss sehr viel kleiner als der Widerstand des angeschlossenen Verbrauchers sein. Wegen des kleinen Innenwiderstandes bleibt der Spannungsabfall am Innenwiderstand der Quelle auch bei großen Lastströmen klein, die Spannung am Verbraucher bleibt auch bei Lastschwankungen fast konstant. Bei Spannungsanpassung arbeitet eine Schaltung im Leerlaufbereich der Spannungsquelle. Die Spannungsanpassung hat einen hohen Wirkungsgrad, da die Verlustleistung am Innenwiderstand null oder sehr klein ist. – Am Stromversorgungsnetz angeschlossene Geräte werden z. B. mit Spannungsanpassung betrieben. Auch die Spannungsversorgung elektronischer Schaltungen soll im Bereich der Spannungsanpassung arbeiten, da sonst bei Lastschwankungen die Versorgungsspannung unerlaubt klein werden kann.

Aufgabe 4.34

Was versteht man unter einer *Stromanpassung*? Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Innenwiderstand R_i der Spannungsquelle und dem Widerstand R_L des Verbrauchers bei Stromanpassung?

Lösung

Eine Spannungsquelle liefert den maximalen Strom, wenn der Lastwiderstand R_L sehr viel kleiner als der Innenwiderstand R_i der Spannungsquelle ist: $R_L \ll R_i$. Bei einer Stromanpassung ist der Lastwiderstand nur ein kleiner Teil des gesamten Widerstandes im Stromkreis. Der Strom durch die Last bleibt fast konstant, wenn sich der Lastwiderstand ändert. Man erhält einen *eingeprägten* Strom durch die Last, der unabhängig vom Lastwiderstand ist (wie bei einer Konstantstromquelle). Die Stromanpassung hat einen schlechten Wirkungsgrad. – Das Laden von Akkumulatoren erfolgt z. B. mit Stromanpassung (Konstantstrom). Stromanpassung wird auch in der Messtechnik verwendet, wenn die Messsignale von Widerstandsänderungen in der Übertragungsstrecke unabhängig sein sollen. Ein weiteres Anwendungsbeispiel ist die Stromsteuerung von Transistoren.

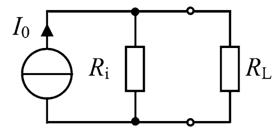


Abb. 4.54 Reale Stromquelle mit Lastwiderstand

Aufgabe 4.35

a) Was versteht man unter einer *Leistungsanpassung*?
b) Wie groß ist der Wirkungsgrad η bei der Leistungsanpassung?
c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Innenwiderstand R_i der Spannungsquelle und dem Widerstand R_L des Verbrauchers bei Leistungsanpassung?

Lösung

a) Bei Leistungsanpassung gibt die Spannungsquelle die maximal lieferbare Leistung an den Verbraucher ab. Lautsprecher werden z. B. unter Leistungsanpassung an Verstärkerausgänge angeschlossen. Eine Antenne wird unter Leistungsanpassung an den Eingang eines Empfängers angeschlossen.
b) $\underline{\underline{\eta = 0{,}5}}$ bzw. $\underline{\underline{\eta = 50\,\%}}$
c) Bei Leistungsanpassung ist $\underline{\underline{R_i = R_L}}$.

Aufgabe 4.36

An eine reale Stromquelle mit $I_0 = 2\,\text{A}$ und dem Innenwiderstand $R_i = 50\,\Omega$ ist ein Lastwiderstand R_L angeschlossen (Abb. 4.54).

Welchen Wert muss R_L haben, damit er die größtmögliche Leistung verbraucht? Wie groß ist dann diese Leistung?

Lösung

Die maximale Leistung wird von einer Quelle abgegeben, wenn die Werte von Lastwiderstand und Innenwiderstand der Quelle gleich sind. R_L muss also den Wert $R_L = 50\,\Omega$ haben. Der Strom I_{RL} durch R_L ist nach der Stromteilerregel gleich 1 A. Die maximale Leistung in R_L ist $P_{max} = I_{RL}^2 \cdot R_L = (1\,\text{A})^2 \cdot 50\,\Omega = \underline{\underline{50\,\text{W}}}$.

Aufgabe 4.37

Ein komplexer Lastwiderstand $\underline{Z}_L$ ist an eine Wechselspannungsquelle mit dem Effektivwert U_0 der Quellenspannung und dem komplexen Innenwiderstand $\underline{Z}_i$ angeschlossen. Beweisen Sie, dass $\underline{Z}_L$ konjugiert komplex zu $\underline{Z}_i$ sein muss, damit $\underline{Z}_L$ maximale Leistung aufnimmt (Leistungsanpassung). Wie groß ist diese maximale Leistung P_{max}?

Fertigen Sie eine Schaltplanskizze zu der Aufgabenstellung an.

Lösung

Die Schaltplanskizze zeigt Abb. 4.55.

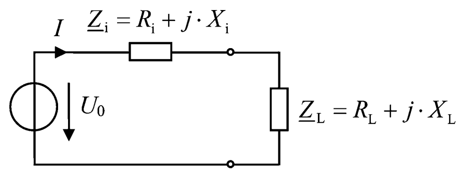


Abb. 4.55 Wechselspannungsquelle mit komplexem Innenwiderstand und komplexem Lastwiderstand

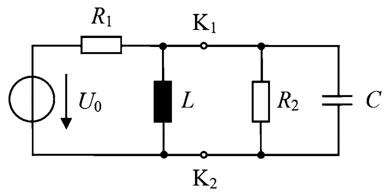


Abb. 4.56 Wechselspannungsquelle mit ohmsch-kapazitivem Verbraucher

Der Strom I ist $I = \frac{U_0}{Z_i + Z_L}$. Fließt durch einen Zweipol ein Strom mit dem Effektivwert I, so ist allgemein die Leistung (Wirkleistung) $P = I^2 \cdot R$. Damit folgt:

$$P = \frac{U_0^2}{|Z_i + Z_L|^2} R_L = \frac{U_0^2 \cdot R_L}{|R_i + R_L + j \cdot (X_i + X_L)\,|^2}$$

$$P = \frac{U_0^2 \cdot R_L}{\sqrt{(R_i + R_L)^2 + (X_i + X_L)^2}^{\,2}} = \frac{U_0^2 \cdot R_L}{(R_i + R_L)^2 + (X_i + X_L)^2}$$

Ein Bruch ist umso größer, je kleiner sein Nenner ist. Blindwiderstände X können positiv oder negativ sein. P wird also zunächst maximal, wenn gilt $\underline{\underline{X_L = -X_i}}$, da der Nenner dann nur noch aus dem Term $(R_i + R_L)^2$ besteht. Variiert man jetzt R_L, so ergibt sich ein Maximum für $\underline{\underline{R_L = R_i}}$. Der Lastwiderstand ist unter diesen Bedingungen konjugiert komplex zum Innenwiderstand. Die vom Lastwiderstand aufgenommene Leistung ist dann

$$\underline{\underline{P_{max} = \frac{U_0^2}{4 \cdot R_i}}}.$$

Aufgabe 4.38
Eine reale Wechselspannungsquelle mit den Ausgangsklemmen K_1 und K_2 speist einen ohmsch-kapazitiven Verbraucher (Abb. 4.56).

Gegeben: $U_0 = 230\,\text{V}$, $f = 50\,\text{Hz}$, $R_1 = 400\,\Omega$, $L = 1\,\text{H}$

Wie müssen R_2 und C gewählt werden, damit Leistungsanpassung besteht?

Lösung
Leistungsanpassung besteht immer dann, wenn die Impedanz $\underline{Z}_V$ (bzw. Admittanz $\underline{Y}_V$) des Verbrauchers identisch ist mit der konjugiert komplexen Innenimpedanz $\underline{Z}_{iQ}^*$ (bzw. Innenadmittanz $\underline{Y}_{iQ}^*$) der Quelle. Genau dann nimmt ein Verbraucher die maximale (Wirk-) Leistung auf. Es muss also gelten $\underline{Z}_V = \underline{Z}_{iQ}^*$ bzw. $\underline{Y}_V = \underline{Y}_{iQ}^*$.

► **Anmerkung** Komplexe Werte sind hier unterstrichen, konjugiert komplexe Werte durch „*“ gekennzeichnet.

Die Elemente des Verbrauchers sind im vorliegenden Fall parallel geschaltet. Wir bestimmen deshalb die Innenadmittanz $\underline{Y}^*_{\mathrm{iQ}}$ der Quelle.

$$\underline{Y}_{\mathrm{iQ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{j\omega L} = (2{,}5 - 3{,}18j)\ \mathrm{mS}.$$

Der konjugiert komplexe Wert hiervon ist

$$\underline{Y}^*_{\mathrm{iQ}} = (2{,}5 + 3{,}18j)\ \mathrm{mS}.$$

Die Admittanz des Verbrauchers ist $\underline{Y}_{\mathrm{V}} = \frac{1}{R_2} + j\omega C$. Gleichsetzen der Real- und Imaginärteile ergibt:

$$\frac{1}{R_2} = 2{,}5\,\mathrm{mS} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{R_2 = 400\,\Omega}}$$

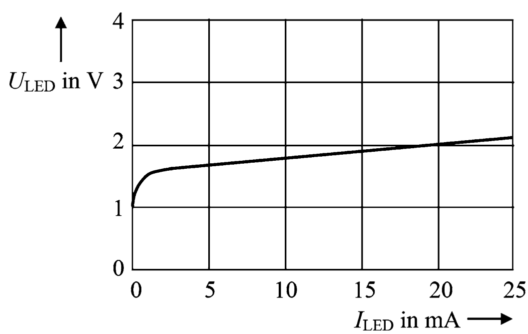
$$\omega C = 3{,}18\,\mathrm{mS}; \quad C = \frac{3{,}18\,\mathrm{mS}}{\omega}; \quad \underline{\underline{C = 10{,}1\,\mu\mathrm{F}}}$$

Bei Leistungsanpassung sind die Wirkanteile der Quelleninnenimpedanz und der Verbraucherimpedanz gleich groß.

Aufgabe 4.39
An einer Batterie werden zwei Messungen durchgeführt, die erste bei Leerlauf ergibt die Leerlaufspannung $U_0 = 3{,}6\,\mathrm{V}$, die zweite bei Kurzschluss den Kurzschlussstrom $I_{\mathrm{K}} = 8{,}5\,\mathrm{A}$.

a) Wie groß ist der Innenwiderstand R_{i} der Batterie?
b) Wie hoch ist die aus der Batterie maximal entnehmbare Leistung $P_{\max}$?
c) Die Batterie speist über einen Vorwiderstand $R_{\mathrm{V}} = 82\,\Omega$ eine LED in Durchlassrichtung. Die I-U-Kennlinie der LED ist gegeben (Abb. 4.57). Wie groß sind U_{LED} und I_{LED} an der LED?

Abb. 4.57 I-U-Kennlinie einer LED



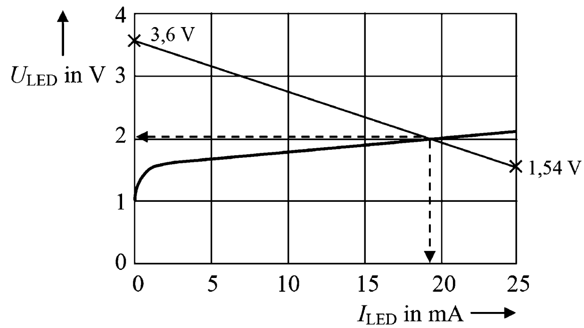


Abb. 4.58 Kennlinie mit Arbeitsgerade

Lösung

a) $R_i = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{U_0 - U_K}{I_K}$; $U_K = 0\,\text{V}$; $R_i = \frac{U_0}{I_K} = \frac{3{,}6\,\text{V}}{8{,}5\ \text{A}} = \underline{\underline{0{,}424\,\Omega}}$

b) Die Abgabe der Leistung einer realen Spannungsquelle mit der Leerlaufspannung U_0 und dem Innenwiderstand R_i an eine Last ist maximal, wenn der Lastwiderstand R_a gleich dem Innenwiderstand ist, wenn also gilt $R_a = R_i$ (Leistungsanpassung). Es folgt die Herleitung dieses Sachverhaltes.
Leistung an der Last: $P = U \cdot I$; $I = \frac{U_0}{R_i + R_a}$.
Spannung an der Last: $U = I \cdot R_a = U_0 \frac{R_a}{R_i + R_a}$ (entsprechend Spannungsteiler).
Somit ist $P = U_0^2 \cdot \frac{R_a}{(R_i + R_a)^2}$ mit U_0 und R_i als Konstante, R_a ist die Variable.
P ist also eine Funktion von R_a: $P = f(R_a)$.
Den Maximalwert von P erhält man durch Differenzieren des Ausdrucks für P und null setzen des Ergebnisses. Die Quotientenregel muss beachtet werden.

$$\frac{dP}{dR_a} = \frac{(R_i + R_a)^2 - 2 \cdot R_a \cdot (R_i + R_a)}{(R_i + R_a)^4} = 0$$

Der Zähler ist null für $R_a = R_i$.
Der Wirkungsgrad beträgt also bei Leistungsanpassung nur $\eta = 0{,}5$.
Mit $R_a = R_i \;\Rightarrow\; P_{max} = \frac{U_0^2}{4 \cdot R_i}$; $P_{max} = \frac{(3{,}6\,\text{V})^2}{4 \cdot 0{,}424\,\Omega} = \underline{\underline{7{,}64\,\text{W}}}$

c) Ist der Strom durch die LED gleich null ($I_{LED} = 0$), so erhält man für die Spannung an der LED: $U_{LED} = 3{,}6\,\text{V}$ (die Leerlaufspannung). Für $I_{LED} = 25\,\text{mA}$ (aus der Kennlinie entnommen) ergibt sich für die Spannung an der LED:

$$U_{LED} = U_0 - (R_i + R_V) \cdot I_{LED} = 1{,}54\,\text{V}.$$

Beide Punkte (0 mA; 3,6 V) und (25 mA; 1,54 V) werden in die Kennlinie eingetragen (Abb. 4.58). Die Verbindung der Punkte ergibt die Arbeitsgerade. Ausgehend vom Arbeitspunkt (Schnittpunkt der Arbeitsgeraden mit der Kennlinie) wird auf den Koordinatenachsen abgelesen: $\underline{\underline{U_{LED} \approx 2\,\text{V}}}$; $\underline{\underline{I_{LED} \approx 19\,\text{mA}}}$.

Berechnungen im unverzweigten Gleichstromkreis

5

Zusammenfassung

Es werden die Methoden und Gesetze zur Berechnung der Reihenschaltung von Widerständen, Kondensatoren, Induktivitäten sowie Spannungs- und Stromquellen aufgezeigt. Besondere Bedingungen, die vorliegen müssen, werden angegeben. Die komplexe Rechnung wird hier zum ersten Mal angewandt.

5.1 Grundwissen – kurz und bündig

- Bei einer Reihenschaltung von Zweipolen ist die Stromstärke an jeder Stelle des Stromkreises gleich groß. Die Reihenfolge von Bauelementen ist vertauschbar.
- Bei einer Reihenschaltung von Zweipolen addieren sich die Teilspannungen an den Zweipolen zur Gesamtspannung, die an der Reihenschaltung liegt.
- Der Ersatzwiderstand einer Reihenschaltung von ohmschen Widerständen ist:

$$R_{\mathrm{ges}} = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_{\mathrm{n}}.$$

  R_{ges} ist stets größer als der größte Wert der einzelnen Widerstände. Am Widerstand mit dem größten Wert ist der größte Spannungsabfall, er wird am stärksten belastet.
- Die Ersatzkapazität einer Reihenschaltung von Kondensatoren ist:

$$C_{\mathrm{ges}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_{\mathrm{n}}}}.$$

  C_{ges} ist stets kleiner als der kleinste Kapazitätswert der Reihenschaltung. An kleinen Kapazitäten liegen hohe Spannungen an und umgekehrt.
- Für die Reihenschaltung von zwei Kondensatoren gilt: $C_{\mathrm{ges}} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$.

L. Stiny, *Aufgabensammlung zur Elektrotechnik und Elektronik*,
DOI 10.1007/978-3-658-14381-7_5

- Die Gesamtinduktivität einer Reihenschaltung magnetisch nicht gekoppelter Spulen ist:
$$L_{ges} = L_1 + L_2 + \ldots + L_n.$$
- Die Gesamtspannung von gleichsinnig (Pluspol und Minuspol wechseln sich ab) in Reihe geschalteten Gleichspannungen ist:
$$U_{ges} = U_1 + U_2 + \ldots + U_n.$$
- Ein Bauteil kann durch eine Reihenschaltung von Bauteilen ersetzt werden. Zu beachten sind Toleranzen und Belastbarkeit der einzelnen Bauteile.
- Mit einem Vorwiderstand kann ein Verbraucher an eine höhere Spannung als seine Nennspannung angeschlossen werden. Im Vorwiderstand entsteht Verlustleistung.

5.2 Reihenschaltung von ohmschen Widerständen

Aufgabe 5.1
Es wird der Ersatzwiderstand R_{ges} von drei in Reihe geschalteten Widerständen $R_1 = 4{,}7\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 10\,\mathrm{k\Omega}$ und $R_3 = 47\,\mathrm{k\Omega}$ berechnet. Das Ergebnis ist $R_{ges} = 33\,\mathrm{k\Omega}$. Kann dieses Ergebnis stimmen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung
Das Ergebnis $R_{ges} = 33\,\mathrm{k\Omega}$ ist kleiner als der größte der drei Widerstände $R_3 = 47\,\mathrm{k\Omega}$ und ist somit falsch. Bei einer Reihenschaltung von ohmschen Widerständen ist der Ersatzwiderstand stets größer als der größte der Einzelwiderstände.

Aufgabe 5.2
Zwei ohmsche Widerstände $R_1 = 10\,\mathrm{k\Omega}$ und $R_2 = 4{,}7\,\mathrm{k\Omega}$ sind in Reihe geschaltet. Wie groß ist der Gesamtwiderstand R_{ges}?

Lösung
$R_{ges} = R_1 + R_2 = \underline{\underline{14{,}7\,\mathrm{k\Omega}}}$

Aufgabe 5.3
Berechnen Sie allgemein (als Formel) in Abb. 5.1 die Spannung U_{R1} in Abhängigkeit von U_q und den Widerständen.

Lösung
Es wird die Spannungsteilerregel verwendet.

$$U_{R1} = U_q \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2 \parallel R_3} = U_q \cdot \frac{R_1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \underline{\underline{U_q \cdot \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3}}}$$

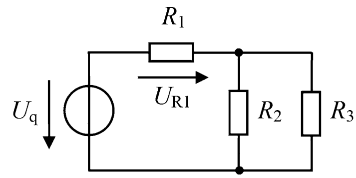


Abb. 5.1 Eine Reihenschaltung von ohmschen Widerständen

5.3 Reihenschaltung von Kondensatoren

Aufgabe 5.4
Es wird die Ersatzkapazität C_{ges} von drei in Reihe geschalteten Kondensatoren $C_1 = 10\,\mu F$, $C_2 = 33\,\mu F$ und $C_3 = 47\,\mu F$ berechnet. Das Ergebnis ist $C_{ges} = 14\,\mu F$. Kann dieses Ergebnis stimmen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung
Das Ergebnis $C_{ges} = 14\,\mu F$ ist größer als der kleinste Kapazitätswert $C_1 = 10\,\mu F$ und ist somit falsch. Bei einer Reihenschaltung von Kondensatoren ist die Ersatzkapazität stets kleiner als der kleinste Wert der Einzelkapazitäten.

Aufgabe 5.5
Zwei Kondensatoren $C_1 = C_2 = 100\,\mu F$ sind in Reihe geschaltet. Wie groß ist die Ersatzkapazität C_{ges}?

Lösung
Werden zwei gleich große Kondensatoren in Reihe geschaltet, so erhält man den halben Kapazitätswert. Dies sollte man auswendig wissen!

$$\underline{\underline{C_{ges} = 50\,\mu F}}$$

Aufgabe 5.6
Wie groß ist die Gesamtkapazität der in Abb. 5.2 dargestellten Schaltung?

Lösung
C_1 und C_2 sind gleich groß. Durch die Reihenschaltung ergibt sich für die Ersatzkapazität der halbe Kapazitätswert von $20\,\mu F$. Diese Ersatzkapazität in Reihe mit C_3 gibt $\underline{\underline{C_{ges} = 10\,\mu F}}$.

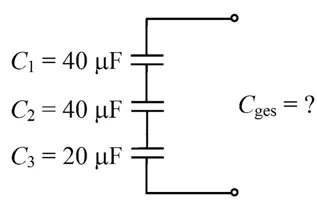


Abb. 5.2 Reihenschaltung von drei Kondensatoren

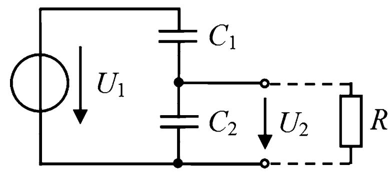


Abb. 5.3 Kapazitiver Spannungsteiler

Aufgabe 5.7
Zwei Kondensatoren $C_1 = 4{,}7\,\mu\text{F}$ und $C_2 = 10\,\mu\text{F}$ sind in Reihe geschaltet. Wie groß ist die Ersatzkapazität C_{ges}?

Lösung

$$C_{\text{ges}} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{4{,}7 \cdot 10}{4{,}7 + 10}\,\mu\text{F} = \underline{\underline{3{,}2\,\mu\text{F}}}$$

Die Formel zur Berechnung der Kapazität von zwei in Reihe geschalteten Kondensatoren ist formal der Formel für die Parallelschaltung von zwei ohmschen Widerständen ähnlich.

Aufgabe 5.8
In dieser Aufgabe wird der unverzweigte Gleichstromkreis auf den *Wechselstromkreis* erweitert.

Ein kapazitiver Spannungsteiler (Abb. 5.3) mit den Kapazitäten $C_1 = 100\,\text{nF}$ und $C_2 = 900\,\text{nF}$ liegt an der sinusförmigen Eingangsspannung $U_1 = 100\,\text{V}$, $f = 50\,\text{Hz}$. Anders ausgedrückt: Die Zeitfunktion der Eingangsspannung ist $u_1(t) = \sqrt{2} \cdot U_1 \cdot \sin(\omega t)$ mit $U_1 = 100\,\text{V}$, $\omega = 2\pi \cdot 50\,\text{s}^{-1}$.

a) Wie groß ist die Ausgangsspannung U_2 des unbelasteten Spannungsteilers?
b) Um wie viel Prozent sinkt die Ausgangsspannung U_2, wenn parallel zu C_2 der ohmsche Lastwiderstand $R = 10\,\text{k}\Omega$ geschaltet wird?

Lösung
U_1 und U_2 sind Effektivwerte, $\underline{U}_1$ und $\underline{U}_2$ sind komplexe Effektivwerte.

a) Mit der Spannungsteilerformel erhält man mit komplexen Größen:

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C_2}}{\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2}} = \underline{U}_1 \cdot \frac{j\omega C_1}{j\omega C_1 + j\omega C_2} = \underline{U}_1 \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

Die Rechnung mit den Beträgen ($U_1 = |\underline{U}_1|$ und $U_2 = |\underline{U}_2|$) ergibt:

$$U_2 = U_1 \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2} = 100\,\text{V} \cdot \frac{100\,\text{nF}}{100\,\text{nF} + 900\,\text{nF}} = \underline{\underline{10\,\text{V}}}$$

b) Die Impedanz der Parallelschaltung aus C_2 und R ist:

$$\underline{Z}_2 = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C_2}}{R + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{R}{1 + j\omega RC_2}$$

Mit $\underline{Z}_1 = \frac{1}{j\omega C_1}$ ist die komplexe Ausgangsspannung des belasteten Spannungsteilers:

$$\underline{U}_{2\mathrm{L}} = \underline{U}_1 \cdot \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

Die Übertragungsfunktion ist:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_{2\mathrm{L}}}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{R}{1+j\omega RC_2}}{\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{R}{1+j\omega RC_2}} = \frac{\frac{R}{1+j\omega RC_2}}{\frac{1+j\omega RC_2+j\omega RC_1}{j\omega C_1\cdot(1+j\omega RC_2)}} = \frac{j\omega RC_1}{j\omega RC_1 + 1 + j\omega RC_2}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\omega RC_1}{1 + j\omega R(C_1 + C_2)}$$

Der Betrag der Übertragungsfunktion ist:

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{\omega RC_1}{\sqrt{1 + [\omega R(C_1 + C_2)]^2}}$$

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{2\pi \cdot 50 \cdot 10^4 \cdot 10^{-7}}{\sqrt{1 + (2\pi \cdot 50 \cdot 10^4 \cdot 10^{-6})^2}} = \frac{0{,}1 \cdot \pi}{\sqrt{1 + \pi^2}} = 9{,}529 \cdot 10^{-2}$$

Der Betrag der Ausgangsspannung des belasteten Spannungsteilers ist:

$$|\underline{U}_{2\mathrm{L}}| = |\underline{U}_1| \cdot |\underline{H}(j\omega)| = 100\,\mathrm{V} \cdot 0{,}0953 = 9{,}53\,\mathrm{V}$$

$$10\,\mathrm{V} \mathrel{\widehat{=}} 100\,\%; \quad 10\,\mathrm{V} - 9{,}53\,\mathrm{V} \mathrel{\widehat{=}} x\,\%; \quad x = \frac{0{,}47 \cdot 100}{10}\,\% = \underline{\underline{4{,}7\,\%}}$$

Die Ausgangsspannung sinkt um 4,7 %.

5.4 Reihenschaltung von Spulen

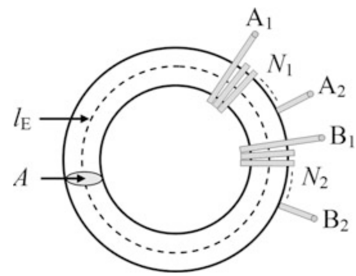
Aufgabe 5.9

Zwei magnetisch nicht gekoppelte Spulen (die Magnetfelder beeinflussen sich gegenseitig nicht) mit den Induktivitäten $L_1 = 2\,\mu\mathrm{H}$ und $L_2 = 5\,\mu\mathrm{H}$ werden in Reihe geschaltet. Wie groß ist die Gesamtinduktivität L_{ges}?

Lösung

$L_{\mathrm{ges}} = L_1 + L_2 = \underline{\underline{7\,\mu\mathrm{H}}}$

Abb. 5.4 Eisenkern mit zwei Erregerwicklungen



Aufgabe 5.10
Gegeben ist ein ringförmiger Eisenkern mit zwei gleichen Erregerwicklungen (die Windungszahlen sind gleich, $N_1 = N_2$) (Abb. 5.4). Der magnetische Fluss ist über den Querschnitt A homogen verteilt. Die Streuung wird vernachlässigt. Die Permeabilität des Eisens ist konstant.

Die beiden Wicklungen werden auf zwei verschiedene Arten in Reihe geschaltet:

a) Gleichsinniger Wicklungssinn, A_2 wird mit B_1 verbunden,
b) gegensinniger Wicklungssinn, A_2 wird mit B_2 verbunden.

Wie groß ist jeweils die Gesamtinduktivität L_{ges} der beiden Reihenschaltungen der Spulen zwischen den Anschlussklemmen A_1 und B_2 im Fall a und A_1 und B_1 im Fall b?

Lösung
Die Induktivität einer Spule ist $L = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{A \cdot N^2}{l}$. Im Fall a werden die magnetisch gekoppelten Spulen gleichsinnig in Reihe geschaltet, die magnetischen Flüsse addieren sich. Die Gesamtinduktivität ist:

$$L_{ges} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{A \cdot (N_1 + N_2)^2}{l} = \underline{\underline{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot 4 \cdot N_1^2 \frac{A}{l}}}.$$

Im Fall b ist die Reihenschaltung der Spulen gegensinnig. Die beiden gleich großen magnetischen Flüsse sind einander entgegengerichtet und heben sich auf. Die Gesamtinduktivität ist somit null.

$$L_{ges} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{A \cdot (N_1 - N_2)^2}{l} = \underline{\underline{0}}$$

5.5 Reihenschaltung von Spannungs- und Stromquellen

Aufgabe 5.11
Drei Gleichspannungsquellen sind entsprechend Abb. 5.5 in Reihe geschaltet. Wie groß ist die Spannung U_{AB} zwischen den Klemmen A und B?

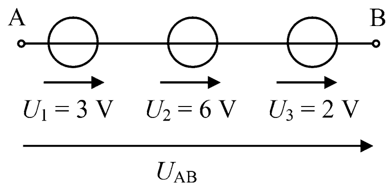


Abb. 5.5 In Reihe geschaltete Gleichspannungsquellen

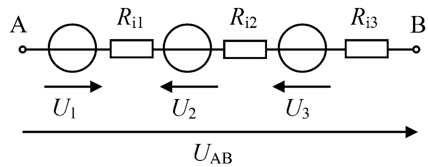


Abb. 5.6 In Reihe geschaltete Gleichspannungsquellen mit Innenwiderständen

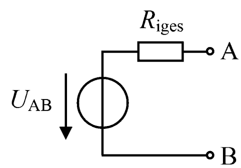


Abb. 5.7 Ersatzspannungsquelle mit Innenwiderstand

Lösung

$U_{AB} = U_1 + U_2 + U_3 = \underline{\underline{11\,\text{V}}}$

Aufgabe 5.12

Drei Gleichspannungsquellen mit Innenwiderständen sind entsprechend Abb. 5.6 in Reihe geschaltet. Wie groß ist die Spannung U_{AB} zwischen den Klemmen A und B? Welchen Wert hat der Innenwiderstand R_{iges} der resultierenden Ersatzspannungsquelle zwischen den Klemmen A und B? Geben Sie das Schaltbild der Ersatzspannungsquelle an.

Gegeben: $U_1 = 7\,\text{V}$, $U_2 = 5\,\text{V}$, $U_3 = 4\,\text{V}$, $R_{i1} = 3\,\Omega$, $R_{i2} = 0{,}5\,\Omega$, $R_{i3} = 1{,}5\,\Omega$

Lösung

$$U_{AB} = U_1 - U_2 - U_3 = 7\,\text{V} - 5\,\text{V} - 4\,\text{V} = \underline{\underline{-2\,\text{V}}}$$

Die Klemme A ist negativ gegenüber Klemme B. Wird der Zählpfeil der Spannung umgedreht, so ist $U_{BA} = 2\,\text{V}$.

Die Innenwiderstände sind in Reihe geschaltet und addieren sich.

$$R_{iges} = 3\,\Omega + 0{,}5\,\Omega + 1{,}5\,\Omega = \underline{\underline{5\,\Omega}}$$

Die Ersatzspannungsquelle mit Innenwiderstand zeigt Abb. 5.7.

Aufgabe 5.13

Zwei Gleichstromquellen mit Innenwiderständen sind entsprechend Abb. 5.8 in Reihe geschaltet. Geben Sie die Ersatzschaltung mit einer einzigen Stromquelle an.

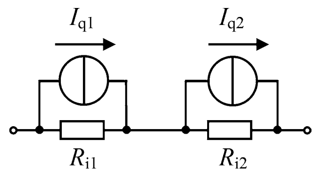


Abb. 5.8 In Reihe geschaltete Gleichstromquellen mit Innenwiderständen

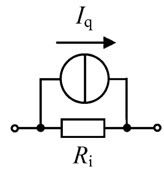


Abb. 5.9 Schaltung mit nur einer Stromquelle

Lösung

Zunächst werden beide Stromquellen in Spannungsquellen umgewandelt (siehe auch Abschn. 8.10, Umwandlung von Quellen).

$$U_{q1} = I_{q1} \cdot R_{i1}; \quad U_{q2} = I_{q2} \cdot R_{i2}$$

Jetzt wird die Reihenschaltung der Spannungsquellen berechnet.

$$U_q = U_{q1} + U_{q2}; \quad R_i = R_{i1} + R_{i2}$$

Die Ersatzschaltung mit einer Spannungsquelle wird schließlich in eine Stromquelle umgewandelt.

$$I_q = \frac{U_q}{R_i} = \frac{U_{q1} + U_{q2}}{R_{i1} + R_{i2}}; \quad I_q = \underline{\underline{\frac{I_{q1} \cdot R_{i1} + I_{q2} \cdot R_{i2}}{R_{i1} + R_{i2}}}}; \quad \underline{\underline{R_i = R_{i1} + R_{i2}}}$$

Die Ersatzschaltung mit einer einzigen Stromquelle zeigt Abb. 5.9.

Aufgabe 5.14

Was ist in der Praxis bei der Reihenschaltung von Spannungs- und Stromquellen zu beachten?

Lösung

Spannungsquellen können problemlos in Reihe geschaltet werden, z. B. zur Versorgung einer elektronischen Schaltung mit einer bipolaren Betriebsspannung (z. B. ± 12 V) oder bei der Reihenschaltung mehrerer Batterien, um eine bestimmte Höhe der Betriebsspannung zu erreichen. – Stromquellen dagegen sollten nicht in Reihe geschaltet werden. Wegen des sehr hohen, aber oft unbekannten bzw. unterschiedlichen Innenwiderstandes ist die Spannungsaufteilung auf die Quellen nicht bekannt bzw. unterschiedlich. Eine der in Reihe geschalteten Stromquellen kann daher spannungsmäßig überlastet werden.

Messung von Spannung und Strom

6

Zusammenfassung

Verschiedene Arten von Spannungs- und Strommessern werden vorgestellt und ihre Eignung zur Messung bestimmter Größen diskutiert. Die Anwendung der Messgeräte beim Messvorgang, Genauigkeitsgrenzen und Messfehler sind auf die Praxis der Messtechnik ausgerichtet. Die Erweiterung des Messbereiches von Spannungsmessern mit der Berechnung dazu nötiger Widerstände ergibt eine Ausweitung der Einsetzbarkeit von Messwerken. Die indirekte Messung von Widerstand und Leistung mit den Möglichkeiten der Spannungsfehler- und der Stromfehlerschaltung sowie das Beispiel der Wheatstone-Brücke ergänzen dieses Kapitel.

6.1 Grundwissen – kurz und bündig

- Der anzeigende, bei analogen Instrumenten oft drehbar gelagerte Teil eines Messinstruments wird Mess*werk* genannt.
- Ein Mess*instrument* besteht aus einem Gehäuse mit einer digitalen Anzeige oder einer Skala mit Zeiger und evtl. eingebautem Widerstand.
- Als *Messgerät* wird das gesamte Betriebsmittel aus Messinstrument und zusätzlicher Beschaltung, z. B. Widerstände, Sicherung, Schalter, bezeichnet.
- Ein Dreh*spul*messwerk nutzt die Kraftwirkung aus, die ein stromdurchflossener Leiter in einem Magnetfeld erfährt.
- Für Wechselspannung bzw. Wechselstrom eignen sich Drehspulmesswerke ohne Gleichrichter nicht.
- Dreh*eisen*messwerke sind für die Messung von Gleich- und Wechselspannung geeignet.
- Analoginstrumente haben eine Strichskala und einen Zeiger. Digitale Messgeräte besitzen eine Ziffernanzeige zum Ablesen des Messwertes.

L. Stiny, *Aufgabensammlung zur Elektrotechnik und Elektronik*,
DOI 10.1007/978-3-658-14381-7_6

- Ein Spannungsmesser (Voltmeter) wird mit zwei Leitungen an den beiden Punkten angeschlossen, zwischen denen die zu messende Spannung liegt. Der Stromkreis wird für die Messung nicht aufgetrennt.
- Der Innenwiderstand eines Voltmeters soll möglichst groß sein (ideal unendlich groß).
- Ein Strommesser (Amperemeter) wird mit zwei Leitungen in den Stromkreis eingeschleift, in dem die Stromstärke gemessen werden soll. Der Stromkreis muss für die Messung aufgetrennt werden.
- Der Innenwiderstand eines Amperemeters soll möglichst klein sein (ideal null).
- Den Innenwiderstand in kΩ pro Volt (kΩ/V) nennt man *Kennwiderstand* eines Messwerks.
- Die Stromfehlerschaltung eignet sich für kleine Widerstandswerte. Die Spannungsfehlerschaltung eignet sich für große Widerstandswerte.
- Bei der indirekten Messung eines Widerstandes wird die Stromfehlerschaltung verwendet, wenn das Geometrische Mittel $R_M = \sqrt{R_{iU} \cdot R_{iI}}$ der Innenwiderstände R_{iU} des Spannungsmessers und R_{iI} des Strommessers kleiner als der Wert des zu messenden Widerstandes ist. Ist der geometrische Mittelwert größer als der Widerstandswert, so wird die Spannungsfehlerschaltung verwendet.
- Wichtige Formeln:
  R_V = Vorwiderstand; U_M = Messbereich; U_{mess} = erweiterter Messbereich; R_i = Innenwiderstand Spannungsmesser
  Der Vorwiderstand R_V bei Spannungsmessung für $U_{mess} = x \cdot U_M$ ist $R_V = (x-1) \cdot R_i$ oder
  $$R_V = \frac{U_{mess} - U_M}{U_M} \cdot R_i.$$

6.2 Voltmeter und Amperemeter

Aufgabe 6.1
Warum eignet sich ein Drehspulmesswerk nicht zur Messung von sinusförmigem Wechselstrom?

Lösung
Wird die Drehspule von Wechselstrom durchflossen, so ändert sich ständig die Stromrichtung. Dadurch ändert sich ständig die Kraftwirkung des Magnetfeldes, die Drehmomentrichtung wird immer wieder umgekehrt. Der Zeiger pendelt dauernd hin und her bzw. stellt sich (bei höherer Frequenz) durch die Trägheit seiner Masse in einer Mittellage ein.

Bei einer Mischspannung zeigt ein Drehspulmesswerk den arithmetischen Mittelwert U_{av} (= Gleichanteil) an:

$$U_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T U(t)dt.$$

Aufgabe 6.2
Soll der Innenwiderstand eines Amperemeters möglichst groß oder möglichst klein sein? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung
Bei einer Strommessung wird das Amperemeter in den Stromkreis eingeschleift. Der Spannungsabfall am Innenwiderstand des Amperemeters soll den Stromkreis möglichst wenig beeinflussen, also möglichst klein sein. Der Spannungsabfall am Innenwiderstand ist umso kleiner, je kleiner der Innenwiderstand ist. Der Innenwiderstand eines Amperemeters soll somit möglichst klein sein.

Aufgabe 6.3
Ein Voltmeter mit dem Skalenendwert (Vollausschlag) 30,0 Volt zeigt einen Spannungswert von 16,6 V an. Auf der Skala ist als Genauigkeitsklasse aufgedruckt: $\underline{1{,}5}$. Die Genauigkeitsklasse gibt die Fehlergrenzen in Prozent des Messbereichendwertes an.

a) Berechnen Sie die Fehlergrenzen.
b) Zwischen welchen Grenzen kann die gemessene Spannung von 16,6 V liegen?

Lösung
a) Fehlergrenzen: $\Delta U = \pm 0{,}015 \cdot 30\,\text{V} = \underline{\underline{\pm 0{,}45\,\text{V}}}$
b) $U_{\text{max}} = U + \Delta U = 16{,}6\,\text{V} + 0{,}45\,\text{V} = \underline{\underline{17{,}05\,\text{V}}}$
$U_{\text{min}} = U - \Delta U = 16{,}6\,\text{V} - 0{,}45\,\text{V} = \underline{\underline{16{,}15\,\text{V}}}$

Aufgabe 6.4
Mit einem Messinstrument der Klasse 1,5 (±1,5 % Fehler bezogen auf den Messbereichendwert) und einem Messbereichendwert von 100 V wird eine Spannung von 20 V und eine Spannung von 80 V gemessen. Wie groß sind jeweils der relative Fehler in Prozent und der absolute Fehler in Volt?

Lösung
Relativer Fehler bei 20 V: $\pm 1{,}5\,\% \cdot \frac{100\,\text{V}}{20\,\text{V}} = \underline{\underline{\pm 7{,}5\,\%}}$
Absoluter Fehler bei 20 V:

$$U_{\text{max}} = 20\,\text{V} \cdot 1{,}075 = \underline{\underline{21{,}5\,\text{V}}}; \quad U_{\text{min}} = 20\,\text{V} \cdot (1 - 0{,}075) = \underline{\underline{18{,}5\,\text{V}}}$$

Relativer Fehler bei 80 V: $\pm 1{,}5\,\% \cdot \frac{100\,\text{V}}{80\,\text{V}} = \underline{\underline{\pm 1{,}875\,\%}}$
Absoluter Fehler bei 80 V:

$$U_{\text{max}} = 80\,\text{V} \cdot 1{,}01875 = \underline{\underline{81{,}5\,\text{V}}}; \quad U_{\text{min}} = 80\,\text{V} \cdot (1 - 0{,}01875) = \underline{\underline{78{,}5\,\text{V}}}$$

Alternative Lösung

Fehlergrenzen: $\Delta U = \pm 0{,}015 \cdot 100\,\text{V} = \underline{\underline{\pm 1{,}5\,\text{V}}}$

Absoluter Fehler bei 20 V: $U_{\max,\min} = 20\,\text{V} \pm 1{,}5\,\text{V} = \begin{cases} \underline{\underline{21{,}5\,\text{V}}} \\ \underline{\underline{18{,}5\,\text{V}}} \end{cases}$

Absoluter Fehler bei 80 V: $U_{\max,\min} = 80\,\text{V} \pm 1{,}5\,\text{V} = \begin{cases} \underline{\underline{81{,}5\,\text{V}}} \\ \underline{\underline{78{,}5\,\text{V}}} \end{cases}$

Aufgabe 6.5

Ein Spannungsmesser mit einem Vollausschlag von 10 V hat einen Innenwiderstand von $R_\text{i} = 500\,\text{k}\Omega$. Wie groß ist der Kennwiderstand R_K?

Lösung

$$R_\text{K} = \frac{R_\text{i}}{U} = \frac{500\,\text{k}\Omega}{10\,\text{V}} = \underline{\underline{50\,\frac{\text{k}\Omega}{\text{V}}}}$$

Aufgabe 6.6

Ein Spannungsmesser mit dem Kennwiderstand $R_\text{K} = 10\,\frac{\text{k}\Omega}{\text{V}}$ befindet sich im Messbereich bis 100 V. Wie groß ist der Innenwiderstand R_i in diesem Messbereich?

Lösung

$$R_\text{i} = 10\,\frac{\text{k}\Omega}{\text{V}} \cdot 100\,\text{V} = \underline{\underline{1\,\text{M}\Omega}}$$

Aufgabe 6.7

Ein Spannungsmesser mit dem Kennwiderstand $R_\text{K} = 10\,\frac{\text{k}\Omega}{\text{V}}$ zeigt im 10 V-Messbereich eine Spannung von 6,0 V an. Wie groß ist der Strom I durch den Spannungsmesser?

Lösung

$$R_i = 10\,\frac{\text{k}\Omega}{\text{V}} \cdot 10\,\text{V} = 100\,\text{k}\Omega; \quad I = \frac{U}{R_i} = \frac{6{,}0\,\text{V}}{100\,\text{k}\Omega} = \underline{\underline{60\,\mu\text{A}}}$$

6.3 Erweiterung des Messbereiches

Aufgabe 6.8

Ein Spannungsmesser mit einem Messbereich bis 10 V hat den Innenwiderstand $R_\text{i} = 100\,\text{k}\Omega$. Der Messbereich soll mit einem Widerstand auf 100 V vergrößert werden. Wie muss der Widerstand geschaltet werden? Welchen Wert muss der Widerstand haben?

Lösung
Der Widerstand muss als Vorwiderstand in Reihe mit dem Spannungsmesser geschaltet werden. Der Messbereich soll auf das 10-fache erweitert werden. Aus $U_{\text{mess}} = x \cdot U_{\text{M}}$ folgt:

$$U_{\text{mess}} = 10 \cdot U_{\text{M}}.$$

Aus $R_{\text{V}} = (x - 1) \cdot R_{\text{i}}$ mit $x = 10$ folgt: $R_{\text{V}} = 9 \cdot 100\,\text{k}\Omega = \underline{\underline{900\,\text{k}\Omega}}$

Aufgabe 6.9
Ein Messinstrument mit Drehspulmesswerk hat einen Innenwiderstand von $500\,\Omega$ und einen Messbereich (Vollausschlag) von $100\,\text{mV}$. Der Messbereich ist auf einen Endwert von 6,0 Volt zu erweitern. Berechnen Sie den erforderlichen Vorwiderstand.

Lösung

$$R_{\text{V}} = \frac{U_{\text{mess}} - U_{\text{M}}}{U_{\text{M}}} \cdot R_{\text{i}}$$

mit R_{V} = Vorwiderstand, U_{M} = Messbereich, U_{mess} = erweiterter Messbereich, R_{i} = Innenwiderstand

$$R_{\text{V}} = \frac{6\,\text{V} - 100\,\text{mV}}{100\,\text{mV}} \cdot 500\,\Omega; \quad \underline{\underline{R_{\text{V}} = 29{,}5\,\text{k}\Omega}}$$

Aufgabe 6.10
Ein Voltmeter hat den Innenwiderstand $R_{\text{i}} = 10\,\text{k}\Omega$ und einen Vollausschlag von $I = 1\,\text{mA}$. Welcher Vorwiderstand R_{V} muss vorgesehen werden, um den Messbereich auf 50 Volt zu erweitern?

Lösung

$$R_{\text{V}} = \frac{U - R_{\text{i}} \cdot I}{I} = \frac{50\,\text{V} - 10\,\text{k}\Omega \cdot 1\,\text{mA}}{1\,\text{mA}} = \underline{\underline{40\,\text{k}\Omega}}$$

Aufgabe 6.11
Ein Spannungsmesser mit Drehspulmesswerk hat Vollausschlag bei einer Spannung von $U_{\text{M}} = 1\,\text{V}$, sein Innenwiderstand beträgt $R_{\text{i}} = 1000\,\Omega$. Wie groß ist der Innenwiderstand R_{i10}, nachdem der Messbereich durch einen Vorwiderstand auf $U_{\text{mess}} = 10\,\text{V}$ erweitert wurde?

Lösung
Der benötigte Vorwiderstand zur Messbereichserweiterung ist:

$$R_{\text{V}} = \frac{U_{\text{mess}} - U_{\text{M}}}{U_{\text{M}}} \cdot R_{\text{i}}$$

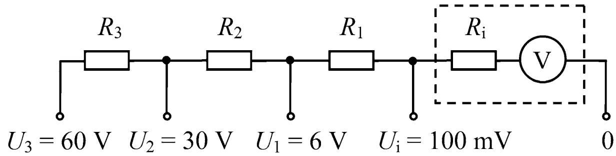


Abb. 6.1 Ein Spannungsmesser mit mehreren Messbereichen

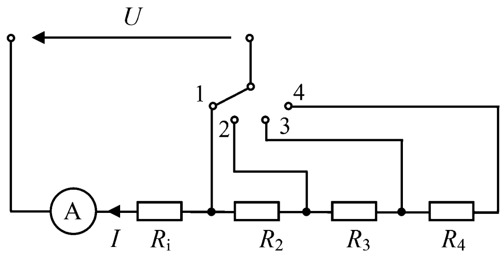


Abb. 6.2 Drehspulmessgerät wird zur Spannungsmessung erweitert

mit R_V = Vorwiderstand, U_M = Messbereich, U_{mess} = erweiterter Messbereich, R_i = Innenwiderstand

$$R_V = \frac{10\,\text{V} - 1\,\text{V}}{1\,\text{V}} \cdot 1000\,\Omega = 9\,\text{k}\Omega;$$

Vorwiderstand R_V und Innenwiderstand R_i des Voltmeters addieren sich. $\Rightarrow$ $\underline{\underline{R_{i10} = 10\,\text{k}\Omega}}$

Aufgabe 6.12

Ein Mehrbereich-Spannungsmesser hat ein Messwerk mit 100 mV. Der Innenwiderstand R_i beträgt 1000 Ω/V. Berechnen Sie die Widerstände R_i, R_1, R_2 und R_3 in Abb. 6.1.

Lösung

Der Strom durch das Messwerk ist $I_i = \frac{1\,\text{V}}{1000\,\Omega} = 1\,\text{mA}$.

$$R_i = U_i \cdot 1000\,\frac{\Omega}{\text{V}} = 0{,}1\,\text{V} \cdot 1000\,\frac{\Omega}{\text{V}} = \underline{\underline{100\,\Omega}};$$

$$R_1 = \frac{U_1 - U_i}{I_i} = \frac{6\,\text{V} - 0{,}1\,\text{V}}{1\,\text{mA}} = \underline{\underline{5{,}9\,\text{k}\Omega}}$$

$$R_2 = \frac{U_2 - U_1}{I_i} = \frac{30\,\text{V} - 6\,\text{V}}{1\,\text{mA}} = \underline{\underline{24\,\text{k}\Omega}}; \quad R_3 = \frac{U_3 - U_2}{I_i} = \frac{60\,\text{V} - 30\,\text{V}}{1\,\text{mA}} = \underline{\underline{30\,\text{k}\Omega}}$$

Aufgabe 6.13

Ein Drehspulmessgerät mit Vollausschlag bei $I = 100\,\mu\text{A}$ und dem Innenwiderstand $R_i = 2\,\text{k}\Omega$ soll zur Spannungsmessung erweitert werden (Abb. 6.2).

a) Für welche Spannung U_M zeigt das Messgerät in Schalterstellung 1 Vollausschlag an?
b) Für die Schalterstellungen 2, 3 und 4 sollen (jeweils für Vollausschlag) die Messbereiche $U = 1$ V, $U = 10$ V und $U = 100$ V eingestellt werden können. Berechnen Sie für diese Messbereiche die Widerstände R_2, R_3 und R_4.

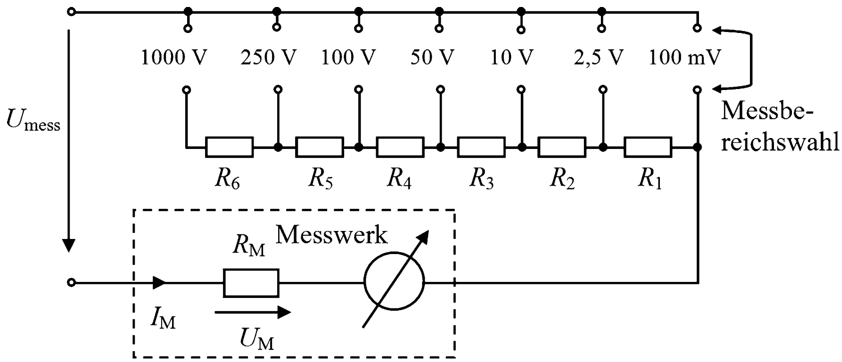


Abb. 6.3 Gleichspannungsmessgerät mit verschiedenen Messbereichen

Lösung

a) $U_M = R_i \cdot I = 2000\,\Omega \cdot 100\,\mu A = \underline{\underline{0{,}2\,V}}$

b) Allgemein: $R_V = \frac{U_{\text{mess}} - U_M}{U_M} \cdot R_i$

$$R_2 = \frac{1\,V - 0{,}2\,V}{0{,}2\,V} \cdot 2\,k\Omega = \underline{\underline{8\,k\Omega}}; \quad R_3' = \frac{10\,V - 0{,}2\,V}{0{,}2\,V} \cdot 2\,k\Omega = 98\,k\Omega$$

$$R_3 = R_3' - R_3 = \underline{\underline{90\,k\Omega}}$$

$$R_4' = \frac{100\,V - 0{,}2\,V}{0{,}2\,V} \cdot 2\,k\Omega = 998\,k\Omega; \quad R_4 = R_4' - R_3 - R_2 = \underline{\underline{900\,k\Omega}}$$

Aufgabe 6.14

In einem Gleichspannungsmessgerät wird die Schaltung in Abb. 6.3 mit Vorwiderständen zur Realisierung verschiedener Messbereiche verwendet. Der jeweilige Messbereich wird durch Überbrücken der zugehörigen Klemmen gewählt. Durch das Messwerk fließt bei Vollausschlag $U_M = 100\,mV$ ein Strom $I_M = 50\,\mu A$.

Berechnen Sie den Innenwiderstand R_M des Messwerks und die Vorwiderstände R_1 bis R_6.

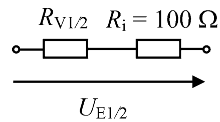
Lösung

$$R_M = \frac{U_M}{I_M} = 2\,k\Omega$$

Der Innenwiderstand R_M und der jeweilige Vorwiderstand R_V (der in den Messbereichen $> 2{,}5\,V$ aus der Reihenschaltung mehrerer Widerstände besteht) bilden einen Spannungsteiler.

$$U_M = U_{\text{mess}} \cdot \frac{R_M}{R_V + R_M} \Rightarrow R_V = \frac{U_{\text{mess}} - U_M}{U_M} \cdot R_M$$

Abb. 6.4 Vorwiderstände bei Spannungsmesser



Messbereich 2,5 V: $R_{V1} = R_1 = \frac{2{,}5\,\text{V} - 0{,}1\,\text{V}}{0{,}1\,\text{V}} \cdot 2000\,\Omega = \underline{\underline{48\,\text{k}\Omega}}$
Messbereich 10 V: $R_{V2} = \frac{10\,\text{V} - 0{,}1\,\text{V}}{0{,}1\,\text{V}} \cdot 2000\,\Omega = 198\,\text{k}\Omega;\ R_2 = R_{V2} - R_{V1} = \underline{\underline{150\,\text{k}\Omega}}$
Messbereich 50 V: $R_{V3} = \frac{50\,\text{V} - 0{,}1\,\text{V}}{0{,}1\,\text{V}} \cdot 2000\,\Omega = 998\,\text{k}\Omega;\ R_3 = R_{V3} - R_{V2} = \underline{\underline{800\,\text{k}\Omega}}$

Bei gleichem Vorgehen ergeben sich für die weiteren Messbereiche die Werte der Vorwiderstände zu $\underline{\underline{R_4 = 1\,\text{M}\Omega}}$; $\underline{\underline{R_5 = 3\,\text{M}\Omega}}$; $\underline{\underline{R_6 = 15\,\text{M}\Omega}}$

Aufgabe 6.15
Ein Spannungsmesser hat mit einem Vorwiderstand R_{V1} einen Endausschlag $U_{E1} = 300\,\text{V}$ und einen gesamten Innenwiderstand $R_{i,ges} = 1000\,\Omega/\text{V}$ (Abb. 6.4). Der Widerstand der Drehspule allein beträgt $100\,\Omega$. Wie groß muss ein neuer Vorwiderstand R_{V2} sein, wenn das Messgerät für $U_{E2} = 150\,\text{mV}$ Endausschlag verwendet werden soll?

Lösung
R_{V1} ist der Vorwiderstand für den Messbereich 300 V.

$$R_{V1} + R_i = 1000\,\frac{\Omega}{\text{V}} \cdot 300\,\text{V} = 300\,\text{k}\Omega$$

Bei Vollausschlag fließt durch den Spannungsmesser ein Strom $I = \frac{300\,\text{V}}{300\,\text{k}\Omega} = 1\,\text{mA}$.

An der Drehspule entsteht dabei ein Spannungsabfall von $U_i = 100\,\text{mV}$.

R_{V2} ist der Vorwiderstand für den Messbereich $U_{E2} = 150\,\text{mV}$. An ihm muss durch den bei Vollausschlag fließenden Strom von 1 mA ein Spannungsabfall von 50 mV entstehen.

Deshalb ist: $R_{V2} = \frac{50\,\text{mV}}{1\,\text{mA}} = \underline{\underline{50\,\Omega}}$.

6.4 Indirekte Messung von Widerstand und Leistung

Aufgabe 6.16
Ein Widerstand R trägt die Aufschrift $39\,\Omega \pm 10\,\%$. Der Widerstandswert soll durch eine Strom- Spannungsmessung wie in Abb. 6.5 möglichst genau bestimmt werden. Der Strommesser hat einen Innenwiderstand von $R_{iI} = 2\,\Omega$.

a) Um welche Schaltung einer indirekten Widerstandsmessung handelt es sich?
b) Berechnen Sie den Widerstandswert aus den in der Schaltung eingetragenen Messwerten.
c) Korrigieren Sie den durch die Schaltung bedingten Messfehler.

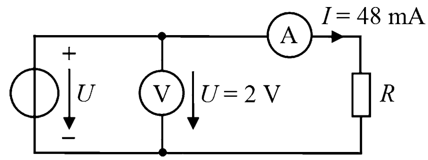


Abb. 6.5 Gleichzeitige Strom- und Spannungsmessung

Lösung

a) Es handelt sich um eine *Spannungsfehlerschaltung*, da die Spannung nicht direkt an den zwei Anschlüssen des zu bestimmenden Widerstandes gemessen wird.

b) $R = \frac{U}{I} = \frac{2\,\text{V}}{48\,\text{mA}} = \underline{\underline{41{,}7\,\Omega}}$

c) Strommesser und Widerstand R sind in Reihe geschaltet, ihre Widerstände addieren sich. Zur Fehlerkorrektur muss der Innenwiderstand des Strommessers vom Gesamtwiderstand subtrahiert werden.

$$R = \frac{U}{I} - R_{\text{iI}} = \frac{2\,\text{V}}{48\,\text{mA}} - 2\,\Omega = 41{,}7\,\Omega - 2\,\Omega = \underline{\underline{39{,}7\,\Omega}}$$

Aufgabe 6.17

Ein Widerstand R soll mit der in Abb. 6.6 gezeigten Schaltung möglichst genau bestimmt werden. Der Spannungsmesser hat einen Innenwiderstand von $R_{\text{iU}} = 5\,\text{k}\Omega$.

a) Um welche Schaltung einer indirekten Widerstandsmessung handelt es sich?

b) Berechnen Sie den Widerstandswert aus den in der Schaltung eingetragenen Messwerten.

c) Korrigieren Sie den durch die Schaltung bedingten Messfehler.

Lösung

a) Es handelt sich um eine *Stromfehlerschaltung*, da nicht ausschließlich der Strom durch den zu bestimmenden Widerstand gemessen wird, sondern gleichzeitig auch der Strom durch das Voltmeter.

b) $R = \frac{U}{I} = \frac{4{,}7\,\text{V}}{16\,\text{mA}} = \underline{\underline{293{,}8\,\Omega}}$

c) Voltmeter und Widerstand R sind parallel geschaltet, ihre Leitwerte addieren sich. Zur Fehlerkorrektur muss der Leitwert des Voltmeters vom Gesamtleitwert subtrahiert werden.

$$R = \frac{1}{\frac{I}{U} - \frac{1}{R_{\text{iU}}}} = \frac{1}{\frac{16\,\text{mA}}{4{,}7\,\text{V}} - \frac{1}{5\,\text{k}\Omega}} = \frac{1}{3{,}404 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-4}}\,\Omega = \underline{\underline{312{,}1\,\Omega}}$$

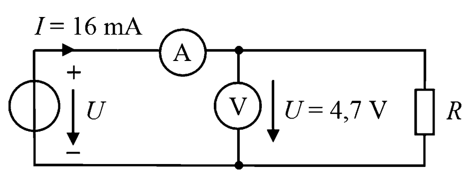


Abb. 6.6 Schaltung zur Widerstandsmessung

Aufgabe 6.18
Es soll ein Widerstand gemessen werden, der einen Wert von ca. 5 kΩ hat. Zur Verfügung stehen ein Spannungsmesser mit einem Innenwiderstand $R_{\mathrm{iU}} = 10\,\mathrm{M\Omega}$ und ein Strommesser mit einem Innenwiderstand von $R_{\mathrm{iI}} = 100\,\Omega$.

a) Welche Schaltung zur indirekten Widerstandsmessung sollte verwendet werden?
b) Die Messgeräte haben die Genauigkeitsklasse 1,5. Darf der Widerstandswert ohne Korrekturrechnung nach dem ohmschen Gesetz berechnet werden?

Lösung
a) Das Geometrische Mittel der beiden Innenwiderstände ist:

$$R_{\mathrm{iM}} = \sqrt{R_{\mathrm{iU}} \cdot R_{\mathrm{iI}}} = \sqrt{10^7\,\Omega \cdot 100\,\Omega} = 3{,}16 \cdot 10^4\,\Omega = 31{,}6\,\mathrm{k\Omega}\,.$$

Da der zu messende Widerstand kleiner ist wird die Stromfehlerschaltung verwendet.
b) Der Innenwiderstand R_{iU} des Spannungsmessers ist 2000-mal größer als der zu messende Widerstand. Somit liegt der Fehler des Stromes bei ca. $\frac{1}{2000} = 5 \cdot 10^{-4}$ bzw. 0,05 %. Dieser Fehler ist wesentlich kleiner als der Fehler der Messgeräte (1,5 %). Eine Korrekturrechnung ist nicht notwendig.

Aufgabe 6.19
Eine Glühlampe ist mit 12 V, 6 W beschriftet. Die tatsächliche Leistungsaufnahme im Nennbetrieb soll gemessen werden. Zur Verfügung stehen folgende Geräte:

- Ein Netzgerät, das im Bereich 0 . . . 15 V einstellbar ist, aber *keinen* eingebauten Spannungsmesser hat.
- Ein Spannungsmesser mit dem Kennwiderstand $R_{\mathrm{K}} = 20\,\frac{\mathrm{k\Omega}}{\mathrm{V}}$ der Genauigkeitsklasse 1,5. Das Gerät hat folgende Messbereiche: 3 V, 10 V, 30 V, 100 V.
- Ein Strommesser der Genauigkeitsklasse 1,5 mit einer Empfindlichkeit von 100 mV. Der Spannungsabfall am Messgerät ist also beim Messbereichsendwert 100 mV. Das Gerät hat folgende Messbereiche: 10 mA, 30 mA, 100 mA, 300 mA, 1 A, 3 A.

a) Auf welchen Messbereich wird der Spannungsmesser eingestellt?
b) Auf welchen Messbereich wird der Strommesser eingestellt?
c) Wie groß ist der Innenwiderstand R_{iU} des Spannungsmessers?
d) Wie groß ist der Innenwiderstand R_{iI} des Strommessers?
e) Welche Schaltung wird zur Messung verwendet?
f) Kann mit den abgelesenen Werten von U und I nach der Formel $P = U \cdot I$ die von der Glühlampe tatsächlich aufgenommene Leistung genügend genau berechnet werden?

Lösung

a) Der kleinste Bereich des Spannungsmessers, der den einzustellenden Wert von 12 V noch darstellen kann, ist der 30 V-Bereich.

b) Der zu messende Strom ist $I = P/U = 6\,\mathrm{W}/12\,\mathrm{V} = 0{,}5\,\mathrm{A}$. Der Strommesser wird auf den Messbereich 1 A eingestellt.

c) $R_{\mathrm{iU}} = 20\,\frac{\mathrm{k\Omega}}{\mathrm{V}} \cdot 30\,\mathrm{V} = \underline{\underline{600\,\mathrm{k\Omega}}}$

d) $R_{\mathrm{iI}} = \frac{100\,\mathrm{mV}}{1\,\mathrm{A}} = 0{,}1\,\Omega = \underline{\underline{100\,\mathrm{m\Omega}}}$

e) Der ungefähre Widerstand der Glühlampe ist $R = U/I = 12\,\mathrm{V}/0{,}5\,\mathrm{A} = 24\,\Omega$. Dieser Widerstandswert ist klein. Zur Sicherheit wird noch das Geometrische Mittel aus den Innenwiderständen der Messgeräte bestimmt.

$$R_{\mathrm{M}} = \sqrt{R_{\mathrm{iU}} \cdot R_{\mathrm{iI}}} = \sqrt{600\,\mathrm{k\Omega} \cdot 100\,\mathrm{m\Omega}} = 245\,\Omega$$

Der Lampenwiderstand mit $24\,\Omega$ ist deutlich kleiner als $\mathrm{R_M}$, es wird also die Stromfehlerschaltung verwendet.

f) Der Innenwiderstand des Spannungsmessers ist 25.000-mal größer als der Lampenwiderstand. Der Fehler des Stromes ist $\frac{24\,\Omega}{600\,\mathrm{k\Omega}} = 4 \cdot 10^{-5}$ bzw. 0,004 %. Der Fehler ist vernachlässigbar klein, eine Korrekturrechnung ist nicht erforderlich.

6.5 Wheatstone-Brücke

Aufgabe 6.20

Ein Drahtwiderstand R_{x} wird mit einer Wheatstone-Brücke gemessen, siehe Abb. 6.7. Der veränderbare Widerstand R_1 wird dazu so lange verändert, bis der Strommesser im Nullzweig keinen Strom mehr anzeigt. Die Brücke ist dann abgeglichen. Der Wert von R_1 wird zu $12{,}3\,\Omega$ abgelesen.

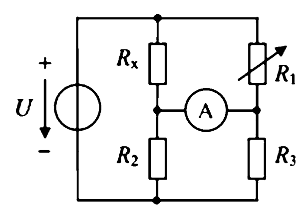
Für die Brückenwiderstände gilt $R_2 = R_3 = 10\,\Omega$. Berechnen Sie den Wert von R_{x}.

Lösung

Für den abgeglichenen Zustand der Brücke gilt $\dfrac{R_{\mathrm{x}}}{R_2} = \dfrac{R_1}{R_3}$.

$$R_{\mathrm{x}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3} = \frac{12{,}3\,\Omega \cdot 10\,\Omega}{10\,\Omega} = \underline{\underline{12{,}3\,\Omega}}$$

Abb. 6.7 Wheatstone-Brücke



Schaltvorgänge im unverzweigten Gleichstromkreis

7

Zusammenfassung

Es wird der Schaltvorgang beim ohmschen Widerstand, beim Kondensator und bei der Spule behandelt. Für unterschiedliche Schaltungen werden Lade- und Entladevorgänge beim Anschalten einer Gleichspannung an Kondensatoren und Spulen berechnet. Dabei wird der zeitliche Verlauf von Spannungen und Strömen analysiert und grafisch dargestellt. Die Verwendung einer Freilaufdiode zeigt eine Möglichkeit zur Verhinderung hoher Induktionsspannungen beim Abschalten von Induktivitäten.

7.1 Grundwissen – kurz und bündig

- Ohm'scher Widerstand: Es besteht keine Zeitverzögerung zwischen Spannung und Strom.
- Die Zeitverzögerungen von Spannung und Strom bei Kondensator und Spule entsprechen einer Exponentialfunktion.
- Kondensator mit Vorwiderstand einschalten: Die Spannung steigt verzögert auf den Wert der Ladespannung an. Der Strom springt auf einen Maximalwert und fällt verzögert auf null ab.
- Kondensator ausschalten: Der Kondensator bleibt geladen.
- Kondensator über einen Widerstand entladen: Die Spannung fällt verzögert auf null ab. Der Strom springt auf einen negativen Maximalwert und fällt verzögert auf null ab.
- Die Zeitkonstante eines Kondensators ist $\tau = R \cdot C$.
- Spule einschalten: Der Strom steigt verzögert auf einen Maximalwert an. Die Spannung springt auf einen Maximalwert und fällt verzögert auf null ab.
- Spule mit Abschalt-Induktionsstromkreis ausschalten: Der Strom fällt verzögert auf null ab. Die Spannung springt auf einen negativen Maximalwert und fällt verzögert auf null ab.

L. Stiny, *Aufgabensammlung zur Elektrotechnik und Elektronik*,
DOI 10.1007/978-3-658-14381-7_7

- Spule ohne Abschalt-Induktionsstromkreis ausschalten: An der Spule entstehen hohe Spannungsspitzen. Durch eine Freilaufdiode können diese verkleinert werden.
- Die Zeitkonstante einer Spule ist $\tau = \frac{L}{R}$.
- Wichtige Formeln:

$$W_C = \frac{1}{2}CU^2; \quad W_L = \frac{1}{2}LI^2; \quad U_C(t) = U \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right); \quad U_C(t) = U \cdot e^{-\frac{t}{RC}};$$
$$I_C(t) = \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}};$$
$$I_C(t) = -\frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}; \quad U_L(t) = U \cdot e^{-t \cdot \frac{R}{L}}; \quad U_L(t) = -U \cdot e^{-t \cdot \frac{R}{L}};$$
$$I_L(t) = \frac{U}{R} \cdot \left(1 - e^{-t \cdot \frac{R}{L}}\right);$$
$$I_L(t) = \frac{U}{R} \cdot e^{-t \cdot \frac{R}{L}}$$

7.2 Schaltvorgang beim Kondensator

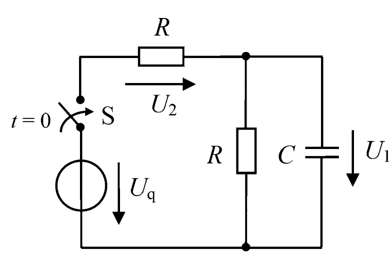
Aufgabe 7.1
Wie berechnet sich die Zeitkonstante τ für den Lade- bzw. Entladevorgang eines Kondensators?

Lösung
$\tau = R \cdot C$

Aufgabe 7.2
In der Schaltung nach Abb. 7.1 wird der Schalter S, der seit langer Zeit geöffnet ist, zum Zeitpunkt $t = 0$ geschlossen. U_q ist eine Gleichspannungsquelle mit dem Wert 5 Volt.

a) Wie groß sind U_1 und U_2 kurz nach dem Schließen des Schalters (zum Zeitpunkt $t = 0+$)?
b) Wie groß sind U_1 und U_2 nach sehr langer Zeit ($t \to \infty$)?
c) Skizzieren Sie den Verlauf von U_1 und U_2.

Abb. 7.1 Gleichspannungsquelle einschalten



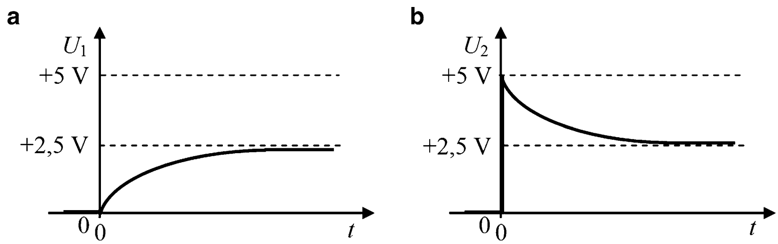


Abb. 7.2 Zeitlicher Verlauf von U_1 und U_2

Lösung

a) Vor dem Schließen des Schalters ist C über den parallel geschalteten Widerstand vollkommen entladen, U_1 ist damit null. An einem Kondensator tritt kein Spannungssprung auf. Kurz nach dem Schließen des Schalters ist deshalb U_1 immer noch null Volt. $\underline{\underline{U_1(t = 0+) = 0\,\text{V}}}$

Entsprechend einem Maschenumlauf ist $U_2 = U_q - U_1$, somit ist U_2 kurz nach dem Schließen des Schalters $\underline{\underline{U_2(t = 0+) = 5\,\text{V}}}$.

b) Nach sehr langer Zeit ist C auf den Spannungsabfall am parallel geschalteten Widerstand R aufgeladen. Dieser Spannungsabfall berechnet sich nach der Spannungsteilerregel zu

$$\frac{U_q}{2} = 2{,}5\,\text{V}. \quad \underline{\underline{U_1(t \to \infty) = 2{,}5\,\text{V}}}.$$

Da beide Widerstände gleich groß sind (beide sind mit „R“ bezeichnet), ist nach der Spannungsteilerregel $U_2 = U_1$. $\underline{\underline{U_2(t \to \infty) = 2{,}5\,\text{V}}}$

c) Den zeitlichen Verlauf von U_1 und U_2 zeigt Abb. 7.2.

Aufgabe 7.3

Der Schalter S in Abb. 7.3 ist seit langer Zeit geöffnet und der Kondensator C vollständig aufgeladen.

a) Welchen zeitlichen Verlauf (Skizze) haben die Potentiale φ_1 und φ_2, wenn der Schalter S zum Zeitpunkt $t = t_0$ geschlossen wird?
b) Wie hoch ist der Entladestrom des Kondensators unmittelbar nach dem Schließen des Schalters (zum Zeitpunkt $t = t_0+$)?
c) Nach welcher Zeit ist der Kondensator praktisch entladen?
d) Nach welcher Zeit ist der Entladestrom auf 60 mA abgesunken?
e) Welchen zeitlichen Verlauf (Skizze) haben die Potentiale φ_1 und φ_2, wenn der Schalter S nach vollständigem Entladen des Kondensators zum Zeitpunkt $t = t_1$ wieder geöffnet wird?

Gegeben: Gleichspannung $U_q = 10\,\text{V}$, $R_1 = 100\,\Omega$, $R_2 = 900\,\Omega$, $C = 0{,}1\,\mu\text{F}$

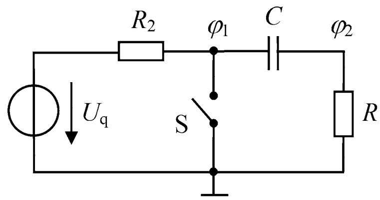


Abb. 7.3 Kondensator entladen

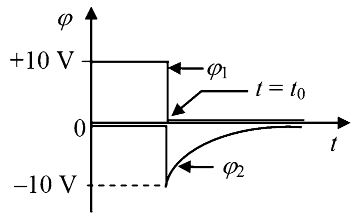


Abb. 7.4 Zeitlicher Verlauf von φ_1 und φ_2 (S schließen)

Lösung

a) Für $t < t_0$ ist $\varphi_1 = U_q = 10\,\text{V}$ und $\varphi_2 = 0\,\text{V}$.
Zum Zeitpunkt t_0 wird φ_1 schlagartig auf null Volt gelegt. Die Kondensatorspannung ist direkt nach dem Schließen des Schalters $U_C = U_q = \varphi_1 - \varphi_2$. $\Rightarrow$ $\varphi_2 = \varphi_1 - U_q \Rightarrow \varphi_2 = -10\,\text{V}$. Im weiteren Zeitverlauf wird C über R_1 entladen, φ_2 nähert sich exponentiell (e-Funktion) null Volt (Abb. 7.4).

b) Zum Zeitpunkt $t = t_0+$ unmittelbar nach dem Schließen des Schalters ist der Entladestrom des Kondensators am größten. $I_{\text{Cmax}} = \frac{10\,\text{V}}{100\,\Omega} = \underline{\underline{0{,}1\,\text{A}}}$

c) In der Praxis kann der Kondensator als entladen betrachtet werden (zu mehr als 99 %), nachdem fünf Zeitkonstanten vergangen sind.

$$\tau = R_1 \cdot C = 100\,\Omega \cdot 10^{-7}\,\text{F} = 10^{-5}\,\text{s} = 10\,\mu\text{s}; \quad \underline{\underline{5\tau = 50\,\mu\text{s}}}$$

d)

$$I_C(t) = I_{\text{Cmax}} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad 60\,\text{mA} = 100\,\text{mA} \cdot e^{-\frac{t}{10\,\mu\text{s}}}; \quad \frac{60}{100} = e^{-\frac{t}{10\,\mu\text{s}}};$$

$$\frac{100}{60} = e^{\frac{t}{10\,\mu\text{s}}};$$

$$\ln\left(\frac{100}{60}\right) = \frac{t}{10\,\mu\text{s}} \cdot \ln(e); \quad \underline{\underline{t = 5{,}1\,\mu\text{s}}}$$

e) In dem Zeitpunkt $t = t_1$, in dem der Schalter geöffnet wird, fließt der maximale Ladestrom $I_{\text{CLmax}} = \frac{10\,\text{V}}{1\,\text{k}\Omega} = 10\,\text{mA}$. φ_1 und φ_2 sind im ersten Augenblick (zum Zeitpunkt $t = t_1$) gleich groß und springen auf $+1\,\text{V}$, da R_1 und R_2 einen Spannungsteiler bilden. Der Kondensator wird über den Gesamtwiderstand $R_1 + R_2$ aufgeladen, φ_1 nimmt

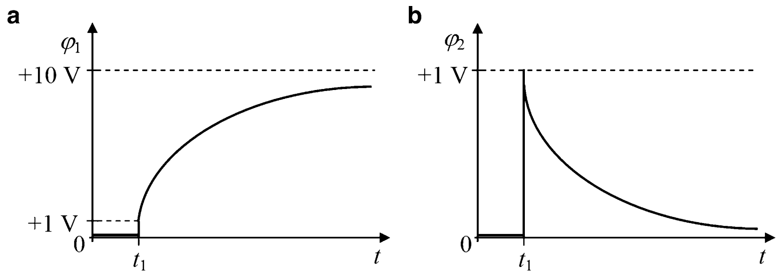
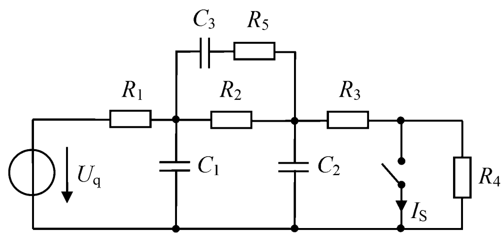


Abb. 7.5 Zeitlicher Verlauf von φ_1 und φ_2 (S öffnen)

Abb. 7.6 Netzwerk zu einem Schaltvorgang



zu, φ_2 nimmt ab (Abb. 7.5).

$$\tau = (R_1 + R_2) \cdot C = 1\,\mathrm{k\Omega} \cdot 10^{-7}\,\mathrm{F} = 10^{-4}\,\mathrm{s} = 0{,}1\,\mathrm{ms}$$

$$\varphi_1(t) = +10\,\mathrm{V} - U_q \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}; \quad \varphi_2(t) = U_q \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

Aufgabe 7.4
Der Schalter S in Abb. 7.6 ist seit langer Zeit geöffnet und wird zum Zeitpunkt $t = t_0$ geschlossen.

a) Wie groß ist der Strom I_S, der über den Schalter unmittelbar nach dem Schließen des Schalters (zum Zeitpunkt $t = t_0+$) fließt?
b) Wie groß ist I_S lange Zeit nach dem Schließen von S?

Gegeben: Gleichspannung $U_q = 10\,\mathrm{V}$, $R_1 = 2\,\Omega$, $R_2 = 150\,\Omega$, $R_3 = 220\,\Omega$, $R_4 = 4{,}7\,\mathrm{k}\Omega$, $R_5 = 180\,\Omega$, $C_1 = C_2 = 1\,\mu\mathrm{F}$, $C_3 = 100\,\mathrm{nF}$

Lösung
a) Da der Schalter seit langer Zeit geöffnet ist, sind alle Ausgleichsvorgänge abgeschlossen, durch die Kondensatoren fließen keine Ströme mehr. C_2 ist auf die Spannung

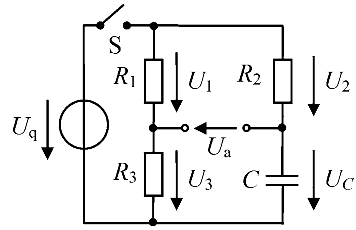


Abb. 7.7 Netzwerk mit geschalteter Spannung

aufgeladen, die sich aus dem Spannungsteiler $(R_1 + R_2)$ und $(R_4 + R_3)$ ergibt.

$$U_{C2} = U_q \cdot \frac{R_3 + R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = 10\,\text{V} \cdot \frac{4920\,\Omega}{5072\,\Omega} = 9{,}7\,\text{V}$$

C_2 wird über den Schalter S und R_3 entladen. Der anfängliche Entladestrom unmittelbar nach dem Schließen des Schalters ist $I_S(t = t_0+) = \frac{U_{C2}}{R_3} = \frac{9{,}7\,\text{V}}{220\,\Omega} = \underline{\underline{44{,}1\,\text{mA}}}$

b) Ist S seit langer Zeit geschlossen, so sind alle Ausgleichsvorgänge abgeschlossen, durch die Kondensatoren fließen keine Ströme mehr. Über den geschlossenen Schalter liegt die Reihenschaltung von R_1, R_2, R_3 an U_q.

$$I_S(t \to \infty) = \frac{U_q}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{10\,\text{V}}{372\,\Omega} = \underline{\underline{26{,}9\,\text{mA}}}$$

Aufgabe 7.5

Der Schalter S in Abb. 7.7 ist seit langer Zeit geöffnet und wird zum Zeitpunkt $t = t_0$ geschlossen.

a) Wie groß ist U_a unmittelbar nach $(t = t_0+)$ und lange Zeit nach dem Schließen des Schalters?
b) Wie groß ist die Zeitkonstante?
c) Wie sieht der Zeitverlauf von U_a aus (Skizze)?

Gegeben: Gleichspannung $U_q = 10\,\text{V}$, $R_1 = 300\,\Omega$, $R_2 = 200\,\Omega$, $R_3 = 100\,\Omega$, $C = 50\,\mu\text{F}$

Lösung

a) Vor dem Schließen des Schalters ist $U_C = 0\,\text{V}$. An einem Kondensator tritt kein Spannungssprung auf. Deshalb ist U_C auch kurz nach dem Schließen des Schalters null Volt.

$$U_C(t = t_0+) = U_C(t \le t_0) = 0$$

Es ist $U_a = U_C - U_3$ und nach der Spannungsteilerregel $U_3 = U_q \cdot \frac{R_3}{R_1+R_3}$.

$$U_a(t = t_0+) = U_C(t = t_0+) - U_3(t = t_0+);$$
$$U_a(t = t_0+) = -U_q \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_3} = \underline{\underline{-2{,}5\,\text{V}}}$$

Abb. 7.8 Zeitverlauf von U_a

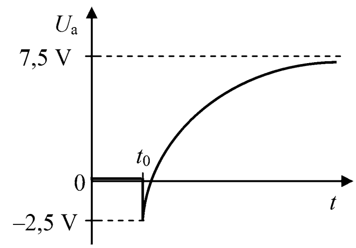
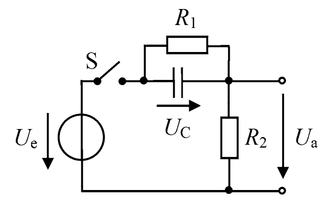


Abb. 7.9 Netzwerk mit geschalteter Gleichspannung



Für $t \to \infty$ wird der Strom durch C zu null und damit auch $U_2 = 0$.
Aus $U_a = U_1 - U_2$ folgt $U_a = U_1$ und nach der Spannungsteilerregel:

$$U_a = U_q \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3} = 10\,\text{V} \cdot \frac{300\,\Omega}{400\,\Omega} = \underline{\underline{7{,}5\,\text{V}}}$$

b) C wird über R_2 von U_q aufgeladen: $\tau = R_2 \cdot C = 200\,\Omega \cdot 50\,\mu\text{F} = \underline{\underline{10\,\text{ms}}}$
c) Die Skizze des Zeitverlaufs von U_a zeigt Abb. 7.8.

Aufgabe 7.6
Der Schalter S in Abb. 7.9 ist seit langer Zeit geöffnet und wird zum Zeitpunkt $t = t_0$ geschlossen.

a) Wie hoch sind Anfangs- und Endwert von U_a?
b) Wie sieht der Zeitverlauf von U_a aus (Skizze)?

Gegeben: Gleichspannung $U_e = 10\,\text{V}$, $R_1 = 10\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 2{,}5\,\text{k}\Omega$, $C = 0{,}1\,\mu\text{F}$

Lösung
a) Vor dem Schließen des Schalters ist die Spannung am Kondensator $U_C = 0\,\text{V}$. An einem Kondensator tritt kein Spannungssprung auf. Deshalb ist U_C auch kurz nach dem Schließen des Schalters null Volt.

$$U_C(t = t_0+) = U_C(t \le t_0) = 0$$
$$U_a = U_e - U_C; \quad U_a(t = t_0+) = U_e(t = t_0+) - U_C(t = t_0+) = \underline{\underline{10\,\text{V}}}$$

Da durch R_1 kein Strom fließt und an R_1 keine Spannung abfällt, springt die Ausgangsspannung auf den Anfangswert 10 V, wenn S geschlossen wird.

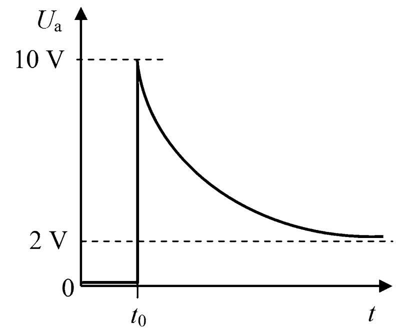


Abb. 7.10 Zeitverlauf von U_a

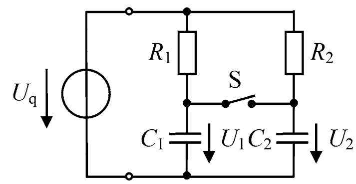


Abb. 7.11 U_q ändert sich sprunghaft

Für $t \to \infty$ ist U_a der Spannungsabfall an R_2, der sich durch den Spannungsteiler einstellt.

$$U_a(t \to \infty) = U_e \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \underline{\underline{2\,\mathrm{V}}}$$

b) Der Zeitverlauf ist eine e-Funktion mit der Zeitkonstanten $\tau = R \cdot C$ (Abb. 7.10). Der wirksame Widerstand ist $R = R_2$; $\tau = R_2 \cdot C = 2{,}5 \cdot 10^3\,\Omega \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F} = 0{,}25\,\mathrm{ms}$

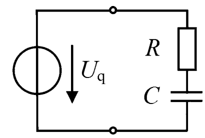
Aufgabe 7.7

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ sind in der Schaltung Abb. 7.11 alle Ausgleichsvorgänge abgeschlossen. Für die Zeit davor ($t < t_0$) gilt: $U_q = 0\,\mathrm{V}$, Schalter S ist geöffnet.

a) Zum Zeitpunkt $t_0 = 0\,\mathrm{ms}$ wird S geschlossen. Wie wirkt sich dies auf die Spannungen U_1 und U_2 aus? Geben Sie ein Ersatzschaltbild für die Schaltung mit den Werten der Ersatzelemente an, wenn S geschlossen ist.
b) Zum Zeitpunkt $t_1 = 2\,\mathrm{ms}$ springt U_q auf $U_q = 10\,\mathrm{V}$. Der Schalter S bleibt weiterhin geschlossen. Skizzieren Sie den Verlauf der Spannungen $U_1(t)$ und $U_2(t)$ im Bereich $t = 0\,\mathrm{ms}$ bis $t = t_2 = 12\,\mathrm{ms}$. Berechnen Sie alle dafür notwendigen Zeitkonstanten.
c) Zum Zeitpunkt $t_2 = 12\,\mathrm{ms}$ springt U_q zurück auf $U_q = 0\,\mathrm{V}$ und S wird geöffnet. Tragen Sie in die Skizze den weiteren Verlauf der Spannungen $U_1(t)$ und $U_2(t)$ ab $t = t_2 = 12\,\mathrm{ms}$ ein. Berechnen Sie alle dafür notwendigen Zeitkonstanten.

Gegeben: $R_1 = R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $C_1 = 1\,\mathrm{\mu F}$, $C_2 = 500\,\mathrm{nF}$

Abb. 7.12 Ersatzschaltbild zum Zeitpunkt $t_0 = 0$, S geschlossen



Lösung

a) Für $t < t_0$ ist $U_1 = 0\,\text{V}$ und $U_2 = 0\,\text{V}$, da $U_q = 0\,\text{V}$ ist. Wird S geschlossen, so bleiben die beiden Spannungen gleich: $U_1 = U_2 = 0\,\text{V}$.
Mit $R_1 = R_2 = 2\,\text{k}\Omega$ folgt: $R = R_1 \parallel R_2 = \underline{\underline{1\,\text{k}\Omega}}$.
Die beiden Kondensatoren sind parallel geschaltet: $C = C_1 + C_2 = \underline{\underline{1{,}5\,\mu\text{F}}}$.
Das Ersatzschaltbild zeigt Abb. 7.12.

b) $\tau = R \cdot C = 10^3 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-6}\,\text{s} = \underline{\underline{1{,}5\,\text{ms}}}$
Die Kondensatoren werden aufgeladen, an ihnen liegt die gleiche Spannung $U_1 = U_2$.
Den Zeitverlauf von $U_1(t)$ und $U_2(t)$ im Bereich $t = 0\,\text{ms}$ bis $t = t_2 = 12\,\text{ms}$ zeigt Abb. 7.13.

c) Die Kondensatoren werden jetzt entladen, und zwar C_1 über R_1 und C_2 über R_2.

$$\tau_1 = R_1 \cdot C_1 = 2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}\,\text{s} = \underline{\underline{2\,\text{ms}}}$$
$$\tau_2 = R_2 \cdot C_2 = 2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6}\,\text{s} = \underline{\underline{1\,\text{ms}}}$$

Den Zeitverlauf von $U_1(t)$ und $U_2(t)$ ab $t = t_2 = 12\,\text{ms}$ zeigt Abb. 7.13.

Aufgabe 7.8

Für die Schaltung nach Abb. 7.14 sind folgende Werte gegeben:
$U_q = 9\,\text{V}$, $R_i = R_1 = 1\,\text{k}\Omega$, $C_1 = 1\,\mu\text{F}$, $C_2 = 500\,\text{nF}$.
Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ sind C_1 und C_2 entladen ($U_1 = U_2 = 0\,\text{V}$). Alle Schalter sind geöffnet.

Abb. 7.13 Zeitverlauf von $U_1(t)$ und $U_2(t)$

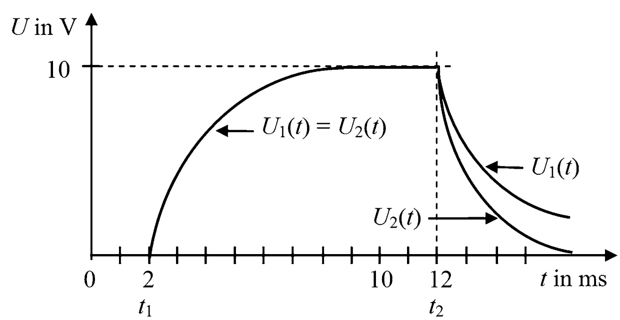
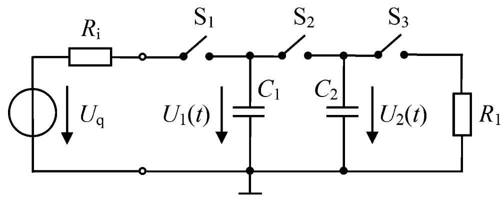


Abb. 7.14 Netzwerk mit mehreren Schaltern



a) Zum Zeitpunkt $t_1 = 2\,\text{ms}$ wird der Schalter S_1 geschlossen. Skizzieren Sie den Verlauf der Spannung $U_1(t)$ im Bereich $t = 0\,\text{ms}$ bis $t = t_2 = 10\,\text{ms}$. Berechnen Sie alle dafür notwendigen Zeitkonstanten.

b) Zum Zeitpunkt $t_2 = 10\,\text{ms}$ wird der Schalter S_1 wieder geöffnet und Schalter S_2 geschlossen. Wie groß ist die Gesamtkapazität C_{ges} der beiden Kondensatoren C_1 und C_2? Welche Auswirkung hat dieser Vorgang auf die Spannung $U_1(t)$?

c) Zum Zeitpunkt $t_3 = 12\,\text{ms}$ wird zusätzlich der Schalter S_3 geschlossen. Skizzieren Sie den weiteren Verlauf der Spannung $U_1(t)$ für $t = t_2 = 10\,\text{ms}$ bis $t = t_4 = 20\,\text{ms}$. Berechnen Sie alle dafür notwendigen Zeitkonstanten.

Lösung

a) C_1 wird geladen. $\tau_1 = R_i \cdot C_1 = 10^3 \cdot 10^{-6}\,\text{s} = \underline{\underline{1\,\text{ms}}}$

b) C_1 und C_2 sind jetzt parallel geschaltet. $C_{\text{ges}} = C_1 + C_2 = 1\,\mu\text{F} + 0{,}5\,\mu\text{F} = \underline{\underline{1{,}5\,\mu\text{F}}}$
Die Gesamtladung bleibt erhalten und verteilt sich jetzt auf C_1 und C_2.
$Q = C \cdot U = \text{const.}$, d. h. es muss sein:

$$C_1 \cdot U_1(t)_{\text{alt}} = C_{\text{ges}} \cdot U_1(t)_{\text{neu}} \text{ oder } U_1(t)_{\text{neu}} = \frac{C_1 \cdot U_1(t)_{\text{alt}}}{C_{\text{ges}}} = \frac{10^{-6} \cdot 9}{1{,}5 \cdot 10^{-6}}\,\text{V} = \underline{\underline{6\,\text{V}}}$$

$U_1(t)$ sinkt schlagartig auf 6 V ab, da die Kapazität bei gleich bleibender Ladung größer wird.

c) Die beiden parallel geschalteten Kondensatoren werden jetzt über R_1 entladen.

$$\tau_2 = R_1 \cdot C_{\text{ges}} = 10^3 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-6}\,\text{s} = \underline{\underline{1{,}5\,\text{ms}}}$$

Den gesamten Zeitverlauf von $U_1(t)$ zeigt Abb. 7.15.

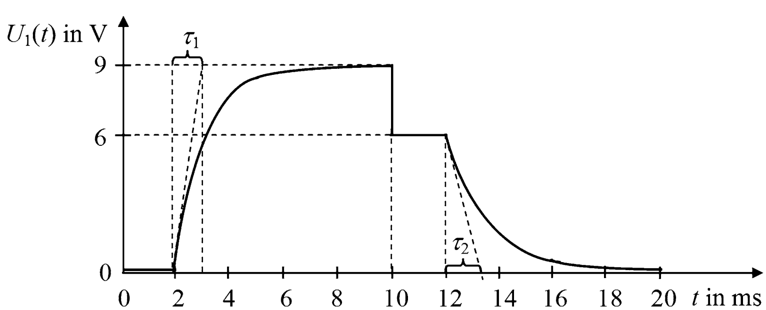


Abb. 7.15 Zeitverlauf von $U_1(t)$

7.3 Schaltvorgang bei der Spule

Aufgabe 7.9
Der Schalter S in Abb. 7.16 ist seit langer Zeit geöffnet und wird zum Zeitpunkt $t = 0$ geschlossen. Welchen zeitlichen Verlauf hat der Spulenstrom I_L (Skizze)?

Gegeben: Gleichspannung $U_q = 12\,\text{V}$, $R_i = 2\,\Omega$, $R_L = 10\,\Omega$, $L = 0{,}1\,\text{H}$

Lösung
Vor dem Schließen des Schalters sind alle Ausgleichsvorgänge abgeschlossen, es kann eine Gleichstrombetrachtung durchgeführt werden. Die Induktivität L (ideale Spule) hat den ohmschen Widerstand null Ohm.

$$t < 0\colon\ I_L = \frac{U_q}{R_i + R_L} = \frac{12\,\text{V}}{12\,\Omega} = 1\,\text{A}$$

Unmittelbar nach dem Schließen des Schalters, zum Zeitpunkt $t = 0+$: Der Strom durch eine Spule macht keinen Sprung. Im ersten Augenblick nach dem Schließen des Schalters ist $I_L = 1\,\text{A}$.

$t > 0$: I_L klingt nach einer e-Funktion mit der Zeitkonstanten τ ab.

$$\tau = \frac{L}{R_L} = \frac{0{,}1\,\text{H}}{10\,\Omega} = 10\,\text{ms}$$

$$\underline{\underline{I_L(t) = 1\,\text{A} \cdot e^{-\frac{t}{0{,}01\,\text{s}}}}}$$

Den zeitlichen Verlauf des Spulenstroms zeigt Abb. 7.17.

Aufgabe 7.10
Die Widerstände R_1 und R_2 in Abb. 7.18 sind so zu dimensionieren, dass der Spulenstrom $I_L(t)$ genau 5 ms nach dem Schließen des Schalters S zum Zeitpunkt $t = 0$ den Wert

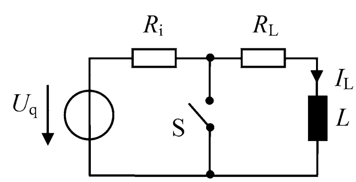


Abb. 7.16 Schaltvorgang bei einer Spule

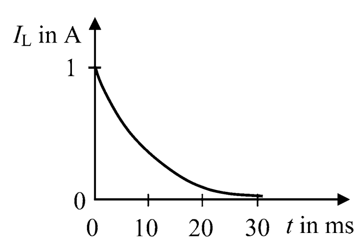


Abb. 7.17 Zeitlicher Verlauf von I_L

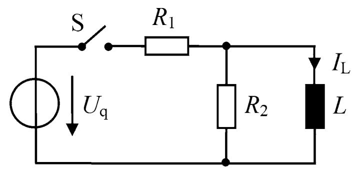


Abb. 7.18 R_1 und R_2 sind zu bestimmen

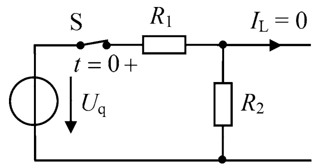


Abb. 7.19 Ersatzschaltbild unmittelbar nach dem Schließen des Schalters

$I_L(t = 5\,\text{ms}) = 250\,\text{mA}$ und lange Zeit nach dem Schließen des Schalters S den Wert $I_L(t \to \infty) = 500\,\text{mA}$ annimmt.

Gegeben: Gleichspannung $U_q = 110\,\text{V}$, $L = 0{,}25\,\text{H}$

Lösung

$t < 0$: Vor dem Schließen des Schalters S ist $I_L(t) = 0$.

$t = 0+$: Im ersten Augenblick nach dem Schließen des Schalters bleibt $I_L(t) = 0$, da der Strom durch eine Spule stetig ist (keinen Sprung macht). Das Ersatzschaltbild zeigt Abb. 7.19.

$t \to \infty$: $I_L(t)$ nimmt einen konstanten Wert $I_L(\infty) = 500\,\text{mA}$ an. Die ideale Spule mit dem Wicklungswiderstand null Ohm entspricht einem Kurzschluss über R_2, die Spannung an der Spule und an R_2 ist null. Da die Spannung an R_2 null ist, ist auch der Strom durch R_2 null, R_2 kann entfallen. Das Ersatzschaltbild zeigt Abb. 7.20.

$$I_L(\infty) = \frac{U_q}{R_1}; \quad R_1 = \frac{U_q}{I_L(\infty)} = \frac{110\,\text{V}}{0{,}5\,\text{A}} = \underline{\underline{220\,\Omega}}$$

Der Spulenstrom $I_L(t)$ steigt nach einer e-Funktion von null auf $I_L(\infty)$ an (Abb. 7.21).

$$I_L(t) = I_L(\infty) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

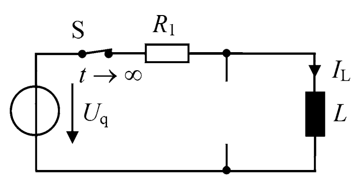


Abb. 7.20 Ersatzschaltbild für $t \to \infty$

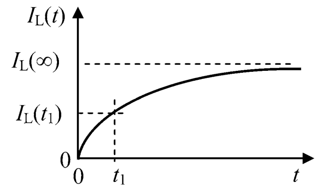


Abb. 7.21 Ansteigen des Spulenstromes

Für $t = t_1 = 5\,\text{ms}$ ist $I_L(t_1) = 250\,\text{mA}$; außerdem ist $I_L(\infty) = 500\,\text{mA}$.

$$\text{Mit } \frac{I_L(t)}{I_L(\infty)} = \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right) \text{ folgt } \frac{1}{2} = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{t_1}{\tau}};\ \frac{1}{2} = \mathrm{e}^{-\frac{t_1}{\tau}};\ -\frac{t_1}{\tau} = \ln\left(\frac{1}{2}\right);\ \frac{t_1}{\tau} = \ln(2);$$

$$\tau = \frac{t_1}{\ln(2)} = \frac{5\,\text{ms}}{0{,}6931} = 7{,}21\,\text{ms}$$

Die nach dem Schließen des Schalters S in der Spule induzierte Spannung wird mit der Zeitkonstanten $\tau = \frac{L}{R}$ abgebaut. R ist hierin der Widerstand der Parallelschaltung von R_1 und R_2. Die ideale Spannungsquelle U_q hat einen Innenwiderstand von null Ohm, deshalb ist für den Ausgleichsvorgang der Widerstand R_1 als parallel zu R_2 liegend zu betrachten.

$$\tau = \frac{L}{R_1 \parallel R_2};\quad R_1 \parallel R_2 = \frac{L}{\tau} = \frac{0{,}25\,\text{Vs}}{7{,}21 \cdot 10^{-3}\,\text{A s}} = 34{,}67\,\Omega;\quad \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 34{,}67\,\Omega;$$

$$R_1 \cdot R_2 = 34{,}67\,\Omega \cdot R_1 + 34{,}67\,\Omega \cdot R_2;\quad R_2 = \frac{34{,}67\,\Omega \cdot R_1}{R_1 - 34{,}67\,\Omega} = \underline{\underline{41{,}16\,\Omega}}$$

Aufgabe 7.11

In Abb. 7.22 ist U_q eine Gleichspannungsquelle. Der Schalter S ist lange Zeit offen und wird zum Zeitpunkt $t = 0$ geschlossen.

Wie groß sind die Werte von $I_L(t = 0+)$ und $I_C(t = 0+)$ unmittelbar nach dem Schließen des Schalters (Anfangswerte)?

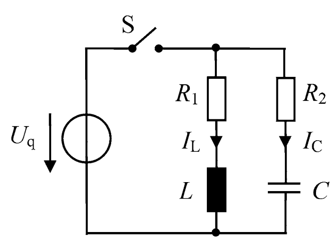


Abb. 7.22 Bestimmung von Anfangswerten

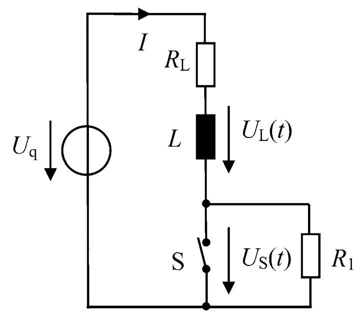


Abb. 7.23 S wird geöffnet

Lösung

$t < 0$: Vor dem Schließen des Schalters S ist $I_L(t) = 0$ und $I_C(t) = 0$.

$t = 0+$: Der Spulenstrom $I_L(t)$ springt nicht. Beginnend mit dem Wert null steigt er nach einer e-Funktion mit der Zeitkonstante $\tau = \frac{L}{R_1}$ an. $\underline{\underline{I_L(t = 0+) = 0}}$

Die Kondensatorspannung springt nicht. Beginnend mit dem Wert null steigt sie nach einer e-Funktion mit der Zeitkonstante $\tau = R_2 \cdot C$ an (der Kondensator wird geladen). Der Kondensatorstrom $I_C(t)$ macht jedoch beim Schließen des Schalters einen Sprung, er wird bei $t = 0+$ nur durch R_2 begrenzt. $\underline{\underline{I_C(t = 0+) = \frac{U_q}{R_2}}}$

Aufgabe 7.12

Im Stromkreis in Abb. 7.23 wird der Schalter S zum Zeitpunkt $t = 0$ geöffnet.

a) Wie groß ist die Stromstärke I im Stromkreis vor und lange Zeit nach dem Öffnen des Schalters?
b) Nach welcher Zeit hat der Strom I seinen neuen Wert praktisch angenommen?
c) Welche Spannung fällt im Augenblick des Öffnens von Schalter S an R_1 ab?
d) Wie lautet der analytische Ausdruck für den zeitlichen Verlauf der Selbstinduktionsspannung $U_L(t)$?
e) Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Spannung $U_S(t)$ über dem Schalter.

Gegeben: $U_q = 10\,\text{V}$ Gleichspannung, $R_L = 20\,\Omega$, $R_1 = 100\,\Omega$, $L = 0{,}5\,\text{H}$

Lösung

a) Vor dem Öffnen des Schalters ($t < 0$): Die ideale Induktivität L hat den Wicklungswiderstand null Ohm. Der geschlossene Schalter S ist eine Überbrückung von R_1 mit null Ohm. Der einzige Widerstand im Stromkreis ist R_L.

$$I(t < 0) = \frac{U_q}{R_L} = \frac{10\,\text{V}}{20\,\Omega} = \underline{\underline{0{,}5\,\text{A}}}$$

Lange Zeit nach dem Öffnen des Schalters ($t \to \infty$): R_L und R_1 begrenzen den Strom.

$$I(t \to \infty) = \frac{U_q}{R_L + R_1} = \frac{10\,\text{V}}{120\,\Omega} = \underline{\underline{0{,}083\,\text{A}}}$$

b) Praktisch ist nach $t = 5 \cdot \tau$ der Einschwingvorgang beendet.

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{L}{R_L + R_1} = \frac{0{,}5\,\text{H}}{120\,\Omega} = 4{,}16\,\text{ms}$$
$$t = 5 \cdot \tau = 5 \cdot 4{,}16\,\text{ms} = \underline{\underline{20{,}8\,\text{ms}}}$$

c) Da der Strom durch die Spule keinen Sprung macht, fließt unmittelbar nach dem Öffnen des Schalters der gleiche Strom durch R_1, wie er vor dem Öffnen im Stromkreis war. Der Spannungsabfall an R_1 entspricht der Spannung $U_S(t)$ über dem Schalter.

$$U_S(t = 0-) = U_S(t = 0+) = R_1 \cdot I(t < 0) = 100\,\Omega \cdot 0{,}5\,\text{A} = \underline{\underline{50\,\text{V}}}$$

d) Der Zeitverlauf der Spulenspannung beim Ausschalten einer Spule ist allgemein beschrieben durch den Ausdruck $U_L(t) = -U \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$. Im hier gegebenen Fall springt die Spulenspannung unmittelbar nach dem Öffnen des Schalters auf $-50\,\text{V}$ und fällt dann nach einer e-Funktion ab. $\underline{\underline{U_L(t) = -50\,\text{V} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{4{,}16\,\text{ms}}}}}$

e) Lange Zeit nach dem Öffnen des Schalters fällt über R_1 folgende Spannung ab:

$$U_S(t \to \infty) = I(t \to \infty) \cdot R_1 = 0{,}083\,\text{A} \cdot 100\,\Omega = 8{,}3\,\text{V}.$$

R_L und R_1 wirken als Spannungsteiler:

$$U_q \cdot \frac{R_1}{R_L + R_1} = 10\,\text{V} \cdot \frac{100\,\Omega}{120\,\Omega} = 8{,}3\,\text{V}.$$

Den zeitlichen Verlauf von U_S zeigt Abb. 7.24.

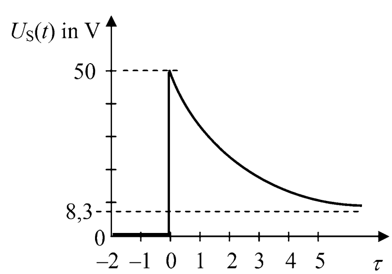


Abb. 7.24 Zeitlicher Verlauf von U_S

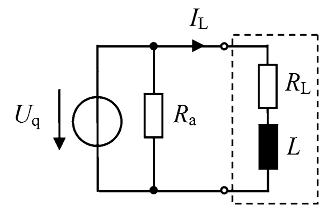


Abb. 7.25 Relaisspule an Gleichspannung

Aufgabe 7.13
Eine Relaisspule mit der Induktivität $L = 1{,}5\,\text{H}$ und dem Wicklungswiderstand $R_L = 120\,\Omega$ ist parallel zu einem ohmschen Widerstand R_a geschaltet. Die Schaltung liegt an einer Gleichspannung $U_q = 6\,\text{V}$.

a) Zeichnen Sie das Schaltbild der Anordnung.
b) Welchen Widerstandswert muss R_a mindestens erhalten, wenn beim Abschalten der Gleichspannung an den Klemmen der Relaisspule eine maximale Induktionsspannung von 160 V auftreten darf?
c) Wie groß ist dann die Zeitkonstante für das Abschalten?
d) Was wären die Auswirkungen, wenn zur Vermeidung einer hohen Induktionsspannung eine Freilaufdiode statt R_a verwendet würde? Wie sieht dann das Schaltbild aus?

Lösung
a) Das Schaltbild ist in Abb. 7.25 dargestellt.
b) Vor dem Abschalten von U_q ist:

$$I_L = \frac{U_q}{R_L} = \frac{6\,\text{V}}{120\,\Omega} = 50\,\text{mA}$$

Wenn U_q abgeschaltet wird, macht I_L keinen Sprung. I_L fließt jetzt über R_a. Das Ersatzschaltbild zeigt Abb. 7.26.

$$R_a = \frac{160\,\text{V}}{50\,\text{mA}} = \underline{\underline{3{,}2\,\text{k}\Omega}}$$

c) Abschaltzeitkonstante:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{L}{R_L + R_a} = \frac{1{,}5\,\text{H}}{120\,\Omega + 3200\,\Omega} = \underline{\underline{452\,\mu\text{s}}}$$

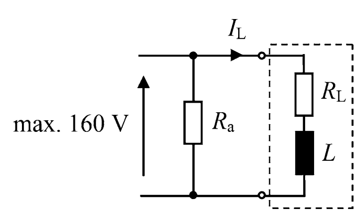


Abb. 7.26 Ersatzschaltbild, wenn die Spannungsquelle entfällt

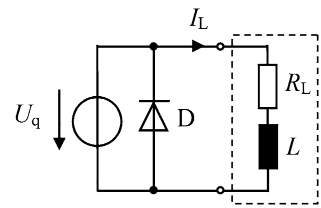


Abb. 7.27 Schaltbild bei Verwendung einer Freilaufdiode

Die Abschaltzeitkonstante wird umso größer, je kleiner R_a wird. I_L klingt also nach dem Abschalten der Spannungsquelle umso langsamer ab, je kleiner R_a wird.

d) Bei Verwendung einer Freilaufdiode (Abb. 7.27) wird die Induktionsspannung an den Klemmen der Relaisspule auf ca. 0,5 V bis 0,7 V begrenzt. Da der Durchlasswiderstand der Diode relativ klein ist, wird die Abschaltzeitkonstante gegenüber der Verwendung von R_a erheblich größer, I_L wird wesentlich langsamer kleiner. Daher dauert es erheblich länger, bis das Relais „abfällt", d. h., bis nach dem Ausschalten der Strom so weit abgesunken und damit das Magnetfeld so stark reduziert ist, dass der Schaltkontakt des Relais in den Ruhezustand wechselt.

Der verzweigte Gleichstromkreis

8

Zusammenfassung

Vorgestellt werden die Methoden zur Berechnung der Parallelschaltung von ohmschen Widerständen, Kondensatoren, Spulen und von Spannungs- und Stromquellen. Die Erweiterung des Messbereiches eines Strommessers ist wegen der erforderlichen Parallelschaltung eines Widerstandes ebenfalls hier enthalten. Der belastete Spannungsteiler mit seinen veränderten Spannungen gegenüber dem unbelasteten Zustand wird berechnet. Gemischte Schaltungen aus Reihen- und Parallelschaltungen mehrerer Bauelemente erweitern die Berechnungsmöglichkeiten verzweigter Netzwerke. Die Stern-Dreieck- und Dreieck-Stern-Umwandlung ergibt spezielle Methoden zur Umformung und Berechnung von Netzwerken. Mit der Transformation von Spannungs- in Stromquellen und umgekehrt werden Analysemöglichkeiten erweitert. Zahlreiche Beispiele zur Analyse von Netzwerken bieten die Möglichkeit für eigene Übungen. Die Knotenanalyse und der Überlagerungssatz vervollständigen die Analysemöglichkeiten.

8.1 Grundwissen – kurz und bündig

- Erstes Kirchhoff'sches Gesetz (Knotenregel): Die Summe aller Ströme in einem Knoten ist null.
- Zweites Kirchhoff'sches Gesetz (Maschenregel): Die Summe aller Spannungen in einer Masche ist null.
- Der Ersatzwiderstand einer Parallelschaltung von ohmschen Widerständen ist:

$$R_{\mathrm{ges}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_\mathrm{n}}}.$$

- Für die Parallelschaltung von zwei Widerständen gilt: $R_{\mathrm{ges}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$.
- Für die Parallelschaltung von Kondensatoren gilt: $C_{\mathrm{ges}} = C_1 + C_2 + \ldots + C_\mathrm{n}$.

L. Stiny, *Aufgabensammlung zur Elektrotechnik und Elektronik*,
DOI 10.1007/978-3-658-14381-7_8

- Für die Parallelschaltung von zwei magnetisch nicht gekoppelten Spulen gilt: $L_{\text{ges}} = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2}$.
- Werden Gleichspannungsquellen parallel geschaltet, so erhöht sich der entnehmbare Strom. Bestimmte Probleme sind dabei zu beachten.
- Durch die Parallelschaltung von Bauelementen können Ersatzwerte gewonnen werden.
- Der Messbereich eines Amperemeters kann durch einen Shunt erweitert werden.
  R_{P} = Parallelwiderstand; I_{M} = Messbereich; I_{mess} = erweiterter Messbereich; R_{i} = Innenwiderstand Strommesser
  Der Parallelwiderstand (Shunt) R_{P} bei Strommessung für $I_{\text{mess}} = x \cdot I_{\text{M}}$ ist

$$R_{\text{P}} = \frac{R_{\text{i}}}{x - 1} \text{ oder } R_{\text{P}} = \frac{R_{\text{i}} \cdot I_{\text{M}}}{I_{\text{mess}} - I_{\text{M}}}.$$

- Vom unbelasteten Spannungsteiler ist der belastete Spannungsteiler zu unterscheiden.
- Gemischte Schaltungen können durch Zusammenfassung von Bauelementen berechnet werden.
- Eine Sternschaltung kann in eine Dreieckschaltung umgewandelt werden und umgekehrt.
- Eine Spannungsquelle kann in eine Stromquelle umgewandelt werden und umgekehrt.
- Bei einem Netzwerk gibt es einen Baum, Maschen, Zweige und Knoten. Ein Netzwerk kann durch einen Graphen dargestellt werden.
- Ein Netzwerk kann mit der Maschenanalyse, der Knotenanalyse, durch den Überlagerungssatz oder mit dem Satz von der Ersatzspannungsquelle berechnet werden.

8.2 Parallelschaltung von ohmschen Widerständen

Aufgabe 8.1
Zwei Widerstände $R_1 = R_2 = 100\,\Omega$ sind parallel geschaltet. Wie groß ist der Ersatzwiderstand R_{ges}?

Lösung
Werden zwei gleich große Widerstände parallel geschaltet, so erhält man den halben Widerstandswert. Dies sollte man auswendig wissen!

$$R_1 \parallel R_2 = R_{\text{ges}} = \underline{\underline{50\,\Omega}}$$

Aufgabe 8.2
Zwei ohmsche Widerstände $R_1 = 60\,\Omega$ und $R_2 = 30\,\Omega$ sind parallel geschaltet. Wie groß ist der Ersatzwiderstand R_{ges}?

Lösung

$$R_{\text{ges}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{60 \cdot 30}{60 + 30}\,\Omega = \underline{\underline{20\,\Omega}}$$

Die Formel zur Berechnung des Ersatzwiderstandes von zwei parallel geschalteten ohmschen Widerständen ist formal der Formel für die Reihenschaltung von zwei Kondensatoren ähnlich.

Aufgabe 8.3
Drei Widerstände $R_1 = 60\,\Omega$, $R_2 = 30\,\Omega$ und $R_3 = 20\,\Omega$ sind parallel geschaltet. Berechnen Sie den Ersatzwiderstand R_{ges}.

Lösung

$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}; \quad \frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{60\,\Omega} + \frac{1}{30\,\Omega} + \frac{1}{20\,\Omega} = \frac{6}{60\,\Omega}; \quad \underline{\underline{R_{ges} = 10\,\Omega}}$$

Aufgabe 8.4
Es wird der Ersatzwiderstand R_{ges} von drei parallel geschalteten Widerständen $R_1 = 4{,}7\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 10\,\mathrm{k\Omega}$ und $R_3 = 47\,\mathrm{k\Omega}$ berechnet. Das Ergebnis ist $R_{ges} = 6{,}8\,\mathrm{k\Omega}$. Kann dieses Ergebnis stimmen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung
Das Ergebnis $R_{ges} = 6{,}8\,\mathrm{k\Omega}$ ist größer als der kleinste der drei Widerstände $R_1 = 4{,}7\,\mathrm{k\Omega}$ und ist somit falsch. Bei einer Parallelschaltung von ohmschen Widerständen ist der Ersatzwiderstand stets kleiner als der kleinste der Einzelwiderstände.

8.3 Parallelschaltung von Kondensatoren

Aufgabe 8.5
Wie groß ist die Kapazität des Kondensators C_2 der in Abb. 8.1 dargestellten Schaltung?

Lösung
$\underline{\underline{C_2 = 40\,\mu\mathrm{F}}}$

Lösungsweg: Die Parallelschaltung von zwei gleich großen Kapazitäten ergibt den doppelten Kapazitätswert. Die Reihenschaltung von zwei gleich großen Kapazitäten ergibt den halben Kapazitätswert.

Die Parallelschaltung von C_1 und C_2 muss $80\,\mu\mathrm{F}$ ergeben, damit deren Reihenschaltung mit C_3 die $40\,\mu\mathrm{F}$ von C_{ges} ergibt. C_2 muss somit eine Kapazität von $40\,\mu\mathrm{F}$ haben.

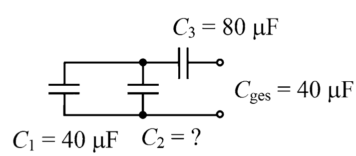


Abb. 8.1 Parallelschaltung von Kondensatoren

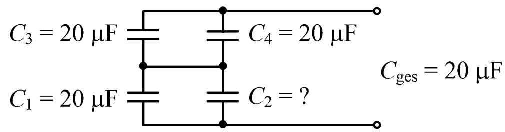


Abb. 8.2 Zusammenschaltung von Kondensatoren

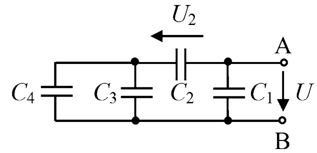


Abb. 8.3 Netzwerk mit Kondensatoren

Aufgabe 8.6

Wie groß ist die Kapazität des Kondensators C_2 der in Abb. 8.2 dargestellten Schaltung?

Lösung

$\underline{\underline{C_2 = 20\,\mu F}}$

Lösungsweg: Die Parallelschaltung von zwei gleich großen Kapazitäten ergibt den doppelten Kapazitätswert. Die Reihenschaltung von zwei gleich großen Kapazitäten ergibt den halben Kapazitätswert.

Die Parallelschaltung von C_1 und C_2 muss $40\,\mu F$ ergeben, damit deren Reihenschaltung mit der Parallelschaltung von C_3 und C_4 ($40\,\mu F$) den Wert $20\,\mu F$ von C_{ges} ergibt. C_2 muss somit eine Kapazität von $20\,\mu F$ haben.

Aufgabe 8.7

a) Gesucht ist die Gesamtkapazität C_{ges} zwischen den Klemmen A und B des Netzwerkes mit Kondensatoren in Abb. 8.3.
b) Bestimmen Sie das Verhältnis U_2/U mit Hilfe der kapazitiven Spannungsteilerregel.
c) Vergleichen Sie allgemein die kapazitive Spannungsteilerregel mit der Spannungsteilerregel für ohmsche Widerstände.

Gegeben: $C_1 = 500\,pF$; $C_2 = 30\,nF$; $C_3 = 50\,nF$; $C_4 = 10\,nF$

Lösung

a) Der Kapazitätswert $C_3 \parallel C_4$ ist $C_3 + C_4$.
Der Kapazitätswert der Reihenschaltung von C_2 und $C_3 \parallel C_4$ ist

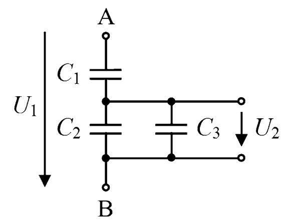
$$\frac{C_2 \cdot (C_3 + C_4)}{C_2 + C_3 + C_4}.$$

Zwischen den Klemmen A und B ist die Kapazität

$$C_{ges} = C_1 + \frac{C_2 \cdot (C_3 + C_4)}{C_2 + C_3 + C_4}.$$

$$C_{ges} = 0{,}5\,nF + \frac{30 \cdot 60}{90}\,nF = \underline{\underline{20{,}5\,nF}}$$

Abb. 8.4 Ein weiteres Netzwerk mit Kondensatoren



b) Bei der Reihenschaltung von Kondensatoren ist die Teilspannung U_x am Teilkondensator C_x entsprechend der kapazitiven Spannungsteilerregel:

$$U_\mathrm{x} = U \cdot \frac{C_\mathrm{ges}}{C_\mathrm{x}}$$

$$\frac{U_2}{U} = \frac{\frac{C_2 \cdot (C_3 + C_4)}{C_2 + C_3 + C_4}}{C_2} = \frac{C_3 + C_4}{C_2 + C_3 + C_4} = \frac{60\,\mathrm{nF}}{90\,\mathrm{nF}}; \quad \underline{\underline{\frac{U_2}{U} = \frac{2}{3}}}$$

Man beachte, dass C_1 nicht in die Spannungsteilerregel eingeht, da diese Kapazität parallel zur Spannungsquelle U liegt.

c) Bei der Reihenschaltung von ohmschen Widerständen ist die Teilspannung U_x am Teilwiderstand R_x:

$$U_\mathrm{x} = U \cdot \frac{R_\mathrm{x}}{R_\mathrm{ges}}$$

Beim ohmschen Spannungsteiler ist die Teilspannung U_x am Teilwiderstand R_x umso größer, je *größer* der Teilwiderstand R_x ist. Beim kapazitiven Spannungsteiler ist die Teilspannung U_x am Teilkondensator C_x umso größer, je *kleiner* die Teilkapazität C_x ist.

Aufgabe 8.8

a) Wie groß ist die Gesamtkapazität C_AB der Schaltung in Abb. 8.4 zwischen den Punkten A und B?

b) Welches Spannungsverhältnis U_2/U_1 ergibt sich aus den Einzelkapazitäten?

Lösung

a) C_2 und C_3 liegen parallel, die Ersatzkapazität ist die Summe: $C_{23} = C_2 + C_3$. C_{23} ist mit C_1 in Reihe geschaltet. Somit folgt:

$$\underline{\underline{C_\mathrm{AB} = \frac{C_1 \cdot (C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}}}.$$

b) Es liegt ein kapazitiver Spannungsteiler vor. Es gilt: $U_\mathrm{x} = U \cdot \frac{C_\mathrm{ges}}{C_\mathrm{x}}$ mit

U_x = Spannung am Kondensator C_x,

U = Gesamtspannung,

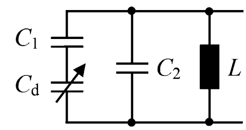


Abb. 8.5 Schwingkreis mit Kondensatoren

C_{ges} = Gesamtkapazität der Reihenschaltung,
C_x = Teilkapazität.

$$U_2 = U_1 \cdot \frac{C_{AB}}{C_2 + C_3} = U_1 \cdot \frac{C_1 \cdot (C_2 + C_3)}{(C_1 + C_2 + C_3) \cdot (C_2 + C_3)} = U_1 \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2 + C_3}$$

$$\underline{\underline{\frac{U_2}{U_1} = \frac{C_1}{C_1 + C_2 + C_3}}}$$

Aufgabe 8.9
Ein Schwingkreis enthält Kondensatoren wie in Abb. 8.5 dargestellt. Wie groß ist die Gesamtkapazität C_{max} maximal und C_{min} minimal? Auf welchen Kapazitätswert muss C_d eingestellt werden, wenn die Gesamtkapazität $C_{ges} = 250\,\text{pF}$ betragen soll?

Gegeben: $C_1 = 500\,\text{pF}$, $C_2 = 100\,\text{pF}$, C_d ist einstellbar zwischen 15 und 515 pF.

Lösung

$$C_{ges} = C_2 + \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_d}}$$

C_{ges} ist maximal, wenn C_d maximal ist. C_{ges} ist minimal, wenn C_d minimal ist.

$$C_{max} = 100\,\text{pF} + \frac{1}{\frac{1}{500\,\text{pF}} + \frac{1}{515\,\text{pF}}} = \underline{\underline{353{,}7\,\text{pF}}}$$

$$C_{min} = 100\,\text{pF} + \frac{1}{\frac{1}{500\,\text{pF}} + \frac{1}{15\,\text{pF}}} = \underline{\underline{114{,}6\,\text{pF}}}$$

C_{ges} auflösen nach C_d ergibt

$$C_d = \frac{1}{\frac{1}{C_{ges} - C_2} - \frac{1}{C_1}} = \frac{1}{\frac{1}{250\,\text{pF} - 100\,\text{pF}} - \frac{1}{500\,\text{pF}}} = \underline{\underline{214{,}3\,\text{pF}}}.$$

8.4 Parallelschaltung von Spulen

Aufgabe 8.10
Zu einer Spule mit der Induktivität $L_1 = 500\,\text{mH}$ wird eine Spule mit $L_2 = 0{,}3\,\text{H}$ parallel geschaltet (magnetisch nicht gekoppelt). Wie groß ist die Ersatzinduktivität L?

Lösung

$$L = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}3}{0{,}8}\,\text{H} = \underline{\underline{187{,}5\,\text{mH}}}$$

Die Formel zur Berechnung der Induktivität von zwei parallel geschalteten Spulen ist der Formel zur Berechnung des Widerstandes von zwei parallel geschalteten ohmschen Widerständen und der Formel zur Berechnung der Kapazität von zwei in Reihe geschalteten Kondensatoren formal ähnlich.

Aufgabe 8.11
Drei gleiche, magnetisch nicht gekoppelte Spulen mit der Induktivität $L = L_0$ werden parallel geschaltet. Wie groß ist die Gesamtinduktivität L_{ges} der Schaltung?

Lösung
Die Gesamtinduktivität von n parallel geschalteten Spulen ist

$$L_{\text{ges}} = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots + \frac{1}{L_{\text{n}}}}.$$

Mit $L_1 = L_2 = L_3 = L_0$ folgt $\underline{\underline{L_{\text{ges}} = \frac{L_0}{3}}}$.

8.5 Parallelschaltung von Spannungs- und Stromquellen

Aufgabe 8.12
Die Lichtmaschine eines Autos hat eine Quellenspannung $U_{\text{qL}} = 15{,}6\,\text{V}$ und einen Innenwiderstand $R_{\text{iL}} = 0{,}2\,\Omega$. Parallel zur Lichtmaschine ist die Autobatterie mit der Quellenspannung $U_{\text{qB}} = 12{,}6\,\text{V}$ und dem Innenwiderstand $R_{\text{iB}} = 0{,}01\,\Omega$ geschaltet. Die an diese Stromversorgung angeschlossenen Verbraucher entsprechen einem Lastwiderstand von $R_{\text{L}} = 1{,}2\,\Omega$.

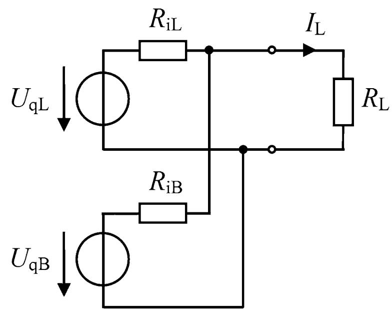


Abb. 8.6 Schaltbild mit Lichtmaschine und Autoakku

a) Zeichnen Sie das Schaltbild.
b) Wandeln Sie die beiden Spannungsquellen in äquivalente Stromquellen um und fassen Sie diese zu einer einzigen Ersatzstromquelle zusammen. Wie groß ist der Strom I_L durch R_L?

Lösung

a) Das Schaltbild ist in Abb. 8.6 dargestellt.
b) Die Spannungsquellen werden in äquivalente Stromquellen umgewandelt und diese zu einer einzigen Stromquelle zusammengefasst (Abb. 8.7).

$$I_{qL} = \frac{U_{qL}}{R_{iL}} = 78\,\mathrm{A}; \quad I_{qB} = \frac{U_{qB}}{R_{iB}} = 1260\,\mathrm{A}; \quad I_q = I_{qL} + I_{qB} = \underline{\underline{1338\,\mathrm{A}}}$$

$$R_i = R_{iL} \parallel R_{iB} = \frac{0{,}01 \cdot 0{,}2}{0{,}21}\,\Omega = \underline{\underline{9{,}5\,\mathrm{m}\Omega}}$$

Stromteilerregel:

$$I_L = I_q \cdot \frac{R_i}{R_i + R_L} = 1338\,\mathrm{A} \cdot \frac{9{,}5 \cdot 10^{-3}\,\Omega}{9{,}5 \cdot 10^{-3}\,\Omega + 1{,}2\,\Omega}; \quad \underline{\underline{I_L = 10{,}5\,\mathrm{A}}}$$

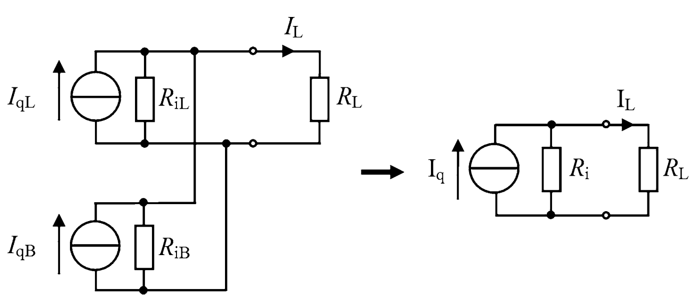


Abb. 8.7 Spannungsquellen umgewandelt in äquivalente Stromquellen, Zusammenfassung zu einer Stromquelle

Man könnte auch die Stromquelle wieder in eine Spannungsquelle umwandeln.

$$U_\mathrm{q} = I_\mathrm{q} \cdot R_\mathrm{i} = 1338\,\mathrm{A} \cdot 9{,}5 \cdot 10^{-3}\,\Omega = 12{,}7\,\mathrm{V};$$
$$I_\mathrm{L} = \frac{U_\mathrm{q}}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L}} = \frac{12{,}7\,\mathrm{V}}{9{,}5 \cdot 10^{-3}\,\Omega + 1{,}2\,\Omega} = \underline{\underline{10{,}5\,\mathrm{A}}}$$

Aufgabe 8.13
Was ist in der Praxis bei der Parallelschaltung von Spannungs- und Stromquellen zu beachten?

Lösung
Stromquellen können unbedenklich parallel geschaltet werden, um die Stromergiebigkeit zu erhöhen. – Eine Parallelschaltung von Spannungsquellen zu verwenden, um den verfügbaren maximalen Strom zu erhöhen, kann dagegen problematisch sein. Alle parallel geschalteten Spannungsquellen müssen

- die gleiche Spannung liefern,
- gleiche Innenwiderstände aufweisen,
- mit gleicher Polung zusammengeschaltet werden,
- erd- bzw. potenzialfrei oder am gleichen Pol geerdet sein.
- Wechselspannungen müssen gleichphasig zusammengeschaltet werden.

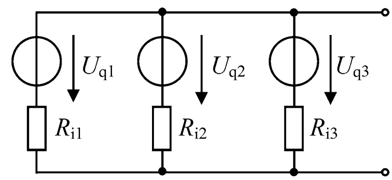
Werden diese Punkte nicht beachtet, sind Ausgleichsströme zwischen den Quellen die Folge. Durch eine unkontrollierte Stomaufteilung zwischen den Spannungsquellen kann es zu einer starken Überlastung einer Quelle kommen. Eine falsche Polung kommt z. B. einem Kurzschluss gleich. Selbst bei gleichen Spannungen wird die Stromaufteilung auf die einzelnen Spannungsquellen durch ihre Innenwiderstände festgelegt. Von ihnen ist meist nur bekannt, dass sie klein sind, ihr genauer Wert ist oft unbekannt. Eine unterschiedliche Stromaufteilung kann zur Überlastung einer Quelle führen.

Weisen alle Spannungsquellen die gleiche Spannung und den gleichen Innenwiderstand auf, so ist der Maximalstrom gleich der Summe der Maximalströme der einzelnen Spannungsquellen. Der gesamte Innenwiderstand der parallel geschalteten Spannungsquellen entspricht der Parallelschaltung ihrer einzelnen Innenwiderstände.

Aufgabe 8.14
Geben Sie die Parameter der Ersatzspannungsquelle und der Ersatzstromquelle der Schaltung in Abb. 8.8 an, bestimmen Sie also jeweils Quellenspannung und Quellenstrom sowie den Innenwiderstand der Ersatzschaltung.

Gegeben: $U_\mathrm{q1} = 1{,}5\,\mathrm{V}$, $U_\mathrm{q2} = 1{,}4\,\mathrm{V}$, $U_\mathrm{q3} = 1{,}5\,\mathrm{V}$, $R_\mathrm{i1} = 1{,}0\,\Omega$, $R_\mathrm{i2} = 0{,}9\,\Omega$, $R_\mathrm{i3} = 1{,}4\,\Omega$

Abb. 8.8 Parallel geschaltete Spannungsquellen



Lösung

Die Spannungsquellen werden zuerst in äquivalente Stromquellen umgewandelt (siehe auch Abschn. 8.10, Umwandlung von Quellen). Das Ergebnis zeigt Abb. 8.9. Die Werte der einzelnen Stromquellen sind:

$$I_{q1} = \frac{U_{q1}}{R_{i1}} = \frac{1{,}5\,\text{V}}{1{,}0\,\Omega} = 1{,}5\,\text{A}; \quad I_{q2} = \frac{U_{q2}}{R_{i2}} = \frac{1{,}4\,\text{V}}{0{,}9\,\Omega} = 1{,}56\,\text{A};$$
$$I_{q3} = \frac{U_{q3}}{R_{i3}} = \frac{1{,}5\,\text{V}}{1{,}4\,\Omega} = 1{,}07\,\text{A}.$$

Die Stromquellen werden zu einer Stromquelle zusammengefasst (Abb. 8.10a).

$$I_q = I_{q1} + I_{q2} + I_{q3} = 1{,}5\,\text{A} + 1{,}56\,\text{A} + 1{,}07\,\text{A} = \underline{\underline{4{,}13\,\text{A}}}$$
$$R_i = \frac{1}{\frac{1}{R_{i1}} + \frac{1}{R_{i2}} + \frac{1}{R_{i3}}} = \frac{1}{\frac{1}{1{,}0\,\Omega} + \frac{1}{0{,}9\,\Omega} + \frac{1}{1{,}4\,\Omega}} = \underline{\underline{0{,}354\,\Omega}}$$

Die Quellenspannung (Abb. 8.10b) ist: $U_q = I_q \cdot R_i = 4{,}13\,\text{A} \cdot 0{,}354\,\Omega = \underline{\underline{1{,}46\,\text{V}}}$.

Abb. 8.9 Netzwerk mit Stromquellen statt mit Spannungsquellen

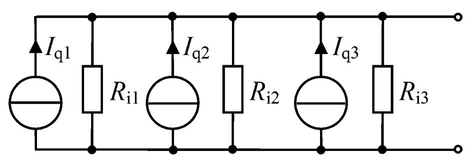
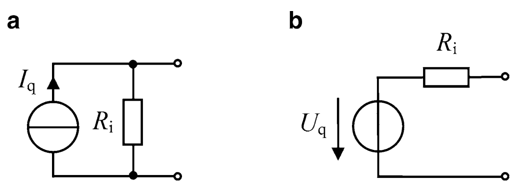


Abb. 8.10 Ersatzspannungsquelle (**a**) und Ersatzstromquelle (**b**) der Schaltung in Abb. 8.8



8.6 Erweiterung des Messbereiches eines Amperemeters

Aufgabe 8.15
Ein Strommesser mit Drehspulmesswerk hat einen Messbereich von $I_M = 1{,}0\,\text{A}$ und einen inneren Widerstand von $R_i = 0{,}15\,\Omega$. Der Messbereich soll durch einen Parallelwiderstand (Shunt) auf $I_{mess} = 6\,\text{A}$ erweitert werden. Berechnen Sie den Shunt R_P.

Lösung

$$R_P = \frac{R_i \cdot I_M}{I_{mess} - I_M} = \frac{0{,}15\,\Omega \cdot 1\,\text{A}}{6\,\text{A} - 1\,\text{A}} = \underline{\underline{30\,\text{m}\Omega}}$$

Aufgabe 8.16
Ein Strommesser mit einem Innenwiderstand von $R_i = 1\,\Omega$ misst bei Vollausschlag den Strom $I_M = 100\,\text{mA}$. Der Messbereich soll bis $I_{mess} = 5\,\text{A}$ erweitert werden.

a) Welchen Widerstandswert muss der Shunt R_P (Nebenwiderstand) erhalten?
b) Welcher Gesamtwiderstand R_{ges} ergibt sich?

Lösung
a)

$$R_P = \frac{R_i \cdot I_M}{I_{mess} - I_M} = \frac{1\,\Omega \cdot 0{,}1\,\text{A}}{5\,\text{A} - 0{,}1\,\text{A}} = \underline{\underline{20{,}4\,\text{m}\Omega}}$$

b) R_i und R_P liegen parallel:

$$R_{ges} = \frac{R_P \cdot R_i}{R_P + R_i} = \underline{\underline{20{,}0\,\text{m}\Omega}}$$

Aufgabe 8.17
Ein Drehspulmessgerät mit Vollausschlag bei $I = 100\,\mu\text{A}$ und dem Innenwiderstand $R_i = 2\,\text{k}\Omega$ soll entsprechend Abb. 8.11 zur Strommessung erweitert werden.

► **Anmerkung** Die angegebene Schaltung wird in der Praxis verwendet, da sich die Kontaktwiderstände des Schalters nicht auf die Messgenauigkeit auswirken, sie beeinflussen nicht das Verhältnis des Stromteilers.

Für die Schalterstellungen 1, 2 und 3 sollen (jeweils für Vollausschlag) die Messbereiche $I = 30\,\text{mA}$, $I = 10\,\text{mA}$ und $I = 3\,\text{mA}$ eingestellt werden können. Berechnen Sie für diese Messbereiche die Widerstände R_1, R_2 und R_3.

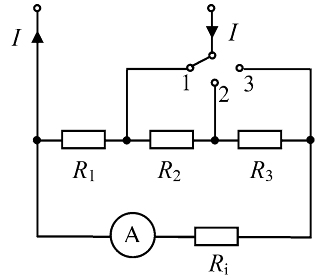


Abb. 8.11 Erweiterung eines Drehspulmesswerks zur Strommessung mit mehreren Messbereichen

Lösung

Allgemein gilt für einen Shunt:

$$R_P = \frac{R_i \cdot I_M}{I_{mess} - I_M}.$$

R_P = Parallelwiderstand; I_M = Messbereich; I_{mess} = erweiterter Messbereich; R_i = Innenwiderstand Strommesser

30 mA-Bereich: $R_1 = \frac{0{,}2\,\text{V}}{0{,}03\,\text{A}-0{,}0001\,\text{A}} = \underline{\underline{6{,}7\,\Omega}}$
10 mA-Bereich: $R_1 + R_2 = \frac{0{,}2\,\text{V}}{0{,}01\,\text{A}-0{,}0001\,\text{A}} = 20{,}2\,\Omega$; $\underline{\underline{R_2 = 13{,}5\,\Omega}}$
3 mA-Bereich: $R_1 + R_2 + R_3 = \frac{0{,}2\,\text{V}}{0{,}003\,\text{A}-0{,}0001\,\text{A}} = 69\,\Omega$; $\underline{\underline{R_3 = 48{,}8\,\Omega}}$

Man beachte, dass bei diesem Ansatz in Schalterstellung 1 die Widerstände R_2 und R_3 in Reihe zu R_1 vernachlässigt sind. In Schalterstellung 2 ist der Widerstand R_3 in Reihe zu $R_1 + R_2$ vernachlässigt.

Soll ein Strommesser mit dem Innenwiderstand R_i auf einen x-fachen Messbereich erweitert werden, so ist ein Parallelwiderstand mit dem Wert $R_P = R_i/(x-1)$ erforderlich.

Für $I = 30\,\text{mA}$ ist $x - 1 = 299$.

Für $I = 10\,\text{mA}$ ist $x - 1 = 99$.

Für $I = 3\,\text{mA}$ ist $x - 1 = 29$.

Man erhält jetzt folgende drei Gleichungen.

30 mA-Bereich: $R_1 = \frac{1}{299} \cdot (R_i + R_2 + R_3)$
10 mA-Bereich: $R_1 + R_2 = \frac{1}{99} \cdot (R_i + R_3)$
3 mA-Bereich: $R_1 + R_2 + R_3 = \frac{1}{29} \cdot R_i$

Wird dieses Gleichungssystem mit den drei Unbekannten R_1, R_2, R_3 gelöst, so erhalten wir für die drei Widerstände:

$$\underline{\underline{R_1 = 6{,}9\,\Omega}}; \quad \underline{\underline{R_2 = 13{,}6\,\Omega}}; \quad \underline{\underline{R_3 = 48{,}4\,\Omega}}$$

Wegen des großen Wertes von R_i sind die Abweichungen der exakt berechneten Widerstandswerte von den zuerst berechneten Werten sehr klein.

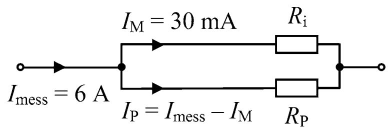


Abb. 8.12 Ersatzschaltung eines Strommessers mit Shunt

Aufgabe 8.18

Ein Strommesser mit einem Vollausschlag $I_M = 30\,\text{mA}$ und einem Innenwiderstand $R_i = 9\,\Omega$ soll auf einen Messbereich von $I_{mess} = 6\,\text{A}$ erweitert werden. Gesucht ist der Parallelwiderstand (Shunt) R_P, der jeweils maximale Leistungsverbrauch P_i im Instrument und P_P im Parallelwiderstand R_P.

Lösung

Die Ersatzschaltung der Anordnung zeigt Abb. 8.12.

Der Wert des Shunts errechnet sich nach dem ohmschen Gesetz aus dem Spannungsabfall des Instruments und dem durch den Shunt fließenden Strom.

$$R_P = \frac{R_i \cdot I_M}{I_{mess} - I_M}; \quad R_P = \frac{9\,\Omega \cdot 0{,}03\,\text{A}}{6\,\text{A} - 0{,}03\,\text{A}} = \underline{\underline{45{,}2\,\text{m}\Omega}}$$

Der Leistungsverbrauch P_i im Instrument errechnet sich aus dem Strom durch das Messwerk und dessen Innenwiderstand:

$$P_i = I_M^2 \cdot R_i = (30\,\text{mA})^2 \cdot 9\,\Omega = \underline{\underline{8{,}1\,\text{mW}}}$$

Der Leistungsverbrauch in R_P errechnet sich aus dessen Widerstandswert und den durch ihn fließenden Strom:

$$P_P = I_P^2 \cdot R_P = (6\,\text{A} - 30\,\text{mA})^2 \cdot 45{,}2\,\text{m}\Omega = \underline{\underline{1{,}61\,\text{W}}}$$

Aufgabe 8.19

In einem Gleichstrommessgerät wird die Schaltung in Abb. 8.13 mit Parallelwiderständen zur Realisierung verschiedener Strommessbereiche verwendet. Der jeweilige Messbereich wird durch Überbrücken der zugehörigen Klemmen gewählt. Am Innenwiderstand R_M des Messwerks entsteht bei Vollausschlag $I_M = 50\,\mu\text{A}$ ein Spannungsabfall $U_M = 100\,\text{mV}$.

Berechnen Sie den Innenwiderstand R_M des Messwerks und die Parallelwiderstände R_1 bis R_7.

Lösung

$$R_M = \frac{U_M}{I_M} = \underline{\underline{2\,\text{k}\Omega}}$$

Messbereich $100\,\mu\text{A}$:

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 + R_7 = R_P = \frac{U_M}{I_1 - I_M} = \frac{100\,\text{mV}}{100\,\mu\text{A} - 50\,\mu\text{A}} \Rightarrow R_P = 2\,\text{k}\Omega$$

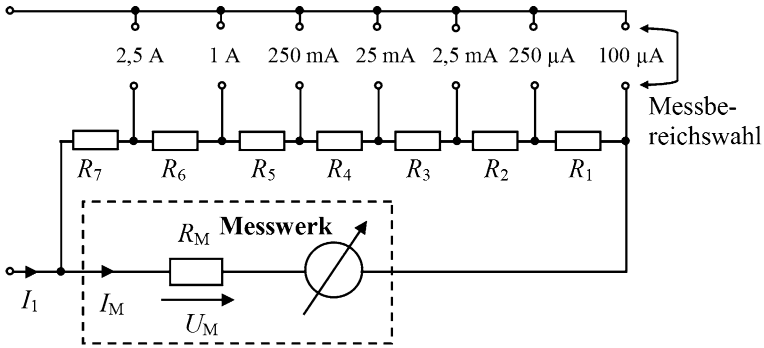


Abb. 8.13 Gleichstrommessgerät mit verschiedenen Messbereichen

Abb. 8.14 Teilschaltung für Messbereich 250 µA

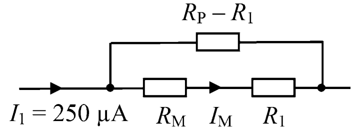
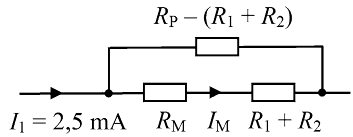


Abb. 8.15 Teilschaltung für Messbereich 2,5 mA



Messbereich 250 µA:

Zu der Reihenschaltung aus R_M und R_1 liegt $R_P - R_1$ parallel. Die Teilschaltung zeigt Abb. 8.14.

$$\text{Stromteilerregel: } \frac{I_M}{I_1} = \frac{R_P - R_1}{R_M + R_1 + R_P - R_1} = \frac{R_P - R_1}{R_M + R_P};$$

$$R_1 = R_P - \frac{I_M}{I_1}(R_M + R_P)$$

$$R_1 = 2\,\text{k}\Omega - \frac{50\,\mu\text{A}}{250\,\mu\text{A}} \cdot (2\,\text{k}\Omega + 2\,\text{k}\Omega) = \underline{\underline{1200\,\Omega}}$$

Messbereich 2,5 mA:

Die Teilschaltung zeigt Abb. 8.15.

$$\frac{I_M}{I_1} = \frac{R_P - R_1 - R_2}{R_M + R_1 + R_2 + R_P - R_1 - R_2} = \frac{R_P - R_1 - R_2}{R_M + R_P};$$

$$R_2 = R_P - R_1 - \frac{I_M}{I_1}(R_M + R_P)$$

$$R_2 = 2\text{k}\Omega - 1200\,\Omega - \frac{50\,\mu\text{A}}{2500\,\mu\text{A}} \cdot 4\,\text{k}\Omega = \underline{\underline{720\,\Omega}}$$

Bei gleichem Vorgehen berechnen sich die weiteren Widerstände zu:

$$\underline{\underline{R_3 = 72\,\Omega}};\quad \underline{\underline{R_4 = 7{,}2\,\Omega}};\quad \underline{\underline{R_5 = 0{,}6\,\Omega}};\quad \underline{\underline{R_6 = 0{,}12\,\Omega}};\quad \underline{\underline{R_7 = 0{,}08\,\Omega}}$$

8.7 Der belastete Spannungsteiler

Aufgabe 8.20
Der Spannungsteiler wurde bereits in Abschn. 3.2.4 behandelt. Es folgen ergänzende Aufgaben zum belasteten Spannungsteiler. Gegeben ist der Spannungsteiler in Abb. 8.16.

Gegeben: $U_1 = 28\,\text{V}$, $R_1 = 2\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 9\,\text{k}\Omega$, $R_3 = 3\,\text{k}\Omega$

a) Berechnen Sie U_2 und U_3.
b) Parallel zu R_2 wird ein Widerstand $R = 11{,}25\,\text{k}\Omega$ geschaltet. Wie groß sind jetzt U_2 und U_3? Wie wird der Spannungsteiler jetzt bezeichnet?

Lösung
a) Anwendung der Spannungsteilerregel:

$$U_2 = U_1 \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 28\,\text{V} \frac{12\,\text{k}\Omega}{14\,\text{k}\Omega} = \underline{\underline{24\,\text{V}}}$$
$$U_3 = U_1 \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 28\,\text{V} \frac{3\,\text{k}\Omega}{14\,\text{k}\Omega} = \underline{\underline{6\,\text{V}}}$$

b)

$$R_2' = \frac{R_2 \cdot 11{,}25\,\text{k}\Omega}{R_2 + 11{,}25\,\text{k}\Omega} = 5\,\text{k}\Omega$$
$$U_2 = U_1 \frac{R_2' + R_3}{R_1 + R_2' + R_3} = 28\,\text{V} \frac{8\,\text{k}\Omega}{10\,\text{k}\Omega} = \underline{\underline{22{,}4\,\text{V}}}$$
$$U_3 = U_1 \frac{R_3}{R_1 + R_2' + R_3} = 28\,\text{V} \frac{3\,\text{k}\Omega}{10\,\text{k}\Omega} = \underline{\underline{8{,}4\,\text{V}}}$$

Die Schaltung wird jetzt als *belasteter* Spannungsteiler bezeichnet.

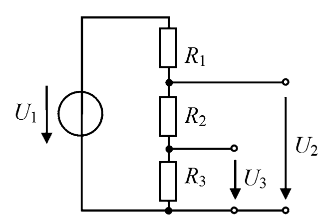


Abb. 8.16 Ein Spannungsteiler aus ohmschen Widerständen

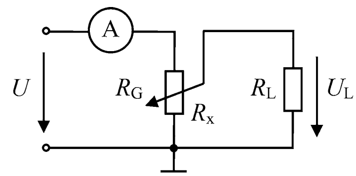


Abb. 8.17 Potenziometer in Spannungsteilerschaltung mit Last

Aufgabe 8.21
Ein Potenziometer in Spannungsteilerschaltung (Abb. 8.17) wird mit dem Widerstand $R_L = 470\,\Omega$ belastet. Wie groß ist die Spannung U_L? Welchen Strom I zeigt das Amperemeter an?

Gegeben: $U = 24\,\text{V}$, $R_G = 3{,}3\,\text{k}\Omega$ = Gesamtwiderstand des Potenziometers, $R_x = 3000\,\Omega$ = Widerstand zwischen Abgriff (Schleifer) und Masse

Lösung
Nach der Spannungsteilerregel ergibt sich U_L zu:

$$U_L = U \cdot \frac{R_x \parallel R_L}{R_x \parallel R_L + (R_G - R_x)} = U \cdot \frac{\frac{R_x \cdot R_L}{R_x + R_L}}{\frac{R_x \cdot R_L}{R_x + R_L} + (R_G - R_x)}.$$

$$U_L = 24\,\text{V} \cdot \frac{406{,}34}{406{,}34 + 300} = \underline{\underline{13{,}8\,\text{V}}}$$

$$I = \frac{U}{R_x \parallel R_L + (R_G - R_x)} = \frac{24\,\text{V}}{706{,}34\,\Omega} = \underline{\underline{34\,\text{mA}}}$$

Aufgabe 8.22
Das Potenziometer in Abb. 8.18 mit dem Gesamtwiderstand $R = 200\,\Omega$ wird unbelastet und belastet betrachtet. Der Widerstand vom Anschluss A des Potenziometers bis zum Schleifer beträgt $\frac{3}{4}R$.

Berechnen Sie jeweils U, I, I_R, I_{Ra}, wenn der Schalter S offen und geschlossen ist.

Lösung
S offen (unbelasteter Spannungsteiler):

$$U = 230\,\text{V} \cdot \frac{150\,\Omega}{200\,\Omega} = \underline{\underline{172{,}5\,\text{V}}}; \quad I = I_R = \frac{230\,\text{V}}{200\,\Omega} = \underline{\underline{1{,}15\,\text{A}}}; \quad \underline{\underline{I_{Ra} = 0}}$$

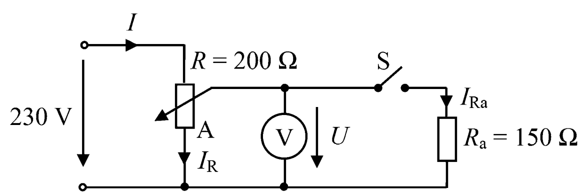


Abb. 8.18 Potenziometer unbelastet und belastet

▶ **Anmerkung** Die Belastung des Potis ist sehr hoch.

$$P = U \cdot I = 230\,\text{V} \cdot 1{,}15\,\text{A} = 264{,}5\,\text{W}$$

S geschlossen (belasteter Spannungsteiler):

$$U = 230\,\text{V} \cdot \frac{150\,\Omega \parallel 150\,\Omega}{50\,\Omega + 150\,\Omega \parallel 150\,\Omega} = 230\,\text{V} \cdot \frac{75\,\Omega}{125\,\Omega} = \underline{\underline{138\,\text{V}}}$$

$$I_\text{R} = \frac{138\,\text{V}}{150\,\Omega} = \underline{\underline{0{,}92\,\text{A}}}; \quad I_\text{Ra} = \frac{138\,\text{V}}{150\,\Omega} = \underline{\underline{0{,}92\,\text{A}}}; \quad I = I_\text{R} + I_\text{Ra} = \underline{\underline{1{,}84\,\text{A}}}$$

8.8 Gemischte Schaltungen

Aufgabe 8.23
Berechnen Sie den Ersatzwiderstand der in Abb. 8.19 bis Abb. 8.22 angegebenen Widerstandskombinationen zwischen den Anschlussklemmen A und B.

a) $R_1 = 40\,\Omega$, $R_2 = 40\,\Omega$, $R_3 = 6\,\Omega$

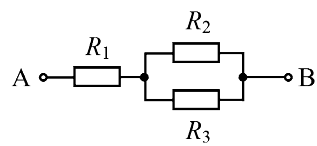


Abb. 8.19 Zu bestimmen ist der Ersatzwiderstand zwischen den Klemmen A und B

b) alle $R = 18\,\Omega$

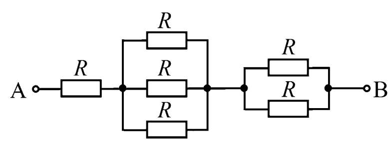


Abb. 8.20 Zu bestimmen ist der Ersatzwiderstand zwischen den Klemmen A und B

c) alle $R = 2\,\Omega$

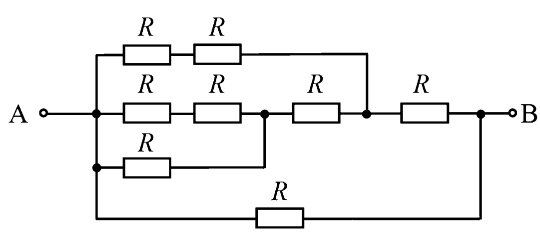


Abb. 8.21 Zu bestimmen ist der Ersatzwiderstand zwischen den Klemmen A und B

d) alle $R = 1\,\Omega$

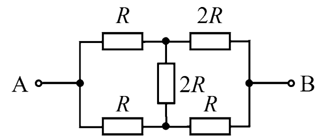


Abb. 8.22 Zu bestimmen ist der Ersatzwiderstand zwischen den Klemmen A und B

Lösung

a) Es handelt sich um eine gemischte Parallel- und Reihenschaltung.

$$R_{\mathrm{AB}} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 40\,\Omega + \frac{40\,\Omega \cdot 6\,\Omega}{40\,\Omega + 6\,\Omega} = \underline{\underline{45{,}2\,\Omega}}$$

b) Auch dies ist eine gemischte Parallel- und Reihenschaltung.

$$R_{\mathrm{AB}} = R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}} + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = R + \frac{R}{3} + \frac{R}{2} = 18\,\Omega + 6\,\Omega + 9\,\Omega = \underline{\underline{33\,\Omega}}$$

c) Das Netzwerk wird in zwei Ersatznetzwerke zerlegt (Abb. 8.23).

$$R_{\mathrm{ers1}} = \frac{2R \cdot R}{2R + R} + R = \frac{5R}{3}$$

$$R_{\mathrm{ers2}} = \frac{R_{\mathrm{ers1}} \cdot 2R}{R_{\mathrm{ers1}} + 2R} + R = \frac{\frac{5R}{3} \cdot 2R}{\frac{5R}{3} + \frac{6R}{3}} + R = \frac{21R}{11}$$

Jetzt wird noch der Widerstand zwischen den Klemmen A und B parallel zu R_{ers2} berücksichtigt.

$$R_{\mathrm{AB}} = \frac{R_{\mathrm{ers2}} \cdot R}{R_{\mathrm{ers2}} + R} = \frac{\frac{21R}{11} \cdot R}{\frac{21R}{11} + \frac{11R}{11}} = 0{,}656 \cdot R = \underline{\underline{1{,}3\,\Omega}}$$

d) Es wird eine Dreieck-Stern-Transformation durchgeführt (Abb. 8.24).

$$R_1 = \frac{R \cdot R}{R + R + 2R} = 0{,}25\,\Omega; \quad R_2 = R_3 = \frac{R \cdot 2R}{4R} = 0{,}5\,\Omega$$

Somit ist: $$R_{\mathrm{AB}} = R_1 + \frac{(R_2 + 2R) \cdot (R_3 + R)}{R_2 + 2R + R_3 + R} = 0{,}25\,\Omega + \frac{2{,}5\,\Omega \cdot 1{,}5\,\Omega}{4\,\Omega} = \underline{\underline{1{,}19\,\Omega}}$$

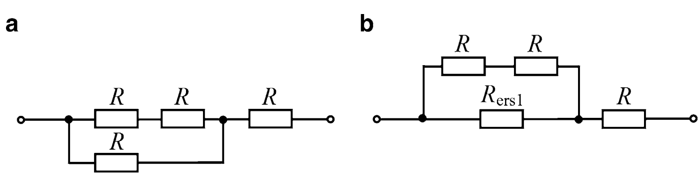


Abb. 8.23 Schaltung **a** ist R_{ers1} und Schaltung **b** ist R_{ers2}

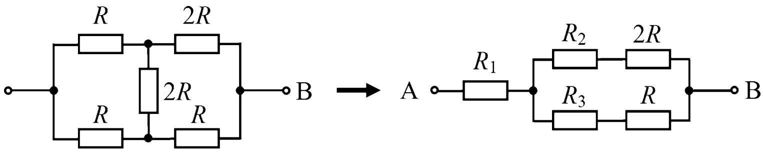


Abb. 8.24 Umwandlung durch Dreieck-Stern-Transformation

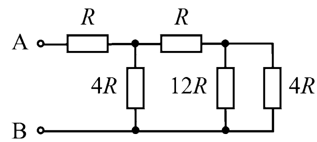


Abb. 8.25 Zu bestimmen ist der Widerstand R_{AB}

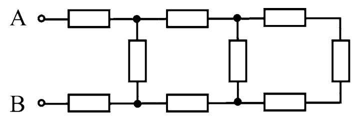


Abb. 8.26 Gesucht ist der Ersatzwiderstand zwischen den Klemmen A und B

Aufgabe 8.24

Wie groß ist der Widerstand R_{AB} zwischen den Klemmen A und B des in Abb. 8.25 gezeigten Widerstandsnetzwerkes?

Lösung

Von rechts nach links gehend werden die Widerstände der Teilschaltungen bestimmt.

$12R \parallel 4R = \frac{12R \cdot 4R}{12R+4R} = 3R$; $R + 3R = 4R$; $4R \| 4R = 2R$ (die Hälfte, da beide parallel liegenden Widerstände gleich groß sind); $R_{AB} = R + 2R = \underline{\underline{3R}}$

Aufgabe 8.25

Berechnen Sie den Widerstand R_{AB} zwischen den Klemmen A und B der Schaltungen in Abb. 8.26 und 8.27.

a) Alle Widerstände haben den Wert $R = 4\,\Omega$.
b) Die Widerstandswerte sind in Abb. 8.27 gegeben.

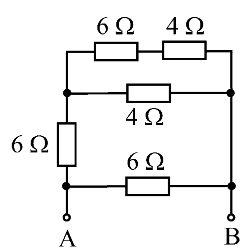


Abb. 8.27 Gesucht ist der Ersatzwiderstand zwischen den Klemmen A und B

Abb. 8.28 Zusammenfassung von Reihen- und Parallelschaltungen der Widerstände

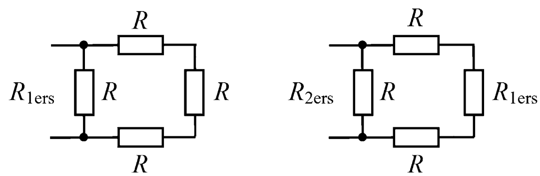
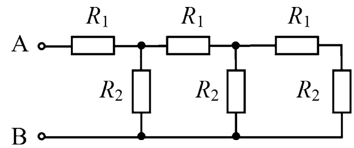


Abb. 8.29 Gesucht ist der Ersatzwiderstand zwischen den Klemmen A und B



Lösung

a) Die Reihen- und Parallelschaltungen der Widerstände werden von rechts her nacheinander zusammengefasst (Abb. 8.28).

$$R_{1\text{ers}} = R \parallel 3R = \frac{R \cdot 3R}{R + 3R} = \frac{3}{4}R;$$

$$R_{2\text{ers}} = R \parallel (R + R + R_{1\text{ers}}) = \frac{R \cdot \frac{11}{4}R}{\frac{15}{4}R} = \frac{11}{15}R$$

$$R_{\text{AB}} = R + R_{2\text{ers}} + R = \frac{41}{15}R; \quad \underline{\underline{R_{\text{AB}} = 10{,}93\,\Omega}}$$

b)

$$R_{\text{AB}} = 6\,\Omega \parallel (6\,\Omega + (4\,\Omega \parallel (6\,\Omega + 4\,\Omega))); \quad 4\,\Omega \parallel (6\,\Omega + 4\,\Omega) = \frac{40}{14}\,\Omega = \frac{20}{7}\,\Omega$$

$$6\,\Omega + \frac{20}{7}\,\Omega = \frac{62}{7}\,\Omega; \quad R_{\text{AB}} = \frac{6 \cdot \frac{62}{7}}{6 + \frac{62}{7}}\,\Omega = \frac{372}{104}\,\Omega = \underline{\underline{3{,}58\,\Omega}}$$

Aufgabe 8.26

Berechnen Sie den Widerstand zwischen den Klemmen A und B des in Abb. 8.29 gezeigten Widerstandsnetzwerkes. Gegeben: $R_1 = 5\,\Omega$, $R_2 = 50\,\Omega$.

Lösung

$$R_{\text{AB}} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_2}} + R_1} + \frac{1}{R_2}} + R_1$$

Nachfolgend wird erläutert, wie dieser Ausdruck gewonnen wird. Das Netzwerk wird von rechts beginnend berechnet. Der Bruch wird dabei von unten nach oben betrachtet. Man summiert die Widerstände R_1 und R_2 (Reihenschaltung), erhält dann durch das Bilden des Kehrwertes einen Leitwert, zu dem man den Leitwert von R_2 addiert (wegen der

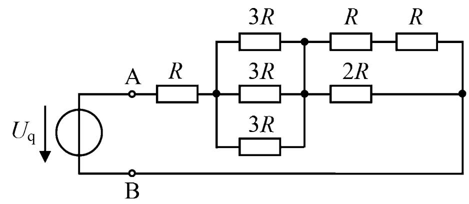


Abb. 8.30 Ein Widerstandsnetzwerk

Parallelschaltung). Der Kehrwert ergibt einen Widerstand, zu dem R_1 addiert wird. Die erneute Kehrwertbildung ergibt wieder einen Leitwert, zu dem der Leitwert von R_2 addiert wird. Zum Kehrwert (Widerstand) wird R_1 addiert.

Die aufeinander folgenden Serien- und Parallelschaltungen werden also durch Addition der Widerstandswerte bzw. der Leitwerte berechnet. Vereinfachen ergibt:

$$R_{AB} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{R_2(R_1+R_2)}{R_1+2R_2}+R_1} + \frac{1}{R_2}} + R_1 = \frac{1}{\frac{R_1+2R_2}{R_1^2+R_2^2+3R_1R_2} + \frac{1}{R_2}} + R_1$$

$$R_{AB} = \frac{R_2^3 + R_1^2 R_2 + 3R_1 R_2^2}{R_1^2 + 3R_2^2 + 4R_1 R_2} + R_1 = \underline{\underline{24{,}2\,\Omega}}$$

Aufgabe 8.27

a) Wie groß ist der Widerstand R_{AB} zwischen den Klemmen A und B in Abb. 8.30?
b) Bestimmen Sie alle Zweigströme.
c) Welche Spannungen liegen an den Widerständen?

Lösung

a) $X_{AB} = R + 3R \parallel 3R \parallel 3R + 2R \parallel 2R$; $X_{AB} = R + R + R = \underline{\underline{3R}}$;
b) Von der Klemme A fließt der Strom über R entsprechend dem Widerstand R_{AB} mit der Stärke $\underline{\underline{I = \frac{U_q}{3R}}}$.

   An dem Knoten nach R teilt sich der Strom auf die drei parallel liegenden Widerstände auf. Da diese gleich groß sind (jeweils $3R$), ist die Aufteilung des Stromes auf jeden parallel liegenden Zweig gleich groß und beträgt $\underline{\underline{I/3}}$.

   Am rechts folgenden Knoten fließen die drei Teilströme wieder zusammen. Der Strom teilt sich dann wieder auf die Parallelschaltung von jeweils $2R$ mit dem gleich großen Wert $\underline{\underline{I/2}}$ auf.
c) Wenn man von einem vereinfachten Ersatzschaltbild ausgeht, so sind drei gleich große Widerstände R in Reihe geschaltet. Zwischen den Knoten beträgt die Spannung also jeweils $\underline{\underline{U_q/3}}$.

   An der Reihenschaltung $R + R$ teilt sich diese Teilspannung wieder zur Hälfte auf, so dass an jedem der beiden in Reihe geschalteten Widerstände R jeweils $\underline{\underline{U_q/6}}$ anliegt.

8.9 Stern-Dreieck- und Dreieck-Stern-Umwandlung

Aufgabe 8.28

Wie groß ist in Abb. 8.31 die zwischen den Punkten A und B abgegriffene Spannung U_{AB}?

Gegeben: $R_1 = R_2 = R_3 = 3\,\Omega$; $R_4 = R_5 = R_6 = 6\,\Omega$; $U_{12} = 10\,\text{V}$.

Lösung

Mit einer Stern-Dreieck-Transformation folgt Abb. 8.32.

Allgemein gelten für die in Abb. 8.33 gezeigte Stern-Dreieck-Umwandlung folgende Formeln:

$$R_{13} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2}; \quad R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}; \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}$$

Mit $R_1 = R_2 = R_3 = 3\,\Omega$ folgt: $R_{13} = R_{12} = R_{23} = 3\,\Omega + 3\,\Omega + 3\,\Omega = 9\,\Omega$.

Mit $R_4 = R_5 = R_6 = 6\,\Omega$ ist $R_{46} = R_{45} = R_{56} = 6\,\Omega + 6\,\Omega + 6\,\Omega = 18\,\Omega$.

$R_{12} \parallel R_{45} = R_{23} \parallel R_{56} = 6\,\Omega$

$$\text{Spannungsteiler: } U_{AB} = U_{12} \cdot \frac{6\,\Omega}{6\,\Omega + 6\,\Omega} = \underline{\underline{5\,\text{V}}}$$

Aufgabe 8.29

a) Für die Schaltung in Abb. 8.34 ist der Ersatzwiderstand R_{ers} zwischen den Klemmen A und B zu bestimmen. Wie groß ist die Spannung U_6?
Gegeben: $R_1 = 50\,\Omega$, $R_2 = 50\,\Omega$, $R_3 = 100\,\Omega$, $R_4 = 100\,\Omega$, $R_5 = 20\,\Omega$, $R_6 = 40\,\Omega$, $U = 15\,\text{V}$.

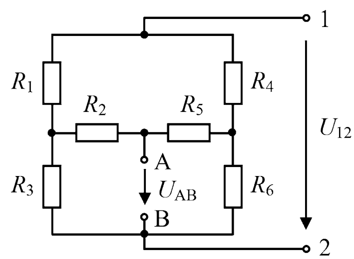


Abb. 8.31 Zur Stern-Dreieck-Umwandlung

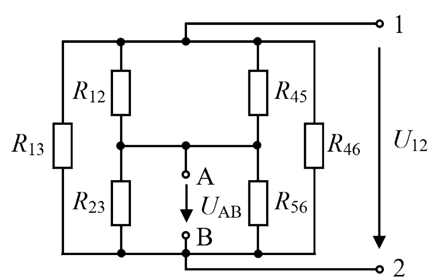


Abb. 8.32 Netzwerk von Abb. 8.31 nach einer Stern-Dreieck-Umwandlung

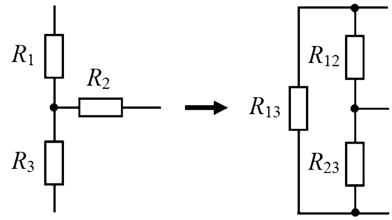


Abb. 8.33 Allgemeine Stern-Dreieck-Umwandlung

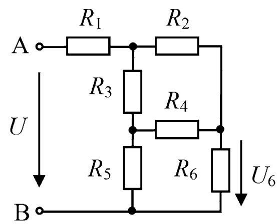


Abb. 8.34 Zu bestimmen ist der Widerstand zwischen den Klemmen A und B

b) Nun gilt $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 50\,\Omega$, $U = 10\,\text{V}$. Wie groß ist in diesem Fall der Widerstand zwischen den Klemmen A und B? Wie groß ist jetzt die Spannung U_6? Wie kann in diesem Fall die Rechnung stark vereinfacht werden?

Lösung

a) Die Dreieckschaltung aus R_2, R_3, R_4 wird in eine Sternschaltung umgewandelt (Abb. 8.35).

$$r_2 = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3 + R_4} = 20\,\Omega; \quad r_3 = \frac{R_2 \cdot R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = 20\,\Omega;$$

$$r_4 = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = 40\,\Omega$$

$$R_{\text{ers}} = R_1 + r_2 + (r_3 + R_6) \parallel (r_4 + R_5) = 50\,\Omega + 20\,\Omega + 30\,\Omega = \underline{\underline{100\,\Omega}}$$

Nach der Spannungsteilerregel ergibt sich die Spannung am Knotenpunkt C gegenüber Klemme B zu:

$$U_{\text{CB}} = 15\,\text{V} \cdot \frac{30\,\Omega}{50\,\Omega + 20\,\Omega + 30\,\Omega} = 4{,}5\,\text{V}$$

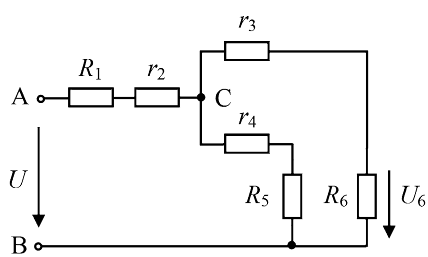


Abb. 8.35 Netzwerk von Abb. 8.34 nach einer Dreieck-Stern-Umwandlung

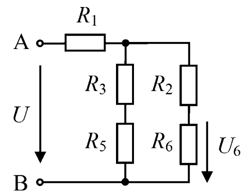


Abb. 8.36 Die Schaltung mit den neuen Bauelementewerten als abgeglichene Brücke

Erneute Anwendung der Spannungsteilerregel:

$$U_6 = 4{,}5\,\mathrm{V} \cdot \frac{40\,\Omega}{20\,\Omega + 40\,\Omega} = \underline{\underline{3{,}0\,\mathrm{V}}}$$

b) Die Schaltung ist jetzt eine abgeglichene Brücke, da gilt $\frac{R_3}{R_5} = \frac{R_2}{R_6}$. Im Nullzweig fließt kein Strom, d. h. R_4 kann entfallen (Abb. 8.36).

$$R_{\mathrm{ers}} = R_1 + (R_3 + R_5) \parallel (R_2 + R_6) = \underline{\underline{100\,\Omega}}$$

Nach der Spannungsteilerregel ist die Spannung über der Reihenschaltung aus R_2, R_3 gleich 5 V. Somit ist $\underline{\underline{U_6 = 2{,}5\,\mathrm{V}}}$.

8.10 Umwandlung von Quellen

Aufgabe 8.30

Die Daten einer Stromquelle sind $I_q = 6\,\mathrm{A}$, $R_i = 2\,\Omega$. Zeichnen Sie das Schaltbild der Stromquelle. Benennen Sie die Ausgangsklemmen mit A und B. Wandeln Sie die Stromquelle in eine Spannungsquelle um. Geben Sie die Daten und das Schaltbild der Spannungsquelle an.

Lösung

Die Schaltbilder von Strom- und Spannungsquelle zeigt Abb. 8.37.

Daten der Spannungsquelle: $\underline{\underline{R_i = 2\,\Omega}}$, $U_q = I_q \cdot R_i = \underline{\underline{12\,\mathrm{V}}}$

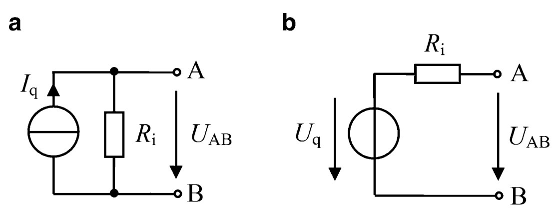


Abb. 8.37 Schaltbild der Stromquelle (**a**) und der Spannungsquelle (**b**)

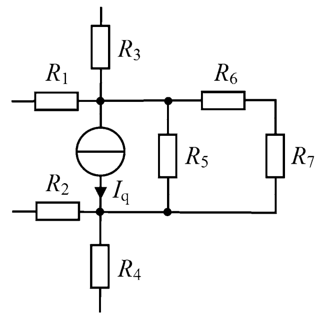


Abb. 8.38 Ausschnitt aus einem Netzwerk mit realer Stromquelle

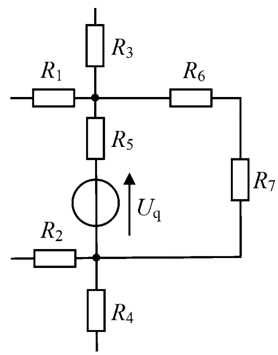


Abb. 8.39 Umgewandeltes Netzwerk

Aufgabe 8.31
Der Ausschnitt aus einem Netzwerk in Abb. 8.38 enthält eine reale Stromquelle, die aus den Elementen I_q und R_5 besteht. Wandeln Sie die reale Stromquelle in eine reale Spannungsquelle um und tragen Sie diese mit Angabe ihrer Polarität in den Netzwerksausschnitt ein.

Lösung
Das umgewandelte Netzwerk mit Spannungsquelle zeigt Abb. 8.39.

Der Innenwiderstand der Spannungsquelle ist $R_i = R_5$. Der Wert von U_q ist $U_q = R_5 \cdot I_q$.

Aufgabe 8.32
Bestimmen Sie die Werte von U_1 und R_3 bzw. von I_2 und R_6 der rechten Schaltungen in Abb. 8.40 so, dass jeweils die rechte Schaltung bezüglich der Klemmen A und B gleiches Verhalten hat wie die linke Schaltung.

Lösung
Den Innenwiderstand einer Schaltung „sieht“ man, wenn man in die Klemmen einer Schaltung hineinsieht und in der Schaltung alle Stromquellen geöffnet (entfernt) und alle Spannungsquellen kurzgeschlossen sind.

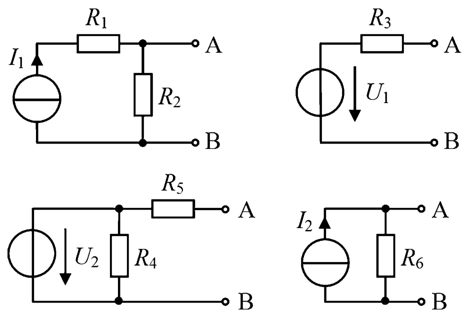


Abb. 8.40 Äquivalente Quellen

Wird die Stromquelle I_1 geöffnet (herausgenommen), so ist der linke Anschluss von R_1 nicht verbunden („hängt in der Luft"). Zwischen den Klemmen A und B ist R_2 angeschlossen. Damit muss $\underline{\underline{R_3 = R_2}}$ sein (der Innenwiderstand der idealen Spannungsquelle U_1 ist null, entsprechend einem Kurzschluss). Die Leerlaufspannung zwischen den Klemmen A und B ist $\underline{\underline{U_1 = I_1 \cdot R_2}}$.

Wird U_2 (und somit R_4) kurzgeschlossen, so ist der verbleibende Widerstand zwischen den Klemmen A und B der Widerstand R_5. Somit muss $\underline{\underline{R_6 = R_5}}$ sein. Die Leerlaufspannung zwischen den Klemmen A und B ist U_2. Diese Spannung muss auch an R_6 abfallen.

$$\underline{\underline{I_2 = \frac{U_2}{R_5}}}, \text{ dies entspricht } I_2 = \frac{U_2}{R_6}.$$

Aufgabe 8.33
Bestimmen Sie die Spannung U_5 an R_5 in Abb. 8.41 mit Hilfe der Umwandlung von Quellen.

$U_1 = 120\,\text{V}$, $U_2 = 60\,\text{V}$, $I_1 = 36\,\text{A}$, $R_1 = 20\,\Omega$, $R_2 = 5\,\Omega$, $R_3 = 6\,\Omega$, $R_4 = 1{,}6\,\Omega$, $R_5 = 8\,\Omega$

Lösung
Die beiden Spannungsquellen werden in Stromquellen umgewandelt (Abb. 8.42).

Die Stromquellen werden zusammengefasst (Abb. 8.43).

$$R_x = (R_1 \parallel R_2) \parallel R_3 = 2{,}4\,\Omega$$
$$I_x = 6\,\text{A} - 12\,\text{A} + 36\,\text{A} = 30\,\text{A}$$

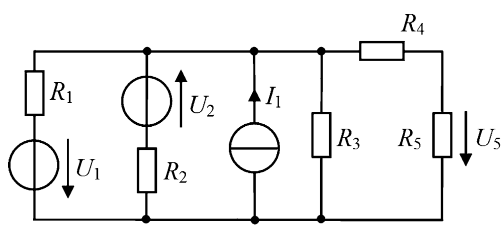


Abb. 8.41 Bestimmung einer Spannung mittels Quellenumwandlung

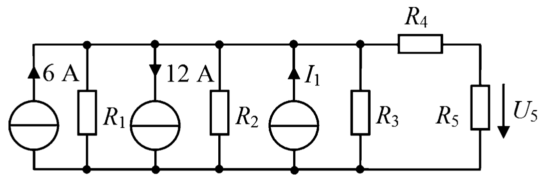


Abb. 8.42 Umwandlung der Spannungsquellen in Stromquellen

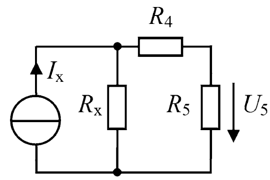


Abb. 8.43 Zusammenfassung der Stromquellen

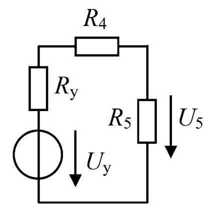


Abb. 8.44 Stromquelle wieder in eine Spannungsquelle umwandeln

Die Stromquelle wird wieder in eine Spannungsquelle umgewandelt (Abb. 8.44).

$$U_\text{y} = R_\text{x} \cdot I_x = 72\,\text{V}; \quad R_y = R_x$$
$$U_5 = U_\text{y} \cdot \frac{R_5}{R_\text{y} + R_4 + R_5} = 72\,\text{V} \cdot \frac{8\,\Omega}{4\,\Omega + 8\,\Omega} = \underline{\underline{48{,}0\,\text{V}}}$$

Aufgabe 8.34

Lineare Spannungs- und Stromquellen können ineinander umgewandelt werden. Die umgewandelten Quellen zeigen an den Klemmen des angeschlossenen Verbrauchers denselben linearen Zusammenhang zwischen Spannung und Strom wie die ursprünglichen Quellen. Sind die Leistungen, welche die *idealen* Ersatzquellen abgeben, gleich groß?

Lösung

Nein, die abgegebenen Leistungen sind nicht gleich groß. Die ideale Stromquelle gibt Leistung an ihren Innenwiderstand ab, sie wird warm. Die ideale Spannungsquelle gibt ohne angeschlossenen Verbraucher keine Leistung ab. Dies bedeutet, dass zur Berechnung der von einer Quelle abgegebenen Leistung nicht mit der Ersatzquelle gerechnet werden darf, sondern immer nur mit Strom und Spannung der ursprünglichen Schaltung.

8.11 Analyse von Netzwerken

Aufgabe 8.35

Unter Anwendung der Kirchhoff'schen Gesetze sind im Netzwerk in Abb. 8.45 alle Zweigströme zu berechnen. Die Werte der Spannungsquellen und Widerstände sind als gegeben zu betrachten.

Lösung

Bevor mit der Berechnung des Netzwerks begonnen wird, werden die Zählpfeile für die Spannungen und Ströme eingetragen (Abb. 8.46). Für die Spannungsquellen U_1 und U_2 sind die Zählpfeile bereits vorgegeben. Sie zeigen wie allgemein vereinbart von „+" nach „−". Die Richtung der beiden gegebenen Spannungszählpfeile ist also durch die Polarität der Spannungsquellen festgelegt. Damit das Erzeuger-Zählpfeilsystem eingehalten wird, muss der Strom I_1 entgegen der Pfeilrichtung von U_1 und damit von links nach rechts durch R_1 eingezeichnet werden. Um das Verbraucher-Zählpfeilsystem einzuhalten, ist damit auch die Richtung des Spannungszählpfeils für U_{R1} an R_1 von links nach rechts festgelegt. Am Verbraucher R_1 müssen ja Strom- und Spannungszählpfeil gleich gerichtet sein. Der Zählpfeil von I_2 muss entsprechend dem Erzeuger-Zählpfeilsystem von unten nach oben (entgegengesetzt zu U_2) gerichtet sein. Die Zählpfeile für U_{R2} und I_3 können beliebig gewählt werden, müssen aber (am Verbraucher R_2) gleiche Richtung haben.

Das Netzwerk hat $z = 3$ Zweige und $k = 2$ Knoten. Somit können $m = z - k + 1 = 2$ linear unabhängige Maschengleichungen und $k - 1 = 1$ Knotengleichungen aufgestellt werden. Die Anzahl der linear unabhängigen Maschengleichungen lässt sich oft aus der Topologie des Netzwerkes ablesen. Linear unabhängig sind immer die inneren Maschen (die „Löcher" im Netzwerk), so dass stets so viele linear unabhängige Maschengleichungen existieren, wie es innere Maschen gibt.

Wir zeichnen jetzt noch in das Netzwerk die gewählten Maschen mit ihren frei wählbaren Umlaufrichtungen ein und den frei gewählten Knoten K (Abb. 8.47).

Wir betrachten zunächst die beiden Maschen M_1 und M_2. Wie wir sehen, wurde mit M_2 eine äußere Masche (um das Netzwerk herum) gewählt. Dies beinhaltet die Gefahr, dass

Abb. 8.45 Zu berechnendes Netzwerk

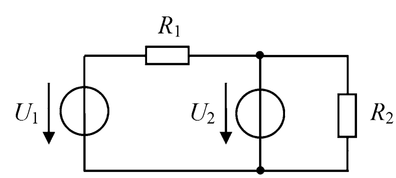
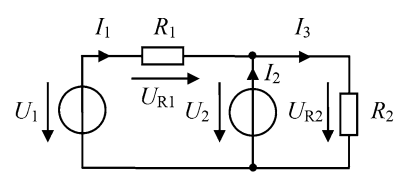


Abb. 8.46 Eingetragene Zählpfeile der Ströme und Spannungen



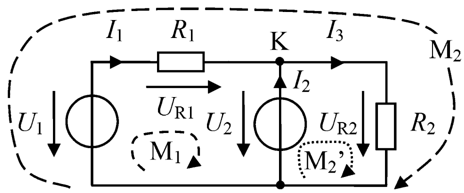


Abb. 8.47 Netzwerk mit gewählten Maschen und deren Umlaufrichtungen

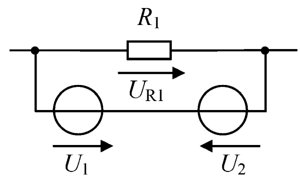


Abb. 8.48 Masche M_1 anders gezeichnet

die zwei Maschengleichungen linear abhängig sind und wir evtl. keine sinnvolle Lösung bei der Berechnung des aufzustellenden Gleichungssystems erhalten.

Es werden jetzt die Maschengleichungen für M_1 und M_2 sowie die Knotengleichung für den Knoten K aufgestellt.

M_1: $-U_1 + U_{R1} + U_2 = 0$
M_2: $-U_1 + U_{R1} + U_{R2} = 0$
K: $I_1 + I_2 - I_3 = 0$

Nach dem ohmschen Gesetz sind die Spannungsabfälle an den Widerständen $U_{R1} = R_1 \cdot I_1$ und $U_{R2} = R_2 \cdot I_3$. Mit diesen Bauteilgleichungen (diese geben den Zusammenhang zwischen Spannung und Strom bei einem Zweipol an) lauten die Gleichungen:

M_1: $-U_1 + R_1 \cdot I_1 + U_2 = 0$
M_2: $-U_1 + R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_3 = 0$
K: $I_1 + I_2 - I_3 = 0$

Dies sind drei Gleichungen für die drei unbekannten Zweigströme I_1, I_2, I_3. Das Gleichungssystem wird nun gelöst. Aus M_1 erhält man sofort $\underline{\underline{I_1 = \frac{U_1 - U_2}{R_1}}}$.

► **Anmerkung** Dieses Ergebnis ist eigentlich (mit einiger Übung) sofort aus dem Netzwerk ersichtlich. Betrachten wir die Masche M_1 für sich alleine mit etwas anders gezeichneten Spannungsquellen (Abb. 8.48).

Aus der Reihenschaltung von U_1 und U_2 ergibt sich sofort die Spannung über R_1 als Summe der beiden Spannungen (hier eine Differenz, da U_2 entgegen U_1 gerichtet ist). Der Strom I_1 durch R_1 berechnet sich dann einfach nach dem ohmschen Gesetz.

Man könnte die Spannung über R_1 auch aus einer Betrachtung von Potenzialen gewinnen. Der untere Knoten (an dem M_2 beginnt und endet) kann als Bezugspunkt der Potenziale in der Schaltung (als so genannte Masse oder Massepunkt) betrachtet werden.

In der Schaltung wurde dieser Knoten nicht extra durch ein Massesymbol gekennzeichnet. Am linken Anschluss von R_1 liegt das Potenzial U_1, am rechten Anschluss das Potenzial U_2. Über R_1 (zwischen dem linken und rechten Anschluss) liegt die Potenzialdifferenz $U_{R1} = U_1 - U_2$.

Das Ergebnis für I_1 wird in die Gleichung M_2 eingesetzt:

$$-U_1 + R_1 \frac{U_1 - U_2}{R_1} + R_2 I_3 = 0; \quad \underline{\underline{I_3 = \frac{U_2}{R_2}}}$$

▶ **Anmerkung** Auch dieses Ergebnis ist mit etwas Übung sofort ersichtlich. Die Spannung U_2 entspricht der Spannung U_{R2}. Die ideale Spannungsquelle U_2 bewirkt zwischen ihren beiden Anschlussknoten (somit zwischen den beiden Anschlüssen von R_2) eine eingeprägte Spannung. Nicht betrachtete Netzwerkteile links von U_2 in Abb. 8.47, die parallel zu einer idealen Spannungsquelle (U_2) liegen, haben keinen Einfluss auf das restliche Netzwerk. Somit ist I_3 nur von U_2 abhängig (und natürlich dem Widerstandswert von R_2).

Allgemein gilt: Bauelemente parallel zu idealen Spannungsquellen und in Reihe zu idealen Stromquellen können ohne Konsequenzen für das übrige Netzwerk weggelassen werden.

I_1 und I_3 werden in die noch nicht benutzte Knotengleichung eingesetzt, um I_2 zu bestimmen.

$$I_2 = I_3 - I_1 = \frac{U_2}{R_2} - \frac{U_1 - U_2}{R_1} = \underline{\underline{\frac{(R_1 + R_2)U_2 - R_2 U_1}{R_1 R_2}}}$$

Obwohl eine äußere Masche gewählt wurde, erhalten wir ein vernünftiges Ergebnis und nicht etwas Sinnloses wie $R_1 = R_1$.

Alternative Vorgehensweise

Statt der Masche M_2 hätte man auch die Masche M_2' wählen können. Die beiden Maschengleichungen M_1 und M_2' sind dann mit Sicherheit linear unabhängig. Die Gleichung wäre dann:

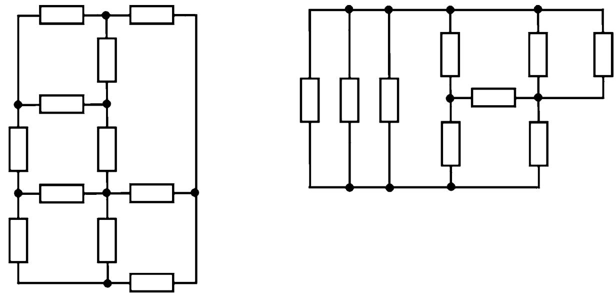
M_2': $-U_2 + U_{R2} = 0$

Mit $U_2 = U_{R2}$ aus M_2' folgt sofort $\underline{\underline{I_3 = \frac{U_2}{R_2}}}$. I_1 und I_2 werden wie oben bestimmt.

Aufgabe 8.36

Wie viel linear unabhängige Knotengleichungen k und Maschengleichungen m lassen sich von den in Abb. 8.49 gezeigten Netzwerken aufstellen und wie ergibt sich ihre Zahl? Wie groß ist jeweils die Anzahl der Zweigströme?

Abb. 8.49 Bestimmung der Anzahl von Knoten- und Maschengleichungen



Lösung
Die Anzahl der linear unabhängigen Knotengleichungen k ist:

$$\text{Anzahl der Knoten} - 1$$

oder auch

$$\text{Anzahl der linear unabhängigen Knotengleichungen} = \text{Anzahl der Baumzweige}$$

(Baum = Verbindung aller Knoten, ohne dass eine Masche entsteht)

Die Anzahl der linear unabhängigen Maschengleichungen ist:

$$\text{Anzahl der Zweigströme} - \text{Anzahl der linear unabhängigen Knotengleichungen}$$

oder

$$\begin{aligned}&\text{Anzahl der linear unabhängigen Maschengleichungen}\\&\quad= \text{Anzahl der unabhängigen Zweige (nicht Baumzweige)}\end{aligned}$$

oder bei planaren Netzen einfach

Die Anzahl der linear unabhängigen Maschengleichungen m ist: **Anzahl der sichtbaren „Löcher“** im Graphen des Netzwerkes.

Linkes Netzwerk
Knotenanzahl = 7; $k = 6$; $m = 5$; Anzahl der Zweigströme $= k + m = 11$

Rechtes Netzwerk
Knotenanzahl = 4; $k = 3$; $m = 6$; Anzahl der Zweigströme $= k + m = 9$

Aufgabe 8.37
Wie viele Gleichungen sind notwendig und hinreichend, um in dem Netzwerk in Abb. 8.50 alle Zweigströme berechnen zu können? Stellen Sie diese Gleichungen auf.

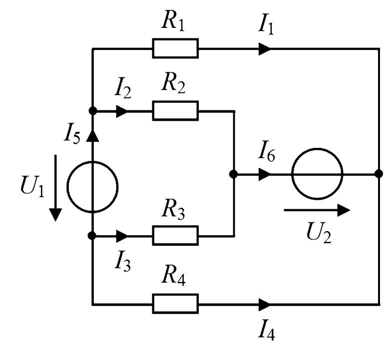


Abb. 8.50 Zur Aufstellung von Knoten- und Maschengleichungen

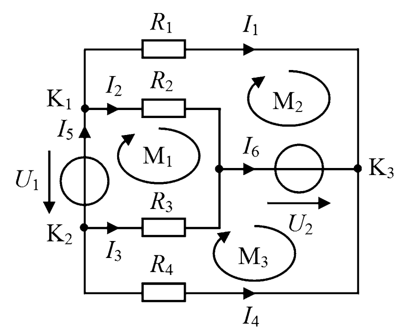


Abb. 8.51 Netzwerk mit eingetragenen Maschenumläufen

Lösung

Das Netzwerk enthält $z = 6$ Zweige mit sechs unbekannten Zweigströmen. Es werden somit sechs linear unabhängige Gleichungen benötigt.

Die Schaltung enthält $k = 4$ Knoten, es können also $k - 1 = 3$ unabhängige Knotengleichungen aufgestellt werden. Die übrigen $m = z - k + 1 = 3$ erforderlichen Gleichungen werden aus drei unabhängigen Maschen (den „Löchern“ im Netzwerk) gebildet. Diese Maschen sind in Abb. 8.51 eingetragen.

Maschengleichungen:	Knotengleichungen:
$\mathrm{M}_1\colon\ I_2R_2 - I_3R_3 - U_1 = 0$	$\mathrm{K}_1\colon\ I_5 - I_1 - I_2 = 0$
$\mathrm{M}_2\colon\ I_1R_1 - U_2 - I_2R_2 = 0$	$\mathrm{K}_2\colon\ -I_3 - I_4 - I_5 = 0$
$\mathrm{M}_3\colon\ U_2 - I_4R_4 + I_3R_3 = 0$	$\mathrm{K}_3\colon\ I_1 + I_6 + I_4 = 0$

Aufgabe 8.38

In dem in Abb. 8.52 gezeigten Netzwerk sind alle Zweigströme I_1 bis I_6 zu bestimmen. Geben Sie die hierfür notwendigen Knoten- und Maschengleichungen an. Zeigen Sie, dass von vier möglichen Knotengleichungen nur drei linear unabhängig sind.

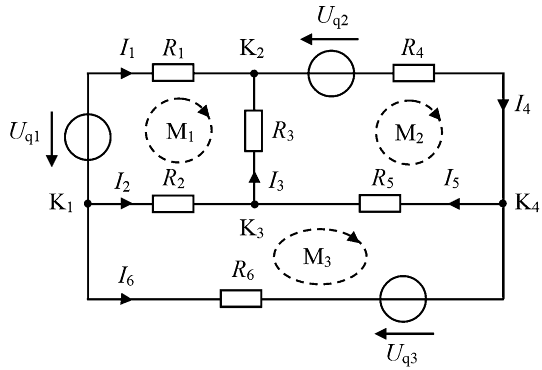


Abb. 8.52 Die sechs Zweigströme sind zu bestimmen

Lösung
Knotengleichungen:

$$\begin{aligned}
&K_1\colon -I_1 - I_2 - I_6 = 0\\
&K_2\colon I_1 + I_3 - I_4 = 0\\
&K_3\colon I_2 - I_3 + I_5 = 0\\
&K_4\colon I_4 - I_5 + I_6 = 0
\end{aligned}$$

Die Gleichungen K_1, K_2, K_3 sind notwendig zur Bestimmung der Zweigströme. Grund:

1. Gleichung + 2. Gleichung + 3. Gleichung = (−1) mal 4. Gleichung.

Die 4. Gleichung kann als Linearkombination der ersten drei Gleichungen dargestellt werden, sie ist also linear *ab*hängig.

Drei Maschengleichungen:

$$\begin{aligned}
&M_1\colon U_{q1} = I_1 R_1 - I_3 R_3 - I_2 R_2\\
&M_2\colon U_{q2} = I_4 R_4 + I_5 R_5 + I_3 R_3\\
&M_3\colon -U_{q3} = I_2 R_2 - I_5 R_5 - I_6 R_6
\end{aligned}$$

Aufgabe 8.39
In der angegebenen Teilschaltung in Abb. 8.53 sind alle fehlenden Ströme und Spannungen zu berechnen.

Gegeben: $U_{q1} = 12\,\text{V}$; $U_{q2} = 24\,\text{V}$; $R_1 = R_2 = R_3 = 6\,\Omega$; $I_1 = 4\,\text{A}$; $I_2 = 4{,}8\,\text{A}$

Lösung
Maschengleichung: $U_{q2} + R_3 I_3 + R_1 I_1 - U_{q1} + R_2 I_2 = 0$

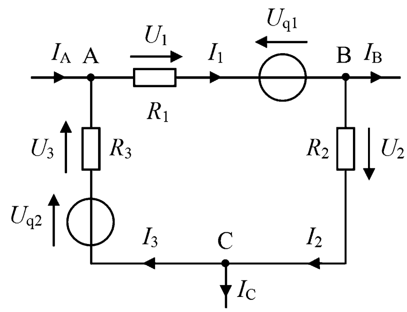


Abb. 8.53 Fehlende Ströme und Spannungen sind zu berechnen

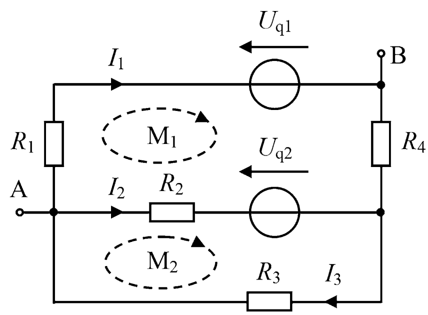


Abb. 8.54 Rechnung mit den Kirchhoff'schen Sätzen

Nach I_3 auflösen und Einsetzen der Zahlenwerte ergibt:

$$I_3 = \frac{12\,\text{V} - 24\,\text{V} - 6\,\Omega \cdot 4\,\text{A} - 6\,\Omega \cdot 4{,}8\,\text{A}}{6\,\Omega} = -\frac{64{,}8\,\text{V}}{6\,\Omega} = \underline{\underline{-10{,}8\,\text{A}}}$$

$$U_1 = R_1 \cdot I_1 = 6\,\Omega \cdot 4\,\text{A} = \underline{\underline{24\,\text{V}}}; \quad U_2 = R_2 \cdot I_2 = 6\,\Omega \cdot 4{,}8\,\text{A} = \underline{\underline{28{,}8\,\text{V}}};$$

$$U_3 = R_3 \cdot I_3 = 6\,\Omega \cdot (-10{,}8\,\text{A}) = -\underline{\underline{64{,}8\,\text{V}}}$$

Knotengleichungen:

$$I_A = I_1 - I_3 = \underline{\underline{14{,}8\,\text{A}}}; \quad I_B = I_1 - I_2 = \underline{\underline{-0{,}8\,\text{A}}}; \quad I_C = I_2 - I_3 = \underline{\underline{15{,}6\,\text{A}}}$$

Aufgabe 8.40

Berechnen Sie mit Hilfe der Kirchhoff'schen Sätze in dem Netzwerk in Abb. 8.54 alle Zweigströme und die Spannung U_{AB}.

Gegeben: $U_{q1} = U_{q2} = 60\,\text{V}$; $R_1 = R_2 = 3\,\Omega$; $R_3 = R_4 = 10\,\Omega$

Lösung

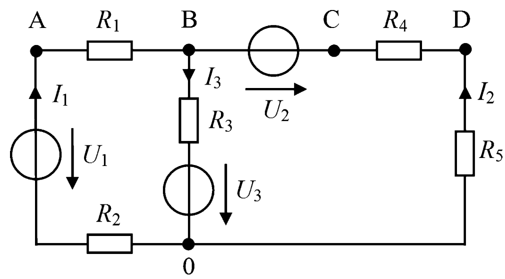
Knotengleichung: $I_3 = I_1 + I_2$

Maschengleichung für M_1: $I_1 R_1 - U_{q1} + I_1 R_4 + U_{q2} - I_2 R_2 = 0$

Umformung ergibt: $U_{q1} - U_{q2} = I_1(R_1 + R_4) - I_2 R_2$ (Gl. 1)

Maschengleichung für M_2: $U_{q2} = I_2 R_2 + I_3 R_3$

Abb. 8.55 Zur Berechnung mit den Kirchhoff'schen Sätzen



Knotengleichung in Maschengleichung M_2 einsetzen:

$$\mathrm{M}_2\colon\; U_{q2} = I_1 R_3 + I_2(R_2 + R_3) \text{ (Gl. 2)}$$

Mit den Zahlenwerten bekommt man das folgende Gleichungssystem:

$$\text{Gl. 1: } 0\,\text{V} = 13\,\Omega \cdot I_1 - 3\,\Omega \cdot I_2$$
$$\text{Gl. 2: } 60\,\text{V} = 10\,\Omega \cdot I_1 + 13\,\Omega \cdot I_2$$

Aus Gl. 1 folgt: $I_2 = \frac{13}{3} I_1$; Einsetzen in Gl. 2: $60\,\text{V} = 10\,\Omega \cdot I_1 + \frac{13 \cdot 13}{3}\,\Omega \cdot I_1$
Auflösen nach I_1 ergibt: $\underline{\underline{I_1 = 0{,}904\,\text{A}}}$; $I_2 = \frac{13 \cdot 0{,}904\,\text{A}}{3} = \underline{\underline{3{,}917\,\text{A}}}$;

$$I_3 = 0{,}904\,\text{A} + 3{,}917\,\text{A} = \underline{\underline{4{,}821\,\text{A}}}$$
$$U_{AB} = I_1 R_1 - U_{q1} = 0{,}904\,\text{A} \cdot 3\,\Omega - 60\,\text{V} = \underline{\underline{-57{,}288\,\text{V}}}$$

Aufgabe 8.41
Gegeben ist die Schaltung in Abb. 8.55 mit den Werten:
$R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$, $R_3 = 30\,\Omega$, $R_4 = 40\,\Omega$, $R_5 = 50\,\Omega$, $U_1 = 18\,\text{V}$, $U_2 = 12\,\text{V}$, $U_3 = 6\,\text{V}$

a) Berechnen Sie mit den Kirchhoff'schen Sätzen den Strom I_1 in allgemeiner Form (als analytischen Ausdruck). Übernehmen Sie für die Berechnung die in Abb. 8.55 eingezeichneten Ströme.
b) Berechnen Sie die numerischen Werte der Ströme I_1, I_2, I_3.
c) Bestimmen Sie die Potenziale φ_A, φ_B, φ_C, φ_D der Punkte A, B, C und D gegenüber dem Bezugspunkt 0.

Lösung
a) I) Maschenregel: $-U_1 + I_1(R_1 + R_2) + I_3 R_3 + U_3 = 0$

$$I_3 = \frac{U_1 - U_3 - I_1(R_1 + R_2)}{R_3} \text{ (Gl. 1)}$$

II) Maschenregel: $U_2 - I_2(R_4 + R_5) - U_3 - I_3 R_3 = 0$

$$I_3 = \frac{U_2 - I_2(R_4 + R_5) - U_3}{R_3} \text{ (Gl. 2)}$$

III) Knotenregel: $I_1 + I_2 - I_3 = 0 \Rightarrow I_2 = I_3 - I_1$ (Gl. 3)
Aus I):

$$I_1 = \frac{U_1 - U_3 - I_3 R_3}{R_1 + R_2};$$

darin für I_3 Gl. 2 einsetzen:

$$I_1 = \frac{U_1 - U_2 + I_2(R_4 + R_5)}{R_1 + R_2} \text{ (Gl. 4)}$$

In Gl. 3 für I_3 Gl. 1 einsetzen:

$$I_2 = \frac{U_1 - U_3 - I_1(R_1 + R_2) - I_1 R_3}{R_3}$$

Diesen Ausdruck in Gl. 4 einsetzen:

$$I_1 = \frac{U_1 - U_2 + \frac{U_1 - U_3 - I_1(R_1 + R_2) - I_1 R_3}{R_3} \cdot (R_4 + R_5)}{R_1 + R_2}$$

Auflösen nach I_1:

$$I_1(R_1 + R_2)R_3 = (U_1 - U_2)R_3 + [U_1 - U_3 - I_1(R_1 + R_2 + R_3)](R_4 + R_5)$$

$$\begin{aligned} I_1(R_1 + R_2)R_3 &= (U_1 - U_2)R_3 + (U_1 - U_3)(R_4 + R_5) \\ &\quad - I_1(R_1 + R_2 + R_3)(R_4 + R_5) \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{I_1 = \frac{(U_1 - U_2)R_3 + (U_1 - U_3)(R_4 + R_5)}{(R_1 + R_2)R_3 + (R_1 + R_2 + R_3)(R_4 + R_5)}}}$$

b) $\underline{\underline{I_1 = 0{,}20\,\mathrm{A}}}$; $\underline{\underline{I_2 = 0}}$; $\underline{\underline{I_3 = 0{,}20\,\mathrm{A}}}$
c) $\underline{\underline{\varphi_A = 14\,\mathrm{V}}}$; $\underline{\underline{\varphi_B = 12\,\mathrm{V}}}$; $\underline{\underline{\varphi_C = 0}}$; $\underline{\underline{\varphi_D = 0}}$

Aufgabe 8.42
In der Schaltung in Abb. 8.56 ist U_2 so zu bestimmen, dass $I_3 = 100\,\mathrm{mA}$ beträgt.

Gegeben: $R_1 = 3\,\Omega$, $R_2 = 4\,\Omega$, $R_3 = 5\,\Omega$, $R_4 = 6\,\Omega$, $U_1 = 2\,\mathrm{V}$, $U_3 = 3\,\mathrm{V}$, $I_3 = 100\,\mathrm{mA}$

Lösung
Es werden die Maschenumläufe und die Ströme I_1 und I_2 in das Netzwerk eingezeichnet (Abb. 8.57).

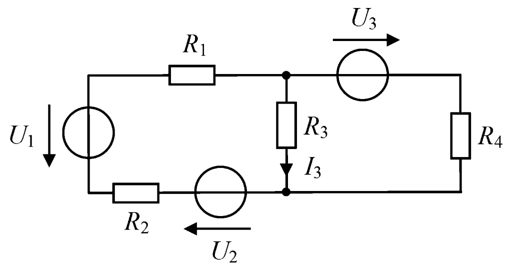


Abb. 8.56 Zu bestimmen ist U_2

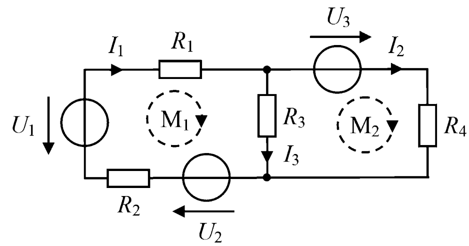


Abb. 8.57 Netzwerk mit Maschenumläufen und Strömen

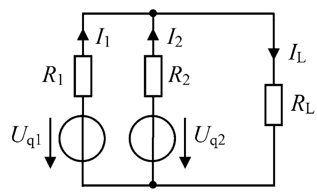


Abb. 8.58 Zu Bestimmen sind Ströme und die Leistungen in den Spannungsquellen

Maschengleichung M_1: $I_1(R_1 + R_2) + I_3R_3 + U_2 - U_1 = 0$ (Gl. 1)
Maschengleichung M_2: $U_3 + I_2R_4 - I_3R_3 = 0 \Rightarrow I_2 = -416{,}6\,\text{mA}$ (Gl. 2)
Knotengleichung: $I_1 - I_2 - I_3 = 0 \Rightarrow I_1 = I_2 + I_3 = -316{,}6\,\text{mA}$ (Gl. 3)
Gl. 2 und Gl. 3 in Gl. 1 einsetzen: $-316{,}6\,\text{mA} \cdot 7\,\Omega + 100\,\text{mA} \cdot 5\,\Omega - 2\,\text{V} = -U_2$

$$U_2 = 2{,}22\,\text{V} - 0{,}5\,\text{V} + 2\,\text{V} = \underline{\underline{3{,}72\,\text{V}}}$$

Aufgabe 8.43

Berechnen Sie die Ströme I_1, I_2, I_L in Abb. 8.58. Welche Leistung wird in U_{q1} und U_{q2} umgesetzt? Handelt es sich um aufgenommene oder abgegebene Leistung?

Gegeben: $U_{q1} = 48\,\text{V}$, $U_{q2} = 36\,\text{V}$, $R_1 = 4\,\Omega$, $R_2 = 3\,\Omega$, $R_L = 60\,\Omega$

Lösung

Maschengleichung M_1: $I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 + U_{q2} - U_{q1} = 0$
Maschengleichung M_2: $I_1 \cdot R_1 + I_L \cdot R_L - U_{q1} = 0$
Knotengleichung K: $I_L = I_1 + I_2$

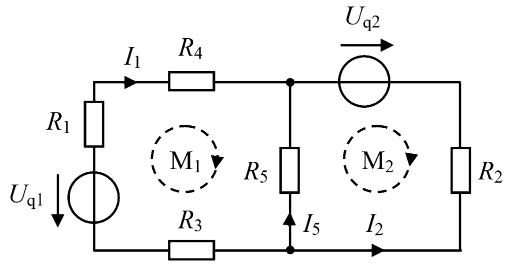


Abb. 8.59 Zur Maschenanalyse

K in M_2 eingesetzt: $I_1 R_1 + I_1 R_L + I_2 R_L - U_{q1} = 0$

$$I_1(R_1 + R_L) + I_2 R_L - U_{q1} = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{U_{q1} - I_2 R_L}{R_1 + R_L} \text{ in } M_1 \text{ einsetzen gibt:}$$

$$\frac{(U_{q1} - I_2 R_L) R_1}{R_1 + R_L} - I_2 R_2 + U_{q2} - U_{q1} = 0;$$

$$U_{q1} - I_2 R_L = (I_2 R_2 - U_{q2} + U_{q1})(R_1 + R_L)\frac{1}{R_1}$$

$$(U_{q1} - I_2 R_L)\frac{R_1}{R_1 + R_L} = I_2 R_2 - U_{q2} + U_{q1}$$

$$-I_2 \frac{R_L R_1}{R_1 + R_L} - I_2 R_2 = -U_{q1}\frac{R_1}{R_1 + R_L} - U_{q2} + U_{q1}$$

$$I_2\left(\frac{R_L R_1}{R_1 + R_L} + R_2\right) = U_{q1}\frac{R_1}{R_1 + R_L} + U_{q2} - U_{q1}; \quad I_2 = \frac{U_{q1}\frac{R_1}{R_1+R_L} + U_{q2} - U_{q1}}{\frac{R_L R_1}{R_1+R_L} + R_2}$$

$$I_2 = \frac{48\,\text{V} \cdot \frac{4}{64} - 12\,\text{V}}{60 \cdot \frac{4}{64}\,\Omega + 3\,\Omega} = \underline{\underline{-\frac{4}{3}\,\text{A}}}; \quad I_1 = \frac{48\,\text{V} + \frac{4}{3}\,\text{A} \cdot 60\,\Omega}{4\,\Omega + 60\,\Omega} = \underline{\underline{2\,\text{A}}};$$

$$I_L = I_1 + I_2 = \underline{\underline{\frac{2}{3}\,\text{A}}}$$

In U_{q1} wird die Leistung $P_1 = U_{q1} \cdot I_1 = \underline{\underline{96\,\text{W}}}$ umgesetzt.

In U_{q2} wird die Leistung $P_2 = U_{q2} \cdot I_2 = \underline{\underline{-48\,\text{W}}}$ umgesetzt.

Da bei beiden Spannungsquellen Strom- und Spannungszählpfeile in entgegengesetzte Richtung weisen, wird abgegebene Leistung positiv und verbrauchte Leistung negativ gezählt. U_{q1} gibt also Leistung ab, U_{q2} nimmt Leistung auf.

Aufgabe 8.44

Bestimmen Sie im Netzwerk nach Abb. 8.59 alle Ströme mit Hilfe einer Maschenanalyse.

Gegeben: $U_{q1} = U_{q2} = 60\,\text{V}$; $R_1 = R_2 = 3\,\Omega$; $R_3 = R_4 = 5\,\Omega$; $R_5 = 10\,\Omega$

Lösung

Masche M_1: $U_{q1} = I_1(R_1 + R_3 + R_4) - I_5 R_5$

Masche M_2: $U_{q2} - I_2 R_2 + I_5 R_5 = 0$

Knoten oben: $I_1 + I_2 + I_5 = 0$; $I_1 = -I_2 - I_5$, eingesetzt in M_1 gibt:

M_1: $U_{q1} = (-I_2 - I_5)(R_1 + R_3 + R_4) - I_5 R_5$; $\quad 60\,\text{V} = -13\,\Omega \cdot I_2 - 23\,\Omega \cdot I_5$ (Gl. 1)

M_2: $60\,\text{V} - 3\,\Omega \cdot I_2 + 10\,\Omega \cdot I_5 = 0$; $I_5 = -6\,\text{A} + \dfrac{3}{10} I_2$ in Gl. 1:

$60\,\text{V} = -13\,\Omega \cdot I_2 + 138\,\text{V} - 6{,}9\,\Omega \cdot I_2$; $\quad \underline{\underline{I_2 = 3{,}92\,\text{A}}}$

I_2 eingesetzt in $I_5 = -6\,\text{A} + \frac{3}{10} I_2$: $\underline{\underline{I_5 = -4{,}82\,\text{A}}}$

I_2 und I_5 eingesetzt in die Knotengleichung: $I_1 = -3{,}92\,\text{A} - (-4{,}82\,\text{A}) = \underline{\underline{0{,}9\,\text{A}}}$

8.12 Die Knotenanalyse

Aufgabe 8.45

Berechnen Sie alle Zweigströme in Abb. 8.60 mit Hilfe der Knotenanalyse.

Gegeben: $U_{q1} = U_{q2} = 42\,\text{V}$; $U_{q3} = 12\,\text{V}$; $R_1 = 15\,\Omega$; $R_2 = 30\,\Omega$; $R_3 = R_4 = 10\,\Omega$

Lösung

Das Netzwerk wird zunächst vereinfacht, Spannungsquellen und Widerstände werden zusammengefasst (Abb. 8.61).

Knotengleichung K_1: $I_1 + I_2 - I_3 = 0$

Abb. 8.60 Zur Knotenanalyse

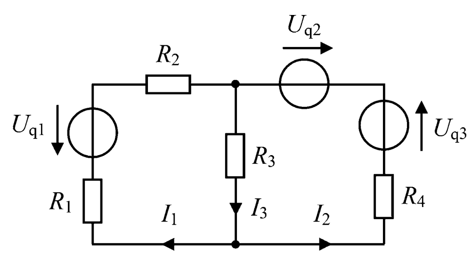
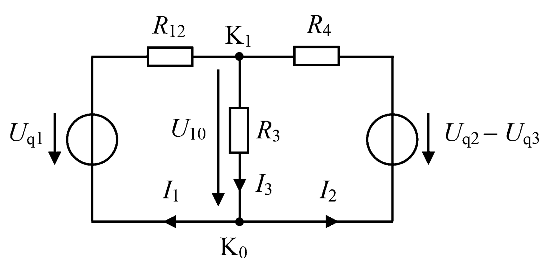


Abb. 8.61 Vereinfachtes Netzwerk



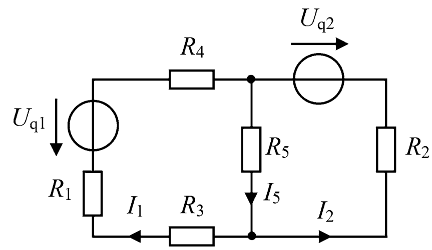


Abb. 8.62 Berechnung mit der Knotenanalyse

Die einzelnen Ströme sind:

$$I_1 = (U_{q1} - U_{10}) \cdot G_{12} \text{ mit } G_{12} = \frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1 + R_2}$$
$$I_2 = (U_{q2} - U_{q3} - U_{10}) \cdot G_4 \text{ mit } G_4 = \frac{1}{R_4}$$
$$I_3 = U_{10} \cdot G_3 \text{ mit } G_3 = \frac{1}{R_3}$$

Einsetzen der Ströme in die Knotengleichung:

$$(U_{q1} - U_{10}) \cdot G_{12} + (U_{q2} - U_{q3} - U_{10}) \cdot G_4 - U_{10} \cdot G_3 = 0$$
$$U_{q1} \cdot G_{12} - U_{10} \cdot G_{12} + U_{q2} \cdot G_4 - U_{q3} \cdot G_4 - U_{10} \cdot G_4 - U_{10} \cdot G_3 = 0$$

Auflösen nach U_{10}:

$$U_{10} = \frac{U_{q1} \cdot G_{12} + U_{q2} \cdot G_4 - U_{q3} \cdot G_4}{G_{12} + G_4 + G_3}; \quad U_{10} = \frac{0{,}933 + 4{,}2 - 1{,}2}{0{,}222}\,\text{V} = 17{,}72\,\text{V}$$

Zahlenwerte in die Gleichungen für die Ströme einsetzen:

$$I_1 = (42\,\text{V} - 17{,}72\,\text{V}) \cdot 0{,}022\,\text{S} = \underline{\underline{0{,}53\,\text{A}}}$$
$$I_2 = (42\,\text{V} - 12\,\text{V} - 17{,}72\,\text{V}) \cdot 0{,}1\,\text{S} = \underline{\underline{1{,}23\,\text{A}}}$$
$$I_3 = 17{,}72\,\text{V} \cdot 0{,}1\,\text{S} = \underline{\underline{1{,}77\,\text{A}}}$$

Aufgabe 8.46
Bestimmen Sie im Netzwerk in Abb. 8.62 alle Zweigströme mit Hilfe der Knotenanalyse.
Gegeben: $U_{q1} = U_{q2} = 60\,\text{V}$; $R_1 = R_2 = 3\,\Omega$; $R_3 = R_4 = 5\,\Omega$; $R_5 = 10\,\Omega$

Lösung
In Reihe liegende Widerstände werden zusammengefasst (Abb. 8.63).
Knotengleichung K_1: $I_1 + I_2 - I_5 = 0$

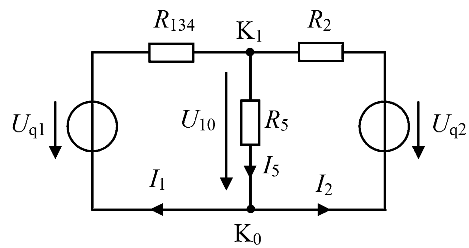


Abb. 8.63 Nach Zusammenfassung von Widerständen

Die einzelnen Ströme sind:

$$I_1 = (U_{q1} - U_{10}) \cdot G_{134} \text{ mit } G_{134} = \frac{1}{R_{134}} = \frac{1}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$I_2 = (U_{q2} - U_{10}) \cdot G_2 \text{ mit } G_2 = \frac{1}{R_2}$$

$$I_5 = U_{10} \cdot G_5 \text{ mit } G_5 = \frac{1}{R_5}$$

Einsetzen der Ströme in die Knotengleichung:

$$(U_{q1} - U_{10}) \cdot G_{134} + (U_{q2} - U_{10}) \cdot G_2 - U_{10} \cdot G_5 = 0$$

Auflösen nach U_{10}:

$$U_{10} = \frac{U_{q1} \cdot G_{134} + U_{q2} \cdot G_2}{G_{134} + G_2 + G_5}; \quad \underline{\underline{U_{10} = 48{,}3\,\mathrm{V}}}$$

Zahlenwerte in die Gleichungen für die Ströme einsetzen:

$$I_1 = (60 - 48{,}3)\,\mathrm{V} \cdot 0{,}077\,\mathrm{S} = \underline{\underline{0{,}9\,\mathrm{A}}}$$

$$I_2 = (60 - 48{,}3)\,\mathrm{V} \cdot 0{,}33\,\mathrm{S} = \underline{\underline{3{,}9\,\mathrm{A}}}$$

$$I_3 = 48{,}3\,\mathrm{V} \cdot 0{,}1\,\mathrm{S} = \underline{\underline{4{,}8\,\mathrm{A}}}$$

Aufgabe 8.47

Berechnen Sie in Abb. 8.64 die Ströme I_1, I_4 und I_7 mit Hilfe der Knotenanalyse.

Gegeben: $U_{q1} = 6\,\mathrm{V}$; $U_{q2} = 32\,\mathrm{V}$; $R_1 = R_3 = 6\,\Omega$; $R_4 = 10\,\Omega$; $R_2 = R_5 = 16\,\Omega$; $R_6 = R_7 = R_8 = 1\,\Omega$

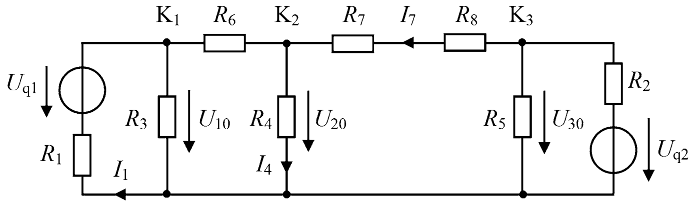


Abb. 8.64 Mit der Knotenanalyse zu berechnendes Netzwerk

Lösung

Knoten K_1: $\dfrac{-U_{10}+U_{q1}}{R_1} = \dfrac{U_{10}}{R_3} + \dfrac{U_{10}-U_{20}}{R_6}$

Knoten K_2: $\dfrac{U_{10}-U_{20}}{R_6} = \dfrac{U_{20}}{R_4} + \dfrac{U_{20}-U_{30}}{R_7+R_8}$

Knoten K_3: $-\dfrac{U_{30}-U_{q2}}{R_2} - \dfrac{U_{30}}{R_5} - \dfrac{U_{30}-U_{20}}{R_7+R_8} = 0$

K_1: $\dfrac{U_{q1}}{R_1} = U_{10}\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_6}\right) - \dfrac{U_{20}}{R_6}$; $\quad \Rightarrow 1\,\text{A} = U_{10}\cdot\dfrac{4}{3}\,\dfrac{1}{\Omega} - \dfrac{U_{20}}{1\,\Omega}$

$U_{10} = 0{,}75\,\text{V} + 0{,}75 \cdot U_{20}$ (Gl. 1)

K_3: $U_{30}\left(\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_5}+\dfrac{1}{R_7+R_8}\right) = \dfrac{U_{q2}}{R_2} + \dfrac{U_{20}}{R_7+R_8}$; $\quad U_{30} = 3{,}2\,\text{V} + 0{,}8\cdot U_{20}$ (Gl. 2)

Wir lösen die Knotengleichung für K_2 nach U_{20} auf.

$$\frac{U_{10}-U_{20}}{R_6} = \frac{U_{20}\cdot(R_7+R_8+R_4) - U_{30}\cdot R_4}{R_4\cdot(R_7+R_8)}$$

$$U_{10}-U_{20} = U_{20}\cdot\frac{(R_7+R_8+R_4)\cdot R_6}{R_4\cdot(R_7+R_8)} - U_{30}\cdot\frac{R_6}{R_7+R_8}$$

$$U_{20} = \frac{U_{10}+U_{30}\cdot\frac{R_6}{R_7+R_8}}{1+\frac{(R_7+R_8+R_4)\cdot R_6}{R_4\cdot(R_7+R_8)}}$$

Mit eingesetzten Zahlenwerten der Widerstände erhalten wir:

$$U_{20} = \frac{5}{8}U_{10} + \frac{5}{16}U_{30}$$

Die Ergebnisse von Gl. 1 und Gl. 2 werden jetzt eingesetzt:

$$U_{20} = \frac{5}{8}\cdot(0{,}75\,\text{V}+0{,}75\cdot U_{20}) + \frac{5}{16}\cdot(3{,}2\,\text{V}+0{,}8\cdot U_{20}); \quad U_{20} = 5{,}23\,\text{V}$$

Aus Gl.1: $U_{10} = 4{,}67\,\text{V}$; aus Gl. 2: $U_{30} = 7{,}38\,\text{V}$

$$I_1 = \frac{-U_10+U_{q1}}{R_1} = \underline{\underline{0{,}22\,\text{A}}}; \quad I_4 = \frac{U_{20}}{R_4} = \underline{\underline{0{,}52\,\text{A}}}; \quad I_7 = \frac{U_{30}-U_{20}}{R_7+R_8} = \underline{\underline{1{,}08\,\text{A}}}$$

8.13 Der Überlagerungssatz

Aufgabe 8.48
Berechnen Sie in Abb. 8.65 unter Anwendung des Superpositionsprinzips die Spannung U_4 und den Strom I_4. Gegeben: $U_{q1} = 12\,\text{V}$; $U_{q2} = 18\,\text{V}$; $R_1 = R_2 = 2\,\Omega$; $R_3 = R_4 = 4\,\Omega$

Lösung
Es werden alle Quellen bis auf eine Quelle deaktiviert (Spannungsquellen kurzgeschlossen, Stromquellen herausgenommen). Der Anteil jeweils einer Quelle wird berechnet. Das Ergebnis ist die Summe aller Anteile (Abb. 8.66).

Nach der Spannungsteilerregel ist

$$U_4' = U_{q1} \cdot \frac{R_3 \parallel R_4}{R_1 + R_2 + R_3 \parallel R_4}; \quad U_4' = 12\,\text{V} \cdot \frac{2\,\Omega}{6\,\Omega} = 4\,\text{V}$$

Ebenfalls nach der Spannungsteilerregel: $U_4'' = -U_{q2} \cdot \dfrac{R_4 \parallel (R_1 + R_2)}{R_3 + R_4 \parallel (R_1 + R_2)}$

$$U_4'' = -18\,\text{V} \cdot \frac{2\,\Omega}{6\,\Omega} = -6\,\text{V}$$

Superposition: $U_4 = U_4' + U_4''$; $\underline{\underline{U_4 = -2\,\text{V}}}$

$$I_4 = \frac{U_4}{R_4}; \quad \underline{\underline{I_4 = -0{,}5\,\text{A}}}$$

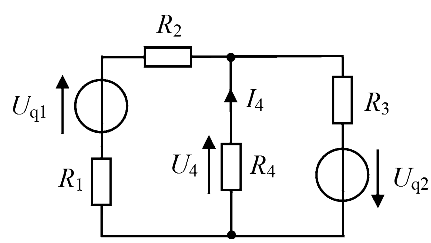


Abb. 8.65 Berechnung mit dem Überlagerungssatz

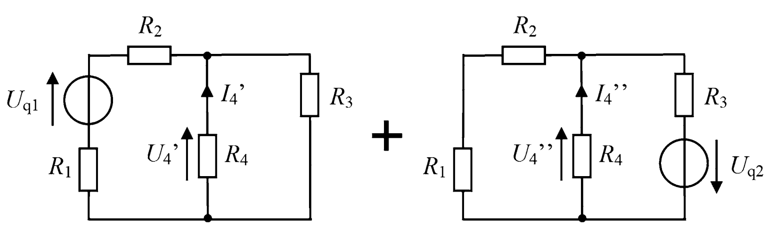


Abb. 8.66 Überlagerung der Quellenanteile

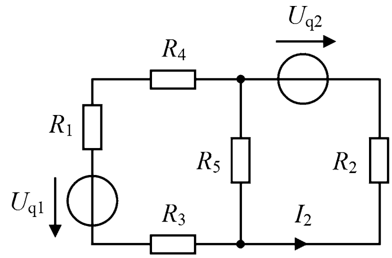


Abb. 8.67 Strom I_2 nach dem Superpositionsprinzip berechnen

Aufgabe 8.49

Bestimmen Sie in Abb. 8.67 den Strom I_2 nach dem Superpositionsprinzip.

Gegeben: $U_{q1} = U_{q2} = 60\,\text{V}$; $R_1 = R_2 = 3\,\Omega$; $R_3 = R_4 = 5\,\Omega$; $R_5 = 10\,\Omega$

Lösung

Die Überlagerung der Anteile zeigt Abb. 8.68.

Zur Berechnung von I_2' und I_2'' wird jeweils die Spannungsteilerregel angewendet.

$$I_2' = -\frac{U_{R2}'}{R_2} = \frac{U_{q1}\frac{R_2\|R_5}{R_1+R_3+R_4+R_2\|R_5}}{R_2}$$

$$I_2' = -\frac{U_{q1}}{R_1 + R_4 + R_3 + R_5 \parallel R_2} \cdot \frac{R_5}{R_2 + R_5};$$

$$I_2' = -\frac{60\,\text{V}}{13\,\Omega + \frac{3\cdot 10}{3+10}\,\Omega} \cdot \frac{10}{3+10} = -3{,}01\,\text{A}$$

$$I_2'' = \frac{U_{R2}''}{R_2} = \frac{U_{q2}\frac{R_2}{R_2+(R_1+R_3+R_4)\|R_5}}{R_2}; \quad I_2'' = \frac{U_{q2}}{R_2 + (R_1 + R_3 + R_4) \parallel R_5}$$

$$I'' = \frac{60\,\text{V}}{3\,\Omega + \frac{13\cdot 10}{23}\,\Omega} = 6{,}93\,\text{A}$$

$$I_2 = I_2' + I_2'' = -3{,}01\,\text{A} + 6{,}93\,\text{A} = \underline{\underline{3{,}92\,\text{A}}}$$

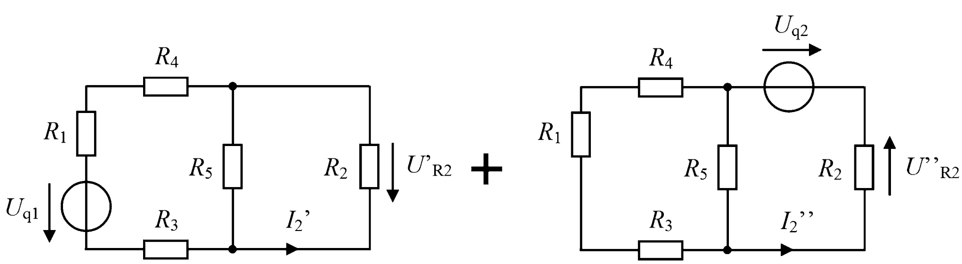


Abb. 8.68 Addition der Quellenanteile

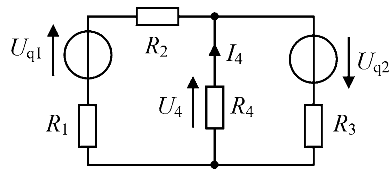


Abb. 8.69 Schaltung nach dem Superpositionsprinzip berechnen

Aufgabe 8.50
Berechnen Sie unter Anwendung des Superpositionsprinzips die Spannung U_4 und den Strom I_4 in Abb. 8.69. Gegeben: $U_{q1} = 12\,\text{V}$; $U_{q2} = 18\,\text{V}$; $R_1 = R_2 = 2\,\Omega$; $R_3 = R_4 = 4\,\Omega$

Lösung
Die Überlagerung der Anteile zeigt Abb. 8.70.

$$U_4' = U_{q1}\frac{R_4 \parallel R_3}{R_1 + R_2 + R_4 \parallel R_3} = U_{q1}\frac{R_4 R_3}{(R_1 + R_2)(R_4 + R_3) + R_4 R_3}$$

$$U_4' = 12\,\text{V}\frac{16}{4 \cdot 8 + 16} = 4\,\text{V}$$

$$I_4' = \frac{U_4'}{R_4} = \frac{4\,\text{V}}{4\,\Omega} = 1\,\text{A}$$

$$U_4'' = -U_{q2}\frac{(R_1 + R_2) \parallel R_4}{(R_1 + R_2) \parallel R_4 + R_3} = -U_{q2}\frac{(R_1 + R_2)R_4}{(R_1 + R_2)R_4 + R_3(R_1 + R_2 + R_4)}$$

$$U_4'' = -18\,\text{V}\frac{16}{4 \cdot 4 + 4 \cdot 8} = -6\,\text{V}; \quad I_4'' = \frac{U_4''}{R_4} = \frac{-6\,\text{V}}{4\,\Omega} = -1{,}5\,\text{A};$$

$$I_4 = I_4' + I_4'' = \underline{\underline{-0{,}5\,\text{A}}}$$

$$U_4 = U_4' + U_4'' = 4\,\text{V} - 6\,\text{V} = \underline{\underline{-2\,\text{V}}}$$

Aufgabe 8.51
Berechnen Sie den Kurzschlussstrom I_K der Schaltung in Abb. 8.71 mit Hilfe des Superpositionsprinzips. Gegeben: $U_{q1} = 12\,\text{V}$; $U_{q2} = 20\,\text{V}$; $R_1 = R_2 = 8\,\Omega$; $R_3 = R_4 = 20\,\Omega$

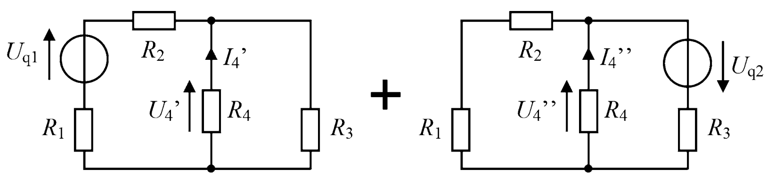
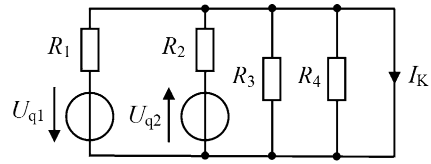


Abb. 8.70 Anteile der Überlagerung

Abb. 8.71 Gesucht ist der Kurzschlussstrom



Lösung

Die Überlagerung der Stromanteile zeigt Abb. 8.72.

$$I_K = I'_K + I''_K = \frac{U_{q1}}{R_1} - \frac{U_{q2}}{R_2} = \frac{12\,\text{V}}{8\,\Omega} - \frac{20\,\text{V}}{8\,\Omega} = 1{,}5\,\text{A} - 2{,}5\,\text{A} = \underline{\underline{-1\,\text{A}}}$$

Der Kurzschlussstrom ist von R_3 und R_4 natürlich unabhängig, beide Widerstände sind ja kurzgeschlossen. Hier gilt die Darstellung in Abb. 8.73.

Aufgabe 8.52

Berechnen Sie U_A in der Schaltung Abb. 8.74.

Lösung

Die Schaltung wird umgezeichnet und die Widerstände zusammengefasst, die Quellen werden separiert (Abb. 8.75).

Für Punkt B in Abb. 8.75 wird die Spannung und der Innenwiderstand der Ersatzspannungsquelle mit dem Überlagerungssatz bestimmt.

Satz von der Ersatzspannungsquelle: Jedes lineare Netzwerk lässt sich bezüglich zweier beliebiger Klemmen durch eine Ersatzspannungsquelle (oder Ersatzstromquelle) nachbilden. Leerlaufspannung und Innenwiderstand sind charakteristische Größen der Ersatzspannungsquelle.

Zur Bestimmung von Innenwiderstand R_i: Stromquellen weglassen, Spannungsquellen kurzschließen. Der Widerstand den man in die Klemmen „hineinsieht“ ist der Innenwiderstand.

Überlagerungssatz: In einem linearen Netzwerk summieren sich die Teilwirkungen der einzelnen Spannungs- oder Stromquellen.

$$R_i = 8\,\Omega \parallel 2\,\Omega = 1{,}6\,\Omega$$

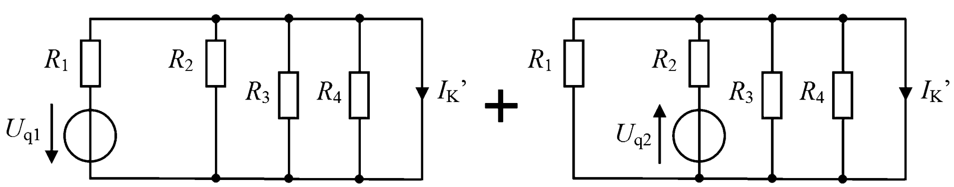
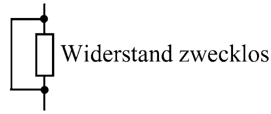


Abb. 8.72 Stromanteile

Abb. 8.73 Kurzgeschlossener Widerstand



−5 V kurzschließen, Spannung an 2 Ω (= Punkt B gegen Masse) berechnen.

$$U_1 = 10\,\text{V} \cdot \frac{2\,\Omega}{8\,\Omega + 2\,\Omega} = 2\,\text{V}$$

10 V kurzschließen, Spannung an 8 Ω (= Punkt B gegen Masse) berechnen.

$$U_2 = -5\,\text{V} \cdot \frac{8\,\Omega}{2\,\Omega + 8\,\Omega} = -4\,\text{V}$$

Spannung an Punkt B gegen Masse: $U_B = U_1 + U_2 = -2\,\text{V}$

Man erhält folgende Ersatzschaltung (Abb. 8.76):

$$\text{Spannungsteiler: } U_A = -2\,\text{V} \cdot \frac{3\,\Omega}{1{,}6\,\Omega + 2\,\Omega + 3\,\Omega} = \underline{\underline{-0{,}91\,\text{V}}}$$

Abb. 8.74 Berechnung mit dem Überlagerungssatz

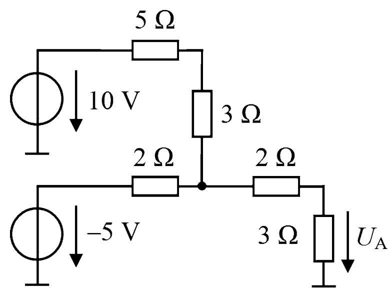


Abb. 8.75 Umgezeichnete Schaltung mit separierten Quellen

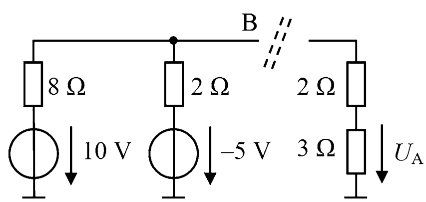
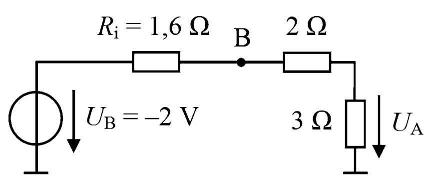


Abb. 8.76 Ersatzschaltung mit der Ersatzspannungsquelle



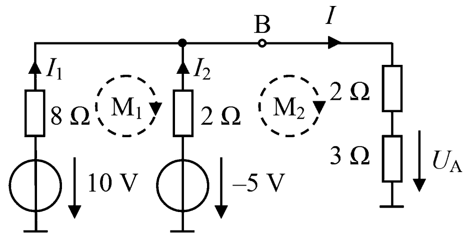


Abb. 8.77 Schaltung mit Strömen und Maschenumläufen

Alternative Lösung
Es werden die Kirchhoff'schen Sätze verwendet. In die Schaltung nach Abb. 8.75 werden die Ströme und Maschenumläufe eingezeichnet (Abb. 8.77).

$$I = I_1 + I_2$$
$$\mathrm{M_1}:\ -10\,\mathrm{V} + 8\,\Omega \cdot I_1 - 2\,\Omega \cdot I_2 - 5\,\mathrm{V} = 0;\quad -15\,\mathrm{V} + 8\,\Omega \cdot I_1 - 2\,\Omega \cdot I_2 = 0\ (\text{Gl. }1)$$
$$\mathrm{M_2}:\ 5\,\mathrm{V} + 2\,\Omega \cdot I_2 + 5\,\Omega \cdot I = 0;\quad 5\,\mathrm{V} + 2\,\Omega \cdot I_2 + 5\,\Omega \cdot I_1 + 5\,\Omega \cdot I_2 = 0$$
$$5\,\mathrm{V} + 5\,\Omega \cdot I_1 + 7\,\Omega \cdot I_2 = 0\ (\text{Gl. }2)$$

Aus Gl. 1: $I_2 = -\frac{15\,\mathrm{V}}{2\,\Omega} + 4I_1$; in Gl. 2: $5\,\mathrm{V} + 5\,\Omega \cdot I_1 - 7\,\Omega \cdot \frac{15\,\mathrm{V}}{2\,\Omega} + 28\,\Omega \cdot I_1 = 0$

$$33\,\Omega \cdot I_1 - 47{,}5\,\mathrm{V} = 0$$

$I_1 = \frac{47{,}5\,\mathrm{V}}{33\,\Omega} = 1{,}44\,\mathrm{A}$; einsetzen in Gl. 2: $5\,\mathrm{V} + 5\,\Omega \cdot 1{,}44\,\mathrm{A} = -7\,\Omega \cdot I_2$; $12{,}2\,\mathrm{V} = -7\,\Omega \cdot I_2$

$I_2 = -1{,}743\,\mathrm{A}$; $I = 1{,}44\,\mathrm{A} - 1{,}743\,\mathrm{A} = -0{,}303\,\mathrm{A}$; $U_\mathrm{A} = 3 \cdot (-0{,}303\,\mathrm{A}) = \underline{\underline{-0{,}91\,\mathrm{V}}}$

Aufgabe 8.53
Gegeben ist die Schaltung in Abb. 8.78.

Die Stromquelle ist als ideal zu betrachten mit $I_0 = 2\,\mathrm{A}$. Die Spannungsquelle ist eine reale Quelle mit einer Quellspannung $U_0 = 10\,\mathrm{V}$ und einem Innenwiderstand $R_\mathrm{i} = 5\,\Omega$.

Die Widerstandswerte sind: $R_1 = R_2 = 5\,\Omega$, $R_3 = 2\,\Omega$

Berechnen Sie den Strom I mit Hilfe des Überlagerungsverfahrens.

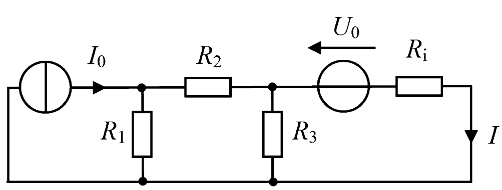


Abb. 8.78 Gegebene Schaltung

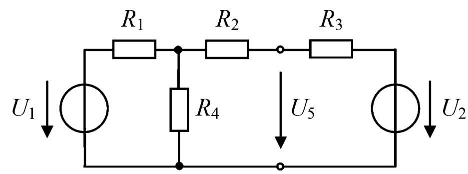


Abb. 8.79 U_5 ist mit dem Überlagerungsverfahren zu berechnen

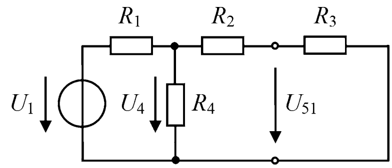


Abb. 8.80 Erste Teilschaltung

Lösung
Es ist nur U_0 wirksam:

Der Widerstand im Stromkreis ist $R_{\text{ers}} = R_\text{i} + (R_2 + R_1) \parallel R_3 = 6{,}66\,\Omega$

$$I' = \frac{10\,\text{V}}{6{,}66\,\Omega} = 1{,}50\,\text{A}$$

Es ist nur I_0 wirksam:

Parallel zu R_3 liegt R_i, der Wert dieser Parallelschaltung ist $1{,}43\,\Omega$.

Wird I_0 mit R_1 in eine Spannungsquelle mit $U_0 = 10\,\text{V}$ und $R_\text{i} = 5\,\Omega$ umgewandelt, so fällt an der Parallelschaltung von R_3 mit R_i die Spannung $1{,}25\,\text{V}$ ab:

$$10\,\text{V} \cdot \frac{1{,}43\,\Omega}{5\,\Omega + 5\,\Omega + 1{,}43\,\Omega} = 1{,}25\,\text{V}$$

Durch R_i fließt also der Strom $I'' = \frac{1{,}25\,\text{V}}{5\,\Omega} = 0{,}25\,\text{A}$.

Der Gesamtstrom I ist $I = I' + I'' = \underline{\underline{1{,}75\,\text{A}}}$.

Aufgabe 8.54
Berechnen Sie mittels des Überlagerungsverfahrens die Spannung U_5 in der Schaltung Abb. 8.79. Die Werte der Bauteile sind: $U_1 = 40\,\text{V}$, $U_2 = \frac{40}{11}\,\text{V}$, $R_1 = \frac{2}{5}\,\Omega$; $R_2 = R_3 = 1\,\Omega$; $R_4 = 0{,}5\,\Omega$

Lösung
Zuerst wird U_2 durch einen Kurzschluss ersetzt. Die Teilspannung U_{51} wird mit der Spannungsteilerregel ermittelt (Abb. 8.80).

$$U_{51} = U_4 \frac{R_3}{R_2 + R_3}; \quad U_4 = U_1 \frac{R_4 \parallel (R_2 + R_3)}{R_1 + R_4 \parallel (R_2 + R_3)} = U_1 \frac{\frac{R_4(R_2+R_3)}{R_2+R_3+R_4}}{R_1 + \frac{R_4(R_2+R_3)}{R_2+R_3+R_4}}$$

$$U_4 = U_1 \frac{R_4(R_2 + R_3)}{R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_4(R_2 + R_3)}$$

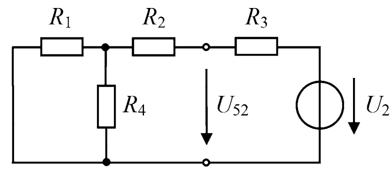


Abb. 8.81 Zweite Teilschaltung

Dieser Ausdruck wird in die Gleichung für U_{51} eingesetzt.

$$U_{51} = U_1 \frac{R_4(R_2 + R_3)}{R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_4(R_2 + R_3)} \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3}$$

$$U_{51} = 40\,\mathrm{V} \frac{\frac{1}{2}(1+1)}{\frac{2}{5}\left(1+1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}(1+1)} \cdot \frac{1}{1+1} = 40 \frac{1}{\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} + 1} \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{V} = 10\,\mathrm{V}$$

Jetzt wird U_1 durch einen Kurzschluss ersetzt und die Teilspannung U_{52} berechnet (Abb. 8.81).

$$U_{52} = U_2 \frac{R_2 + R_1 \parallel R_4}{R_3 + R_2 + R_1 \parallel R_4} = U_2 \frac{R_2 + \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4}}{R_3 + R_2 + \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4}}$$

$$= U_2 \frac{R_2(R_1 + R_4) + R_1 R_4}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_4) + R_1 R_4}$$

$$U_{52} = \frac{40}{11} \cdot \frac{1\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}}{(1+1)\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}}\,\mathrm{V} = \frac{40}{11} \cdot \frac{\frac{9}{10} + \frac{2}{10}}{2\frac{9}{10} + \frac{2}{10}}\,\mathrm{V} = \frac{40}{11} \cdot \frac{11}{20}\,\mathrm{V} = 2\,\mathrm{V}$$

Nach dem Superpositionsprinzip ist U_5 die Summe aus U_{51} und U_{52}.

$$U_5 = U_{51} + U_{52} = 10\,\mathrm{V} + 2\,\mathrm{V} = \underline{\underline{12\,\mathrm{V}}}$$

9 Wechselspannung und Wechselstrom

Zusammenfassung

Wechselgrößen und Mischgrößen werden mit ihren kennzeichnenden Parametern definiert. Es werden Berechnungen von Effektivwert und Gleichrichtwert bei unterschiedlichen Kurvenformen der Zeitfunktionen durchgeführt. Dabei sind alternative Lösungswege berücksichtigt.

9.1 Grundwissen – kurz und bündig

Wichtige Formeln:

$$f = \frac{1}{T}; \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot f; \quad I = \sqrt{\frac{1}{T}\int\limits_0^T [I(t)]^2 dt}; \quad I = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}};$$

$$U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}; \quad \overline{|U(t)|} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T |U(t)| dt; \quad \overline{|u(t)|} = \frac{2}{\pi}\hat{U}$$

9.2 Periodische Signale

Aufgabe 9.1

Wie ist in der Elektrotechnik der Begriff „Wechselgröße“ definiert?

Lösung

Eine Wechselgröße ist eine physikalische Größe (z. B. ein Strom oder eine Spannung), die periodisch ist, also einen sich mit der Periodendauer T wiederholenden Augenblickswert besitzt. Für eine Spannung als Wechselgröße gilt somit: $u(t) = u(t + k \cdot T)$ mit $k = 0, 1, 2, \ldots$

L. Stiny, *Aufgabensammlung zur Elektrotechnik und Elektronik*,
DOI 10.1007/978-3-658-14381-7_9

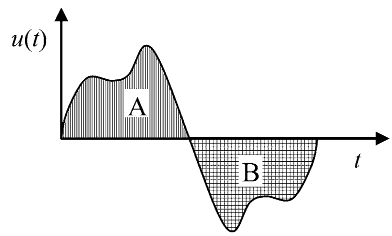


Abb. 9.1 Eine periodische Wechselgröße, die Flächen A und B sind gleich groß, somit ist der arithmetische Mittelwert null

Zusätzlich muss der arithmetische Mittelwert null sein:

$$\overline{u}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt = 0.$$

Der arithmetische Mittelwert einer periodischen Spannung oder eines periodischen Stromes wird als *Gleichanteil* bezeichnet.

Ein Wechselstrom bzw. eine Wechselspannung hat also ein periodisches Verhalten und einen verschwindenden Gleichanteil.

Der Momentanwert einer periodischen Größe ändert sich nach Betrag und Vorzeichen und wiederholt sich nach der Periodendauer (nach dem Zeitintervall) T. Die Funktionskurve einer Wechselgröße schließt innerhalb einer Periode mit der Zeitachse eine Fläche oberhalb und eine Fläche unterhalb der Zeitachse ein. Sind beide Flächen gleich groß, so ist der Gleichanteil des Signals null, und es handelt sich nicht nur um eine periodische Größe, sondern um eine periodische *Wechsel*größe (Abb. 9.1).

Aufgabe 9.2
Wie werden sinus- und kosinusförmige Wechselgrößen noch genannt?

Lösung
Sie werden als *harmonische* Wechselgrößen bezeichnet.

Aufgabe 9.3
Welche Größen kennzeichnen eine sinusförmige Spannung $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi_{\mathrm{u}})$?

Lösung
$\hat{U}$ = *Amplitude* (auch Scheitelwert, Maximalwert, Spitzenwert, maximale Elongation); $[\hat{U}] = \mathrm{V}$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = \textit{Kreisfrequenz}; \quad [\omega] = \frac{1}{\mathrm{s}} \text{ (\textit{nicht} Hertz!)}$$

$f = \frac{1}{T}$ = *Frequenz* = Anzahl der vollen Schwingungen pro Sekunde; $[f] = \frac{1}{\mathrm{s}} = \mathrm{Hz}$ (Hertz)

T = *Periodendauer* = Zeit in der eine vollständige Schwingung abläuft; $[T] = \mathrm{s}$

φ_u = Nullphasenwinkel = Maß für die zeitliche Verschiebung (bezeichnet als *Phasenverschiebung*) der Sinuskurve einer Wechselspannung, die nicht durch den Koordinatenursprung verläuft; $[\varphi_u]$ = rad (Radiant) oder Grad

Alternative Angabe: $U_{SS} = 2 \cdot \hat{U}$ = *Spitze-Spitze-Wert*; U_{SS} = Wert zwischen größtem positiven und größtem negativen Ausschlag eines Signals

Statt der Frequenz wird häufig die *Wellenlänge* angegeben:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s}}{f}; \quad [\lambda] = \mathrm{m}$$

$c = c_0 = 2{,}9979 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s}$ = Lichtgeschwindigkeit im Vakuum

Aufgabe 9.4
Welches Signal wird als Mischgröße bezeichnet? Welche Eigenschaften hat eine Mischgröße?

Lösung
Ein periodisches Signal, bei dem der arithmetische Mittelwert *nicht* null ist, wird als *Mischgröße* bezeichnet (Mischspannung, Mischstrom). Eine Mischspannung kann als Überlagerung (Summe) einer Gleichspannung und einer Wechselspannung aufgefasst werden. Der im Signal enthaltene *Gleichanteil* wird als *Offset* (= Versatz) bezeichnet. Bei einer Mischspannung gilt die Periodizität $u(t) = u(t + k \cdot T)$ mit $k = 0, 1, 2, \ldots$ und zusätzlich ist der arithmetische Mittelwert (der Gleichanteil) *nicht* null:

$$\overline{u}(t) = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \neq 0$$

Der arithmetische Mittelwert einer periodischen Größe ist der mittlere Wert aller Funktionswerte, die innerhalb der Periode T auftreten. Umgangssprachlich wird der arithmetische Mittelwert als „Durchschnitt" bezeichnet, er wird auch linearer Mittelwert genannt. Häufig wird der Gleichanteil als U_{av} (average value) bezeichnet.

Der Gleichanteil mit der Höhe U_0 und der Dauer T (dunkelgraue Fläche zwischen 0 und T in Abb. 9.2) bewegt die gleiche Ladungsmenge wie die Mischspannung aus Gleichanteil

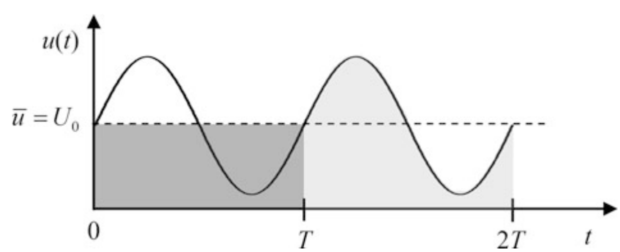


Abb. 9.2 Mischspannung aus einer Gleichspannungskomponente der Höhe $\overline{u} = U_0$ und einer Sinusspannung

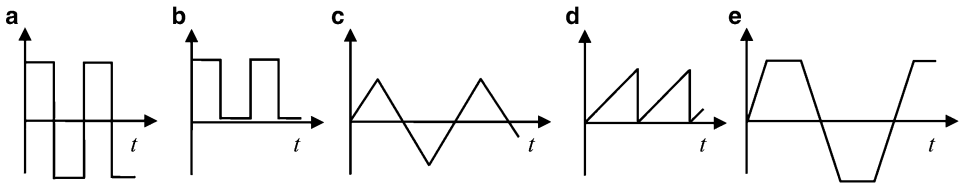


Abb. 9.3 Periodische, nichtsinusförmige Signale: **a** Rechtecksignal symmetrisch zu null, **b** Rechtecksignal, **c** Dreiecksignal, **d** Sägezahnsignal, **e** Trapezsignal symmetrisch zu null

und aufgesetzter (aufmodulierter) Wechselspannung (hellgraue Fläche zwischen T und $2T$).

Aufgabe 9.5
Skizzieren Sie fünf Beispiele von Signalen, die keinen sinusförmigen, aber periodischen Verlauf haben.

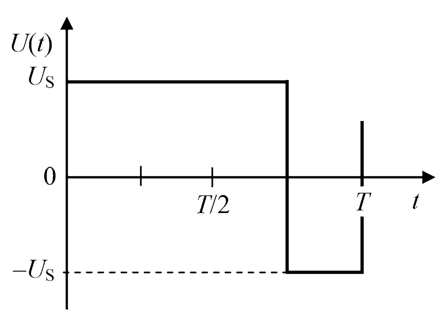
Lösung
Den Verlauf der Signale zeigt Abb. 9.3. Es gibt eine Reihe von Werten, mit denen der Signalverlauf eindeutig beschrieben wird. Die Signalform ist durch ihren zeit- oder winkelabhängigen Verlauf gekennzeichnet. Einfache Formen werden durch ihre Namen beschrieben.

9.3 Effektivwert

Aufgabe 9.6
Berechnen Sie für den in Abb. 9.4 skizzierten zeitlichen Verlauf der Spannung $U(t)$ den Effektivwert U.

Lösung
Der Effektivwert einer Wechselspannung mit der Periodendauer T errechnet sich allgemein nach der Formel $U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [U(t)]^2 dt}$. Der Effektivwert einer Wechselgröße wird

Abb. 9.4 Eine Rechteckspannung



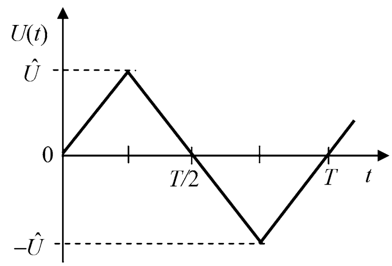


Abb. 9.5 Eine Dreieckspannung

als Großbuchstabe geschrieben, ohne den Index „eff". Der Buchstabe U kennzeichnet also entweder eine Gleichspannung oder den Effektivwert einer Wechselspannung.

Bei der gezeigten Rechteckspannung muss nicht unbedingt mit dem Integral gerechnet werden. Das Integral von $[U(t)]^2$ über t in den Grenzen $t = 0$ und $t = T$ entspricht der Fläche, die zwischen der Funktion $[U(t)]^2$ und der Abszissenachse in diesen Grenzen liegt. Diese Fläche entspricht einem Rechteck der Höhe $(U_S)^2$ und der Breite T, und ist $(U_S)^2 \cdot T$.

$$\text{Also ist } U = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot (U_S)^2 \cdot T} = \underline{\underline{U_S}}.$$

Durch die einer Betragsbildung gleichkommenden Quadrierung ist der Effektivwert einer zur Abszisse symmetrischen Rechteckspannung gleich deren Scheitelwert, und zwar unabhängig vom Tastverhältnis der Rechteckspannung.

Aufgabe 9.7

Berechnen Sie für den in Abb. 9.5 skizzierten zeitlichen Verlauf der Spannung $U(t)$ den Effektivwert U in allgemeiner Form.

Lösung

Bei der Bestimmung des Effektivwertes einer Spannung $U\ (t)$ lassen sich drei Fälle unterscheiden.

1. Fall

Die Wechselgröße wird in ihrer ganzen Periode durch einen geschlossenen mathematischen Ausdruck beschrieben. Ein Beispiel hierfür ist die sinusförmige Wechselspannung: $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t)$. Der Ausdruck für $U(t)$ wird in die Formel

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [U(t)]^2 dt}$$

eingesetzt und die Formel ausgewertet.

2. Fall
Die Zeitfunktion $U(t)$ muss über ihre Periode abschnittsweise definiert werden. Entsprechend der abschnittweisen Definition von $U(t)$ muss dann auch bei Anwendung obiger Formel abschnittsweise integriert werden.

3. Fall
Es können Symmetrieverhältnisse der Zeitfunktion $U(t)$ bei der Integration ausgenutzt werden, dadurch lässt sich die Rechnung oft einfacher gestalten. Es wird z. B. statt über die ganze Periode nur von 0 bis $T/4$ integriert. Statt mit dem Faktor $1/T$ über die ganze Periode zu mitteln, wird dann auch nur mit $1/T/4$ über diese Viertelperiode gemittelt.

Die Zeitfunktion $U(t)$ wird über ihre Periode abschnittsweise definiert. Für die Dreieckspannung in Abb. 9.5 ergibt sich:

$$U(t) = \begin{cases} \frac{\hat{U}}{\frac{T}{4}} \cdot t = \frac{4\hat{U}}{T} \cdot t & \text{für} \quad 0 \le t \le \frac{T}{4} \\ -\frac{\hat{U}}{\frac{T}{4}} \cdot t + 2\hat{U} = -\frac{4\hat{U}}{T} \cdot t + 2\hat{U} & \text{für} \quad \frac{T}{4} \le t \le \frac{3}{4}T \\ \frac{4\hat{U}}{T} \cdot t - 4\hat{U} & \text{für} \quad \frac{3}{4}T \le t \le T \end{cases}$$

Entsprechend der abschnittweisen Definition von $U(t)$ wird jetzt abschnittsweise integriert.

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\left[\int\limits_0^{\frac{T}{4}} \left(\frac{4\hat{U}}{T} \cdot t\right)^2 \cdot dt + \int\limits_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \left(-\frac{4\hat{U}}{T} \cdot t + 2\hat{U}\right)^2 \cdot dt + \int\limits_{\frac{3T}{4}}^{T} \left(\frac{4\hat{U}}{T} \cdot t - 4\hat{U}\right)^2 \cdot dt\right]}$$

Die einzelnen Integrale werden getrennt berechnet.

$$\int\limits_0^{\frac{T}{4}} \left(\frac{4\hat{U}}{T} \cdot t\right)^2 \cdot dt = \left(\frac{4\hat{U}}{T}\right)^2 \cdot \int\limits_0^{\frac{T}{4}} t^2 dt = \left(\frac{4\hat{U}}{T}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot [t^3]_0^{\frac{T}{4}} = \left(\frac{4\hat{U}}{T}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{T}{4}\right]^3$$

$$= \underline{\frac{\hat{U}^2 \cdot T}{12}}$$

$$\int\limits_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \left[\left(\frac{4\hat{U}}{T}\right)^2 \cdot t^2 - \frac{2 \cdot 8 \cdot \hat{U}^2}{T} \cdot t + 4\hat{U}^2\right] dt =$$

$$= \left(\frac{4\hat{U}}{T}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot [t^3]_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} - \frac{2 \cdot 8 \cdot \hat{U}^2}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot [t^2]_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} + 4\hat{U}^2 \cdot [t]_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} =$$

$$= \left(\frac{4\hat{U}}{T}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[\left(\frac{3}{4}T\right)^3 - \left(\frac{T}{4}\right)^3\right] - \frac{2 \cdot 8 \cdot \hat{U}^2}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{3}{4}T\right)^2 - \left(\frac{T}{4}\right)^2\right]$$

$$+ 4\hat{U} \cdot \left[\frac{3}{4}T - \frac{T}{4}\right] =$$

$$= \frac{4^2 \cdot \hat{U}^2}{T^2 \cdot 3} \cdot T^3 \cdot \frac{26}{4^3} - \frac{8 \cdot \hat{U}^2}{T} \cdot \frac{1}{2}T^2 + 4\hat{U}^2 \cdot \frac{1}{2}T = \frac{\hat{U}^2 \cdot T \cdot 13}{6} - 4\hat{U}^2 T + 2\hat{U}^2 T =$$

$$= \frac{\hat{U}^2 \cdot T^2 \cdot 13}{6} - 2\hat{U}^2 T = \frac{13 \cdot \hat{U}^2 \cdot T - 12 \cdot \hat{U}^2 \cdot T}{6} = \underline{\frac{\hat{U}^2 \cdot T}{6}}$$

$$\int\limits_{\frac{3T}{4}}^{T} \left[\left(\frac{4\hat{U}}{T}\right)^2 \cdot t^2 - \frac{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \hat{U}^2}{T} \cdot t + 16 \cdot \hat{U}^2\right] dt =$$

$$= \left(\frac{4\hat{U}}{T}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[T^3 - \left(\frac{3}{4}T\right)^3\right] - \frac{32 \cdot \hat{U}^2}{T} \cdot \frac{1}{2}\left[T^2 - \left(\frac{3}{4}T\right)^2\right] + 16\hat{U}^2 \cdot \left[T - \frac{3}{4}T\right] =$$

$$= \frac{4^2 \cdot \hat{U}^2}{T^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{37 \cdot T^3}{64} - \frac{32 \cdot \hat{U}^2}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7 \cdot T^2}{4^2} + 4 \cdot \hat{U}^2 \cdot T = \frac{37 \cdot \hat{U}^2 \cdot T}{4 \cdot 3} - 3 \cdot \hat{U}^2 \cdot T$$

$$= \underline{\frac{\hat{U}^2 \cdot T}{12}}$$

Es folgt:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \left(\frac{\hat{U}^2 \cdot T}{12} + \frac{\hat{U}^2 \cdot T}{6} + \frac{\hat{U}^2 \cdot T}{12}\right)}; \quad \underline{\underline{U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{3}}}}$$

Die Lösung kann auch unter Ausnutzung der Symmetrieverhältnisse erfolgen. Die Rechnung wird dadurch wesentlich kürzer.

Im Abschnitt 0 bis $T/4$ ist $U(t)$ eine Gerade $U(t) = a \cdot t$ mit der Steigung $a = \frac{\hat{U}}{\frac{T}{4}} = \frac{\hat{U} \cdot 4}{T}$.

Von 0 bis $T/4$ ist also $U(t) = \frac{4\hat{U}}{T} \cdot t$.

$$U = \sqrt{\frac{1}{\frac{T}{4}} \cdot \int\limits_0^{\frac{T}{4}} \left(\frac{4\hat{U}}{T} \cdot t\right)^2 \cdot dt};$$

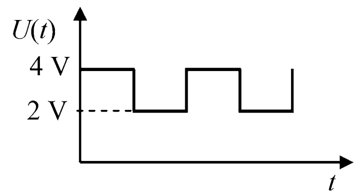


Abb. 9.6 Eine Rechteckspannung mit Gleichspannungsanteil

es braucht jetzt nur ein Integral berechnet zu werden:

$$\int_0^{\frac{T}{4}} \left(\frac{4\hat{U}}{T}\cdot t\right)^2 \cdot dt = \left(\frac{4\hat{U}}{T}\right)^2 \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} t^2 dt = \left(\frac{4\hat{U}}{T}\right)^2 \cdot \frac{1}{3}\cdot \left[t^3\right]_0^{\frac{T}{4}} = \left(\frac{4\hat{U}}{T}\right)^2 \cdot \frac{1}{3}\cdot \left[\frac{T}{4}\right]^3$$

$$= \frac{\hat{U}^2\cdot T}{12}$$

$$U = \sqrt{\frac{4}{T}\cdot\frac{\hat{U}^2\cdot T}{12}}; \quad \underline{\underline{U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{3}}}}$$

Aufgabe 9.8
Berechnen Sie für den in Abb. 9.6 skizzierten zeitlichen Verlauf der Spannung $U(t)$ den Effektivwert U.

Lösung
Es erfolgt eine abschnittsweise Integration:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\left[\int_0^{\frac{T}{2}} 4^2 dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 2^2 dt\right]}\,\mathrm{V} = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\left[16\cdot\frac{T}{2} + 4\cdot\left(T-\frac{T}{2}\right)\right]}\,\mathrm{V} = \underline{\underline{\sqrt{10}\,\mathrm{V}}}$$

Aufgabe 9.9
Gegeben sind zwei periodische, nicht sinusförmige Stromverläufe. Sie sind abschnittsweise definiert als

$$I_1(t) = \begin{cases} \hat{I} & \text{für } 0 < t < \tau \\ 0 & \text{für } \tau \le t < T \end{cases} \quad \text{und } I_2(t) = \begin{cases} \hat{I}\cdot\frac{t}{\tau} & \text{für } 0 < t < \tau \\ 0 & \text{für } \tau \le t < T \end{cases}$$

T ist die Periodendauer, τ und $\hat{I}$ sind Konstanten.

Skizzieren Sie die beiden Stromverläufe. Berechnen Sie jeweils den Effektivwert I_1 bzw. I_2 in Abhängigkeit von $\hat{I}$, τ und T.

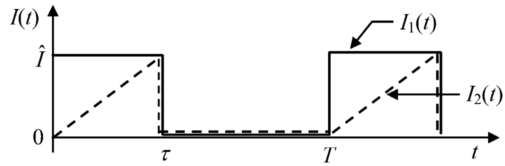


Abb. 9.7 Skizze der zwei periodischen, nicht sinusförmigen Stromverläufe

Lösung
Abb. 9.7 zeigt die beiden Stromverläufe.

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [I(t)]^2 dt};$$

Einen Beitrag zum Integral liefert nur der Abschnitt $t = 0$ bis $t = \tau$.

$$I_1 = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^\tau (\hat{I})^2 \cdot dt} = \underline{\underline{\hat{I} \cdot \sqrt{\frac{\tau}{T}}}}$$

$$I_2 = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^\tau \left(\frac{\hat{I}}{\tau} \cdot t\right)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\frac{(\hat{I})^2}{\tau^2}\frac{\tau^3}{3}} = \underline{\underline{\hat{I}\sqrt{\frac{\tau}{3T}}}}$$

9.4 Gleichrichtwert

Aufgabe 9.10
Berechnen Sie für den in Abb. 9.8 skizzierten zeitlichen Verlauf der Spannung $U(t)$ den Gleichrichtwert U_G.

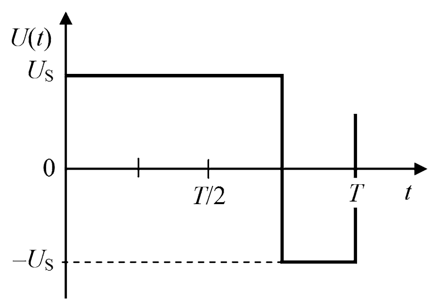


Abb. 9.8 Zum Gleichrichtwert einer Rechteckspannung

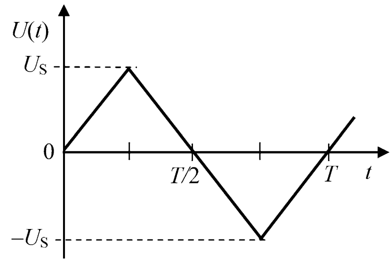


Abb. 9.9 Zum Gleichrichtwert einer Dreieckspannung

Lösung
Der Gleichrichtwert einer Wechselspannung mit der Periodendauer T errechnet sich allgemein nach der Formel $U_G = \overline{|U(t)|} = \frac{1}{T}\int_0^T |U(t)|dt$.

Bei der in Abb. 9.8 gezeigten Rechteckspannung muss nicht unbedingt mit dem Integral gerechnet werden. Das Integral von $|U(t)|$ über t in den Grenzen $t = 0$ und $t = T$ entspricht der Fläche, die zwischen der Funktion $|U(t)|$ und der Abszissenachse in diesen Grenzen liegt. Die Funktion $|U(t)|$ erhält man, indem man den negativen Teil der Rechteckschwingung nach oben klappt. Man hat jetzt ein Rechteck mit der Fläche $U_S \cdot T$.
$\Rightarrow U_G = \frac{U_S \cdot T}{T} = \underline{\underline{U_S}}$

Durch die Betragsbildung ist der Gleichrichtwert einer zur Abszisse symmetrischen Rechteckspannung gleich deren Scheitelwert, und zwar unabhängig vom Tastverhältnis der Rechteckspannung.

Aufgabe 9.11
Berechnen Sie für den in Abb. 9.9 gezeigten zeitlichen Verlauf der Spannung $U(t)$ den Gleichrichtwert U_G.

Lösung
Wegen der Symmetrie des Spannungsverlaufs wird die Dreieckspannung $U(t)$ nur im Intervall 0 bis $T/4$ betrachtet. In diesem Abschnitt ist $U(t)$ eine Gerade $U(t) = a \cdot t$ mit der Steigung $a = \frac{U_S}{\frac{T}{4}} = \frac{U_S \cdot 4}{T}$ und es gilt

$$U_G = \overline{|u(t)|} = \frac{1}{\frac{T}{4}} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} |U(t)|dt.$$

$$\int_0^{\frac{T}{4}} |U(t)|dt = \frac{U_S}{\frac{T}{4}} \cdot \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{T}{4}} = \frac{U_S}{\frac{T}{4} \cdot 2} \cdot \frac{T^2}{4^2} = \frac{U_S \cdot T}{2 \cdot 4}; \quad U_G = \frac{1}{\frac{T}{4}} \cdot \frac{U_S \cdot T}{2 \cdot 4} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot U_S}}$$

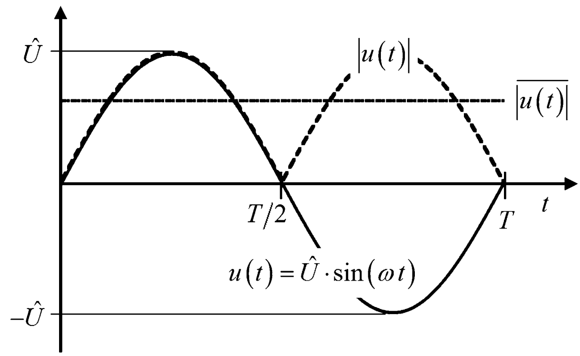


Abb. 9.10 Der Betrag einer sinusförmigen Wechselspannung und ihr Gleichrichtwert

Aufgabe 9.12
Gegeben ist die Wechselspannung $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t)$. Skizzieren Sie in einem Diagramm diese Spannung, den Kurvenverlauf von $|u(t)|$ und den dazu gehörigen Gleichrichtwert $\overline{|u(t)|}$ mit seinem Kurvenverlauf. Berechnen Sie den Gleichrichtwert $\overline{|u(t)|}$.

Lösung
Den Verlauf der drei Kurven zeigt Abb. 9.10.

► **Anmerkung** Die gezeigte Betragsbildung der Sinusspannung $|u\,(t)\,|$ entspricht einer so genannten *Zweiweggleichrichtung*.

$$\overline{|u(t)|} = \frac{1}{T}\int_0^T |\hat{U} \cdot \sin(\omega t)| dt = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \cdot \hat{U} \cdot \int_0^{\pi} \sin(\varphi) d\varphi = \frac{\hat{U}}{\pi} \cdot [-\cos(\varphi)]_0^{\pi}$$
$$= -\frac{\hat{U}}{\pi} \cdot [-1 - 1] = \underline{\underline{\frac{2}{\pi} \cdot \hat{U}}}$$

Alternative Integration:

$$\overline{|u(t)|} = \frac{1}{T}\int_0^T |\hat{U} \cdot \sin(\omega t)| dt = 2 \cdot \frac{1}{T} \cdot \hat{U} \cdot \int_0^{T/2} \sin(\omega t) dt$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{T} \cdot \hat{U} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot [-\cos(\omega t)]_0^{T/2} =$$
$$= -\frac{2 \cdot \hat{U}}{T} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot [-1 - 1] = \frac{2 \cdot \hat{U}}{1/f} \cdot \frac{2}{2\pi f} = \underline{\underline{\frac{2}{\pi} \cdot \hat{U}}}$$

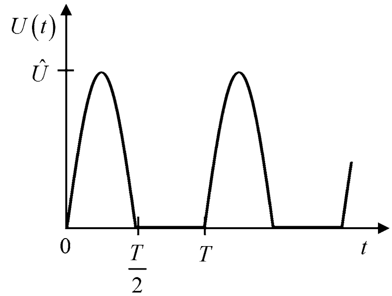


Abb. 9.11 Sinusspannung nach Einweggleichrichtung

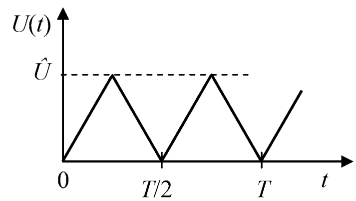


Abb. 9.12 Gesucht ist der Gleichrichtwert dieser Dreieckspannung

Aufgabe 9.13

Gegeben ist der Kurvenverlauf einer Sinusspannung nach einer so genannten *Einweggleichrichtung* (Abb. 9.11). Gesucht ist der zugehörige Gleichrichtwert $\overline{|u(t)|}$.

Lösung

$$\overline{|u(t)|} = \frac{1}{T}\int\limits_0^{T/2} \hat{U}\cdot\sin(\omega t)dt = \frac{1}{T}\cdot\hat{U}\cdot\frac{1}{\omega}\cdot[-\cos(\omega t)]_0^{T/2} = -\frac{\hat{U}}{1/f}\cdot\frac{1}{2\pi f}[-1-1]$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{\pi}\cdot\hat{U}}}$$

Dieses Ergebnis ist halb so groß wie das Ergebnis von Aufgabe 9.12. Dies war zu erwarten, da hier gegenüber Aufgabe 9.12 jede zweite Halbwelle verschwindet und keinen Anteil zum Wert des Integrals liefert.

Aufgabe 9.14

Zu bestimmen ist der Gleichrichtwert der Dreieckspannung nach Abb. 9.12 mit $\hat{U} = 10\,\mathrm{V}$.

Lösung

Im Bereich $t = 0$ bis $t = T/4$ ist die Funktion definiert als $U(t) = \frac{\hat{U}}{T/4}\cdot t$. Es wird die Symmetrie der Zeitfunktion ausgenutzt.

$$\overline{|U(t)|} = \frac{1}{T/4}\int\limits_0^{T/4}\frac{\hat{U}}{T/4}\cdot t\,dt = \frac{\hat{U}\cdot 16}{T^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot[t^2]_0^{T/4} = \frac{\hat{U}\cdot 8}{T^2}\cdot\frac{T^2}{16} = \underline{\underline{\frac{\hat{U}}{2}}} = \underline{\underline{5\,\mathrm{V}}}$$

Komplexe Darstellung von Sinusgrößen

10

Zusammenfassung

Komplexe Zahlen werden eingeführt und das Rechnen mit ihnen geübt. Die grafische Darstellung komplexer Zahlen als Zeiger und in den möglichen Darstellungsformen der Komponentenform, Exponentialform und trigonometrischen Form zeigen unterschiedliche Möglichkeiten zur Berechnung von Betrag und Phase und zur Umwandlung der Formen ineinander. Spannung, Strom und Widerstand werden als komplexe Größen dargestellt. Es werden im komplexen Bereich Scheitelwertzeiger und Effektivwertzeiger, rotierende und ruhende Zeiger betrachtet. Die Transformation einer im Zeitbereich gegebenen Spannung oder eines Stromes in den komplexen Bereich und umgekehrt wird geschult.

10.1 Grundwissen – kurz und bündig

- Durch die komplexe Rechnung lassen sich Zeigerdiagramme mathematisch beschreiben.
- Die imaginäre Einheit ist $j = \sqrt{-1}$.
- Eine komplexe Zahl $\underline{Z} = R + jX$ hat einen Realteil R und einen Imaginärteil X.
- Gleichwertige Darstellungsformen einer komplexen Zahl sind
  - Komponentenform $\underline{Z} = R + jX$,
  - trigonometrische Form $\underline{Z} = Z \cdot [\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)]$,
  - Exponentialform $\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi}$.
- Die Länge des komplexen Zeigers (der Betrag) ist $Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}$.
- Der Winkel des Zeigers mit der reellen Achse ist $\varphi = \arctan\left(\frac{X}{R}\right)$ ($\underline{Z}$ im 1. Quadranten).
- Durch die Rechnung mit komplexen Zahlen ist die grafische Darstellung von Zeigern nicht notwendig. Aufwendige Berechnungen im Zeitbereich werden durch einfachere Berechnungen ersetzt.
- Mit komplexen Wechselstromgrößen kann man genauso rechnen wie bei Gleichstrom.

L. Stiny, *Aufgabensammlung zur Elektrotechnik und Elektronik*,
DOI 10.1007/978-3-658-14381-7_10

- Eine sinusförmige Wechselspannung wird im Zeitbereich durch $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$ beschrieben, in komplexer Darstellung durch $\underline{u}(t) = \hat{U} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)}$.
- Ein komplexer Widerstand $\underline{Z} = R + jX$ wird Impedanz genannt. R ist der Wirkwiderstand (Resistanz), X ist der Blindwiderstand (Reaktanz).
- In einem Wirkwiderstand wird Wärme erzeugt, in einem Blindwiderstand nicht.
- Der komplexe Leitwert heißt Admittanz $\underline{Y} = G + jB$. G ist der Wirkleitwert (Konduktanz), B ist der Blindleitwert (Suszeptanz).
- Der Betrag des komplexen Widerstandes wird als Scheinwiderstand bezeichnet.
- Der Betrag des komplexen Leitwertes wird als Scheinleitwert bezeichnet.

10.2 Rechnen mit komplexen Zahlen

Aufgabe 10.1
Eine komplexe Zahl $\underline{Z}$ ist in Abb. 10.1 durch ihre grafische Darstellung in der Ebene der komplexen Zahlen gegeben.

a) Wie groß sind Betrag r und Winkel φ von $\underline{Z}$? Geben Sie die Exponentialform von $\underline{Z}$ an.
b) Wie groß sind Realteil R und Imaginärteil X von $\underline{Z}$?

Lösung
a) Der Betrag ist die Länge des Zeigers. Am Schnittpunkt des Betragskreises mit der Ordinate (auf der imaginären Achse) liest man ab: $\underline{\underline{r = |\underline{Z}| = 3}}$. Die Gradeinteilung ist in der Grafik in Schritten von 15° vorgenommen. Ausgehend von der positiven reellen Achse erhält man im Gegenuhrzeigersinn fortschreitend $\varphi = 90° + 15° + 15° = \underline{\underline{120°}}$. Damit ist $\underline{Z} = r \cdot e^{j\varphi} = \underline{\underline{3 \cdot e^{j120°}}}$.
b) $R = r \cdot \cos(120°) = 3 \cdot (-0{,}5) = \underline{\underline{-1{,}5}}$; $X = r \cdot \sin(120°) = 3 \cdot 0{,}866 = \underline{\underline{2{,}598}}$

Abb. 10.1 Komplexe Zahl grafisch dargestellt

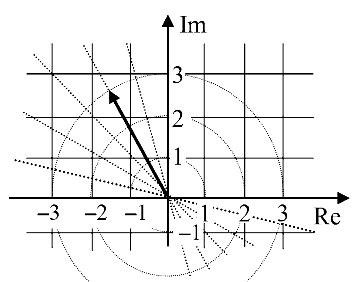
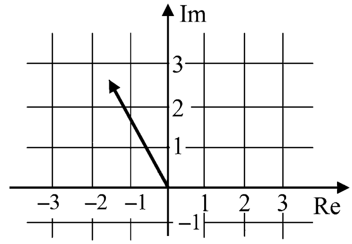


Abb. 10.2 Komplexe Zahl in Zeigerdarstellung



Aufgabe 10.2
Gegeben ist die komplexe Zahl $\underline{Z} = -2 + 3j$.

a) Stellen Sie die Zahl als Zeiger durch einen vom Ursprung ausgehenden Pfeil in der Ebene der komplexen Zahlen dar.
b) Geben Sie Betrag Z und Winkel φ von $\underline{Z}$ an.

Lösung
a) Die Zeigerdarstellung zeigt Abb. 10.2.
b) $Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \underline{\underline{3{,}606}}$ (R = Realteil, X = Imaginärteil)
Abhängig davon, in welchem Quadranten eine komplexe Zahl $\underline{Z} = a + j \cdot b$ liegt, wird deren Winkel φ berechnet.

$$1.\ \text{Quadrant: } \varphi = \arctan\left(\frac{|b|}{|a|}\right); \qquad 2.\ \text{Quadrant: } \varphi = \pi - \arctan\left(\frac{|b|}{|a|}\right)$$
$$3.\ \text{Quadrant: } \varphi = \pi + \arctan\left(\frac{|b|}{|a|}\right); \qquad 4.\ \text{Quadrant: } \varphi = -\arctan\left(\frac{|b|}{|a|}\right)$$

Die gegebene komplexe Zahl $\underline{Z} = -2 + 3j$ liegt im 2. Quadranten.

$$\varphi = 180° - \arctan\left(\frac{3}{2}\right) = 180° - 56{,}3° = \underline{\underline{123{,}7°}}$$

Aufgabe 10.3
Schreiben Sie die folgenden komplexen Ausdrücke in der Komponentenform (algebraischen Form) $a + jb (a, b \in \mathbb{R})$.

a) $(5 + j3)(2 - j) - (3 + j)$ b) $(1 - j2)^2$ c) $\dfrac{5 - j8}{3 - j4}$ d) $\dfrac{1 - j}{1 + j}$

e) $\dfrac{1}{5 - j3} - \dfrac{1}{5 + j3}$ f) $(3 - j2)^2$ g) $\dfrac{1}{2}(1 + j)^2$ h) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{3 - j4}{5 - j8}$

Lösung

a)

$$(5 + j3)(2 - j) - (3 + j) = 10 - j5 + j6 + 3 - 3 - j = \underline{\underline{10}}$$

b)

$$(1 - j2)^2 = (1 - j2)(1 - j2) = 1 - j2 - j2 - 4 = \underline{\underline{-3 - j4}}$$

c)

$$\frac{5 - j8}{3 - j4} = \frac{(5 - j8)(3 + j4)}{(3 - j4)(3 + j4)} = \frac{15 + j20 - j24 + 32}{9 + j12 - j12 + 16} = \underline{\underline{\frac{47}{25} - j\frac{4}{25}}}$$

d)

$$\frac{1 - j}{1 + j} = \frac{(1 - j)(1 - j)}{(1 + j)(1 - j)} = \frac{1 - j - j - 1}{2} = \underline{\underline{-j}}$$

e)

$$\frac{1}{5 - j3} - \frac{1}{5 + j3} = \frac{(5 + j3) - (5 - j3)}{(5 - j3)(5 + j3)} = \frac{j6}{25 + 9} = \underline{\underline{j\frac{3}{17}}}$$

f)

$$(3 - j2)^2 = (3 - j2)(3 - j2) = 9 - j6 - j6 - 4 = \underline{\underline{5 - j12}}$$

g)

$$\frac{1}{2}(1 + j)^2 = \frac{1}{2}(1 + j)(1 + j) = \frac{1}{2}(1 + j + j - 1) = \underline{\underline{j}}$$

h)

$$\frac{1}{2} - \frac{3 - j4}{5 - j8} = \frac{1}{2} - \frac{(3 - j4)(5 + j8)}{(5 - j8)(5 + j8)} = \frac{1}{2} - \frac{15 + j24 - j20 + 32}{25 + 64} =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{47 + j4}{89} = \frac{89 - 94 - j8}{178} = \frac{-5 - j8}{178} = \underline{\underline{-\frac{5}{178} - j\frac{4}{89}}}$$

Aufgabe 10.4

Berechnen Sie von den in Aufgabe 10.3 bestimmten komplexen Zahlen jeweils den Betrag und die Phase in Grad (den Winkel, abgekürzt mit dem Zeichen „$\angle$“).

Lösung

a)

$$|10| = \underline{\underline{10}}, \quad \angle(10) = \underline{\underline{0}}, \quad \text{rein reell}$$

b)

$$|-3 - j4| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \underline{\underline{5}};$$
$$\angle(-3 - j4) = 180^\circ + \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 180^\circ + 53{,}13^\circ = \underline{\underline{233{,}13^\circ}}$$

c)

$$\left|\frac{47}{25} - j\,\frac{4}{25}\right| = \frac{\sqrt{47^2 + 4^2}}{25} = \underline{\underline{1{,}89}};$$

$$\angle\left(\frac{47}{25} - j\,\frac{4}{25}\right) = -\arctan\left(\frac{\frac{4}{25}}{\frac{47}{25}}\right) = -\arctan\left(\frac{4}{47}\right) = \underline{\underline{-4{,}86^\circ}}$$

d)

$$|-j| = \underline{\underline{1}};\quad \angle(-j) = -90^\circ;\quad \text{rein imaginär}$$

e)

$$\left|j\,\frac{3}{17}\right| = \underline{\underline{\frac{3}{17}}};\quad \angle\left(j\,\frac{3}{17}\right) = 90^\circ;\quad \text{rein imaginär}$$

f)

$$|5 - j12| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \underline{\underline{13}};\quad \angle(5 - j12) = -\arctan\left(\frac{12}{5}\right) = \underline{\underline{-67{,}38^\circ}}$$

g)

$$|j| = \underline{\underline{1}};\quad \angle(j) = 90^\circ;\quad \text{rein imaginär}$$

h)

$$\left|-\frac{5}{178} - j\,\frac{4}{89}\right| = \sqrt{\left(\frac{5}{178}\right)^2 + \left(\frac{4}{89}\right)^2} = \underline{\underline{0{,}053}}$$

$$\angle\left(-\frac{5}{178} - j\,\frac{4}{89}\right) = 180^\circ + \arctan\left(\frac{\frac{4}{89}}{\frac{5}{178}}\right) = 180^\circ + 58^\circ = \underline{\underline{238^\circ}}$$

Aufgabe 10.5
Wie lauten Realteil und Imaginärteil der komplexen Zahl $\underline{Z} = 5 \cdot \mathrm{e}^{-j\,75^\circ}$?

Lösung
Die komplexe Zahl ist in Exponentialform gegeben. Die Komponentendarstellung lautet

$$\underline{Z} = 5 \cdot [\cos(-75^\circ) + j \cdot \sin(-75^\circ)]\,.\quad \underline{\underline{\mathrm{Re}\{\underline{Z}\} = 1{,}294}};\quad \underline{\underline{\mathrm{Im}\{\underline{Z}\} = -4{,}83}}$$

Aufgabe 10.6
Welche Ergebnisse liefern folgende Rechenoperationen:

a) $(1 + j \cdot 3) + (2 - j \cdot 4) - (-5 + 6 \cdot j) = \underline{Z}_1$
b) $\frac{23-2j}{4+5j} = \underline{Z}_2$
c) $\left[(2 \cdot \mathrm{e}^{-j\,22^\circ}) \cdot (6 \cdot \mathrm{e}^{j\,32^\circ})\right] : (4 \cdot \mathrm{e}^{j\,5^\circ}) = \underline{Z}_3$

Lösung

a) Die Addition der Realteile ergibt $1 + 2 + 5 = 8$.
Die Addition der Imaginärteile ergibt $3 - 4 - 6 = -7$. Ergebnis: $\underline{\underline{\underline{Z}_1 = 8 - j \cdot 7}}$

b) Zähler und Nenner werden mit dem konjugiert komplexen Wert des Nenners erweitert.

$$\underline{Z}_2 = \frac{23 - 2j}{4 + 5j} = \frac{(23 - 2j) \cdot (4 - 5j)}{(4 + 5j) \cdot (4 - 5j)} = \frac{23 \cdot 4 - 23 \cdot 5j - 2j \cdot 4 - 2 \cdot 5}{16 + 25}$$

Zusammenfassen der Real- und Imaginärteile und Beseitigen des Bruches ergibt: $\underline{\underline{\underline{Z}_2 = 2 - 3j}}$

c) Die Exponentialform komplexer Zahlen eignet sich besonders gut zur Multiplikation und Division, da die Exponenten addiert bzw. subtrahiert werden.

$$\left(2 \cdot \mathrm{e}^{-j\,22^\circ}\right) \cdot \left(6 \cdot \mathrm{e}^{-j\,32^\circ}\right) = 12 \cdot \mathrm{e}^{j\,10^\circ}; \quad \frac{12 \cdot \mathrm{e}^{j\,10^\circ}}{4 \cdot \mathrm{e}^{j\,5^\circ}} = \frac{12}{4} \cdot \mathrm{e}^{j\,10^\circ} \cdot \mathrm{e}^{-j\,5^\circ} = 3 \cdot \mathrm{e}^{j\,(10^\circ - 5^\circ)}$$

$$\underline{\underline{\underline{Z}_3 = 3 \cdot \mathrm{e}^{j\,5^\circ}}}$$

Aufgabe 10.7
Gegeben ist der komplexe Ausdruck $\frac{6}{-15+j\,8}5 \cdot \mathrm{e}^{j\,45^\circ}$. Gesucht ist die Exponentialform $Z = r \cdot \mathrm{e}^{j\varphi}$.

Lösung

$$\frac{6}{-15 + j\,8}5 \cdot \mathrm{e}^{j\,45^\circ} = \frac{6}{\sqrt{(-15)^2 + 8^2}\mathrm{e}^{j\,\left[180^\circ - \arctan\left(\frac{8}{15}\right)\right]}}5 \cdot \mathrm{e}^{j\,45^\circ} = \frac{30}{17 \cdot \mathrm{e}^{j\,151{,}93^\circ}}\mathrm{e}^{j\,45^\circ}$$
$$= 1{,}76 \cdot \mathrm{e}^{j\,(45^\circ - 151{,}93^\circ)}$$

$$\underline{\underline{Z = 1{,}76 \cdot \mathrm{e}^{-j\,106{,}93^\circ}}}$$

Aufgabe 10.8
Gegeben ist der komplexe Ausdruck $\frac{10}{a+jb} = 2{,}36 \cdot \mathrm{e}^{j\,45^\circ}$. Gesucht sind a und b.

Lösung

$$a + jb = \frac{10}{2{,}36 \cdot \mathrm{e}^{j\,45^\circ}} = 4{,}24 \cdot \mathrm{e}^{-j\,45^\circ} = 4{,}24 \cdot [\cos(45^\circ) - j\,\sin(45^\circ)] = 3 - j\,3;$$

$\underline{\underline{a = 3}}$; $\quad \underline{\underline{b = -3}}$

Aufgabe 10.9
Gegeben ist der komplexe Ausdruck $r \cdot \mathrm{e}^{j\varphi}(-3 + j\,8) = j\,32$. Gesucht sind r und φ.

Lösung

$$r \cdot \mathrm{e}^{j\varphi} = \frac{j\,32}{(-3 + j\,8)} = \frac{32\mathrm{e}^{j\,90^\circ}}{\sqrt{-3^2 + 8^2}\mathrm{e}^{j\left(180^\circ - \arctan\left(\frac{8}{3}\right)\right)}} = \frac{32 \cdot \mathrm{e}^{j\,90^\circ}}{8{,}54 \cdot \mathrm{e}^{j110{,}56^\circ}}$$

$$= 3{,}75 \cdot \mathrm{e}^{j(90^\circ - 110{,}56^\circ)}$$

$$r \cdot \mathrm{e}^{j\varphi} = 3{,}75 \cdot \mathrm{e}^{-j\,20{,}56^\circ}; \quad \underline{\underline{r = 3{,}75}}; \quad \underline{\underline{\varphi = -20{,}56^\circ}}$$

Aufgabe 10.10

Gegeben ist der komplexe Ausdruck $a + jb = 6 \cdot \mathrm{e}^{j120^\circ}(-4 + j\,3 + 2 \cdot \mathrm{e}^{j15^\circ})$. Gesucht sind a und b.

Lösung

$$a + jb = 6 \cdot \mathrm{e}^{j120^\circ}(-4 + j\,3 + 2 \cdot \mathrm{e}^{j15^\circ})$$

$$= 6 \cdot \mathrm{e}^{j120^\circ}\,(-4 + j\,3 + 2 \cdot [\cos(15^\circ) + j\,\sin(15^\circ)])$$

$$a + jb = 6 \cdot \mathrm{e}^{j120^\circ}(-2{,}07 + j\,3{,}52) = 6 \cdot \mathrm{e}^{j120^\circ}\sqrt{-2{,}07^2 + 3{,}52^2} \cdot \mathrm{e}^{j\left(180^\circ - \arctan\left(\frac{3{,}52}{2{,}07}\right)\right)}$$

$$a + jb = 6 \cdot \mathrm{e}^{j120^\circ} \cdot 4{,}08 \cdot \mathrm{e}^{j120{,}5^\circ} = 24{,}48 \cdot \mathrm{e}^{j\,240{,}5^\circ}$$

$$= 24{,}48 \cdot [\cos(240{,}5^\circ) + j\,\sin(240{,}5^\circ)]$$

$$a + jb = -12 - j\,21{,}3; \text{ Koeffizientenvergleich: } \underline{\underline{a = -12}}; \quad \underline{\underline{b = -21{,}3}}$$

10.3 Spannung, Strom, Widerstand als komplexe Größen

Aufgabe 10.11

Für fünf verschiedene Verbraucher sind jeweils die komplexe Eingangsspannung $\underline{U}$ und der komplexe Eingangsstrom $\underline{I}$ angegeben.

	Verbr. 1	Verbr. 2	Verbr. 3	Verbr. 4	Verbr. 5
$\underline{U}$	$(40 - j10)$ V	$(40 - j10)$ V	$(30 + j\,20)$ V	$(40 + j10)$ V	$(40 - j10)$ V
$\underline{I}$	$(10 - j\,6)$ A	$(7{,}5 + j\,30)$ A	$(15 - j\,22{,}5)$ A	$(8 + j\,2)$ A	$(10 + j10)$ A

a) Berechnen Sie jeweils die Komponentenform $\underline{Z} = R + jX$ mit Realteil R und Imaginärteil X sowie die Exponentialform $\underline{Z} = Z \cdot \mathrm{e}^{j\varphi}$ mit Betrag Z und Phase φ des komplexen Verbraucherwiderstandes $\underline{Z}$.
b) Zeichnen Sie die Widerstände in der komplexen Ebene als Zeiger.
c) Welches Verhalten haben die einzelnen Verbraucher (rein ohmisch, rein kapazitiv, rein induktiv, ohmisch-kapazitiv, ohmisch-induktiv)?

Lösung

a) Allgemein gilt: $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + jX = Z \cdot e^{j\varphi}$

Verbraucher 1

1. Möglichkeit: Quotient bilden und Zähler und Nenner mit dem konjugiert komplexen Wert des Nenners erweitern.

$$\underline{Z} = \frac{40 - j10}{10 - j6}\,\Omega = \frac{(40 - j10)(10 + j6)}{(10 - j6)(10 + j6)}\,\Omega = \frac{400 - j100 + j240 - j^2 60}{100 - j^2 36}\,\Omega$$

$$\underline{Z} = \frac{460 + j140}{136}\,\Omega; \quad \underline{\underline{\underline{Z} = (3{,}38 + j \cdot 1{,}03)\,\Omega}};$$

$$Z = \sqrt{3{,}38^2 + 1{,}03^2}\,\Omega = 3{,}5\,\Omega$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{1{,}03}{3{,}38}\right) = 16{,}9°; \quad \underline{\underline{\underline{Z} = 3{,}5\,\Omega \cdot e^{j16{,}9°}}}$$

2. Möglichkeit: Jeweils $\underline{U}$ und $\underline{I}$ in Exponentialform darstellen, dann Division entsprechend

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{Z_1}{Z_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

und Rückwandlung in die Komponentenform nach $\underline{Z} = Z \cdot (\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi))$.

$$\underline{U} = \sqrt{40^2 + 10^2}\,\text{V} \cdot e^{j\arctan\left(\frac{-10}{40}\right)} = 41{,}2\,\text{V} \cdot e^{-j14°};$$

$$\underline{I} = \sqrt{10^2 + 6^2}\,\text{A} \cdot e^{j\arctan\left(\frac{-6}{10}\right)} = 11{,}7\,\text{A} \cdot e^{-j31°}$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{41{,}2\,\text{V}}{11{,}7\,\text{A}} \cdot e^{-j14° + j31°} = \underline{\underline{3{,}5\,\Omega \cdot e^{j17°}}};$$

$$\underline{Z} = 3{,}5\,\Omega \cdot \cos(17°) + j \cdot 3{,}5\,\Omega \cdot \sin(17°)$$

$$\underline{\underline{\underline{Z} = (3{,}35 + j \cdot 1{,}02)\,\Omega}}$$

Unterschiede zur 1. Möglichkeit sind durch Rundungsfehler bedingt.

Verbraucher 2

$$\underline{Z} = \frac{40 - j10}{7{,}5 + j30}\,\Omega = \frac{(40 - j10)(7{,}5 - j30)}{(7{,}5 + j30)(7{,}5 - j30)}\,\Omega = \frac{300 - j75 - j1200 + j^2 300}{56{,}25 - j^2 900}\,\Omega$$

$$\underline{Z} = \frac{-j1275}{956{,}25}\,\Omega; \quad \underline{\underline{\underline{Z} = -j \cdot 1{,}33\,\Omega}}; \quad Z = 1{,}33\,\Omega; \quad \varphi = -90°;$$

$$\underline{\underline{\underline{Z} = 1{,}33\,\Omega \cdot e^{-j90°}}}$$

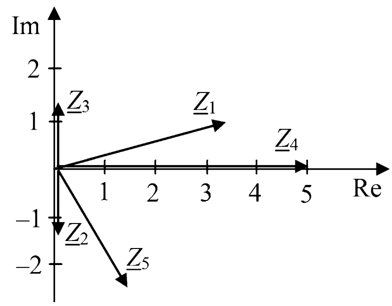


Abb. 10.3 Zeiger der komplexen Widerstände

Verbraucher 3

$$\underline{Z} = \frac{30 + j20}{15 - j22{,}5}\,\Omega = \frac{(30 + j20)(15 + j22{,}5)}{(15 - j22{,}5)(15 + j22{,}5)}\,\Omega$$
$$= \frac{450 + j675 + j300 + j^2 450}{225 - j^2 506{,}25}\,\Omega$$
$$\underline{Z} = \frac{j975}{731{,}25}\,\Omega; \quad \underline{\underline{\underline{Z} = j \cdot 1{,}33\,\Omega}}; \quad Z = 1{,}33\,\Omega; \quad \varphi = 90^\circ; \quad \underline{\underline{\underline{Z} = 1{,}33\,\Omega \cdot \mathrm{e}^{j90^\circ}}}$$

Verbraucher 4

$$\underline{Z} = \frac{40 + j10}{8 + j2}\,\Omega = \frac{(40 + j10)(8 - j2)}{(8 + j2)(8 - j2)}\,\Omega = \frac{320 + j80 - j80 - j^2 20}{64 - j^2 4}\,\Omega$$
$$= \frac{340}{68}\,\Omega$$
$$\underline{\underline{\underline{Z} = 5\,\Omega}}; \quad Z = 5\,\Omega; \quad \varphi = 0^\circ; \quad \underline{\underline{\underline{Z} = 5\,\Omega \cdot \mathrm{e}^{j0^\circ}}}$$

Verbraucher 5

$$\underline{Z} = \frac{40 - j10}{10 + j10}\,\Omega = \frac{(40 - j10)(10 - j10)}{(10 + j10)(10 - j10)}\,\Omega = \frac{400 - j100 - j400 + j^2 100}{100 - j^2 100}\,\Omega$$
$$\underline{Z} = \frac{300 - j500}{200}\,\Omega; \quad \underline{\underline{\underline{Z} = (1{,}5 - j \cdot 2{,}5)\,\Omega}}; \quad Z = \sqrt{1{,}5^2 + 2{,}5^2}\,\Omega = 2{,}92\,\Omega$$
$$\varphi = \arctan\left(\frac{-2{,}5}{1{,}5}\right) = -59^\circ; \quad \underline{\underline{\underline{Z} = 2{,}92\,\Omega \cdot \mathrm{e}^{-j59^\circ}}}$$

b) Die Widerstände sind in Abb. 10.3 als Zeiger in der komplexen Ebene dargestellt.

c) $\underline{Z}_1$ ist ohmsch-induktiv: Realteil > 0, Imaginärteil > 0, d. h. positiv. Man denke an den komplexen Widerstand $R + j\omega L$ der Reihenschaltung eines Widerstandes mit einer Spule.
$\underline{Z}_2$ ist rein kapazitiv: Realteil $= 0$, Imaginärteil < 0, d. h. negativ. Man denke an den komplexen Widerstand eines Kondensators $-j \cdot X_C = \frac{1}{j\omega C}$.
$\underline{Z}_3$ ist rein induktiv: Realteil $= 0$, Imaginärteil > 0. Man denke an den komplexen Widerstand einer Spule $j\omega L$.
$\underline{Z}_4$ ist rein ohmisch: Realteil > 0, Imaginärteil $= 0$.
$\underline{Z}_5$ ist ohmsch-kapazitiv; Grund: Realteil > 0, Imaginärteil < 0.

Aufgabe 10.12
Geben Sie zu der Zeitfunktion der Spannung $u(t) = 5\,\mathrm{V} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + 20°)$ und zu der Zeitfunktion des Stromes $i(t) = 2\,\mathrm{A} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t - 60°)$ jeweils den komplexen Effektivwertzeiger an.

Lösung

$$\underline{U} = 5\,\mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{j\,20°}; \quad \underline{I} = 2\,\mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{-j\,60°}$$

Aufgabe 10.13
Gegeben ist die Spannung $u(t) = 20\,\mathrm{V} \cdot \sin(\omega t)$. Geben Sie den komplexen Effektivwertzeiger $\underline{U}$ nach Betrag und Phase an.

Lösung

$$\underline{U} = \frac{20\,\mathrm{V}}{\sqrt{2}} \cdot \mathrm{e}^{j\,0} \text{ oder } U = \frac{20\,\mathrm{V}}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_\mathrm{u} = 0.$$

Aufgabe 10.14
Gegeben ist die Spannung $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t)$. Geben Sie den zugehörigen rotierenden Scheitelwertzeiger, den ruhenden Scheitelwertzeiger und den komplexen Effektivwertzeiger an.

Lösung
Rotierender Scheitelwertzeiger:

$$\underline{u}(t) = \hat{U} \cdot \mathrm{e}^{j(\omega t + 0)} = \hat{U} \cdot \mathrm{e}^{j\omega t} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{j\,0}}_{1} = \underline{\underline{\hat{U} \cdot \mathrm{e}^{j\omega t}}}$$

$\mathrm{e}^{j\omega t}$ wird als Drehfaktor bezeichnet.
Ruhender Scheitelwertzeiger (komplexe Amplitude): $\underline{\hat{U}} = \hat{U}$
Komplexer Effektivwertzeiger: $\underline{U} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$

Aufgabe 10.15
Geben Sie die Spannung $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi_\mathrm{u})$ im Komplexen an.

Lösung

$$\underline{u}(t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega t + \varphi_\mathrm{u}) + j \cdot \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi_\mathrm{u})$$

Mit $\cos(x) + j \cdot \sin(x) = \mathrm{e}^{jx}$ nach Euler folgt:

$$\underline{u}(t) = \hat{U} \cdot \mathrm{e}^{j(\omega t + \varphi_\mathrm{u})} = \hat{U} \cdot \mathrm{e}^{j\varphi_\mathrm{u}} \cdot \mathrm{e}^{j\omega t} = \underline{\hat{U}} \cdot \mathrm{e}^{j\omega t} \text{ mit } \underline{\hat{U}} = \hat{U} \cdot \mathrm{e}^{j\varphi_\mathrm{u}} = \sqrt{2} \cdot U \cdot \mathrm{e}^{j\varphi_\mathrm{u}}$$

Aufgabe 10.16
Kann man an einer komplexen Amplitude erkennen, ob die zugeordnete Schwingung eine Sinus- oder eine Cosinus-Funktion ist?

Lösung
Ist nur die komplexe Amplitude $\underline{\hat{U}} = \hat{U} \cdot \mathrm{e}^{j\varphi_\mathrm{u}}$ gegeben, so wird sie vor der Transformation in den Zeitbereich mit $\mathrm{e}^{j\omega t}$ multipliziert:

$$\underline{u}(t) = \hat{U} \cdot \mathrm{e}^{j\varphi_\mathrm{u}} \cdot \mathrm{e}^{j\omega t} = \hat{U} \cdot \cos(\omega t + \varphi_\mathrm{u}) + j \cdot \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi_\mathrm{u})$$

$u(t)$ ist mit $u(t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega t + \varphi_\mathrm{u})$ entweder der Realteil von $\underline{u}(t)$ oder mit $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi_\mathrm{u})$ der Imaginärteil von $\underline{u}(t)$.

Also:

$$u(t) = \underbrace{\mathrm{Re}\{\underline{u}(t)\}}_{\cos} \text{ oder } u(t) = \underbrace{\mathrm{Im}\{\underline{u}(t)\}}_{\sin}$$

An der komplexen Amplitude kann man also nicht mehr erkennen, ob die zugeordnete Schwingung eine Sinus- oder Cosinus-Funktion ist.

Aufgabe 10.17
Gegeben ist die komplexe Zeitfunktion $\underline{u}(t) = \hat{U} \cdot \mathrm{e}^{j\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}$. Geben Sie die zugehörige reelle Zeitfunktion $u(t)$ an.

Lösung

$$\underline{u}(t) = \hat{U} \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + j \cdot \hat{U} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$u(t) = \mathrm{Re}\{\underline{u}(t)\} = \hat{U} \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ oder } u(t) = \mathrm{Im}\{\underline{u}(t)\} = \hat{U} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Aufgabe 10.18
Wandeln Sie die Komponentenform $\underline{U} = (1 + j2)$ V der komplexen Effektivspannung in die Exponentialform um.

Lösung

$$U = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}\,\mathrm{V}; \quad \varphi = \arctan\left(\frac{2}{1}\right) = \arctan(2) = 63{,}4°; \quad \underline{\underline{\underline{U} = \sqrt{5}\,\mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{j\,63{,}4°}}}$$

Probe: Wandlung der Exponentialform zurück in die Komponentenform.

$$\underline{U} = \sqrt{5} \cdot [\cos(63{,}4°) + j \cdot \sin(63{,}4°)]\ \mathrm{V} = \underline{\underline{(1 + j\,2)\,\mathrm{V}}}$$

Aufgabe 10.19

Leiten Sie im komplexen Bereich formal den komplexen Widerstand in der Komponentenform als Quotient von Spannung und Strom her.

Lösung

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}; \quad \underline{U} = U \cdot \mathrm{e}^{j\varphi_\mathrm{u}}; \quad \underline{I} = I \cdot \mathrm{e}^{j\varphi_\mathrm{i}}; \quad \underline{Z} = \frac{U \cdot \mathrm{e}^{j\varphi_\mathrm{u}}}{I \cdot \mathrm{e}^{j\varphi_\mathrm{i}}} = \frac{U}{I} \cdot \mathrm{e}^{j(\varphi_\mathrm{u} - \varphi_\mathrm{i})} = \frac{U}{I} \cdot \mathrm{e}^{j\varphi};$$

$$Z = |\underline{Z}| = \frac{U}{I};$$

$$\underline{Z} = Z \cdot \mathrm{e}^{j\varphi} = Z \cdot \cos(\varphi) + j \cdot Z \cdot \sin(\varphi) = \underline{\underline{R + j \cdot X}}$$

Einfache Wechselstromkreise 11

Zusammenfassung

Es werden Eigenschaften und Wirkungsweise der Bauelemente Spule und Kondensator an Wechselspannung betrachtet. Die Funktion der Reihenschaltung von ohmschem Widerstand und Spule und der Reihenschaltung von ohmschem Widerstand und Kondensator werden sowohl im Zeitbereich als auch im komplexen Bereich berechnet. Zur Unterstützung der Anschaulichkeit kommen im Zeitbereich Liniendiagramme und im komplexen Bereich Zeigerdiagramme zum Einsatz. Die bei den Reihenschaltungen durchgeführten Berechnungen werden für die Parallelschaltung von Widerstand und Spule und für die Parallelschaltung von Widerstand und Kondensator fortgesetzt. Gemischte Schaltungen, die aus Reihenschaltungen und Parallelschaltungen von Widerständen, Kondensatoren und Spulen zusammengesetzt sind, führen zu etwas anspruchsvolleren Berechnungen und schwieriger zu konstruierenden Zeigerdiagrammen. Die Einführung der Übertragungsfunktion im komplexen Bereich ergibt neue Möglichkeiten bei der Analyse von Netzwerken. Mit der Verwendung der Begriffe Verstärkungsfaktor, Verstärkungsmaß, Dämpfungsmaß werden Berechnungen unter Verwendung logarithmischer Größen geübt.

11.1 Grundwissen – kurz und bündig

- Ein ohmscher Widerstand ist ein Wirkwiderstand, in ihm entsteht Wärme.
- Beim ohmschen Widerstand sind Strom und Spannung in Phase.
- Eine Spule lässt Wechselstrom umso schlechter durch, je höher die Frequenz des Wechselstromes und je größer die Induktivität der Spule ist.
- Bei einer idealen Spule eilt der Strom der Spannung um $\pi/2 = 90°$ nach.
- Der Blindwiderstand einer idealen Spule ist $X_\mathrm{L} = \omega L$.
- Ein Kondensator lässt Wechselstrom umso besser durch, je höher die Frequenz des Wechselstromes und je größer die Kapazität des Kondensators ist.

L. Stiny, *Aufgabensammlung zur Elektrotechnik und Elektronik*,
DOI 10.1007/978-3-658-14381-7_11

- Bei einem idealen Kondensator eilt der Strom der Spannung um $\pi/2 = 90°$ voraus.
- Der Blindwiderstand eines idealen Kondensators ist $X_C = \frac{1}{\omega C}$.
- Der komplexe Widerstand einer Spule ist $\underline{Z}_L = j\omega L$.
- Der komplexe Widerstand eines Kondensators ist $\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$.
- Ein komplexer Widerstand (eine Impedanz) ist allgemein die Zusammenschaltung eines Wirkwiderstandes und eines Blindwiderstandes.
- Ein Scheinwiderstand (Einheit Ohm) ist der Absolutwert (der Betrag) eines komplexen Widerstandes.
- $\varphi = \varphi_{ui}$ ist der Winkel, um den die Spannung dem Strom vorauseilt (= Phasenverschiebungswinkel oder Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom).
- $\varphi_{iu} = -\varphi_{ui}$ ist der Phasenverschiebungswinkel zwischen Strom und Spannung.
- Mit den Nullphasenwinkeln φ_u der Spannung und φ_i des Stromes gilt: $\varphi_{ui} = \varphi_u - \varphi_i$.
- Der Winkel eines komplexen Widerstandes, der an eine Spannungsquelle angeschlossen ist, stimmt nach Wert und Vorzeichen mit $\varphi = \varphi_{ui}$ überein.
- Definition einer Übertragungsfunktion: $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{\text{Wirkung}}{\text{Ursache}}$.
- $|\underline{H}(j\omega)|$ wird als Amplitudengang bezeichnet.
- Die Phasenverschiebung (der Phasengang) zwischen Ausgangs- und Eingangssignal ist $\varphi(\omega) = \angle \underline{H}(j\omega)$.
- Der relative Spannungspegel in dB ist definiert als $V_{U,dB} = 20\,\text{dB} \cdot \log\left(\frac{U_a}{U_e}\right)$.
- Ein Bodediagramm ist die grafische Darstellung des Amplituden- und Phasengangs.
- Als Grenzfrequenz wird die -3 dB-Frequenz bezeichnet.
- Zur Normierung einer Übertragungsfunktion setzt man $R = C = L = 1$.
- Ein Tiefpass und ein Hochpass sind Filter.

11.2 Spule im Wechselstromkreis

Aufgabe 11.1
Eine Spule hat bei 50 Hz einen Blindwiderstand von 24 Ω. Wie groß ist die Induktivität L der Spule?

Lösung

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{24\,\Omega}{6,28 \cdot 50\,\text{s}^{-1}} = 0{,}0764\,\Omega\text{s} = 0{,}0764\,\text{H} = \underline{\underline{76{,}4\,\text{mH}}}$$

Aufgabe 11.2
Zwei induktiv nicht gekoppelte Spulen mit den Induktivitäten $L_1 = 0{,}8$ H und $L_2 = 0{,}35$ H sind in Reihe geschaltet.

a) Wie groß ist die Gesamtinduktivität L_{ges}?
b) Wie groß ist der induktive Blindwiderstand X_L bei 50 Hz?

Lösung

a) $L_{\text{ges}} = L_1 + L_2 = 0{,}8\,\text{H} + 0{,}35\,\text{H} = \underline{\underline{1{,}15\,\text{H}}}$

b) $X_\text{L} = \omega L = 2\pi \cdot 50\,\text{s}^{-1} \cdot 1{,}15\,\Omega\text{s} = \underline{\underline{361\,\Omega}}$

Aufgabe 11.3

Wie groß ist der induktive Blindwiderstand X_L einer idealen Spule mit der Induktivität $L = 10\,\text{mH}$ bei der Frequenz $f = 1\,\text{MHz}$?

Lösung

$$X_\text{L} = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot 10^6\,\text{s}^{-1} \cdot 10^{-2}\,\text{H}; \quad \underline{\underline{X_\text{L} = 62{,}8\,\text{k}\Omega}}$$

Aufgabe 11.4

Eine ideale Induktivität hat den Wert $L = 150\,\text{mH}$. Wie groß ist ihr Blindwiderstand X_L und ihr Blindleitwert B_L bei einer Frequenz von $f = 15\,\text{kHz}$?

Lösung

$$X_\text{L} = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot 15 \cdot 10^3\,\text{s}^{-1} \cdot 0{,}15\,\text{H}; \quad \underline{\underline{X_\text{L} = 14{,}14\,\text{k}\Omega}}; \quad \underline{\underline{B_\text{L} = -\frac{1}{X_\text{L}} = -70{,}7\,\mu\text{S}}}$$

Aufgabe 11.5

Wie groß ist die Induktivität einer idealen Spule, an der bei einer Frequenz von $f = 100\,\text{Hz}$ und einem durch die Spule fließenden sinusförmigen Strom mit dem Scheitelwert $\hat{I} = 15\,\text{A}$ eine Spannung von $U = 180\,\text{V}$ gemessen wird?

Lösung

$$L = \frac{X_\text{L}}{2 \cdot \pi \cdot f}; \quad X_\text{L} = \frac{U}{I} = \frac{U}{\hat{I}/\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot U}{\hat{I}};$$

$$L = \frac{\sqrt{2} \cdot U}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot \hat{I}} = \frac{\sqrt{2} \cdot 180\,\text{V}}{2 \cdot \pi \cdot 100\,\text{s}^1 \cdot 15\,\text{A}}; \quad \underline{\underline{L = 27\,\text{mH}}}$$

Aufgabe 11.6

Leiten Sie den Zusammenhang zwischen Spannung und Strom bei der Spule im Zeitbereich und im komplexen Bereich her.

Lösung

Zeitbereich

Wir gehen aus von dem Strom $i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin(\omega t + \varphi_\text{i})$. Die Bauteilgleichung für die Spule ist $u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$. Einsetzen des Stromes und Differenzieren ergibt:

$$u(t) = \omega \cdot L \cdot \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t + \varphi_\text{i}) = \omega \cdot L \cdot \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin\left(\omega t + \underbrace{\varphi_\text{i} + \frac{\pi}{2}}_{\varphi_\text{u}}\right)$$

Die Zeitfunktion der Spannung an der Spule hat den Nullphasenwinkel $\varphi_{\mathrm{u}} = \varphi_{\mathrm{i}} + \frac{\pi}{2}$, die Spannung eilt also dem Strom durch die Spule um $\pi/2$ voraus. Die Spannung ist im Liniendiagramm gegenüber dem Strom um $\pi/2$ nach links verschoben. Dies entspricht dem physikalischen Verhalten der Spule beim Anschalten einer Gleichspannung: Die Spannung macht einen Sprung, der Strom tritt durch die Wirkung der Selbstinduktion verzögert auf.

Komplexer Bereich

$$\underline{i}_{\mathrm{L}}(t) = \hat{I} \cdot \mathrm{e}^{j(\omega t + \varphi_{\mathrm{i}})} = \hat{I} \cdot \mathrm{e}^{j\varphi_{\mathrm{i}}} \cdot \mathrm{e}^{j\omega t}; \quad \frac{d\underline{i}_{\mathrm{L}}(t)}{dt} = \hat{I} \cdot \mathrm{e}^{j\varphi_{\mathrm{i}}} \cdot j\omega \cdot \mathrm{e}^{j\omega t}$$

Bauteilgleichung (Induktionsgesetz):

$$\underline{u}_{\mathrm{L}}(t) = L \cdot \frac{d\underline{i}_{\mathrm{L}}(t)}{dt}$$
$$\underline{u}_{\mathrm{L}}(t) = j\omega L \cdot \hat{I} \cdot \mathrm{e}^{j(\omega t + \varphi_{\mathrm{i}})}$$
$$\underline{Z}_{\mathrm{L}} = \frac{\underline{u}_{\mathrm{L}}(t)}{\underline{i}_{\mathrm{L}}(t)} = \frac{j\omega L \cdot \cancel{\hat{I} \cdot \mathrm{e}^{j(\omega t + \varphi_{\mathrm{i}})}}}{\cancel{\hat{I} \cdot \mathrm{e}^{j(\omega t + \varphi_{i})}}}$$

Komplexer Widerstand der Spule: $\underline{\underline{\underline{Z}_{\mathrm{L}} = j\omega L}}$

11.3 Kondensator im Wechselstromkreis

Aufgabe 11.7

Ein Kondensator wird an das Versorgungsnetz mit 230 V, 50 Hz angeschlossen. Der durch den Kondensator fließende Strom wird zu 15 mA gemessen. Wie groß ist die Kapazität des Kondensators?

Lösung

$$X_{\mathrm{C}} = \frac{U}{I} = \frac{230\,\mathrm{V}}{0{,}015\,\mathrm{A}} = 15{,}3\,\mathrm{k}\Omega;$$
$$C = \frac{1}{\omega \cdot X_{\mathrm{C}}} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 15{,}3 \cdot 10^3}\,\mathrm{F} = 0{,}2\,\mu\mathrm{F} = \underline{\underline{200\,\mathrm{nF}}}$$

Aufgabe 11.8

Drei Kondensatoren mit den Kapazitäten $C_1 = 47\,\mathrm{nF}$, $C_2 = 22\,\mathrm{nF}$ und $C_3 = 15\,\mathrm{nF}$ sind parallel geschaltet und werden an eine sinusförmige Wechselspannungsquelle mit 1,4 Volt, 400 Hz angeschlossen. Berechnen Sie

a) die Ersatzkapazität C,
b) den kapazitiven Blindwiderstand X_{C},
c) den kapazitiven Blindstrom I_{C}.

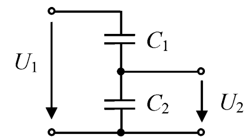


Abb. 11.1 Kapazitiver Spannungsteiler

Lösung

a)

$$C = C_1 + C_2 + C_3 = \underline{\underline{84\,\text{nF}}}$$

b)

$$X_\text{C} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 400 \cdot 84 \cdot 10^{-9}}\,\Omega = \underline{\underline{4736\,\Omega}}$$

c)

$$I_\text{C} = \frac{U}{X_\text{C}} = \frac{1{,}4\,\text{V}}{4736\,\Omega} = \underline{\underline{296\,\mu\text{A}}}$$

Aufgabe 11.9

Ein kapazitiver Spannungsteiler (Abb. 11.1) mit $C_1 = 220\,\text{nF}$ und $C_2 = 1\,\mu\text{F}$ ist an die Wechselspannung $U_1 = 4{,}2\,\text{V}$, $f = 2450\,\text{Hz}$ angeschlossen. Berechnen Sie die Spannung U_2.

Lösung

$$U_2 = U_1 \cdot \frac{X_{C2}}{X_{C1} + X_{C2}} = U_1 \cdot \frac{\frac{1}{\omega C_2}}{\frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\omega C_2}} = U_1 \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2}; \quad \underline{\underline{U_2 = 0{,}757\,\text{V}}}$$

Aufgabe 11.10

Wie groß ist der kapazitive Blindwiderstand X_C eines Kondensators mit dem Kapazitätswert $C = 10\,\mu\text{F}$ bei der Frequenz $f = 100\,\text{Hz}$? An den Kondensator wird die Spannung $u(t) = 20\,\text{V} \cdot \sin(\omega t)$ mit der Frequenz $f = 400\,\text{Hz}$ angelegt. Wie hoch ist der Effektivwert I des Stromes?

Lösung

$$X_\text{C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 100\,\text{s}^{-1} \cdot 10^{-5}\,\text{F}}; \quad \underline{\underline{X_\text{C} = 159{,}2\,\Omega}}$$

$$I = \omega \cdot C \cdot U = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot C \cdot U = 2 \cdot \pi \cdot 400\,\text{s}^{-1} \cdot 10^{-5}\,\text{F} \cdot \frac{20\,\text{V}}{\sqrt{2}}; \quad \underline{\underline{I = 355\,\text{mA}}}$$

Aufgabe 11.11

Leiten Sie den Zusammenhang zwischen Spannung und Strom beim Kondensator im Zeitbereich und im komplexen Bereich her.

Lösung

Zeitbereich

Wir gehen aus von der Spannung $u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$. Die Bauteilgleichung für den Kondensator ist $i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$. Einsetzen der Spannung und Differenzieren ergibt (siehe auch Aufgabe 11.6):

$$i(t) = \omega \cdot C \cdot \sqrt{2} \cdot U \cdot \sin\left(\omega t + \underbrace{\varphi_u + \frac{\pi}{2}}_{\varphi_i}\right)$$

Die Zeitfunktion des Stromes durch den Kondensator hat den Nullphasenwinkel $\varphi_i = \varphi_u + \frac{\pi}{2}$, der Strom eilt also der Spannung am Kondensator um $\pi/2$ voraus. Der Strom ist im Liniendiagramm gegenüber der Spannung um $\pi/2$ nach links verschoben. Dies entspricht dem physikalischen Verhalten des Kondensators beim Anschalten einer Gleichspannung: Der Strom macht einen Sprung, die Spannung tritt durch den Ladevorgang verzögert auf.

Komplexer Bereich

$$\underline{u}_C(t) = \hat{U} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)} = \hat{U} \cdot e^{j\varphi_u} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\frac{d\underline{u}_C(t)}{dt} = \hat{U} \cdot e^{j\varphi_u} \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t}$$

$$\text{Bauteilgleichung: } \underline{i}_C(t) = C \cdot \frac{d\underline{u}_C(t)}{dt}$$

$$\underline{i}_C(t) = j\omega C \cdot \hat{U} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)}$$

$$\underline{Z}_C = \frac{\underline{u}_C(t)}{\underline{i}_C(t)} = \frac{\cancel{\hat{U} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)}}}{j\omega C \cdot \cancel{\hat{U} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)}}}$$

Komplexer Widerstand des Kondensators: $\underline{\underline{\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}}}$

11.4 Reihenschaltung von ohmschem Widerstand und Spule

Aufgabe 11.12

Die Reihenschaltung eines ohmschen Widerstandes $R = 50\,\Omega$ und einer Spule $L = 200\,\text{mH}$ liegt an der Netzwechselspannung $U = 230\,\text{V}$, $f = 50\,\text{Hz}$. Geben Sie die Zeitfunktion $i(t)$ des Stromes ohne Anwendung der komplexen Rechnung an.

Lösung

Der Scheinwiderstand der Reihenschaltung ist $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = 80{,}3\,\Omega$.

Der Scheitelwert des Stromes ist somit $\hat{I} = \frac{\sqrt{2} \cdot U}{Z} = 4{,}1\,\text{A}$.

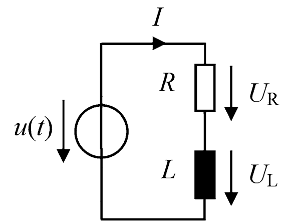


Abb. 11.2 Reihenschaltung von Widerstand und Spule

Der Phasenverschiebungswinkel zwischen Spannung und Strom ist:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right) = \arctan\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot 50\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 0{,}2\,\mathrm{H}}{50\,\Omega}\right) = 51{,}5^\circ.$$

Wir denken uns die Spannung im Liniendiagramm mit dem Nullphasenwinkel $\varphi_u = 0$ durch den Nullpunkt des Koordinatensystems verlaufend. Es ist $\varphi = \varphi_{ui} > 0$, der Strom eilt der Spannung nach, ist also im Liniendiagramm nach rechts verschoben und hat somit einen negativen Nullphasenwinkel von $\varphi_i = -\varphi = -51{,}5^\circ$.

Die Netzwechselspannung ist sinusförmig, somit ist auch der Strom in diesem linearen Netzwerk sinusförmig mit gleicher Frequenz wie die Spannung. Der Strom ist allgemein:

$$i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i).$$

Die Zeitfunktion des Stromes ist $\underline{\underline{i(t) = 4{,}1\,\mathrm{A} \cdot \sin(\omega t - 51{,}5^\circ)}}$.

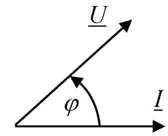
In diesem Beispiel gibt es zwei Punkte, die zu beachten sind und in Prüfungen häufige Fehlerquellen darstellen:

1. Vor der Sinusfunktion muss ein Scheitelwert stehen, dieser muss aus dem gegebenen Effektivwert der Spannung berechnet werden.
2. Der Phasenverschiebungswinkel zwischen Spannung und Strom ist positiv, der Nullphasenwinkel des Stromes ist negativ.

Aufgabe 11.13
Die Reihenschaltung eines ohmschen Widerstandes $R = 80\,\Omega$ und einer Induktivität $L = 240\,\mathrm{mH}$ liegt an einer sinusförmigen Spannungsquelle $u(t) = 42\,\mathrm{V} \cdot \sin(\omega t)$, $f = 50\,\mathrm{Hz}$ (Abb. 11.2).

a) Wie groß ist der induktive Blindwiderstand X_L?
b) Wie groß ist der Scheinwiderstand Z (der Betrag der Impedanz) der RL-Reihenschaltung?
c) Welchen Wert hat der Strom I?
d) Bestimmen Sie den Winkel φ der Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom in Grad.

Abb. 11.3 Zeigerdiagramm von $\underline{U}$, $\underline{I}$



e) Skizzieren Sie als Zeigerdiagramm das Widerstandsdreieck aus Wirk- Blind- und Scheinwiderstand.
f) Wie groß sind die Teilspannungen U_R und U_L?
g) Bestimmen Sie den Strom I mit komplexer Rechnung.
h) Bestimmen Sie den Winkel φ mit komplexer Rechnung.
i) Geben Sie einen Ausdruck für die Zeitfunktion $i(t)$ an.

Lösung

a) $X_L = \omega L = 2\pi \cdot 50\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 0{,}24\,\Omega\mathrm{s} = \underline{\underline{75{,}4\,\Omega}}$
b) Wegen der Winkelverschiebung zwischen Spannung und Strom bei einem Blindwiderstand dürfen die Werte von ohmschem Widerstand und Blindwiderstand nicht einfach arithmetisch addiert werden. Der Scheinwiderstand der *RL*-Reihenschaltung ergibt sich aus der *geometrischen* Addition der Widerstandszeiger (ähnlich der Addition von Vektoren). Der Scheinwiderstand ist als Betrag der geometrischen Addition von Wirk- und Blindwiderstand zu ermitteln. Die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom ist bei der idealen Spule 90°. Den Scheinwiderstand erhalten wir somit entsprechend den Verhältnissen im rechtwinkligen Dreieck (Pythagoras).

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{80^2 + 75{,}4^2}\,\Omega = \underline{\underline{109{,}9\,\Omega}}$$

c)

$$\hat{U} = 42\,\mathrm{V}; \quad U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}};$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{\frac{42\,\mathrm{V}}{\sqrt{2}}}{109{,}9\,\Omega} = \frac{29{,}7\,\mathrm{V}}{109{,}9\,\Omega} = \underline{\underline{270\,\mathrm{mA}}} \text{ (ein Effektivwert)}$$

d)

$$\varphi = \varphi_{ui} = \angle(\underline{U}, \underline{I}) = \arctan\left(\frac{\overbrace{X_L}^{\text{Blindanteil}}}{\underbrace{R}_{\text{Wirkanteil}}}\right) = \arctan\left(\frac{75{,}4\,\Omega}{80\,\Omega}\right) = \underline{\underline{43{,}3°}}$$

Die Schaltung zeigt insgesamt induktives Verhalten, der Strom eilt der Spannung um φ nach. Diese Verschiebung des Stromes gegenüber der Spannung ist qualitativ sofort aus der Schaltung ersichtlich, es ist ja nur eine Induktivität vorhanden und keine Kapazität. Für die komplexen Effektivwerte von Spannung und Strom erhält man das Zeigerdiagramm in Abb. 11.3.

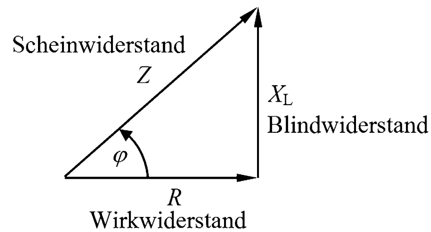


Abb. 11.4 Widerstandsdreieck

e) Das Widerstandsdreieck aus Wirk- Blind- und Scheinwiderstand zeigt Abb. 11.4.

f)
$$U_R = R \cdot I = \underline{\underline{21{,}6\,\mathrm{V}}}; \quad U_L = \omega L \cdot I = X_L \cdot I = \underline{\underline{20{,}4\,\mathrm{V}}}$$

U_R und U_L sind Effektivwerte. Die Scheitelwerte sind:

$$\hat{U}_R = U_R \cdot \sqrt{2} = 30{,}5\,\mathrm{V}; \quad \hat{U}_L = U_L \cdot \sqrt{2} = 28{,}9\,\mathrm{V}$$

Wie man sieht, ist $\hat{U}_R + \hat{U}_L = 59{,}4\,\mathrm{V} \neq 42\,\mathrm{V}$, da die Spannungen *geometrisch* addiert werden müssen: $\hat{U} = \sqrt{\hat{U}_R^2 + \hat{U}_L^2} = \sqrt{(30{,}5\,\mathrm{V})^2 + (28{,}9\,\mathrm{V})^2} = 42\,\mathrm{V}$.
Wegen der Phasenbeziehung der Teilspannungen darf man auch auf keinen Fall die Maschenregel anwenden, es gilt also *nicht*: $\hat{U}_L = 42\,\mathrm{V} - \hat{U}_R$.

g) Eine komplexe Rechnung ergibt für den Strom I:

$$\underline{U} = \frac{42\,\mathrm{V}}{\sqrt{2}} \cdot \mathrm{e}^{j\,0} = 29{,}7\,\mathrm{V} \text{ (ein komplexer Effektivwertzeiger)}; \; U = |\underline{U}| = 29{,}7\,\mathrm{V}$$

$$\underline{Z} = R + j\omega L = (80 + j\,2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}24)\,\Omega = (80 + j \cdot 75{,}4)\,\Omega$$

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{80^2 + 75{,}4^2}\,\Omega = 109{,}9\,\Omega$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{29{,}7\,\mathrm{V}}{109{,}9\,\Omega} = \underline{\underline{270\,\mathrm{mA}}}$$

h) In der Angabe ist kein Nullphasenwinkel der Spannung angegeben, er ist also null:

$$\varphi_u = \angle \underline{U} = 0$$

Der Winkel der Impedanz $\underline{Z} = R + j\omega L$ ist: $\angle \underline{Z} = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right) = \arctan\left(\frac{75{,}4}{80}\right) = 43{,}3°$
Die Beziehung $\angle \underline{I} = \angle\left(\frac{\underline{U}}{\underline{Z}}\right)$ kann man als Erweiterung des komplexen ohmschen Gesetzes auf Winkel betrachten. Wir erhalten jetzt für den Nullphasenwinkel des Stromes:

$$\varphi_i = \angle \underline{I} = \angle\left(\frac{\underline{U}}{\underline{Z}}\right) = \angle \underline{U} - \angle \underline{Z} = 0 - 43{,}3° = -43{,}3°$$

Der Phasenverschiebungswinkel zwischen Spannung und Strom kann aus deren Nullphasenwinkeln berechnet werden:

$$\varphi = \varphi_{ui} = \angle(\underline{U}, \underline{I}) = \varphi_u - \varphi_i = 0 - (-43{,}3°) = \underline{\underline{43{,}3°}}$$

Diesen Wert hatten wir bereits als Winkel der Impedanz $\underline{Z} = R + j\omega L$ berechnet. Der Winkel von $\underline{Z}$ gibt also den Winkel φ zwischen Spannung und Strom nach Wert und Vorzeichen richtig an.
Bekanntlich gibt es zwei Möglichkeiten, um φ zu berechnen:
1. Aus den Nullphasenwinkeln $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$
2. als Winkel des komplexen Widerstandes $\varphi = \angle \underline{Z}$.

i) Allgemein ist der Strom in Abhängigkeit der Zeit:

$$i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Die Frequenz bleibt in einem linearen Netzwerk unverändert und kann aus der Angabe übernommen werden. Der Nullphasenwinkel des Stromes wurde soeben zu $\varphi_i = -43{,}3°$ berechnet. Der Strom wurde zu $I = 270\,\text{mA}$ berechnet. Wir dürfen jetzt nicht vergessen, dass dies ein Effektivwert ist. Vor der Sinusfunktion steht ein Scheitelwert, den wir durch Multiplikation des Effektivwertes mit $\sqrt{2}$ erhalten.

$$\underline{\underline{i(t) = \sqrt{2} \cdot 270\,\text{mA} \cdot \sin(\omega t - 43{,}3°)}}$$

Aus dem Vorzeichen des Nullphasenwinkels sehen wir auch im Zeitbereich, dass der Strom der Spannung nacheilt, dessen Liniendiagramm also gegenüber der Spannung nach rechts verschoben ist.

Aufgabe 11.14
Eine Spule mit dem Wicklungswiderstand $R = 20\,\Omega$ und der Induktivität $L = 100\,\text{mH}$ liegt an der Netzwechselspannung $U = 230\,\text{V}$, $f = 50\,\text{Hz}$.

a) Wie groß sind Blindwiderstand X_L und Scheinwiderstand Z_L der Spule?
b) Wie groß ist der Strom I durch die Spule? Wie groß ist die Phasenverschiebung $\varphi = \varphi_\text{ui}$ zwischen Spannung und Strom in Grad?
c) Wie groß sind der Wirkspannungsabfall U_R und der Blindspannungsabfall U_L an der Spule?
d) Wie groß sind die in der Spule entstehende Wirkleistung P, Blindleistung Q und Scheinleistung S?

Lösung
a)

$$X_\text{L} = \omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot 50\,\text{s}^{-1} \cdot 0{,}1\,\Omega\,\text{s} = \underline{\underline{31{,}4\,\Omega}}$$

$$Z_\text{L} = \sqrt{R^2 + X_\text{L}^2} = \sqrt{(20\,\Omega)^2 + (31{,}4\,\Omega)^2} = \underline{\underline{37{,}2\,\Omega}}$$

b)

$$I = \frac{230\,\text{V}}{37{,}2\,\Omega} = \underline{\underline{6{,}2\,\text{A}}}$$

$$\underline{Z}_\text{L} = R + jX_\text{L} = 20\,\Omega + j \cdot 31{,}4\,\Omega$$

Der Winkel des komplexen Widerstandes stimmt nach Betrag und Vorzeichen mit der Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom überein.

$$\varphi = \varphi_{\text{ui}} = \arctan\left(\frac{31{,}4\,\Omega}{20\,\Omega}\right) = \underline{\underline{57{,}5^\circ}}$$

Der Strom eilt der Spannung um 57,5° nach.

c)

$$U_{\text{R}} = 6{,}2\,\text{A} \cdot 20\,\Omega = \underline{\underline{124\,\text{V}}}; \quad U_L = 6{,}2\,\text{A} \cdot 31{,}4\,\Omega = \underline{\underline{194{,}7\,\text{V}}}$$

Probe: $U = \sqrt{(124\,\text{V})^2 + (194{,}7\,\text{V})^2} = \underline{\underline{230{,}8\,\text{V}}}$, bis auf Rundungsfehler i. O.

d)

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) = 230\,\text{V} \cdot 6{,}2\,\text{A} \cdot \cos(57{,}5^\circ) = \underline{\underline{766{,}2\,\text{W}}}$$

$$Q = U \cdot I \cdot \sin(\varphi) = 230\,\text{V} \cdot 6{,}2\,\text{A} \cdot \sin(57{,}5^\circ) = \underline{\underline{1202{,}7\,\text{var}}}$$

$$S = U \cdot I = 230\,\text{V} \cdot 6{,}2\,\text{A} = \underline{\underline{1426\,\text{VA}}}$$

Probe: $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \underline{\underline{1426{,}03\,\text{VA}}}$, bis auf Rundungsfehler i. O.

Aufgabe 11.15

Eine Spule mit dem Wicklungswiderstand $R_1 = 60\,\Omega$ und der Induktivität $L_1 = 100\,\text{mH}$ ist mit einer zweiten Spule mit dem Wicklungswiderstand $R_2 = 120\,\Omega$ und der Induktivität $L_2 = 400\,\text{mH}$ in Reihe geschaltet (magnetisch nicht gekoppelt). Berechnen Sie für die Frequenz $f = 50\,\text{Hz}$

a) den Scheinwiderstand (Betrag der Impedanz) der Reihenschaltung,
b) den Leistungsfaktor $\cos(\varphi)$.

Lösung

a) Das Ersatzschaltbild besteht aus dem ohmschen Widerstand $R_1 + R_2$ und der Induktivität $L_1 + L_2$. Der Betrag der Impedanz ist $Z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + [\omega(L_1 + L_2)]^2}$.

$$Z = \sqrt{180^2 + (2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}5)^2}\,\Omega = \underline{\underline{238{,}9\,\Omega}}$$

b) Der Leistungsfaktor ergibt sich aus dem Verhältnis von Wirkleistung zu Scheinleistung bzw. aus dem Verhältnis von Wirkwiderstand zu Scheinwiderstand.

$$\cos(\varphi) = \frac{R_1 + R_2}{Z} = \frac{180\,\Omega}{238{,}9\,\Omega} = \underline{\underline{0{,}75}}$$

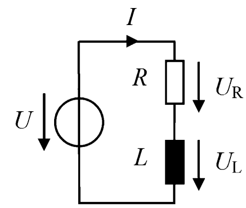


Abb. 11.5 Reale Spule an Wechselspannung

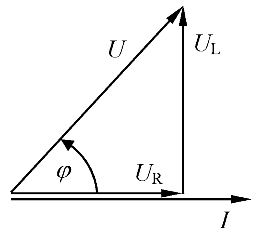


Abb. 11.6 Zeigerdiagramm der Spannungen und des Stromes

Aufgabe 11.16
Das Ersatzschaltbild einer realen Spule ist durch die Reihenschaltung eines Wirkwiderstandes R und einer idealen Induktivität L gegeben (Abb. 11.5). Eine Spule mit $R = 20\,\Omega$ und $L = 200\,\text{mH}$ liegt an einer sinusförmigen Wechselspannung mit der Frequenz $f = 50\,\text{Hz}$ und dem Effektivwert $U = 230\,\text{V}$.

a) Tragen Sie qualitativ die Spannungen U, U_R und U_L und den Strom I in ein Zeigerdiagramm ein.
b) Wie groß ist der Strom I? Um welchen Winkel in Grad ist die Spannung U gegenüber dem Strom I phasenverschoben?
c) Wie groß sind die Teilspannungen U_R und U_L?

Lösung
a) U_R ist mit dem Strom I in Phase. U_L eilt dem Strom I um 90° voraus. Bei der Induktivität hindert die selbstinduzierte Spannung nach der Regel von Lenz den Strom am Ansteigen, der Spulenstrom eilt also der Spulenspannung hinterher. Die Gesamtspannung U ergibt sich als geometrische Summe der Teilspannungen U_R und U_L. Der Winkel φ ist der Phasenwinkel, um den die Spannung U dem Strom I vorauseilt. Das Zeigerdiagramm zeigt Abb. 11.6.
b) Der komplexe Widerstand der Reihenschaltung von R und L ist $\underline{Z} = R + j\omega L$.
Der Betrag ist $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{20^2 + (2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}2)^2}\,\Omega = 65{,}9\,\Omega$.

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{230\,\text{V}}{65{,}9\,\Omega} = \underline{\underline{3{,}49\,\text{A}}}; \quad \varphi = \varphi_{ui} = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right) = \underline{\underline{72{,}3\,°}}$$

c)

$$U_R = R \cdot I = 20\,\Omega \cdot 3{,}49\,\text{A} = \underline{\underline{69{,}8\,\text{V}}}; \quad U_L = \omega L \cdot I = 2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}2 \cdot 3{,}49\,\text{V} = \underline{\underline{219{,}3\,\text{V}}}$$

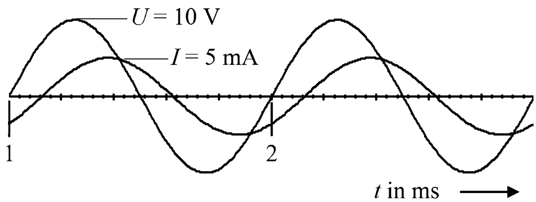


Abb. 11.7 Liniendiagramm von Spannung und Strom

Alternativer Lösungsweg ohne Berechnung des Stromes:
Nach der Spannungsteilerformel ist

$$\underline{U}_R = U \cdot \frac{R}{R + j\omega L} \text{ und } \underline{U}_L = U \cdot \frac{j\omega L}{R + j\omega L}.$$

$$|\underline{U}_R| = U_R = U \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = 230\,\text{V} \cdot \frac{20}{\sqrt{20^2 + (2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}2)^2}} = \underline{\underline{69{,}8\,\text{V}}}$$

$$|\underline{U}_L| = U_L = U \cdot \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = 230\,\text{V} \cdot \frac{2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}2}{\sqrt{20^2 + (2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}2)^2}} = \underline{\underline{219{,}2\,\text{V}}}$$

Aufgabe 11.17
Gegeben ist das Diagramm in Abb. 11.7.

a) Berechnen Sie aus dem Diagramm den Scheinwiderstand Z.
b) Welche Reihenersatzschaltung, bestehend aus den Bauelementen R und L oder C, ergibt das gezeigte Diagramm?

Lösung
a) Die Periodendauer T der Spannung U ist 1 ms. $\Rightarrow f = \frac{1}{T} = 1\,\text{kHz}$

$$Z = \frac{10\,\text{V}}{5\,\text{mA}} = \underline{\underline{2\,\text{k}\Omega}} \text{ bei } \underline{\underline{f = 1\,\text{kHz}}}$$

b) Die Stromkurve ist gegenüber der Spannungskurve nach rechts verschoben. Zeichnet man eine Parallele zur Abszisse, die beide Kurven schneidet, so trifft man beim Entlangschreiten auf dieser Geraden von links nach rechts zuerst auf die Spannungskurve, erst später auf die Stromkurve. Der Strom eilt somit der Spannung nach, es handelt sich deshalb um die Reihenschaltung eines ohmschen Widerstandes R und einer Induktivität L.

Aufgabe 11.18
Bei einer Drosselspule mit einer angelegten Gleichspannung von $U = 24{,}0\,\text{V}$ wird ein Gleichstrom von $I = 160{,}0\,\text{mA}$ gemessen. Bei einer angelegten Netzwechselspannung von $U = 230\,\text{V}$, $f = 50\,\text{Hz}$ ergibt sich ein Wechselstrom von $I = 1{,}0\,\text{A}$.

a) Wie groß sind Wirkwiderstand R, Blindwiderstand X_{L} und Scheinwiderstand Z_{L} der Spule?
b) Welche Induktivität L hat die Spule?
c) Beschreiben Sie das Ersatzschaltbild der Spule.
d) Ermitteln Sie den Phasenwinkel φ zwischen Spannung und Strom.
e) Berechnen Sie die Spannungsabfälle U_{R} und U_{L} am Wirk- und am Blindwiderstand.
f) Warum ist $U_{\mathrm{R}} + U_{\mathrm{L}} \neq U$?

Lösung

a) Im Gleichstromkreis ist der Wirkwiderstand $R = \frac{U}{I} = \frac{24{,}0\,\mathrm{V}}{0{,}16\,\mathrm{A}} = \underline{\underline{150{,}0\,\Omega}}$.
Im Wechselstromkreis ist der Scheinwiderstand $Z_{\mathrm{L}} = \frac{230\,\mathrm{V}}{1{,}0\,\mathrm{A}} = \underline{\underline{230{,}0\,\Omega}}$.
Der Blindwiderstand ist: $X_{\mathrm{L}} = \sqrt{Z_{\mathrm{L}}^2 - R^2} = \sqrt{230{,}0^2 - 150{,}0^2}\,\Omega = \underline{\underline{174{,}4\,\Omega}}$
b) Induktivität:
$$L = \frac{X_{\mathrm{L}}}{2 \cdot \pi \cdot f} = \frac{174{,}4\,\Omega}{2 \cdot \pi \cdot 50\,\mathrm{s}^{-1}} = \underline{\underline{0{,}56\,\mathrm{H}}}$$
c) Das Ersatzschaltbild ist eine Reihenschaltung eines ohmschen Widerstandes R (Widerstand der Drahtwicklung) und einer idealen Induktivität L.
d) Phasenwinkel:
$$\varphi = \varphi_{\mathrm{ui}} = \arctan\left(\frac{X_L}{R}\right) = \arctan\left(\frac{174{,}4\,\Omega}{150{,}0\,\Omega}\right) = \underline{\underline{49{,}3^\circ}}$$
Der Strom eilt der Spannung um 49,3° nach.
e) Spannungsabfälle: $U_{\mathrm{R}} = R \cdot I = 150{,}0\,\Omega \cdot 1{,}0\,\mathrm{A} = \underline{\underline{150{,}0\,\mathrm{V}}}$
$$U_{\mathrm{L}} = X_{\mathrm{L}} \cdot I = 174{,}4\,\Omega \cdot 1{,}0\,\mathrm{A} = \underline{\underline{174{,}4\,\mathrm{V}}}$$
f) Zwischen U_{R} und U_{L} besteht eine Phasenverschiebung, die beiden Spannungen müssen geometrisch addiert werden: $U = \sqrt{150{,}0^2 + 174{,}4^2}\,\mathrm{V} = \underline{\underline{230\,\mathrm{V}}}$

11.5 Reihenschaltung von ohmschem Widerstand und Kondensator

Aufgabe 11.19

Die Reihenschaltung eines ohmschen Widerstandes $R = 4\,\mathrm{k}\Omega$ und eines Kondensators $C = 0{,}22\,\mu\mathrm{F}$ liegt an der Netzwechselspannung $U = 230\,\mathrm{V}$, $f = 50\,\mathrm{Hz}$ (Abb. 11.8).

a) Berechnen Sie den Scheinwiderstand Z der Reihenschaltung von R und C.
b) Bestimmen Sie den Strom I.
c) Wie groß ist der Phasenwinkel φ in Grad zwischen U und I?
d) Skizzieren Sie das Spannungszeigerdiagramm (Spannungsdreieck) mit I, U, U_{R} und U_{C}.

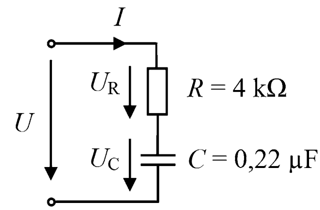


Abb. 11.8 *RC*-Reihenschaltung

e) Bestimmen Sie den Winkel φ mit komplexer Rechnung.
f) Geben Sie einen Ausdruck für die Zeitfunktion $i(t)$ an.
g) Skizzieren Sie das Widerstandszeigerdiagramm (Widerstandsdreieck).

Lösung

a) Der komplexe Widerstand (die Impedanz) der Reihenschaltung ist $\underline{Z} = R + \frac{1}{j\omega C}$. Der Scheinwiderstand ist der Betrag der Impedanz.

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\underline{\underline{Z = 15.011\ \Omega}}$$

b) $I = \frac{U}{Z} = \frac{230\ \text{V}}{15.011\ \Omega} = \underline{\underline{15{,}3\ \text{mA}}}$ (ein Effektivwert)

c) Aus einer Formelsammlung wird entnommen:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\text{Blindanteil}}{\text{Wirkanteil}}\right)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\frac{1}{\omega C}}{R}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 0{,}22 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^3}\right) = \underline{\underline{74{,}5^\circ}}$$

d) Der Strom I durch den Widerstand und die Spannung U_R am Widerstand sind reelle Werte und werden als Zeiger in die horizontale Bezugsrichtung (gedachte reelle Achse) gelegt. Die Spannung U_C eilt den Strom I um 90° nach. Damit U_C zu U_R geometrisch addiert werden kann, wird der Anfang des U_C-Zeigers an das Ende (Pfeilspitze) des U_R-Zeigers gesetzt. Der Zeiger der Gesamtspannung U ergibt sich aus der Addition der Zeiger von U_R und U_C. Das Zeigerdiagramm der Spannungen zeigt Abb. 11.9.

e) Wir bestimmen φ als Winkel des komplexen Widerstandes: $\varphi = \angle\underline{Z}$.

$$\underline{Z} = R - j\frac{1}{\omega C}; \quad \varphi = \arctan\left(\frac{\text{Imaginärteil}}{\text{Realteil}}\right) = \arctan\left(\frac{-\frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

Mit $\arctan(-x) = -\arctan(x)$ folgt:

$$\varphi = \varphi_{ui} = \angle(\underline{U}, \underline{I}) = \angle\underline{Z} = -\arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right) = \underline{\underline{-74{,}5^\circ}}$$

Abb. 11.9 Spannungszeigerdiagramm zu *RC*-Reihenschaltung

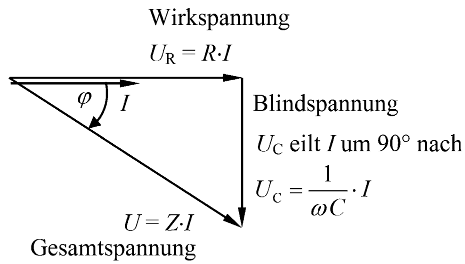
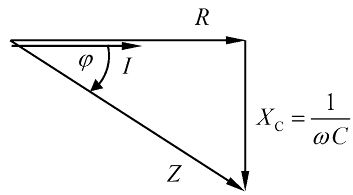


Abb. 11.10 Widerstandszeigerdiagramm zu *RC*-Reihenschaltung



Es ist $\varphi < 0$, I eilt also U voraus, es liegt insgesamt kapazitives Verhalten vor.
Wie man sieht, erhält man ohne komplexe Rechnung (in Teilaufgabe c) nicht das richtige Vorzeichen des Phasenwinkels. Die Verschiebung des Stromes gegenüber der Spannung wäre allerdings qualitativ sofort aus der Schaltung ersichtlich, es ist ja nur eine Kapazität vorhanden und keine Induktivität. Somit muss der Strom der Spannung vorauseilen.

f) In der Angabe ist kein Nullphasenwinkel der Spannung angegeben, er ist also null:

$$\varphi_u = \angle \underline{U} = 0$$

Der Nullphasenwinkel des Stromes ist:

$$\varphi_i = \angle \underline{I} = \angle \left(\frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \right) = \angle \underline{U} - \angle \underline{Z} = 0° - (-74{,}5°) = 74{,}5°$$

$$\underline{\underline{i(t) = \sqrt{2} \cdot 15{,}3\,\text{mA} \cdot \sin(\omega t + 74{,}5°)}}$$

Aus dem Vorzeichen des Nullphasenwinkels sehen wir auch im Zeitbereich, dass der Strom der Spannung vorauseilt, dessen Liniendiagramm also gegenüber der Spannung nach links verschoben ist.

g) Dividiert man alle Größen des Spannungszeigerdiagramms durch I, dann bleibt das Widerstandszeigerdiagramm mit dem Widerstandsdreieck übrig (Abb. 11.10). Spannungsdreieck und Widerstandsdreieck sind sich ähnliche (kongruente) Dreiecke, ihre Winkel stimmen überein.

Aufgabe 11.20
Mit Hilfe einer *RC*-Reihenschaltung soll eine Phasenverschiebung von $\alpha = 60°$ zwischen der angelegten Spannung U und der Spannung U_C erzielt werden (Abb. 11.11).

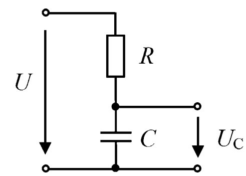


Abb. 11.11 Phasenverschiebung der Spannungen

Welchen Wert muss der Widerstand R haben? Zeichnen Sie ein Zeigerdiagramm der Spannungen und ein Widerstandsdreieck.

Gegeben: $C = 160\,\text{nF}$, $U = 0{,}4\,\text{V}$, $f = 10\,\text{kHz}$

Lösung

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^4 \cdot 160 \cdot 10^{-9}}\,\Omega = 99{,}5\,\Omega$$

Das Zeigerdiagramm der Spannungen und das Widerstandsdreieck sind in Abb. 11.12 dargestellt.

$$\tan(\alpha) = \tan(60^\circ) = \frac{U_R}{U_C} = \frac{R}{X_C}; \quad R = X_C \cdot \tan(60^\circ) = 99{,}5\,\Omega \cdot \sqrt{3} = \underline{\underline{172\,\Omega}}$$

Aufgabe 11.21

Eine RC-Reihenschaltung hat bei 20 kHz einen Scheinwiderstand von $Z = 820\,\Omega$. Die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom beträgt $\varphi = 35^\circ$. Berechnen Sie

a) den Wirkwiderstand R,
b) den kapazitiven Blindwiderstand X_C,
c) die Kapazität C des Kondensators.

Lösung

a)

$$\varphi = 35^\circ \Rightarrow \cos(\varphi) = 0{,}8192; \sin(\varphi) = 0{,}5736$$
$$R = Z \cdot \cos(\varphi) = 820\,\Omega \cdot 0{,}8192 = \underline{\underline{672\,\Omega}}$$

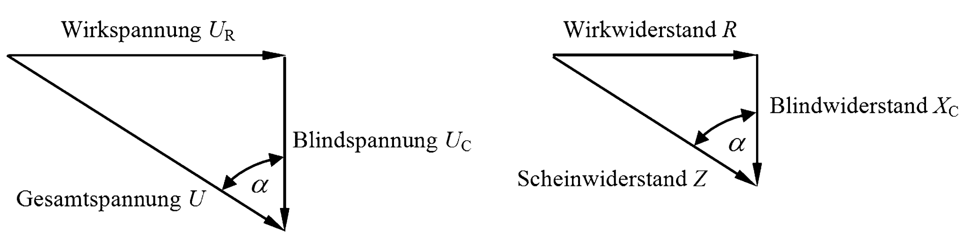


Abb. 11.12 Spannungs- und Widerstandszeigerdiagramm

b)

$$X_C = Z \cdot \sin(\varphi) = 820\,\Omega \cdot 0{,}5736 = \underline{\underline{470\,\Omega}}$$

c)

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{2\pi \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 470}\,\mathrm{F} = \underline{\underline{16{,}9\,\mathrm{nF}}}$$

Aufgabe 11.22
Die Reihenschaltung eines ohmschen Widerstandes $R = 100\,\Omega$ und eines Kondensators mit dem kapazitiven Blindwiderstand $X_C = 200\,\Omega$ wird an eine Sinusspannung $U = 200\,\mathrm{V}$ angeschlossen.

a) Wie groß sind Scheinwiderstand Z und Stromstärke I?
b) Berechnen Sie die Spannungsabfälle U_R und U_C am Wirk- und am Blindwiderstand.
c) Ermitteln Sie den Phasenwinkel φ zwischen Spannung und Strom.

Lösung
a)

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \underline{\underline{223{,}6\,\Omega}}; \quad I = \frac{U}{Z} = \frac{200\,\mathrm{V}}{223{,}6\,\Omega} = \underline{\underline{895\,\mathrm{mA}}}$$

b)

$$U_R = R \cdot I = 100\,\Omega \cdot 0{,}895\,\mathrm{A} = \underline{\underline{89{,}5\,\mathrm{V}}}$$

$$U_C = X_C \cdot I = 200\,\Omega \cdot 0{,}895\,\mathrm{A} = \underline{\underline{179{,}0\,\mathrm{V}}}$$

c)

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{X_C}{R}\right) = -\arctan(2) = \underline{\underline{-63{,}4^\circ}}$$

Der Strom eilt der Spannung um 63,4° voraus.

11.6 Parallelschaltung von Widerstand und Spule

Aufgabe 11.23
Durch eine Parallelschaltung von Wirkwiderstand R und Induktivität L fließt ein Gesamtstrom von $I = 2{,}4\,\mathrm{A}$ (Abb. 11.13). Der Leistungsfaktor ist $\cos(\varphi) = 0{,}75$. Berechnen Sie

a) den Wirkstrom I_W, der durch R fließt,
b) den induktiven Blindstrom I_L, der durch L fließt.
c) Geben Sie den komplexen Widerstand $\underline{Z}$ der RL-Parallelschaltung allgemein in Abhängigkeit von ω, R und L in der algebraischen Form $\underline{Z} = a + jb$ an. Bestimmen Sie also die Ausdrücke für a und b.

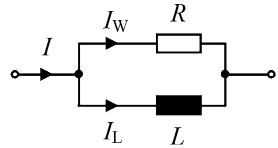


Abb. 11.13 Parallelschaltung von R und L

Lösung

a)

$$I_W = I \cdot \cos(\varphi) = 2{,}4\,\text{A} \cdot 0{,}75 = \underline{\underline{1{,}8\,\text{A}}}$$

b)

$$\cos(\varphi) = 0{,}75 \Rightarrow \varphi = \arccos(0{,}75) = 41{,}4°; \sin(\varphi) = 0{,}66$$
$$I_L = I \cdot \sin(\varphi) = 2{,}4\,\text{A} \cdot 0{,}66 = \underline{\underline{1{,}58\,\text{A}}}$$

c)

$$\underline{Z} = \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{R \cdot j\omega L \cdot (R - j\omega L)}{(R + j\omega L)(R - j\omega L)} = \frac{\omega^2 L^2 R + j\omega L R^2}{R^2 + \omega^2 L^2}$$
$$= \frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j \cdot \frac{\omega L R^2}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$\underline{\underline{a = \frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2}}}; \quad \underline{\underline{b = \frac{\omega L R^2}{R^2 + \omega^2 L^2}}}$$

Aufgabe 11.24

An der Parallelschaltung von $R = 200\,\Omega$ und $L = 0{,}5\,\text{H}$ liegt die Sinusspannung $U = 24\,\text{V}$, $f = 50\,\text{Hz}$. Berechnen Sie den Wirkstrom I_R durch R, den Blindstrom I_L durch L und den Gesamtstrom I_G, der durch die Parallelschaltung fließt.

Lösung

$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{24\,\text{V}}{200\,\Omega} = \underline{\underline{0{,}12\,\text{A}}}; \quad I_L = \frac{U}{\omega L} = \frac{24\,\text{V}}{2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}5}\,\text{A} = \underline{\underline{0{,}153\,\text{A}}}$$
$$I_G = \sqrt{I_R^2 + I_L^2} = \underline{\underline{0{,}194\,\text{A}}}$$

11.7 Parallelschaltung von Widerstand und Kondensator

Aufgabe 11.25

a) Berechnen Sie die Klemmenimpedanz der Schaltung in Abb. 11.14 in der Exponentialform $\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi_Z}$ allgemein und bei $f = 50\,\text{Hz}$ mit Zahlenwerten (Winkel in Grad). Gegeben: $R = 100\,\Omega$, $C = 47\,\mu\text{F}$.

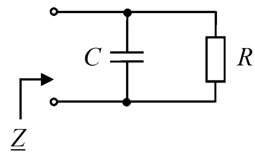


Abb. 11.14 Klemmenimpedanz

b) Geben Sie den komplexen Widerstand $\underline{Z}$ der RC-Parallelschaltung allgemein in Abhängigkeit von ω, R und C in der algebraischen Form $\underline{Z} = a + jb$ an. Bestimmen Sie also die Ausdrücke für a und b.

Lösung

a)

$$\underline{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} = \frac{R}{1 + j\omega RC}; \quad |\underline{Z}| = \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

$$\varphi_Z = \angle\text{Zähler} - \angle\text{Nenner}; \quad \angle\text{Zähler} = 0; \quad \angle\text{Nenner} = \arctan\left(\frac{\omega RC}{1}\right);$$

$$\varphi_Z = -\arctan(\omega RC)$$

$$\underline{\underline{\underline{Z} = \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cdot \mathrm{e}^{-j \cdot \arctan(\omega RC)}}}$$

$$|\underline{Z}_{(50\,\text{Hz})}| = 56\,\Omega; \quad \varphi_{Z(50\,\text{Hz})} = -55{,}9°; \quad \underline{\underline{\underline{Z}_{(50\,\text{Hz})} = 56\,\Omega \cdot \mathrm{e}^{-j\,55{,}9°}}}$$

b)

$$\underline{Z} = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{1 + j\omega RC} = \frac{R \cdot (1 - j\omega RC)}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

$$= \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2} - j \cdot \frac{\omega R^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

$$\underline{\underline{a = \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2}}}; \quad \underline{\underline{b = -\frac{\omega R^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2}}} \text{ (b ist negativ!)}$$

Aufgabe 11.26

Ein ohmscher Widerstand $R = 2\,\text{k}\Omega$ und ein Kondensator $C = 0{,}1\,\mu\text{F}$ sind parallel an eine sinusförmige Wechselspannung U_q mit der Frequenz $f = 1{,}4\,\text{kHz}$ und dem Effektivwert $U = 100\,\text{V}$ angeschlossen (Abb. 11.15).

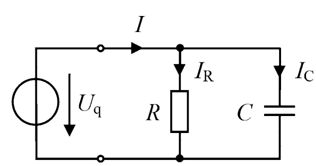


Abb. 11.15 RC-Parallelschaltung an Wechselspannung

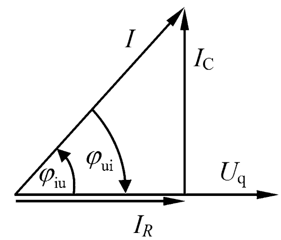


Abb. 11.16 Skizze Zeigerdiagramm

a) Skizzieren Sie das Zeigerdiagramm für die Spannung U_q und die Ströme I, I_R und I_C.
b) Wie groß sind die Teilströme I_R und I_C?
c) Welchen Strom I liefert die Spannungsquelle? Um welchen Winkel ist der Strom I gegenüber der Spannung U_q phasenverschoben?

Lösung

a) Der Strom I durch den Widerstand und die Spannung U_q am Widerstand sind reelle Werte und werden als Zeiger in die horizontale Bezugsrichtung (gedachte reelle Achse) gelegt. Der Strom I_C durch den Kondensator eilt der Spannung U_q am Kondensator um 90° voraus. Damit der Zeiger von I_C mit dem Zeiger von I_R addiert werden kann, wird er mit seinem Anfang an das Ende des Zeigers von I_R gesetzt. Der Zeiger des Gesamtstromes I ergibt sich aus der geometrischen Addition der Zeiger von I_R und I_C (Abb. 11.16).

b)

$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{100\,\text{V}}{2\,\text{k}\Omega} = \underline{\underline{50\,\text{mA}}}$$
$$I_C = U \cdot \omega \cdot C = 100\,\text{V} \cdot 2\pi \cdot 1400\,\text{Hz} \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-6}\,\text{F} = \underline{\underline{88\,\text{mA}}}$$

c)

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = \sqrt{50^2 + 88^2}\text{mA} = \underline{\underline{101{,}2\,\text{mA}}}$$

Vom Stromzeiger ausgehend zum Spannungszeiger hin betrachtet ist $\varphi = \varphi_{ui}$ der Winkel, um den die Spannung gegenüber dem Strom verschoben ist. Vom Spannungszeiger ausgehend zum Stromzeiger hin betrachtet ist φ_{iu} der Winkel, um den der Strom gegenüber der Spannung verschoben ist. Hier ist nach der Verschiebung des Stromes gegenüber der Spannung gefragt, also nach φ_{iu}.

$$\varphi_{iu} = \arctan\left(\frac{88\,\text{mA}}{50\,\text{mA}}\right) = \underline{\underline{60{,}4^\circ}}$$

Ein positives Vorzeichen bei Winkeln bedeutet eine Winkeldrehung *gegen* den Uhrzeigersinn, ein negatives Vorzeichen eine Winkeldrehung *im* Uhrzeigersinn.
Es ist $\varphi_{iu} > 0$, der Stromzeiger ist also gegenüber dem Spannungszeiger gegen den Uhrzeigersinn (im mathematisch positiven Sinn eines Winkels) verdreht. Der Strom I eilt der Spannung U_q um 60,4° voraus.

Betrachten wir $\varphi = \varphi_{\text{ui}}$, so gilt: $\varphi = \varphi_{\text{ui}} = -\varphi_{\text{iu}}$. Somit ist $\varphi < 0$, der Stromzeiger ist gegenüber dem Spannungszeiger im Uhrzeigersinn (im mathematisch negativen Sinn eines Winkels) verdreht. I eilt also U voraus, es liegt insgesamt kapazitives Verhalten vor.

In Aufgabe 11.25 wurde $\varphi = \varphi_{\text{ui}}$ allgemein aus der Impedanz der RC-Parallelschaltung zu $\varphi = -\arctan(\omega RC)$ berechnet. Setzen wir die Zahlenwerte unserer jetzigen Aufgabe 11.26 ein, so erhalten wir $\varphi = \varphi_{\text{ui}} = -60{,}4° = -\varphi_{\text{iu}}$.

Aufgabe 11.27

Ein Kondensator $C = 0{,}22\,\mu\text{F}$ ist mit einem ohmschen Widerstand parallel geschaltet. Durch den Kondensator fließt ein Strom von $I_\text{C} = 30\,\text{mA}$, durch den Widerstand ein Strom von $I_\text{R} = 40\,\text{mA}$.

Berechnen Sie den Gesamtstrom I_{ges} durch die Parallelschaltung.

Lösung

$$I_{\text{ges}} = \sqrt{I_\text{R}^2 + I_\text{C}^2} = \sqrt{1600 + 900}\,\text{mA} = \underline{\underline{50\,\text{mA}}}$$

Aufgabe 11.28

Ein veränderbarer Widerstand $R = 10\,\text{k}\Omega$ liegt parallel zu einem Kondensator $C = 0{,}1\,\mu\text{F}$. Die Schaltung liegt an einer sinusförmigen Wechselspannung $U = 10\,\text{V}$, $f = 300\,\text{Hz}$. Der Widerstand soll so eingestellt werden, dass die Phasenverschiebung zwischen Gesamtstrom und Spannung 60° beträgt.

Bei welchem Gesamtstrom durch die Parallelschaltung wird die geforderte Phasenverschiebung erreicht? Skizzieren Sie ein Zeigerdiagramm der Ströme.

Lösung

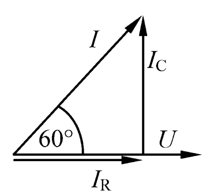
$$X_\text{C} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 300 \cdot 10^{-7}}\,\Omega = 5{,}3\,\text{k}\Omega$$

Der Strom durch den Kondensator ist $I_\text{C} = \frac{U}{X_\text{C}} = \frac{10\,\text{V}}{5{,}3\,\text{k}\Omega} = 1{,}89\,\text{mA}$.

$$\sin(\varphi) = \frac{I_\text{C}}{I}; \quad I = \frac{I_\text{C}}{\sin(\varphi)} = \frac{1{,}89\,\text{mA}}{0{,}866} = \underline{\underline{2{,}18\,\text{mA}}}$$

Das Zeigerdiagramm der Ströme zeigt Abb. 11.17.

Abb. 11.17 Zeigerdiagramm der Ströme



Aufgabe 11.29

Ein Kondensator $C = 68\,\text{nF}$ ist mit einem ohmschen Widerstand $R = 1\,\text{k}\Omega$ parallel geschaltet. Die Schaltung liegt an einer sinusförmigen Wechselspannung $U = 3{,}4\,\text{V}$, $f = 2300\,\text{Hz}$.

Berechnen Sie

a) den Wirkstrom I_R,
b) den kapazitiven Blindstrom I_C,
c) den Gesamtstrom I,
d) den Scheinwiderstand Z,
e) den Phasenwinkel φ_iu zwischen Strom und Spannung in Grad.

Lösung

a)

$$I_\text{R} = \frac{U}{R} = \frac{3{,}4\,\text{V}}{1000\,\Omega} = \underline{\underline{3{,}4\,\text{mA}}}$$

b)

$$X_\text{C} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 2{,}3 \cdot 10^3 \cdot 68 \cdot 10^{-9}} = 1017\,\Omega;$$

$$I_\text{C} = \frac{U}{X_\text{C}} = \frac{3{,}4\,\text{V}}{1017\,\Omega} = \underline{\underline{3{,}34\,\text{mA}}}$$

c)

$$I = \sqrt{I_\text{R}^2 + I_\text{C}^2} = \underline{\underline{4{,}77\,\text{mA}}}$$

d)

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{3{,}4\,\text{V}}{4{,}77\,\text{mA}} = \underline{\underline{713\,\Omega}}$$

e)

$$\cos(\varphi_\text{iu}) = \frac{I_R}{I} = \frac{3{,}4\,\text{mA}}{4{,}77\,\text{mA}} = 0{,}7127; \quad \underline{\underline{\varphi_\text{iu} = 44{,}5^\circ}}$$

Aufgabe 11.30

Ein ohmscher Widerstand $R = 2{,}7\,\text{k}\Omega$ ist mit einem Kondensator C parallel geschaltet. Bei Anschluss an eine sinusförmige Wechselspannung $U = 24\,\text{V}$, $f = 50\,\text{Hz}$ nimmt die Schaltung einen Gesamtstrom von $I = 12\,\text{mA}$ auf. Berechnen Sie

a) den Strom I_R durch R,
b) den Strom I_C durch C.

Lösung

a)

$$I_\text{R} = \frac{U}{R} = \frac{24\,\text{V}}{2{,}7\,\text{k}\Omega} = \underline{\underline{8{,}89\,\text{mA}}}$$

b)

$$I_\text{C} = \sqrt{I^2 - I_R^2} = \sqrt{144 - 79}\,\text{mA} = \underline{\underline{8{,}06\,\text{mA}}}$$

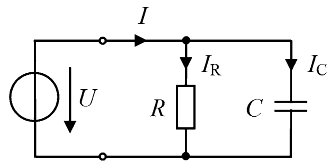


Abb. 11.18 *RC*-Parallelschaltung

Aufgabe 11.31
Die Parallelschaltung eines ohmschen Widerstandes R und eines Kondensators C ist an die Netzwechselspannung mit $U = 230\,\mathrm{V}$, $f = 50\,\mathrm{Hz}$ angeschlossen, siehe Abb. 11.18. Der Strom durch R beträgt $I_\mathrm{R} = 40\,\mathrm{mA}$, der Strom durch C ist $I_\mathrm{C} = 30\,\mathrm{mA}$.

a) Bestimmen Sie den Gesamtstrom I mittels Zusammenhängen bei der geometrischen Addition von Zeigern.
b) Bestimmen Sie den Gesamtstrom I mit komplexer Rechnung.
c) Wie groß ist der Winkel φ zwischen U und I?
d) Geben Sie einen Ausdruck für die Zeitfunktion $i(t)$ mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse an.
e) Berechnen Sie die Zeitfunktion $i(t)$ im Zeitbereich.
f) Berechnen Sie die Wirkleistung P, die Scheinleistung S und die Blindleistung Q.

Lösung
a) Die Ströme I_R und I_C dürfen nicht einfach arithmetisch addiert werden, da sonst der Winkel zwischen den Strömen nicht berücksichtigt wird. Der Strom I_R durch R ist mit der Spannung U an R in Phase. Der Strom I_C durch C eilt der Spannung U an C um 90° voraus. Der Gesamtstrom I als Betrag der geometrischen Addition (der Zeiger) von Wirkstrom I_R und Blindstrom I_C ergibt sich entsprechend den Verhältnissen im rechtwinkligen Dreieck (Pythagoras).

$$I = \sqrt{I_\mathrm{R}^2 + I_\mathrm{C}^2} = \sqrt{1600 + 900}\,\mathrm{mA} = \underline{\underline{50\,\mathrm{mA}}}$$

b) Zunächst werden die gegebenen Ströme in den komplexen Bereich transformiert.
Der Nullphasenwinkel φ_i des Stromes I_R ist $\varphi_\mathrm{i} = 0$.
Der komplexe Strom durch R ist: $\underline{I}_\mathrm{R} = I_\mathrm{R} \cdot \mathrm{e}^{j\varphi_\mathrm{i}} = 40\,\mathrm{mA} \cdot \mathrm{e}^{j\,0} = 40\,\mathrm{mA}$.
Der Nullphasenwinkel φ_i des Stromes I_C ist $\pi/2$.
Der komplexe Strom durch C ist: $\underline{I}_\mathrm{C} = I_\mathrm{C} \cdot \mathrm{e}^{j\varphi_\mathrm{i}} = 30\,\mathrm{mA} \cdot \mathrm{e}^{j\,\frac{\pi}{2}}$.
Obwohl nicht benötigt, wird noch die gegebene Spannung in den komplexen Bereich transformiert.
Der Nullphasenwinkel φ_u der Spannung ist nicht angegeben und ist somit $\varphi_\mathrm{u} = 0$.
Die komplexe Effektivwertspannung ist: $\underline{U} = U \cdot \mathrm{e}^{j\varphi_\mathrm{u}} = 230\,\mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{j\,0} = 230\,\mathrm{V}$.

Die Summe der komplexen Teilströme ergibt nach der Knotenregel den komplexen Gesamtstrom.

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_C = 40\,\text{mA} + 30\,\text{mA} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$= 40\,\text{mA} + 30\,\text{mA} \cdot \left[\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0} + j \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1} \right]$$

$$\underline{I} = 40\,\text{mA} + j \cdot 30\,\text{mA}; \quad I = |\underline{I}| = \sqrt{(40\,\text{mA})^2 + (30\,\text{mA})^2} = \underline{\underline{50\,\text{mA}}}$$

Hier wird oft die Frage gestellt, warum man so kompliziert im komplexen Bereich rechnet, wenn man mit Formeln aus Tabellenwerken ohne komplexe Rechnung das Ergebnis viel schneller hat. Die Antwort ist: Tabellenwerke beschränken sich auf wenige, meist sehr einfache Schaltungen. Sind bei umfangreicheren Schaltungen die Formeln in den Tabellenwerken nicht mehr enthalten, so muss man eigene Berechnungen durchführen, die statt im Zeitbereich einfacher und schneller im komplexen Bereich erfolgen. Ist z. B. bei einer einfachen Schaltung das Vorzeichen einer Phasenverschiebung nicht von Interesse, sondern nur deren Absolutwert, so ist gegen eine Verwendung von Formelsammlungen nichts einzuwenden.

c)

$$\varphi = \varphi_{ui} = \angle(U, I) = \arctan\left(\frac{\overbrace{I_C}^{\text{Blindanteil}}}{\underbrace{I_R}_{\text{Wirkanteil}}} \right) = \arctan\left(\frac{30\,\text{mA}}{40\,\text{mA}}\right) = \underline{\underline{36{,}9^\circ}}$$

Die Schaltung zeigt insgesamt kapazitives Verhalten, der Strom I eilt der Spannung U um φ voraus. Diese Verschiebung des Stromes gegenüber der Spannung ist qualitativ sofort aus der Schaltung ersichtlich, es ist ja nur eine Kapazität vorhanden und keine Induktivität.

Entsprechend allgemeiner Vereinbarung müsste φ aber negativ sein, wenn der Strom der Spannung vorauseilt. Wir bestimmen den Winkel φ deshalb noch einmal, jetzt aber mit komplexer Rechnung.

Wie bereits erwähnt ist der Nullphasenwinkel der Spannung $\varphi_u = 0$. Der Nullphasenwinkel des Gesamtstromes $\underline{I} = 40\,\text{mA} + j \cdot 30\,\text{mA}$ ist:

$$\varphi_i = \arctan\left(\frac{30\,\text{mA}}{40\,\text{mA}}\right) = 36{,}9^\circ$$

Aus den Nullphasenwinkeln ergibt sich:

$$\varphi = \varphi_{ui} = \varphi_u - \varphi_i = 0 - 36{,}9^\circ = \underline{\underline{-36{,}9^\circ}}$$

Es ist $\varphi < 0$, I eilt U voraus, insgesamt liegt kapazitives Verhalten vor.

Wie es auch in Aufgabe 11.19 der Fall war, erhält man ohne komplexe Rechnung nicht das richtige Vorzeichen des Phasenwinkels.
Alternativ: Der Phasenverschiebungswinkel φ könnte auch als Winkel des komplexen Widerstandes $\underline{Z}$ der RC-Parallelschaltung berechnet werden.

$$\underline{Z} = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

Konjugiert komplexes Erweitern und separieren von Real- und Imaginärteil ergibt:

$$\underline{Z} = \frac{R \cdot (1 - j\omega RC)}{1 + \omega^2 R^2 C^2} = \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2} - j \cdot \frac{\omega R^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

Der Winkel φ dieses komplexen Ausdrucks ist: $\varphi = -\arctan(\omega RC)$.
Auf anderem Wege hatten wir dieses Ergebnis auch in Aufgabe 11.25 erhalten. Die Frequenz ist gegeben, wir müssen jetzt noch die Werte der Bauelemente berechnen.

$$R = \frac{230\,\mathrm{V}}{0{,}04\,\mathrm{A}} = 5750\,\Omega; \quad X_C = \frac{230\,\mathrm{V}}{0{,}03\,\mathrm{A}} = 7666{,}7\,\Omega$$
$$C = \frac{1}{\omega \cdot X_\mathrm{C}} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 7666{,}7}\,\mathrm{F} = 0{,}415\,\mu\mathrm{F}$$
$$\omega RC = 2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}415 \cdot 10^{-6} = 0{,}749; \quad \varphi = -\arctan(0{,}749) = \underline{\underline{-36{,}8^\circ}}$$

d) Allgemein ist der Strom im Zeitbereich: $i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \varphi_\mathrm{i})$.
Der Effektivwert des Gesamtstromes wurde berechnet zu $I = 50\,\mathrm{mA}$. Sein Nullphasenwinkel ergab sich zu $\varphi_\mathrm{i} = 36{,}9^\circ$. Mit diesen Werten ist (Faktor $\sqrt{2}$ nicht vergessen):

$$\underline{\underline{i(t) = 50\,\mathrm{mA} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + 36{,}9^\circ)}}$$

e) Berechnung der Zeitfunktion $i(t)$ im Zeitbereich:

$$i_\mathrm{R}(t) = \sqrt{2} \cdot 40\,\mathrm{mA} \cdot \sin(\omega t) = a_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2) \text{ mit } \varphi_2 = 0$$
$$i_\mathrm{C}(t) = \sqrt{2} \cdot 30\,\mathrm{mA} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = a_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1)$$
$$y_1 = a_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1)$$
$$y_2 = a_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$$
$$y = y_1 + y_2 = a \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$
$$\text{mit } a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1);$$
$$\varphi = \arctan\left(\frac{a_1 \cdot \sin(\varphi_1) + a_2 \cdot \sin(\varphi_2)}{a_1 \cdot \cos(\varphi_1) + a_2 \cdot \cos(\varphi_2)}\right)$$

$$a^2 = (\sqrt{2} \cdot 30\,\text{mA})^2 + (\sqrt{2} \cdot 40\,\text{mA})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 30\,\text{mA} \cdot \sqrt{2} \cdot 40\,\text{mA} \cdot \underbrace{\cos\left(0 - \frac{\pi}{2}\right)}_{0}$$

$$a^2 = 2 \cdot (30\,\text{mA})^2 + 2 \cdot (40\,\text{mA})^2 = 2 \cdot (30^2 + 40^2)\,\text{mA} = 5000\,\text{mA}$$

$$a = \sqrt{2} \cdot 50\,\text{mA}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{2} \cdot 30\,\text{mA} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{2} \cdot 40\,\text{mA} \cdot \sin(0)}{\sqrt{2} \cdot 30\,\text{mA} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{2} \cdot 40\,\text{mA} \cdot \cos(0)}\right) = \arctan\left(\frac{30}{40}\right)$$

$$\varphi = 36{,}9^\circ$$

$$i(t) = a \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \underline{\underline{\sqrt{2} \cdot 50\,\text{mA} \cdot \sin(\omega t + 36{,}9^\circ)}}$$

Wie man sieht, ist die Rechnung im Zeitbereich wesentlich länger und schwieriger als die Rechnung im komplexen Bereich.

f)

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) = \underline{\underline{9{,}2\,\text{W}}} \text{ oder } P = I_R^2 \cdot R = (0{,}04\,\text{A})^2 \cdot \frac{230\,\text{V}}{0{,}04\,\text{A}} = \underline{\underline{9{,}2\,\text{W}}}$$

$$S = U \cdot I = 230\,\text{V} \cdot 0{,}05\,\text{A} = \underline{\underline{11{,}5\,\text{VA}}}$$

$$Q = S \cdot \sin(\varphi) = 11{,}5\,\text{VA} \cdot \sin(36{,}9^\circ) = \underline{\underline{6{,}9\,\text{var}}}$$

11.8 Gemischte Schaltungen

Aufgabe 11.32

Gegeben ist die Schaltung in Abb. 11.19.

Gegeben: U_0 = Sinusspannung mit der Frequenz $f = 120\,\text{Hz}$, $C = 1\,\mu\text{F}$, $R_1 = R_2 = 1\,\text{k}\Omega$, $I_{\text{R2}} = 8\,\text{mA}$

Berechnen Sie den Strom I_C durch den Kondensator C und die Spannung U_0.

Lösung

Am Kondensator C liegt die gleiche Spannung wie am Widerstand R_2:

$$U_\text{C} = U_{\text{R2}} = I_{\text{R2}} \cdot R_2 = 0{,}008\,\text{A} \cdot 1\,\text{k}\Omega = 8\,\text{V}$$

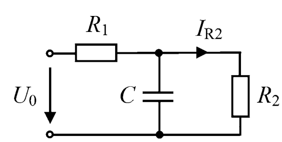


Abb. 11.19 *RC*-Schaltung

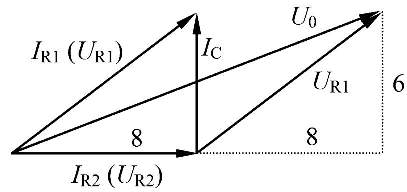


Abb. 11.20 Zeigerdiagramm

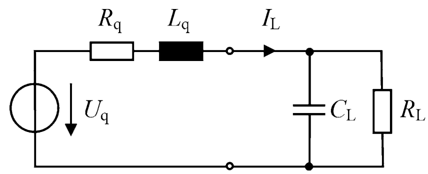


Abb. 11.21 Spannungsquelle mit komplexem Innenwiderstand

Somit ist I_C:

$$I_C = \frac{U_C}{\frac{1}{\omega C}} = U_C \cdot \omega C = 8\,\text{V} \cdot 2\pi \cdot 120\,\frac{1}{\text{s}} \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{s}}{\Omega} = \underline{\underline{6{,}0\,\text{mA}}}$$

Da die Ströme I_{R2} und I_C um 90° phasenverschoben sind, müssen sie geometrisch (vektoriell) addiert werden, um den Gesamtstrom I_{R1} zu erhalten, der durch R_1 fließt.

Durch R_1 fließt der Strom

$$I_{R1} = \sqrt{I_{R2}^2 + I_C^2} = \sqrt{(8\,\text{mA})^2 + (6\,\text{mA})^2} = 10\,\text{mA}.$$

An R_1 fällt somit die Spannung $U_{R1} = R_1 \cdot I_{R1} = 1000\,\Omega \cdot 0{,}01\text{ A} = 10\,\text{V}$ ab.

Wegen ihrer gegenseitigen Phasenverschiebung können die Werte von U_{R1} und U_{R2} nicht einfach numerisch addiert werden, um U_0 zu erhalten. U_{R1} ist in Phase mit dem Strom I_{R1}, der sich aus der *vektoriellen* Addition von I_{R2} und I_C ergab. U_{R1} muss also *vektoriell* zu U_{R2} addiert werden. Die Seitenverhältnisse für die vektorielle Addition entnimmt man am besten einem Zeigerdiagramm (Abb. 11.20).

$$U_0 = \sqrt{(8\,\text{V} + 8\,\text{V})^2 + (6\,\text{V})^2} = \underline{\underline{17{,}09\,\text{V}}}$$

Aufgabe 11.33

In Abb. 11.21 hat die Spannungsquelle $U_q = 10\,\text{V} \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$ mit $f = 1\,\text{kHz}$ die Quellenimpedanz $\underline{Z}_q = R_q + j\omega L_q$. Die Last $\underline{Z}_L$ besteht aus der Parallelschaltung von C_L und R_L.

Gegeben: $R_q = 20\,\Omega$, $L_q = 1{,}59\,\text{mH}$, $C_L = 0{,}796\,\text{mF}$, $R_L = 2\,\Omega$

a) Berechnen Sie den Wert der Lastimpedanz $\underline{Z}_L$.
b) Wie groß ist der Wert der Wirkleistung P_{WL} in R_L?
c) Bei welcher Frequenz f_R ist der Laststrom I_L rein reell?

Lösung

a)

$$\underline{Z}_L = \frac{1}{\frac{1}{R_L} + j\omega C_L} = \frac{R_L}{1 + j\omega C_L R_L} = \frac{R_L(1 - j\omega C_L R_L)}{1 + (\omega C_L R_L)^2}$$

$$\underline{Z}_L = \left(\frac{2}{101{,}057} - j\frac{20{,}0057}{101{,}057}\right)\Omega; \quad \underline{\underline{\underline{Z}_L = (0{,}0198 - j0{,}198)\,\Omega}}$$

b) Entsprechend $P = I^2 R$ folgt

$$P_{WL} = \left(\frac{|\underline{\hat{I}}_L|}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \mathrm{Re}\{\underline{Z}_L\}.$$

Der Laststrom ist:

$$\underline{\hat{I}}_L = \frac{U_q}{Z_q + Z_L} = \frac{10}{20 + j9{,}990 + 0{,}0198 - j0{,}198}\,\mathrm{A} = \frac{10}{20{,}0198 + j9{,}792}\,\mathrm{A}$$

$$\underline{\hat{I}}_L = \frac{200{,}2 - j97{,}9}{496{,}7}\,\mathrm{A} = (0{,}4 - j0{,}2)\,\mathrm{A} = 0{,}45\,\mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{-j26{,}6^\circ}$$

$$P_{WL} = \frac{0{,}45^2}{2} \cdot 0{,}0198\,\mathrm{W} = \underline{\underline{2\,\mathrm{mW}}}$$

c) Damit der Laststrom I_L rein reell ist, muss die Gesamtimpedanz, welche die Spannungsquelle U_q sieht, ebenfalls rein reell sein. Da der Imaginärteil der Gesamtimpedanz verschwinden muss, besteht die Forderung

$$\omega_R L_q + \mathrm{Im}\{\underline{Z}_L\} = 0 \text{ mit } \underline{Z}_L = \frac{R_L(1 - j\omega C_L R_L)}{1 + (\omega C_L R_L)^2}$$

aus Teilaufgabe a).
Mit der Forderung $\omega_R L_q + \mathrm{Im}\{\underline{Z}_L\} = 0$ folgt

$$\omega_R L_q - \frac{\omega_R C_L R_L^2}{1 + (\omega_R C_L R_L)^2} = 0.$$

Hauptnenner bilden und Zähler gleich null setzen:

$$\omega_R L_q[1 + (\omega_R C_L R_L)^2] = \omega_R C_L R_L^2; \quad L_q + L_q \cdot (\omega_R C_L R_L)^2 = C_L R_L^2$$

Nach f_R auflösen:

$$f_R = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C_L R_L^2 - L_q}{C_L^2 R_L^2 L_q}}; \quad \underline{\underline{f_R = 100\,\mathrm{Hz}}}$$

Abb. 11.22 *LC*-Schaltung

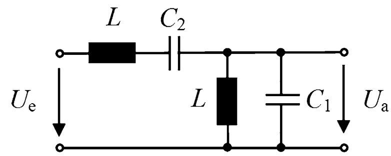
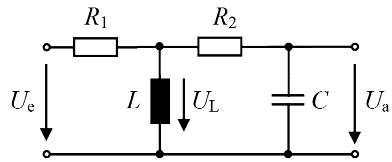


Abb. 11.23 Ein Wechselstromnetzwerk



Aufgabe 11.34

Gegeben ist die in Abb. 11.22 dargestellte Schaltung.

Für welches mögliche Wertepaar von L, C_2 gilt bei $f = 1\,\text{kHz}$: $\frac{U_a}{U_e} = 1$?

Lösung

Anwendung der Spannungsteilerregel (die Widerstände von L und C sind symbolisch eingesetzt):

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{L \parallel C_1}{L + C_2 + (L \parallel C_1)} = 1.$$

Damit der Bruch Eins ergibt, müssen Zähler und Nenner gleich sein. Der „Widerstand" $L + C_2$ der Reihenschaltung aus Spule und Kondensator muss also null sein. Eigentlich sieht man dies auch sofort aus der Schaltung, da in diesem Fall die Ausgangsspannung U_a gleich der Eingangsspannung U_e ist. Ausgang und Eingang sind dann direkt verbunden.

$$j\omega L + \frac{1}{j\omega C_2} = 0; \quad \underline{\underline{\omega L = \frac{1}{\omega C_2}}}$$

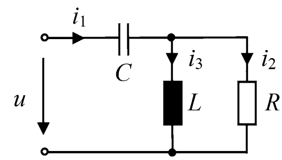
Aufgabe 11.35

Es ist das Wechselstromnetzwerk in Abb. 11.23 zu betrachten.

Gegeben: $i_a(t) = 0$, $u_a(t) = 10\,\text{V} \cdot \sin(10^4\,\text{s}^{-1} \cdot t)$

a) Wie groß sind Amplitude $\hat{U}_a$, Effektivwert U_a, Frequenz f_a, Kreisfrequenz ω_a und Nullphasenwinkel φ_{ua} der Ausgangsspannung $u_a(t)$?
b) Die Frequenz f_e der Eingangsspannung geht gegen unendlich bzw. gegen null. Wie groß ist in beiden Grenzfällen die Amplitude $\hat{U}_a$ der Ausgangsspannung?
c) Welche Filtercharakteristik realisiert das Netzwerk? In welche Art welcher Ordnung von Teilfiltern kann das Netzwerk zerlegt werden?

Abb. 11.24 *RLC*-Netzwerk



Lösung

a) Aus der Angabe von $u_a(t)$ können folgende Werte direkt abgelesen werden:

$$\underline{\underline{\hat{U}_a = 10\,\text{V}}};\quad U_a = \frac{\hat{U}_a}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{7{,}07\,\text{V}}};\quad \underline{\underline{\omega_a = 10^4\,\text{s}^{-1}}};\quad f_a = \frac{\omega_a}{2\pi} = \underline{\underline{1592\,\text{Hz}}};$$

$$\underline{\underline{\varphi_{ua} = 0^\circ}}$$

(da in $u_a(t) = \hat{U}_a \cdot \sin(\omega_a \cdot t + \varphi_{ua})$ kein Nullphasenwinkel angegeben ist)

b) $f_e \to \infty$: Der Kondensator wirkt wie ein Kurzschluss, $\underline{\underline{\hat{U}_a = 0\,\text{V}}}$.

$f_e \to 0$: Die Spule wirkt wie ein Kurzschluss, $U_L = 0\,\text{V}$ und damit $\underline{\underline{\hat{U}_a = 0\,\text{V}}}$.

c) Das Netzwerk bildet einen Bandpass, es werden nur Eingangsspannungen mittlerer Frequenz durchgelassen, sehr tiefe und sehr hohe Frequenzen werden gesperrt. Die Schaltung ist eine Reihenschaltung aus einem Hochpass 1. Ordnung (bestehend aus R_1 und L) und einem Tiefpass 1. Ordnung (bestehend aus R_2 und C).

Aufgabe 11.36

Bestimmen Sie in Abb. 11.24 mit Hilfe der komplexen Rechnung die Ströme $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$.

Gegeben: $u(t) = 325\,\text{V} \cdot \sin(\omega t)$, $f = 50\,\text{Hz}$, $R = 100\,\Omega$, $L = 1\,\text{H}$, $C = 30\,\mu\text{F}$

Lösung

Eine sinusförmige Wechselspannung $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$ ist in komplexer Darstellung $\underline{u}(t) = \hat{U} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)}$. Sind Momentanwerte nicht von Interesse, so vereinfacht sich diese Darstellung zu $\underline{\hat{U}} = \hat{U} \cdot e^{j\varphi_u}$ (komplexe Amplitude). Statt diesem Scheitelwertzeiger kann auch ein Effektivwertzeiger verwendet werden: $\underline{U} = U \cdot e^{j\varphi_u}$.

Die zeitliche Darstellung der Spannung $u(t) = 325\,\text{V} \cdot \sin(\omega t)$ ist in komplexer Darstellung als Scheitelwertzeiger $\underline{\hat{U}} = 325\,\text{V} \cdot e^{j0} = 325\,\text{V}$.

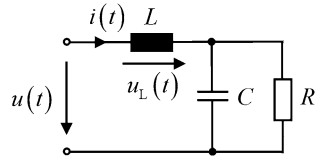


Abb. 11.25 *RLC*-Netzwerk

Der komplexe Widerstand (Impedanz) der Schaltung ist:

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} + \frac{j\omega RL}{R + j\omega L} = -j\frac{1}{\omega C} + \frac{j\omega R^2 L + \omega^2 RL^2}{R^2 + \omega^2 L^2}$$
$$= \frac{\omega^2 RL^2}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\frac{\omega R^2 L}{R^2 + \omega^2 L^2} - \frac{1}{\omega C}\right)$$
$$\underline{Z} = 90{,}8\,\Omega - j\,77{,}2\,\Omega; \quad \underline{Z} = \sqrt{90{,}8^2 + 77{,}2^2}\,\Omega \cdot \mathrm{e}^{j\cdot\arctan\left(\frac{-77{,}2}{90{,}8}\right)} = 119{,}2\,\Omega \cdot \mathrm{e}^{-j\,40{,}4^\circ}$$

$\underline{Z}$ wurde in Exponentialdarstellung berechnet, um damit einfach dividieren zu können.

$$\text{Es folgt: } \underline{\hat{I}}_1 = \frac{\underline{\hat{U}}}{\underline{Z}} = \frac{325\,\mathrm{V}}{119{,}2\,\Omega \cdot \mathrm{e}^{-j\,40{,}4^\circ}} = 2{,}73\,\mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{j\,40{,}4^\circ}$$

Nach der Stromteilerregel ist:

$$\underline{\hat{I}}_3 = \underline{\hat{I}}_1 \frac{R}{R + j\omega L} = \underline{\hat{I}}_1 \frac{100}{100 + j\,314} = \underline{\hat{I}}_1 \frac{100}{329{,}5 \cdot \mathrm{e}^{j\,72{,}3^\circ}} = \underline{\hat{I}}_1 \cdot 0{,}3 \cdot \mathrm{e}^{-j\,72{,}3^\circ}$$
$$\underline{\hat{I}}_3 = 2{,}73\,\mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{j\,40{,}4^\circ} \cdot 0{,}3 \cdot \mathrm{e}^{-j\,72{,}3^\circ} = 0{,}82\,\mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{-j\,31{,}9^\circ}$$
$$\underline{\hat{I}}_2 = \underline{\hat{I}}_1 \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \underline{\hat{I}}_1 \frac{314 \cdot \mathrm{e}^{j\,90^\circ}}{100 + j\,314} = \underline{\hat{I}}_1 \frac{314 \cdot \mathrm{e}^{j\,90^\circ}}{329{,}5 \cdot \mathrm{e}^{j\,72{,}3^\circ}} = \underline{\hat{I}}_1 \cdot 0{,}95 \cdot \mathrm{e}^{j17{,}7^\circ}$$
$$\underline{\hat{I}}_2 = 2{,}73\,\mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{j\,40{,}4^\circ} \cdot 0{,}95 \cdot \mathrm{e}^{j17{,}7^\circ} = 2{,}59\,\mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{j\,58{,}1^\circ}$$

Die Ströme in komplexer Darstellung werden jetzt in den Zeitbereich zurücktransformiert.

$$\underline{\underline{i_1(t) = 2{,}73\,\mathrm{A} \cdot \sin(\omega t + 40{,}4^\circ)}}$$
$$\underline{\underline{i_2(t) = 2{,}59\,\mathrm{A} \cdot \sin(\omega t + 58{,}1^\circ)}}$$
$$\underline{\underline{i_3(t) = 0{,}82\,\mathrm{A} \cdot \sin(\omega t - 31{,}9^\circ)}}$$

Aufgabe 11.37

Berechnen Sie in Abb. 11.25 mit Hilfe der komplexen Rechnung $u_\mathrm{L}(t)$ und $i(t)$.

Gegeben: $u(t) = 24\,\mathrm{V} \cdot \sin(\omega t + 30^\circ)$, $\omega = 3000\,\mathrm{s}^{-1}$, $R = 30\,\Omega$, $L = 15\,\mathrm{mH}$, $C = 10\,\mu\mathrm{F}$

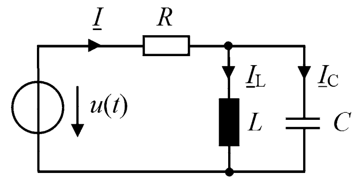


Abb. 11.26 *RLC*-Schaltung an sinusförmiger Spannungsquelle

Lösung

Der komplexe Widerstand der Parallelschaltung von R und C ist:

$$\underline{Z}_{\mathrm{RC}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} = \frac{1}{33,\overline{3}\,\mathrm{mS} + j \cdot 30\,\mathrm{mS}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}0\overline{3}^2 + 0{,}030^2} \cdot \mathrm{e}^{j \cdot \arctan\left(\frac{30}{33{,}3}\right)}}\,\Omega$$

$$= 22{,}3\,\Omega \cdot \mathrm{e}^{-j\,42^\circ}$$

$$\underline{Z}_{\mathrm{RC}} = 22{,}3\,\Omega \cdot [\cos(42^\circ) - j \cdot \sin(42^\circ)] = 16{,}6\,\Omega - j \cdot 14{,}9\,\Omega$$

Der komplexe Widerstand der Spule ist $\underline{Z}_{\mathrm{L}} = j\omega L = j\,45\,\Omega = 45\,\Omega \cdot \mathrm{e}^{j\,90^\circ}$.

$u(t)$ ist in komplexer Darstellung: $\underline{\hat{U}} = 24\,\mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{j\,30^\circ}$.

Die Spannung an der Spule wird nach der Spannungsteilerregel berechnet.

Zur Addition komplexer Zahlen eignet sich die Komponentenform am besten.

$$\underline{\hat{U}}_{\mathrm{L}} = \underline{\hat{U}} \cdot \frac{\underline{Z}_{\mathrm{L}}}{\underline{Z}_{\mathrm{L}} + \underline{Z}_{\mathrm{RC}}} = \underline{\hat{U}} \cdot \frac{j\,45\,\Omega}{j\,45\,\Omega + 16{,}6\,\Omega - j14{,}9\,\Omega} = \underline{\hat{U}} \cdot \frac{j\,45\,\Omega}{16{,}6\,\Omega + j\,30{,}1\,\Omega}$$

Zur Division komplexer Zahlen eignet sich die Exponentialform am besten.

$$\underline{\hat{U}}_{\mathrm{L}} = \underline{\hat{U}} \cdot \frac{45 \cdot \mathrm{e}^{j\,90^\circ}}{\sqrt{16{,}6^2 + 30{,}1^2}\,\Omega \cdot \mathrm{e}^{j\,\arctan\left(\frac{30{,}1}{16{,}6}\right)}} = \underline{\hat{U}} \cdot \frac{45\,\Omega \cdot \mathrm{e}^{j\,90^\circ}}{34{,}4\,\Omega \cdot \mathrm{e}^{j\,61{,}1^\circ}}$$

$$= 24\,\mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{j\,30^\circ} \cdot 1{,}31 \cdot \mathrm{e}^{j\,28{,}9^\circ}$$

$$\underline{\hat{U}}_{\mathrm{L}} = 31{,}44\,\mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{j\,58{,}9^\circ}$$

Rücktransformation von $\underline{\hat{U}}_{\mathrm{L}}$ in die zeitliche Darstellung ergibt:

$$\underline{\underline{u_{\mathrm{L}}(t) = 31{,}44\,\mathrm{V} \cdot \sin(\omega t + 58{,}9^\circ)}}$$

$$\underline{\hat{I}} = \frac{\underline{\hat{U}}_{\mathrm{L}}}{j\omega L} = \frac{31{,}44\,\mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{j\,58{,}9^\circ}}{45\,\Omega \cdot \mathrm{e}^{j\,90^\circ}} = 0{,}7\,\mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{-j\,31{,}1^\circ}; \quad \underline{\underline{i\,(t) = 0{,}7\,\mathrm{A} \cdot \sin(\omega t - 31{,}1^\circ)}}$$

Aufgabe 11.38

In Abb. 11.26 liegt eine *RLC*-Schaltung an einer sinusförmigen Spannungsquelle.

Gegeben: $R = 3\,\mathrm{k}\Omega$, $L = 0{,}5\,\mathrm{H}$, $C = 62{,}5\,\mathrm{nF}$, $u(t) = 35{,}35534\,\mathrm{V} \cdot \sin(4000\,\mathrm{s}^{-1} \cdot t)$

a) Wie groß ist der Effektivwert U der Spannung $u(t)$?
b) Wie groß ist die Impedanz $\underline{Z}_{\text{LC}}$ der Parallelschaltung von Induktivität L und Kapazität C?
c) Wie groß ist der komplexe Gesamtstrom $\underline{I}$?
d) Wie lautet der zeitliche Verlauf $i(t)$ des Gesamtstromes?
e) Zeigt die *RLC*-Schaltung überwiegend kapazitives oder induktives Verhalten?

Lösung

a) $\hat{U} = 35,35534\,\text{V}$; bei Sinusform der Spannung gilt $U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$; $\underline{\underline{U = 25\,\text{V}}}$
b)

$$\underline{Z}_{\text{LC}} = \frac{j\omega L \cdot \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC} = j\frac{4000 \cdot 0{,}5}{-4000^2 \cdot 0{,}5 \cdot 62{,}5 \cdot 10^{-9} + 1}\,\Omega = \underline{\underline{j \cdot 4\,\text{k}\Omega}}$$

c) Der gesamte Widerstand der an der Spannungsquelle liegenden Schaltung ist: $\underline{Z}_{\text{ges}} = R + \underline{Z}_{\text{LC}} = 3\,\text{k}\Omega + j \cdot 4\,\text{k}\Omega$. Damit folgt:

$$\underline{I} = \frac{25\,\text{V}}{(3 + 4j)\,\text{k}\Omega} = \frac{25 \cdot (3 - 4j)}{3^2 + 4^2}\,\text{mA} = \underline{\underline{(3 - 4j)\,\text{mA}}}$$

d) Gesucht ist der zeitliche Verlauf $i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \varphi_{\text{i}})$. Es ist $\hat{I} = |\underline{I}| \cdot \sqrt{2}$.

$$|\underline{I}| = \sqrt{3^2 + 4^2}\,\text{mA} = 5\,\text{mA}; \quad \hat{I} = 7{,}071\,\text{mA}$$

$\underline{I}$ liegt in der komplexen Ebene im 4. Quadranten, es gilt $\varphi_{\text{i}} = -\arctan\left(\frac{|\text{Im}|}{|\text{Re}|}\right)$.

$$\varphi_{\text{i}} = -\arctan\left(\frac{4}{3}\right) = -53{,}13°;$$
$$\underline{\underline{i(t) = 7{,}071\,\text{mA} \cdot \sin(4000\,\text{s}^{-1} \cdot t - 53{,}13°)}}$$

e) $\varphi_{\text{i}} < 0$: Der Strom eilt der Spannung nach (er ist im Liniendiagramm aus dem Nullpunkt nach rechts verschoben), die Schaltung zeigt überwiegend induktives Verhalten. *Alternativ*: $\varphi_{\text{ui}} = \angle\underline{Z}_{\text{ges}} = \arctan\left(\frac{4\,\text{k}\Omega}{3\,\text{k}\Omega}\right) = 53{,}13°$; $\varphi = \varphi_{\text{ui}} > 0$: Der Strom (der Stromzeiger) eilt der Spannung (dem Spannungszeiger) nach, die Schaltung zeigt überwiegend induktives Verhalten.

Aufgabe 11.39

Gegeben ist die Schaltung in Abb. 11.27.

Gegeben: $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t)$ mit $\hat{U} = 2\,\text{V}$, $f = 1\,\text{kHz}$, $C = 2\,\mu\text{F}$, $L = 10\,\text{mH}$, $R = 600\,\Omega$

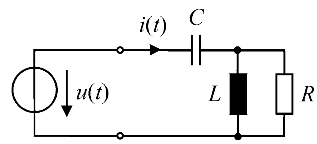


Abb. 11.27 Eine *RLC*-Schaltung

a) Bestimmen Sie mit komplexer Rechnung die Amplitude $\hat{I}$ des Stromes $i(t)$.
b) Wie groß ist die Phasenverschiebung φ in Grad zwischen $u(t)$ und $i(t)$? Verwenden Sie die komplexe Rechnung.
c) Wie lautet die Zeitfunktion $i(t)$? Zeigt die Schaltung an $u(t)$ überwiegend kapazitives oder induktives Verhalten? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung

a) Die Impedanz der Schaltung ist:

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} + \frac{j\omega L \cdot R}{j\omega L + R} = \frac{-\omega^2 RLC + R + j\omega L}{-\omega^2 LC + j\omega RC}$$

Zur Bestimmung des Betrages von $\underline{Z}$ wäre ein Weg, Zähler und Nenner von $\underline{Z}$ mit dem konjugiert komplexen Nenner zu multiplizieren und Real- und Imaginärteil zu trennen. Dann ist: $Z = |\underline{Z}| = \sqrt{\{\text{Re}\}^2 + \{\text{Im}\}^2}$

Meist ist der viel schnellere Lösungsweg, die Beträge in Zähler und Nenner der Impedanz einzeln zu bilden nach der Formel:

$$|\underline{Z}| = \left|\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right| = \frac{|\underline{Z}_1|}{|\underline{Z}_2|}$$

Dabei können in Zähler und Nenner auch mehrere Faktoren stehen. Es folgt:

$$|\underline{Z}| = \frac{\sqrt{(R - \omega^2 RLC)^2 + \omega^2 L^2}}{\sqrt{\omega^4 L^2 C^2 + \omega^2 R^2 C^2}}; \quad Z = \frac{141}{7{,}58}\,\Omega = 18{,}6\,\Omega;$$

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{|\underline{Z}|} = \frac{2\,\text{V}}{18{,}6\,\Omega} = \underline{\underline{107{,}5\,\text{mA}}}$$

b) Auch die Winkel können von Zähler und Nenner einzeln gebildet werden.

$$\text{Es gilt: } \angle\left(\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right) = \angle\underline{Z}_1 - \angle\underline{Z}_2 \text{ und } \angle(\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2) = \angle\underline{Z}_1 + \angle\underline{Z}_2$$

Je nach Quadrant, in dem eine komplexe Zahl $\underline{Z} = a + j \cdot b$ liegt, ist deren Winkel φ:

$$1.\text{ Quadrant: } \varphi = \arctan\left(\frac{|b|}{|a|}\right); \qquad 2.\text{ Quadrant: } \varphi = \pi - \arctan\left(\frac{|b|}{|a|}\right)$$

$$3.\text{ Quadrant: } \varphi = \pi + \arctan\left(\frac{|b|}{|a|}\right); \quad 4.\text{ Quadrant: } \varphi = -\arctan\left(\frac{|b|}{|a|}\right)$$

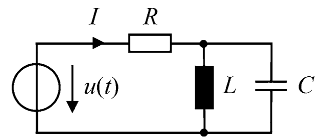


Abb. 11.28 *RLC*-Schaltung an sinusförmiger Spannungsquelle

Zahlenwerte der Angabe einsetzen ergibt:

$$\underline{Z} = \frac{126{,}26\,\Omega + j \cdot 62{,}83\,\Omega}{-0{,}79 + j \cdot 7{,}54}$$

Die komplexe Zahl des Zählers liegt im 1. Quadranten, die des Nenners im 2. Quadranten.
φ wird jetzt als Winkel der Impedanz berechnet.

$$\angle\underline{Z} = \arctan\left(\frac{62{,}83}{126{,}26}\right) - \left[180° - \arctan\left(\frac{7{,}54}{0{,}79}\right)\right]$$
$$\angle\underline{Z} = 26{,}46° - (180° - 84{,}02°)$$
$$\angle\underline{Z} = \varphi = \varphi_{\text{ui}} = \angle(\underline{U}, \underline{I}) = \underline{\underline{-69{,}52°}}$$

Alternativ: φ wird jetzt zusätzlich aus den Nullphasenwinkeln von Strom und Spannung berechnet.
In der Angabe ist bei der Spannung kein Nullphasenwinkel angegeben, somit ist:

$$\varphi_{\text{u}} = \angle\underline{U} = 0$$

Der Nullphasenwinkel des Stromes ist:

$$\angle\underline{I} = \angle\left(\frac{\underline{U}}{\underline{Z}}\right) = \angle\underline{U} - \angle\underline{Z} = 0° + 69{,}52° = 69{,}52° = \varphi_{\text{i}}$$
$$\varphi = \varphi_{\text{ui}} = \varphi_{\text{u}} - \varphi_{\text{i}} = 0° - 69{,}52° = \underline{\underline{-69{,}52°}}$$

c)

$$i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \varphi_{\text{i}}); \quad \underline{\underline{i(t) = 107{,}5\,\text{mA} \cdot \sin(\omega t + 69{,}52°)}}$$

Der Nullphasenwinkel von $i(t)$ ist positiv, $i(t)$ eilt $u(t)$ um 69,52° voraus. Die Schaltung an $u(t)$ zeigt insgesamt kapazitives Verhalten (oder kurz: $\varphi < 0 \Rightarrow$ überwiegend kapazitives Verhalten).

Aufgabe 11.40
Eine *RLC*-Schaltung (Abb. 11.28) wird von einer sinusförmigen Spannungsquelle gespeist.

Gegeben: $R = 1000\,\Omega$, $L = 0{,}1\,\text{H}$, $C = 10\,\text{nF}$, $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(1000\,\text{s}^{-1} \cdot t)$, $\hat{U} = 25\,\text{V}$

a) Geben Sie den komplexen Effektivwertzeiger von $u(t)$ nach Betrag und Phase an.
b) Berechnen Sie die Impedanz $\underline{Z}_{\mathrm{LC}}$ der Parallelschaltung von L und C.
c) Wie groß ist der Gesamtstrom I?
d) Wie groß ist der Nullphasenwinkel φ_{i} des Gesamtstromes I in Grad?
e) Wie lautet die Zeitfunktion $i(t)$? Zeigt die Schaltung an $u(t)$ überwiegend kapazitives oder induktives Verhalten? Begründen Sie Ihre Antwort.
f) Berechnen Sie die in der Schaltung umgesetzte Scheinleistung S, Wirkleistung P und Blindleistung Q.

Lösung

a) $\hat{U} = 25\,\mathrm{V}$; bei sinusförmiger Spannung gilt:

$$U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}; \quad \underline{\underline{U = 17{,}68\,\mathrm{V}}}; \quad \underline{\underline{\varphi_{\mathrm{u}} = 0}} \quad \text{oder} \quad \underline{\underline{\underline{U} = 17{,}68\,\mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{j0}}}$$

b)

$$\underline{Z}_{\mathrm{LC}} = \frac{j\omega L \cdot \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega L}{-\omega^2 LC + 1}; \quad \underline{Z}_{\mathrm{LC}} = j\,\frac{1000\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 0{,}1\,\mathrm{H}}{-(1000\,\mathrm{s}^{-1})^2 \cdot 0{,}1\,\mathrm{H} \cdot 10^{-8}\,\mathrm{F} + 1}$$

$$\underline{\underline{\underline{Z}_{\mathrm{LC}} = j \cdot 100{,}1\,\Omega}}$$

Wie es bei der Parallelschaltung von zwei Blindwiderständen sein muss, erhält man einen reinen Blindwiderstand (ohne Realteil).

$$\underline{\underline{X_{\mathrm{LC}} = |\underline{Z}_{\mathrm{LC}}| = 100{,}1\,\Omega}}$$

Es darf also *nicht* gerechnet werden:

$$X_{\mathrm{LC}} = \frac{\omega L \cdot \frac{1}{\omega C}}{\omega L + \frac{1}{\omega C}} = \frac{\omega L}{\omega^2 LC + 1} = 99{,}9\,\Omega$$

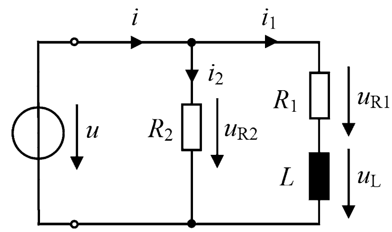
Dies würde $X_{\mathrm{C}} \parallel X_{\mathrm{L}}$ entsprechen. Damit werden allerdings nur die Widerstandswerte, aber nicht deren Phasenlage berücksichtigt. Somit erhält man ein falsches Ergebnis (das hier zufällig nur wenig vom richtigen Ergebnis abweicht).

c) Der gesamte Widerstand der an der Spannungsquelle liegenden Schaltung ist:

$$\underline{Z}_{\mathrm{ges}} = R + \underline{Z}_{\mathrm{LC}} = 1000\,\Omega + j \cdot 100{,}1\,\Omega; \quad \underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{\mathrm{ges}}} = \frac{17{,}68\,\mathrm{V}}{(1000 + j \cdot 100{,}1)\,\Omega}$$

$$I = \frac{U}{|\underline{Z}_{\mathrm{ges}}|} = \frac{17{,}68}{\sqrt{1000^2 + 100{,}1^2}}\,\mathrm{A} = \underline{\underline{17{,}6\,\mathrm{mA}}}$$

Abb. 11.29 Eine gemischte Schaltung



d)

$$\varphi_\mathrm{i} = \angle \underline{I} = \angle \left(\frac{\underline{U}}{\underline{Z}_\mathrm{ges}} \right) = \angle \underline{U} - \angle \underline{Z}_\mathrm{ges} = 0 - \angle \underline{Z}_\mathrm{ges};$$

$$\varphi_\mathrm{i} = -\arctan \left(\frac{100{,}1}{1000} \right) = \underline{\underline{-5{,}7^\circ}}$$

e)

$$\underline{\underline{i(t) = 17{,}6\,\mathrm{mA} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(1000\,\mathrm{s}^{-1} \cdot t - 5{,}7^\circ)}}$$

Kein Nullphasenwinkel der Spannung angegeben: $\varphi_\mathrm{u} = 0^\circ$.
$\varphi_\mathrm{i} < 0$: Im Liniendiagramm ist die Stromkurve gegenüber der Spannungskurve aus dem Nullpunkt nach rechts verschoben. I eilt U nach.
Alternativ: $\varphi = \varphi_\mathrm{ui} = \varphi_\mathrm{u} - \varphi_\mathrm{i} = 0^\circ - (-5{,}7^\circ) = 5{,}7^\circ$; $\varphi > 0$: Überwiegend induktives Verhalten der Schaltung, I eilt U nach.

f)

$$S = U \cdot I = 17{,}68\,\mathrm{V} \cdot 0{,}0176\,\mathrm{mA} = \underline{\underline{0{,}311\,\mathrm{VA}}}$$

$$P = S \cdot \cos(\varphi) = 0{,}311 \cdot \cos(5{,}7^\circ)\,\mathrm{W} = \underline{\underline{0{,}309\,\mathrm{W}}}$$

$$Q = S \cdot \sin(\varphi) = 0{,}311 \cdot \sin(5{,}7^\circ)\,\mathrm{VAR} = \underline{\underline{0{,}031\,\mathrm{VAR}}}$$

Probe: $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$; $S = \sqrt{0{,}309^2 + 0{,}031^2} = 0{,}311\,\mathrm{VA}$

Aufgabe 11.41
Gegeben ist die Schaltung nach Abb. 11.29. Gegeben sind außerdem $u = u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t)$, R_1, R_2, L und ω.

Gesucht ist der zeitliche Verlauf des Gesamtstromes $i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \varphi_\mathrm{i})$.

Die Aufgabe ist zuerst unter Verwendung von Zeigerdiagrammen im Zeitbereich (ohne komplexe Rechnung) und dann im Frequenzbereich (mit komplexer Rechnung) zu lösen.

Lösung
Nach den Kirchhoff'schen Regeln gilt in der Schaltung Abb. 11.29:

$$I = I_1 + I_2; \quad U = U_\mathrm{R2} = U_\mathrm{R1} + U_\mathrm{L}$$

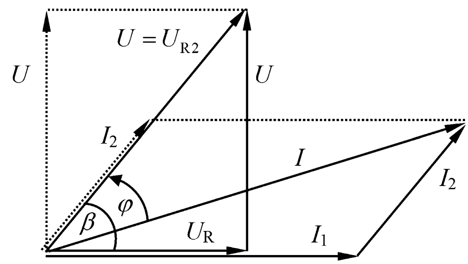


Abb. 11.30 Zeigerbild zur Schaltung nach Abb. 11.29

Zur Konstruktion eines qualitativen Zeigerbildes (Abb. 11.30) wird I_1 als Bezugszeiger verwendet. U_{R1} ist mit I_1 in Phase, beide Zeiger werden in die horizontale Achse gelegt. U_L eilt I_1 (dem Strom durch die Spule) um 90° voraus und wird zunächst in die positive y-Achse gezeichnet. U_{R1} und U_L addieren sich geometrisch zur Gesamtspannung U, die auch über dem parallelen Zweig R_2 liegt. Der Strom I_2 ist in Phase mit U_{R2}. Der Gesamtstrom I ist die geometrische Summe der Teilströme I_1 und I_2.

Aus dem Zeigerbild Abb. 11.30 kann man ablesen:

$$U = \sqrt{U_{R1}^2 + U_L^2} = I_1 \cdot \sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}; \quad I_1 = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}}; \quad \tan(\beta) = \frac{U_L}{U_{R1}};$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{\omega L}{R_1}\right); \quad I_2 = \frac{U}{R_2}$$

Es wird das erweiterte Zeigerbild der Ströme gezeichnet (Abb. 11.31).

Dem erweiterten Zeigerbild der Ströme (Abb. 11.31) kann man entnehmen:

$$I^2 = [I_1 + I_2 \cdot \cos(\beta)]^2 + [I_2 \cdot \sin(\beta)]^2; \quad I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \cos(\beta)}$$

$$\varphi = \beta - \arctan\left(\frac{I_2 \cdot \sin(\beta)}{I_1 + I_2 \cdot \cos(\beta)}\right)$$

Für $i(t)$ folgt:

$$\hat{I} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{U^2}{R_1^2 + (\omega L)^2} + \frac{U^2}{R_2^2} + 2 \cdot \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}} \cdot \frac{U}{R_2} \cdot \cos\left(\arctan\left(\frac{\omega L}{R_1}\right)\right)}$$

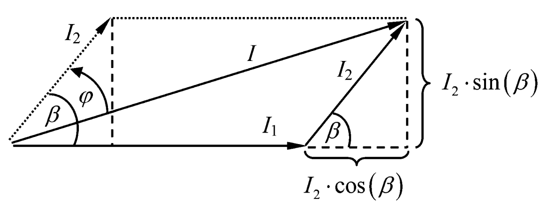


Abb. 11.31 Erweitertes Zeigerbild der Ströme

Mit $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ und einem Zwischenschritt folgt:

$$\underline{\underline{\hat{I} = U \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{R_1^2 + (\omega L)^2} + \frac{1}{R_2^2} + 2 \cdot \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{1}{R_1^2 + (\omega L)^2}}}}$$

Überprüfung für die zwei Grenzfälle von ω:

$$\omega \to \infty\colon\ \hat{I} = \hat{I}_2 = \frac{U \cdot \sqrt{2}}{R_2};$$

der Widerstand der Spule wird unendlich groß, es bleibt nur der Strompfad durch R_2 übrig.

$$\omega \to 0\colon\ \hat{I} = U \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{2}{R_1 \cdot R_2}} = U \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{R_1^2 + R_2^2 + 2 \cdot R_1 \cdot R_2}{R_1^2 \cdot R_2^2}}$$

$$\hat{I} = U \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1^2 \cdot R_2^2}} = U \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2};$$

der Widerstand der Spule wird null, es bleibt der Leitwert der parallel geschalteten Widerstände R_1 und R_2 übrig.

Für den Phasenverschiebungswinkel φ des Gesamtstromes folgt:

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; \quad \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\varphi = \beta - \arctan\left(\frac{I_2 \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{I_1 + I_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}\right) = \beta - \arctan\left(\frac{I_2 \cdot x}{I_1 \cdot \sqrt{1+x^2} + I_2}\right) \text{ mit } x = \frac{\omega L}{R_1}$$

$$\varphi = \beta - \arctan\left(\frac{\frac{U \cdot x}{R_2}}{\frac{U}{\sqrt{R_1^2+(\omega L)^2}} \cdot \frac{\sqrt{R_1^2+(\omega L)^2}}{R_1} + \frac{U}{R_2}}\right)$$

$$\underline{\underline{\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R_1}\right) - \arctan\left(\frac{\omega L}{R_1 + R_2}\right)}}$$

Überprüfung für erlaubte Grenzfälle der Widerstände:

$$R_2 \to \infty\colon\ \varphi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R_1}\right);$$

dies entspricht der Formel bei der Reihenschaltung von Wirkwiderstand und Spule (R_2 fällt weg).

$$R_1 \to 0\colon\ \varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega L}{R_2}\right);$$

mit $\varphi = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$ für $x > 0$ folgt:

$\varphi = \arctan\left(\frac{R_2}{\omega L}\right)$; dies entspricht der Formel bei der Parallelschaltung von Wirkwiderstand und Spule.

Da der Nullphasenwinkel der Gesamtspannung null ist, ist der Phasenverschiebungswinkel φ gleich mit dem Nullphasenwinkel des Gesamtstromes: $\varphi_i = \varphi$.

Mit $\hat{I}$ und φ_i ist der gesuchte Gesamtstrom gefunden.

Nun wird die Aufgabe im Frequenzbereich berechnet und der jeweilige Aufwand verglichen.

Wir wissen: Der Winkel $\angle \underline{Z}$ des komplexen Gesamtwiderstandes $\underline{Z}$ ist gleich dem Phasenverschiebungswinkel φ zwischen Spannung und Strom. Der komplexe Gesamtwiderstand zwischen den beiden Anschlussklemmen des Netzwerkes ist:

$$\underline{Z} = R_2 \parallel (R_1 + j\omega L) = \frac{R_2 \cdot (R_1 + j\omega L)}{R_1 + R_2 + j\omega L} = \frac{R_1 R_2 + j\omega R_2 L}{R_1 + R_2 + j\omega L}$$

Mit $\angle\left(\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right) = \angle \underline{Z}_1 - \angle \underline{Z}_2$ folgt sofort:

$$\underline{\underline{\angle \underline{Z} = \varphi = \varphi_{ui} = \angle(\underline{U}, \underline{I}) = \arctan\left(\frac{\omega L}{R_1}\right) - \arctan\left(\frac{\omega L}{R_1 + R_2}\right)}}$$

Dieses Ergebnis stimmt mit dem im Zeitbereich berechneten Ergebnis überein. Der Aufwand hierfür war allerdings erheblich kleiner als unter Verwendung des Zeigerdiagramms.

Um den Strom bestimmen zu können, wird der Betrag des komplexen Widerstandes berechnet.

Mit $|\underline{Z}| = |\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}| = \frac{|\underline{Z}_1|}{|\underline{Z}_2|}$ folgt:

$$|\underline{Z}| = Z = \frac{\sqrt{R_1^2 R_2^2 + \omega^2 R_2^2 L^2}}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \omega^2 L^2}}; \qquad \underline{\underline{\hat{I} = U \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{(R_1 + R_2)^2 + \omega^2 L^2}{R_1^2 R_2^2 + \omega^2 R_2^2 L^2}}}}$$

Durch eine kleine Zwischenrechnung bestätigt man leicht, dass dieses Ergebnis für $\hat{I}$ mit dem unter Verwendung des Zeigerdiagramms übereinstimmt. Wir sehen, dass eine Berechnung im Frequenzbereich sehr große Vorteile bringt.

11.9 Die Übertragungsfunktion

Aufgabe 11.42

Für das in Abb. 11.32 dargestellte Übertragungsglied ist die Übertragungsfunktion $\underline{H}(s)$ mit $s = j\omega$ zu bestimmen.

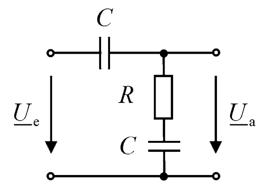


Abb. 11.32 Ein Übertragungsglied

Lösung
Spannungsteilerregel:

$$\underline{U}_{\mathrm{a}}(s) = \underline{U}_{\mathrm{e}}(s) \cdot \frac{R + \frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC} + R + \frac{1}{sC}} = \underline{U}_{\mathrm{e}}(s) \cdot \frac{\frac{1+sRC}{sC}}{\frac{2+sRC}{sC}} = \underline{U}_{\mathrm{e}}(s) \cdot \frac{1+sRC}{2+sRC}$$

$$\underline{H}(s) = \frac{\underline{U}_{\mathrm{a}}(s)}{\underline{U}_{\mathrm{e}}(s)} = \underline{\underline{\frac{1+sRC}{2+sRC}}} = \underline{\underline{\frac{1+j\omega RC}{2+j\omega RC}}}$$

Die Übertragungsfunktion wird statt mit „$\underline{H}(s)$“ sehr häufig mit „$\underline{G}(s)$“ bezeichnet.

Obwohl die Übertragungsfunktion eine komplexe Größe ist, wird sie oft nicht unterstrichen und somit nicht extra als komplexe Größe gekennzeichnet. Auch bei den Ein- und Ausgangsgrößen und bei der Benennung von Strömen und Spannungen innerhalb eines Netzwerkes wird im Zusammenhang mit einer Übertragungsfunktion das Unterstreichen für die Kennzeichnung komplexer Größen oft weggelassen. Diese Vorgehensweise ist aber nicht ratsam, da man eventuell keinen Unterschied zwischen einer komplexen Größe und deren Betrag sieht.

Aufgabe 11.43
Die in Abb. 11.33 skizzierte Schaltung besteht aus zwei gleichen Widerständen R und zwei gleichen Kondensatoren C. U_{e} ist eine Wechselspannung variabler Frequenz. Am Ausgang wird die Schaltung nicht belastet (Leerlauf an U_{a}).

a) Welche Filtereigenschaften besitzt diese Schaltung? Welche Ordnung hat das Filter und warum? Um wie viel dB ändert sich das Ausgangssignal, wenn sich das Eingangssignal um eine Frequenzdekade ändert?
b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_{\mathrm{a}}(j\omega)}{\underline{U}_{\mathrm{e}}(j\omega)}$.
c) Wie lautet die normierte Übertragungsfunktion $\underline{H}_{\mathrm{N}}(j\omega)$?

Lösung
a) Bei der Schaltung handelt es sich um ein RC-Tiefpassfilter. Die Ordnung des Filters ist zwei (Tiefpass zweiter Ordnung), da zwei energiespeichernde Bauelemente (in diesem

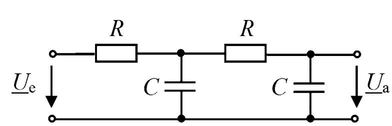


Abb. 11.33 Ein Filter

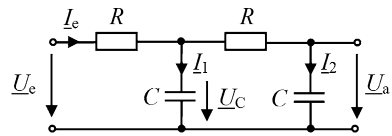


Abb. 11.34 Das Filter mit Spannungen und Strömen

Fall Kondensatoren) verwendet werden. Das Ausgangssignal nimmt um $2 \cdot 20\,\text{dB} = 40\,\text{dB}$ pro Frequenzdekade ab.

b) Zur Bestimmung der Übertragungsfunktion werden die Ströme und Spannungen in die Schaltung eingetragen (Abb. 11.34).

$$\underline{I}_2 = j\omega C \cdot \underline{U}_a; \quad \underline{U}_C = R \cdot \underline{I}_2 + \underline{U}_a = \underline{U}_a \cdot (1 + j\omega RC)$$
$$\underline{I}_1 = j\omega C \cdot \underline{U}_C = j\omega C \cdot \underline{U}_a \cdot (1 + j\omega RC) = \underline{U}_a \cdot (-\omega^2 RC^2 + j\omega C)$$
$$\underline{I}_e = \underline{U}_a \cdot (-\omega^2 RC^2 + j\omega C) + j\omega C \cdot \underline{U}_a = \underline{U}_a \cdot (-\omega^2 RC^2 + 2j\omega C)$$
$$\underline{U}_e = R \cdot \underline{I}_e + \underline{U}_C = R \cdot \underline{U}_a \cdot (-\omega^2 RC^2 + 2j\omega C) + \underline{U}_a \cdot (1 + j\omega RC)$$
$$\underline{U}_e = \underline{U}_a \cdot (1 - \omega^2 R^2 C^2 + 3j\omega RC)$$
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_a(j\omega)}{\underline{U}_e(j\omega)} = \underline{\underline{\frac{1}{1 - \omega^2 R^2 C^2 + 3j\omega RC}}}$$

c) Zur Normierung einer Übertragungsfunktion wird $R = 1\,\Omega$, $C = 1\,\text{F}$, $L = 1\,\text{H}$ in die Übertragungsfunktion eingesetzt.

$$\underline{H}_N(j\omega) = \underline{\underline{\frac{1}{1 - \omega^2 + 3j\omega}}}$$

Aufgabe 11.44
Gegeben ist die Schaltung in Abb. 11.35.

a) Wie lautet die Übertragungsfunktion $\underline{H}(s) = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}$?
b) Geben Sie für $s = j\omega$ Betrag und Winkel der Übertragungsfunktion an.
c) Welche Filtercharakteristik hat $\underline{H}(s)$? Betrachten Sie hierzu $\underline{H}(s)$ für sehr kleine und sehr große Frequenzen.

Abb. 11.35 Ein *LR*-Filter

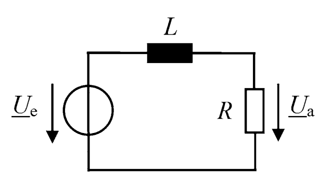
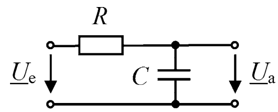


Abb. 11.36 *RC*-Tiefpass



Lösung

a) Nach der Spannungsteilerregel ergibt sich U_a zu $\underline{U}_\mathrm{a} = \underline{U}_\mathrm{e} \cdot \frac{R}{R+sL}$

$$\Rightarrow \underline{H}(s) = \frac{\underline{U}_\mathrm{a}}{\underline{U}_\mathrm{e}} = \frac{1}{1 + \frac{L}{R} \cdot s}$$

b)

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}}}$$

Ist $\underline{H}\,(j\omega) = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}$, so ist der Winkel $\angle\underline{H}\,(j\omega) = \angle\underline{Z}_1 - \angle\underline{Z}_2$. Somit folgt:

$$\angle\underline{H}(j\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

c) Für $\omega \to 0$ wird $|\underline{H}(j\omega)| = 1$. Anschauliche Erläuterung für den eingeschwungenen Zustand: Für Gleichspannung mit $f = 0$ stellt die Induktivität einen Kurzschluss dar. Für $\omega \to \infty$ wird $|\underline{H}(j\omega)| = 0$. Für sehr große Frequenzen wird der Widerstand einer Induktivität unendlich groß.
$\underline{H}(s)$ hat die Filtercharakteristik eines passiven *Tiefpasses* 1. Ordnung.

Aufgabe 11.45

Bei welcher Frequenz beträgt der Amplitudengang $|\underline{H}(j\omega)| = |\frac{\underline{U}_\mathrm{a}}{\underline{U}_\mathrm{e}}|$ des in Abb. 11.36 angegebenen *RC*-Tiefpasses $-10\,\mathrm{dB}$?

Gegeben: $R = 100\,\Omega$, $C = 2\,\mu\mathrm{F}$

Lösung

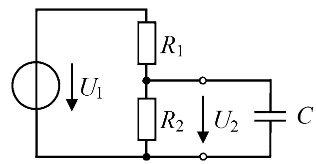
Beim *RC*-Tiefpass 1. Ordnung ist

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}.$$

Das Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangsspannung mit der Größe Dezibel ist definiert als:

$$|\underline{H}(j\omega)|_\mathrm{dB} = 20\,\mathrm{dB} \cdot \log\left(|\frac{\underline{U}_\mathrm{a}(\omega)}{\underline{U}_\mathrm{e}(\omega)}|\right) = 20\,\mathrm{dB} \cdot \log(|\underline{H}(j\omega)|)$$

Abb. 11.37 Kapazitiv belasteter Spannungsteiler



Es ist somit $-10\,\mathrm{dB} = 20 \cdot \log(|\underline{H}(j\omega)|)$ oder $|\underline{H}(j\omega)| = 10^{\frac{-10}{20}} = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

$$\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}; \quad 10 = 1 + \omega^2 R^2 C^2; \quad \omega = \frac{3}{RC}; \quad \omega = 15.000\,\mathrm{s}^{-1};$$
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \underline{\underline{2387\,\mathrm{Hz}}}$$

Aufgabe 11.46
Ein ohmscher Spannungsteiler mit den Widerständen $R_1 = 900\,\Omega$ und $R_2 = 100\,\Omega$ ist mit der Kapazität $C = 10\,\mu\mathrm{F}$ belastet (Abb. 11.37). Die Sinus-Eingangsspannung ist $U_1 = 100\,\mathrm{V}$, $f = 50\,\mathrm{Hz}$.

Wie groß ist die Ausgangsspannung U_2? Um welchen Winkel φ ist U_2 gegenüber U_1 phasenverschoben?

Lösung
Der (komplexe) Widerstand der Parallelschaltung von R_2 und C ist

$$\underline{Z} = \frac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C}.$$

Nach der Spannungsteilerregel ist

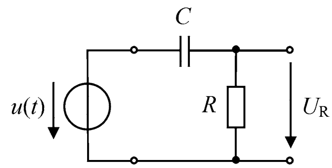
$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 \cdot \frac{\underline{Z}}{R_1 + \underline{Z}} = \underline{U}_1 \cdot \frac{\frac{R_2}{1+j\omega R_2 C}}{R_1 + \frac{R_2}{1+j\omega R_2 C}} = \underline{U}_1 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C} = \underline{U}_1 \cdot \underline{H}(j\omega)$$

Es folgt: $U_2 = U_1 \cdot |\underline{H}(j\omega)|$

Allgemein ist der Betrag einer Übertragungsfunktion $|\underline{H}(j\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2 + \mathrm{Im}^2}$ mit Re = Realteil und Im = Imaginärteil. Außerdem gilt allgemein:

$$|\underline{H}(j\omega)| = \left|\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right| = \frac{|\underline{Z}_1|}{|\underline{Z}_2|}$$

Abb. 11.38 Ein *RC*-Filter



Es folgt:

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{R_2}{\sqrt{(R_1+R_2)^2 + (\omega R_1 R_2 C)^2}}$$

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{100}{\sqrt{1000^2 + (2\pi \cdot 50 \cdot 100 \cdot 900 \cdot 10^{-5})^2}} = 0{,}0962$$

$$U_2 = 100\,\mathrm{V} \cdot 0{,}0962 = \underline{\underline{9{,}62\,\mathrm{V}}}$$

Der Phasenwinkel $\varphi(\omega)$ des Ausgangssignals gegen das Eingangssignal ist definiert als der Winkel von $\underline{H}(j\omega)$. Allgemein gilt:

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{\underline{H}(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{\underline{H}(j\omega)\}}\right) \quad \text{mit Im} = \text{Imaginärteil, Re} = \text{Realteil.}$$

Für den Winkel ($\angle$) eines Bruches zweier komplexer Zahlen gilt: $\angle\left(\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right) = \angle\underline{Z}_1 - \angle\underline{Z}_2$

Es folgt: $Z_1 = R_2$, somit ist $\angle\underline{Z}_1 = 0$.

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}\right) = -\arctan\left(\frac{2\pi \cdot 50 \cdot 900 \cdot 100 \cdot 10^{-5}}{900 + 100}\right) = \underline{\underline{-15{,}79^\circ}}$$

U_2 ist gegenüber U_1 um $-15{,}79^\circ$ phasenverschoben, eilt also U_1 um $15{,}79^\circ$ nach.

Bei Netzwerken mit sinusförmiger Erregung werden zur Bestimmung von Betrag und Phasenverschiebung des Ausgangssignals Betrag und Winkel der Übertragungsfunktion bestimmt. Vorteile gegenüber der Wechselstromrechnung: Diese Methode funktioniert immer, Betrag und Phase können auch für verschiedene Frequenzen berechnet werden (Bestimmung von Amplituden- und Phasengang).

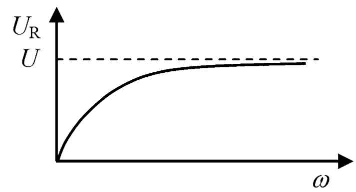
Aufgabe 11.47

Gegeben ist die Schaltung in Abb. 11.38.

Gegeben sind die Werte: $u(t) = 15\,\mathrm{V} \cdot \sin(\omega t)$; $f = 1\,\mathrm{kHz}$; $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$; $C = 1\,\mathrm{nF}$

a) Welche Filtercharakteristik hat die Schaltung in Abb. 11.38? Verwenden Sie eine Grenzwertbetrachtung für sehr kleine und sehr große Frequenzen.
b) Geben Sie die Übertragungsfunktion $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_R}{\underline{U}}$ an. Berechnen Sie U_R.
c) Geben Sie den Phasenwinkel φ allgemein in Abhängigkeit der Kreisfrequenz ω an, um den die Ausgangsspannung U_R gegenüber der Eingangsspannung U verschoben ist. Wie groß ist φ?
d) Geben Sie einen Ausdruck $u_R(t)$ für den zeitlichen Verlauf von U_R an.

Abb. 11.39 Amplitudengang Hochpass



Lösung

a) Im eingeschwungenen Zustand sperrt der Kondensator C für Gleichspannung mit $f = 0$, es ist $U_R = 0\,\text{V}$. Für $\omega \to \infty$ stellt der Kondensator C einen Kurzschluss dar, es ist $U_R = U$. Der Widerstand von C wird umso kleiner, je größer die Frequenz der Eingangsspannung wird. Es handelt sich um die Filtercharakteristik eines passiven *Hochpasses* 1. Ordnung.

b) Die Eingangsspannung ist im Komplexen als rotierender Scheitelwertzeiger $\underline{u}(t) = 15\,\text{V} \cdot e^{j\omega t}$. Momentanwerte sind hier nicht von Interesse, es genügt, mit einem ruhenden Zeiger zu arbeiten. Der ruhende Scheitelwertzeiger (die komplexe Amplitude) ist $\underline{\hat{U}} = 15\,\text{V}$. Da der Effektivwert U_R der Ausgangsspannung gefragt ist, verwenden wir als komplexe Eingangsspannung den komplexen Effektivwert $\underline{U} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} = \frac{15\,\text{V}}{\sqrt{2}}$.

► **Anmerkung** Der komplexe Effektivwertzeiger ist natürlich ein ruhender Zeiger. Als rotierender Zeiger wäre er physikalisch sinnlos, da er um den Faktor $1/\sqrt{2}$ zu kurz und somit die Amplitude der Sinusspannung zu klein wäre.

Die Schaltung in Abb. 11.38 kann als frequenzabhängiger Spannungsteiler betrachtet werden.

$$\underline{U}_R = \underline{U} \cdot \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_R}{\underline{U}} = \underline{\underline{\frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}}}}$$

$$U_R = |\underline{U}_R| = |\underline{U}| \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}$$

$$U_R = \frac{15\,\text{V}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{10^3\,\Omega}{\sqrt{(10^3\,\Omega)^2 + \frac{1}{4\pi^2 \cdot (10^3\,\text{s}^{-1})^2 \cdot \left(10^{-9}\,\frac{\text{s}}{\Omega}\right)^2}}}; \quad U_R = \frac{15 \cdot 10^3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{10^6 + \frac{1}{4\pi^2 \cdot 10^{-12}}}}\,\text{V}$$

$$\underline{\underline{U_R = 67\,\text{mV}}}$$

Für

$$U_R = |\underline{U}_R| = |\underline{U}| \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}$$

erhalten wir den Graphen der Funktion in Abb. 11.39.

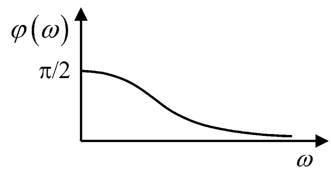


Abb. 11.40 Phasengang Hochpass

c) Phasenwinkel $\varphi(\omega)$ zwischen $\underline{U}$ und $\underline{U}_\mathrm{R}$: Wir betrachten

$$\underline{U}_\mathrm{R} = \underline{U} \cdot \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}}.$$

Nach Angabe ist $\measuredangle \underline{U} = 0$. Es gilt: $\angle\left(\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2\right) = \underbrace{\angle \underline{Z}_1}_{=0} + \angle \underline{Z}_2$

$$\angle \underline{U}_\mathrm{R} = \angle \text{Zä} - \angle \text{Ne} = \angle R - \angle\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)$$

Mit $\angle R = 0$, $R + \frac{1}{j\omega C} = R - j\frac{1}{\omega C}$ und $\arctan(-x) = -\arctan(x)$ folgt:

$$\angle \underline{U}_\mathrm{R} = \varphi(\omega) = 0 - \arctan\left(-\frac{1}{\omega RC}\right) = \underline{\underline{\arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right)}}; \quad \underline{\underline{\varphi = 89{,}6°}}$$

Dieses $\varphi(\omega)$, die Phasenverschiebung zwischen einer Aus- und Eingangsspannung, darf nicht verwechselt werden mit $\varphi = \varphi_\mathrm{ui}$, der Phasenverschiebung zwischen einer Spannung und einem Strom. Wie zu sehen ist gilt: $\varphi(\omega) = \angle \underline{H}(j\omega)$.
Mit $\varphi(0) = \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi(\infty) = \arctan(0) = 0$ erhalten wir für $\varphi(\omega)$ den Graphen der Funktion in Abb. 11.40.
Ein Hinweis
Wir hätten $\underline{U}_\mathrm{R} = \underline{U} \cdot \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}}$ umformen können zu $\underline{U}_\mathrm{R} = \underline{U} \cdot \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$.

$$\varphi_\text{Zä} = \arctan\left(\frac{\omega RC}{0}\right) = \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2};$$
$$\varphi_\text{Ne} = \arctan\left(\frac{\omega RC}{1}\right) = \arctan(\omega RC)$$
$$\underline{\underline{\varphi(\omega)}} = \varphi_\text{Zä} - \varphi_\text{Ne} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} - \arctan(\omega RC)}}$$

Zunächst kann man meinen, man hat ein anderes Ergebnis erhalten.
Mit $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$ aus einer Formelsammlung sieht man, dass die Ergebnisse identisch sind.

d) $\underline{\underline{u_\mathrm{R}(t) = \sqrt{2} \cdot 0{,}067\,\mathrm{V} \cdot \sin(\omega t + 89{,}6°)}}$

11.10 Verstärkungsfaktor, Verstärkungsmaß, Dämpfungsmaß

Aufgabe 11.48
Die Eingangsleistung eines Vierpols wird von 1 mW auf eine Ausgangsleistung von 1,0 W verstärkt. Wie groß ist die Leistungsverstärkung in Dezibel und als Linearfaktor?

Lösung
Die Leistungsverstärkung in dB errechnet sich nach $V_{\mathrm{P,dB}} = 10\,\mathrm{dB} \cdot \lg\left(\frac{P_\mathrm{a}}{P_\mathrm{e}}\right)$.

$$V_{\mathrm{P,dB}} = 10\,\mathrm{dB} \cdot \lg\left(\frac{1000\,\mathrm{mW}}{1\,\mathrm{mW}}\right) = \underline{\underline{30\,\mathrm{dB}}}$$

Als Linearfaktor ist die Leistungsverstärkung $V_\mathrm{P} = 10^{\frac{30\,\mathrm{dB}}{10\,\mathrm{dB}}} = 10^3 = \underline{\underline{1000}}$ bzw. einfach $V_\mathrm{P} = \frac{1000\,\mathrm{mW}}{1\,\mathrm{mW}} = \underline{\underline{1000}}$.

Aufgabe 11.49
Die Eingangsspannung von 1 mV eines Verstärkers wird auf 2,0 V am Ausgang verstärkt. Wie groß ist die Spannungsverstärkung in dB?

Lösung

$$V_{\mathrm{U,dB}} = 20\,\mathrm{dB} \cdot \lg\left(\frac{2000\,\mathrm{mV}}{1\,\mathrm{mV}}\right) = \underline{\underline{66\,\mathrm{dB}}}$$

Aufgabe 11.50
Die Eingangsspannung einer Schaltung ist 12 V. Berechnen Sie die Dämpfung a_1 für eine Ausgangsspannung $U_\mathrm{a} = 8$ V und die Dämpfung a_2 für $U_\mathrm{a} = 20$ V.

Lösung

$$a_1 = 20\,\mathrm{dB} \cdot \lg\left(\frac{8\,\mathrm{V}}{12\,\mathrm{V}}\right) = \underline{\underline{-3{,}52\,\mathrm{dB}}}\text{; das Signal wird um 3,52 dB abgeschwächt.}$$
$$a_2 = 20\,\mathrm{dB} \cdot \lg\left(\frac{20\,\mathrm{V}}{12\,\mathrm{V}}\right) = \underline{\underline{+4{,}44\,\mathrm{dB}}}\text{; das Signal wird um 4,44 dB verstärkt.}$$

Aufgabe 11.51
Die Ausgangsspannung eines Vierpols beträgt 3 % der Eingangsspannung. Wie groß ist die Dämpfung a in dB?

Lösung

$$a = 20\,\mathrm{dB} \cdot \lg\left(\frac{3}{100}\right) = \underline{\underline{-30{,}46\,\mathrm{dB}}}$$

Leistung im Wechselstromkreis 12

Zusammenfassung

Es werden die verschiedenen Leistungsarten mit ihren Formel- und Einheitenzeichen eingeführt. Es folgen Berechnungen von Wirkleistung, Blindleistung und Scheinleistung sowie von Leistungsfaktoren und Wirkungsgraden von verschiedenen Verbrauchern in Wechselstromkreisen. Zur Blindleistungskompensation bei ohmsch-induktiven Verbrauchern werden benötigte Kapazitätswerte berechnet, um vorgegebene Leistungsfaktoren zu erreichen.

12.1 Grundwissen – kurz und bündig

- Ein ohmscher Widerstand ist ein Wirkwiderstand (Wärmewirkung, Wirkleistung).
- Die Wirkleistung am ohmschen Widerstand ist $P = U \cdot I$.
- Als Wirkleistung ist der zeitliche Mittelwert der Augenblicksleistung definiert.
- Ein idealer Kondensator und eine ideale Spule nehmen keine Wirkleistung, sondern nur eine Blindleistung auf.
- Formelzeichen Wirkleistung: P, Einheit: W (Watt).
- Formelzeichen Blindleistung: Q, Einheit: VAR oder var.
- Formelzeichen Scheinleistung: S, Einheit: V A.
- Wirkleistung P und Blindleistung Q einer Impedanz:

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi); \quad Q = U \cdot I \cdot \sin(\varphi)$$

- Definition der Scheinleistung: $S = U \cdot I$ ($U, I =$ Effektivwerte), $S = \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2}$
- Beziehungen zwischen Wirk- Blind- und Scheinleistung:

$$P = S \cdot \cos(\varphi); \quad Q = S \cdot \sin(\varphi); \quad S^2 = P^2 + Q^2$$

- Definition des Leistungsfaktors: $\cos(\varphi) = \frac{P}{S}$

L. Stiny, *Aufgabensammlung zur Elektrotechnik und Elektronik*,
DOI 10.1007/978-3-658-14381-7_12

- Mit einem Phasenschieberkondensator kann an einem ohmsch-induktiven Verbraucher eine Blindleistungskompensation erfolgen.
- $$C = \frac{P}{U^2 \cdot \omega}\left[\tan(\varphi) - \tan(\varphi_g)\right]$$

  P = Wirkleistung, U = Effektivspannung, φ = Phasenwinkel ohne C, φ_g = Phasenwinkel mit C.

12.2 Leistungsberechnungen, Blindleistungskompensation

Aufgabe 12.1
Die Nennleistung eines Elektromotors für Einphasen-Wechselstrom beträgt 370 Watt. Bei Nennlast nimmt der Motor am Stromnetz (230 V, 50 Hz) einen Strom von 4,2 A auf und hat einen Leistungsfaktor von $\cos(\varphi) = 0{,}8$. Berechnen Sie

a) die Scheinleistung S,
b) die aufgenommene Wirkleistung P,
c) die Blindleistung Q,
d) den Blindstrom I_b,
e) den Wirkungsgrad η.

Lösung
a) $S = U \cdot I = 230\,\text{V} \cdot 4{,}2\,\text{A} = \underline{\underline{966\,\text{V A}}}$
b) $P = S \cdot \cos(\varphi) = 966\,\text{V A} \cdot 0{,}8 = \underline{\underline{772{,}8\,\text{W}}}$
c) $\cos(\varphi) = 0{,}8 \Rightarrow \varphi = \arccos(0{,}8) = 36{,}9°;\ \sin(\varphi) = 0{,}6$
$Q = S \cdot \sin(\varphi) = 966\,\text{V A} \cdot 0{,}6 = \underline{\underline{579{,}6\,\text{var}}}$
d) $I_b = I \cdot \sin(\varphi) = 4{,}2\,\text{A} \cdot 0{,}6 = \underline{\underline{2{,}52\,\text{A}}}$
e) $\eta = \frac{370\,\text{W}}{772{,}8\,\text{W}} = \underline{\underline{0{,}48}}$

Aufgabe 12.2
Ein Verbraucher ist an die Netzwechselspannung mit $U = 230\,\text{V}$ angeschlossen. Es fließt ein Strom von $I = 5\,\text{A}$, U eilt I um $\varphi = 40°$ vor. Wie groß sind

a) Scheinleistung S,
b) Wirkleistung P,
c) Blindleistung Q,
d) Leistungsfaktor $\cos(\varphi)$?

Lösung
a) $S = U \cdot I = 230\,\text{V} \cdot 5\,\text{A} = \underline{\underline{1150\,\text{V A}}}$
b) $P = S \cdot \cos(\varphi) = 1150\,\text{V A} \cdot \cos(40°) = \underline{\underline{881\,\text{W}}}$

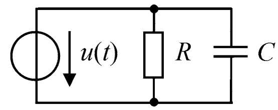


Abb. 12.1 Schaltung an der Netzwechselspannung

c) $Q = S \cdot \sin(\varphi) = 1150\,\mathrm{V\,A} \cdot \sin(40°) = \underline{\underline{739{,}2\,\mathrm{var}}}$

d) $\cos(\varphi) = \cos(40°) = \underline{\underline{0{,}766}}$

Aufgabe 12.3

Leiten Sie für Sinusform von Strom und Spannung und $\varphi_\mathrm{u} = \varphi_\mathrm{i} = 0$ die Formel $S = P = \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2} = U \cdot I$ her (S = Scheinleistung, P = Wirkleistung).

Lösung

Mit $\varphi_\mathrm{u} = \varphi_\mathrm{i} = 0$ sind $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t)$ und $i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t)$.

Die Augenblicksleistung ist $p(t) = u(t) \cdot i(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t) \cdot \hat{I} \cdot \sin(\omega t) = \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \sin^2(\omega t)$.

Die Wirkleistung P ist die mittlere Leistung (der zeitliche oder arithmetische Mittelwert der Augenblicksleistung). Die mittlere Leistung erhält man, indem über eine Periodendauer der Augenblicksleistung integriert und durch die Periodendauer T dividiert wird.

Mit $\sin^2(x) = \frac{1}{2} \cdot [1 - \cos(2x)]$, $\int \cos(ax)dx = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax)$, $x = \omega t$ folgt:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \sin^2(x)dx = \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^T [1 - \cos(2x)]\, dx$$

$$P = \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x - \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \sin(2x)}_{0} \right]_0^T = \underline{\underline{\frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2} = U \cdot I}}$$

Beim ohmschen Widerstand sind Wirkleistung P und Scheinleistung S gleich groß.

Aufgabe 12.4

Die Parallelschaltung eines Widerstandes $R = 40\,\Omega$ und eines Kondensators liegt an der Netzwechselspannung $u(t) = \sqrt{2} \cdot 230\,\mathrm{V} \cdot \sin(\omega t)$ mit $f = 50\,\mathrm{Hz}$ (Abb. 12.1). Der Leistungsfaktor der Schaltung ist $\cos(\varphi) = 0{,}6$.

a) Welches Bauelement nimmt ausschließlich Wirkleistung P auf und wie groß ist diese?
b) Wie groß ist die Scheinleistung S?
c) Wie groß ist die Blindleistung Q?
d) Wie groß ist der Blindstrom I_b, durch welches Bauelement fließt dieser?
e) Wie sieht qualitativ das Leistungszeigerdiagramm aus?

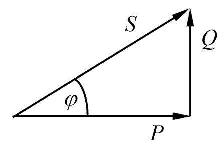


Abb. 12.2 Leistungszeigerdiagramm, geometrischer Zusammenhang der Leistungsarten

Lösung

a) Der ohmsche Widerstand nimmt ausschließlich Wirkleistung auf.

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{(230\,\text{V})^2}{40\,\Omega} = \underline{\underline{1322{,}5\,\text{W}}}$$

b)

$$P = S \cdot \cos(\varphi); \quad S = \frac{P}{\cos(\varphi)} = \frac{1322{,}5\,\text{W}}{0{,}6} = \underline{\underline{2204{,}17\,\text{V A}}}$$

c)

$$Q = S{\cdot}\sin(\varphi); \quad \varphi = \arccos(0{,}6) = 53{,}13^\circ; \quad Q = 2204{,}17\,\text{V A}{\cdot}0{,}8 = \underline{\underline{1763{,}34\,\text{var}}}$$

d)

$$Q = U \cdot I \cdot \sin(\varphi) = U \cdot I_\text{b}; \quad I_\text{b} = \frac{Q}{U} = \frac{1763{,}34\,\text{var}}{230\,\text{V}} = \underline{\underline{7{,}67\,\text{A}}}$$

Der Blindstrom fließt durch den Kondensator C.

e) Das Leistungszeigerdiagramm zeigt Abb. 12.2.

Aufgabe 12.5

Einem Wechselstromnetz mit dem Effektivwert $U = 230\,\text{V}$ Sinusspannung wird eine Wirkleistung $P = 9{,}2\,\text{kW}$ entnommen.

a) Die Blindleistung sei null. Berechnen Sie den Effektivwert I und die Amplitude $\hat{I}$ des Stromes.
b) Die Blindleistung sei $Q = 6{,}9\,\text{kVAR}$. Berechnen Sie die Scheinleistung S und die Werte von I, $\hat{I}$, $\cos(\varphi)$ und φ (die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom).

Lösung

a) Zwischen Scheinleistung S, Wirkleistung P und Blindleistung Q besteht die Beziehung $S^2 = P^2 + Q^2$. Außerdem ist die Scheinleistung das Produkt aus Effektivspannung und Effektivstrom: $S = U \cdot I$. Mit $Q = 0$ folgt: $S = P$ bzw. $I = \frac{P}{U}$.

$$I = \frac{9200\,\text{W}}{230\,\text{V}} = \underline{\underline{40\,\text{A}}}; \quad \text{wegen der Sinusform ist } \hat{I} = I \cdot \sqrt{2} = \underline{\underline{56{,}6\,\text{A}}}$$

b)

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{9{,}2^2 + 6{,}9^2}\,\text{kV A} = \underline{\underline{11{,}5\,\text{kV A}}};$$

$$I = \frac{S}{U} = \frac{11{,}5 \cdot 10^3\,\text{V A}}{230\,\text{V}} = \underline{\underline{50\,\text{A}}}$$

$$\hat{I} = I \cdot \sqrt{2} = \underline{\underline{70{,}7\,\text{A}}}; \quad \cos(\varphi) = \frac{P}{S} = \frac{9{,}2}{11{,}5} = \underline{\underline{0{,}8}};$$

$$\varphi = \arccos(0{,}8) = 0{,}64 = \underline{\underline{36{,}9^\circ}}$$

Aufgabe 12.6

Eine Blindleistung von 1 kvar soll kompensiert werden. Die Netzspannung ist 230 V, 50 Hz. Berechnen Sie die Kapazität des Kondensators.

Lösung

$$C = \frac{Q_C}{\omega \cdot U^2} = \frac{1000\,\text{var}}{2\pi \cdot 50\,\text{s}^{-1} \cdot (230\,\text{V})^2} = \underline{\underline{60\,\mu\text{F}}}$$

Aufgabe 12.7

Die Wirkleistungsaufnahme einer Leuchtstofflampe 230 V, 65 W beträgt mit Drosselspule 81 Watt. In der Zuleitung fließt ein Strom von 0,7 A. Durch Parallelkompensation soll der Leistungsfaktor auf 0,95 gebracht werden. Welche Kapazität ist hierzu erforderlich?

Lösung

Phasenwinkel φ_1 ohne Kondensator:

$$\cos(\varphi_1) = \frac{P}{U \cdot I} = \frac{81\,\text{W}}{230\,\text{V} \cdot 0,7\,\text{A}} = 0{,}5; \quad \varphi_1 = 60^\circ$$

Phasenwinkel φ_2 mit Kondensator:

$$\cos(\varphi_2) = 0{,}95; \quad \varphi_2 = 18{,}2^\circ$$

$$Q_C = P \cdot (\tan(\varphi_1) - \tan(\varphi_2)) = 81\,\text{W} \cdot (1{,}73 - 0{,}33) = 113{,}4\,\text{var}$$

$$C = \frac{Q_C}{\omega \cdot U^2} = \frac{113{,}4}{2\pi \cdot 50 \cdot 230^2}\,\text{F} = \underline{\underline{6{,}8\,\mu\text{F}}}$$

Aufgabe 12.8

Eine Leuchtstofflampe mit $U = 230$ V, 25 W nimmt bei einem Leistungsfaktor $\cos(\varphi) = 0{,}48$ einen Betriebsstrom von $I = 0{,}3$ A auf. Der Lampe wird ein Kondensator $C = 3{,}8\,\mu$F parallel geschaltet. Berechnen Sie

a) die Leistungsaufnahme P der Lampe,
b) die Blindleistung Q_C des Kondensators,
c) den Leistungsfaktor $\cos(\varphi_2)$ nach der Kompensation,
d) den Strom I_2 nach der Kompensation.

Lösung

a)

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) = 230\,\text{V} \cdot 0{,}3\,\text{A} \cdot 0{,}48 = \underline{\underline{33{,}1\,\text{W}}}$$

b)

$$Q_\text{C} = \omega C U^2 = 2\pi \cdot 50 \cdot 3{,}8 \cdot 10^{-6} \cdot 230^2\,\text{var} = \underline{\underline{63{,}2\,\text{var}}}$$

c)

$$\varphi_1 = \arccos(0{,}48) = 61{,}32°$$
$$\tan(\varphi_2) = \frac{P \cdot \tan(\varphi_1) - Q_\text{C}}{P} = \frac{33{,}1\,\text{W} \cdot 1{,}828 - 63{,}2\,\text{var}}{33,1\,\text{W}} = -0{,}081$$
$$\varphi_2 = \arctan(-0{,}081) = -4{,}63°; \quad \underline{\underline{\cos(\varphi_2) = 0{,}997}}$$

d)

$$I_2 = \frac{P}{U \cdot \cos(\varphi_2)} = \frac{33{,}1}{230 \cdot 0{,}997}\,\text{A} = \underline{\underline{0{,}144\,\text{A}}}$$

Aufgabe 12.9

Zwei induktive Verbraucher werden an der Netzspannung der öffentlichen Spannungsversorgung betrieben. Die Daten der Netzspannung sind $U = 230\,\text{V}$, $f = 50\,\text{Hz}$.

Von Verbraucher 1 ist bekannt: $P_1 = 1{,}8\,\text{kW}$, $\cos(\varphi_1) = 0{,}6$.

Von Verbraucher 2 ist bekannt: $P_2 = 1{,}2\,\text{kW}$, $Q_2 = 1{,}6\,\text{kvar}$.

a) Welche Blindleistung entnimmt Verbraucher 1 aus dem Netz?
b) Wie groß sind Wirk- und Blindleistung, die beide Verbraucher zusammen aus dem Netz beziehen?

Lösung

a) Die Beziehung zwischen Wirk- und Scheinleistung ist $P = S \cdot \cos(\varphi)$. Die Beziehung zwischen Schein-, Wirk- und Blindleistung ist $S^2 = P^2 + Q^2$. Damit folgt für die Blindleistung in Verbraucher 1:

$$Q_1 = \sqrt{S_1^2 - P_1^2} = \sqrt{\frac{P_1^2}{[\cos(\varphi_1)]^2} - P_1^2} = P_1 \sqrt{\frac{1}{[\cos(\varphi_1)]^2} - 1} = \underline{\underline{2400\,\text{var}}}$$

b) Beide Verbraucher verbrauchen induktive Blindleistung. Die Gesamtleistung erhält man durch Addition sowohl der Wirkleistungen als auch der Blindleistungen.

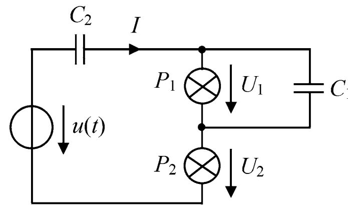
$$P = P_1 + P_2 = \underline{\underline{3\,\text{kW}}}; \quad Q = Q_1 + Q_2 = \underline{\underline{4\,\text{kvar}}}$$

Aufgabe 12.10

Ein Elektromotor wird an einer gemessenen Spannung $U = 225\,\text{V}$ betrieben. Die Frequenz beträgt $50\,\text{Hz}$. Der Strom durch den Motor eilt der Spannung nach und wird zu $I = 10\,\text{A}$ gemessen, die gemessene Leistungsaufnahme beträgt $P = 1800$ Watt.

Wie groß ist der Leistungsfaktor $\cos(\varphi)$?

Abb. 12.3 Schaltung mit Glühlampen



Lösung

Der Leistungsfaktor ist definiert als $\cos(\varphi) = \frac{P}{S}$, P = Wirkleistung, S = Scheinleistung.

Die Scheinleistung ist $S = U \cdot I$, U und I sind Effektivwerte von Spannung und Strom. Der $\cos(\varphi)$ ist hier also:

$$\cos(\varphi) = \frac{P}{U \cdot I} = \frac{1800\,\text{W}}{225 \cdot 10\,\text{V A}} = \underline{\underline{0{,}8}}$$

Aufgabe 12.11

Gegeben ist die Schaltung Abb. 12.3.

$u(t) = \sqrt{2} \cdot 230\,\text{V} \cdot \sin(2\pi \cdot 50\,\text{s}^{-1} \cdot t)$ ist die Netzwechselspannung.

C_1, C_2 sind so dimensioniert, dass jede Glühlampe an $U_1 = U_2 = 115\,\text{V}$ liegt. Bei dieser Spannung werden von den Lampen die Leistungen $P_1 = 60\,\text{W}$ und $P_2 = 100\,\text{W}$ aufgenommen.

a) Wie groß ist der Strom I?
b) Welche Scheinleistung wird der Spannungsquelle entnommen?
c) Wie lauten die Formeln zur Ermittlung der Scheinleistung S_1 und der Wirkleistung P_1 des Parallelzweiges?
d) Berechnen Sie die Blindleistung Q_1 des Parallelzweiges.
e) Berechnen Sie die Größe von C_1.

Lösung

a) $I = \frac{P_2}{U_2} = \frac{100\,\text{W}}{115\,\text{V}} = \underline{\underline{0{,}87\,\text{A}}}$

b) $S = U_1 \cdot I + U_2 \cdot I$; $U_1 = U_2 = 115\,\text{V}$; $S = 2 \cdot 115\,\text{V} \cdot 0{,}87\,\text{A} = \underline{\underline{200{,}1\,\text{V A}}}$

c) Scheinleistung: $\underline{\underline{S_1 = U_1 \cdot I}}$; $P_2 = U_2 \cdot I$; da $U_1 = U_2$ folgt: $P_2 = S_1$.

Mit $S_1 = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2}$ folgt: $P_2 = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2}$; Wirkleistung: $\underline{\underline{P_1 = \sqrt{P_2^2 - Q_1^2}}}$

d) $Q_1 = \sqrt{P_2^2 - P_1^2} = \underline{\underline{80\,\text{var}}}$

e)

$$Q_1 = \frac{U_1^2}{\frac{1}{\omega C_1}}; \quad C_1 = \frac{Q_1}{U_1^2 \cdot \omega}; \quad C_1 = \frac{80\,\text{VAR}}{(115\,\text{V})^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50\,\text{Hz}} = \underline{\underline{19{,}3\,\mu\text{F}}}$$

Aufgabe 12.12
Eine induktive Last mit dem Leistungsfaktor $\cos(\varphi) = 0{,}7$ verbraucht 2 kW am 230 Volt Stromnetz. Die Ersatzschaltung der Last ist eine Reihenschaltung eines ohmschen Widerstandes mit dem Wert R und einer idealen Induktivität mit dem Blindwiderstand X.

a) Bestimmen Sie R und X und geben Sie den komplexen Widerstand $\underline{Z}_L$ der Last an.
b) Das Stromnetz habe den komplexen Innenwiderstand $\underline{Z}_\mathrm{N} = (0{,}4 + j\,0{,}25)\,\Omega$. Wie groß ist der Strom I, wenn die Last eingeschaltet wird?
c) Der Leistungsfaktor soll durch Parallelschalten eines Kondensators C zur Last auf $\cos(\varphi_\mathrm{g}) = 1$ erhöht werden (Blindleistungskompensation). Welchen Wert muss C haben?

Lösung
a) Die Scheinleistung ist $S = \frac{P}{\cos(\varphi)} = \frac{2000\,\mathrm{W}}{0{,}7} = 2857\,\mathrm{V\,A}$.
Der Effektivwert des Stromes ist $I = \frac{S}{U} = \frac{2857\,\mathrm{V\,A}}{230\,\mathrm{V}} = 12{,}42\,\mathrm{A}$.
Der Wirkwiderstand R ist somit $R = \frac{P}{I^2} = \frac{2000\,\mathrm{W}}{(12{,}42\,\mathrm{A})^2} = \underline{\underline{12{,}97\,\Omega}}$.
Die Blindleistung ist $Q = S \cdot \sin(\varphi) = S \cdot \sqrt{1 - [\cos(\varphi)]^2} = 2857 \cdot \sqrt{1 - 0{,}7^2} = 2040{,}3\,\mathrm{var}$.
Der Blindwiderstand X ist $X = \frac{Q}{I^2} = \frac{2040{,}3\,\mathrm{var}}{(12{,}42\,\mathrm{A})^2} = \underline{\underline{13{,}23\,\Omega}}$.

$$\underline{Z}_\mathrm{L} = R + jX; \quad \underline{\underline{\underline{Z}_\mathrm{L} = (12{,}97 + j13{,}23)\,\Omega}}$$

b) Die Widerstände von Stromnetz und Last addieren sich.

$$\underline{Z} = \underline{Z}_\mathrm{L} + \underline{Z}_\mathrm{N} = (12{,}97 + j13{,}23)\,\Omega + (0{,}4 + j\,0{,}25)\,\Omega = (13{,}37 + j13{,}48)\,\Omega$$

$$|\underline{Z}| = \sqrt{13{,}37^2 + 13{,}48^2}\,\Omega = 18{,}99\,\Omega; \quad I = \frac{230\,\mathrm{V}}{18{,}99\,\Omega} = \underline{\underline{12{,}11\,\mathrm{A}}}$$

c) Die Formel für C lautet: $C = \frac{P}{U^2 \cdot \omega}\left[\tan(\varphi) - \tan(\varphi_\mathrm{g})\right]$
P = Wirkleistung, U = Effektivspannung, φ = Phasenwinkel ohne C, φ_g = Phasenwinkel mit C.
Aus $\cos(\varphi) = 0{,}7$ folgt $\varphi = \arccos(0{,}7) = 45{,}57°$. Aus $\cos(\varphi_\mathrm{g}) = 1$ folgt $\varphi_\mathrm{g} = 0°$.

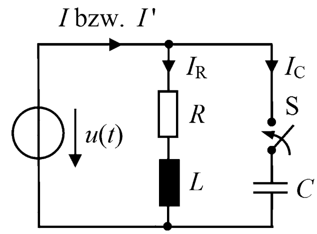
$$\tan(45{,}57°) - \tan(0°) = 1{,}02; \quad C = \frac{2000}{230^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50} \cdot 1{,}02\,\mathrm{F}; \quad \underline{\underline{C = 122{,}7\,\mu\mathrm{F}}}$$

Aufgabe 12.13
Der ohmsch-induktive Verbraucher in Abb. 12.4 nimmt eine Wirkleistung von $P = 1000\,\mathrm{W}$ auf. Der Leistungsfaktor bei geöffnetem Schalter S ist $\cos(\varphi) = 0{,}8$.

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot 230\,\mathrm{V} \cdot \sin(2\pi \cdot 50\,\mathrm{s}^{-1} \cdot t) \text{ ist die Netzwechselspannung.}$$

Der von der Spannungsquelle gelieferte Gesamtstrom wird bei geöffnetem Schalter S als I und bei geschlossenem Schalter S als I' bezeichnet.

Abb. 12.4 Blindleistungskompensation



a) Wie groß ist der Strom I bei geöffnetem Schalter S?
b) Berechnen Sie den Wert des ohmschen Widerstandes R.
c) Der $\cos(\varphi)$ soll durch das Zuschalten von C auf $\cos(\varphi') = 0{,}98$ verbessert werden (Blindstrom- bzw. Blindleistungskompensation). Wie groß ist der Strom I' bei geschlossenem Schalter S? Um welchen Betrag ΔQ verringert sich die aufgenommene Blindleistung durch das Schließen des Schalters S?
d) Wie groß muss C für diese Verbesserung des Leistungsfaktors gewählt werden?
e) Geben Sie die Größe der Induktivität L an.
f) Zeichnen Sie qualitativ das Zeigerdiagramm der Größen U, I, I', I_R, I_C.

Lösung

a)

$$I = \frac{P}{U \cdot \cos(\varphi)} = \frac{1000\,\text{W}}{230\,\text{V} \cdot 0{,}8} = \underline{\underline{5{,}44\,\text{A}}}$$

b)

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{1000\,\text{W}}{(5{,}44\,\text{A})^2} = \underline{\underline{33{,}8\,\Omega}}$$

c)

$$I' = \frac{P}{U \cdot \cos(\varphi')} = \frac{1000\,\text{W}}{230\,\text{V} \cdot 0{,}98} = \underline{\underline{4{,}44\,\text{A}}}$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi); \quad Q = U \cdot I \cdot \sin(\varphi) = \frac{P}{\cos(\varphi)} \cdot \sin(\varphi) = P \cdot \tan(\varphi)$$

$$\Delta Q = P \cdot [\tan(\varphi) - \tan(\varphi')]$$

$$\varphi = \arccos(0{,}8) = 36{,}87°; \quad \varphi' = \arccos(0{,}98) = 11{,}48°$$

$$\Delta Q = 1000\,\text{W} \cdot (0{,}75 - 0{,}20) = \underline{\underline{550\,\text{var}}}$$

d)

$$Q_C = \frac{U^2}{\frac{1}{\omega C}}; \quad C = \frac{Q_C}{U^2 \cdot \omega}; \quad C = \frac{550\,\text{var}}{(230\,\text{V})^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50\,\text{Hz}} = \underline{\underline{33{,}1\,\mu\text{F}}}$$

e) Ohne C: $Q_L = P \cdot \tan(\varphi) = 1000\,\text{W} \cdot \tan(36,87°) = 750\,\text{var}$; $Q_L = I^2 \cdot \omega L$; $L = \frac{Q_L}{I^2 \cdot \omega}$

$$L = \frac{750\,\text{var}}{(5{,}44\,\text{A})^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50\,\text{Hz}} = \underline{\underline{80{,}7\,\text{mH}}}$$

f) Das zugehörige Zeigerdiagramm zeigt Abb. 12.5.

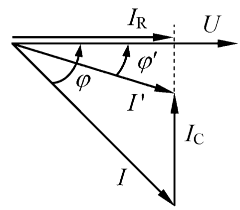


Abb. 12.5 Zeigerdiagramm zur Blindleistungskompensation

► **Anmerkung zur Vorgehensweise bei Teilaufgabe c)**

Aus dem Zeigerdiagramm geht hervor: Durch Zuschalten von C nimmt der Betrag des von der Spannungsquelle gelieferten Stromes von I auf I' ab, es ergibt sich eine kleinere Zeigerlänge. Der Strom in der Zuleitung wird also kleiner, dies ist ja der Zweck der Blindleistungskompensation. Der Strom I_R durch den Verbraucher bleibt aber gleich, damit bleibt auch die *Wirk*leistung P im Verbraucher gleich.

Mit $\Delta Q = P \cdot [\tan(\varphi) - \tan(\varphi')]$ kann also gerechnet werden (gleichbleibende Wirkleistung bei unterschiedlichen Phasenwinkeln). Falsch ist der Ansatz:

$$\Delta Q = Q_1 - Q_2 = U \cdot I \cdot \sin(\varphi) - U \cdot I \cdot \sin(\varphi') = U \cdot I \left[\sin(\varphi) - \sin(\varphi')\right]$$

Hier werden unterschiedliche Phasenwinkel einem einzigen Strom zugeordnet.

Aufgabe 12.14

Ein Elektromotor nimmt bei $U = 230\,\text{V}$ eine Wirkleistung $P = 1500\,\text{W}$ auf, der Leistungsfaktor ist dabei $\cos(\varphi) = 0{,}78$. Wie groß sind Motorstrom I, Blindleistung Q, Scheinleistung S und Scheinwiderstand Z des Motors?

Lösung

$$S = \frac{P}{\cos(\varphi)}; \quad S = \frac{1500\,\text{W}}{0{,}78} = \underline{\underline{1923\,\text{V A}}}; \quad I = \frac{S}{U} = \frac{1923\,\text{V A}}{230\,\text{V}} = \underline{\underline{8{,}36\,\text{A}}}$$

$$Q = S \cdot \sin[\arccos(0{,}78)] = \underline{\underline{1203\,\text{var}}} \text{ oder } Q = P \cdot \tan[\arccos(\varphi)] = \underline{\underline{1203\,\text{var}}}$$

$$Z = \frac{U}{I} = \underline{\underline{27{,}5\,\Omega}}$$

Aufgabe 12.15

Ein Elektromotor hat eine aufgenommene Leistung von $P = 100\,\text{W}$ und einen Leistungsfaktor von $\cos(\varphi) = 0{,}8$.

a) Wie groß sind Scheinleistung S und Blindleistung Q?
b) Welchen Kapazitätswert muss ein Kondensator haben, der für eine vollständige Blindleistungskompensation bei einer Speisespannung von 400 V, 50 Hz zum Motor parallel geschaltet wird?

Lösung

a)

$$S = \frac{P}{\cos(\varphi)} = \frac{100\,\text{W}}{0{,}8} = \underline{\underline{125\,\text{V A}}}; \quad Q = S \cdot \sin(\arccos(0{,}8)) = \underline{\underline{75\,\text{var}}}$$

b)

$$C = \frac{P \cdot \tan(\varphi)}{\omega \cdot U^2} = \frac{100\,\text{W} \cdot \tan(\arccos(0{,}8))}{2 \cdot \pi \cdot 50\,\text{s}^{-1} \cdot (400\,\text{V})^2} = 1{,}49 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V}} = \underline{\underline{1{,}5\,\mu\text{F}}}$$

Aufgabe 12.16

Ein Einphasen-Wechselstrommotor hat eine Nennleistung (abgegebene mechanische Leistung) von $P_\text{N} = 2{,}2\,\text{kW}$. Sein Wirkungsgrad beträgt $\eta = 0{,}88$, sein Leistungsfaktor ist $\cos(\varphi = 0{,}81)$. Der Betrieb erfolgt am Wechselstromnetz mit $U = 230\,\text{V}$, $f = 50\,\text{Hz}$.

a) Welchen Strom I nimmt der Motor auf?

b) Durch einen parallel zum Motor geschalteten Kondensator zur Blindleistungskompensation soll der Leistungsfaktor auf $\cos(\varphi') = 0{,}92$ verbessert werden. Welchen Kapazitätswert muss der Kondensator haben? Welchen Strom I' nimmt dann der Motor auf?

Lösung

a) Die vom Motor aufgenommene elektrische Leistung ist:

$$P = \frac{P_\text{N}}{\eta} = \frac{2{,}2\,\text{kW}}{0{,}88} = 2{,}5\,\text{kW}. \text{ Der Strom folgt aus } P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi):$$

$$I = \frac{P}{U \cdot \cos(\varphi)} = \frac{2{,}5 \cdot 10^3\,\text{W}}{230\,\text{V} \cdot 0{,}81} = \underline{\underline{13{,}4\,\text{A}}}$$

b)

$$C = \frac{P \cdot [\tan(\varphi) - \tan(\varphi')]}{\omega \cdot U^2}$$

$$C = \frac{2{,}5 \cdot 10^3\,\text{W} \cdot [\tan(\arccos(0{,}81)) - \tan(\arccos(0{,}92))]}{2 \cdot \pi \cdot 50\,\text{s}^{-1} \cdot (230\,\text{V})^2} = 44{,}8 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V}}$$

$$= \underline{\underline{44{,}8\,\mu\text{F}}}$$

$$I' = \frac{P}{U \cdot \cos(\varphi')} = \frac{2{,}5 \cdot 10^3\,\text{W}}{230\,\text{V} \cdot 0{,}92} = \underline{\underline{11{,}8\,\text{A}}}$$

Aufgabe 12.17

Ein ohmsch-induktiver Verbraucher wird durch die in Abb. 12.6 angegebene Ersatzschaltung beschrieben. Der Verbraucher entnimmt dem Wechselstromnetz mit $U = 230\,\text{V}$, $f = 50\,\text{Hz}$ die Wirkleistung $P = 2{,}0\,\text{kW}$. Der Leistungsfaktor ist $\cos(\varphi) = 0{,}5$.

a) Wie groß sind Scheinleistung S und Blindleistung Q?

b) Wie groß ist der Strom I?

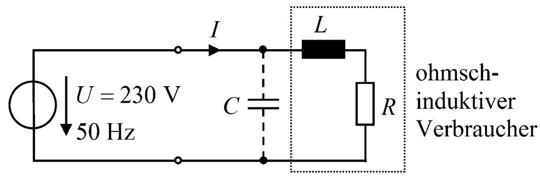


Abb. 12.6 Ersatzschaltung eines ohmsch-induktiven Verbrauchers

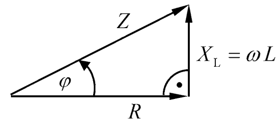


Abb. 12.7 Widerstandsdreieck mit Wirk- und Blindwiderstand

c) Berechnen Sie die Werte von R und L.

d) Durch einen parallel zum Motor geschalteten Kondensator zur Blindleistungskompensation soll der Leistungsfaktor auf $\cos(\varphi') = 0{,}92$ verbessert werden. Welchen Kapazitätswert muss der Kondensator haben? Welchen Strom I' nimmt dann der Motor auf?

Lösung

a)

$$S = \frac{P}{\cos(\varphi)} = \frac{2{,}0\,\mathrm{kW}}{0{,}5} = \underline{\underline{4000\,\mathrm{V\,A}}}$$

$$Q = P \cdot \tan(\arccos(\varphi)) = 2000\,\mathrm{W} \cdot \tan(\arccos(0{,}5)) = \underline{\underline{3464\,\mathrm{var}}}$$

oder

$$Q = S \cdot \sin(\arccos(\varphi)) = 4000\,\mathrm{V\,A} \cdot \sin(\arccos(0{,}5)) = \underline{\underline{3464\,\mathrm{var}}}$$

b)

$$I = \frac{P}{U \cdot \cos(\varphi)} = \frac{2000\,\mathrm{W}}{230\,\mathrm{V} \cdot 0{,}5} = \underline{\underline{17{,}4\,\mathrm{A}}}$$

c) Wie im Widerstandsdreieck Abb. 12.7 ersichtlich, addieren sich Wirkwiderstand R und induktiver Blindwiderstand $X_\mathrm{L} = \omega L$ geometrisch zum Scheinwiderstand Z. Der Scheinwiderstand ist:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{230\,\mathrm{V}}{17{,}4\,\mathrm{A}} = 13{,}2\,\Omega\,.$$

Der Phasenverschiebungswinkel φ ist: $\varphi = \arccos(0{,}5) = 60°$.

Die Komponenten R und $X_\mathrm{L} = \omega L$ können mit Hilfe der Winkelbeziehungen bestimmt werden.

$$R = Z \cdot \cos(60°) = 13{,}2\,\Omega \cdot 0{,}5\,\Omega = \underline{\underline{6{,}6\,\Omega}}$$

$$\omega L = Z \cdot \sin(60°) = 13{,}2\,\Omega \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 11{,}4\,\Omega$$

$$L = \frac{11{,}4\,\Omega}{2 \cdot \pi \cdot 50\,\mathrm{s}^{-1}} = \underline{\underline{36{,}3\,\mathrm{mH}}}$$

Abb. 12.8 Ein ohmsch-induktiver Verbraucher

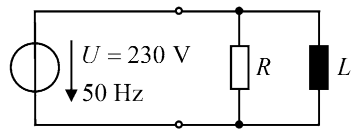
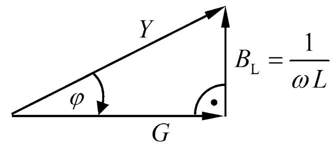


Abb. 12.9 Leitwertdreieck



d)

$$C = \frac{P \cdot [\tan(\varphi) - \tan(\varphi')]}{\omega \cdot U^2}$$

$$C = \frac{2000\,\mathrm{W} \cdot [\tan(\arccos(0{,}5)) - \tan(\arccos(0{,}92))]}{2 \cdot \pi \cdot 50\,\mathrm{s}^{-1} \cdot (230\,\mathrm{V})^2} = 157 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}}{\mathrm{V}} = \underline{\underline{157\,\mu\mathrm{F}}}$$

$$I' = \frac{P}{U \cdot \cos(\varphi')} = \frac{2000\,\mathrm{W}}{230\,\mathrm{V} \cdot 0{,}92} = \underline{\underline{9{,}5\,\mathrm{A}}}$$

Aufgabe 12.18

Ein ohmsch-induktiver Verbraucher wird durch die in Abb. 12.8 angegebene Ersatzschaltung beschrieben. Der Verbraucher entnimmt dem Wechselstromnetz mit $U = 230\,\mathrm{V}$, $f = 50\,\mathrm{Hz}$ die Wirkleistung $P = 600\,\mathrm{W}$. Der Leistungsfaktor ist $\cos(\varphi) = 0{,}8$.

a) Wie groß sind Scheinleistung S und Blindleistung Q?
b) Berechnen Sie die Werte von R und L.

Lösung

a)

$$S = \frac{P}{\cos(\varphi)} = \frac{600\,\mathrm{W}}{0{,}8} = \underline{\underline{750\,\mathrm{V\,A}}}$$

$$Q = S \cdot \sin(\varphi) = S \cdot \sin(\arccos(\varphi)) = 750\,\mathrm{V\,A} \cdot \frac{3}{5} = \underline{\underline{450\,\mathrm{var}}}$$

b) Im Leitwertdreieck Abb. 12.9 addieren sich Wirkleitwert G und induktiver Blindleitwert $B_\mathrm{L} = \frac{1}{\omega L}$ geometrisch zum Scheinleitwert Y. Der Scheinleitwert ist:

$$Y = \frac{I}{U}; \quad I = \frac{P}{U \cdot \cos(\varphi)}; \quad Y = \frac{P}{U^2 \cdot \cos(\varphi)} = 1{,}42 \cdot 10^{-2}\,\frac{1}{\Omega}$$

Aus den Winkelbeziehungen folgt:

$$G = Y \cdot \cos(\varphi); \quad R = \frac{1}{G} = \frac{1}{Y \cdot \cos(\varphi)} = \frac{1}{1{,}42 \cdot 10^{-2}\,\frac{1}{\Omega} \cdot 0{,}8} = \underline{\underline{88\,\Omega}};$$

$$\frac{1}{\omega L} = Y \cdot \sin(\varphi)$$

$$L = \frac{1}{\omega \cdot Y \cdot \sin(\varphi)} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 50\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 1{,}42 \cdot 10^{-2}\,\frac{1}{\Omega} \cdot \sin\left(\arccos(0{,}8)\right)} = \underline{\underline{0{,}37\,\mathrm{H}}}$$

Transformatoren (Übertrager) 13

Zusammenfassung

Begonnen wird mit einfachen Berechnungen beim idealen Transformator bzw. Übertrager ohne Verluste. Durch die Einführung der Gegeninduktivität und des Kopplungsfaktors wird das Ersatzschaltbild des Transformators vollständiger. Aus Messungen bei Leerlauf und Kurzschluss ergeben sich die Bedeutung spezieller Betriebsarten. Die Betrachtung verschiedener Verlustarten und die Änderung von Parametern in Abhängigkeit der Temperatur ergeben ergänzende Berechnungen.

13.1 Grundwissen – kurz und bündig

- Ein Transformator beruht auf dem Prinzip magnetisch gekoppelter Spulen. Er besteht aus Primär- und Sekundärwicklung, welche fest (Eisenkern) oder lose gekoppelt sind.
- Je nach Einsatz spricht man vom Transformator (Energieübertragung) oder Übertrager (Nachrichtentechnik).
- Die Polarität der Ausgangsspannung ist vom Windungssinn der Primär- und Sekundärwicklung abhängig.
- Für den idealen Übertrager gelten folgende Formeln:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = ü; \quad \frac{U_1}{U_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = ü; \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{ü};$$

$$R_1 = ü^2 \cdot R_2 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \cdot R_2; \quad ü = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$$

- Beim Übertrager mit Streuung besteht zwischen der Gegeninduktivität und dem Kopplungsfaktor die Beziehung: $M = k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2}$
- Definition des Streufaktors: $\sigma = 1 - k^2 = 1 - \frac{M^2}{L_1 \cdot L_2}$

L. Stiny, *Aufgabensammlung zur Elektrotechnik und Elektronik*,
DOI 10.1007/978-3-658-14381-7_13

- Ein realer Übertrager bildet einen Bandpass, tiefe und hohe Frequenzen werden gedämpft, während mittlere Frequenzen fast ungedämpft übertragen werden.
- Transformatorenhauptgleichung: $U_1 = 4{,}44 \cdot N_1 \cdot f \cdot \hat{B} \cdot A_{\text{Fe}}$, $U_2 = 4{,}44 \cdot N_2 \cdot f \cdot \hat{B} \cdot A_{\text{Fe}}$
- Transformation der sekundärseitigen Abschlussimpedanz auf die Primärseite: $\underline{Z}_1 = ü^2 \cdot \underline{Z}_2$
- Transformatorverluste teilt man ein in Kupferverluste (Wicklungsverluste) und Eisenverluste (Kernverluste).
- Die Eisenverluste werden Wirbelstromverluste, Hystereseverluste und in Streuverluste unterteilt.
- Im Ersatzschaltbild des Transformators werden Kupferverluste durch ohmsche Widerstände in Reihe zu Primär- und Sekundärspule berücksichtigt.
- Eisenverluste (Wirbelstrom-, Hysterese- und Streuverluste) werden im Ersatzschaltbild des Transformators durch einen Widerstand R_{Fe} repräsentiert.
- Das M-Ersatzschaltbild wird häufig für den verlustlosen Übertrager mit kleiner Streuung eingesetzt.
- Das L_σ-Ersatzschaltbild wird bei hohen Spannungen und großen Streuungen verwendet.
- Im Ersatzschaltbild des Transformators werden sekundärseitige Größen häufig auf die Primärseite umgerechnet.
- Das vollständige Ersatzschaltbild des realen Transformators wird häufig benutzt. Die Elemente dieses Ersatzschaltbildes können durch Messungen (Leerlaufversuch und Kurzschlussversuch) bestimmt werden.
- Leerlaufversuch: Messung von Eingangsstrom (Leerlaufstrom) I_{10} und der primärseitig aufgenommenen Wirkleistung (Leerlaufwirkleistung) P_{10}. Die gemessene Leerlaufwirkleistung P_{10} entspricht ungefähr den Eisenverlusten. Bestimmung von Eisenverlustwiderstand R_{Fe} und Blindwiderstand X_{h} der Hauptinduktivität.
- Durch die Eisenverluste bedingter Strom: $I_{\text{Fe}} = \frac{P_{10}}{U_{1\text{N}}}$.
- Ersatzwiderstand R_{Fe} zur Berücksichtigung der Eisenverluste:

$$R_{\text{Fe}} = \frac{U_{1\text{N}}}{I_{\text{Fe}}} = \frac{U_{1\text{N}}^2}{P_{10}}.$$

- Blindwiderstand X_{h} der Hauptinduktivität:

$$X_{\text{h}} = \omega \cdot L_{\text{h}} = \frac{U_{1\text{N}}}{I_{\mu}} = \frac{U_{1\text{N}}^2}{Q_{10}}, \quad X_{\text{h}} = \frac{U_{1\text{N}}^2}{Q_{10}} = \frac{U_{1\text{N}}^2}{\sqrt{S_{10}^2 - P_{10}^2}} = \frac{U_{1\text{N}}^2}{\sqrt{(U_{1\text{N}} \cdot I_{10})^2 - P_{10}^2}}.$$

- Primärinduktivität: $L_1 = \frac{U_{1\text{N}}}{\omega \cdot I_{\mu}}$.
- Leerlaufleistungsfaktor:

$$\cos(\varphi_{10}) = \frac{P_{10}}{S_{10}} = \frac{P_{10}}{U_{1\text{N}} \cdot I_{10}} = \frac{I_{\text{Fe}}}{I_{10}}.$$

- Mögliche Darstellungen der Größen mit dem Leerlaufleistungsfaktor:

$$R_{\mathrm{Fe}} = \frac{U_{1\mathrm{N}}}{I_{10} \cdot \cos(\varphi_{10})}, \quad X_{\mathrm{h}} = \frac{U_{1\mathrm{N}}}{I_{10} \cdot \sin(\varphi_{10})}, \quad I_{\mathrm{Fe}} = I_{10} \cdot \cos(\varphi_{10}),$$
$$I_{\mu} = I_{10} \cdot \sin(\varphi_{10}), \quad P_{10} = P_{\mathrm{Fe}} = U_{1\mathrm{N}} \cdot I_{10} \cdot \cos(\varphi_{10})$$

- Kurzschlussversuch: Primärseitige Messung der Kurzschlussspannung $U_{1\mathrm{K}}$, des Kurzschlussstromes $I_{1\mathrm{N}} = I_{1\mathrm{K}}$ und der aufgenommenen Kurzschlusswirkleistung $P_{1\mathrm{K}}$. Bestimmung der Wicklungswiderstände der Drähte und der Blindwiderstände der Streuinduktivitäten.
- Kurzschlussleistungsfaktor:

$$\cos(\varphi_{1\mathrm{K}}) = \frac{P_{1\mathrm{K}}}{U_{1\mathrm{K}} \cdot I_{1\mathrm{N}}} = \frac{R_{\mathrm{K}} \cdot I_{1\mathrm{N}}^2}{U_{1\mathrm{K}} \cdot I_{1\mathrm{N}}} = \frac{R_{\mathrm{K}}}{U_{1\mathrm{K}}/I_{1\mathrm{N}}} = \frac{U_{\mathrm{R}}}{U_{1\mathrm{K}}} = \frac{R_{\mathrm{K}}}{Z_{1\mathrm{K}}}.$$

- Relative Kurzschlussspannung: $u_{\mathrm{K}} = \frac{U_{1\mathrm{K}}}{U_{1\mathrm{N}}} \cdot 100\,\%$.
- Kurzschlusswiderstand: $R_{\mathrm{K}} = Z_{1\mathrm{K}} \cdot \cos(\varphi_{1\mathrm{K}})$.
- Kurzschlussblindwiderstand: $X_{\sigma} = Z_{1\mathrm{K}} \cdot \sin(\varphi_{1\mathrm{K}}) = \sqrt{Z_{1\mathrm{K}}^2 - R_{\mathrm{K}}^2}$.
- Übliche Transformatorauslegungen: $R_1 = R_2' = ü^2 \cdot R_2$, $X_{1\sigma} = X_{2\sigma}' = ü^2 \cdot X_{2\sigma}$.
- Widerstand der Primärwicklung: $R_1 = \frac{R_{\mathrm{K}}}{2}$.
- Widerstand der Sekundärwicklung: $R_2 = \frac{R_{\mathrm{K}}}{2 \cdot ü^2}$.
- Streublindwiderstand im Primärkreis: $X_{1\sigma} = \frac{X_{\sigma}}{2}$.
- Streublindwiderstand im Sekundärkreis: $X_{2\sigma} = \frac{X_{\sigma}}{2 \cdot ü^2}$.
- Dauerkurzschlussstrom:

$$I_{\mathrm{KN}} = \frac{U_{1\mathrm{N}}}{Z_{1\mathrm{K}}}, \quad I_{\mathrm{KN}} = \frac{I_{1\mathrm{N}}}{u_{\mathrm{K}}}.$$

- Gemessene Kurzschlusswirkleistung ist näherungsweise gleich den Stromwärmeverlusten in den Wicklungen im Nennbetrieb: $P_{1\mathrm{K}} = I_{1\mathrm{K}}^2 \cdot R_{\mathrm{K}} = I_{1\mathrm{N}}^2 \cdot (R_1 + R_2') = U_{1\mathrm{K}} \cdot I_{1\mathrm{N}} \cdot \cos(\varphi_{1\mathrm{K}})$.
- Widerstand R_{K}: $R_{\mathrm{K}} = R_1 + R_2' = \frac{P_{1\mathrm{K}}}{I_{1\mathrm{K}}^2}$.
- Streublindwiderstand:

$$X_{\sigma} = \omega \cdot (L_{1\sigma} + ü^2 \cdot L_{2\sigma}) = \frac{\sqrt{(U_{1\mathrm{K}} \cdot I_{1\mathrm{K}})^2 - P_{1\mathrm{K}}^2}}{I_{1\mathrm{K}}^2}.$$

- Näherungsweise Berechnung der Spannungsänderung eines Transformators unter Belastung: $\Delta U' = U_{1\mathrm{N}} - U_2' = U_{\mathrm{R}} \cdot \cos(\varphi_2) + U_{\mathrm{X}} \cdot \sin(\varphi_2)$.
- Spannungsabfall: $\Delta U = \frac{\Delta U'}{ü}$.
- Wirkungsgrad eines Transformators ist für jeden Arbeitspunkt:

$$\eta = \frac{P_{\mathrm{ab}}}{P_{\mathrm{ab}} + P_{\mathrm{Fe,U}} + P_{\mathrm{Cu,I}}} = \frac{P_{\mathrm{ab}}}{P_{\mathrm{ab}} + P_{\mathrm{Fe}} \cdot \left(\frac{U}{U_{1\mathrm{N}}}\right)^2 + P_{\mathrm{Cu}} \cdot \left(\frac{I}{I_{1\mathrm{N}}}\right)^2}$$

13.2 Transformator, Berechnungen und Messungen

Aufgabe 13.1
Einem Einphasen-Schweißtransformator kann ein Strom von höchstens 130 A entnommen werden. Die Eingangswicklung hat 390, die Ausgangswicklung 75 Windungen.

Wie groß ist der Strom in der Zuleitung?

Lösung

$$I_1 = \frac{N_2}{N_1} \cdot I_2 = \frac{75}{390} \cdot 130\,\mathrm{A} = \underline{\underline{25\,\mathrm{A}}}$$

Aufgabe 13.2
Ein idealer Transformator hat das Übersetzungsverhältnis $\ddot{u} = 20$. An der Sekundärseite ist ein ohmscher Widerstand $R_2 = 6\,\Omega$ angeschlossen. Wie groß ist der Widerstand R_1 an den Eingangsklemmen des Transformators?

Lösung

$$R_1 = \ddot{u}^2 \cdot R_2; \quad \underline{\underline{R_1 = 2400\,\Omega}}$$

Aufgabe 13.3
An der Sekundärseite eines idealen Transformators ist ein ohmscher Widerstand $R_2 = 5\,\Omega$ angeschlossen. Die Ausgangsspannung beträgt $U_2 = 10\,\mathrm{V}$, der Ausgangsstrom ist $I_2 = 2{,}0\,\mathrm{A}$. Das Übersetzungsverhältnis ist $\ddot{u} = 10$. Wie groß sind Spannung U_1, Strom I_1 und Widerstand R_1 an der Primärseite?

Lösung

$$\begin{aligned} U_1 &= \ddot{u} \cdot U_2 = 10 \cdot 10\,\mathrm{V} = \underline{\underline{100\,\mathrm{V}}} \\ I_1 &= \frac{1}{\ddot{u}} \cdot I_2 = \frac{1}{10} \cdot 2{,}0\,\mathrm{A} = \underline{\underline{0{,}2\,\mathrm{A}}} \\ R_1 &= \frac{U_1}{I_1} = \frac{100\,\mathrm{V}}{0{,}2\,\mathrm{A}} = \underline{\underline{500\,\Omega}} \text{ oder } R_1 = \ddot{u}^2 \cdot R_2 = 100 \cdot 5\,\Omega = \underline{\underline{500\,\Omega}} \end{aligned}$$

Aufgabe 13.4
Ein Lautsprecher mit der ohmschen Impedanz $R = 4\,\Omega$ soll an einem Verstärker mit dem Ausgangswiderstand $R_\mathrm{a} = 2500\,\Omega$ betrieben werden. Welches Windungsverhältnis muss der Ausgangsübertrager des Verstärkers haben?

Lösung

$$\frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{R_\mathrm{a}}{R}} = \sqrt{\frac{2500\,\Omega}{4\,\Omega}} = \underline{\underline{25}}$$

Aufgabe 13.5
Einem idealen Transformator 230/24 V wird auf der Sekundärseite ein Strom von $I_2 = 5{,}0\,\text{A}$ entnommen.

a) Wie groß ist der Primärstrom I_1?
b) Wie groß ist die Belastung des Transformators?
c) Wie ist der Drahtquerschnitt der Primärwicklung im Verhältnis zur Sekundärwicklung zu wählen?

Lösung
a)

$$I_1 = I_2 \cdot \frac{U_2}{U_1}; \quad I_1 = 5{,}0\,\text{A} \cdot \frac{24\,\text{V}}{230\,\text{V}}; \quad \underline{\underline{I_1 = 0{,}52\,\text{A}}}$$

b) Für die Belastung eines Transformators ist die Scheinleistung S des Verbrauchers maßgebend, weil die Größen der Ströme, die den Transformator erwärmen, von S abhängen. Die Belastung wird in VA angegeben. Die übertragene Scheinleistung ist:

$$S = U_2 \cdot I_2 = 24\,\text{V} \cdot 5{,}0\,\text{A}; \quad \underline{\underline{S = 120\,\text{VA}}}$$

c) Der Strom auf der Primärseite ist niedrigerer als auf der Sekundärseite. Der Drahtquerschnitt der Primärwicklung kann deshalb im Verhältnis zur Sekundärwicklung kleiner gewählt werden.

Aufgabe 13.6
Eine sinusförmige Spannungsquelle mit den Daten $U = 10{,}0\,\text{V}$, $f = 50\,\text{Hz}$, $R_\text{i} = 100\,\Omega$ speist die Primärseite eines idealen Übertragers mit $N_1 = 270$ Windungen. Die Sekundärseite des Übertragers mit $N_2 = 90$ Windungen ist mit einem ohmschen Widerstand $R_\text{a} = 100\,\Omega$ abgeschlossen.

a) Wie groß ist die Ausgangsspannung U_2 des Übertragers?
b) Wie groß ist der Strom I_a durch R_a auf der Sekundärseite?
c) Wie groß ist der Strom I_1 auf der Primärseite?
d) Wie groß müsste R_a sein, damit Leistungsanpassung vorliegt?
e) Um wie viel Prozent ist die in $R_\text{a} = 100\,\Omega$ verbrauchte Leistung geringer als sie bei Leistungsanpassung maximal sein könnte?

Lösung
a) Mit

$$ü = \frac{N_1}{N_2} = \frac{270}{90} = 3 \text{ und } U_2 = \frac{U_\text{e}}{ü} = U_1 \cdot \frac{ü \cdot R_\text{a}}{R_i + ü^2 \cdot R_\text{a}}$$

berechnet sich U_2 zu:

$$U_2 = U_1 \cdot \frac{ü \cdot R_\text{a}}{R_i + ü^2 \cdot R_\text{a}} = 10\,\text{V} \cdot \frac{3 \cdot 100\,\Omega}{100\,\Omega + 3^2 \cdot 100\,\Omega}; \quad \underline{\underline{U_2 = 3{,}0\,\text{V}}}$$

b)

$$I_a = \frac{U_2}{R_a} = \frac{3{,}0\,\text{V}}{100\,\Omega}; \quad \underline{\underline{I_a = 30{,}0\,\text{mA}}}$$

c)

$$I_1 = \frac{I_a}{ü} = \frac{30{,}0\,\text{mA}}{3} = \underline{\underline{10{,}0\,\text{mA}}}$$

$$\text{oder } I_1 = \frac{U_1}{R_i + ü^2 \cdot R_a} = \frac{10\,\text{V}}{100\,\Omega + 3^2 \cdot 100\,\Omega} = \underline{\underline{10{,}0\,\text{mA}}}$$

d) Für Leistungsanpassung muss der Lastwiderstand gleich dem Innenwiderstand der Quelle sein. Als Lastwiderstand erscheint der Abschlusswiderstand R_a mit $ü^2$ transformiert auf der Primärseite. Es muss gelten:

$$ü^2 \cdot R_a = R_i. \text{ Somit: } R_a = \frac{R_i}{ü^2} = \frac{100\,\Omega}{3^2}.$$

Für $\underline{\underline{R_a = 11{,}1\,\Omega}}$ liegt Leistungsanpassung vor.

e) Die in $R_a = 100\,\Omega$ verbrauchte Leistung ist:

$$P_a = U_2 \cdot I_a = 3{,}0\,\text{V} \cdot 30{,}0\,\text{mA} = 90\,\text{mW}$$

Für $R_a = 11{,}1\,\Omega$ errechnen sich die Werte:

$$U_2 = 1{,}66\,\text{V und } I_a = 150\,\text{mA}.$$

$$P_{a,max} = 1{,}66\,\text{V} \cdot 0{,}15\,\text{A} = 250\,\text{mW}$$

$$\frac{P_{a,max} - P_a}{P_{a,max}} = \frac{250\,\text{mW} - 90\,\text{mW}}{250\,\text{mW}} = 0{,}64$$

Für $R_a = 100\,\Omega$ ist die in R_a verbrauchte Leistung um 64 % niedriger als bei Leistungsanpassung mit $R_a = 11{,}1\,\Omega$.

Aufgabe 13.7

Zwei magnetisch gekoppelte Spulen ohne ferromagnetischem Material werden als Lufttransformator bezeichnet. Berechnen Sie in der Schaltung in Abb. 13.1 die Ströme $i_1(t)$ und $i_2(t)$, Schein-, Wirk-, und Blindleistung sowie den Leistungsfaktor $\cos(\varphi)$ am Eingang und den Wirkungsgrad η.

Gegeben: $u_1(t) = 10\,\text{V} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t)$, $f = 50\,\text{Hz}$, $R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$, $R_a = 10\,\Omega$, $L_1 = 40\,\text{mH}$, $L_2 = 90\,\text{mH}$, Kopplungsfaktor $k = 1$

Lösung

Es wird mit komplexen Größen gerechnet. Die Maschengleichungen ergeben:

$$\text{M}_1\text{: } -\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \cdot (R_1 + j\omega L_1) - j\omega M \cdot \underline{I}_2 = 0$$

$$\text{M}_2\text{: } -j\omega M \cdot \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \cdot (j\omega L_2 + R_2 + R_a) = 0$$

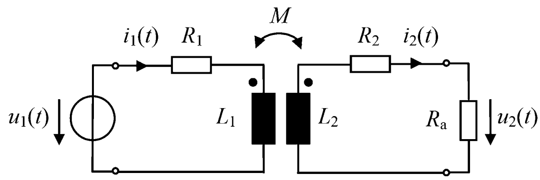


Abb. 13.1 Schaltung mit Transformator

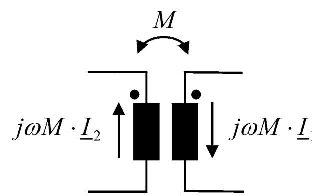


Abb. 13.2 Zur Polarität der Gegeninduktionsspannungen

Zur Erläuterung: R_1 und R_2 sind die ohmschen Wicklungswiderstände der Spulen. M ist die zwischen den Spulen bestehende Gegeninduktivität. $\underline{I}_1$ ruft durch M an der Sekundärwicklung die Spannung $j\omega M \cdot \underline{I}_1$ hervor, ebenso entsteht rückwirkend durch den Strom $\underline{I}_2$ an der Primärwicklung die Spannung $j\omega M \cdot \underline{I}_2$. Die Polarität der Gegeninduktionsspannungen zeigt die Skizze in Abb. 13.2.

Die Beziehung zwischen Gegeninduktivität M und Kopplungsfaktor k ist $M = k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2}$.

Durch Einsetzen der Zahlenwerte erhält man $M = 60\,\text{mH}$.

Die Maschengleichungen werden jetzt umgeformt und es werden Zahlenwerte eingesetzt.

$$\text{M}_1\colon\ \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \cdot (R_1 + j\omega L_1)}{-j\omega M} = \frac{10\,\text{V} - \underline{I}_1 \cdot (1 + j12{,}57)\,\Omega}{-j18{,}85\,\Omega}$$

$$\text{M}_2\colon\ 0 = -j18{,}85\,\Omega \cdot \underline{I}_1 + (12 + j28{,}27)\,\Omega \cdot \underline{I}_2$$

$$\Rightarrow 0 = -j18{,}85\,\Omega \cdot \underline{I}_1 + (12 + j28{,}27)\,\Omega \cdot \frac{10\,\text{V} - \underline{I}_1 \cdot (1 + j12{,}57)\,\Omega}{-j18{,}85\,\Omega}$$

$$0 = -j18{,}85\,\Omega \cdot \underline{I}_1 + (12 + j28{,}27)\,\Omega \cdot (0{,}53j - 0{,}053j\,\underline{I}_1 + 0{,}67\underline{I}_1)\,\text{A}$$

$$0 = -j18{,}85\,\Omega \cdot \underline{I}_1 + 6{,}36j\,\text{V} - 0{,}64j\,\Omega \cdot \underline{I}_1 + 8{,}04\,\Omega \cdot \underline{I}_1 - 14{,}98\,\text{V} + 1{,}50\,\Omega \cdot \underline{I}_1 + 18{,}94j\,\Omega \cdot \underline{I}_1$$

$$0 = -0{,}55j\,\Omega \cdot \underline{I}_1 + 6{,}36j\,\text{V} - 14{,}98\,\text{V} + 9{,}54\,\Omega \cdot \underline{I}_1$$

$$(9{,}54 - 0{,}55j)\,\Omega \cdot \underline{I}_1 = (14{,}98 - 6{,}36j)\,\text{V}$$

$$\underline{I}_1 = \frac{16{,}27\,\text{V} \cdot \mathrm{e}^{-j23^\circ}}{9{,}56\,\Omega \cdot \mathrm{e}^{-j3{,}3^\circ}};\quad \underline{I}_1 = 1{,}70\,\text{A} \cdot \mathrm{e}^{-j19{,}7^\circ} = (1{,}6 - 0{,}57j)\,\text{A}$$

Rücktransformation in den Zeitbereich ergibt:

$$\underline{\underline{i_1(t) = \sqrt{2} \cdot 1{,}70\,\text{A} \cdot \sin(\omega t - 19{,}7^\circ)}}$$

Aus M_1 mit $\underline{I}_1$ eingesetzt folgt:

$$\underline{I}_2 = 0{,}53j\ \mathrm{A} - (1{,}6 - 0{,}57j)\ \mathrm{A} \cdot (0{,}053j - 0{,}67)$$
$$\underline{I}_2 = 0{,}53j\ \mathrm{A} - 0{,}085j\ \mathrm{A} + 1{,}07\ \mathrm{A} - 0{,}03\ \mathrm{A} - 0{,}38j\ \mathrm{A}$$
$$\underline{I}_2 = (1{,}04 + 0{,}066j)\ \mathrm{A} = 1{,}04\ \mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{j\,3{,}63^\circ}$$

Rücktransformation in den Zeitbereich ergibt:

$$\underline{\underline{i_2(t) = \sqrt{2} \cdot 1{,}04\ \mathrm{A} \cdot \sin(\omega t + 3{,}63^\circ)}}$$

Am Eingang ist

die Scheinleistung: $S = U \cdot I = 10\ \mathrm{V} \cdot 1{,}70\ \mathrm{A} = \underline{\underline{17{,}0\ \mathrm{VA}}}$,
die Wirkleistung: $P = S \cdot \cos(19{,}7^\circ) = \underline{\underline{16{,}0\ \mathrm{W}}}$,
die Blindleistung: $Q = S \cdot \sin(19{,}7^\circ) = \underline{\underline{5{,}7\ \mathrm{var}}}$,
der Leistungsfaktor: $\cos(\varphi) = \cos(19{,}7^\circ) = \underline{\underline{0{,}94}}$.

Der Wirkungsgrad ist

$$\eta = \frac{P_{\mathrm{ab}}}{P_{\mathrm{zu}}} = \frac{I_2^2 \cdot R_{\mathrm{a}}}{P} = \frac{(1{,}04\ \mathrm{A})^2 \cdot 10\ \Omega}{16{,}0\ \mathrm{W}} = \underline{\underline{0{,}68}}$$

Aufgabe 13.8
Ein Widerstand von $R = 100\ \Omega$ soll eine Leistung von $P = 10\ \mathrm{kW}$ aufnehmen. Der Widerstand wird über einen idealen Transformator an das Wechselstromnetz (230 V, 50 Hz) angeschlossen. Wie groß ist bei einer primären Windungszahl $N_1 = 1000$ die Windungszahl N_2 der Sekundärseite zu wählen?

Lösung
Der ideale Transformator ist verlustfrei. Zuerst wird die für die gegebene Leistungsaufnahme benötigte Sekundärspannung U_2 bestimmt.

$$\text{Aus } P = \frac{U_2^2}{R} \text{ folgt } U_2 = \sqrt{P \cdot R} = \sqrt{1000\ \mathrm{W} \cdot 100\ \Omega} = 1000\ \mathrm{V}$$

Die Windungszahl N_2 ergibt sich aus dem Übersetzungsverhältnis.

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{U_1}{U_2}; \quad N_2 = \frac{N_1 \cdot U_2}{U_1} = \frac{1000 \cdot 1000\ \mathrm{V}}{230\ \mathrm{V}} = 4347{,}8$$

Da nur ganzzahlige Windungszahlen möglich sind, wird gerundet. $\underline{\underline{N_2 = 4348}}$

Aufgabe 13.9
Auf dem Typenschild eines Transformators stehen folgende Daten:

Bemessungsspannung:	6000 V/230 V
Bemessungsstrom:	3,44 A/87 A
Bemessungsleistung:	20 kVA
Frequenz:	50 Hz

Bei einem Leerlaufversuch wird der Leerlaufstrom $I_{10} = 0{,}15$ A und die aufgenommene Leerlaufwirkleistung $P_{10} = 180$ W gemessen.

Zu verifizieren ist, dass bei vernachlässigbaren Verlusten für die Scheinleistung gilt: $S_\text{N} = U_{1\text{N}}/I_{1\text{N}} = U_{2\text{N}}/I_{2\text{N}}$.

Zu berechnen sind: Phasenverschiebungswinkel φ_{10}, Eisenverlustwiderstand R_Fe, Hauptreaktanz X_h und Hauptinduktivität L_h.

Lösung
Die primärseitige Scheinleistung ist:

$$S_{1\text{N}} = U_{1\text{N}} \cdot I_{1\text{N}} = 6000\,\text{V} \cdot 3{,}44\,\text{A} = 20.640\,\text{VA}$$

Die sekundärseitige Scheinleistung ist:

$$S_{2\text{N}} = U_{2\text{N}} \cdot I_{2\text{N}} = 230\,\text{V} \cdot 87\,\text{A} = 20.010\,\text{VA}$$

Beide Werte liegen nahe an der angegebenen Bemessungsleistung von $S_\text{N} = 20$ kVA.

$$\begin{aligned}
\cos(\varphi_{10}) &= \frac{P_{10}}{U_{1\text{N}} \cdot I_{10}} = \frac{180\,\text{W}}{6000\,\text{V} \cdot 0{,}15\,\text{A}} = 0{,}2; \quad \underline{\underline{\varphi_{10} = 78{,}46^\circ}} \\
R_\text{Fe} &= \frac{U_{1\text{N}}}{I_{10} \cdot \cos(\varphi_{10})} = \frac{6000\,\text{V}}{0{,}15\,\text{A} \cdot 0{,}2} = \underline{\underline{200\,\text{k}\Omega}} \\
X_\text{h} &= \frac{U_{1\text{N}}}{I_{10} \cdot \sin(\varphi_{10})} = \frac{6000\,\text{V}}{0{,}15\,\text{A} \cdot 0{,}9798} = \underline{\underline{40{,}8\,\text{k}\Omega}} \\
L_\text{h} &= \frac{X_\text{h}}{2 \cdot \pi \cdot f} = \frac{40{,}8\,\text{k}\Omega}{2 \cdot \pi \cdot 50\,\text{s}^{-1}} = \underline{\underline{129{,}9\,\text{H}}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 13.10
An einem Transformator werden im Leerlauf folgende Daten gemessen:

$$U_{1\text{N}} = 380\,\text{V}, I_{10} = 45\,\text{mA}, P_{10} = 2{,}3\,\text{W}, U_{20} = 225\,\text{V}$$

Zu berechnen sind: Übersetzungsverhältnis *ü*, Leerlaufleistungsfaktor $\cos(\varphi_{10})$, die Teilströme I_Fe und I_μ, die Ersatzwiderstände R_Fe und X_h.

Lösung

Der Leerlaufversuch des Transformators zur Ermittlung der Eisenverluste erfolgt bei Betrieb mit Nennspannung.

$$\begin{aligned}
\ddot{u} &= \frac{U_{1N}}{U_{20}} = \frac{380\,\mathrm{V}}{225\,\mathrm{V}} = \underline{\underline{1{,}69}}\\
\cos(\varphi_{10}) &= \frac{P_{10}}{U_{1N}\cdot I_{10}} = \frac{2{,}3\,\mathrm{W}}{380\,\mathrm{V}\cdot 0{,}045\,\mathrm{A}} = \underline{\underline{0{,}135}}\\
I_{Fe} &= I_{10}\cdot\cos(\varphi_{10}) = 45\,\mathrm{mA}\cdot 0{,}135 = \underline{\underline{6{,}08\,\mathrm{mA}}}\\
I_{\mu} &= I_{10}\cdot\sin(\varphi_{10}) = 45\,\mathrm{mA}\cdot\sin(\arccos(0{,}135)) = \underline{\underline{44{,}59\,\mathrm{mA}}}\\
R_{Fe} &= \frac{U_{1N}}{I_{Fe}} = \frac{380\,\mathrm{V}}{6{,}08\,\mathrm{mA}} = \underline{\underline{62{,}5\,\mathrm{k\Omega}}}\\
X_{h} &= \frac{U_{1N}}{I_{\mu}} = \frac{380\,\mathrm{V}}{44{,}59\,\mathrm{mA}} = \underline{\underline{8522\,\Omega}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 13.11

Von einem Einphasentransformator sind folgende Daten bekannt:

Leerlaufstromverhältnis $i_0 = 2\,\%$, Leerlaufleistungsfaktor $\cos(\varphi_{10}) = 0{,}1$.

Die Nenndaten des Transformators sind: $U_N = 60/10\,\mathrm{kV}$, $S_N = 1\,\mathrm{MVA}$, $f_N = 50\,\mathrm{Hz}$.

Wie groß sind der Eisenverlustwiderstand R_{Fe} und die Hauptinduktivität L_h?

Lösung

$$\begin{aligned}
I_{1N} &= \frac{S_N}{U_N} = \frac{1\,\mathrm{MVA}}{60\,\mathrm{kV}} = 16{,}6667\,\mathrm{A}\\
i_0 &= \frac{I_{10}}{I_{1B}} = 0{,}02;\ I_{10/2\,\%} = i_0\cdot I_{1N} = i_0\cdot I_{1B} = 0{,}02\cdot 16{,}6667\,\mathrm{A} = 1/3\,\mathrm{A}\\
I_{10} &= I_{10/2\,\%}\cdot 50 = 1/3\,\mathrm{A}\cdot 50 = 16{,}6667\,\mathrm{A} = I_N\\
R_{Fe} &= \frac{U_{1N}}{I_{10}\cdot\cos(\varphi_{10})} = \frac{60\,\mathrm{kV}}{16{,}6667\,\mathrm{A}\cdot 0{,}1} = \underline{\underline{36\,\mathrm{k\Omega}}}\\
L_h &= \frac{X_h}{2\cdot\pi\cdot f} = \frac{U_{1N}}{2\cdot\pi\cdot f\cdot I_{10}\cdot\sin(\varphi_{10})}\\
&= \frac{60\,\mathrm{kV}}{2\cdot\pi\cdot 50\,\mathrm{s^{-1}}\cdot 16{,}6667\,\mathrm{A}\cdot 0{,}995}\underline{\underline{L_h = 11{,}5\,\mathrm{H}}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 13.12

An dem verlustlosen Transformator in Abb. 13.3 wurde eine Leerlaufspannungsmessung und eine Kurzschlussstrommessung durchgeführt. Gemessen wurden:

$$\underline{V}_{UL} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{I}_2=0} = 1 \text{ und } \underline{V}_{IK} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} = -\frac{1}{4}$$

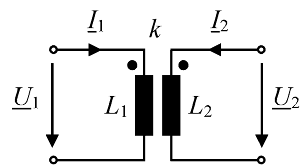


Abb. 13.3 Verlustloser Transformator

Bestimmen Sie für den Transformator die Konstante k und das Verhältnis L_1/L_2 der Induktivitäten.

Lösung
Die Transformatorgleichungen sind:

$$\underline{U}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2$$
$$\underline{U}_2 = j\omega M \underline{I}_1 + j\omega L_2 \underline{I}_2$$

Aus der Leerlaufspannungsmessung ($\underline{I}_2 = 0$) folgt:

$$\underline{U}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1$$
$$\underline{U}_2 = j\omega M \underline{I}_1$$

Mit $M^2 = k^2 L_1 L_2$ ergibt sich:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{j\omega M \underline{I}_1}{j\omega L_1 \underline{I}_1} = \frac{M}{L_1} = \frac{\sqrt{k^2 L_1 L_2}}{L_1} = k\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \text{ (Gl. 1)}$$

Aus der Kurzschlussstrommessung folgt:

$$0 = j\omega M \underline{I}_1 + j\omega L_2 \underline{I}_2; \quad -M \underline{I}_1 = L_2 \underline{I}_2; \quad -\sqrt{k^2 L_1 L_2} \cdot \underline{I}_1 = L_2 \underline{I}_2$$
$$\frac{-\sqrt{k^2 L_1 L_2}}{L_2} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = -k\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \text{ (Gl. 2)}$$

Durch Koeffizientenvergleich der vorgegebenen Messwerte und mit den Gl. 1 und 2 ergibt sich:

$$-k\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = -\frac{1}{4} \text{ (Kurzschlussmessung) und } k\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = 1 \text{ (Leerlaufmessung)}$$
$$\frac{-k\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}}{k\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}} = \frac{-\frac{1}{4}}{1}; \quad \underline{\underline{\frac{L_1}{L_2} = \frac{1}{4}}}; \quad k\sqrt{\frac{4L_1}{L_1}} = 1; \quad \Rightarrow \underline{\underline{k = \frac{1}{2}}}$$

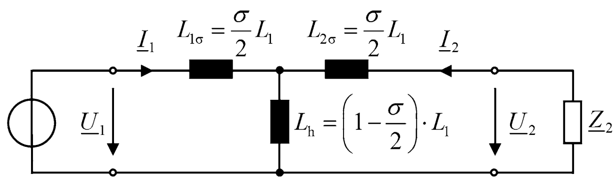


Abb. 13.4 Ersatzschaltung eines Transformators

Aufgabe 13.13
Ein Transformator im Starkstromnetz sei durch die Ersatzschaltung ohne Verluste in Abb. 13.4 hinreichend gut angenähert.

$\underline{Z}_2$ ist ein komplexer Widerstand. Die Spannung auf der Primärseite ist:

$$u_1(t) = 10 \cdot \sqrt{2}\,\text{kV} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \text{ mit } \omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot 50\,\text{Hz}.$$

Das Verhältnis der Windungszahlen von Primär- und Sekundärwicklung ist $\frac{N_1}{N_2} = 40$. Bei $f_0 = 50\,\text{Hz}$ ist $\omega_0 \cdot L_{1\sigma} = 5\,\Omega$. Bei sekundärem Leerlauf ($|\underline{Z}_2|\infty$) ist der Primärstrom $|\underline{I}_1| = \sqrt{2}\,\text{A}$.

Bestimmen Sie die Werte der Hauptinduktivität L_h und des Streufaktors σ.

Lösung
Bei sekundärem Leerlauf ist $\underline{I}_2 = 0$ und L_h wird nur von $\underline{I}_1$ durchflossen. Der komplexe Widerstand von $L_{1\sigma}$ ist $j\omega L_{1\sigma}$ und der von L_h ist $j\omega L_\text{h}$.

Nach der Maschenregel ist:

$$\underline{I}_1 \cdot j\omega \cdot L_{1\sigma} + \underline{I}_1 \cdot j\omega \cdot L_\text{h} - \underline{U}_1 = 0; \quad \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = j\omega \cdot L_{1\sigma} + j\omega \cdot L_\text{h}$$

$$j\omega_0 \cdot L_{1\sigma} = j \cdot 5\,\Omega; \quad j\omega_0 \cdot L_\text{h} = j \cdot \pi \cdot 100\,\text{Hz} \cdot L_\text{h}$$

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = j \cdot 5\,\Omega + j \cdot \pi \cdot 100 \cdot L_\text{h}\,\Omega = j \cdot (5 + \pi \cdot 100 \cdot L_\text{h})\,\Omega$$

Der Betrag ist: $|\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}| = \sqrt{(5 + \pi \cdot 100 \cdot L_\text{h})^2\,\Omega^2} = (5 + \pi \cdot 100 \cdot L_\text{h})\,\Omega$

Mit $|\underline{U}_1| = 10^4 \cdot \sqrt{2}\,\text{V}$ und $|\underline{I}_1| = \sqrt{2}\,\text{A}$ folgt:

$$\frac{10^4 \cdot \sqrt{2}\,\text{V}}{\sqrt{2}\,\text{A}} = (5 + \pi \cdot 100 \cdot L_\text{h})\,\Omega \text{ oder } 10^4 = 5 + \pi \cdot 100 \cdot L_\text{h}$$

$$L_\text{h} = \frac{10^4 - 5}{\pi \cdot 100} = \frac{10^2}{\pi} - \frac{1}{20 \cdot \pi}; \quad \underline{\underline{L_\text{h} = 31{,}8\,\text{H}}}$$

Aus $\omega_0 \cdot L_{1\sigma} = 5\,\Omega$ folgt

$$L_{1\sigma} = \frac{5\,\Omega}{\pi \cdot 100\,\text{Hz}} = \frac{1}{20 \cdot \pi}\,\text{H}$$

Gleichung 1: $L_1 = \frac{2 \cdot L_{1\sigma}}{\sigma}$; Gleichung 2: $L_1 = \frac{L_\text{h}}{1 - \frac{\sigma}{2}}$

Gleichsetzen und über Kreuz multiplizieren: $2 \cdot L_{1\sigma} \cdot \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right) = \sigma \cdot L_h$
Nach σ aufgelöst:

$$\sigma = \frac{2 \cdot L_{1\sigma}}{L_{1\sigma} + L_h}; \quad \sigma = \frac{\frac{1}{10\pi}}{\frac{1}{20\pi} + \frac{10^2}{\pi} - \frac{1}{20\pi}}; \quad \underline{\underline{\sigma = \frac{1}{10^3}}}$$

Aufgabe 13.14
Auf dem Typenschild eines Transformators stehen folgende Daten:

Bemessungsspannung:	6000 V/230 V
Bemessungsstrom:	3,44 A/87 A
Bemessungsleistung:	20 kVA
Relative Kurzschlussspannung:	$u_K = 5\,\%$
Frequenz:	50 Hz

Im Kurzschlussversuch wird die Kurzschlusswirkleistung $P_{1K} = 540\,\text{W}$ gemessen.
Wie groß sind:

a) der Dauerkurzschlussstrom I_{KN},
b) der Phasenverschiebungswinkel φ_{1K},
c) der Kurzschlusswiderstand R_K,
d) die Kurzschlussreaktanz X_σ,
e) die Kurzschlussimpedanz Z_{1K}?

Lösung
a)

$$I_{KN} = \frac{I_{1N}}{u_K} = \frac{3{,}44\,\text{A}}{0{,}05} = \underline{\underline{68{,}8\,\text{A}}}$$

b)

$$\cos(\varphi_{1K}) = \frac{P_{1K}}{U_{1K} \cdot I_{1N}} \text{ mit } U_{1K} = u_K \cdot U_{1N}$$

$$\varphi_{1K} = \arccos\left(\frac{P_{1K}}{u_K \cdot U_{1N} \cdot I_{1N}}\right) = \arccos\left(\frac{540\,\text{W}}{0{,}05 \cdot 6000\,\text{V} \cdot 3{,}44\,\text{A}}\right) = \underline{\underline{58{,}5^\circ}}$$

c)

$$R_K = \frac{P_{1K}}{I_{1K}^2} = \frac{P_{1K}}{I_{1N}^2} = \frac{540\,\text{W}}{(3{,}44\,\text{A})^2} = \underline{\underline{45{,}6\,\Omega}}$$

d)

$$X_\sigma = \frac{\sqrt{(U_{1K} \cdot I_{1K})^2 - P_{1K}^2}}{I_{1K}^2} = \frac{\sqrt{(0{,}05 \cdot 6000 \cdot 3{,}44)^2 - 540^2}}{3{,}44^2}\,\Omega = \underline{\underline{74{,}3\,\Omega}}$$

e)

$$Z_{1K} = \frac{U_{1K}}{I_{1N}} = \frac{U_{1K}}{I_{1K}} = \frac{0{,}05 \cdot 6000\,\text{V}}{3{,}44\,\text{A}} = \underline{\underline{87{,}2\,\Omega}}$$

Aufgabe 13.15

An einem Transformator mit der primärseitigen Bemessungsspannung $U_{1B} = 230\,\text{V}/50\,\text{Hz}$ werden im Kurzschlussversuch bei dem primärseitigen Bemessungsstrom $I_{1B} = 0{,}84\,\text{A}$ und dem sekundärseitigen Bemessungsstrom $I_{2B} = I_{2K} = 6{,}0\,\text{A}$ die Kurzschlussspannung $U_{1K} = 26{,}5\,\text{V}$ und die Kurzschlusswirkleistung $P_{1K} = 22\,\text{W}$ gemessen.

Ermittelt werden sollen:

a) die relative Kurzschlussspannung u_K,
b) der Kurzschlussleistungsfaktor $\cos(\varphi_{1K})$,
c) die Kurzschlussimpedanz Z_{1K},
d) die Kupferersatzwiderstände $R_1 = R_2'$,
e) die Kurzschlussreaktanz X_σ,
f) das Übersetzungsverhältnis $\ddot{u}$.

Lösung

a)

$$u_K = \frac{U_{1K}}{U_{1N}} = \frac{26{,}5\,\text{V}}{230\,\text{V}} = \underline{\underline{0{,}12}}; \quad \underline{\underline{u_K = 12\,\%}}$$

b)

$$\cos(\varphi_{1K}) = \frac{P_{1K}}{U_{1K} \cdot I_{1N}} = \frac{22\,\text{W}}{26{,}5\,\text{V} \cdot 0{,}84\,\text{A}} = \underline{\underline{0{,}988}}$$

c)

$$Z_{1K} = \frac{U_{1K}}{I_{1N}} = \frac{U_{1K}}{I_{1K}} = \frac{26{,}5\,\text{V}}{0{,}84\,\text{A}} = \underline{\underline{31{,}55\,\Omega}}$$

d)

$$R_1 = R_2' = \frac{R_K}{2} = \frac{1}{2} \cdot Z_{1K} \cdot \cos(\varphi_{1K}) = 0{,}5 \cdot 31{,}55\,\Omega \cdot 0{,}988 = \underline{\underline{15{,}6\,\Omega}}$$

e)

$$X_\sigma = Z_{1K} \cdot \sin(\varphi_{1K}) = 31{,}55\,\Omega \cdot \sin[\arccos(0{,}988)] = \underline{\underline{4{,}87\,\Omega}}$$

f)

$$\ddot{u} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{I_{2B}}{I_{1B}} = \frac{6{,}0\,\text{A}}{0{,}84\,\text{A}} = \underline{\underline{7{,}14}}$$

Aufgabe 13.16
Die Kupferverluste eines Transformators wurden bei einer Temperatur von 20 °C zu $P_{1K,20} = 125\,\text{W}$ gemessen. Welcher Wert $P_{1K,75}$ ergibt sich, wenn der Messwert auf einen betriebswarmen Zustand mit 75 °C umgerechnet wird?

Lösung
Der Temperaturkoeffizient von Kupfer ist $\alpha_{20} = 3{,}93 \cdot 10^{-3}\,\text{K}^{-1}$.

$$P_{1K,75} = P_{1K,20} \cdot [1 + \alpha_{20} \cdot (75 - 20)\,\text{K}]$$
$$P_{1K,75} = 125\,\text{W} \cdot \left[1 + 3{,}93 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{\text{K}} \cdot 55\,\text{K}\right] = \underline{\underline{152\,\text{W}}}$$

Schwingkreise

14

Zusammenfassung

Zuerst werden Berechnungen beim Reihenschwingkreis mit Verlusten durchgeführt. Der Zustand der Resonanz mit den zugehörigen Größen der Parameter wird besonders beachtet. Die Konstruktion von Zeigerdiagrammen erhöht den Überblick und das Verständnis der Betriebsbedingungen. Die komplexe Rechnung dient hier und auch bei den anschließenden Berechnungen beim Parallelschwingkreis mit Verlusten als Hilfsmittel zur einfachen Schaltungsanalyse. Die Bestimmung der Resonanzfrequenz allgemeiner, aus Widerständen, Kondensatoren und Spulen zusammengesetzter Schaltungen, rundet das Thema ab.

14.1 Grundwissen – kurz und bündig

- Bei einem Schwingkreis wird periodisch eine Energieform in eine andere Energieform umgewandelt.
- Ein elektrischer Schwingkreis besteht aus mindestens einer Induktivität und einer Kapazität.
- Bei Resonanz gilt bei jedem Schwingkreis:
  - induktiver und kapazitiver Widerstand sind gleich groß,
  - Strom und Spannung sind in Phase,
  - der Resonanzwiderstand ist ein ohmscher Widerstand (Wirkwiderstand).
- Thomson-Gleichung zur Berechnung der Eigenkreisfrequenz (oft als Resonanzkreisfrequenz ω_r bezeichnet): $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$
- Allgemeine Ermittlung der Resonanzfrequenz einer Schaltung: Komplexen Widerstand (oder Leitwert) berechnen, Imaginärteil null setzen und nach der Frequenz auflösen.

L. Stiny, *Aufgabensammlung zur Elektrotechnik und Elektronik*,
DOI 10.1007/978-3-658-14381-7_14

- Reihenschwingkreis bei Resonanz (Spannungsresonanz):
  - der Widerstand des Kreises ist am kleinsten und der Strom ist am größten,
  - Resonanzwiderstand = Reihen-Verlustwiderstand,
  - die Teilspannungen an L und C sind Q-mal größer als die angelegte Spannung.

  Parallelschwingkreis bei Resonanz (Stromresonanz):
  - der Widerstand ist von außen her betrachtet am größten und der zugeführte Strom am kleinsten,
  - Resonanzwiderstand = Parallel-Verlustwiderstand,
  - im Kreis ist der Strom Q-mal größer als in der Zuleitung.
- Die Resonanzwirkung wird umso besser, je größer die Güte Q des Kreises ist (je kleiner die Verluste sind).
- Die Bandbreite wird umso kleiner, je größer die Güte Q des Kreises ist.
- Außerhalb des Resonanzzustandes ist der Widerstand jedes Schwingkreises entweder induktiv oder kapazitiv.
- Schwingkreise können als Filter verwendet werden.
- Ein Bandfilter besteht aus gekoppelten Schwingkreisen derselben Resonanzfrequenz.
- Beim Bandfilter hängt die Form der Resonanzkurve vom Kopplungsgrad und vom Verlustwiderstand der Kreise ab.
- Beim Reihenschwingkreis ist der Gütefaktor

$$Q = \frac{\omega_0 \cdot L}{R} = \frac{1}{\omega_0 \cdot R \cdot C} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

- Beim Parallelschwingkreis ist der Gütefaktor

$$Q = \frac{R}{\omega_0 \cdot L} = \omega_0 \cdot R \cdot C = R \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

14.2 Reihenschwingkreis mit Verlusten

Aufgabe 14.1
Ein Reihenschwingkreis besteht aus einer Spule L mit dem Wicklungswiderstand R und einem verlustlosen Kondensator C (Abb. 14.1). Er wird bei Resonanz mit der Resonanzfrequenz $f_0 = 100\,\text{kHz}$ betrieben.

Gegeben: Strom $I_0 = 20\,\text{mA}$, Spulenspannung $U_\text{S} = 40\,\text{V}$, Gesamtspannung $U_0 = 4\,\text{V}$.

Berechnen Sie R, L und C.

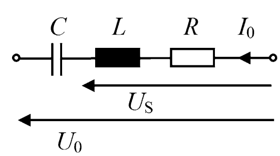
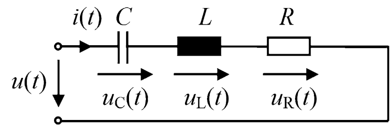


Abb. 14.1 Reihenschwingkreis mit Verlusten bei Resonanz

Abb. 14.2 Von Wechselstrom durchflossener Reihenschwingkreis



Lösung

Im Resonanzfall ergeben die Blindwiderstände von L und C zusammen null Ohm, es bleibt nur der ohmsche Widerstand (der Resonanzwiderstand) übrig. Die Spannung U_0 liegt damit an R.

$$U_R = U_0; \quad R = \frac{U_0}{I_0} = \frac{4\,\text{V}}{20\,\text{mA}} = \underline{\underline{200\,\Omega}}$$

Der komplexe Widerstand (die Impedanz) der Reihenschaltung aus R und L ist $R + j\omega L$. Dessen Betrag ist $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ und nach dem ohmschen Gesetz gleich $\frac{U_S}{I_0}$. Auflösen nach L:

$$\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{U_S}{I_0}; \quad R^2 + \omega^2 L^2 = \left(\frac{U_S}{I_0}\right)^2; \quad L = \frac{\sqrt{\left(\frac{U_S}{I_0}\right)^2 - R^2}}{\omega_0}; \quad \underline{\underline{L = 3{,}17\,\text{mH}}}$$

$$\text{Thomson-Gleichung: } C = \frac{1}{\omega_0^2 \cdot L}; \quad \underline{\underline{C = 800\,\text{pF}}}$$

Aufgabe 14.2

Durch einen Reihenschwingkreis Abb. 14.2 mit L, R und C fließt ein Wechselstrom $i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t)$.

Gegeben: $R = 100\,\Omega$, $L = 0{,}2\,\text{mH}$, $C = 10\,\text{nF}$, $\hat{I} = 0{,}1\,\text{A}$, $\omega = 10^6\,\text{s}^{-1}$.

a) Geben Sie die Amplituden $\hat{U}_C$, $\hat{U}_L$, $\hat{U}_R$ und die Phasenwinkel φ_{uiC}, φ_{uiL}, φ_{uiR} der Teilspannungen $u_C(t)$, $u_L(t)$ und $u_R(t)$ an.
b) Berechnen Sie die von der Schaltung aufgenommene Wirkleistung P, Blindleistung Q und Scheinleistung S.
c) Welche Ausdrücke ergeben sich für die in L bzw. C gespeicherten Energien $w_L(t)$ und $w_C(t)$?
d) Wie groß sind die Maximalwerte $\hat{W}_L$ und $\hat{W}_C$ der in L bzw. C gespeicherten Energie?
e) Skizzieren Sie die Verläufe von $w_L(t)$ und $w_C(t)$.
f) Wie groß sind die Werte der Blindleistungen Q_L und Q_C der Spule bzw. des Kondensators?
g) Welche Energie W_R wird in einer Periode im ohmschen Widerstand verbraucht?
h) Welcher Wert müsste für L gewählt werden, damit gilt $w_L(t) + w_C(t) = \text{const.}$, wenn die anderen Daten unverändert bleiben?

Lösung

a)

$$\hat{U}_C = \hat{I} \cdot \frac{1}{\omega C} = \frac{0{,}1\,\text{A}}{10^6\,\frac{1}{\text{s}} \cdot 10^{-8}\,\frac{\text{s}}{\Omega}} = \underline{\underline{10\,\text{V}}}$$

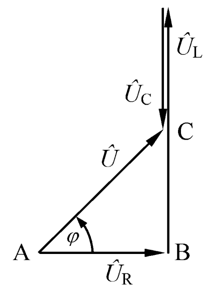


Abb. 14.3 Zeigerdiagramm der Spannungen

Beim Kondensator eilt die Spannung dem Strom nach: $\underline{\underline{\varphi_\mathrm{uiC} = -90°}}$.

$$\hat{U}_\mathrm{L} = \hat{I} \cdot \omega L = 0{,}1\,\mathrm{A} \cdot 10^6\,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-3}\,\Omega\mathrm{s} = \underline{\underline{20\,\mathrm{V}}}$$

Bei der Spule eilt die Spannung dem Strom voraus: $\underline{\underline{\varphi_\mathrm{uiL} = 90°}}$.

$$\hat{U}_\mathrm{R} = \hat{I} \cdot R = 0{,}1\,\mathrm{A} \cdot 100\,\Omega = \underline{\underline{10\,\mathrm{V}}}$$

Beim ohmschen Widerstand sind Spannung und Strom in Phase: $\underline{\underline{\varphi_\mathrm{uiR} = 0}}$.

b) Der Strom $i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t)$ wird von der Spannung $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t)$ hervorgerufen. Die Scheinleistung S ist $S = U \cdot I = \frac{1}{2} \cdot \hat{U} \cdot \hat{I}$, da $U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$ und $I = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$.
$\hat{U}$ muss noch bestimmt werden. Zur Verdeutlichung wird das Zeigerdiagramm der Spannungen gezeichnet. Dazu wird zunächst geprüft, ob die angegebene Betriebskreisfrequenz $\omega = 10^6\,\mathrm{s}^{-1}$ größer oder kleiner als die Eigenkreisfrequenz ω_0 des freien ungedämpften (im Falle $R = 0$) Schwingers ist.

$$\text{Thomson-Gleichung: } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 7 \cdot 10^5\,\mathrm{s}^{-1}$$

Es ist also $\omega > \omega_0$, es liegt ohmsch-induktives Verhalten des Schwingkreises vor. Da die Resonanzkreisfrequenz ω_r durch die Dämpfung (hier $R = 100\,\Omega$) sogar noch unterhalb der Eigenkreisfrequenz ω_0 liegt, gilt die Aussage über das ohmsch-induktive Verhalten auf alle Fälle.
Anmerkung: Die Resonanzkreisfrequenz ω_r kann nach der Formel

$$\omega_\mathrm{r} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}}$$

berechnet werden.
Jetzt kann das Zeigerdiagramm der Spannungen gezeichnet werden (Abb. 14.3).
Da hier $\hat{U}_\mathrm{R} = \hat{U}_\mathrm{C} = \frac{1}{2}\hat{U}_\mathrm{L}$ ist, berechnet sich $\hat{U}$ als Hypotenuse des gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks ABC. $\hat{U} = \sqrt{\hat{U}_\mathrm{R}^2 + \hat{U}_\mathrm{R}^2} = \hat{U}_\mathrm{R} \cdot \sqrt{2} = 14{,}1\,\mathrm{V}$

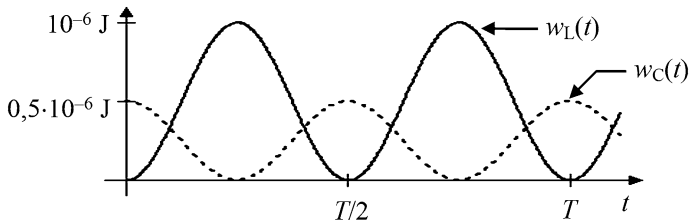


Abb. 14.4 Verlauf der in Spule und Kondensator gespeicherten Energie

Es folgt:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \hat{U} \cdot \hat{I} = \frac{1}{2} \cdot 14{,}1\ \text{V} \cdot 0{,}1\ \text{A} = \underline{\underline{0{,}7\ \text{VA}}}$$

Die Wirkleistung P ist $P = S \cdot \cos(\varphi)$. Der Winkel φ kann in unserem Fall aus dem Zeigerdiagramm zu $\varphi = 45°$ entnommen werden:

$$P = 0{,}7\ \text{VA} \cdot \cos(45°) = \underline{\underline{0{,}5\ \text{W}}}$$

Die Blindleistung ist $Q = S \cdot \sin(\varphi)$. $\underline{\underline{Q = 0{,}5\ \text{var}}}$

c) Die im Magnetfeld der Spule gespeicherte Energie ist $w_L(t) = \frac{1}{2} L \cdot [i(t)]^2$.

$$\underline{\underline{w_L(t) = \frac{1}{2} L \cdot \hat{I}^2 \cdot [\sin(\omega t)]^2}}$$

Die im Kondensator gespeicherte Energie ist $w_C(t) = \frac{1}{2} C \cdot [u_C(t)]^2$.
Die Spannung am Kondensator ist gegenüber der Eingangsspannung $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t)$ um 90° phasenverschoben. Somit ist $u_C(t) = \hat{U}_C \cdot \cos(\omega t)$.

$$\underline{\underline{w_C(t) = \frac{1}{2} C \cdot (\hat{U}_C)^2 \cdot [\cos(\omega t)]^2}}$$

d)

$$\hat{W}_L = \frac{1}{2} L \cdot \hat{I}^2 = \underline{\underline{10^{-6}\ \text{J}}}; \quad \hat{W}_C = \frac{1}{2} C \cdot (\hat{U}_C)^2 = \underline{\underline{0{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{J}}}$$

e) Die Verläufe von $w_L(t)$ und $w_C(t)$ zeigt Abb. 14.4.

f)

$$Q_L = U_L \cdot I = \frac{\hat{U}_L}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} = \frac{20 \cdot 0{,}1}{2}\ \text{var} = \underline{\underline{1\ \text{var}}}$$

$$Q_C = U_C \cdot I = \frac{\hat{U}_C}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} = \frac{10 \cdot 0{,}1}{2}\ \text{var} = \underline{\underline{0{,}5\ \text{var}}}$$

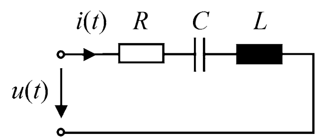


Abb. 14.5 Strom durch Reihenschwingkreis

g)

$$P_\mathrm{R} = U \cdot I = \frac{\hat{U}_\mathrm{R}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} = \frac{10\,\mathrm{V} \cdot 0{,}1\,\mathrm{A}}{2} = 0{,}5\,\mathrm{W}$$

$$W_\mathrm{R} = P_\mathrm{R} \cdot T = 0{,}5\,\mathrm{W} \cdot \frac{2\pi}{10^6\,\mathrm{s}^{-1}} = \underline{\underline{3{,}14 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Ws}}}$$

h) Es soll sein: $w_\mathrm{L}(t) + w_\mathrm{C}(t) = \mathrm{const.}$

$$w_\mathrm{L}(t) + w_\mathrm{C}(t) = \hat{W}_\mathrm{L} \cdot \sin^2(\omega t) + \hat{W}_\mathrm{C} \cdot \cos^2(\omega t) \stackrel{!}{=} \mathrm{const.}$$

Es gilt: $\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1$.
Falls $\hat{W}_\mathrm{L} = \hat{W}_\mathrm{C} = \hat{W}$, dann ist $\hat{W} \cdot [\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)] = \mathrm{const.}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} L \cdot \hat{I}^2 = \frac{1}{2} C \cdot (\hat{U}_\mathrm{C})^2;\ \text{mit } (\hat{U}_\mathrm{C})^2 = \frac{\hat{I}^2}{\omega^2 C^2} \text{ folgt:}$$

$$L = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{10^{12} \cdot 10^{-8}}\,\mathrm{H} = 10^{-4}\,\mathrm{H} = \underline{\underline{0{,}1\,\mathrm{mH}}}$$

Aufgabe 14.3
Berechnen Sie in Abb. 14.5 mit Hilfe der komplexen Rechnung den Strom $i(t)$.
Gegeben: $u(t) = 24\,\mathrm{V} \cdot \sin(\omega t + 15°)$, $f = 50\,\mathrm{Hz}$, $R = 100\,\Omega$, $C = 10\,\mu\mathrm{F}$, $L = 1{,}2\,\mathrm{H}$

Lösung
$u(t)$ ist in komplexer Darstellung $\underline{\hat{U}} = 24\,\mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{j\,15°}$ (komplexe Amplitude).
Der komplexe Widerstand der Reihenschaltung ist:

$$\underline{Z} = R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L = (100 - j\,318{,}3 + j\,377)\,\Omega$$

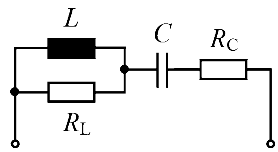
$$\underline{Z} = (100 + j\,58{,}7)\,\Omega = \sqrt{100^2 + 58{,}7^2}\,\Omega \cdot \mathrm{e}^{j \cdot \arctan\left(\frac{58{,}7}{100}\right)} = 116\,\Omega \cdot \mathrm{e}^{j\,30{,}4°}$$

$$\underline{\hat{I}} = \frac{\underline{\hat{U}}}{\underline{Z}} = \frac{24\,\mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{j\,15°}}{116\,\Omega \cdot \mathrm{e}^{j\,30{,}4°}} = 0{,}2\,\mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{-j\,15{,}4°}$$

Der Strom in komplexer Darstellung wird in den Zeitbereich zurücktransformiert.

$$\underline{\underline{i(t) = 0{,}2\,\mathrm{A} \cdot \sin(\omega t - 15{,}4°)}}$$

Abb. 14.6 Reihenschwingkreis mit zwei Widerständen



Aufgabe 14.4
Ein Schwingkreis ist wie in Abb. 14.6 gezeigt aufgebaut.

Gegeben: $L = 80\,\text{mH}$, $R_L = 1{,}15\,\text{k}\Omega$, $C = 125\,\text{nF}$, $R_C = 50\,\Omega$

Zu bestimmen sind die Resonanzkreisfrequenz ω_r und der Widerstandswert Z_r des Schwingkreises bei Resonanz.

Lösung
Allgemein kann die Resonanzfrequenz einer Schaltung ermittelt werden, indem zunächst die Impedanz oder die Admittanz der Schaltung bestimmt wird. Der Imaginärteil wird dann gleich null gesetzt und nach ω bzw. f aufgelöst.

Durch dieses Vorgehen verschwinden die Blindwiderstände, Strom und Spannung sind in Phase. Die Bedingung für Resonanz ist somit erfüllt.

Da es sich hier um einen Reihenschwingkreis handelt, wird dessen Impedanz bestimmt.

$$\underline{Z} = \frac{R_L \cdot j\omega L}{R_L + j\omega L} + \frac{1}{j\omega C} + R_C = \frac{-R_L\omega^2 LC + R_L + j\omega L + R_C(R_L + j\omega L)j\omega C}{j\omega C \cdot (R_L + j\omega L)}$$

$$\underline{Z} = \frac{R_L - \omega^2 LC(R_L + R_C) + j\omega L + j\omega C R_L R_C}{j\omega C \cdot (R_L + j\omega L)}$$

Jetzt wird mit $-j(R_L - j\omega L)$ erweitert.

$$\underline{Z} = \frac{\omega^3 L^2 C(R_L + R_C) + \omega C R_L^2 R_C + j\omega^2 LC R_L^2 - jR_L^2 - j(\omega L)^2}{\omega C[R_L^2 + (\omega L)^2]}$$

$\underline{Z}$ ist jetzt in Real- und Imaginärteil zerlegt. Der Imaginärteil ist dann null, wenn sein Zähler null ist.

$$(\omega^2 LC - 1)R_L^2 - (\omega L)^2 = 0$$

Diese Gleichung wird nach ω aufgelöst. Man erhält die Resonanzkreisfrequenz ω_r.

$$\omega_r = \frac{R_L}{\sqrt{R_L^2 LC - L^2}}; \quad \underline{\underline{\omega_r = 13.920\,\text{s}^{-1}}}$$

Bei Resonanz existiert nur der Realteil von $\underline{Z}$.

$$Z_r = \frac{\omega_r^3 L^2 C(R_L + R_C) + \omega_r C R_L^2 R_C}{\omega_r C[R_L^2 + (\omega_r L)^2]} = \frac{L + C R_L R_C}{C R_L} = \underline{\underline{606{,}5\,\Omega}}$$

Aufgabe 14.5

Ein Kondensator $C = 2\,\mu\text{F}$ ist mit einer Spule $L = 2{,}5\,\text{H}$ in Reihe geschaltet. Die Spule hat einen Wicklungswiderstand von $R = 120\,\Omega$. Die Reihenschaltung ist an eine sinusförmige Spannungsquelle $U = 24\,\text{V}$, 50 Hz angeschlossen. Berechnen Sie

a) den Scheinwiderstand Z,
b) den Strom I,
c) den Leistungsfaktor $\cos(\varphi)$,
d) die Resonanzfrequenz f_0,
e) den Gütefaktor Q des Reihenschwingkreises.

Lösung

a) Die Impedanz der Reihenschaltung ist

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j \cdot \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

Der Scheinwiderstand ist der Betrag der Impedanz.

$$|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2};$$

$$|\underline{Z}| = \sqrt{120^2 + \left(2\pi \cdot 50 \cdot 2{,}5 - \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}\right)^2}\ \Omega$$

$$\underline{\underline{Z = |\underline{Z}| = 815\,\Omega}}$$

b)

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{24\,\text{V}}{815\,\Omega} = \underline{\underline{29{,}5\,\text{mA}}}$$

c)

$$\cos(\varphi) = \frac{R}{Z} = \frac{120\,\Omega}{815\,\Omega} = \underline{\underline{0{,}147}}$$

d)

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2{,}5 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}}\,\text{Hz}; \quad \underline{\underline{f_0 = 71{,}2\,\text{Hz}}}$$

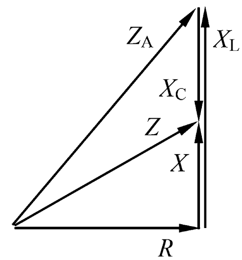
e)

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{120}\sqrt{\frac{2{,}5}{2 \cdot 10^{-6}}}; \quad \underline{\underline{Q = 9{,}3}}$$

Aufgabe 14.6

Ein Wechselstromrelais mit dem Wicklungswiderstand $R = 20\,\text{k}\Omega$ hat einen Ansprechstrom von $I = 4\,\text{mA}$. Dazu muss es an eine Spannung von $U_\text{A} = 140\,\text{V}$, 50 Hz angeschlossen werden. Damit der Ansprechstrom bereits bei $U_2 = 100\,\text{V}$ erreicht wird, muss ein Kondensator in Reihe geschaltet werden. Berechnen Sie die nötige Kapazität des Kondensators.

Abb. 14.7 Zeigerdiagramm verlustbehafteter Reihenschwingkreis



Lösung
Es wird das Zeigerdiagramm für den verlustbehafteten Reihenschwingkreis zu Hilfe genommen (Abb. 14.7).

$$Z_A = \frac{U_A}{I_A} = \frac{140\,\mathrm{V}}{4\,\mathrm{mA}} = 35\,\mathrm{k\Omega}; \quad X_L = \sqrt{(Z_A)^2 - R^2} = \sqrt{1225 - 400}\,\mathrm{k\Omega} = 28{,}7\,\mathrm{k\Omega}$$
$$Z = \frac{U_2}{I_A} = \frac{100\,\mathrm{V}}{4\,\mathrm{mA}} = 25\,\mathrm{k\Omega}; \quad X = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{625 - 400}\,\mathrm{k\Omega} = 15\,\mathrm{k\Omega}$$
$$X_C = X_L - X = 28{,}7\,\mathrm{k\Omega} - 15\,\mathrm{k\Omega} = 13{,}7\,\mathrm{k\Omega}$$
$$C = \frac{1}{\omega \cdot X_C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 13{,}7 \cdot 10^3}\,\mathrm{F}; \quad \underline{\underline{C = 232\,\mathrm{nF}}}$$

Aufgabe 14.7
Eine Spule mit dem Wicklungswiderstand $R = 10\,\Omega$ und der Induktivität $L = 200\,\mathrm{mH}$ hat die Spulengüte $Q = 33{,}7$. Welche (verlustfrei angenommene) Kapazität hat der Reihenschwingkreis bei Resonanz?

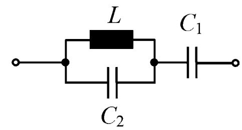
Lösung
Der ohmsche Widerstand in Reihe mit der idealen Spule und dem idealen Kondensator bestimmt hier die Güte der Spule und zugleich die Güte des Reihenschwingkreises. Andere reelle Verlustwiderstände des Schwingkreises, z. B. ohmsche Leitungswiderstände, dielektrische Verluste, Verluste durch den Skineffekt, könnten im Wert des Widerstandes R einbezogen werden, der dann nicht mehr die Spulengüte, sondern die Güte des Schwingkreises festlegt.

Die Güte des Reihenschwingkreises ist $Q = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$. Daraus folgt: $C = \frac{L}{Q^2 \cdot R^2}$.

$$C = \frac{0{,}2\,\Omega\,\mathrm{s}}{33{,}7^2 \cdot (10\,\Omega)^2} = \underline{\underline{1{,}8\,\mu\mathrm{F}}}$$

Aufgabe 14.8
Bestimmen Sie von der Schaltung Abb. 14.8 den Ersatzwiderstand $\underline{Z}$ in der Form $\underline{Z} = a + j \cdot b$. Geben Sie also den Realteil a und den Imaginärteil b in Abhängigkeit von C_1, C_2 und

Abb. 14.8 Gesucht ist die Resonanzfrequenz der Schaltung



L an. Berechnen Sie die Resonanzkreisfrequenz ω_r allgemein und die Resonanzfrequenz f_r für $C_1 = 1\,\text{nF}$, $C_2 = 10\,\text{nF}$ und $L = 20\,\mu\text{H}$.

Lösung
Die Schaltung enthält nur Blindwiderstände, der Realteil von $\underline{Z}$ muss deshalb null sein: $\underline{\underline{a = \text{Re}\{\underline{Z}\} = 0}}$.

$$\underline{Z} = \underline{Z}_{\text{C1}} + \underline{Z}_{\text{C2}} \parallel \underline{Z}_{\text{L}} = \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{\frac{1}{j\omega C_2} \cdot j\omega L}{\frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L} = \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 C_2 L}$$

$$\underline{Z} = \frac{-\omega^2 C_1 L + 1 - \omega^2 C_2 L}{j \cdot (\omega C_1 - \omega^3 C_1 C_2 L)} = \frac{1 - \omega^2 L(C_1 + C_2)}{j \cdot (\omega C_1 - \omega^3 C_1 C_2 L)} = -j \cdot \frac{1 - \omega^2 L(C_1 + C_2)}{\omega C_1 - \omega^3 C_1 C_2 L}$$

$$\underline{\underline{b = \text{Im}\{\underline{Z}\} = \frac{1 - \omega^2 L(C_1 + C_2)}{\omega C_1 - \omega^3 C_1 C_2 L}}}$$

Für ω_r muss gelten:

$$b = 0; \quad 1 - \omega_r^2 L(C_1 + C_2) = 0; \quad \underline{\underline{\omega_r = \frac{1}{\sqrt{L(C_1 + C_2)}}}}$$

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C_1 + C_2)}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2 \cdot 10^{-5}\,\Omega\,\text{s} \cdot (10^{-9} + 10^{-8})\,\frac{\text{s}}{\Omega}}}; \; \underline{\underline{f_r = 339{,}32\,\text{kHz}}}$$

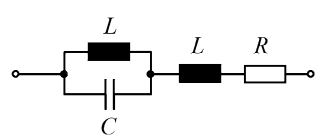
Aufgabe 14.9
Zu bestimmen ist allgemein die Resonanzkreisfrequenz ω_r der Schaltung Abb. 14.9.

Lösung

$$\underline{Z} = R + \underline{Z}_{\text{L}} + \underline{Z}_{\text{L}} \parallel \underline{Z}_{\text{C}}$$

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{j\omega L \cdot \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = R + j\omega L + \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC} = R + j \cdot \frac{\omega L(2 - \omega^2 LC)}{1 - \omega^2 LC}$$

Abb. 14.9 Zur Bestimmung der Resonanzkreisfrequenz



$\mathrm{Im}\{\underline{Z}\} = 0$ für $\omega = \omega_r$:

1. Lösung: $\omega_r = 0$, dies ist keine Resonanz.
2. Lösung: $2 - \omega_r^2 LC = 0$; $\underline{\underline{\omega_r = \sqrt{\frac{2}{LC}}}}$

14.3 Parallelschwingkreis mit Verlusten

Aufgabe 14.10
Ein Rundfunkempfänger ist mittels eines variablen Kondensators in einem Parallelschwingkreis mit Verlusten auf eine Frequenz von 100 MHz eingestellt. Die Induktivität des Schwingkreises hat eine Größe von $L = 0{,}1\,\mu\mathrm{H}$, die Güte der Schaltung ist $Q = 100$. Bestimmen Sie die Werte für die Kapazität C und für den Verlustwiderstand R.

Lösung
Auch beim Parallelschwingkreis mit Verlusten gilt die Thomson-Gleichung zur Berechnung der Resonanzfrequenz.

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow C = \frac{1}{\omega_0^2 L} = \frac{1}{(2\pi \cdot 10^8)^2 \cdot 10^{-7}}\,\mathrm{F} = \underline{\underline{25{,}33\,\mathrm{pF}}}$$

$$Q = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 RC \Rightarrow R = \omega_0 \cdot Q \cdot L = 2\pi \cdot 10^8 \cdot 10^2 \cdot 10^{-7}\,\Omega = \underline{\underline{6283\,\Omega}}$$

Aufgabe 14.11
In Abb. 14.10 liegt eine *RLC*-Schaltung (verlustbehafteter Parallelschwingkreis) an einer sinusförmigen Spannungsquelle.

Gegeben: $R = 3\,\mathrm{k\Omega}$, $L = 3\,\mathrm{H}$, $C = 250\,\mathrm{nF}$, $u(t) = 16{,}97056275\,\mathrm{V} \cdot \sin(1000\,\mathrm{s}^{-1} \cdot t)$

a) Wie groß ist der Effektivwert U der Spannung $u(t)$?
b) Wie groß ist die Impedanz $\underline{Z}_L$ und der induktive Blindwiderstand X_L der Induktivität L bei der Kreisfrequenz $\omega = 1000\,\mathrm{s}^{-1}$?
c) Wie groß ist die Impedanz $\underline{Z}_C$ und der kapazitive Blindwiderstand X_C der Kapazität C bei der Kreisfrequenz $\omega = 1000\,\mathrm{s}^{-1}$?
d) Wie groß sind die Ströme $\underline{I}_R$, $\underline{I}_L$, $\underline{I}_C$, $|\underline{I}_R|$, $|\underline{I}_L|$, $|\underline{I}_C|$?

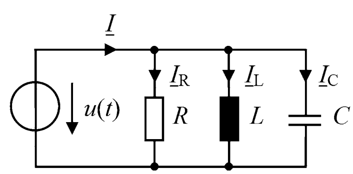


Abb. 14.10 *RLC*-Schaltung an sinusförmiger Spannungsquelle

e) Wie groß sind Betrag $|\underline{I}|$ und Winkel φ_i (der Nullphasenwinkel) des komplexen Gesamtstromes $\underline{I}$? Geben Sie $\underline{I}$ in der Exponentialform an.
f) Geben Sie den zeitlichen Verlauf $i(t)$ des Gesamtstromes an.
g) Bestimmen Sie die Impedanz $\underline{Z}(\omega)$. Wie groß ist $Z(\omega)$ bei der Kreisfrequenz $\omega = 1000\,\mathrm{s}^{-1}$?
h) Berechnen Sie den Phasenverschiebungswinkel φ zwischen Spannung und Strom in Grad bei der Kreisfrequenz $\omega = 1000\,\mathrm{s}^{-1}$. Zeigt die Schaltung bei dieser Frequenz überwiegend kapazitives oder induktives Verhalten? Bei welcher Kreisfrequenz zeigt die Schaltung rein ohmsches Verhalten?

Lösung

a) $\hat{U} = 16{,}97056275\,\mathrm{V}$; bei Sinusform der Spannung gilt $U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$; $\underline{\underline{U = 12\,\mathrm{V}}}$

b)

$$\underline{Z}_\mathrm{L} = j\omega L = j \cdot 1000\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 3\,\mathrm{H} = \underline{\underline{j \cdot 3000\,\Omega}}; \quad \underline{\underline{X_L = 3000\,\Omega}}$$

c)

$$\underline{Z}_\mathrm{C} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \cdot 1000\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 250 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{F}} = \underline{\underline{-j \cdot 4000\,\Omega}}; \quad \underline{\underline{X_C = 4000\,\Omega}}$$

d)

$$\underline{I}_\mathrm{R} = \frac{12\,\mathrm{V}}{3\,\mathrm{k\Omega}} = \underline{\underline{4\,\mathrm{mA}}}; \quad \underline{I}_\mathrm{L} = \frac{12\,\mathrm{V}}{j \cdot 3\,\mathrm{k\Omega}} = \underline{\underline{-j \cdot 4\,\mathrm{mA}}};$$

$$\underline{I}_\mathrm{C} = \frac{12\,\mathrm{V}}{-j \cdot 4\,\mathrm{k\Omega}} = \underline{\underline{j \cdot 3\,\mathrm{mA}}}$$

$$|\underline{I}_\mathrm{R}| = \frac{12\,\mathrm{V}}{3\,\mathrm{k\Omega}} = \underline{\underline{4\,\mathrm{mA}}}; \quad |\underline{I}_\mathrm{L}| = \frac{12\,\mathrm{V}}{3\,\mathrm{k\Omega}} = \underline{\underline{4\,\mathrm{mA}}}; \quad |\underline{I}_\mathrm{C}| = \frac{12\,\mathrm{V}}{4\,\mathrm{k\Omega}} = \underline{\underline{3\,\mathrm{mA}}}$$

e) Der komplexe Gesamtstrom ist die Summe der drei komplexen Teilströme (Kirchhoff'sches Gesetz):

$$\underline{I} = \underline{I}_\mathrm{R} + \underline{I}_\mathrm{L} + \underline{I}_\mathrm{C} = 4\,\mathrm{mA} - j \cdot 4\,\mathrm{mA} + j \cdot 3\,\mathrm{mA} = (4 - j)\,\mathrm{mA}$$

$$|\underline{I}| = \sqrt{\mathrm{Re}^2 + \mathrm{Im}^2} = \sqrt{4^2 + 1^2}\,\mathrm{mA} = \underline{\underline{4{,}123\,\mathrm{mA}}}$$

Der Zeiger von $\underline{I}$ liegt im 4. Quadranten.

$$\varphi_\mathrm{i} = -\arctan\left(\frac{|\mathrm{Im}|}{|\mathrm{Re}|}\right) = -\arctan\left(\frac{1}{4}\right) = \underline{\underline{-14{,}04^\circ}}$$

Exponentialform: $\underline{\underline{\underline{I} = 4{,}123\,\mathrm{mA} \cdot \mathrm{e}^{-j14{,}04^\circ}}}$

f) Allgemein ist $i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \varphi_\mathrm{i})$; $\hat{I} = |\underline{I}| \cdot \sqrt{2} = 4{,}123 \cdot 1{,}414\,\mathrm{mA} = 5{,}83\,\mathrm{mA}$

$$\underline{\underline{i(t) = 5{,}83\,\mathrm{mA} \cdot \sin\left(1000\,\mathrm{s}^{-1} \cdot t - 14{,}04^\circ\right)}}$$

g) Die frequenzabhängige Impedanz $\underline{Z}(\omega)$ der *RLC*-Parallelschaltung ist:

$$\underline{\underline{\underline{Z}(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{R} + j \cdot \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}}}$$

Der Betrag bei $\omega = 1000\,\mathrm{s}^{-1}$ ist:

$$Z(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}; \quad \underline{\underline{Z(\omega = 1000\,\mathrm{s}^{-1}) = 2910{,}4\,\Omega}}$$

Probe: $I = |\underline{I}| \frac{12\,\mathrm{V}}{2910{,}4\,\Omega} = 4{,}123\,\mathrm{mA}$, i. O., Ergebnis wie in Teilaufgabe e)

h) Aus $\underline{Z}(\omega)$ in Teilaufgabe g) erhalten wir unter Berücksichtigung von

$$\angle\left(\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right) = \angle\underline{Z}_1 - \angle\underline{Z}_2\text{:}\ \varphi = -\arctan\left[R \cdot \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right]$$

$$\varphi = \varphi_{\mathrm{ui}} = \angle(\underline{U}, \underline{I}) = \angle\underline{Z} = \underline{\underline{14{,}04^\circ}}$$

Es ist $\varphi > 0$, I eilt also U nach, es liegt insgesamt induktives Verhalten vor.
Probe für den Nullphasenwinkel φ_{i}:
In der Angabe ist kein Nullphasenwinkel der Spannung angegeben, er ist also null:

$$\varphi_{\mathrm{u}} = \angle\underline{U} = 0$$

Der Nullphasenwinkel des Stromes ist:

$$\varphi_{\mathrm{i}} = \angle\underline{I} = \angle\left(\frac{\underline{U}}{\underline{Z}}\right) = \angle\underline{U} - \angle\underline{Z} = 0^\circ - 14{,}04^\circ = -14{,}04^\circ$$

Dieses Ergebnis stimmt mit dem Ergebnis in Teilaufgabe e) überein.
Rein ohmsches Verhalten zeigt die Schaltung bei der Resonanzkreisfrequenz:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \underline{\underline{1154{,}7\,\mathrm{s}^{-1}}}$$

Mit diesem Wert der Resonanzkreisfrequenz ist das überwiegend induktive Verhalten bei der Kreisfrequenz $\omega = 1000\,\mathrm{s}^{-1}$ plausibel: Ein Parallelschwingkreis verhält sich unterhalb der Resonanzfrequenz ohmsch-induktiv und oberhalb der Resonanzfrequenz ohmsch-kapazitiv.

Aufgabe 14.12

Ein ohmscher Widerstand, ein Kondensator und eine reale Spule sind in Abb. 14.11 parallel geschaltet und liegen an einer sinusförmigen Spannungsquelle U mit der Kreisfrequenz ω.

Gegeben: $R = 10\,\Omega$, $R_{\mathrm{L}} = 2{,}5\,\Omega$, $C = 100\,\mu\mathrm{F}$, $L = 5\,\mathrm{mH}$, $\omega = 1000\,\mathrm{s}^{-1}$

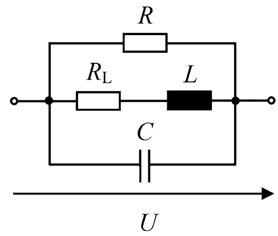


Abb. 14.11 Parallelschwingkreis mit zwei Widerständen

a) Berechnen Sie die Admittanz $\underline{Y}_\mathrm{L}$ der realen Spule.
b) Konstruieren Sie den Zeiger der Gesamtadmittanz $\underline{Y}$, verwenden Sie dabei das Ergebnis aus Punkt a).
c) Berechnen Sie die Gesamtadmittanz $\underline{Y}$ und die Gesamtimpedanz $\underline{Z}$.

Lösung

a) Die reale Spule hat die Impedanz (den komplexen Widerstand) $\underline{Z}_\mathrm{L} = R_\mathrm{L} + j\omega L$. Die Admittanz (der komplexe Leitwert) ist der Kehrwert $\underline{Y}_\mathrm{L} = \frac{1}{\underline{Z}_\mathrm{L}}$ der Impedanz.

$$\underline{Y}_\mathrm{L} = \frac{1}{R_\mathrm{L} + j\omega L} = \frac{1}{R_\mathrm{L} + j\omega L} \frac{R_\mathrm{L} - j\omega L}{R_\mathrm{L} - j\omega L} = \frac{R_\mathrm{L} - j\omega L}{R_\mathrm{L}^2 + (\omega L)^2}$$
$$= (0{,}080 - 0{,}160j)\,\frac{1}{\Omega} = \underline{\underline{(80 - 160j)\,\mathrm{mS}}}$$

Zähler und Nenner der Admittanz werden mit dem konjugiert komplexen Wert des Nenners multipliziert. Die Admittanz $\underline{Y}_\mathrm{L}$ erhält man so als komplexe Größe in Komponentenform.

Oft ist das Erweitern mit dem konjugiert komplexen Nenner aufwendig. Es ist vermeidbar durch die Nutzung der Exponentialform (auch als Polarform bezeichnet). Man erinnere sich an folgende Zusammenhänge bei komplexen Zahlen.

$$\underline{z} = a + jb; \quad |\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right); \quad \underline{z} = |\underline{z}| \cdot \mathrm{e}^{j\varphi};$$
$$\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{|\underline{z}_1|}{|\underline{z}_2|} \cdot \mathrm{e}^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Hier ist:

$$\underline{Y}_\mathrm{L} = \frac{1}{R_\mathrm{L} + j\omega L} = \frac{1}{\sqrt{R_\mathrm{L}^2 + (\omega L)^2}} \cdot \mathrm{e}^{-j\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)} = \frac{1}{5{,}59\,\Omega} \cdot \mathrm{e}^{-j\,63{,}4^\circ}$$

Mit dem Euler'schen Satz $\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi) = \mathrm{e}^{j\varphi}$ wird die Exponentialform in die Komponentenform gewandelt.

$$\underline{Y}_\mathrm{L} = \frac{1}{5{,}59}\,[\cos(-63{,}4^\circ) + j\,\sin(-63{,}4^\circ)]\,\frac{1}{\Omega} = (0{,}080 - j\,0{,}160)\,\mathrm{S}$$

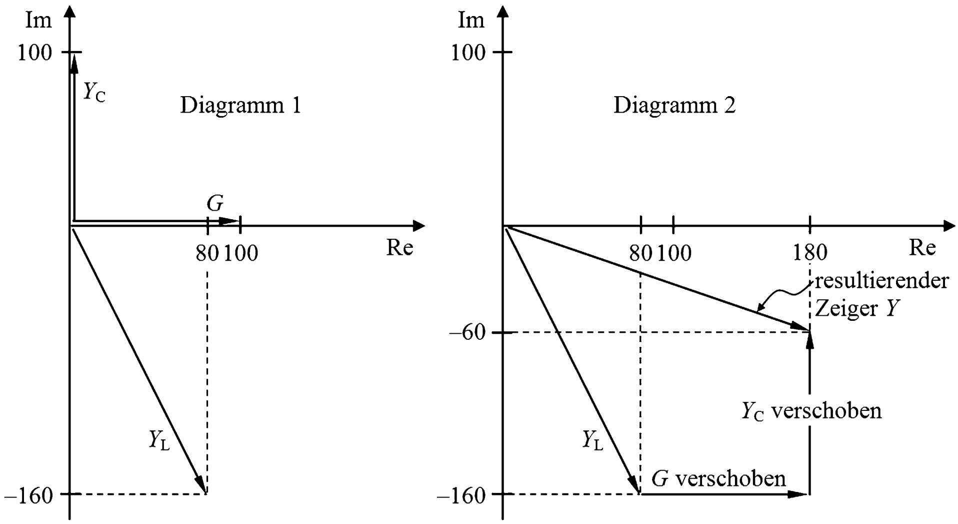


Abb. 14.12 Konstruktion des Zeigers der Gesamtadmittanz

b) Die Admittanz des Widerstandes R ist $\underline{G} = G = \frac{1}{R} = 0{,}1\,\text{S} = 100\,\text{mS}$. Dieser Wirkleitwert ist ein reeller Wert. Die Impedanz des Kondensators ist $\underline{Z}_\text{C} = \frac{1}{j\omega C}$. Die Admittanz des Kondensators ist der Kehrwert der Impedanz: $\underline{Y}_\text{C} = j\omega C = j \cdot 100\,\text{mS}$.
Nachdem alle komplexen Leitwerte berechnet sind, kann das Zeigerdiagramm des komplexen Leitwertes der gesamten Parallelschaltung gezeichnet werden (Abb. 14.12). Zunächst werden alle drei Zeiger $\underline{Y}_\text{L}$, $\underline{G}$ und $\underline{Y}_\text{C}$ in die komplexe Leitwertebene (Bemaßung in Milli-Siemens) eingetragen (Diagramm 1). Anschließend werden die drei Zeiger geometrisch addiert (Diagramm 2).
Der resultierende Zeiger hat den Wert $Y = (180 - 60j)\,\text{mS}$.

c) Der Gesamtleitwert ist:

$$\underline{Y} = \underline{Y}_\text{L} + \underline{G} + \underline{Y}_\text{C} = (80 - 160j)\,\text{mS} + 100\,\text{mS} + 100j\,\text{mS} = \underline{\underline{(180 - 60j)\,\text{mS}}}$$

Dieses Ergebnis stimmt mit dem Zeigerdiagramm überein.
Die Gesamtimpedanz $\underline{Z}$ ist der Kehrwert der Gesamtadmittanz $\underline{Y}$.

$$\underline{Z} = \frac{1}{(180 - 60j)\,\text{mS}} = \frac{1}{(180 - 60j)\,\text{mS}} \cdot \frac{(180 + 60j)\,\text{mS}}{(180 + 60j)\,\text{mS}} = \frac{(180 + 60j)\,\text{mS}}{(180^2 + 60^2)\,\text{mS}^2}$$

$$\underline{\underline{\underline{Z} = (5 + 1{,}67j)\,\Omega}}$$

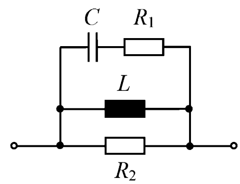


Abb. 14.13 Ein *RLC*-Schwingkreis

Aufgabe 14.13
Ein Schwingkreis besteht aus den in Abb. 14.13 gezeigten Bauelementen.

Gegeben: $C = 1\,\mu\text{F}$, $R_1 = 2\,\Omega$, $L = 10\,\text{mH}$, $R_2 = 1{,}5\,\text{k}\Omega$

Wie groß ist die Resonanzkreisfrequenz ω_0 und wie groß ist der Leitwert Y_0 des Schwingkreises bei Resonanz?

Lösung
Die Resonanzfrequenz einer Schaltung wird ermittelt, indem die Impedanz oder die Admittanz der Schaltung bestimmt wird. Der Imaginärteil wird gleich null gesetzt und nach ω bzw. f aufgelöst.

Da es sich um einen Parallelschwingkreis mit parallel geschalteten Bauteilen handelt, wird die Admittanz bestimmt.

$$\underline{Y} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L} + \frac{j\omega C}{1 + j\omega R_1 C}$$

Es wird jeweils mit dem konjugiert komplexen Wert des Nenners erweitert.

$$\underline{Y} = \frac{1}{R_2} - j\frac{1}{\omega L} + \frac{j\omega C + \omega^2 R_1 C^2}{1 + \omega^2 R_1^2 C^2}$$

Jetzt werden Real- und Imaginärteil getrennt.

$$\underline{Y} = \frac{1}{R_2} + \frac{\omega^2 R_1 C^2}{1 + \omega^2 R_1^2 C^2} + j\left(\frac{\omega C}{1 + \omega^2 R_1^2 C^2} - \frac{1}{\omega L}\right)$$

Der Imaginärteil wird auf Hauptnenner gebracht und der Zähler gleich null gesetzt, dann ist der Imaginärteil gleich null.

$$\text{Im}\{\underline{Y}\} = \omega_0^2 LC - \omega_0^2 R_1^2 C^2 - 1 = 0; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC - R_1^2 C^2}}; \quad \underline{\underline{\omega_0 = 10.002\,\text{s}^{-1}}}$$

Der Leitwert des Schwingkreises bei Resonanz ist der Realteil der Admittanz.

$$Y_0 = \frac{1}{R_2} + \frac{\omega^2 R_1 C^2}{1 + \omega^2 R_1^2 C^2}; \quad \underline{\underline{Y_0 = 0{,}8\overline{6}\,\text{mS}}}$$

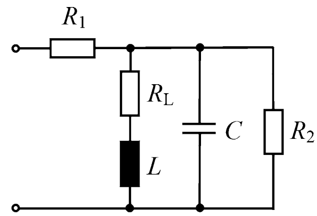


Abb. 14.14 Die Resonanzkreisfrequenz der Schaltung ist allgemein zu berechnen

Aufgabe 14.14
Berechnen Sie allgemein die Resonanzkreisfrequenz ω_0 des Zweipols in Abb. 14.14.

Lösung
Bei der Resonanzfrequenz ω_0 ist $\mathrm{Im}\{\underline{Z}\} = 0$ bzw. $\mathrm{Im}\{\underline{Y}\} = 0$.

Teilschaltung: $\underline{Y}_1 = \frac{1}{R_L + j\omega L} + j\omega C$

R_1 und R_2 tragen nichts zum Imaginärteil von $\underline{Y}_1$ und damit von $\underline{Y}$ bei, sie haben keinen Einfluss auf die Resonanzfrequenz. Die Resonanzbedingung ist deshalb:

$$\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{R_L + j\omega L} + j\omega C\right\} = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\left\{\frac{R_L - j\omega L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} + j\omega C\right\} = 0;$$

$$\frac{-\omega_0 L}{R_L^2 + \omega_0^2 L^2} + \omega_0 C = 0$$

$$-\omega_0 L + \omega_0 C R_L^2 + C L^2 \omega_0^3 = 0; \quad \omega_0 \cdot (C L^2 \omega_0^2 + C R_L^2 - L) = 0$$

$\omega_0 = 0$ ist keine Resonanz im eigentlichen Sinne. Der Klammerausdruck wird null gesetzt.

$$\omega_0^2 = \frac{L - C R_L^2}{C L^2}; \quad \underline{\underline{\omega_0 = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{L}{C} - R_L^2}}}$$

Alternative Lösung

Teilschaltung:

$$\underline{Z}_1 = (R_L + j\omega L) \parallel C$$

$$\underline{Z}_1 = \frac{(R_L + j\omega L) \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_L + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R_L + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega R_L C}$$

$$= \frac{(R_L + j\omega L) \cdot (1 - \omega^2 LC + j\omega R_L C)}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega R_L C)^2}$$

$$\underline{Z}_1 = \frac{R_L - \omega^2 L R_L C + \omega^2 L R_L C}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega R_L C)^2} + j\,\frac{\omega L - \omega^3 L^2 C - \omega R_L^2 C}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega R_L C)^2}$$

$$\underline{Z}_1 = \frac{R_L}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega R_L C)^2} + j\,\frac{\omega(L - R_L^2 C - \omega^2 L^2 C)}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega R_L C)^2}$$

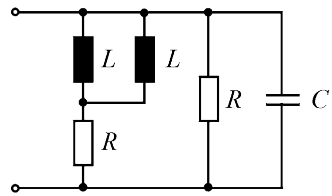


Abb. 14.15 Zu bestimmen sind die Admittanz und die Resonanzkreisfrequenz

Die Addition $R_1 + \underline{Z}_1$ verändert den Imaginärteil von $\underline{Z}_1$ nicht. Die Addition $\frac{1}{R_2} + \frac{1}{\underline{Z}_1}$ verändert den Imaginärteil von $\frac{1}{\underline{Z}_1}$ nicht. Die Widerstände R_1 und R_2 haben keinen Einfluss auf die Resonanzfrequenz.

$\omega_0 = 0$ ist keine Lösung (keine Resonanz).

$$L - \omega_0^2 L^2 C - R_\mathrm{L}^2 C = 0; \quad \underline{\underline{\omega_0 = \sqrt{\frac{L - R_\mathrm{L}^2 C}{L^2 C}} = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{L}{C} - R_\mathrm{L}^2}}}$$

Aufgabe 14.15

Berechnen Sie allgemein die Admittanz $\underline{Y}$ der Schaltung in Abb. 14.15 in der Form $\underline{Y} = \mathrm{Re}\{\underline{Y}\} + j \cdot \mathrm{Im}\{\underline{Y}\}$. Bestimmen Sie dann die allgemein die Resonanzkreisfrequenz ω_r der Schaltung.

Lösung

$$\underline{Y} = \frac{1}{j\omega\frac{L}{2} + R} + \frac{1}{R} + j\omega C = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{2}{2R + j\omega L}$$
$$= \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{2(2R - j\omega L)}{(2R + j\omega L)(2R - j\omega L)}$$
$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{2(2R - j\omega L)}{4R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{4R}{4R^2 + \omega^2 L^2} - j\frac{\omega 2L}{4R^2 + \omega^2 L^2}$$
$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + \frac{4R}{4R^2 + \omega^2 L^2} + j\frac{\omega 4R^2 C + \omega^3 L^2 C - \omega 2L}{4R^2 + \omega^2 L^2}$$

Bei Resonanz ist der Imaginärteil null.

$$\omega_\mathrm{r} 4R^2 C + \omega_\mathrm{r}^3 L^2 C - \omega_\mathrm{r} 2L = 0;$$
$$\omega_\mathrm{r} 4R^2 C + \omega_\mathrm{r}^3 L^2 C - \omega_\mathrm{r} 2L = \omega_\mathrm{r}(4R^2 C - 2L + \omega_\mathrm{r}^3 L^2 C) = 0$$

$\omega_\mathrm{r} = 0$ ist keine Lösung (keine Resonanz). Die negative Lösung der quadratischen Gleichung ist physikalisch sinnlos, negative Frequenzen gibt es nicht.

$$\omega_\mathrm{r}^2 L^2 C = 2L - 4R^2 C; \quad \underline{\underline{\omega_\mathrm{r} = \sqrt{\frac{2L - 4R^2 C}{L^2 C}}}}$$

Mehrphasensysteme, Drehstrom 15

Zusammenfassung

Begonnen wird mit der Sternschaltung eines dreiphasigen Drehstromverbrauchers mit Mittelleiter am Dreiphasennetz. Mit der komplexen Rechnung werden die Außenleiterströme und der Mittelleiterstrom bestimmt. Fortgesetzt werden die Berechnungen bei der Sternschaltung des Verbrauchers ohne Mittelleiter für unsymmetrische und symmetrische Drehstromverbraucher. Für die Dreieckschaltung des Verbrauchers werden Außenleiterströme, Strangströme und Strangspannungen sowie Strangimpedanzen berechnet. Es folgen Berechnungen zur Leistung bei Drehstrom in Sternschaltung und in Dreieckschaltung. Für die Blindleistungskompensation werden notwendige Kapazitätswerte bestimmt.

15.1 Grundwissen – kurz und bündig

- Eine einfache Versorgung eines Verbrauchers mit elektrischer Energie erfolgt mit dem Einphasen-Wechselstromnetz (*Einphasennetz*). Dieses Netz hat bezüglich der Energieübertragung erhebliche Nachteile gegenüber einem Mehrphasennetz.
- In einem offenen Mehrphasensystem werden die Stränge des Generators ohne Bezug zueinander wie einzelne Wechselspannungsquellen mit verschiedenen Phasenlagen betrachtet (nichtverkettetes Mehrphasensystem). In einem verketteten Mehrphasensystem sind die Phasenwicklungen des Generators miteinander verbunden (z. B. in Sternschaltung oder in Ringschaltung). Die Verbraucher können ebenfalls entweder in Sternschaltung oder in Ringschaltung geschaltet sein.
- Das wichtigste Mehrphasensystem ist das Drehstromnetz.
- In einem Drehstromgenerator sind drei Spulen im Winkel von 120° versetzt angebracht. Dadurch sind die drei erzeugten Spannungen um je 120° gegeneinander phasenverschoben.
- Ein Drehstromgenerator kann in *Stern* oder in *Dreieck* geschaltet werden.

L. Stiny, *Aufgabensammlung zur Elektrotechnik und Elektronik*,
DOI 10.1007/978-3-658-14381-7_15

- Man unterscheidet zwischen den Außenleitern (Phasen) und den Strängen. Die Verbindungsleiter der Außenpunkte des Generators und der Außenpunkte des Verbrauchers nennt man *Außenleiter* (L1, L2, L3). Als *Strang* wird die in einer Strombahn liegende einzelne Energiequelle bzw. der einzelne Verbraucher bezeichnet.
- Es gibt Drei- und Vierleitersysteme.
- Im Drehstromnetz sind die Strangspannungen: $\underline{U}_1 = U$, $\underline{U}_2 = U \cdot \mathrm{e}^{-j\cdot 120^\circ}$, $\underline{U}_3 = U \cdot \mathrm{e}^{-j\cdot 240^\circ}$.
- Drehstromgenerator in Sternschaltung:
  Außenleiterspannungen $= \sqrt{3} \cdot$ Strangspannungen.
- Drehstromgenerator in Dreieckschaltung: Außenleiterspannungen = Strangspannungen.
- Ein Drehstromverbraucher kann in Stern (mit oder ohne Mittelleiter) oder in Dreieck geschaltet werden.
- Verbraucher in Sternschaltung: Leiterströme = Strangströme, Außenleiterspannung = $\sqrt{3} \cdot$ Strangspannung.
- Verbraucher in Sternschaltung *mit* Mittelleiter
  Spannungen an den Verbraucherwiderständen:

$$\underline{U}_1 = U, \quad \underline{U}_2 = U \cdot \mathrm{e}^{-j\cdot 120^\circ}, \quad \underline{U}_3 = U \cdot \mathrm{e}^{-j\cdot 240^\circ} = U \cdot e^{+j\cdot 120^\circ}$$

  Außenleiterströme: $\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1}$; $\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2}$; $I_3 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3}$
  Mittelleiterstrom: $\underline{I}_\mathrm{N} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$
  Symmetrische Belastung: $\underline{I}_\mathrm{N} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$, der Mittelleiter kann entfallen.
- Verbraucher in Sternschaltung *ohne* Mittelleiter
  Außenleiterströme:

$$\underline{I}_1 = (\underline{U}_1 - \underline{U}_\mathrm{N}) \cdot \underline{Y}_1; \quad \underline{I}_2 = (\underline{U}_2 - \underline{U}_\mathrm{N}) \cdot \underline{Y}_2; \quad I_3 = (\underline{U}_3 - \underline{U}_\mathrm{N}) \cdot \underline{Y}_3$$

  Spannung des Drehstromverbraucher-Sternpunktes:

$$\underline{U}_\mathrm{N} = \frac{\underline{U}_1 \cdot \underline{Y}_1 + \underline{U}_2 \cdot \underline{Y}_2 + \underline{U}_3 \cdot \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$
$$\text{mit } \underline{U}_1 = U, \quad \underline{U}_2 = U \cdot \mathrm{e}^{-j\cdot 120^\circ}, \quad \underline{U}_3 = U \cdot \mathrm{e}^{-j\cdot 240^\circ} = U \cdot e^{+j\cdot 120^\circ}$$

  Strom in jedem Außenleiter bei symmetrischer Belastung:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_\mathrm{Strang}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_\mathrm{Leiter}}{\sqrt{3} \cdot \underline{Z}}$$

- Verbraucher in Dreieckschaltung
  Außenleiterspannung = Strangspannung
  Strangströme:

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_1}; \quad \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_2}; \quad \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_3}$$

Außenleiterströme:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12}; \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}; \quad \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$$

Symmetrische Belastung: $I_{\text{Leiter}} = \sqrt{3} \cdot I_{\text{Strang}}$
Strangströme und Leiterströme sind bei symmetrischer Belastung gleich groß:

$$\underline{I}_{12} = \underline{I}_{23} = \underline{I}_{31} = \underline{I}_{\text{Strang}}, \quad \underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \underline{I}_3 = \underline{I}_{\text{Leiter}}$$

- Unabhängig von der Art der Schaltung (Stern oder Dreieck) ist die gesamte Drehstrom-Wirk-, Schein- und Blindleistung bei symmetrischer Belastung:

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos(\varphi) = S \cdot \cos(\varphi) \\ S &= \sqrt{3} \cdot U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2} \\ Q &= \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \sin(\varphi) = S \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}$$

  U = Effektivwert der Außenleiterspannung, I = Effektivwert des Außenleiterstromes,
  $\varphi = \varphi_{\text{ui}} = \varphi_{\text{u}} - \varphi_{\text{i}}$ = Phasenwinkel zwischen *Strang*spannung und *Strang*strom (!)
- In Dreieckschaltung ist die Leistungsaufnahme dreimal größer als in Sternschaltung.

$$P_\Delta = 3 \cdot P_{\text{Y}}, \quad S_\Delta = 3 \cdot S_{\text{Y}}, \quad Q_\Delta = 3 \cdot Q_{\text{Y}}$$

- Im symmetrischen Drehstromsystem ist die Momentanleistung des Gesamtsystems konstant.
- Drehstrom-Niederspannungsnetz des europäischen Verbundnetzes
  Betrieb einphasiger Verbraucher mit den Strangspannungen (Effektivwerte):

$$U_1 = U_2 = U_3 = U = U_{\text{Y}} = U_{\text{Str}} = 230\,\text{V}.$$

  Betrieb dreiphasiger Verbraucher mit den Leiterspannungen (Effektivwerte):

$$U_{12} = U_{23} = U_{31} = \sqrt{3} \cdot U = U_\Delta = U_{\text{L}} = 400\,\text{V}.$$

- Wert *einer* Kompensationskapazität bei symmetrischer Sternschaltung des Verbrauchers bei Sternschaltung der drei Kondensatoren:

$$\begin{aligned} C_{\text{Y}} &= \frac{P_{\text{Strang}} \cdot [\tan(\varphi) - \tan(\varphi')]}{\omega \cdot U_{\text{Strang}}^2} = \frac{\frac{P}{3} \cdot [\tan(\varphi) - \tan(\varphi')]}{\omega \cdot \left(\frac{U_{\text{L}}}{\sqrt{3}}\right)^2} \\ &= \frac{P \cdot [\tan(\varphi) - \tan(\varphi')]}{\omega \cdot U_{\text{L}}^2} \end{aligned}$$

P_{Strang} = Strangwirkleistung
U_{Strang} = Strangspannung
P = Gesamtwirkleistung
U_{L} = Außenleiterspannung
φ = Phasenverschiebungswinkel zwischen Strangspannung und Strangstrom ohne Kompensation
φ' = Phasenverschiebungswinkel zwischen Strangspannung und Strangstrom mit Kompensation

- Blindleistungskompensation bei Dreieckschaltung der Kondensatoren: Für ihre Kapazität ist nur ein Drittel des Wertes bei Sternschaltung der Kondensatoren erforderlich.

$$C_{\Delta} = \frac{1}{3} \cdot C_{\mathrm{Y}}$$

- Ein Wattmeter hat einen Strommesspfad und einen Spannungsmesspfad.
- Die Aron-Schaltung dient zur Messung der Wirkleistung eines Drehstromverbrauchers mit zwei Leistungsmessern.

15.2 Sternschaltung des Verbrauchers mit Mittelleiter

Aufgabe 15.1
Ein dreiphasiger Drehstromverbraucher ist an einem 230/400 Volt Dreiphasennetz in Sternschaltung mit Mittelleiter angeschlossen (Abb. 15.1). Es fließen folgende Ströme:

$$\underline{I}_{\mathrm{L1}} = 320\,\mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{-j\,20^\circ}, \quad \underline{I}_{\mathrm{L2}} = 150\,\mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{j\,10^\circ}, \quad \underline{I}_{\mathrm{L3}} = 400\,\mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{-j\,30^\circ}.$$

Die Winkel der Ströme sind auf die jeweilige Sternspannung bezogen.

Wie groß ist der Strom $\underline{I}_{\mathrm{N}}$ im Mittelleiter?

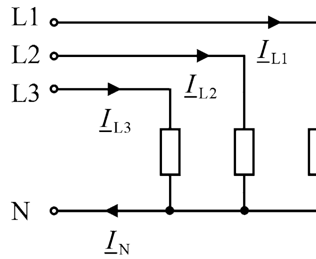
Lösung
Die Winkel der Ströme werden auf die Sternspannung $\underline{U}_{\mathrm{L1N}}$ bezogen.

$$\underline{I}_{\mathrm{L1N}} = 320\,\mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{-j\,20^\circ} = 320\,\mathrm{A} \cdot [\cos(20^\circ) - j\,\sin(20^\circ)] = 300{,}7\,\mathrm{A} - j109{,}5\,\mathrm{A}$$
$$\underline{I}_{\mathrm{L2N}} = 150\,\mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{j\,(10^\circ - 120^\circ)} = 150\,\mathrm{A} \cdot [\cos(110^\circ) - j\,\sin(110^\circ)] = -51{,}3\,\mathrm{A} - j141\,\mathrm{A}$$
$$\underline{I}_{\mathrm{L3N}} = 400\,\mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{j(-30^\circ - 240^\circ)} = 400\,\mathrm{A} \cdot [\cos(270^\circ) - j\,\sin(270^\circ)] = 0\,\mathrm{A} + j\,400\,\mathrm{A}$$

Real- und Imaginärteile der Ströme werden addiert.

$$\underline{\underline{\underline{I}_{\mathrm{N}} = 249{,}4\,\mathrm{A} + j149{,}5\,\mathrm{A}}}$$

Abb. 15.1 Sternschaltung mit Mittelleiter



Aufgabe 15.2
An ein 400 V/230 V-Drehstromnetz (Vierleitersystem, Last in Sternschaltung mit Mittelleiter) ist ein unsymmetrischer Verbraucher nach Abb. 15.2 angeschlossen. Zu bestimmen sind die komplexen Außenleiterströme $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ und der komplexe Mittelleiterstrom $\underline{I}_N$ in Exponentialform. Für die Bauelemente gelten folgende Werte: $R_1 = 330\,\Omega$, $R_2 = 220\,\Omega$, $R_3 = 150\,\Omega$, $L = 0{,}8\,\text{H}$, $C = 9{,}0\,\mu\text{F}$.

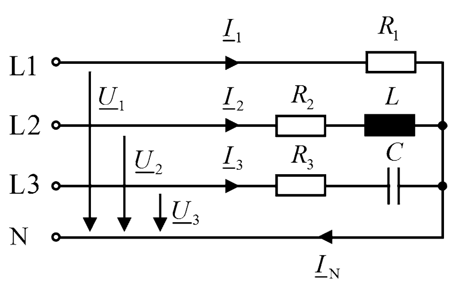
Lösung
An den komplexen Widerständen der Stränge liegen die Spannungen:

$$\begin{aligned}
\underline{U}_1 &= 230\,\text{V} \\
\underline{U}_2 &= 230\,\text{V} \cdot \text{e}^{-j\cdot 120^\circ} \\
\underline{U}_3 &= 230\,\text{V} \cdot \text{e}^{-j\cdot 240^\circ} = 230\,\text{V} \cdot \text{e}^{+j\cdot 120^\circ}
\end{aligned}$$

Die Strangwiderstände sind:

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_1 &= R_1 = 330\,\Omega \\
\underline{Z}_2 &= R_2 + j\omega L = (220 + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 0{,}8)\,\Omega = 334{,}0\,\Omega \cdot \text{e}^{j\cdot\arctan\left(\frac{80\pi}{220}\right)} \\
&= 334{,}0\,\Omega \cdot \text{e}^{j\cdot 48{,}8^\circ} \\
\underline{Z}_3 &= R_3 + \frac{1}{j\omega C} = \left(150 + \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 9{,}0 \cdot 10^{-6}}\right)\Omega = (150 - j \cdot 353{,}7)\,\Omega \\
\underline{Z}_3 &= 384{,}2\,\Omega \cdot \text{e}^{-j\cdot\arctan\left(\frac{353{,}7}{150}\right)} = 384{,}2\,\Omega \cdot \text{e}^{-j\cdot 67^\circ}
\end{aligned}$$

Abb. 15.2 Beispiel für eine unsymmetrische Last in Sternschaltung mit angeschlossenem Mittelleiter



Die Außenleiterströme sind:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{230\,\text{V}}{330\,\Omega} = \underline{\underline{0{,}7\,\text{A}}};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{230\,\text{V}\cdot e^{-j\cdot 120°}}{334{,}0\,\Omega\cdot e^{j\cdot 48{,}8°}} = 0{,}69\,\text{A}\cdot e^{-j\cdot 168{,}8°} = \underline{\underline{0{,}69\,\text{A}\cdot e^{j\cdot 191{,}2°}}}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{230\,\text{V}\cdot e^{j\cdot 120°}}{384{,}2\,\Omega\cdot e^{-j\cdot 67°}} = \underline{\underline{0{,}6\,\text{A}\cdot e^{j\cdot 187°}}};\quad \underline{I}_\text{N} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$$

$$\underline{I}_\text{N} = (-0{,}57 - j\cdot 0{,}2)\,\text{A} = 0{,}6\,\text{A}\cdot e^{-j\cdot 160{,}1°} = \underline{\underline{0{,}6\,\text{A}\cdot e^{j\cdot 199{,}9°}}}$$

Aufgabe 15.3

Bei einem Vierleiter-Drehstromnetz mit der Außenleiterspannung $U = 400\,\text{V}$ sind zwei einphasige Verbraucher angeschlossen. Der induktive Verbraucher an L1 − N nimmt bei dem Leistungsfaktor $\cos(\varphi_1) = 0{,}82$ die Wirkleistung $P_1 = 2{,}0\,\text{kW}$ auf. Der kapazitive Verbraucher an L2 − N nimmt bei $\cos(\varphi_2) = 0{,}76$ die Wirkleistung $P_2 = 1{,}8\,\text{kW}$ auf. Wie groß sind die Außenleiterströme I_1 und I_2? Welchen Wert hat der Neutralleiterstrom I_N?

Lösung

Am Verbraucher 1 liegt die Sternspannung $\underline{U}_1 = 230\,\text{V}$. Am Verbraucher 2 liegt die Sternspannung $\underline{U}_2 = 230\,\text{V}\cdot e^{-j\cdot 120°}$. Der von Verbraucher 1 aufgenommene und in Leiter 1 fließende Strom ist somit:

$$I_1 = \frac{P_1}{U_1\cdot\cos(\varphi_1)} = \frac{2{,}0\,\text{kW}}{230\,\text{V}\cdot 0{,}82} = \underline{\underline{10{,}6\,\text{A}}}$$

Der durch Verbraucher 2 und in Leiter 2 fließende Strom ist:

$$I_2 = \frac{P_2}{U_2\cdot\cos(\varphi_2)} = \frac{1{,}8\,\text{kW}}{230\,\text{V}\cdot 0{,}76} = \underline{\underline{10{,}3\,\text{A}}}$$

$\underline{I}_1$ eilt der Spannung $\underline{U}_1$ nach (der Verbraucher ist induktiv), und zwar um $\arccos(0{,}82) = 34{,}9°$.

Der Winkel von $\underline{U}_1$ ist null. Der Winkel von $\underline{I}_1$ ist somit $\varphi_{i1} = -34{,}9°$.

$\underline{I}_2$ eilt der Spannung $\underline{U}_2$ voraus (der Verbraucher ist kapazitiv), und zwar um $\arccos(0{,}76) = 40{,}5°$.

Der Winkel von $\underline{U}_2$ ist $-120°$. Der Winkel von $\underline{I}_2$ ist somit $\varphi_{i2} = -120° + 40{,}5° = -79{,}5°$.

In komplexer Schreibweise sind die beiden Ströme:

$$\underline{I}_1 = 10{,}6\,\text{A}\cdot(\cos(-34{,}9°) + j\cdot\sin(-34{,}9°)) = (8{,}69 - j\cdot 6{,}07)\,\text{A}$$

$$\underline{I}_1 = 10{,}3\,\text{A}\cdot(\cos(-79{,}5°) + j\cdot\sin(-79{,}5°)) = (1{,}88 - j\cdot 10{,}13)\,\text{A}$$

$$\underline{I}_\text{N} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = (10{,}57 - j\cdot 16{,}20)\,\text{A};\quad I_\text{N} = \sqrt{10{,}57^2 + 16{,}2^2}\,\text{A};\quad \underline{\underline{I_\text{N} = 19{,}3\,\text{A}}}$$

15.3 Sternschaltung des Verbrauchers ohne Mittelleiter

Aufgabe 15.4

Bei einem Dreileitersystem (Drehstromnetz ohne Mittelleiter) mit der Außenleiterspannung $U = 400\,\mathrm{V}$ sind drei Verbraucherwiderstände $R_1 = 270\,\Omega$, $R_2 = 220\,\Omega$ und $R_3 = 470\,\Omega$ in Sternschaltung angeschlossen (Abb. 15.3). Zu bestimmen sind die Außenleiterströme I_1, I_2, I_3.

Lösung

Die Leitwerte der Verbraucherwiderstände sind:

$$Y_1 = \frac{1}{R_1} = 3{,}70\,\mathrm{mS};\quad Y_2 = \frac{1}{R_2} = 4{,}55\,\mathrm{mS};\quad Y_3 = \frac{1}{R_3} = 2{,}13\,\mathrm{mS}$$

Die Strangspannungen sind mit $U = 230\,\mathrm{V}$:

$$\underline{U}_1 = U \cdot \mathrm{e}^{j0°} = U$$
$$\underline{U}_2 = U \cdot \mathrm{e}^{-j120°}$$
$$\underline{U}_3 = U \cdot \mathrm{e}^{-j240°} = U \cdot \mathrm{e}^{+j120°}$$

Die Spannung U_N ist:

$$U_\mathrm{N} = \frac{\underline{U}_1 \cdot \underline{Y}_1 + \underline{U}_2 \cdot \underline{Y}_2 + \underline{U}_3 \cdot \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$
$$U_\mathrm{N} = \frac{230\,\mathrm{V} \cdot \left(3{,}70\,\mathrm{mS} + \mathrm{e}^{-j120°} \cdot 4{,}55\,\mathrm{mS} + \mathrm{e}^{-j240°} \cdot 2{,}13\,\mathrm{mS}\right)}{10{,}38\,\mathrm{mS}}$$
$$U_\mathrm{N} = (7{,}98 - j \cdot 46{,}44)\,\mathrm{V}$$

Die Außenleiterströme sind:

$$\underline{I}_1 = (\underline{U}_1 - \underline{U}_\mathrm{N}) \cdot \underline{Y}_1$$
$$\underline{I}_2 = (\underline{U}_2 - \underline{U}_\mathrm{N}) \cdot \underline{Y}_2$$
$$\underline{I}_3 = (\underline{U}_3 - \underline{U}_\mathrm{N}) \cdot \underline{Y}_3$$
$$\underline{I}_1 = [230\,\mathrm{V} - (7{,}98 - j \cdot 46{,}44)\,\mathrm{V}] \cdot 3{,}70\,\mathrm{mS};\quad \underline{\underline{I_1 = 0{,}84\,\mathrm{A}}}$$

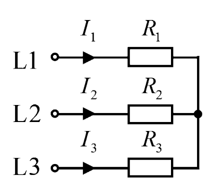


Abb. 15.3 Unsymmetrischer Drehstromverbraucher in Sternschaltung ohne Mittelleiter

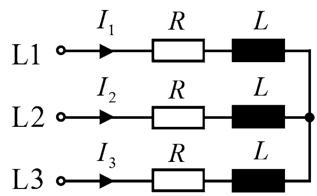


Abb. 15.4 Symmetrischer Drehstromverbraucher in Sternschaltung ohne Mittelleiter

$$\underline{I}_2 = [230\,\text{V} \cdot (\cos(-120°) + j \cdot \sin(-120°)) - (7{,}98 - j \cdot 46{,}44)\,\text{V}] \cdot 4{,}55\,\text{mS};$$

$$\underline{\underline{I_2 = 0{,}89\,\text{A}}}$$

$$\underline{I}_3 = [230\,\text{V} \cdot (\cos(-240°) + j \cdot \sin(-240°)) - (7{,}98 - j \cdot 46{,}44)\,\text{V}] \cdot 2{,}13\,\text{mS};$$

$$\underline{\underline{I_3 = 0{,}59\,\text{A}}}$$

Aufgabe 15.5
Bei einem Dreileitersystem (Drehstromnetz ohne Mittelleiter) mit der Außenleiterspannung $U = 400\,\text{V}$ sind drei Verbraucherwiderstände mit $R = 60\,\Omega$, $L = 0{,}25\,\text{H}$ in Sternschaltung nach Abb. 15.4 angeschlossen. Zu bestimmen sind die Außenleiterströme I_1, I_2, I_3.

Lösung
Die Impedanz eines Stranges ist:

$$\underline{Z} = R + j\omega L = (60 + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 0{,}25)\,\Omega = (60 + j \cdot 78{,}54)\,\Omega$$

Der Betrag ist $Z = \sqrt{60^2 + 78{,}54^2}\,\Omega = 98{,}84\,\Omega$.

Bei symmetrischer Belastung ist der Strom in jedem Außenleiter:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_{\text{Strang}}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_{\text{Leiter}}}{\sqrt{3} \cdot \underline{Z}}; \quad \underline{\underline{I_1 = I_2 = I_3 = \frac{400\,\text{V}}{\sqrt{3} \cdot Z} = 2{,}34\,\text{A}}}$$

15.4 Dreieckschaltung des Verbrauchers

Aufgabe 15.6
An einem Drehstromnetz mit der Außenleiterspannung $U = 400\,\text{V}$ sind symmetrische Verbraucher mit $R = 4\,\Omega$ und $X_\text{L} = 3\,\Omega$ angeschlossen (Abb. 15.5).

a) Wie groß sind die Beträge der Ströme in jedem Strang?
b) Wie groß sind die Beträge der Ströme in den Zuleitungen?
c) Welche Wirkleistung wird dem in Dreieck geschalteten Verbraucher zugeführt?
d) Wie groß ist der Leistungsfaktor $\cos(\varphi)$?

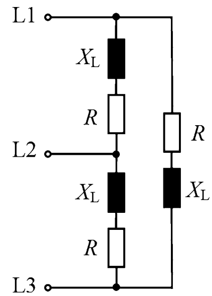


Abb. 15.5 Symmetrische Verbraucher

Lösung

a) An jedem Strang liegt die verkettete Spannung (Außenleiterspannung) $U = 400\,\text{V}$. Die Ströme in den Strängen sind gleich groß, da die Belastung symmetrisch ist. Ein Strang hat den komplexen Widerstand $\underline{Z} = R + jX_L$.

$$I_{\text{Strang}} = \frac{400\,\text{V}}{\sqrt{\text{R}^2 + X_L^2}} = \underline{\underline{80\,\text{A}}}$$

b) Bei einem Drehstromverbraucher in Dreieckschaltung gilt für die Außenleiterströme bei symmetrischer Belastung: $I_{\text{Leiter}} = \sqrt{3} \cdot I_{\text{Strang}}$; $L_{\text{Leiter}} = 1{,}732 \cdot 80\,\text{A} = \underline{\underline{138{,}6\,\text{A}}}$

c) Wirkleistung verbrauchen nur die ohmschen Widerstände.

$$P = 3 \cdot R \cdot I_{\text{Strang}}^2 = \underline{\underline{76{,}8\,\text{kW}}}$$

d) Der Leistungsfaktor ergibt sich aus dem Verhältnis von Wirkleistung zu Scheinleistung bzw. aus dem Verhältnis von Wirkwiderstand zu Scheinwiderstand.

$$\cos(\varphi) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \underline{\underline{0{,}8}}$$

Aufgabe 15.7

Ein in Dreieck geschalteter symmetrischer Verbraucher hat in jedem Strang eine Reihenschaltung eines Widerstandes $R = 500\,\Omega$ und eines Kondensators $C = 10\,\mu\text{F}$. Das Netz liefert eine sinusförmige Wechselspannung 400 V, 50 Hz.

Berechnen Sie

a) den Blindwiderstand X_C des Kondensators,
b) den Scheinwiderstand Z der RC-Reihenschaltung,
c) die Strangspannung U_{Str},
d) die drei Strangströme I_{Str1}, I_{Str2}, I_{Str3},
e) die drei Außenleiterströme I_{L1}, I_{L2}, I_{L3}.

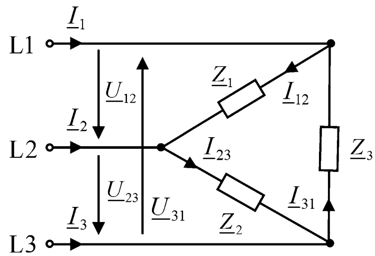


Abb. 15.6 Drehstromverbraucher in Dreieckschaltung

Lösung

a) Der Blindwiderstand des Kondensators ist: $X_C = \frac{1}{\omega C} = \underline{\underline{318{,}3\,\Omega}}$

b) Der Scheinwiderstand der *RC*-Reihenschaltung ist: $Z = \sqrt{318{,}3^2 + 500^2}\,\Omega = \underline{\underline{592{,}7\,\Omega}}$

c) Die Strangspannung ist gegeben: $U_{Str} = 400\,\text{V}$

d) Da die Belastung symmetrisch ist, haben die drei Strangströme den gleichen Betrag: $I_{Str1} = I_{Str2} = I_{Str3} = I_{Str} = \frac{400\,\text{V}}{592{,}7\,\Omega} = \underline{\underline{675\,\text{mA}}}$

e) Die drei Außenleiterströme sind ebenfalls gleich groß: $I_L = \sqrt{3} \cdot I_{Str} = \underline{\underline{1{,}17\,\text{A}}}$

Aufgabe 15.8

Die nach Abb. 15.6 in Dreieck geschalteten Impedanzen sind ohmsch-induktive Verbraucher. Es gilt:

$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = R + j\omega L$ mit $R = 160\,\Omega$, $L = 0{,}4\,\text{H}$. Das Drehstromnetz hat die Außenleiterspannung $U = 400\,\text{V}$.

a) Wie groß sind die Außenleiterströme I_1, I_2, I_3?

b) Wie groß ist der Leistungsfaktor $\cos(\varphi)$ der Schaltung?

Lösung

a) Die gegebene Dreieckschaltung ist ein symmetrischer Drehstromverbraucher. Sowohl die Strangströme als auch die Leiterströme sind gleich groß.

$$\underline{I}_{12} = \underline{I}_{23} = \underline{I}_{31} = \underline{I}_{Str}; \quad \underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \underline{I}_3 = \underline{I}_L$$

Es genügt, nur einen der drei Stränge zu betrachten. Jeder Strang hat die Impedanz:

$$\underline{Z} = R + j\omega L = (160 + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 0{,}4)\,\Omega = (160 + j \cdot 125{,}66)\,\Omega$$

Der Betrag jeder Strangimpedanz ist: $Z = \sqrt{160^2 + 125{,}66^2}\,\Omega = 203{,}5\,\Omega$.

Die Außenleiterspannung ist gleich der Strangspannung. In jedem Strang fließt der Strom:

$$I_{Str} = \frac{400\,\text{V}}{203{,}5\,\Omega} = 1{,}966\,\text{A}$$

Bei symmetrischer Last gilt für die Ströme bei der Dreieckschaltung:

$$I_L = \sqrt{3} \cdot I_{Str}$$

Somit sind die Außenleiterströme: $\underline{\underline{I_1 = I_2 = I_3 = 3{,}41\,\text{A}}}$

b) Wir wählen die Außenleiterspannung $\underline{U}_{12}$ mit dem Betrag $U_{12} = 400\,\text{V}$ als Bezugsgröße und setzen sie reell an. Der komplexe Strangstrom ist:

$$\underline{I}_{Str} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}} = \frac{400\,\text{V}}{(160 + j \cdot 125{,}66)\,\Omega} = (1{,}546 - j \cdot 1{,}214)\,\text{A} = 1{,}97\,\text{A} \cdot e^{-j \cdot 38{,}1^\circ}$$

Der Leistungsfaktor der Schaltung ist: $\underline{\underline{\cos(\varphi) = \cos(38{,}1^\circ) = 0{,}78}}$

Der Leistungsfaktor kann auch aus dem Verhältnis von Wirkleistung zu Scheinleistung bzw. aus dem Verhältnis von Wirkwiderstand zu Scheinwiderstand berechnet werden.

$$\cos(\varphi) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{160\,\Omega}{\sqrt{(160\,\Omega)^2 + (125{,}66\,\Omega)^2}} = \underline{\underline{0{,}78}}$$

15.5 Leistung bei Drehstrom

Aufgabe 15.9

Ein Drehstrommotor besitzt den Leistungsfaktor $\cos(\varphi) = 0{,}85$. Wird er an das 400 V/230 V-Netz in Sternschaltung angeschlossen, so fließt in jedem Leiter ein Strom von $I = 9{,}5\,\text{A}$.

Wie groß sind Scheinleistung S, Wirkleistung P und Blindleistung Q?

Lösung

$$S = \sqrt{3} \cdot U \cdot I; \quad S = \sqrt{3} \cdot 400\,\text{V} \cdot 9{,}5\,\text{A}; \quad \underline{\underline{S = 6582\,\text{VA}}}$$

$$P = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos(\varphi) = S \cdot \cos(\varphi); \quad \underline{\underline{P = 5595\,\text{W}}}$$

$$Q = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \sin(\varphi) = S \cdot \sin(\arccos(0{,}85)); \quad \underline{\underline{Q = 3467\,\text{var}}}$$

Aufgabe 15.10

Ein Elektroherd enthält drei ohmsche Widerstände mit je 50 Ω. Welche Leistung nimmt der Herd aus dem 400 V/230 V-Netz in Sternschaltung und in Dreieckschaltung auf?

Lösung

Sternschaltung

In Sternschaltung ist die Strangspannung

$$U_{Str} = \frac{U_L}{\sqrt{3}} = \frac{400\,\text{V}}{\sqrt{3}} = 230\,\text{V}.$$

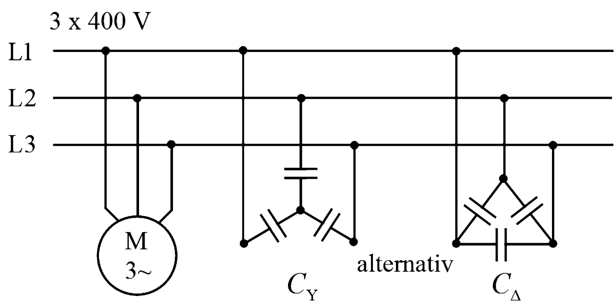


Abb. 15.7 Blindleistungskompensation eines Drehstrommotors

Der Strangstrom ist gleich dem Leiterstrom

$$I_{Str} = I_L = \frac{U_{Str}}{R} = \frac{230\,\mathrm{V}}{50\,\Omega} = 4{,}6\,\mathrm{A}.$$

Die Leistung in einem Strang ist:

$$P_{Str} = U_{Str} \cdot I_{Str} = 230\,\mathrm{V} \cdot 4{,}6\,\mathrm{A} = 1058\,\mathrm{W}.$$

Die Gesamtleistung ist:

$$P_Y = 3 \cdot P_{Str}; \quad \underline{\underline{P_Y = 3174\,\mathrm{W}}}$$

Dreieckschaltung

In Dreieckschaltung ist die Strangspannung gleich der Leiterspannung: $U_{Str} = U_L = 400\,\mathrm{V}$.

Der Strangstrom beträgt $I_{Str} = \frac{U_L}{R} = \frac{400\,\mathrm{V}}{50\,\Omega} = 8\,\mathrm{A}$.

Die Leistung in einem Strang ist: $P_{Str} = 400\,\mathrm{V} \cdot 8\,\mathrm{A} = 3200\,\mathrm{W}$.

Die Gesamtleistung ist: $P_\Delta = 3 \cdot P_{Str} = 3 \cdot 3200\,\mathrm{W}$; $\underline{\underline{P_\Delta = 9600\,\mathrm{W}}}$

Aufgabe 15.11

Im 400 V/230 V-Netz soll die Blindleistungsaufnahme eines Drehstrommotors von $Q_{ind} = 820\,\mathrm{var}$ mit in Stern bzw. in Dreieck geschalteten Kondensatoren (Abb. 15.7) vollständig kompensiert werden. Welchen Wert müssen die Kondensatoren jeweils haben?

Lösung

Für eine vollständige Blindstrom- bzw. Blindleistungskompensation muss gelten: $Q_{ind} = Q_{kap}$. Die kapazitive Blindleistung der in Stern bzw. in Dreieck geschalteten Kondensatoren muss gleich der gesamten induktiven Blindleistung sein. Der Drehstrommotor stellt einen symmetrischen Verbraucher dar, die gesamte Leistung verteilt sich gleichmäßig auf die drei Stränge: $Q_{Str} = \frac{Q_{ind}}{3}$.

Die kapazitive Blindleistung ist:

$$Q_C = \frac{U_C^2}{X_C} = \omega \cdot C \cdot U_C^2.$$

Daraus folgt: $C = \frac{Q_C}{\omega \cdot U_C^2}$ mit U_C = Spannung am Kondensator. Es ist $U_C = U_{Str} = 230\,\mathrm{V}$ bei Sternschaltung und $U_C = U = U_L = 400\,\mathrm{V}$ bei Dreieckschaltung der Kondensatoren.

$$Q_C = Q_{Str} = \frac{Q_{ind}}{3}$$

$$C_Y = \frac{820\,\mathrm{var}}{3 \cdot \omega \cdot U_C^2} = \frac{820\,\mathrm{var}}{3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50\,\mathrm{s}^{-1} \cdot (230\,\mathrm{V})^2} = 16{,}45 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F} = \underline{\underline{16{,}45\,\mu\mathrm{F}}}$$

$$C_\Delta = \frac{C_Y}{3} = \underline{\underline{5{,}48\,\mu\mathrm{F}}}$$

Aufgabe 15.12

Von einem Drehstrommotor in Dreieckschaltung sind folgende Angaben für den Nennbetrieb bekannt:

$U_N = 400\,\mathrm{V}/50\,\mathrm{Hz}$, $\cos(\varphi_N) = 0{,}82$, Wirkungsgrad $\eta_N = 0{,}87$, Drehzahl $n_N = 1455\,\mathrm{min}^{-1}$, $P_N = 7{,}5\,\mathrm{kW}$

a) Welche Wirkleistung P_Δ, Scheinleistung S_Δ und Blindleistung Q_Δ nimmt der Motor im Nennbetrieb vom Drehstromnetz auf?
b) Welchen Scheinwiderstand Z besitzen die Stränge des Motors? Wie groß ist der Strom I_{Str} in den Strängen? Wie groß ist der Strom I_L in den Zuleitungen?
c) Die Blindleistungsaufnahme des Motors soll mit in Dreieck geschalteten Kondensatoren auf $\cos(\varphi') = 0{,}95$ kompensiert werden. Welche Kapazität C_Δ muss jeder der drei Kondensatoren aufweisen?
d) Was sagen die Angaben auf dem Typenschild eines Elektromotors aus? Bestimmen Sie das Nennmoment des gegebenen Drehstrommotors.

Lösung

a) Der Wirkungsgrad η besagt, dass die vom Drehstromnetz gelieferte elektrische Wirkleistung P_{el} aufgrund der Leistungsverluste im Motor höher ist als die maximal mögliche mechanische Wirkleistung P_{mech}. Die Leistungsangabe eines Motors betrifft immer die mechanische Wellenleistung.

$$P_{el} = \frac{P_{mech}}{\eta}; \quad P_\Delta = \frac{P_N}{\eta_N} = \frac{7{,}5\,\mathrm{kW}}{0{,}87} = \underline{\underline{8620{,}7\,\mathrm{W}}}$$

$$S_\Delta = \frac{P_\Delta}{\cos(\varphi_N)} = \frac{8620{,}7\,\mathrm{W}}{0{,}82} = \underline{\underline{10.513{,}0\,\mathrm{VA}}}$$

$$Q_\Delta = S_\Delta \cdot \sin(\varphi_N) = 10.513\,\mathrm{VA} \cdot \sin(\arccos(0{,}82)) = \underline{\underline{6017{,}3\,\mathrm{var}}}$$

b) Die Gesamtscheinleistung ist: $S_\Delta = 3 \cdot U_{Str} \cdot I_{Str}$. In Dreieckschaltung ist die Strangspannung gleich der Leiterspannung: $U_{Str} = U_L = 400\,\mathrm{V}$. Mit dem Strangwiderstand

(Scheinwiderstand Z) folgt:

$$I_{\text{Str}} = \frac{U_{\text{Str}}}{Z}; \quad S = \frac{3 \cdot (U_{\text{Str}})^2}{Z}; \quad Z = \frac{3 \cdot (U_{\text{Str}})^2}{S}; \quad Z = \frac{3 \cdot (400\,\text{V})^2}{10.513\,\text{VA}} = \underline{\underline{45{,}66\,\Omega}}$$

$$I_{\text{Str}} = \frac{U_{\text{Str}}}{Z} = \frac{400\,\text{V}}{45{,}66\,\Omega} = \underline{\underline{8{,}76\,\text{A}}}; \quad I_{\text{L}} = \sqrt{3} \cdot I_{\text{Str}} = \underline{\underline{15{,}17\,\text{A}}}$$

c)

$$C_\Delta = \frac{1}{3} \cdot C_{\text{Y}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{P \cdot [\tan(\varphi_{\text{N}}) - \tan(\varphi')]}{\omega \cdot U_{\text{L}}^2}$$

$$C_\Delta = \frac{8620{,}7\,\text{W} \cdot [\tan(\arccos(0{,}82)) - \tan(\arccos(0{,}95))]}{3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50\,\text{s}^{-1} \cdot (400\,\text{V})^2}; \quad \underline{\underline{C_\Delta = 21{,}1\,\mu\text{F}}}$$

d) Der Nennbetrieb bezeichnet die Betriebsart elektrischer Maschinen, für die sie im Dauerbetrieb ausgelegt sind. Auf dem Typenschild eines Motors werden Nenndaten für einen Betriebspunkt, den so genannten Bezugspunkt oder Nennpunkt angegeben. Zu diesen Daten gehören z. B. die Nennspannung U_{N}, der Nennstrom I_{N}, der Leistungsfaktor $\cos(\varphi) = P/S$, die Nenndrehzahl der Welle n_{N} oder die mechanische Leistung an der Welle P_{N} (die Leistungsangabe eines Motors betrifft immer die mechanische Wellenleistung). Ist das prinzipielle Drehzahl-Drehmomentverhalten eines Motors bekannt, so kann mittels der Typenschildangaben näherungsweise auf alle anderen Betriebspunkte geschlossen werden.

Ein Elektromotor nimmt die elektrische Leistung

$$P_{\text{el}} = U \cdot I = P_{\text{zu}}$$

auf und gibt die mechanische Leistung

$$P_{\text{mech}} = M \cdot \omega = P_{\text{ab}}$$

an seiner Welle ab.

Bei der Wandlung von elektrischer in mechanische Energie geht die Verlustleistung P_{V} als Wärmeleistung verloren. Das Verhältnis von abgegebener Leistung P_{ab} zu zugeführter Leistung P_{zu} wird als **Wirkungsgrad** η bezeichnet:

$$\eta = \frac{\text{abgegebene Wirkleistung}}{\text{zugeführte Wirkleistung}} = \frac{P_{\text{ab}}}{P_{\text{zu}}}$$

Für die Energie gilt mit $W_{\text{zu}} = P_{\text{zu}} \cdot t$ und $W_{\text{ab}} = P_{\text{ab}} \cdot t$ auch:

$$\eta = \frac{\text{abgegebene Energie}}{\text{zugeführte Energie}} = \frac{W_{\text{ab}}}{W_{\text{zu}}}$$

Von P_{zu} müssen die unvermeidlichen Verluste P_{V} abgezogen werden, um P_{ab} zu erhalten.

$$P_{\text{ab}} = P_{\text{zu}} - P_{\text{V}}$$

Somit ist P_{ab} stets kleiner ist als P_{zu} und der Wirkungsgrad stets kleiner als eins:

$$\eta = \frac{M \cdot \omega}{U \cdot I} < 1$$

Statt der Winkelgeschwindigkeit ω in s^{-1} wird bei elektrischen Maschinen die Drehzahl n in Umdrehungen pro Minute ($[n] = \mathrm{min}^{-1}$) angegeben. Die mechanische Leistung beträgt dann:

$$P_{\text{mech}} = M \cdot \omega = M \cdot 2\pi f = M \cdot 2\pi \frac{n}{60\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{min}}}$$

Das Nennmoment (Nenndrehmoment) ist:

$$M = \frac{P_{\text{mech}}}{2\pi \cdot \frac{n}{60\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{min}}}}$$

Für den gegebenen Drehstrommotor ergibt sich:

$$M = \frac{7500\,\mathrm{W}}{2\pi \cdot \frac{1455\,\mathrm{min}^{-1}}{60\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{min}}}};\ \text{mit } \mathrm{W} = \frac{\mathrm{N\,m}}{\mathrm{s}} \text{ folgt: } \underline{\underline{M = 49{,}2\,\mathrm{N\,m}}}$$

Halbleiterdioden

16

Zusammenfassung

Die charakteristischen Parameter der Diodenkennlinie werden betrachtet und ihre Bedeutung erläutert. Berechnet werden Schaltungen mit Lumineszenz- und Zenerdiode. Mit Arbeitspunkt und Widerstandsgerade wird eine grafische Bestimmung von Spannungen und Strömen in Diodenschaltungen durchgeführt. Die Gleichrichtung von Wechselspannungen und die Begrenzung einer Wechselspannung stellen Anwendungsmöglichkeiten von Dioden dar.

16.1 Grundwissen – kurz und bündig

- Der pn-Übergang eines Halbleiters bildet die Grundlage einer Halbleiterdiode.
- Eine Diode besitzt „Ventilwirkung". In Durchlassrichtung lässt sie Strom durch, in Sperrrichtung nicht.
- Die Kennlinie einer Diode ist *nicht* linear.
- Es gibt Germaniumdioden (Durchlassspannung ca. 0,35 V) und Siliziumdioden (Durchlassspannung ca. 0,7 V).
- Durchbruchserscheinungen bei Dioden sind der Zenerdurchbruch und der Lawinendurchbruch (Avalanche-Effekt).
- Eine Diode darf nie ohne strombegrenzenden Vorwiderstand betrieben werden.
- Eine Diode wird durch statische und dynamische Kennwerte beschrieben.
- Der Sperrstrom einer Diode ist sehr klein. Er steigt exponentiell mit der Temperatur an.
- Im Durchlassbereich wird die I-U-Kennlinie mit steigender Temperatur steiler.
- Die Anschlüsse einer Diode heißen *Anode* und *Kathode*.
- Bei Kleindioden wird die Kathode durch einen Ring auf dem Gehäuse gekennzeichnet.
- Eine Schottkydiode besitzt eine kleine Durchlassspannung (ca. 0,35 V) und schaltet sehr schnell.
- Eine LED wird zur optischen Anzeige verwendet.

L. Stiny, *Aufgabensammlung zur Elektrotechnik und Elektronik*,
DOI 10.1007/978-3-658-14381-7_16

- Mit Zenerdioden können Spannungen stabilisiert werden.
- Mit dem Arbeitspunkt und der Widerstandsgeraden können die Strom-Spannungs-Verhältnisse einer Schaltung mit einem nichtlinearen Bauteil grafisch bestimmt werden.
- Anwendungen von Dioden sind z. B.: Gleichrichtung von Wechselspannung, Freilaufdiode, Schutz empfindlicher Eingänge, elektronischer Schalter, logische Verknüpfung digitaler Signale, Amplitudenbegrenzung von Signalen.
- Wichtige Formeln:

$$I = I_\mathrm{R} \cdot (\mathrm{e}^{\frac{U}{U_\mathrm{T}}} - 1) \text{ mit } U_\mathrm{T} = \frac{k \cdot T}{e}; \quad k = \text{Boltzmann-Konstante}$$

$$P_\mathrm{th} = \frac{T_\mathrm{A} - T_\mathrm{B}}{R_\mathrm{th}} = \frac{\Delta T}{R_\mathrm{th}}; \quad R_\mathrm{th} = \text{Wärmeübergangswiderstand}$$

$$T_\mathrm{J} = R_\mathrm{thJA} \cdot P_\mathrm{V} + T_\mathrm{A}; \quad R_\mathrm{V} = \frac{U_\mathrm{B} - U_\mathrm{D}}{I_\mathrm{D}}; \quad R_\mathrm{V} = \frac{U_\mathrm{Emin} - U_\mathrm{Z}}{I_\mathrm{Z} + I_\mathrm{Lmax}};$$

$$P_\mathrm{Zmax} \geq U_\mathrm{Z} \cdot \left(\frac{U_\mathrm{Emax} - U_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{V}} - I_\mathrm{Lmin} \right)$$

$$\Delta U_Z = U_Z \cdot \Delta T \cdot T_K$$

16.2 Diodenkennlinie

Aufgabe 16.1
Wie groß ist ungefähr die Durchlassspannung bei einer Siliziumdiode bzw. bei einer Germaniumdiode?

Lösung
Siliziumdiode ca. 0,5 bis 0,8 Volt, Germaniumdiode ca. 0,2 bis 0,4 Volt.

Aufgabe 16.2
a) Bestimmen Sie aus der Diodenkennlinie Abb. 16.1 grafisch die Schleusenspannung U_S und den durch eine Gerade angenäherten differenziellen Widerstand r_F.
b) Handelt es sich um eine Silizium- oder um eine Germaniumdiode?
c) Geben Sie mit den Größen U_S und r_F die stückweise lineare Kennlinie und zusätzlich mit einer idealen Diode die Ersatzschaltung der gegebenen Diode an.
d) Wie kann der Durchlasswiderstand der Diode in Zusammenhang mit dem ermittelten differenziellen Widerstand r_F gesehen werden?
e) Charakterisieren Sie allgemein (quantitativ) den differentiellen Widerstand im Durchlass-, Sperr- und Durchbruchbereich einer Diode.
f) Der Wärmewiderstand der Diode beträgt $R_\mathrm{thJA} = 380\,\mathrm{K/W}$. Wie hoch ist die Sperrschichttemperatur T_J bei einer Umgebungstemperatur $T_\mathrm{A} = 50\,°\mathrm{C}$ und einer Verlustleistung der Diode von $P_\mathrm{V} = 100\,\mathrm{mW}$?

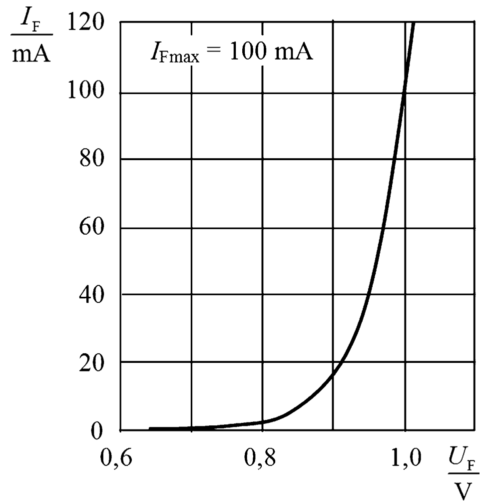


Abb. 16.1 Kennlinie einer Diode

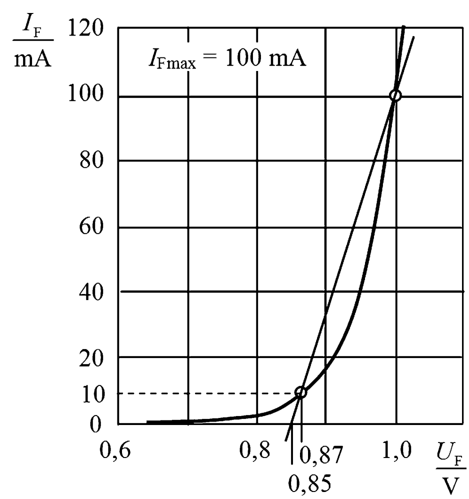


Abb. 16.2 Zur Bestimmung der Schleusenspannung

Lösung

a) Die Schleusenspannung (auch Durchlass-, Fluss-, Schwell-, Knick- oder Kniespannung genannt) wird häufig als derjenige Spannungswert an der Diode in Flussrichtung definiert, bei dem ca. ein Zehntel des maximal zulässigen Dioden-Durchlassstromes fließt. Die Ersatzkennlinie ist eine Widerstandsgerade, die durch die Schnittpunkte der Diodenkennlinie mit den Werten I_{Fmax} und $\frac{1}{10} I_{Fmax}$ festgelegt ist. Hier ist $\frac{1}{10} I_{Fmax} = 10\,\text{mA}$. Bei diesem Strom ist die Schleusenspannung ca. $\underline{\underline{U_S = 0{,}87\,\text{V}}}$ (Abb. 16.2).

Die Schleusenspannung kann auch aus dem Schnittpunkt der Ersatzgeraden mit der Abszisse abgelesen werden (Abb. 16.2). Es ergibt sich $\underline{\underline{U_S = 0{,}85\,\text{V}}}$.

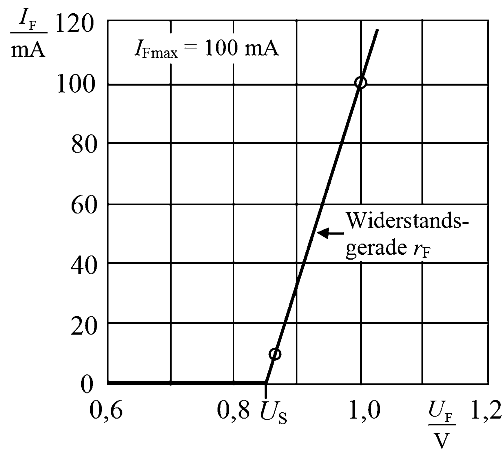


Abb. 16.3 Stückweise lineare Kennlinie der Diode

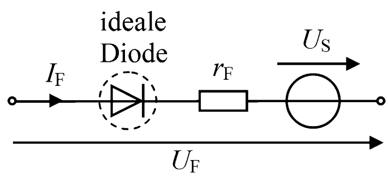


Abb. 16.4 Ersatzschaltung der Diode mit differentiellem Widerstand und Schleusenspannung

Der differenzielle (dynamische) Widerstand r_F entspricht in erster Näherung der Steigung der Ersatzgeraden. $r_F = \frac{\Delta U_F}{\Delta I_F} = \frac{1\,V - 0{,}85\,V}{0{,}1\,A} = \underline{\underline{1{,}5\,\Omega}}$

b) Da $U_S > 0{,}6$ V ist, handelt es sich um eine Siliziumdiode.

c) Die stückweise lineare Kennlinie der Diode zeigt Abb. 16.3. Die Ersatzschaltung der gegebenen Diode zeigt Abb. 16.4.

d) Der Durchlasswiderstand entspricht dem hier im ganzen Durchlassbereich durch eine Gerade angenäherten differentiellen Widerstand.

e) Der differenzielle Widerstand ist durch die Krümmung der Diodenkennlinie von der Lage des Arbeitspunktes abhängig. Im Durchlassbereich ist der differentielle Widerstand klein, eine kleine Spannungsänderung hat eine große Stromänderung zur Folge. Im Sperrbereich ist der differentielle Widerstand sehr groß, bei Änderung der Sperrspannung ändert sich der Sperrstrom fast nicht. Im Durchbruchbereich ist der differentielle Widerstand *sehr* klein, eine kleine Spannungsänderung hat eine sehr große Stromänderung zur Folge.

f) $T_J = R_{th,JA} \cdot P_V + T_A = 380\,\frac{K}{W} \cdot 0{,}1\,W + 50\,°C = \underline{\underline{88\,°C}}$

Aufgabe 16.3

Gegeben sind die Kennlinien von zwei Dioden D_1 und D_2. Wie wird die Kennlinie der Reihenschaltung von D_1 und D_2 konstruiert?

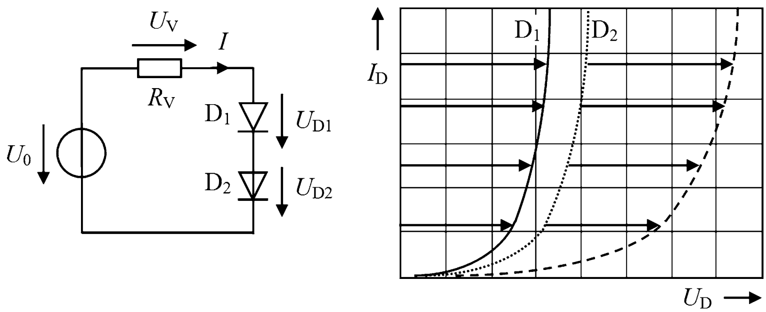


Abb. 16.5 Reihenschaltung von zwei Dioden, Konstruktion der resultierenden Kennlinie

Lösung

Bei der Reihenschaltung addieren sich die Spannungen. Daraus folgt eine punktweise Addition der beiden Kennlinien in U-Richtung (Abb. 16.5).

16.3 Lumineszenzdiode

Aufgabe 16.4

a) Wozu dient der in Abb. 16.6 mit einer LED in Reihe geschaltete ohmsche Vorwiderstand R_V?

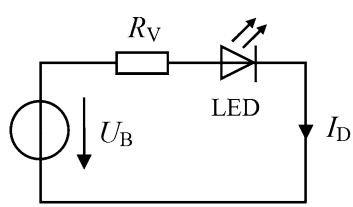
b) Die Durchlassspannung einer LED beträgt $U_D = 1{,}6\,\mathrm{V}$, der Durchlassstrom ist $I_D = 20\,\mathrm{mA}$. Die LED wird an einer Gleichspannung $U_B = 5\,\mathrm{V}$ betrieben. Wie groß muss der Vorwiderstand R_V sein?

Lösung

a) Der Vorwiderstand R_V dient zur Strombegrenzung. Da die Strom-Spannungskennlinie einer Diode stark nichtlinear ist, würde der Strom schon bei Spannungen knapp über der Durchbruchspannung unzulässig hoch werden.

b)
$$R_V = \frac{U_B - U_D}{I_D} = \underline{\underline{170\,\Omega}}$$

Abb. 16.6 LED mit Vorwiderstand



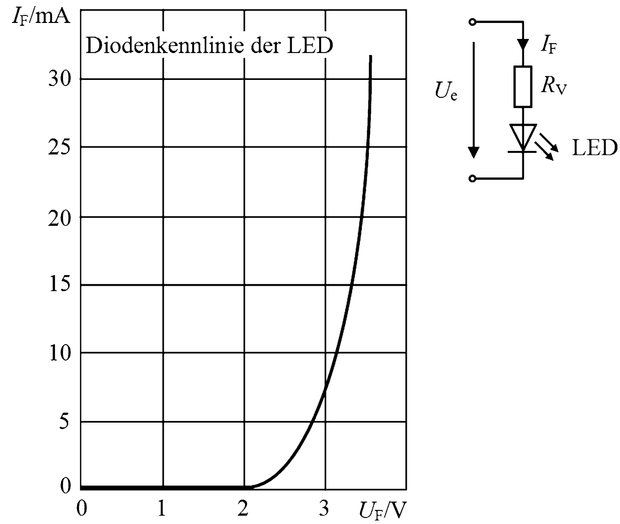


Abb. 16.7 Leuchtdiode mit Vorwiderstand und Kennlinie der LED

Aufgabe 16.5

Eine Leuchtdiode soll mit möglichst großer Helligkeit betrieben werden. Im betrachteten Bereich ist die Lichtstärke zwischen 5 mA und 30 mA proportional zum Diodenstrom in Flussrichtung I_F. Der obere Grenzwert für den Diodenstrom in Flussrichtung beträgt $I_{Fmax} = 30\,\text{mA}$. Kennlinie und Schaltung zeigt Abb. 16.7.

a) Welchen Wert muss der Vorwiderstand R_V haben, wenn die größtmögliche Helligkeit bei einer Spannung $U_e = 9\,\text{V}$ erreicht werden soll?
b) Wie groß ist R_V zu wählen, falls $U_e = 10\,\text{V}$ ist und auch dann die maximal erlaubte Stromstärke nicht überschritten werden soll? Welcher Strom fließt für diesen Wert von R_V bei $U_e = 9\,\text{V}$ durch die Diode?
c) Welche Verlustleistung P_V wird im Vorwiderstand maximal umgesetzt? Welche Belastbarkeit muss der verwendete Widerstand mindestens haben: $\frac{1}{8}$ W, $\frac{1}{4}$ W, $\frac{1}{2}$ W, 1 W oder 2 W?

Lösung

a) Für den Arbeitspunkt der LED bei $I_F = 30\,\text{mA}$ wird aus dem Diagramm der Diodenkennlinie abgelesen: $U_F \approx 3{,}6\,\text{V}$.

$$R_V = \frac{9\,\text{V} - 3{,}6\,\text{V}}{30\,\text{mA}} = \underline{\underline{180\,\Omega}}$$

b)

$$R_V = \frac{10\,\text{V} - 3{,}6\,\text{V}}{30\,\text{mA}} = \underline{\underline{213\,\Omega}};$$

für $R_\mathrm{V} = 213\,\Omega$ und $U_\mathrm{e} = 9\,\mathrm{V}$ ist

$$I_\mathrm{F} = \frac{9\,\mathrm{V} - 3{,}6\,\mathrm{V}}{213\,\Omega} = \underline{\underline{25\,\mathrm{mA}}}$$

c) An R_V fällt maximal die Spannung $10\,\mathrm{V} - 3{,}6\,\mathrm{V} = 6{,}4\,\mathrm{V}$ ab.

$$P = U \cdot I = 6{,}4\,\mathrm{V} \cdot 30\,\mathrm{mA} = 192\,\mathrm{mW}$$

Der verwendete Widerstand muss mindestens eine Belastbarkeit von $\frac{1}{4}\,\mathrm{W}$ $(= 250\,\mathrm{mW})$ haben.

16.4 Z-Diode (Zener-Diode)

Aufgabe 16.6
Welchen Verwendungszweck haben Zenerdioden? Welches Bauelement muss beim Einsatz einer Zenerdiode immer zusätzlich verwendet werden?

Lösung
Zenerdioden werden hauptsächlich zur Spannungsstabilisierung oder zur Spannungsbegrenzung eingesetzt. Beim Einsatz einer Zenerdiode muss immer ein Vorwiderstand zur Strombegrenzung verwendet werden.

Aufgabe 16.7
Der Eingang einer Schaltung S soll mit einer Zenerdiode Z_D vor zu hohen Spannungen geschützt werden (Abb. 16.8). Welche Schaltung ist richtig, a, b, c oder d? Welche Aufgabe hat der Widerstand R_V?

Lösung
Schaltung b ist richtig. Da die Zenerdiode im Durchbruchbereich der Kennlinie betrieben wird, muss der Vorwiderstand R_V für eine Strombegrenzung sorgen.

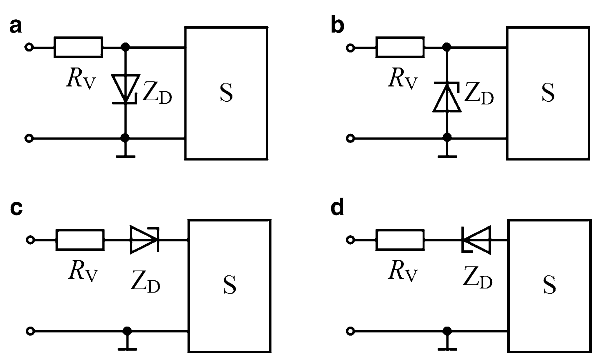


Abb. 16.8 Schutz einer Schaltung vor zu hohen Spannungen

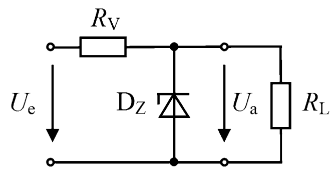


Abb. 16.9 Schaltung mit Z-Diode

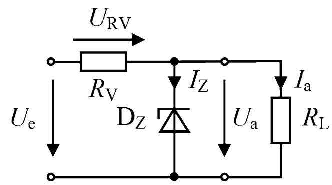


Abb. 16.10 Schaltung nach Abb. 16.9 mit Spannungen und Strömen

Aufgabe 16.8

Die Schaltung in Abb. 16.9 mit einer Z-Diode dient zur Herstellung einer weitgehend konstanten (stabilisierten) Ausgangsspannung U_a am Lastwiderstand $R_L = 120\,\Omega$.

Der Vorwiderstand R_V ist so zu berechnen, dass sich bei einer Eingangsspannung $U_e = 8{,}2\,\text{V}$ eine Ausgangsspannung $U_a = 5{,}0\,\text{V}$ einstellt.

Aus dem Datenblatt der Z-Diode wird aus der Kennlinie der Z-Diode $I = f(U)$ für eine Zenerspannung von $-5\,\text{V}$ ein Zenerstrom von $-0{,}6\,\text{A}$ entnommen.

Lösung

In die Schaltung werden die Spannungen und Ströme eingezeichnet (Abb. 16.10).

$$U_{RV} = U_e - U_a = 3{,}2\,\text{V}; \quad I_a = \frac{U_a}{R_a} = 0{,}0416\,\text{A};$$

$$R_V = \frac{U_{RV}}{I_Z + I_a} = \frac{3{,}2\,\text{V}}{0{,}6\,\text{A} + 0{,}0416\,\text{A}} = 4{,}99\,\Omega$$

$$\underline{\underline{R_V = 5\,\Omega}}$$

Aufgabe 16.9

Die Schaltung in Abb. 16.11 dient zur Stabilisierung der am Lastwiderstand R_L liegenden Spannung U_Z. Im Diagramm Abb. 16.12 ist die Durchbruchkennlinie $I_Z = f(U_Z)$ der verwendeten Zenerdiode aufgetragen. Der Vorwiderstand beträgt $R_V = 50\,\Omega$.

a) Welche Spannung U_Z liegt bei einer Eingangsspannung von $U_e = 10\,\text{V}$ am Lastwiderstand R_L?
b) Wie ändert sich U_Z, wenn die Eingangsspannung zwischen $U_{e\,\min} = 8\,\text{V}$ und $U_{e\,\max} = 12\,\text{V}$ schwankt?

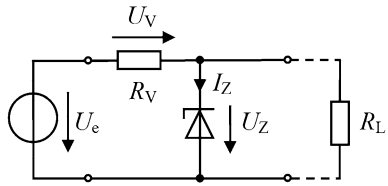


Abb. 16.11 Schaltung zur Stabilisierung der Spannung am Lastwiderstand

Lösung

a) Maschengleichung: $-U_e + U_V + U_Z = 0$ mit $U_V = R_V \cdot I_Z$

$$\Rightarrow I_Z = -\frac{1}{R_V} \cdot U_Z + \frac{U_e}{R_V}$$

Dies ist die Gleichung der Widerstandsgeraden.
Schnittpunkt der Widerstandsgeraden mit der Ordinate:

$$\text{Für } U_Z = 0 \text{ ist } I_Z = \frac{U_e}{R_V} = \frac{10\,\text{V}}{50\,\Omega} = 200\,\text{mA}.$$

Schnittpunkt der Widerstandsgeraden mit der Abszisse: Für $I_Z = 0$ ist $U_Z = U_e = 10\,\text{V}$.
Durch die beiden Punkte ist die Widerstandsgerade festgelegt, sie wird in die Grafik der Kennlinie der Zenerdiode eingezeichnet (Abb. 16.13).

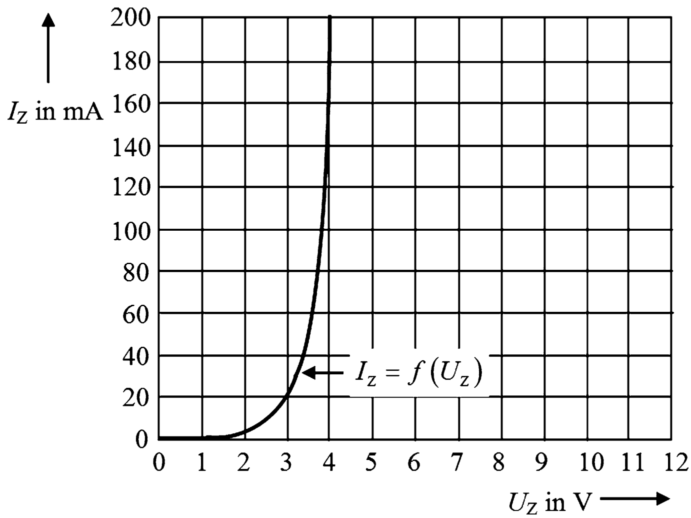


Abb. 16.12 Durchbruchkennlinie der in Abb. 16.11 verwendeten Zenerdiode

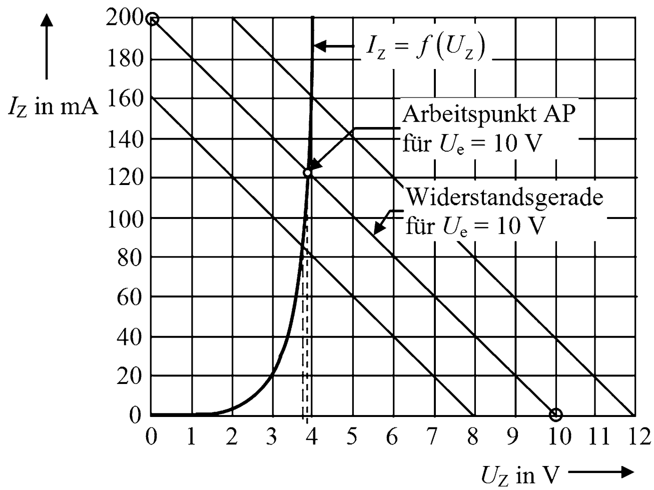


Abb. 16.13 Kennlinie mit Widerstandsgeraden

Der Schnittpunkt der Widerstandsgeraden mit der Diodenkennlinie ist der Arbeitspunkt AP der Schaltung. Das Lot im Arbeitspunkt auf die Abszisse gibt $\underline{\underline{U_Z|_{\mathrm{Ue}=10\,\mathrm{V}} \approx 3{,}9\,\mathrm{V}}}$.

b) Für die beiden Eingangsspannungen werden die Widerstandsgeraden ebenfalls eingezeichnet (Abb. 16.13). Es wird auf der Abszisse abgelesen:

$$\underline{\underline{U_Z|_{\mathrm{Ue}=8\,\mathrm{V}} \approx 3{,}8\,\mathrm{V}}} \text{ und } \underline{\underline{U_Z|_{\mathrm{Ue}=12\,\mathrm{V}} \approx 4{,}0\,\mathrm{V}}}.$$

Bei einer Änderung der Eingangsspannung um 4 V schwankt die Spannung am Lastwiderstand um 200 mV.

16.5 Arbeitspunkt und Widerstandsgerade

Aufgabe 16.10

Eine Siliziumdiode, deren Durchlasskennlinie gegeben ist, ist über einen Vorwiderstand $R_V = 1{,}5\,\Omega$ an eine Gleichspannungsquelle $U_0 = 1{,}5\,\mathrm{V}$ angeschlossen (Abb. 16.14).

Welcher Strom I fließt im Stromkreis und wie groß sind die Spannungen U_V und U_D? Ermitteln Sie die Lösung grafisch mit Hilfe der Diodenkennlinie.

Lösung

Maschengleichung: $-U_0 + U_V + U_D = 0$; mit $U_V = R_V \cdot I$ folgt $I \cdot R_V = U_0 - U_D$ bzw.

$$I = -\frac{1}{R_V} \cdot U_D + \frac{U_0}{R_V}.$$

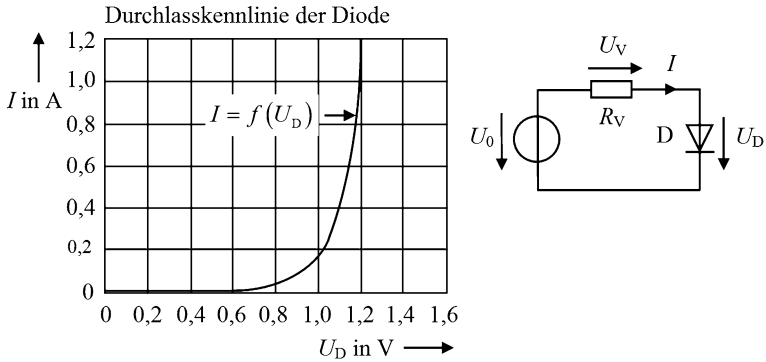
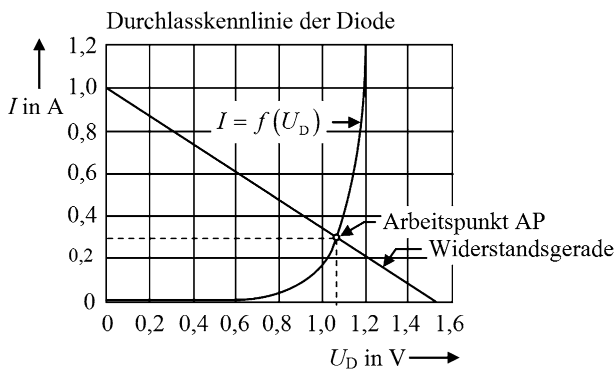


Abb. 16.14 Siliziumdiode mit Vorwiderstand und Diodenkennlinie

Abb. 16.15 Diodenkennlinie mit Widerstandsgerade



Dies ist die Gleichung der Widerstandsgeraden.

Der Schnittpunkt der Widerstandsgeraden mit der Ordinate ist:

$$\text{Für } U_\mathrm{D} = 0 \text{ ist } I = \frac{U_0}{R_\mathrm{V}} = \frac{1{,}5\,\mathrm{V}}{1{,}5\,\Omega} = 1\,\mathrm{A}.$$

Schnittpunkt der Widerstandsgeraden mit der Abszisse: Für $I = 0$ ist $U_\mathrm{D} = U_0 = 1{,}5\,\mathrm{V}$.

Durch die beiden Punkte ist die Widerstandsgerade festgelegt, sie wird in die Grafik der Diodenkennlinie eingezeichnet (Abb. 16.15).

Der Schnittpunkt der Widerstandsgeraden mit der Diodenkennlinie ist der Arbeitspunkt AP der Schaltung. Im Arbeitspunkt ist sowohl die Maschengleichung als auch die Beziehung zwischen Spannung und Strom am nichtlinearen Bauelement erfüllt.

Der im Stromkreis fließende Strom I kann an der Ordinate direkt abgelesen werden: $\underline{\underline{I = 0{,}3\,\mathrm{A}}}$. An der Abszisse wird abgelesen: $\underline{\underline{U_\mathrm{D} \approx 1{,}05\,\mathrm{V}}}$.

U_V errechnet sich zu $U_\mathrm{V} = U_0 - U_\mathrm{D} = 1{,}5\,\mathrm{V} - 1{,}05\,\mathrm{V} = \underline{\underline{0{,}45\,\mathrm{V}}}$

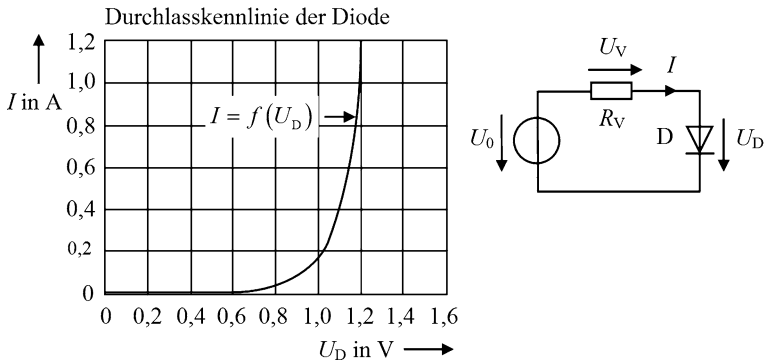


Abb. 16.16 Schaltung einer Siliziumdiode mit Vorwiderstand und Diodenkennlinie

Aufgabe 16.11

Eine Siliziumdiode, deren Durchlasskennlinie gegeben ist, ist über einen Vorwiderstand $R_V = 10\,\Omega$ an eine Gleichspannungsquelle $U_0 = 6\,\text{V}$ angeschlossen (Abb. 16.16).

Welcher Strom I fließt im Stromkreis und wie groß sind die Spannungen U_V und U_D? Ermitteln Sie die Lösung grafisch mit Hilfe der Diodenkennlinie.

Lösung

Maschengleichung: $-U_0 + U_V + U_D = 0$; mit $U_V = R_V \cdot I$ folgt $I \cdot R_V = U_0 - U_D$ bzw.

$$I = -\frac{1}{R_V} \cdot U_D + \frac{U_0}{R_V}.$$

Dies ist die Gleichung der Widerstandsgeraden (WG).

Der Schnittpunkt der WG mit der Ordinate ist: $U_D = 0 \Rightarrow I = \frac{U_0}{R_V} = \frac{6\,\text{V}}{10\,\Omega} = 0{,}6\,\text{A}$.

Der Schnittpunkt der WG mit der Abszisse ist: $I = 0 \Rightarrow U_D = U_0 = 6\,\text{V}$. Dieser Schnittpunkt liegt außerhalb des Zeichnungsbereiches der Kennlinie. In die Gleichung der WG wird deshalb $U_D = 1{,}6\,\text{V}$ eingesetzt, dies ergibt $I_D = 0{,}44\,\text{A}$.

Die beiden Punkte $(0\,\text{V}; 0{,}6\,\text{A})$ und $(1{,}6\,\text{V}; 0{,}44\,\text{A})$ legen die WG fest. Der Schnittpunkt der WG mit der Diodenkennlinie ergibt den Arbeitspunkt AP der Diode. In Abb. 16.17 wird auf den Koordinatenachsen abgelesen: $\underline{\underline{I = I_D \approx 0{,}5\,\text{A}}}$, $\underline{\underline{U_D \approx 1{,}1\,\text{V}}}$.

Die Spannung am Vorwiderstand wird berechnet. $U_V = R_V \cdot I = 10\,\Omega \cdot 0{,}5\,\text{A}$; $\underline{\underline{U_V = 5\,\text{V}}}$

Wegen der Zeichnungsungenauigkeit ist $U_V + U_D \neq U_0$.

Aufgabe 16.12

a) Bestimmen Sie für die Schaltung in Abb. 16.18 die äquivalente Spannungsquelle (Ersatzspannungsquelle) zwischen den Punkten A, B.
b) Ermitteln Sie grafisch den Arbeitspunkt U_D, I_D der Diode, deren Kennlinie in Abb. 16.19 gegeben ist.

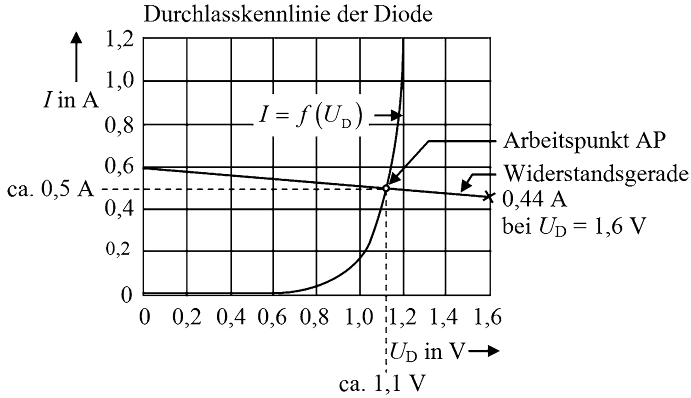
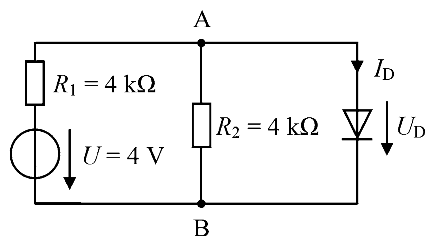


Abb. 16.17 Diodenkennlinie mit flacher Widerstandsgerade

Abb. 16.18 Schaltung mit Diode



Lösung

a) Zur Ermittlung des Innenwiderstandes R_i der Ersatzspannungsquelle wird die Spannungsquelle U kurzgeschlossen. $R_i = R_1 \parallel R_2 = 2\,\text{k}\Omega$
Die Spannung zwischen A, B ist:

$$U_{A,B} = 4\,\text{V}\frac{4\,\text{k}\Omega}{4\,\text{k}\Omega + 4\,\text{k}\Omega} = 2\,\text{V}$$

Als Ersatzschaltung ergibt sich Abb. 16.20.

b) Maschengleichung: $-2\,\text{V} + I_D \cdot 2\,\text{k}\Omega + U_D = 0$
Auflösen nach I_D ergibt die Gleichung der Arbeitsgeraden:

$$I_D = -\frac{U_D}{2\,\text{k}\Omega} + 1\,\text{mA}$$

Es werden zwei Punkte ermittelt: Für $U_D = 0$ ist $I_D = 1\,\text{mA}$, für $I_D = 0$ ist $U_D = 2\,\text{V}$. Die beiden Punkte ($U_D = 0$; $I_D = 1\,\text{mA}$) und ($U_D = 2\,\text{V}$; $I_D = 0$) legen die Arbeitsgerade fest. Die Arbeitsgerade wird eingezeichnet, der Schnittpunkt mit der Diodenkennlinie ergibt den Arbeitspunkt AP (Abb. 16.21). Ausgehend vom Arbeitspunkt wird auf den Koordinatenachsen U_D und I_D abgelesen: $\underline{\underline{U_D = 0{,}8\,\text{V}}}$; $\underline{\underline{I_D = 0{,}6\,\text{mA}}}$.

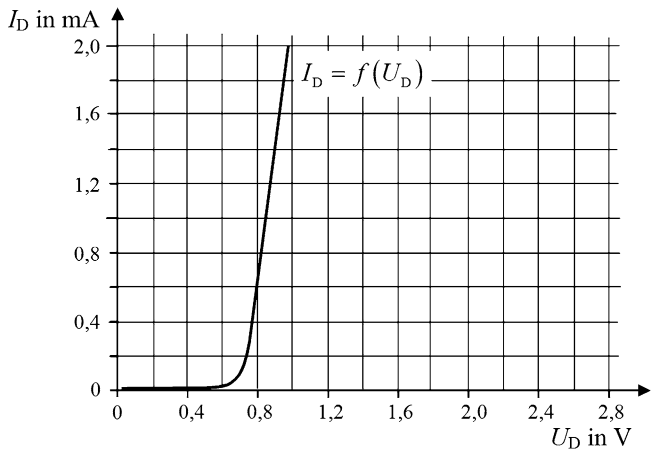


Abb. 16.19 Kennlinie der Diode in Abb. 16.18

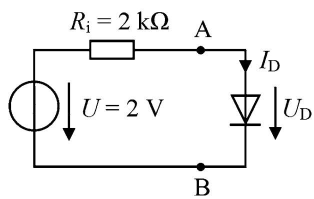


Abb. 16.20 Ersatzschaltung der Schaltung in Abb. 16.18

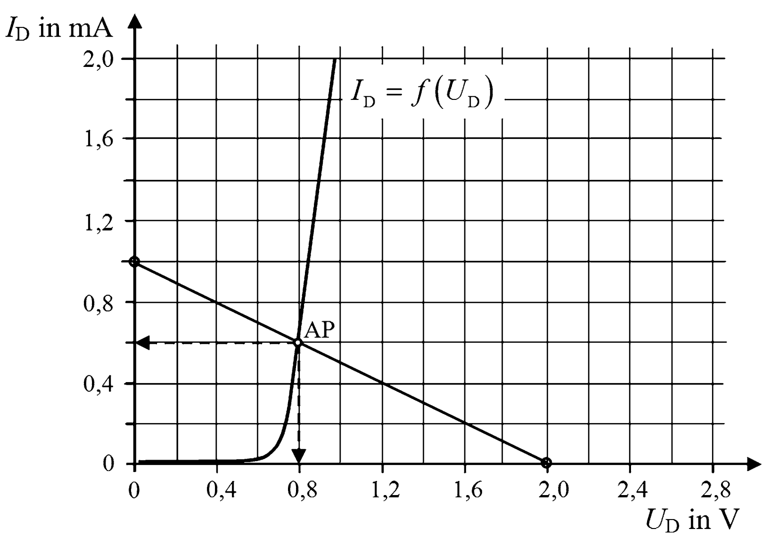


Abb. 16.21 Kennlinie mit Arbeitspunkt

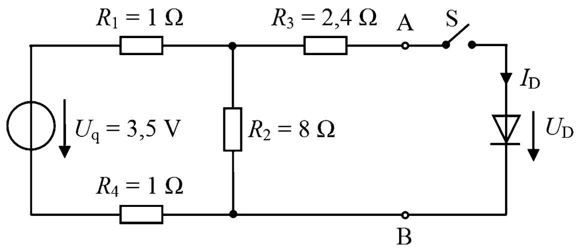


Abb. 16.22 Schaltung mit einer Diode

Aufgabe 16.13
Gegeben ist die Schaltung in Abb. 16.22 mit einer Diode.

a) Der Schalter S ist geöffnet. Bestimmen Sie den Innenwiderstand R_i, die Leerlaufspannung U_0 und den Kurzschlussstrom I_K zwischen den Klemmen A, B.
b) Der Schalter S ist jetzt geschlossen. Ermitteln Sie mit Hilfe der in Abb. 16.23 gezeigten Diodenkennlinie grafisch den Arbeitspunkt der Diode (U_D; I_D). Berechnen Sie den Gleichstromwiderstand R_D der Diode in diesem Arbeitspunkt.

Lösung
a) Zur Bestimmung des Innenwiderstandes R_i wird die Spannungsquelle U_q kurzgeschlossen. Der Widerstand, den man in die Klemmen A, B hinein sieht, ist R_i.

$$R_i = [(R_1 + R_4) \parallel R_2] + R_3; \quad \underline{\underline{R_i = 4\,\Omega}}$$

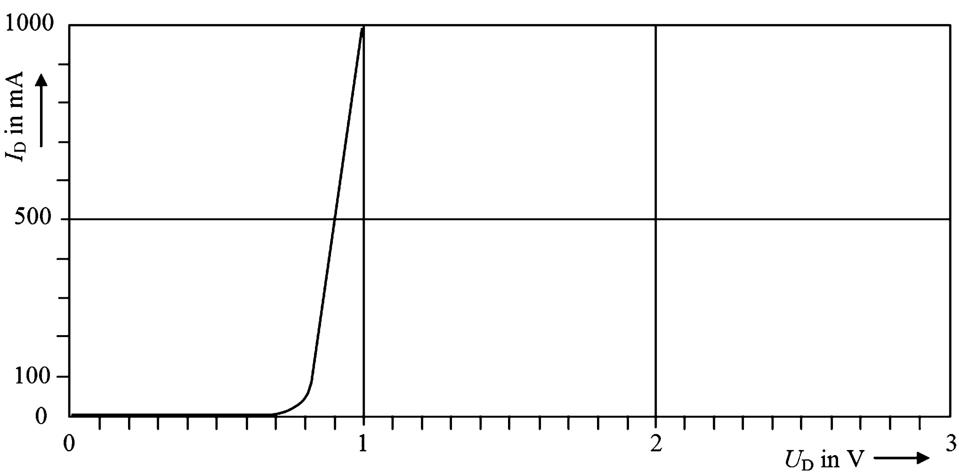


Abb. 16.23 Kennlinie der Diode in Abb. 16.22

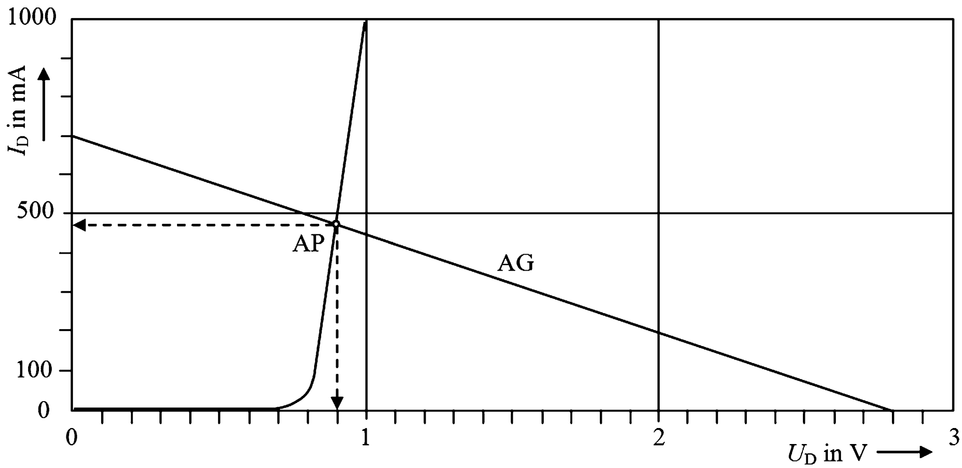


Abb. 16.24 Kennlinie mit Arbeitspunkt

$(R_1 + R_4)$ und R_2 bilden einen Spannungsteiler. Die Spannung an R_2 liegt auch als Leerlaufspannung U_0 zwischen den Klemmen A und B an.

$$U_0 = U_q \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_4 + R_2}; \quad U_0 = 3{,}5\,\mathrm{V} \cdot \frac{8\,\Omega}{1\,\Omega + 1\,\Omega + 8\,\Omega}; \quad \underline{\underline{U_0 = 2{,}8\,\mathrm{V}}}$$

Der Kurzschlussstrom I_K ist:

$$I_K = \frac{U_0}{R_i}; \quad I_K = \frac{2{,}8\,\mathrm{V}}{4\,\Omega} = \underline{\underline{700\,\mathrm{mA}}}$$

R_i, U_0 und I_K sind die charakteristischen Größen der Ersatzspannungsquelle.

b) Jetzt erfolgt das Einzeichnen der Arbeitsgeraden mit den zwei Punkten (Abb. 16.24):

$$I_K = 700\,\mathrm{mA} \text{ für } U_D = 0\,\mathrm{V} \text{ und } U_D = 2{,}8\,\mathrm{V} \text{ für } I_D = 0\,\mathrm{mA}.$$

Der Schnittpunkt der Arbeitsgeraden mit der Diodenkennlinie ergibt den Arbeitspunkt AP, von ihm ausgehend wird auf den Koordinatenachsen abgelesen:

$$\underline{\underline{U_D \approx 0{,}9\,\mathrm{V}}}; \quad \underline{\underline{I_D \approx 470\,\mathrm{mA}}}; \quad R_D = \frac{U_D}{I_D}; \quad \underline{\underline{R_D \approx 1{,}9\,\Omega}}$$

Aufgabe 16.14

Der Arbeitspunkt der Schaltung in Abb. 16.25 ist auf grafischem Wege zu bestimmen.

Gegeben sind die Kennlinie der Diode (Abb. 16.26) und die Werte $R_1 = 500\,\Omega$, $R_2 = 2\,\mathrm{k}\Omega$, $R_3 = 1\,\mathrm{k}\Omega$, $U_B = 2\,\mathrm{V}$.

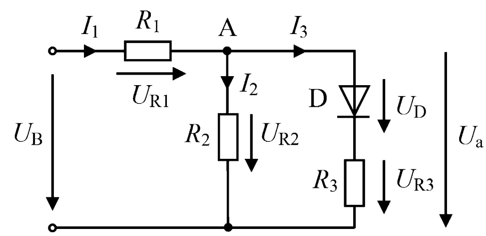


Abb. 16.25 Arbeitspunkt grafisch bestimmen

Lösung

1. Schritt: Die Kennlinie $I_3 = f(U_a)$ für die Reihenschaltung von D und R_3 wird entwickelt (Abb. 16.27). Für gleiche Werte von I werden U_D und U_{R3} addiert. $I_3 = f(U_D)$ ist gegeben. Wenn 2 mA durch die Diode und damit auch durch R_3 fließen, fällt an R_3 eine Spannung von 2 V ab. Somit geht nach dem ohmschen Gesetz die Gerade $I_3 = f(U_{R3})$ durch den Ursprung und den Punkt (2 V; 2 mA).

2. Schritt: Die Kennlinie $I_1 = f_1(U_a)$ für die Parallelschaltung von D und R_3 mit R_2 wird konstruiert (Abb. 16.28). Für gleiche Werte von U_a werden die Ströme $I_3 = f(U_a)$ (aus Schritt 1) und $I_2 = f(U_a)$ addiert. $I_2 = f(U_a)$ geht durch den Ursprung und den Punkt (2 V; 1 mA).

3. Schritt: Der Arbeitspunkt wird bestimmt (Abb. 16.28). Die Arbeitsgerade ist:

$$I_1 = \frac{U_B - U_a}{R_1} = -\frac{1}{R_1} \cdot U_a + \frac{U_B}{R_1}$$

Zwei Punkte der Arbeitsgeraden: $I_1 = 0$ $U_a = U_B = 2\,\mathrm{V}$; $U_a = 1\,\mathrm{V}$: $I_1 = 2\,\mathrm{mA}$

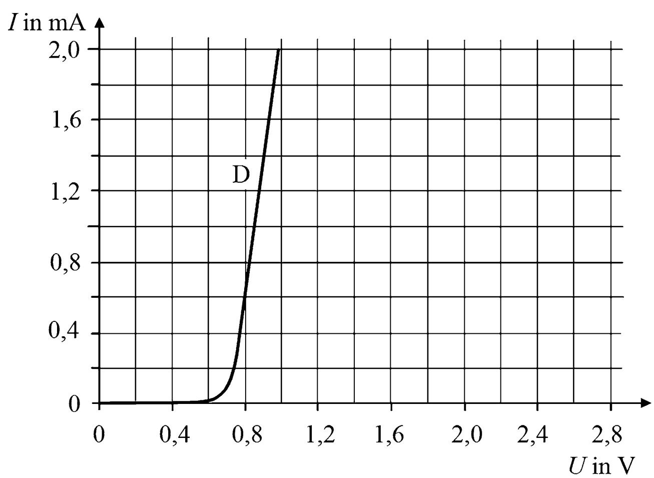


Abb. 16.26 Kennlinie der Diode in Abb. 16.25

Abb. 16.27 Kennlinie für die Reihenschaltung von D und R_3

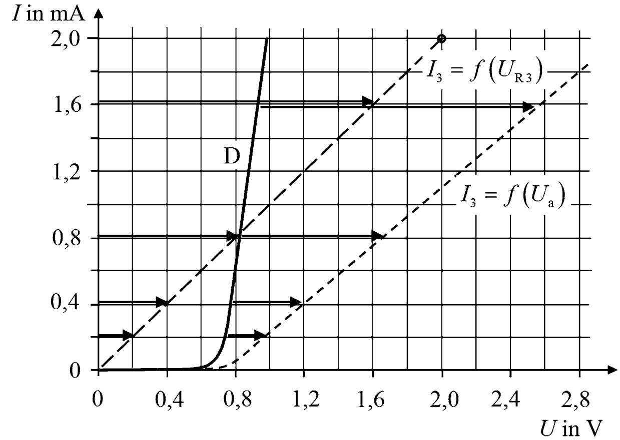
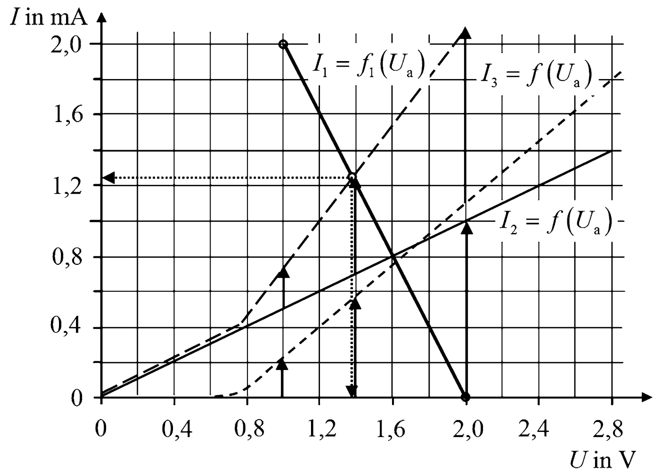


Abb. 16.28 Bestimmung des Arbeitspunktes



Die Arbeitsgerade wird eingetragen, auf den Achsen wird der Arbeitspunkt abgelesen:

$$\underline{\underline{\mathrm{AP} = (1{,}4\,\mathrm{V};\,1{,}25\,\mathrm{mA})}}$$

16.6 Gleichrichtung von Wechselspannungen

Aufgabe 16.15

Ein Netzteil besteht aus einem Transformator, vier Siliziumdioden und einem Elektrolytkondensator. Es wird eingangsseitig mit 230 V Wechselspannung betrieben und liefert am Ausgang eine Gleichspannung.

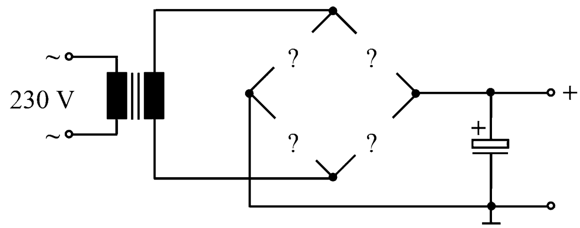


Abb. 16.29 Ein Netzteil

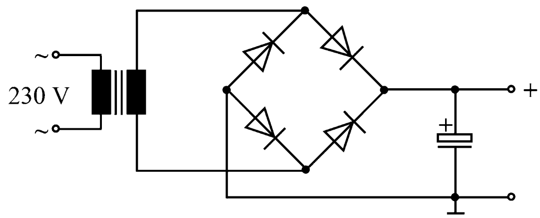


Abb. 16.30 Netzteil mit den vier Dioden

a) Ergänzen Sie das Schaltbild Abb. 16.29, wie müssen die Dioden eingebaut werden?
b) Wie wird der Kondensator genannt?
c) Worin unterscheiden sich die Eigenschaften dieser Schaltung zur Einweggleichrichtung?

Lösung

a) Die Schaltung der Dioden (Graetz-Brückenschaltung, Einphasenbrückenschaltung, Zweipulsbrückenschaltung) zeigt Abb. 16.30.
b) Der Kondensator wird als Ladekondensator bezeichnet.
c) Sowohl die positiven als auch die negativen Halbwellen der sinusförmigen Eingangsspannung tragen zur Gleichspannung am Ausgang bei. Gegenüber der Einweggleichrichtung wird die Brummspannung halbiert und die Brummfrequenz verdoppelt. Außerdem müssen die Dioden nur für die halbe Sperrspannung wie bei der Einweggleichrichterschaltung mit Ladekondensator ausgelegt sein (nur für mindestens $\hat{U}$, dem Scheitelwert der Eingangswechselspannung).

16.7 Begrenzung einer Wechselspannung

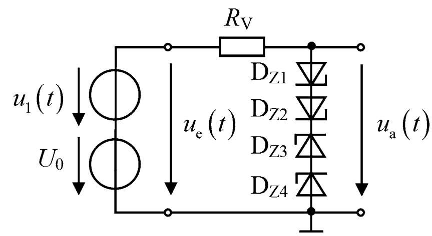
Aufgabe 16.16

Die folgende Begrenzerschaltung mit vier Z-Dioden (Siliziumdioden gleichen Typs) liegt an der Reihenschaltung der Spannungsquellen U_0 und $u_1(t)$.

Gegeben: $U_0 = 10{,}0\,\text{V}$, $u_1(t) = 30{,}0\,\text{V} \cdot \sin(\omega t)$, $f = 50\,\text{Hz}$, $R_V = 1\,\text{k}\Omega$, Zenerspannung $U_Z = 5{,}0\,\text{V}$, Schleusenspannungen der Zenerdioden: $U_S = 0{,}6\,\text{V}$

Skizzieren Sie $u_e(t)$ und die angenäherte Zeitfunktion $u_a(t)$ im vorgegebenen Diagramm Abb. 16.32.

Abb. 16.31 Begrenzerschaltung



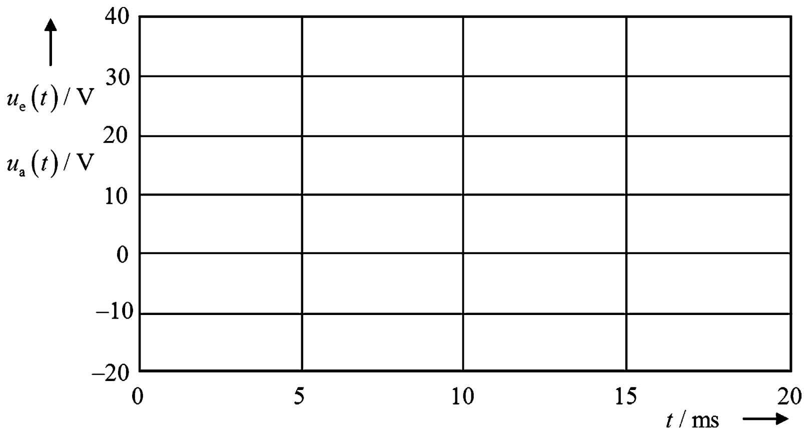


Abb. 16.32 Diagramm für Skizze der Spannungen

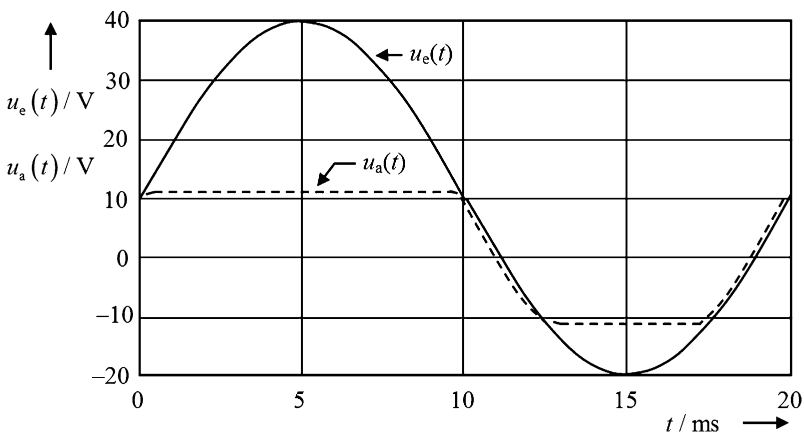


Abb. 16.33 Eingangs- und Ausgangsspannung der Begrenzerschaltung

Lösung
Um $u_\mathrm{e}(t)$ zu erhalten, werden U_0 und $u_1(t)$ addiert (Abb. 16.33). Zu jedem Augenblickswert der sinusförmigen Spannung $u_1(t)$ werden also $U_0 = 10{,}0\,\mathrm{V}$ addiert. Dadurch verschiebt sich die Sinuskurve auf der Ordinate um 10,0 V nach oben.

In Durchlassrichtung ist die Kennlinie einer Zenerdiode identisch mit der Kennlinie einer normalen Siliziumdiode. Die Schleusenspannung ist hier mit 0,6 V vorgegeben.

Für die positive Halbwelle der Eingangsspannung ergibt sich:

$\mathrm{D_{Z1}}$ und $\mathrm{D_{Z2}}$ sind im Durchlassbetrieb, an ihnen fällt eine Spannung von ca. $0{,}6\,\mathrm{V} + 0{,}6\,\mathrm{V} = 1{,}2\,\mathrm{V}$ ab. $\mathrm{D_{Z3}}$ und $\mathrm{D_{Z4}}$ arbeiten im Zenerbereich, an ihnen fallen ca. $5\,\mathrm{V} + 5\,\mathrm{V} = 10\,\mathrm{V}$ ab. Der gesamte Spannungsabfall $u_\mathrm{a}(t)$ ist während der positiven Halbwelle ca. 11,2 V.

Für die negative Halbwelle der Eingangsspannung gilt:

$\mathrm{D_{Z3}}$ und $\mathrm{D_{Z4}}$ sind im Durchlassbetrieb, der Spannungsabfall ist ca. $-0{,}6\,\mathrm{V} - 0{,}6\,\mathrm{V} = -1{,}2\,\mathrm{V}$. $\mathrm{D_{Z1}}$ und $\mathrm{D_{Z2}}$ sind im Zenerbereich mit $-5\,\mathrm{V} - 5\,\mathrm{V} = -10\,\mathrm{V}$ Spannungsabfall. Gesamter Spannungsabfall $u_\mathrm{a}(t)$ während der negativen Halbwelle: ca. $-11{,}2\,\mathrm{V}$.

Für $|u_\mathrm{e}(t)| > 2 \cdot U_\mathrm{Z} + 2 \cdot U_\mathrm{S}$ wird die Begrenzerschaltung wirksam. Das Ergebnis zeigt Abb. 16.33.

Bipolare Transistoren 17

Zusammenfassung

Die Bedeutung der Eingangskennlinie und eines darauf befindlichen Arbeitspunktes wird vorgestellt. Grundschaltungen des Transistors werden mit Möglichkeiten zur Einstellung des Arbeitspunktes und zu dessen Stabilisierung durch Strom- und Spannungsgegenkopplung gezeigt. Der Betrieb des Bipolartransistors als Schalter wird mit Hilfe des Ausgangskennlinienfeldes festgelegt. Transistorersatzschaltungen werden in der Analyse von Verstärkerschaltungen verwendet. Die Darlington-Schaltung und der Differenzverstärker werden als spezielle Anwendungen betrachtet. Aus dem Gebiet der Digitaltechnik schließen sich Kodes, logische Funktionen und die Schaltalgebra unter Verwendung von Bipolartransistoren an. Es folgen einige schaltungstechnische Realisierungen logischer Grundfunktionen.

17.1 Grundwissen – kurz und bündig

- Ein Transistor ist ein aktives Halbleiterbauelement.
- Es gibt bipolare (BJT) und unipolare (FET) Transistoren.
- Bei den bipolaren Transistoren gibt es Germanium- und Silizium-, npn- und pnp-Typen.
- Die Anschlüsse des bipolaren Transistors heißen Emitter, Basis und Kollektor.
- Im Arbeitspunkt ist beim Germanium-Transistor U_{BE} ca. 0,3 V, beim Silizium-Transistor ca. 0,7 V.
- Wirkt der Transistor als Verstärker, so steuert der kleine Basisstrom den großen Kollektorstrom.
- Gleichstromverstärkungsfaktor des Transistors: $B = \frac{I_{\mathrm{C}}}{I_{\mathrm{B}}}$.
- Ein npn-Transistor leitet, wenn die Basis positiv ist.
- Ein pnp-Transistor leitet, wenn die Basis negativ ist.

L. Stiny, *Aufgabensammlung zur Elektrotechnik und Elektronik*,
DOI 10.1007/978-3-658-14381-7_17

- Es gibt drei Grundschaltungen des Transistors: Basis-, Emitter- und Kollektorschaltung.
- Ein Transistor kann als linearer Verstärker oder als Schalter betrieben werden.
- Eingangs-, Ausgangs- und Steuerkennlinie beschreiben den Transistor.
- Die Sättigungsspannung U_{CEsat} beträgt bei Kleinleistungstransistoren ca. 0,2 V bis 0,5 V, bei Leistungstransistoren ca. 1 bis 2 V.
- Der Arbeitspunkt auf der Lastgeraden im Ausgangskennlinienfeld wird durch einen Basis-Ruhegleichstrom festgelegt.
- Wechselstrom-Kleinsignalverstärkung in Emitterschaltung:

$$\beta = \left.\frac{i_{\mathrm{C}}}{i_{\mathrm{B}}}\right|_{U_{\mathrm{CE=const}}} ; \quad \beta \approx B \gg 1$$

- Stromverstärkung in Basisschaltung: $\alpha = \frac{I_{\mathrm{C}}}{I_{\mathrm{E}}} < 1$
- Stromverstärkung in Kollektorschaltung: $\gamma = \frac{1}{1-\alpha} = \beta + 1$
- Umrechnung zwischen α und β: $\beta = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ und $\alpha = \frac{\beta}{\beta+1}$
- Die Stromverstärkung ist abhängig vom Arbeitspunkt und von der Temperatur.
- Die Stromverstärkung sinkt mit wachsender Frequenz.
- Beziehung zwischen der β-Grenzfrequenz und der Transitfrequenz: $f_{\mathrm{T}} = \beta \cdot f_{\beta}$
- Bei der Wahl des Arbeitspunktes sind bestimmte Grenzen des erlaubten Arbeitsbereiches zu beachten.
- Eingangsimpedanz der Emitterschaltung:

$$r_{\mathrm{eE}} = r_{\mathrm{BE}} = \frac{U_{\mathrm{T}}}{I_{\mathrm{B}}} = \frac{U_{\mathrm{T}} \cdot B}{I_{\mathrm{C}}} = \frac{\beta}{S}$$

- Ausgangsimpedanz der Emitterschaltung: $r_{\mathrm{aE}} = R_{\mathrm{C}} \parallel r_{\mathrm{CE}} \approx R_{\mathrm{C}}$
- Steilheit eines Transistors:

$$S = \frac{\Delta I_{\mathrm{C}}}{\Delta U_{\mathrm{BE}}} = \frac{\beta}{r_{\mathrm{BE}}}$$

- Wechselspannungsverstärkung der Emitterschaltung:

$$V_{\mathrm{uE}} = -\frac{\Delta U_{\mathrm{a}}}{\Delta U_{\mathrm{e}}} = -\beta \cdot \frac{R_{\mathrm{C}}}{r_{\mathrm{BE}}} = -S \cdot R_{\mathrm{C}} = -\frac{U_{\mathrm{Rc}}}{U_{\mathrm{T}}} = -\frac{I_{\mathrm{C}} \cdot R_{\mathrm{C}}}{U_{\mathrm{T}}}$$

- Abschätzung der Wechselspannungsverstärkung der Emitterschaltung:

$$V_{\mathrm{uE}} = -40 \cdot U_{\mathrm{Rc}} = -40 \cdot I_{\mathrm{C}} \cdot R_{\mathrm{C}}$$

- Leistungsverstärkung der Emitterschaltung: $V_{\mathrm{pE}} = \frac{P_{\mathrm{a}}}{P_{\mathrm{e}}} = \beta \cdot V_{\mathrm{uE}}$
- Frequenzgang der Wechselspannungsverstärkung in Emitterschaltung:

$$V_{\mathrm{uE}} = -\frac{\beta(f)}{B} \cdot \frac{U_{\mathrm{Rc}}}{U_{\mathrm{T}}}$$

- Eingangsimpedanz der Basisschaltung:

$$r_{eB} = \frac{r_{BE}}{\beta} = \frac{U_T}{I_C} = \frac{1}{S}$$

- Ausgangsimpedanz der Basisschaltung: $r_{aB} = R_C \parallel r_{CE} \approx R_C$
- Wechselspannungsverstärkung der Basisschaltung: $V_{uB} = V_{uE}$
- Leistungsverstärkung der Basisschaltung: $V_{pB} = \frac{P_a}{P_e} = \alpha \cdot V_{uB}$
- Eingangsimpedanz der Kollektorschaltung:

$$r_{eC} = \frac{U_T}{I_B} + \beta \cdot R_E = \beta \cdot \left(\frac{U_T}{I_C} + R_E\right); \quad r_{eC} \approx \beta \cdot R_E$$

- Der Eingangswiderstand der Kollektorschaltung ist sehr groß.
- Ausgangsimpedanz der Kollektorschaltung: $r_{aC} \approx \frac{U_T}{I_C}$
- Der Ausgangswiderstand der Kollektorschaltung ist sehr niedrig.
- Wechselspannungsverstärkung der Kollektorschaltung: $V_{uC} = \frac{\Delta U_a}{\Delta U_e} \approx 1 \ (\leq 1)$
- Leistungsverstärkung der Kollektorschaltung:

$$V_{pC} = \frac{P_a}{P_e} = \gamma \cdot V_{uC} \approx \beta \cdot V_{uC}$$

- Bei der Rückkopplung unterscheidet man Mitkopplung und Gegenkopplung.
- Die Gegenkopplung verbessert die Eigenschaften eines Verstärkers, obwohl die Verstärkung abnimmt.
- Das Produkt aus Verstärkung und Bandbreite ist konstant.
- Ein Transistor kann durch eine formale oder eine physikalische Ersatzschaltung beschrieben werden.
- Die formale Ersatzschaltung benutzt Vierpolgleichungen mit meist h-Parametern.
- Ersatzschaltbilder des Transistors enthalten gesteuerte Quellen.
- Spezielle Schaltungen sind die Darlington-, Bootstrap-, Kaskodeschaltung.
- Der Differenzverstärker verstärkt die Differenz zweier Eingangsspannungen.
- Harmonische Oszillatoren erzeugen Sinusschwingungen.
- In der Digitaltechnik wird der Transistor als Schalter verwendet.
- Ein Transistor als Schalter hat bestimmte Schaltzeiten.
- Ein Transistor kann zum Schalten eines Verbrauchers benutzt werden.
- Ein Multivibrator erzeugt periodische, rechteckförmige Spannungen.
- Ein Monoflop erzeugt einen Rechteckimpuls bestimmter Dauer.
- Ein Flipflop ist in der Digitaltechnik ein Speicherelement.
- Der Schmitt-Trigger wandelt ein analoges in ein digitales Signal um (mit Hysterese).
- Binäre Signale haben nur zwei Spannungswerte, High und Low.
- Ein Bit entspricht einer Binärstelle (kleinste Informationseinheit).
- Elektronische Digitalrechner arbeiten mit Dualzahlen, die mit elektronischen Schaltern leicht realisierbar sind.

- Grundlegende Verknüpfungen logischer Variablen sind UND, ODER, NICHT.
- Liegt am Eingang eines Inverters High, so ist der Ausgang Low und umgekehrt.
- Ist nur einer der Eingänge eines AND-Gatters auf Low, so ist der Ausgang Low.
- Ist nur einer der Eingänge eines OR-Gatters auf High, so ist der Ausgang High.
- Gatter können in DL-, DTL-, RTL-, TTL-, ECL-, CMOS-Technik diskret oder integriert als IC realisiert werden.
- Für logische Funktionen gibt es digitale Schaltzeichen.

Aufgabe 17.1

Für die Messungen am bipolaren Transistor steht nur ein Ohmmeter zur Verfügung.

Welche Messungen muss man durchführen, um die folgenden Fragen beantworten zu können.

a) Wie können Sie prüfen, ob ein npn-Transistor defekt ist oder nicht?
b) Wie kann man bei einem unbekannten npn-Transistor feststellen, welcher Anschluss Emitter E, Basis B oder Kollektor C ist?
c) Wie kann man bei einem völlig unbekannten Transistor feststellen, ob es sich um einen npn- oder pnp-Transistor handelt?

Lösung

a) Um festzustellen, ob ein Transistor defekt ist oder nicht, versucht man die Emitter-Basis-Diode und die Kollektor-Basis-Diode zu messen. Zuerst verbindet man die Basis und den Emitter mit den beiden Anschlüssen des Ohmmeters und prüft, ob die Diode leitet. Dann vertauscht man die beiden Anschlüsse des Ohmmeters und prüft wieder, ob die Diode leitet. Leitete die Diode bei der ersten Messung, so muss sie bei der zweiten Messung sperren. Hat die Diode bei der ersten Messung gesperrt, so muss sie bei der zweiten Messung leiten. Tritt einer dieser beiden Fälle ein, so ist die Emitter-Basis-Diode in Ordnung.
   Falls bei beiden Messungen die Diode geleitet oder gesperrt hat, ist der Transistor defekt. Nun muss nach dem gleichen Verfahren die Kollektor-Basis-Diode überprüft werden. Auch sie muss genau bei einer Messung leiten und bei der anderen sperren. Wurden beide Dioden überprüft und sind sie nicht defekt, dann funktioniert der Transistor mit hoher Wahrscheinlichkeit.
   Als zusätzliche Messung kann man noch versuchen, die Stromverstärkung zu messen. Dazu verbindet man das Ohmmeter mit dem Kollektor und dem Emitter des Transistors, wobei sich am Kollektor der positive Anschluss des Ohmmeters befindet. Die Basis ist nicht angeschlossen. Der Transistor muss jetzt sperren. Verbindet man nun die Basis über einen $100\,\text{k}\Omega$-Widerstand mit dem Kollektor, muss der Transistor leiten.
b) Bei einem unbekannten npn-Transistor lassen sich die Anschlüsse leicht bestimmen. Zuerst versucht man die beiden Anschlüsse zu finden, die bei beliebiger Polung des Ohmmeters sperren. Der dritte, nicht beschaltete Anschluss des Transistors ist die Basis. Nun muss noch bestimmt werden, welcher Anschluss der Kollektor und welcher

der Emitter ist. Dies lässt sich über die Stromverstärkung ermitteln. Dazu schließt man beide Anschlüsse des Ohmmeters an die beiden noch unbekannten Anschlüsse des Transistors an. Der Transistor darf jetzt nicht leiten. Verbindet man die Basis mit einem 100 kΩ-Widerstand mit dem Anschluss des Transistors, mit dem der positive Anschluss des Ohmmeters verbunden ist, beginnt der Transistor zu leiten. Dem vom Ohmmeter angezeigten Wert des Widerstandes notiert man sich. Nun werden die beiden unbekannten Anschlüsse des Transistors vertauscht. Der 100 kΩ-Widerstand wird wieder zwischen Basis und positiven Anschluss des Ohmmeters geschaltet. Jetzt leitet der Transistor wieder. Die Messung mit dem niedrigeren gemessenen Widerstand des Transistors zeigt, welcher Anschluss der Kollektor sein muss. Bei dieser Messung war der 100 kΩ-Widerstand nämlich zwischen Basis und Kollektor geschaltet.

c) Bei einem völlig unbekannten Transistor ermittelt man zuerst die Basis nach dem oben gezeigten Verfahren. Als nächstes prüft man, ob ein Strom von der Basis zu irgendeinem anderen Anschluss des Transistors fließt. Wenn an der Basis der positive Anschluss des Ohmmeters liegt, dann handelt es sich um einen npn-Transistor. Liegt an der Basis der negative Anschluss, dann handelt es sich um einen pnp-Transistor.

Aufgabe 17.2

Bei welcher Grundschaltung eines bipolaren Transistors im Betrieb als Verstärker erfolgt eine Phasenverschiebung von 180 Grad zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung?

Ist dies die Basis-, Kollektor-, Drain-, Source- oder Emitterschaltung?

Lösung

Emitterschaltung

Aufgabe 17.3

Abb. 17.1 zeigt den Ausgangskreis eines Transistorverstärkers. Im eingestellten Arbeitspunkt beträgt die Spannung zwischen Kollektor und Emitter $U_{CE} = 10\,\text{V}$. Der Basisstrom I_B wird als vernachlässigbar klein betrachtet.

Die Betriebsspannung ist $U_B = 30\,\text{V}$, der Arbeitswiderstand ist $R_A = 100\,\Omega$.

a) Wie groß ist in diesem Arbeitspunkt der Kollektorstrom I_C?
b) Welche Leistung P_{RA} wird in diesem Arbeitspunkt im Arbeitswiderstand R_A umgesetzt?
c) Welche Verlustleistung P_T wird in diesem Arbeitspunkt im Transistor umgesetzt?
d) Welche Leistung P_{UB} muss die Betriebsspannungsquelle U_B liefern?

Lösung

a) Ein Maschenumlauf im Uhrzeigersinn ergibt (es wird willkürlich bei U_{CE} begonnen):

$$-U_{CE} - I_C \cdot R_a + U_B = 0; \quad \Rightarrow I_C = \frac{U_B - U_{CE}}{R_a} = \frac{30\,\text{V} - 10\,\text{V}}{100\,\Omega} = \underline{\underline{0{,}2\,\text{A}}}$$

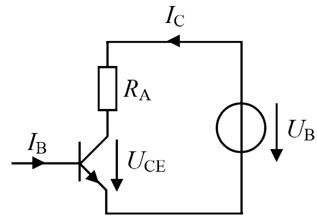


Abb. 17.1 Ausgangskreis eines Transistorverstärkers

b) $P_{RA} = R_A \cdot I_C^2 = 100\,\Omega \cdot (0{,}2\,A)^2 = \underline{\underline{4\,W}}$
c) $P_T = U_{CE} \cdot I_C = 10\,V \cdot 0{,}2\,A = \underline{\underline{2\,W}}$
d) $P_{UB} = P_{RA} + P_T = U_B \cdot I_C = \underline{\underline{6\,W}}$

17.2 Eingangskennlinie, Arbeitspunkt

Aufgabe 17.4
Für die Berechnung eines Verstärkers mit einem Bipolartransistor ist der dynamische Eingangswiderstand r_{BE} des Transistors eine wichtige Größe. In Abb. 17.2 ist die Eingangskennlinie eines Transistors mit einem festgelegten Arbeitspunkt AP gegeben.

Wie groß ist r_{BE} des Transistors? Geben Sie einen für Kleinleistungstransistoren typischen Wertebereich für r_{BE} an. Ist die Eingangskennlinie temperaturabhängig? Falls ja,

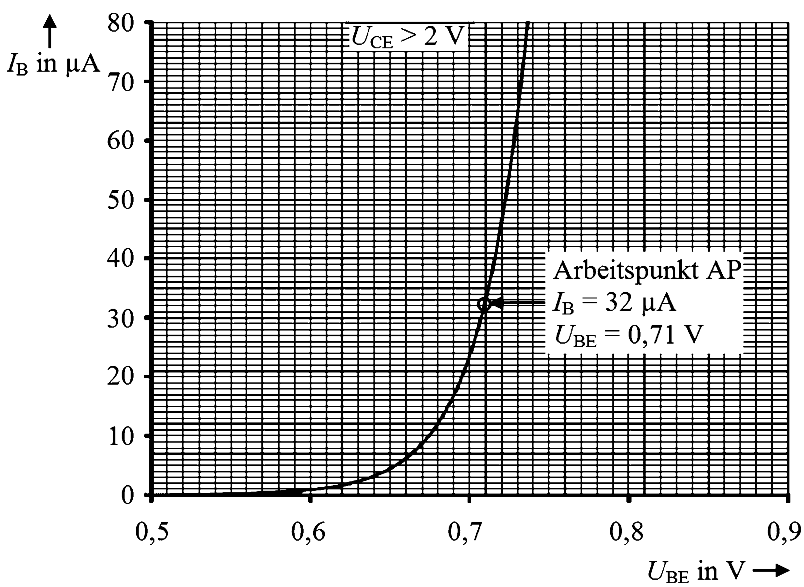


Abb. 17.2 Eingangskennlinie eines Transistors mit einem festgelegten Arbeitspunkt AP

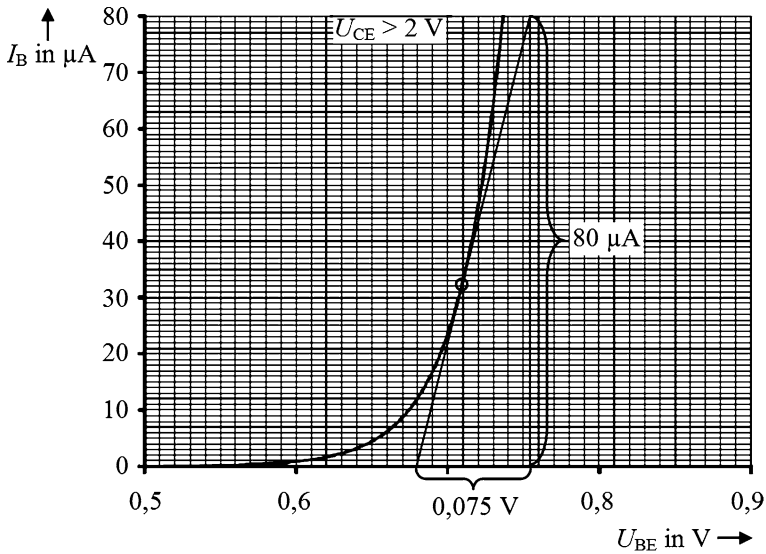


Abb. 17.3 Eingangskennlinie mit Tangente im Arbeitspunkt

welche Näherungswerte gelten für die Änderung von U_{BE} bzw. I_B bei einer Temperaturänderung?

Lösung

Der Eingangswiderstand r_{BE} kann der Eingangskennlinie als Kehrwert der Steigung der Kennlinie im Arbeitspunkt AP entnommen werden (Abb. 17.3).

$$r_{BE} = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{0{,}075\,\mathrm{V}}{80\,\mu\mathrm{A}} = \underline{\underline{937\,\Omega}}.$$

Bei den für Kleinleistungstransistoren üblichen Werten des Basisstroms I_B von 1 µA bis 100 µA liegt r_{BE} ungefähr im Bereich von 30 kΩ bis 300 Ω.

Die Eingangskennlinie ist stark von der Temperatur abhängig. Bei konstantem Basisstrom sinkt die Basis-Emitter-Spannung mit steigender Temperatur um ca. 2 mV/°C. Wird dagegen U_{BE} konstant gehalten, verdoppelt sich der Basisstrom mit etwa 12 °C Temperaturerhöhung.

Aufgabe 17.5

Gegeben ist in Abb. 17.4 die Eingangskennlinie $I_B = f(U_{BE})$ eines Transistors und in Abb. 17.5 das Ausgangskennlinienfeld $I_C = f(U_{CE})$ des Transistors mit I_B als Parameter. Der in Abb. 17.6 gezeigte Transistorverstärker mit der Betriebsspannung $U_B = 15$ V soll eine möglichst große Amplitude der Ausgangsspannung ermöglichen. Als Basisgleichstrom zur Festlegung des Arbeitspunktes AP wird $I_B = 50\,\mu$A gewählt.

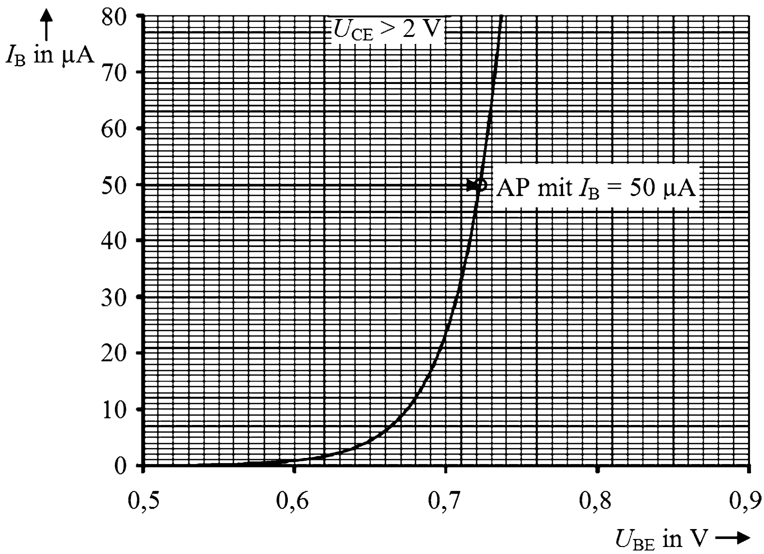


Abb. 17.4 Eingangskennlinie eines Transistors

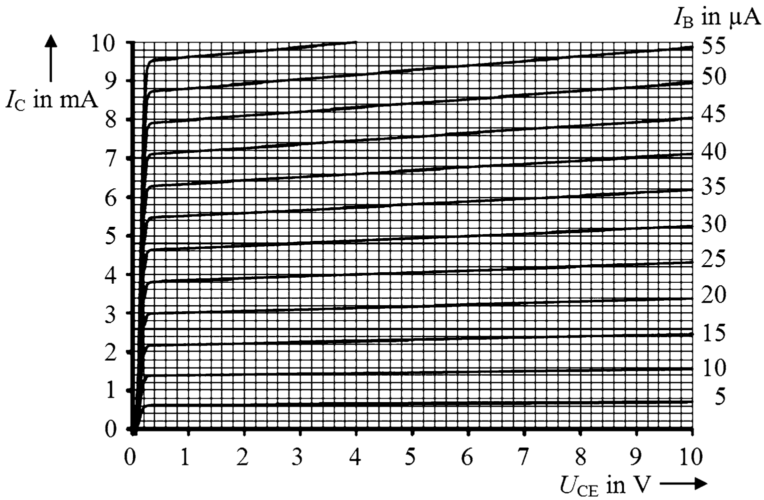
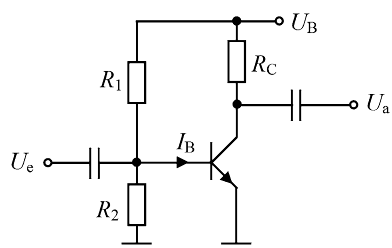


Abb. 17.5 Ausgangskennlinienfeld des Transistors

Abb. 17.6 Transistorverstärker



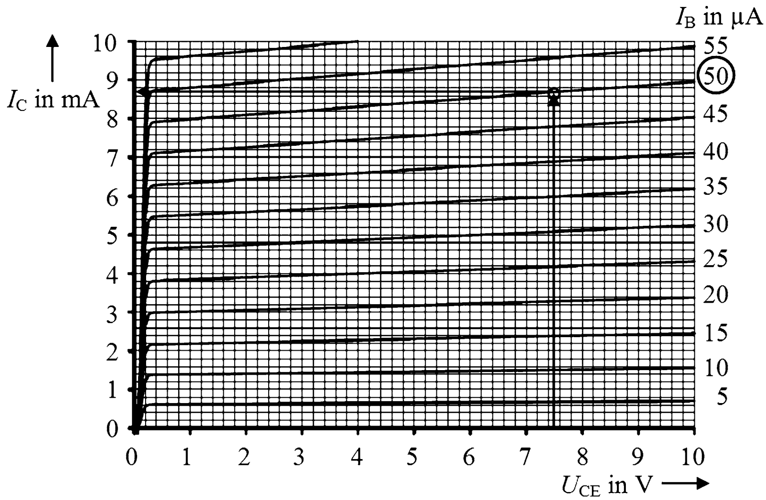


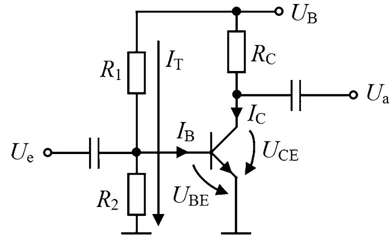
Abb. 17.7 Ausgangskennlinie zum gewählten Basisstrom

a) Um welche Grundschaltung eines Transistorverstärkers handelt es sich?
b) Bestimmen Sie R_1, R_2 und R_C. Erläutern Sie die detailliert die Vorgehensweise.
c) Wird der eingestellte Arbeitspunkt exakt erreicht und ist er stabil? Falls nein, warum nicht? Durch welche Maßnahme könnte man den Arbeitspunkt einstellen? Wie verhalten sich Basis- und Kollektorstrom sowie Kollektor-Emitter-Spannung, wenn der Transistor erwärmt wird? Begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.
d) Schlagen Sie zwei Schaltungen mit Stromgegenkopplung und eine Schaltung mit Spannungsgegenkopplung zur Stabilisierung des Arbeitspunktes vor. Berechnen Sie die Werte aller Widerstände in den Schaltungen.

Lösung

a) Es handelt sich um eine Emitterschaltung.
b) Um bei einem Transistorverstärker eine möglichst große Amplitude der Ausgangsspannung zu ermöglichen, wird die Kollektor-Emitter-Spannung etwa halb so groß wie die Betriebsspannung U_B gewählt. Zu dem gewählten Basisstrom von 50 µA (in Abb. 17.7 eingekreist) gibt es eine entsprechende Kennlinie im Ausgangskennlinienfeld. Bei $U_{CE} = U_B/2 = 7{,}5\,\text{V}$ liest man einen Kollektorstrom von ca. $I_C = 8{,}7\,\text{mA}$ ab.
   Aus dem Ausgangskennlinienfeld folgt auch als Kollektor-Basis-Stromverhältnis der Gleichstromverstärkungsfaktor: $B = \frac{I_C}{I_B} = \frac{8{,}7\,\text{mA}}{50\,\mu\text{A}} = 174$.
   Die Basis-Emitter-Spannung U_{BE} kann der Eingangskennlinie (Abb. 17.4) $I_B = f(U_{BE})$ entnommen werden (Lot vom Arbeitspunkt auf die Abszisse), sie beträgt $U_{BE} = 0{,}72\,\text{V}$. Ungenauer könnte sie (bei einem Siliziumtransistor) auch zu 0,6 V oder 0,7 V angenommen werden. Die Spannung U_{BE} wird mittels eines Spannungsteilers

Abb. 17.8 Schaltung mit Strömen und Spannungen



eingestellt. Damit der dem Spannungsteiler entnommene Basisstrom die eingestellte Spannung nicht beeinflusst, wird der Teilerstrom I_T etwa zehnmal so groß wie der Basisstrom gewählt. $\Rightarrow I_T = 500\,\mu A$.
Aus der Schaltung (Abb. 17.8) lassen sich die Widerstände unmittelbar berechnen.

$$R_C = \frac{U_B - U_{CE}}{I_C} = \frac{15\,V - 7{,}5\,V}{8{,}7\,mA} = \underline{\underline{862\,\Omega}}$$

$$R_1 = \frac{U_B - U_{BE}}{I_B + I_T} = \frac{15\,V - 0{,}72\,V}{50\,\mu A + 500\,\mu A} = \underline{\underline{25.963\,\Omega}}$$

$$R_2 = \frac{U_{BE}}{I_T} = \frac{0{,}72\,V}{500\,\mu A} = \underline{\underline{1440\,\Omega}}$$

c) Der gewünschte Arbeitspunkt wird nicht exakt erreicht. Ursache ist die Streuung aller Transistorparameter. Die Gleichstromverstärkung B kann z. B. um 50 % und mehr von dem aus den Diagrammen bestimmten Wert abweichen, da diese typische Werte wiedergeben.
Der Arbeitspunkt könnte eingestellt werden, indem man z. B. R_1 durch ein Potenziometer ersetzt. Dies ist aber in der Praxis keine brauchbare Lösung. Der Arbeitspunkt ist auch nicht stabil. Dies stellt man leicht fest, indem man den Transistor etwas erwärmt. Da die Basis-Emitter-Spannung durch den Spannungsteiler stabil gehalten wird, nimmt der Basisstrom bei Erwärmung zu (etwa eine Verdoppelung für je 10 °C Temperaturerhöhung). Wegen $I_C = B \cdot I_B$ steigt damit auch der Kollektorstrom. Der Spannungsabfall an R_C wird größer, also nimmt die Kollektor-Emitter-Spannung U_{CE} ab. Eine brauchbare Schaltung erhält man nur mittels geeigneter Stabilisierungsmaßnahmen.

d) Eine gängige Schaltungsvariante der Stromgegenkopplung besteht darin, dass in die Emitterzuleitung ein Widerstand eingefügt wird (Abb. 17.9).
Auch hier steigt der Basisstrom bei Erwärmung, da die Basis-Emitter-Spannung durch den Spannungsteiler fest ist. Der dann folgende Stromanstieg von I_C hat auch eine Erhöhung der Spannung am Emitterwiderstand zur Folge, durch den I_C nach Masse fließt. Da die Basisspannung gegen Masse fest ist, muss also U_{BE} kleiner werden. Das verringert aber den Flussstrom I_B durch die Basis-Emitter-Diode. Folglich muss auch I_C wieder abnehmen, bis das ursprüngliche Gleichgewicht wieder hergestellt ist.

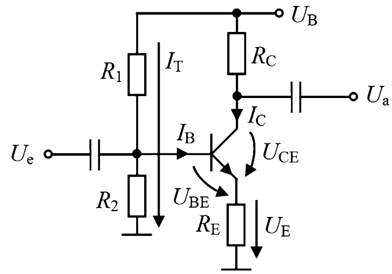


Abb. 17.9 Stromgegenkopplung durch Widerstand in der Emitterzuleitung

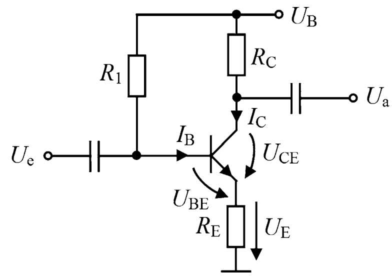


Abb. 17.10 Nutzung des Spannungsabfalls an R_1

Die Dimensionierung geht von der Annahme aus, dass an R_E etwa 1 V bis 3 V abfallen dürfen, ohne die Amplitude der Ausgangsspannung merklich zu beschneiden. Hier wurde U_{CE} um 1 Volt verkleinert. Es folgt die Berechnung der Widerstände.

$$R_C = \frac{U_B - U_E - U_{CE}}{I_C} = \frac{15\,\text{V} - 2\,\text{V} - 6{,}5\,\text{V}}{8{,}7\,\text{mA}} = \underline{\underline{747\,\Omega}}$$

$$R_E = \frac{U_E}{I_C + I_B} = \frac{2\,\text{V}}{8{,}7\,\text{mA} + 50\,\mu\text{A}} = \underline{\underline{229\,\Omega}}$$

$$R_1 = \frac{U_B - U_E - U_{BE}}{I_B + I_T} = \frac{15\,\text{V} - 2\,\text{V} - 0{,}72\,\text{V}}{50\,\mu\text{A} + 500\,\mu\text{A}} = \underline{\underline{22.327\,\Omega}}$$

$$R_2 = \frac{U_{BE} + U_E}{I_T} = \frac{0{,}72\,\text{V} + 2\,\text{V}}{500\,\mu\text{A}} = \underline{\underline{5440\,\Omega}}$$

Statt der Arbeitspunkteinstellung mittels Basisspannungsteiler kann auch der Spannungsabfall an R_1 ausgenützt werden (Abb. 17.10).
Nun errechnet sich R_1 zu

$$R_1 = \frac{U_B - U_E - U_{BE}}{I_B} = \frac{15\,\text{V} - 2\,\text{V} - 0{,}72\,\text{V}}{50\,\mu\text{A}} = \underline{\underline{245{,}6\,\text{k}\Omega}}$$

Die Werte für R_C und R_E ändern sich nicht.
Beide Schaltungen zeigen sehr gute Stabilität bei schwankenden Temperaturen und (z. B. im Reparaturfall) bei einem Wechsel des Transistors.
Einer Zunahme des Basisstroms kann man auch dadurch begegnen, dass die dabei fallende Kollektor-Emitter-Spannung auf die Basis rückgekoppelt wird und die Basis-Emitter-Spannung absenkt (Abb. 17.11).

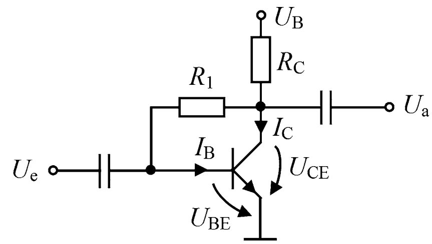


Abb. 17.11 Schaltung mit Spannungsgegenkopplung zur Stabilisierung des Arbeitspunktes

Aus der Schaltung kann man berechnen:

$$R_1 = \frac{U_{CE} - U_{BE}}{I_B} = \frac{7{,}5\,\text{V} - 0{,}72\,\text{V}}{50\,\mu\text{A}} = \underline{\underline{135{,}6\,\text{k}\Omega}}$$

$$R_C = \frac{U_B - U_{CE}}{I_C + I_B} = \frac{15\,\text{V} - 7{,}5\,\text{V}}{8{,}7\,\text{mA} + 50\,\mu\text{A}} = \underline{\underline{857\,\Omega}}$$

Auch diese Schaltung arbeitet weitgehend unabhängig von Exemplarstreuungen des Transistors oder thermischen Einwirkungen.

Aufgabe 17.6

In der Schaltung nach Abb. 17.12 wird der npn-Bipolartransistor T als Schalter betrieben. Das Ausgangskennlinienfeld von T ist in Abb. 17.13 angegeben.

a) Zunächst ist die Eingangsspannung $U_e = 0\,\text{V}$. Wie ist dadurch der Schaltzustand von T? Bestimmen Sie den Widerstandswert von R_a so, dass $U_a = 10\,\text{V}$ beträgt.
b) Berechnen Sie I_C in Abhängigkeit von U_{CE}, U_B, R_a und R_L. Zeichnen Sie diese Funktion mit berechneten bzw. gegebenen Zahlenwerten als Arbeitsgerade AG1 in das Ausgangskennlinienfeld ein.
c) Die Eingangsspannung wird nun auf $U_e = 2{,}5\,\text{V}$ eingestellt. Dadurch fließt ein Kollektorstrom $I_C = 240\,\text{mA}$. Kennzeichnen Sie den Arbeitspunkt AP im Ausgangskennlinienfeld. Wie groß ist der zugehörige Basisstrom I_B?

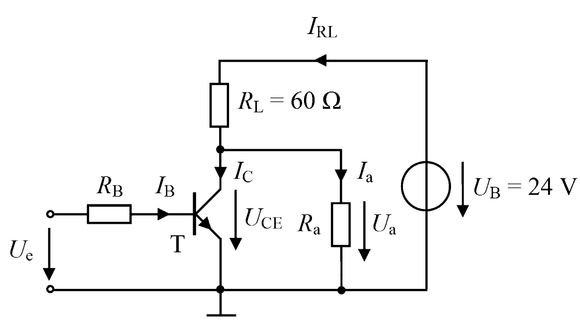


Abb. 17.12 Transistor als Schalter

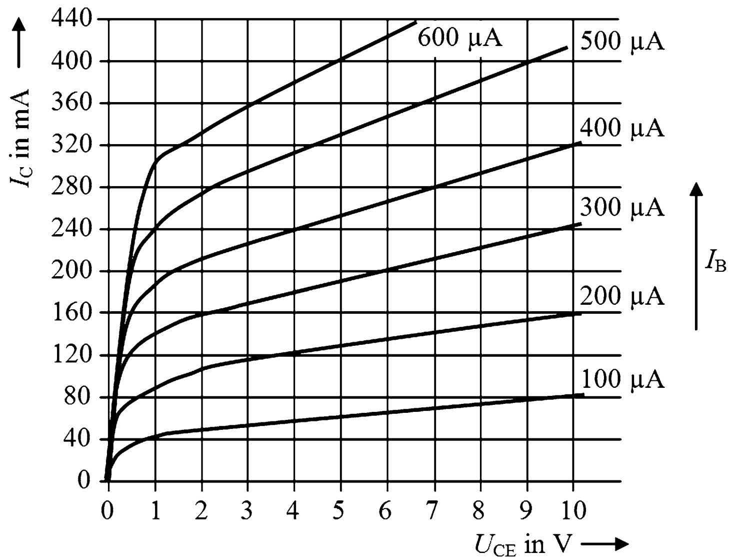


Abb. 17.13 Ausgangskennlinienfeld des Transistors

d) Bestimmen Sie den Widerstandswert des benötigten Basisvorwiderstandes R_B. Nehmen Sie hierzu für die Basis-Emitter-Spannung den typischen Wert eines Si-Bipolartransistors von $U_{BE} = 0{,}7\,\text{V}$ an.

e) Welche Leistung P_T wird im eingestellten Arbeitspunkt näherungsweise (der Basisstrom wird vernachlässigt) im Transistor umgesetzt?

f) Nun sei $R_a = \infty$. Zeichnen Sie die neue Arbeitsgerade AG2 in das Ausgangskennlinienfeld ein.

g) Wo muss der Arbeitspunkt liegen, damit die im Transistor umgesetzte Leistung $P_{V,max}$ maximal wird? Wie groß ist $P_{V,max}$?

Lösung

a) Für $U_e = 0\,\text{V}$ sperrt T, die Strecke Kollektor-Emitter kann als offen betrachtet werden. R_a und R_L liegen als Spannungsteiler an U_B:

$$U_a = U_B \frac{R_a}{R_a + R_L} \Rightarrow R_a = \frac{U_a \cdot R_L}{U_B - U_a}; \quad \underline{\underline{R_a = 42{,}9\,\Omega}}$$

b) Knotenregel am Kollektorknoten:

$$I_C = I_{RL} - I_a \text{ mit } I_{RL} = \frac{U_B - U_{CE}}{R_L}; \quad I_a = \frac{U_{CE}}{R_a} \Rightarrow$$

$$I_C = \frac{U_B - U_{CE}}{R_L} - \frac{U_{CE}}{R_a} = \frac{U_B}{R_L} - \frac{U_{CE}}{R_L} - \frac{U_{CE}}{R_a}; \quad I_C = -\left(\frac{1}{R_L} + \frac{1}{R_a}\right) \cdot U_{CE} + \frac{U_B}{R_L}$$

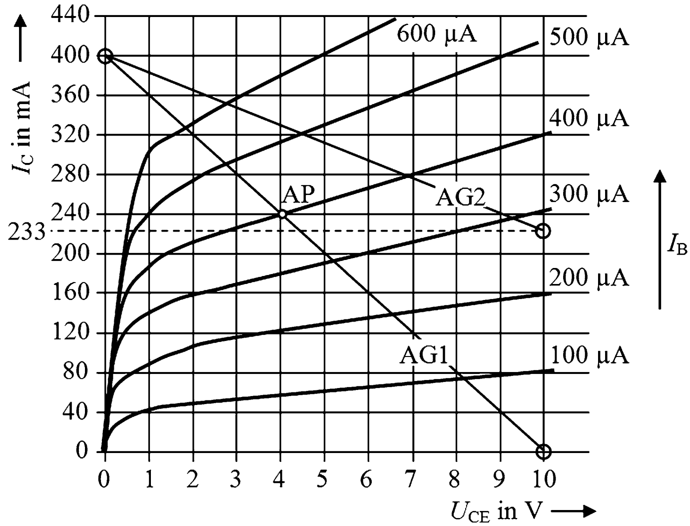


Abb. 17.14 Ausgangskennlinienfeld mit Arbeitsgeraden und Arbeitspunkt

Dies ist eine Geradengleichung, sie beschreibt die Arbeitsgerade.
Zahlenwerte einsetzen ergibt: $I_C = -0{,}04\,\text{S} \cdot U_{CE} + 0{,}4\,\text{A}$.
Es werden zwei Punkte der Arbeitsgeraden berechnet:
$I_C(U_{CE} = 0) = 0{,}4\,\text{A}$; $I_C(U_{CE} = 10\,\text{V}) = 0\,\text{A}$; die beiden Punkte werden in das Ausgangskennlinienfeld eingetragen und die Arbeitsgerade (AG1) eingezeichnet (Abb. 17.14).

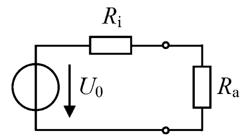
c) Im Ausgangskennlinienfeld wird für $I_C = 240\,\text{mA}$ beim Schnittpunkt der Arbeitsgeraden mit einer Ausgangskennlinie der AP eintragen und der zur Ausgangskennlinie gehörige Parameterwert von I_B ablesen: $\underline{\underline{I_B = 400\,\mu\text{A}}}$.

d)
$$R_B = \frac{U_E - U_{BE}}{I_B}; \quad R_B = \frac{2{,}5\,\text{V} - 0{,}7\,\text{V}}{4 \cdot 10^{-4}\,\text{A}} = \underline{\underline{4{,}5\,\text{k}\Omega}}$$

e) Der Basisstrom wird vernachlässigt. Damit ist $P_T = U_{CE} \cdot I_C$.
Die zum Arbeitspunkt zugehörige Kollektor-Emitter-Spannung wird aus dem Ausgangskennlinienfeld zu $U_{CE} = 4\,\text{V}$ abgelesen. $P_T = 4\,\text{V} \cdot 0{,}24\,\text{A} = \underline{\underline{0{,}96\,\text{W}}}$

f) Für $R_a = \infty$ wird die Gleichung der Arbeitsgeraden: $I_C = -\frac{1}{R_L} \cdot U_{CE} + \frac{U_B}{R_L}$.
Es werden wieder zwei Punkte der Arbeitsgeraden berechnet.
$U_{CE} = 0$ gibt $I_C = 0{,}4\,\text{A}$ und $I_C = 0$ gibt $U_{CE} = U_B$.
Der Wert $U_{CE} = U_B$ liegt außerhalb des Zeichnungsbereiches. Deshalb wird für $U_{CE} = 10\,\text{V}$ eingesetzt, man erhält $I_C = 0{,}233\,\text{A}$. Die beiden Punkte verbinden im Ausgangskennlinienfeld die neue Arbeitsgerade AG2 (Abb. 17.14)

Abb. 17.15 Reale Spannungsquelle



g) Wir vergleichen jetzt die Schaltung mit einer realen Spannungsquelle (Abb. 17.15). Die Leistung P_{max} in R_a ist maximal, wenn gilt: $R_a = R_i$, sie beträgt dann $P_{max} = \frac{U_0^2}{4 \cdot R_a}$. Dies ist der Fall der Leistungsanpassung.
Durch die Ersetzungen $R_a = R_L$ (R_L = Kollektorwiderstand), Widerstand der Kollektor-Emitter-Strecke $R_{CE} = R_i$ und $U_0 = U_B$ werden die Verhältnisse auf die Transistorschaltung übertragen.
Für $R_i = R_L$ ist $U_{RL} = U_{CE} = \frac{U_B}{2}$. Der Arbeitspunkt muss also in der Mitte der Lastgeraden bei $U_{CE} = \frac{U_B}{2}$ liegen. Man erreicht dadurch eine maximale Aussteuerbarkeit ohne Gefahr der Übersteuerung (Wahl der Kollektor-Emitter-Spannung wie bei Aufgabe 17.5b). Somit ergibt sich: $\underline{\underline{U_{CE} = 12\,\text{V}}}$.
Damit ist

$$I_C = -\frac{U_B}{2 \cdot R_L} + \frac{U_B}{R_L} = \frac{-U_B + 2 \cdot U_B}{2 \cdot R_L} = \frac{U_B}{2 \cdot R_L}; \quad I_C = \frac{24\,\text{V}}{2 \cdot 60\,\Omega} = \underline{\underline{0{,}2\,\text{A}}}$$

Die im Transistor umgesetzte Leistung $P_{V,max}$ ist $P_{V,max} = \frac{U_B^2}{4 \cdot R_L}$.

$$P_{V,max} = \frac{(24\,\text{V})^2}{4 \cdot 60\,\Omega} = \underline{\underline{2{,}4\,\text{W}}}$$

Durch die Leistungsanpassung wird nicht nur die Leistung im Transistor, sondern auch die an R_L abgegebene Leistung maximal.

Aufgabe 17.7
Es soll der Arbeitspunkt des Transistorverstärkers in Abb. 17.16 eingestellt werden.
Gegeben: $U_B = 15\,\text{V}$, $I_C = 5\,\text{mA}$, $U_{CE} = 5\,\text{V}$, $U_{RE} = 3\,\text{V}$, $I_{R2} = 10 \cdot I_B$
Der Transistor wird durch die beiden Gleichungen $U_{BE} = 0{,}6\,\text{V}$ und $I_C = 200 \cdot I_B$ beschrieben.

a) Beschreiben Sie die Schaltung und die Aufgaben der einzelnen Bauteile.
b) Berechnen Sie die vier Widerstände der Schaltung so, dass die gegebenen Werte der Spannungen und Ströme zutreffen.

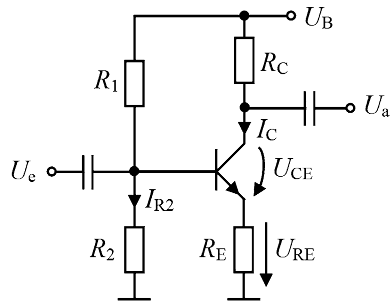


Abb. 17.16 Transistorverstärker

Lösung

a) Kurze Beschreibung der Schaltung:

Die beiden Kondensatoren am Eingang und am Ausgang des Verstärkers haben die Aufgabe, Wechselstrom und Gleichstrom voneinander zu trennen. Ein Gleichspannungsanteil der zu verstärkenden Eingangs-Wechselspannung würde den Arbeitspunkt des Transistors verschieben. Die Kondensatoren sperren Gleichstrom und lassen Wechselstrom nahezu ungehindert durch. Der Kondensator am Ausgang ist zugleich der Kondensator am Eingang einer nachfolgenden Verstärkerstufe.

Im Transistor selbst gibt es neben den zeitlich veränderlichen Spannungen und Strömen auch Gleichströme und Gleichspannungen. Die „Einstellung des Arbeitspunktes" betrifft nur diese Gleichgrößen. Man geht also bei der Betrachtung des Arbeitspunktes davon aus, dass alle Wechselstromquellen der Gesamtschaltung abgeschaltet sind.

Der Widerstand R_C stellt den „Arbeitswiderstand" dar, an dem die Wechselstrom-Ausgangsspannung abfällt.

Der Widerstand R_E dient zur Temperaturstabilisierung des Arbeitspunktes. Mit steigender Temperatur steigt der Emitterstrom des Transistors an. Dadurch wird U_{RE} größer. Da die Spannung an R_2 wegen des Spannungsteilers bestehend aus R_1 und R_2 mit steigender Temperatur nahezu konstant bleibt, wird U_{BE} kleiner. Dies wirkt dem Anstieg des Emitterstroms wieder entgegen.

Die beiden Widerstände R_1 und R_2 dienen zum Einstellen des Basisstroms.

Die vorgegebenen Werte von $I_C = 5\,\text{mA}$ und $U_{CE} = 5\,\text{V}$ können als empfohlene Werte des Herstellers betrachtet werden. Der Wert $I_{R2} = 10 \cdot I_B$ sorgt dafür, dass der dem Spannungsteiler entnommene Basisstrom die eingestellte Spannung an R_2 nicht beeinflusst.

b)

$$R_C = \frac{U_B - U_{RE} - U_{CE}}{I_C} = \frac{7\,\text{V}}{5\,\text{mA}} = \underline{\underline{1{,}4\,\text{k}\Omega}}\text{; mit } I_E \approx I_C \text{ folgt } R_E = \frac{3\,\text{V}}{5\,\text{mA}} = \underline{\underline{600\,\Omega}}$$

An R_2 liegt die Spannung $U_{BE} + U_{RE}$. Somit ist:

$$R_2 = \frac{0{,}6\,\text{V} + 3{,}0\,\text{V}}{\frac{5\,\text{mA}}{200} \cdot 10} = \frac{3{,}6\,\text{V}}{250\,\mu\text{A}} = \underline{\underline{14{,}4\,\text{k}\Omega}}$$

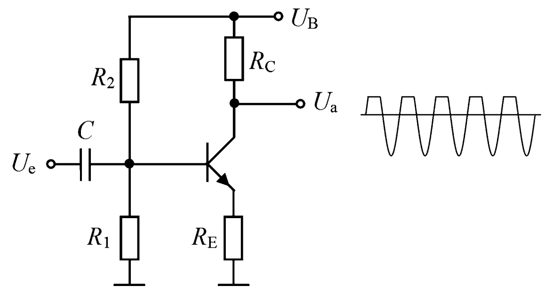


Abb. 17.17 Transistorverstärker mit Ausgangssignal

Durch R_1 fließt die Summe aus I_B und I_{R2}.

$$R_1 = \frac{U_B - U_{RE} - U_{BE}}{I_B + I_{R2}} = \frac{11{,}4\,\text{V}}{275\,\mu\text{A}} = \underline{\underline{41{,}5\,\text{k}\Omega}}$$

Aufgabe 17.8

Das Eingangssignal U_e des abgebildeten Transistorverstärkers in Abb. 17.17 ist sinusförmig. Das dazugehörige Ausgangssignal U_a mit begrenzten positiven Halbwellen ist ebenfalls abgebildet.

Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche sind falsch?

Um ein sinusförmiges Ausgangssignal U_a zu erhalten, könnte man:

1) den Widerstand R_1 vergrößern,
2) den Widerstand R_E verkleinern,
3) den Widerstand R_C verkleinern,
4) den Kondensator C vergrößern,
5) die Betriebsspannung U_B erhöhen.

Lösung

Die positiven Spitzen von U_a werden abgeschnitten (begrenzt). Der Kollektor hat im Arbeitspunkt ein zu positives Potenzial. Die Basis ist also im Arbeitspunkt zu wenig positiv, der npn-Transistor wird durch die zu nahe an Massepotenzial liegende Basis zu wenig durchgesteuert. Der Widerstand R_1 zieht die Basis zu stark gegen Masse, er muss vergrößert werden. Wird die Betriebsspannung U_B erhöht, so vergrößert sich der Aussteuerbereich.

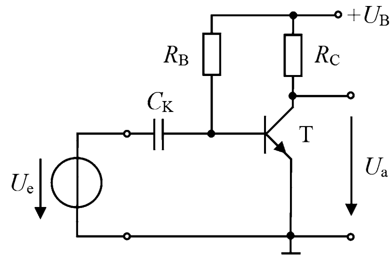
Somit sind die Punkte 1 und 5 richtig, die anderen sind falsch.

Aufgabe 17.9

Gegeben ist die Emitterschaltung in Abb. 17.18. Die Versorgungsspannung beträgt $U_B = 10\,\text{V}$. Für den npn-Transistor T gelten die Kennlinien in Abb. 17.19 und Abb. 17.20.

a) Bestimmen Sie den Kollektorwiderstand R_C und den Basisvorwiderstand R_B so, dass der Arbeitspunkt AP mit den Werten $U_{CE} = 6\,\text{V}$ und $I_C = 5\,\text{mA}$ realisiert wird.

Abb. 17.18 Emitterschaltung



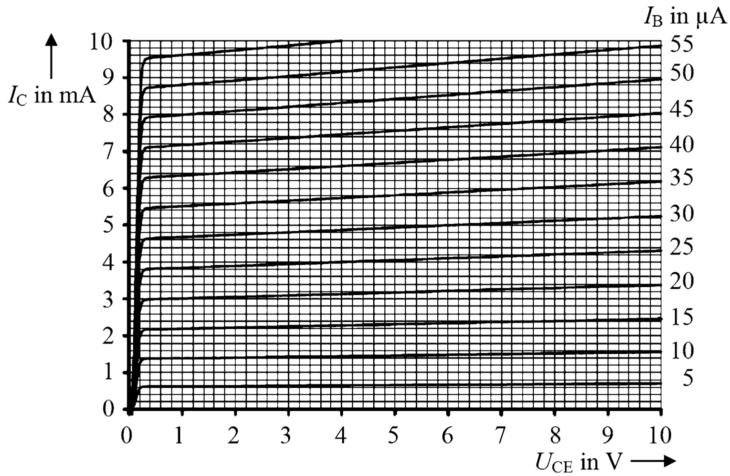


Abb. 17.19 Ausgangskennlinienfeld

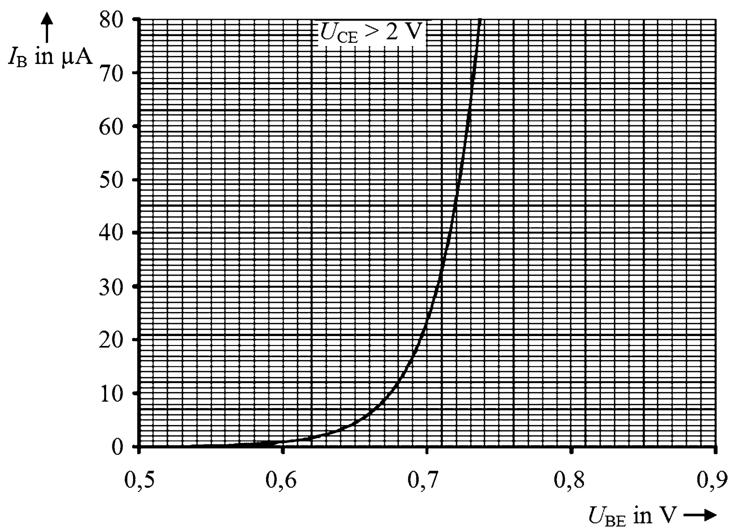


Abb. 17.20 Eingangskennlinie

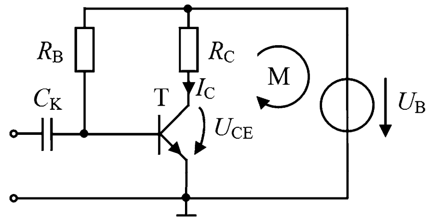


Abb. 17.21 Maschengleichung im Ausgangskreis

b) Berechnen Sie für den Arbeitspunkt AP die in den Widerständen und im Transistor entstehende Verlustleistung. Wie groß ist die Belastung P_{UB} der Betriebsspannungsquelle U_B?

Lösung

a) Die Masche M ist der Ausgangskreis (Abb. 17.21). Die Maschengleichung ergibt:

$$U_B - U_{CE} - I_C \cdot R_C = 0 \Rightarrow R_C = \frac{U_B - U_{CE}}{I_C} = \frac{10\,\text{V} - 6\,\text{V}}{5\,\text{mA}}; \quad \underline{\underline{R_C = 800\,\Omega}}$$

Der Arbeitspunkt AP mit $U_{CE} = 6\,\text{V}$ und $I_C = 5\,\text{mA}$ wird in das Ausgangskennlinienfeld eingetragen (Abb. 17.22). Für I_B wird im Arbeitspunkt AP abgelesen: $I_B = 30\,\mu\text{A}$.

Mit $I_B = 30\,\mu\text{A}$ folgt aus der Eingangskennlinie: $U_{BE} \approx 708\,\text{mV}$ (Abb. 17.23).

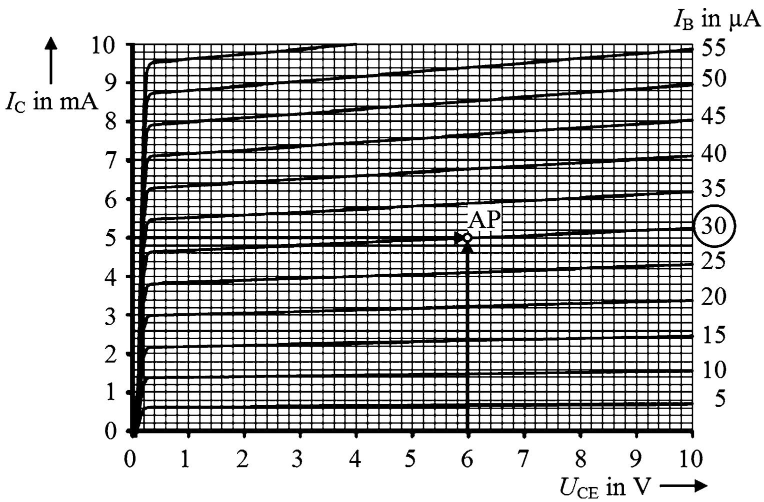


Abb. 17.22 Ausgangskennlinienfeld mit Arbeitspunkt

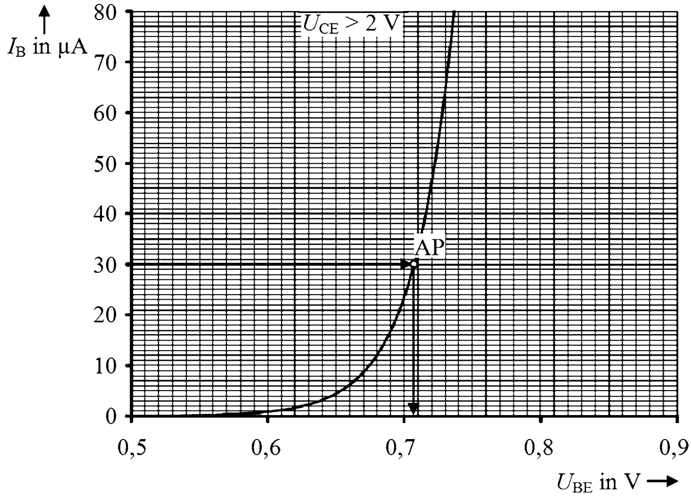
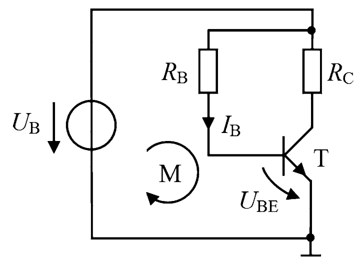


Abb. 17.23 Eingangskennlinie mit Arbeitspunkt

Abb. 17.24 Maschengleichung im Eingangskreis



Der Basisvorwiderstand R_B wird mit der Maschengleichung des Eingangskreises bestimmt (Abb. 17.24).

$$-U_B + R_B \cdot I_B + U_{BE} = 0; \quad R_B = \frac{U_B - U_{BE}}{I_B} = \frac{10\,\text{V} - 0{,}708\,\text{V}}{30\,\mu\text{A}}; \quad \underline{\underline{R_B = 310\,\text{k}\Omega}}$$

b) Belastung des Widerstandes R_B: $P_B = I_B^2 \cdot R_B = (30\,\mu\text{A})^2 \cdot 310\,\text{k}\Omega = \underline{\underline{0{,}279\,\text{mW}}}$
Belastung des Widerstandes R_C: $P_C = I_C^2 \cdot R_C = (5\,\text{mA})^2 \cdot 800\,\Omega = \underline{\underline{20\,\text{mW}}}$
Belastung des Transistors: $P_{VT} = I_C \cdot U_{CE} = 5\,\text{mA} \cdot 6\,\text{V} = \underline{\underline{30\,\text{mW}}}$
Belastung von U_B: $P_{UB} = I_{ges} \cdot U_B = (5\,\text{mA} + 30\,\mu\text{A}) \cdot 10\,\text{V} = \underline{\underline{50{,}3\,\text{mW}}}$
(P_{UB} = gerundet die Summe der einzelnen Verlustleistungen)

Aufgabe 17.10
Die Ersatzschaltung eines Mikrofons ist eine Reihenschaltung einer Kapazität C_i und einer reinen Wechselspannungsquelle u_e. Das Mikrofon ist an den Eingang einer Verstärkerschaltung mit dem bipolaren Siliziumtransistor T angeschlossen (Abb. 17.25).

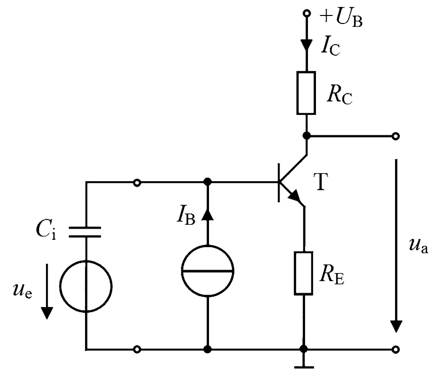


Abb. 17.25 Mikrofon mit Verstärkerschaltung

Gegeben: Versorgungsspannung $U_B = 40\,\text{V}$, Kollektorstrom im Arbeitspunkt $I_C = 152\,\mu\text{A}$, Basisstrom im Arbeitspunkt $I_B = 1\,\mu\text{A}$, $R_C = 100\,\text{k}\Omega$, $R_E = 10\,\text{k}\Omega$, $C_i = 1\,\text{nF}$, differenzieller Basis-Emitter-Widerstand $r_{BE} = 1\,\text{k}\Omega$, Gleich- und Wechselstromverstärkung von T sind gleich groß ($B = \beta$).

a) Um welche Grundschaltung eines Transistorverstärkers handelt es sich?
b) Erläutern Sie die Aufgaben und Auswirkungen des Emitterwiderstandes R_E.
c) Wie groß ist die Wechselstromverstärkung β?
d) Wie groß sind die auf Masse bezogenen Gleichspannungen U_C, U_B, U_E an Kollektor, Basis und Emitter des Transistors?
e) Wie groß ist die Spannungsverstärkung $V_U = \frac{u_a}{u_e}$?
f) Tragen Sie den Amplitudengang der Spannungsverstärkung und die Grenzfrequenz in das Diagramm in Abb. 17.26 ein.

Lösung

a) Es handelt sich um eine Emitterschaltung mit Stromgegenkopplung.
b) Der Emitterwiderstand R_E dient zum Stabilisieren des Arbeitspunktes des Transistors, er bewirkt eine Gleichstrom-Gegenkopplung. Steigt infolge einer Temperaturerhöhung der Kollektorstrom und damit der Emitterstrom, so steigt ebenfalls der Gleichspannungsabfall an R_E. Entsprechend der Maschengleichung des Eingangskreises wird die Basis-Emitter-Spannung U_{BE} kleiner, wenn der Spannungsabfall an R_E größer wird. Der Kollektorstrom sinkt somit wieder, der temperaturbedingten Stromsteigerung (und damit Arbeitspunktverschiebung) wird entgegengewirkt.
Zusätzlich zur Gleichstrom-Gegenkopplung bewirkt R_E eine Signal-Gegenkopplung. Der Ausgangswechselstrom erzeugt an R_E einen Wechselspannungsabfall, der wegen der Phasenumkehr der Emitterschaltung im Eingangskreis gegenphasig zur Eingangswechselspannung in Reihe liegt. Die Spannungsverstärkung nimmt dadurch ab, während der Eingangswiderstand der Schaltung (wie sich zeigen lässt) erhöht wird.

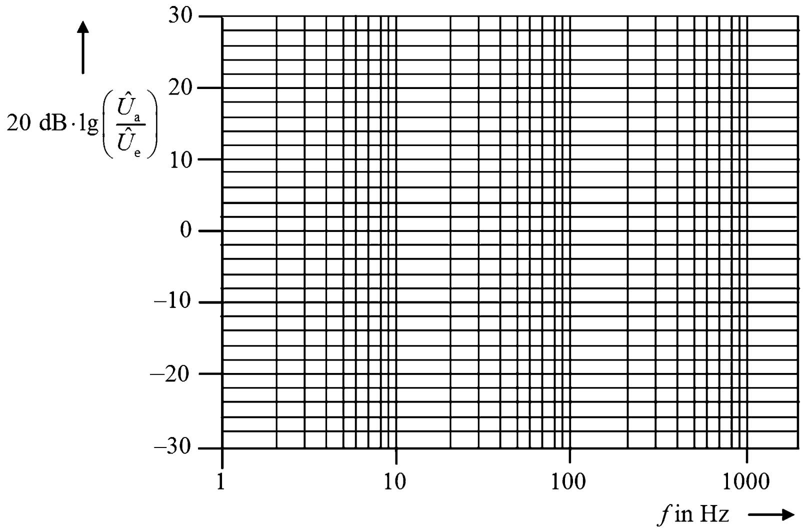


Abb. 17.26 Diagramm für den Amplitudengang der Spannungsverstärkung

c)

$$\beta = \frac{I_C}{I_B} = \underline{\underline{152}}$$

d) Der Spannungsabfall an R_C ist $U_{RC} = R_C \cdot I_C = 15{,}2\,\text{V}$. Die Spannung am Kollektor gegen Masse ist damit $U_C = U_B - U_{RC} = 40\,\text{V} - 15{,}2\,\text{V} = \underline{\underline{24{,}8\,\text{V}}}$.
Der Spannungsabfall an R_E und somit die Spannung U_E am Emitter gegen Masse ist

$$U_{RE} = R_E \cdot I_C = \underline{\underline{1{,}52\,\text{V}}}.$$

Die Basis-Emitter-Diode leitet im Normalbetrieb (Verstärkerbetrieb) des Transistors. Die Spannung Basis-Emitter U_{BE} beträgt daher ca. 0,6 V. Die Spannung U_B gegen Masse ist

$$U_B = 0{,}6\,\text{V} + U_{RE} = 0{,}6\,\text{V} + 1{,}52\,\text{V} = \underline{\underline{2{,}12\,\text{V}}}.$$

e) Die Wechselspannungsverstärkung der Emitterschaltung bei Wechselstrom-Gegenkopplung (gegeben durch den Emitterwiderstand R_E) ist

$$V_U = \frac{u_a}{u_e} \approx -\frac{R_C}{R_E} \approx \underline{\underline{-10}}.$$

f) Der Kondensator C_i und die Eingangsimpedanz Z_i der Emitterschaltung bilden einen RC-Hochpass 1. Ordnung (Abb. 17.27).
Nach der Spannungsteilerformel ist die Übertragungsfunktion dieses Hochpasses

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{Z_i}{Z_i + \frac{1}{j\omega C_i}}.$$

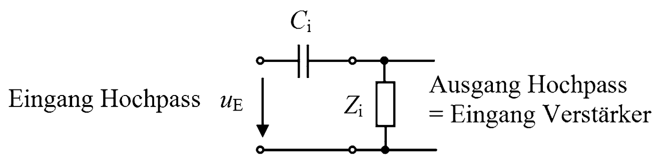


Abb. 17.27 *RC*-Hochpass 1. Ordnung

Der Amplitudengang ist

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{Z_i}{\sqrt{Z_i^2 + \frac{1}{\omega^2 C_i^2}}}.$$

Bei der Grenzfrequenz f_g ist

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}. \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{Z_i}{\sqrt{Z_i^2 + \frac{1}{\omega_g^2 C_i^2}}}$$

Auflösen nach f_g ergibt $f_g = \frac{1}{2\pi Z_i C_i}$. Dieses Ergebnis hätte man natürlich auch aus einer Formelsammlung entnehmen können. Aus der Literatur oder einer Formelsammlung wird die Eingangsimpedanz Z_i der Emitterschaltung bei der hier vorliegenden Strom-Gegenkopplung am Eingang entnommen: $Z_i = r_{BE} + \beta \cdot R_E$. Da $\beta \cdot R_E = 1520\,\text{k}\Omega \gg r_{BE}$ folgt: $Z_i = 1520\,\text{k}\Omega$.
Damit ergibt sich die Grenzfrequenz $f_g = \frac{1}{2\pi \cdot 1{,}52\,\text{M}\Omega \cdot 1\,\text{nF}} = \underline{\underline{105\,\text{Hz}}}$, bei der die Amplitude der Ausgangsspannung um 3 dB abgefallen ist.
Wie unter Punkt e) berechnet, ist der Betrag der Wechselspannungsverstärkung für Frequenzen wesentlich oberhalb von f_g gleich $|V_U| = |\frac{u_a}{u_e}| = 10$. Mit $\log(10) = 1$ folgt, dass der Amplitudengang für hohe Frequenzen gegen 20 dB geht. Zu kleinen Frequenzen hin nimmt der Amplitudengang mit 20 dB pro Dekade ab (Abb. 17.28).

Aufgabe 17.11
An den Eingang eines Transistorverstärkers ist über einen Koppelkondensator C_K eine Wechselspannungsquelle u_e angeschlossen (Abb. 17.29). Bei einer Frequenz von $f = 1\,\text{kHz}$ beträgt das Verstärkungsmaß des Transistorverstärkers 40 dB.

Gegeben: Versorgungsspannung $U_B = 40\,\text{V}$, $C_K = 10\,\mu\text{F}$, differenzieller Basis-Emitter-Widerstand $r_{BE} = 2\,\text{k}\Omega$, Gleich- und Wechselstromverstärkung von T sind gleich groß $B = \beta = 100$, Verstärkungsmaß $A = 20\,\text{dB} \cdot \log\left(\frac{\hat{U}_a}{\hat{U}_e}\right) = 40\,\text{dB}$.

a) Welche Aufgabe hat der Koppelkondensator C_K?
b) Welche Aufgabe hat der Widerstand R_B?
c) Berechnen Sie allgemein die Wechselspannungsverstärkung $V_U = \frac{u_a}{u_e}$ mit Hilfe der in Abb. 17.29 rechts gegebenen vereinfachten Transistorersatzschaltung.
Benutzen Sie die Näherung $(i_B + \beta \cdot i_B) \approx \beta \cdot i_B$.

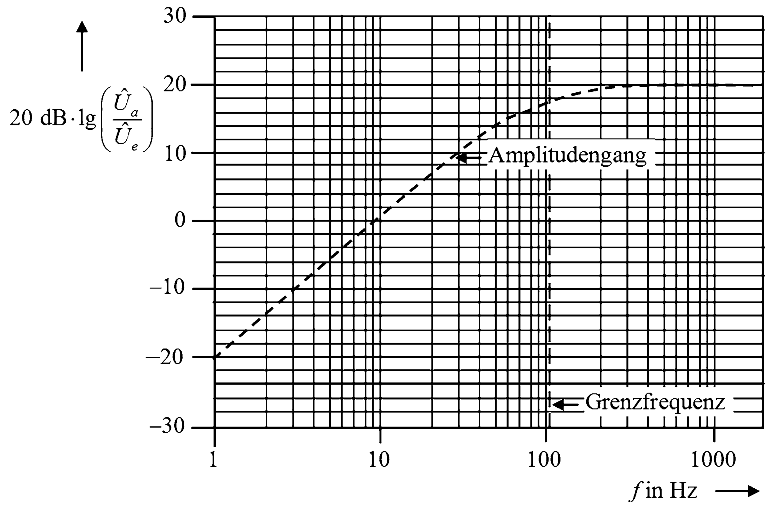


Abb. 17.28 Amplitudengang der Spannungsverstärkung und Grenzfrequenz

d) Wie groß muss R_C gewählt werden, damit die Verstärkung von 40 dB erreicht wird?

e) Wie groß muss der Widerstand R_B ungefähr sein, damit im Arbeitspunkt für die Kollektorspannung U_{CEA} angenähert gilt $U_{CEA} = \frac{U_B}{2}$? Wert von R_C entsprechend Teilaufgabe d.

f) Die Koppelkapazität C_K führt zu einem Hochpass-Verhalten des Verstärkers. Berechnen Sie die Grenzfrequenz f_g. Wert von R_C entsprechend Teilaufgabe d, Wert von R_B entsprechend Teilaufgabe e.

g) Wie groß darf die Amplitude einer sinusförmigen Eingangswechselspannung u_e höchstens sein, damit die Ausgangsspannung u_a sinusförmig bleibt?

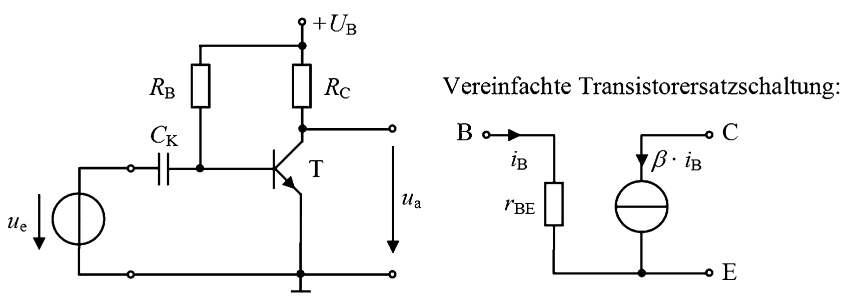


Abb. 17.29 Transistorverstärker mit Koppelkondensator und Transistorersatzschaltung

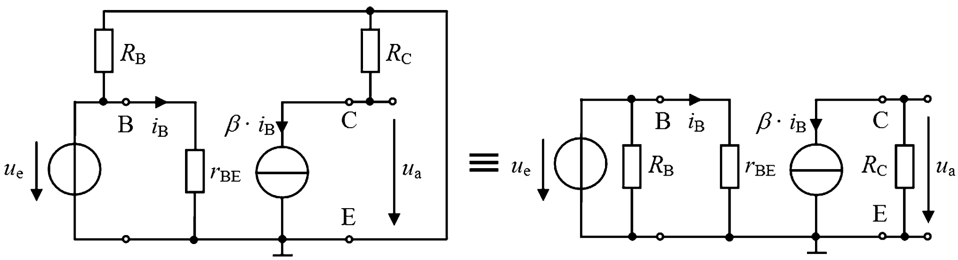


Abb. 17.30 Wechselstromersatzschaltung des Verstärkers

Lösung

a) Der Koppelkondensator C_K trennt die zu verstärkende Wechselspannung u_e am Eingang des Verstärkers gleichspannungsmäßig von der Basis des Transistors. Damit wird eine Beeinflussung des Arbeitspunktes durch einen Gleichspannungsanteil der Eingangsspannung vermieden, der Basisruhestrom des Transistors bleibt unverändert auf seinem festgelegten Wert.

b) R_B legt den Basisruhestrom fest.
Im Verstärkerbetrieb stellt die Basis-Emitter-Strecke des Transistors eine leitende Diode dar. Die Basis-Emitter-Gleichspannung U_{BE} ist somit ca. 0,7 V. An R_B liegt also die Gleichspannung $U_{RB} = U_B - U_{BE} = 39{,}3\,\text{V}$. Durch R_B fließt der Gleichstrom $I_B = \frac{U_{RB}}{R_B}$, der als Basisruhestrom in die Basis des Transistors fließt.

c) Mit der Transistorersatzschaltung erhält man die Wechselstromersatzschaltung des Verstärkers (Abb. 17.30).
Die Ausgangsspannung u_a ist $u_a = (-\beta \cdot i_B) \cdot R_C$. Dabei ist $-\beta \cdot i_B$ der (verstärkte) Kollektor(signal)strom, der durch R_C fließt. Der Basis(signal)strom ist $i_B = \frac{u_e}{r_{BE}}$.
Jetzt wird i_B in u_a eingesetzt:

$$u_a = -\beta \cdot \frac{u_e}{r_{BE}} \cdot R_C \Rightarrow \underline{\underline{V_U = \frac{u_a}{u_e} = -\frac{\beta \cdot R_C}{r_{BE}}}}$$

d) Das Verstärkungsmaß von 40 dB entspricht einem Verstärkungsfaktor von 100.
Erläuterung:

$$20\,\text{dB} \cdot \log\left(\frac{\hat{U}_a}{\hat{U}_e}\right) = 40\,\text{dB}; \quad \log\left(\frac{\hat{U}_a}{\hat{U}_e}\right) = 2; \quad \frac{\hat{U}_a}{\hat{U}_e} = 10^2 = 100$$

Aus

$$|V_U| = |\frac{u_a}{u_e}| = |-\frac{\beta \cdot R_C}{r_{BE}}|$$

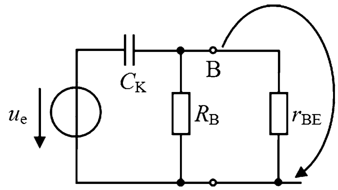


Abb. 17.31 Hochpass-Verhalten des Verstärkers

erhält man

$$R_C = |V_U| \cdot \frac{r_{BE}}{\beta} = 100 \cdot \frac{2\,\text{k}\Omega}{100} = \underline{\underline{2\,\text{k}\Omega}}.$$

e) Im Arbeitspunkt gilt:

$$I_C = \frac{U_{CE}}{R_C} \overset{!}{=} \frac{\frac{U_B}{2}}{R_C}; \quad I_C = \frac{20\,\text{V}}{2\,\text{k}\Omega} = 10\,\text{mA}$$

$$I_B = \frac{I_C}{B} = \frac{10\,\text{mA}}{100} = 100\,\mu\text{A}$$

Nach Teilaufgabe b) ist

$$R_B = \frac{U_{RB}}{I_B} = \frac{39{,}3\,\text{V}}{100\,\mu\text{A}} = \underline{\underline{393\,\text{k}\Omega}}.$$

f) Abb. 17.31 ist ein Hochpass 1. Ordnung mit der Grenzfrequenz

$$f_g = \frac{1}{2\pi \cdot (R_B \parallel r_{BE}) \cdot C_K}.$$

Mit $R_B \parallel r_{BE} \approx r_{BE}$ folgt

$$f_g = \frac{1}{2\pi \cdot r_{BE} \cdot C_K} = \frac{1}{2\pi \cdot 2\,\text{k}\Omega \cdot 10\,\mu\text{F}}; \quad \underline{\underline{f_g \approx 8\,\text{Hz}}}$$

g) An R_C liegt nach Teilaufgabe e) die Gleichspannung 20 V. Die Kollektor-Emitter-Sättigungsspannung U_{CEsat} wird zu 0,2 Volt angenommen. Die Spannung am Kollektor kann also nur Werte zwischen 40 V − 20 V = 20 V und $U_{CEsat} = 0{,}2\,\text{V}$ annehmen.
Bei der vorliegenden Verstärkung von 100 darf die Amplitude der Eingangsspannung den Wert $\frac{20\,\text{V}-0{,}2\,\text{V}}{100} = \underline{\underline{0{,}198\,\text{V}}}$ nicht überschreiten, damit die positiven und negativen Spitzen der Ausgangsspannung nicht begrenzt werden. Die Sinusform geht sonst verloren.
Anmerkung: Aus dieser Aufgabe sollte man lernen, dass bei Berechnungen mit Transistoren häufig selbstständig zwei Annahmen getroffen werden müssen, da diese Größen in der Aufgabenstellung nicht explizit angegeben werden.

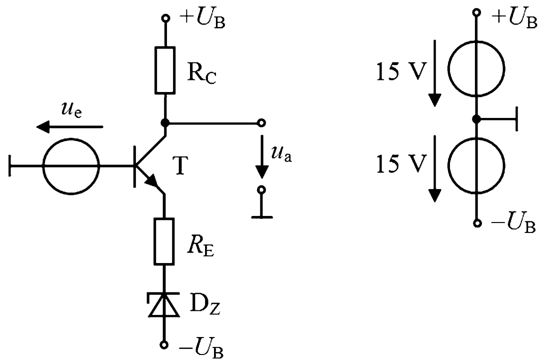


Abb. 17.32 Transistorverstärker mit Zenerdiode

1. Die Basis-Emitter-Spannung beträgt ca. 0,6 bis 0,7 Volt (Silizium-Bipolartransistor).
2. Die Sättigungsspannung zwischen Kollektor und Emitter beträgt bei einem Kleinleistungstransistor ca. 0,2 bis 0,3 Volt.

Aufgabe 17.12

Ein direkt gekoppelter Transistorverstärker wird mit positiver und negativer Betriebsspannung versorgt (Abb. 17.32). Vom Transistor T sind die Parameter $r_{BE} = 2\,\text{k}\Omega$ und $B = \beta = 200$ bekannt. Von der Zenerdiode sind die Zenerspannung $U_Z = 11{,}4\,\text{V}$ und der differenzielle Widerstand $r_Z = 100\,\Omega$ bekannt. Es ist $R_C = 9{,}2\,\text{k}\Omega$. Die Größe des Emitterwiderstandes R_E ist unbekannt.

a) Welche Aufgabe erfüllt die Zenerdiode D_Z?
b) Berechnen Sie den Basisruhestrom I_B, wenn ein Kollektorruhestrom von $I_C = 1\,\text{mA}$ fließt.
c) Wie groß muss R_E gewählt werden, damit sich ein Kollektorruhestrom von $I_C = 1\,\text{mA}$ einstellt?
d) Wie groß ist die Spannungsverstärkung in dB?
e) Wie groß ist die Impedanz Z_e (Eingangsimpedanz), welche die Spannungsquelle u_e belastet?
f) Wie groß ist die Ausgangsimpedanz Z_a?

Lösung

a) Die Zenerdiode setzt den Spannungsabfall über R_E herab und damit Emitter- und Kollektorstrom. Dadurch kann $R_C > R_E$ gewählt werden, dies erlaubt eine Spannungsverstärkung

$$|V_U| = \frac{R_C}{R_E} \gg 1.$$

b)

$$I_B = \frac{I_C}{B} = \frac{1\,\text{mA}}{200} = \underline{\underline{5\,\mu\text{A}}}$$

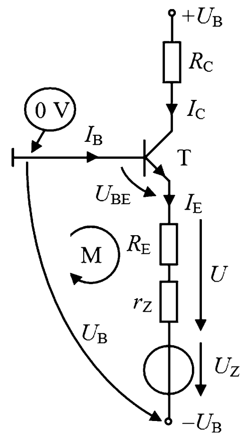


Abb. 17.33 Zur Maschengleichung

c) Die Basis liegt auf Nullpotenzial, der Basisstrom fließt durch die Wechselspannungsquelle (Signalquelle am Eingang) (Abb. 17.33).
In Abb. 17.33 ergibt die Maschengleichung M: $-U_B + U_{BE} + U + U_Z = 0$.
Mit $U_{BE} = 0{,}6\,\text{V}$ folgt:

$$U = U_B - U_{BE} - U_Z = 15\,\text{V} - 0{,}6\,\text{V} - 11{,}4\,\text{V} = 3{,}0\,\text{V}$$

Der Strom $I_E = I_B(1 + B)$ durch $R_E + r_Z$ ergibt R_E:

$$R_E = \frac{U}{I_B(1 + B)} - r_Z = 2{,}985\,\text{k}\Omega$$

Gewählt wird der Wert $\underline{\underline{R_E = 3{,}0\,\text{k}\Omega}}$ aus der E24-Normreihe.

d) Die Spannungsverstärkung in dB ist

$$|V_U| = 20\,\text{dB} \cdot \log\left(\frac{R_C}{R_E}\right) = \underline{\underline{9{,}73\,\text{dB}}}.$$

e) Die Eingangsimpedanz ist $Z_e = r_{BE} + B \cdot (R_E + r_Z)$.

$$Z_e = 2\,\text{k}\Omega + 200 \cdot (3{,}0\,\text{k}\Omega + 100\,\Omega) = \underline{\underline{622\,\text{k}\Omega}}$$

f) Die Ausgangsimpedanz ist $\underline{\underline{Z_a \approx R_C = 9{,}2\,\text{k}\Omega}}$.

Aufgabe 17.13

Für welche Aufgaben wird ein bipolarer Transistor in Basisschaltung hauptsächlich eingesetzt? Was sind die Eigenschaften der Basisschaltung und was sind die Gründe dafür?

Lösung

Die Basisschaltung wird hauptsächlich als HF-Verstärker zur Verstärkung hochfrequenter Signale eingesetzt. Da die Basis auf Masse liegt, ist eine sehr gute Trennung zwischen Eingang und Ausgang der Verstärkerstufe gewährleistet. Parallel zum Eingang liegt eine sehr viel kleinere innere Kapazität des Transistors als z. B. bei der Emitterschaltung. Diese Kapazität bildet mit dem Innenwiderstand der Signalquelle einen Tiefpass mit einer viel höheren Grenzfrequenz als bei der Emitterschaltung.

17.3 Die physikalische Ersatzschaltung

Aufgabe 17.14

Gegeben ist das Netzwerk in Abb. 17.34 mit den Werten:

$U_0 = 10\,\text{V}$, $\mu = 15$, $R_{11} = 10\,\Omega$, $R_{12} = 5\,\Omega$, $R_{21} = 10\,\Omega$, $R_{22} = 5\,\Omega$.

Um welche Art von gesteuerter Quelle handelt es sich bei dem Teilnetzwerk zwischen den Klemmen 1, 2 und A, B? Wie groß ist U_{AB} und welchen Wert hat der Strom durch den Widerstand R_{22}?

Lösung

Das Teilnetzwerk ist eine spannungsgesteuerte Spannungsquelle, da die Ausgangsspannung U_{AB}, über den Steuerkoeffizienten μ verknüpft, von der Eingangsspannung U_{12} abhängt.

U_{12} kann sofort nach der Spannungsteilerregel berechnet werden.

$$U_{12} = U_0 \frac{R_{12}}{R_{11} + R_{12}} = 3{,}\overline{3}\,\text{V}$$

Die Spannung U_{12} wird durch die gesteuerte Quelle um den Faktor $\mu = 15$ verstärkt.

$$\mu \cdot U_{12} = 15 \cdot 3{,}\overline{3}\,\text{V} = 50\,\text{V}$$

Wiederum nach der Spannungsteilerregel ist die Spannung U_{AB}:

$$U_{AB} = 50\,\text{V} \cdot \frac{R_{22}}{R_{21} + R_{22}} = \underline{\underline{16{,}\overline{6}\,\text{V}}}$$

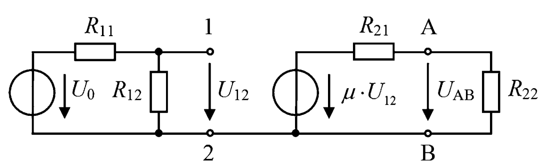


Abb. 17.34 Netzwerk mit gesteuerter Quelle

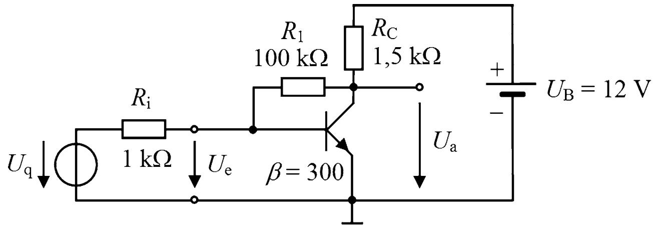


Abb. 17.35 Transistorverstärker

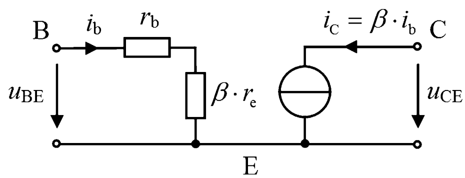


Abb. 17.36 π-Funktionsersatzschaltung eines Transistors

Nach dem ohmschen Gesetz ist der Strom durch R_{22}:

$$I = \frac{16{,}\overline{6}\,\mathrm{V}}{5\,\mathrm{V}} = \underline{\underline{3{,}\overline{3}\,\mathrm{A}}}.$$

Aufgabe 17.15

Mit einer Knotenanalyse ist unter Verwendung einer einfachen π-Funktionsersatzschaltung des Transistors (der Basisbahnwiderstand r_b kann vernachlässigt werden) die Verstärkung der Schaltung in Abb. 17.35 zu bestimmen. Die Verstärkerstufe ist am Eingang maximal aussteuerbar.

Lösung

Zuerst wird das Wechselstrom-Ersatzschaltbild der Schaltung gezeichnet. Dabei wird die in Abb. 17.36 gezeigte π-Funktionsersatzschaltung eines Transistors in Emitterschaltung (für den NF-Bereich) benutzt.

Zu beachten ist (Abb. 17.37):

1. Bei einer Knotenanalyse sollen im Schaltbild nur Stromquellen vorkommen. Die Spannungsquelle U_q wird deshalb in eine Stromquelle umgewandelt.
2. Der Arbeitswiderstand R_C liegt wechselstrommäßig parallel zum Ausgang, da die Gleichspannungsquelle U_B für Wechselstrom einen Kurzschluss darstellt.

Die Schaltung ist am Eingang maximal aussteuerbar, somit gilt: $U_{CE} = U_B/2$. Damit wird der Kollektorstrom $I_C = \frac{U_B/2}{R_C} = 4\,\mathrm{mA}$. Somit ist

$$r_e \approx \frac{U_T}{I_E} \approx \frac{25{,}4\,\mathrm{mV}}{4\,\mathrm{mA}} \approx 6{,}4\,\Omega\,.$$

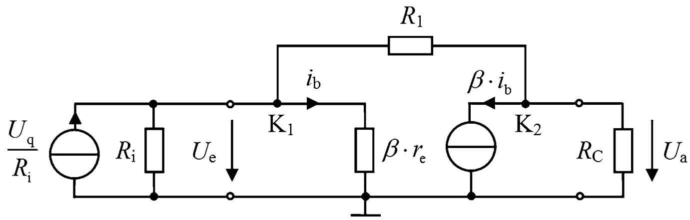


Abb. 17.37 Schaltung für die Knotenanalyse

Knotenanalyse:

Als Bezugsknoten wird der Massepunkt gewählt. Für die Knoten K_1 und K_2 werden die Knotenpunktsgleichungen aufgestellt.

$$\text{Knoten } K_1\text{: } U_e \cdot \left(\frac{1}{\beta \cdot r_e} + \frac{1}{R_i} \right) + (U_e - U_a) \cdot \frac{1}{R_1} - \frac{U_q}{R_i} = 0 \text{ (Gl. 1)}$$

$$\text{Knoten } K_2\text{: } U_a \cdot \frac{1}{R_C} + (U_a - U_e) \cdot \frac{1}{R_1} + \beta \cdot i_b = 0 \text{ (Gl. 2)}$$

Isolieren der Knotenspannungen in Gl. 1 ergibt:

$$U_e \cdot \left(\frac{1}{\beta \cdot r_e} + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_1} \right) - \frac{1}{R_1} \cdot U_a - \frac{U_q}{R_i} = 0$$

Mit eingesetzten Zahlenwerten folgt: $0{,}002 \cdot U_e - 10^{-5} \cdot U_a - 10^{-3} \cdot U_q = 0$

$$U_e = 5 \cdot 10^{-3} \cdot U_a + 0{,}5 \cdot U_q$$

Mit $i_b = \frac{U_e}{\beta \cdot r_e}$ folgt aus Gl. 2:

$$U_a \cdot \frac{1}{R_C} + (U_a - U_e) \cdot \frac{1}{R_1} + U_e \cdot \frac{1}{r_e} = 0$$

Auflösen nach U_a ergibt:

$$U_a = -U_e \cdot \frac{(R_1 - r_e) \cdot R_C}{r_e \cdot (R_1 + R_C)}$$

Zahlenwerte eingesetzt: $U_a = -53{,}6 \cdot U_q$

Einsetzen von U_e: $U_a = -231 \cdot (5 \cdot 10^{-3} \cdot U_a + 0{,}5 \cdot U_q) \Rightarrow U_a = -53{,}6 \cdot U_q$

$$V = \frac{U_a}{U_q}; \quad \underline{\underline{V \approx -54}}$$

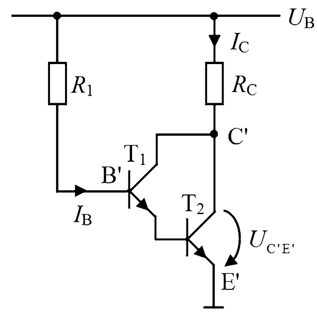


Abb. 17.38 Transistorschaltung

17.4 Darlington-Schaltung

Aufgabe 17.16

Gegeben ist die Transistorschaltung in Abb. 17.38. Die Stromverstärkung von Transistor T_1 ist $\beta_{T1} = 100$, die von T_2 ist $\beta_{T2} = 200$. Außerdem: $R_C = 200\,\Omega$, $R_1 = 8{,}6\,\mathrm{M\Omega}$, $U_B = 10\,\mathrm{V}$.

a) Wie wird die Transistorschaltung allgemein genannt?
b) Wie groß ist die Stromverstärkung β_{ges} der Schaltung?
c) Bestimmen Sie den Strom I_C.
d) Berechnen Sie $U_{C'E'}$.

Lösung

a) Es handelt sich um eine Darlington-Schaltung.
b) $\beta_{ges} = \beta_{T1} \cdot \beta_{T2} = 100 \cdot 200 = \underline{\underline{20.000}}$
c)

$$I_C = \beta_{ges} \cdot I_B; \quad I_B = \frac{U_B - U_{B'E'}}{R_1}; \quad U_{B'E'} = U_{BE} + U_{BE} = 2 \cdot 0{,}7\,\mathrm{V} = 1{,}4\,\mathrm{V}$$

$$I_B = \frac{U_B - U_{B'E'}}{R_1} = \frac{10\,\mathrm{V} - 1{,}4\,\mathrm{V}}{8{,}6\,\mathrm{M\Omega}} = 1{,}0\,\mathrm{\mu A}; \quad I_C = 20.000 \cdot 1\,\mathrm{\mu A} = \underline{\underline{20\,\mathrm{mA}}}$$

d) $U_{C'E'} = U_B - I_C \cdot R_C = 10\,\mathrm{V} - 20\,\mathrm{mA} \cdot 200\,\Omega = 10\,\mathrm{V} - 4\,\mathrm{V} = \underline{\underline{6\,\mathrm{V}}}$

17.5 Differenzverstärker

Aufgabe 17.17

Gegeben ist die Transistorschaltung in Abb. 17.39.

Gegebene Werte: $U_{B1} = +5\,\mathrm{V}$, $U_{B2} = -5\,\mathrm{V}$, $U_1 = +0{,}5\,\mathrm{V}$ Gleichspannung, $R_V = R_{C1} = R_{C2} = 1\,\mathrm{k}\Omega$, $\beta_1 = \beta_2 = 100$

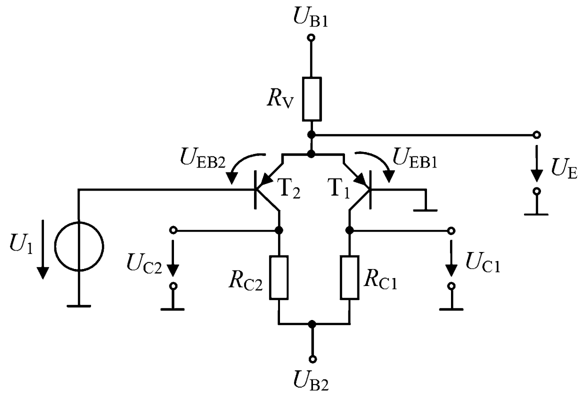


Abb. 17.39 Eine spezielle Transistorschaltung

a) Um welche spezielle Transistorschaltung handelt es sich?
b) Leiten oder sperren die Transistoren T_1, T_2?
c) Bestimmen Sie die Spannungen U_E, U_{C1} und U_{C2}.

Lösung

a) Die Schaltung ist ein Differenzverstärker.
b) Entsprechend dem Schaltzeichen handelt es sich um pnp-Transistoren. Ein p**n**p-Transistor leitet, wenn seine Basis **n**egativ ist. Dementsprechend sperrt T_2, da dessen Basis auf einem Potenzial von +0,5 V liegt. Nimmt man an, dass T_1 leitet, so ist U_{EB1} ca. 0,7 V. U_{EB2} ist dann ca. 0,2 V (T_2 sperrt). Ergebnis: T_1 leitet, T_2 sperrt.
c) $U_E = U_{EB1} = \underline{\underline{0{,}7\,\text{V}}}$
Durch R_V fließt der Strom

$$I_{RV} = \frac{U_{RV}}{R_V} = \frac{U_{B1} - U_{EB1}}{R_V} = \frac{5\,\text{V} - 0{,}7\,\text{V}}{1\,\text{k}\Omega} = 4{,}3\,\text{mA}.$$

Dieser Strom fließt auch durch R_{C1}, an dem somit $U_{RC1} = I_{RV} \cdot R_{C1} = 4{,}3\,\text{mA} \cdot 1\,\text{k}\Omega = 4{,}3\,\text{V}$ abfallen.
Für U_{C1} ergibt sich: $U_{C1} = U_{RC1} + U_{B2} = 4{,}3\,\text{V} - 5\,\text{V} = \underline{\underline{-0{,}7\,\text{V}}}$
Da T_2 sperrt, fließt durch R_{C2} kein Strom und es ist $U_{RC2} = 0\,\text{V}$ (kein Spannungsabfall an R_{C2}). Somit ist $U_{C2} = U_{B2} = \underline{\underline{-5\,\text{V}}}$.

17.6 Kodes, Logische Funktionen, Schaltalgebra

Aufgabe 17.18

Die Schaltung in Abb. 17.40 mit den Schaltern *a*, *b* und *c* soll mit Gattern realisiert werden.

a) Zeichnen Sie die Schaltung mit digitalen Bausteinen.
b) Geben Sie die Funktionsgleichung an.
c) Stellen Sie die Wahrheitstabelle auf.

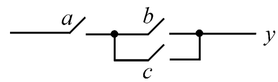


Abb. 17.40 Logische Schaltung mit Schaltern

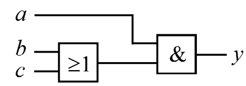


Abb. 17.41 Schaltung nach Abb. 17.40 mit digitalen Bausteinen

Lösung

a) Die Schaltung mit digitalen Bausteinen zeigt Abb. 17.41.

b) $y = a$ UND (b ODER c); $y = a \wedge (b \vee c)$

c) Wahrheitstabelle:

a	b	c	$b \vee c$	$y = a \wedge (b \vee c)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Aufgabe 17.19

Geben Sie für den folgenden logischen Ausdruck das Schaltbild mit Schaltern an.

$$z = s \wedge ((t \wedge (u \vee (v \wedge w))) \vee (x \wedge y))$$

Lösung

Das Schaltbild mit Schaltern zeigt Abb. 17.42.

Aufgabe 17.20

Geben Sie die Dezimalzahl 180 als Hexadezimalzahl und als Dualzahl an.

Lösung

Ohne Rest ist 16 in 180 11-mal enthalten ($11 \cdot 16 = 176$). Der Rest ist $4 = 4 \cdot 16^0$.
Die dezimale 11 ist als Hex-Zahl „B“. Somit ist $180_{10} = \underline{\underline{B4_{16}}}$.
Jede Stelle der Hex-Zahl wird als Dualzahl geschrieben: $180_{10} = B4_{16} = \underline{\underline{10110100_2}}$.

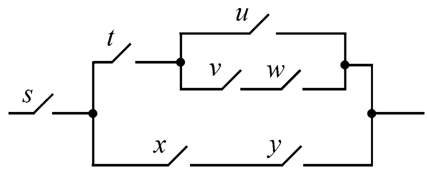


Abb. 17.42 Logischer Ausdruck realisiert mit Schaltern

Aufgabe 17.21
Wandeln Sie die Dualzahl 1001010 in eine Dezimalzahl um.

Lösung
Die Umwandlung erfolgt durch Aufsummieren der Zweierpotenzen.

$$1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 64 + 0 + 0 + 8 + 0 + 2 + 0 = \underline{\underline{74}}$$

Aufgabe 17.22
Wandeln Sie die Dezimalzahl 43 in eine Dualzahl um.

Lösung

$$\begin{aligned}
43 : 2 &= 21 \text{ Rest } 1 \quad 2^0\\
21 : 2 &= 10 \text{ Rest } 1 \quad 2^1\\
10 : 2 &= 5 \text{ Rest } 0 \quad 2^2\\
5 : 2 &= 2 \text{ Rest } 1 \quad 2^3\\
2 : 2 &= 1 \text{ Rest } 0 \quad 2^4\\
1 : 2 &= 0 \text{ Rest } 1 \quad 2^5
\end{aligned}$$

$$1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 32 + 0 + 8 + 0 + 2 + 1 = \underline{\underline{43}}$$

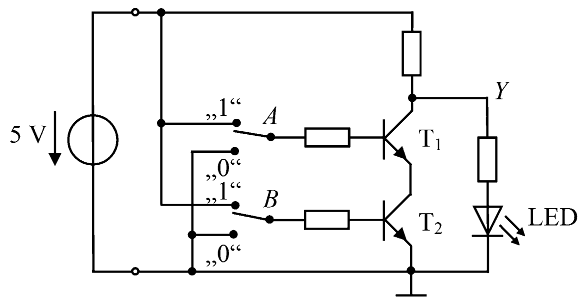
$$\underline{\underline{43_{10} = 101011_2}}$$

Aufgabe 17.23
Addieren Sie im Dualsystem die Dezimalzahlen 11 und 18.

Lösung

$$\begin{array}{rcr}
11 & \hat{=} & 1011\\
18 & \hat{=} & 10010\\
\hline
29 & \hat{=} & \underline{\underline{11101}}
\end{array}$$

Abb. 17.43 Logische Schaltung



17.7 Schaltungstechnische Realisierung der logischen Grundfunktionen

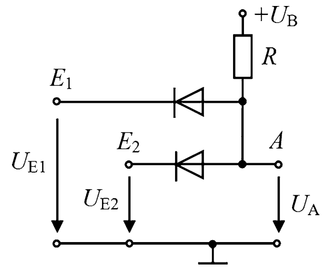
Aufgabe 17.24
Gegeben ist die logische Schaltung in Abb. 17.43.

a) Bei welchen Schalterstellungen der Schalter A und B leuchtet die LED, bei welchen nicht? Erstellen Sie eine Wahrheitstabelle.
b) Welche logische Funktion realisiert diese Schaltung? Wie lautet der zugehörige logische Ausdruck? Wie wird die hier verwendete Technik zur Realisierung der logischen Funktion genannt?

Lösung
a) Es handelt sich um npn-Transistoren, die in Reihe geschaltet sind. Ein npn-Transistor als Schalter befindet sich im Durchlasszustand und leitet, wenn die Basis positiv gegenüber dem Emitter ist (U_{BE} > ca. 0,7 V). Im leitenden Zustand kann man sich den Kollektor des Transistors mit dem Emitter niederohmig verbunden vorstellen (stark vereinfacht als geschlossenen Schalter). In obiger Schaltung leiten die Transistoren T_1 und T_2, wenn Schalter A *und* Schalter B in Stellung „1“ stehen. Ist Schalter A in Stellung „0“, so sperrt T_1. Ist Schalter B in Stellung „0“, so sperrt T_2. Ist also nur einer der Schalter, A *oder* B, in Stellung „0“, so liegt der Schaltungspunkt Y auf hohem Potenzial, die LED leuchtet. Befinden sich die Schalter A und B in Stellung „1“, so kann man sich den Schaltungspunkt Y mit Masse verbunden vorstellen, durch die LED fließt kein Strom, sie leuchtet nicht.
Wahrheitstabelle:

A	B	Y	Zustand LED
0	0	1	leuchtet
0	1	1	leuchtet
1	0	1	leuchtet
1	1	0	leuchtet nicht

Abb. 17.44 Logische Schaltung mit Wahrheitstabelle



E_1	E_2	A

b) Die Schaltung erfüllt die logische Funktion eines NAND-Gatters. Sind alle Eingänge High („1"), so ist der Ausgang Low („0"). Ist auch nur einer der Eingänge Low, so ist der Ausgang High. Die logische Gleichung dieser Schaltfunktion lautet: $Y = \overline{A \wedge B}$. Die verwendete Technik wird Widerstands-Transistor-Logik oder RTL-Technik genannt.

Aufgabe 17.25
Vergleichen Sie qualitativ die Eigenschaften integrierter Logikschaltkreise in TTL-Technik und CMOS-Technik bezüglich Verlustleistung und Schaltzeiten.

Lösung
Die Verlustleistung ist bei TTL-Technik höher bzw. hoch, bei CMOS-Technik sehr gering.
Die Schaltzeiten sind bei TTL-Technik klein, bei CMOS-Technik größer.

Aufgabe 17.26
Die Schaltung in Abb. 17.44 wird als Logikschaltung verwendet.

a) Tragen Sie die logischen Zustände als „0" (entspricht „Low" bzw. „Aus" bzw. „keine Spannung da") und als „1" (entspricht „High" bzw. „Ein" bzw. „Spannung da") in die Wahrheitstabelle in Abb. 17.44 ein.
b) Wie heißt diese logische Schaltung?
c) Geben Sie das Schaltzeichen der logischen Verknüpfung und das Ersatzschaltbild mit Schaltern an.

Lösung
a) Die ausgefüllte Wahrheitstabelle zeigt Abb. 17.45.
b) Es handelt sich um eine Schaltung zur UND-Verknüpfung der beiden Eingangssignale, es ist ein Dioden-UND-Gatter.
c) Das Schaltzeichen der logischen Verknüpfung und das Ersatzschaltbild mit Schaltern zeigt Abb. 17.46.

E_1	E_2	A
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Abb. 17.45 Ausgefüllte Wahrheitstabelle

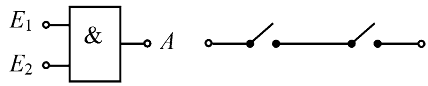


Abb. 17.46 Schaltzeichen (*links*) und Schalter-Ersatzschaltbild (*rechts*)

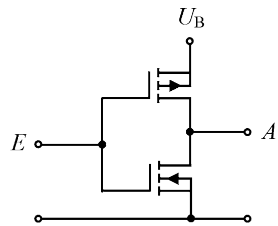


Abb. 17.47 Logische Schaltung

E	A
0	1
1	0

Abb. 17.48 Ausgefüllte Wahrheitstabelle

Aufgabe 17.27

a) Welcher Typ von Transistoren ist in der logischen Schaltung in Abb. 17.47 eingesetzt? Geben Sie die genaue Bezeichnung an. Welcher Logikfamilie gehört der Schaltungsausschnitt an? Wie muss die Betriebsspannung U_B gepolt sein?

b) Welche logische Grundfunktion wird durch die Schaltung realisiert?

c) Geben Sie in einer Wahrheitstabelle den logischen Zustand des Ausgangs A als Funktion des Eingangs E an.

Lösung

a) Die Transistoren sind selbstsperrende MOSFET vom Anreicherungstyp (enhancement type metal-oxide-semiconductor). Solche Schaltungen werden in der CMOS-Logikfamilie verwendet (Complementary MOS). U_B muss positiv sein.

b) Die Schaltung ist ein Inverter.

c) Die Wahrheitstabelle mit dem logischen Zustand des Ausgangs A als Funktion des Eingangs E zeigt Abb. 17.48.

Feldeffekt-Transistoren

18

Zusammenfassung

Verschiedene Typen von Feldeffekt-Transistoren werden mit ihren Eigenschaften betrachtet und Möglichkeiten zur Einstellung des Arbeitspunktes aufgezeigt. Unterschiedliche Schaltungsarten in Anwendungen als Schalter und Verstärker zeigen mögliche Ansätze zur Analyse und Berechnung der Anwendungen.

18.1 Grundwissen – kurz und bündig

- Ein Feldeffekt-Transistor (FET) wird leistungslos durch eine Spannung gesteuert.
- Die Anschlüsse eines FET heißen Source (S), Gate (G) und Drain (D).
- Der Eingangswiderstand eines FET ist sehr hoch.
- Es gibt Sperrschicht- und Isolierschicht-FETs.
- In der integrierten Halbleitertechnik spielen MOSFETs eine wichtige Rolle.
- Beim Power-MOSFET ist die Inversdiode zu beachten.
- Grundlegende Betriebsarten als Schalter sind Highside- und Lowside-Schalter.
- Eine Ladungspumpe dient zur Verdopplung einer Gleichspannung.
- FETs können durch statische Entladungen zerstört werden. Bestimmte Regeln zur Handhabung sind zu beachten.

18.2 Aufgaben zu Feldeffekt-Transistoren

Aufgabe 18.1

Gegeben ist die Schaltung in Abb. 18.1 mit einem Feldeffekt-Transistor.

Die Speisespannung U_B beträgt 12 Volt. Damit der FET mit einem Ruhestrom von $I_D = 3\,\mathrm{mA}$ bei $U_{DS} = 5\,\mathrm{V}$ arbeitet, benötigt er eine Gatespannung von $U_{GS} = -2,5\,\mathrm{V}$. Der Querstrom über den Gate-Spannungsteiler soll $I_q = 100\,\mathrm{nA}$ betragen.

L. Stiny, *Aufgabensammlung zur Elektrotechnik und Elektronik*,
DOI 10.1007/978-3-658-14381-7_18

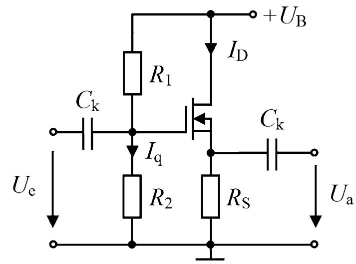


Abb. 18.1 Schaltung mit Feldeffekt-Transistor

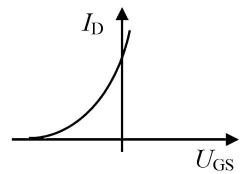


Abb. 18.2 Eingangskennlinie des FET

a) Um welchen Typ von Transistor handelt es sich (entsprechend dem Schaltzeichen)?
b) Skizzieren Sie die Eingangskennlinie des FET.
c) In welcher Grundschaltung ist der FET eingesetzt?
d) Wie hoch ist näherungsweise die Spannungsverstärkung der Schaltung?
e) Findet durch den Transistor eine Phasenumkehr statt?
f) Zu welchem Zweck wird die Schaltung hauptsächlich eingesetzt?
g) Berechnen Sie den Widerstand R_S.
h) Berechnen Sie den Gate-Spannungsteiler R_1, R_2.
i) Wie groß ist der Wechselstromeingangswiderstand r_e der Schaltung?

Lösung

a) Es handelt sich um einen selbstleitenden n-Kanal MOSFET (Verarmungstyp, Isolierschicht-Typ). Als selbstleitend wird der FET bezeichnet, weil er bei $U_{GS} = 0\,\text{V}$ leitet, es fließt ein Drainstrom.
b) Abb. 18.2 zeigt schematisch die Eingangskennlinie des FET.
c) Der FET ist in einer Drainschaltung eingesetzt.
d) Die Spannungsverstärkung der Drainschaltung ist nahezu eins.
e) Bei einer Drainschaltung findet keine Phasendrehung statt.
f) Der Anwendungsbereich einer Drainschaltung ist häufig der Einsatz als Impedanzwandler (sehr große Eingangsimpedanz, kleine Ausgangsimpedanz).
g) Der Gatestrom ist null. Aus $U_B = U_{DS} + U_{RS}$ folgt $U_{RS} = U_B - U_{DS} = 12\,\text{V} - 5\,\text{V} = 7\,\text{V}$

$$R_S = \frac{U_{RS}}{I_D} = \frac{7\,\text{V}}{3\,\text{mA}} = \underline{\underline{2{,}33\,\text{k}\Omega}}$$

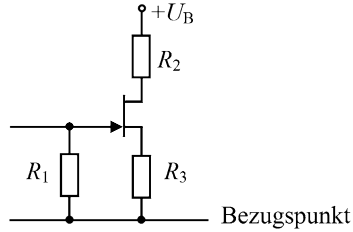


Abb. 18.3 Erzeugung der Gate-Source-Spannung beim Sperrschicht-FET

h)

$$U_{R2} - U_{RS} - U_{GS} = 0 \Rightarrow U_{R2} = U_{RS} + U_{GS} = 7\,\text{V} - 2{,}5\,\text{V} = 4{,}5\,\text{V}$$
$$R_2 = \frac{U_{R2}}{I_q} = \frac{4{,}5\,\text{V}}{100\,\text{nA}} = \underline{\underline{45\,\text{M}\Omega}}$$
$$U_B = U_{R1} + U_{R2}; \quad U_{R1} = 12\,\text{V} - 4{,}5\,\text{V} = 7{,}5\,\text{V};$$
$$R_1 = \frac{U_{R1}}{I_q} = \frac{7{,}5\,\text{V}}{100\,\text{nA}} = \underline{\underline{75\,\text{M}\Omega}}$$

i) Der Eingangswiderstand wird durch R_1 und R_2 bestimmt, wobei R_1 wechselstrommäßig parallel zu R_2 liegt.

$$r_e = R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \underline{\underline{28\,\text{M}\Omega}}$$

Aufgabe 18.2
Erläutern Sie die Möglichkeiten zur Arbeitspunkteinstellung einer Sourceschaltung

a) eines Sperrschicht-FET,
b) eines selbstsperrenden Isolierschicht-FET,
c) eines selbstleitenden Isolierschicht-FET, Arbeitspunkt im negativen Teil der Kennlinie,
d) eines selbstleitenden Isolierschicht-FET, Arbeitspunkt im positiven Teil der Kennlinie.

Der FET ist jeweils ein n-Kanal Typ.

Lösung

a) Bei einem Sperrschicht-FET kann die Gate-Source-Spannung durch einen Source-Widerstand R_3 erzeugt werden (Abb. 18.3). Durch den Spannungsabfall an R_3 wird die Source-Elektrode positiver als der gemeinsame Bezugspunkt für Ein- und Ausgang. Da das Gate über den Widerstand R_1 an diesem Bezugspunkt liegt und kein Strom durch R_1 fließt, ist das Gate negativer als die Source-Elektrode.

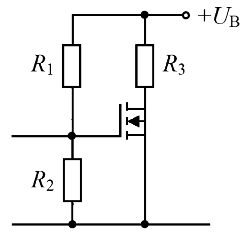


Abb. 18.4 Erzeugung der Gate-Source-Spannung beim MOSFET

b) Beim selbstsperrenden Isolierschicht-FET (MOSFET) erfolgt die Erzeugung der Gate-Source-Spannung z. B. mit Hilfe eines Spannungsteilers (Abb. 18.4). Da kein Gatestrom fließt, ist die Vorspannung des Gate allein vom Strom durch den Spannungsteiler abhängig. Zur Gegenkopplung kann auch ein Source-Widerstand eingefügt werden.
c) Selbstleitende Isolierschicht-FET können ohne Gate-Source-Vorspannung betrieben werden, da bei $U_{GS} = 0\,\text{V}$ bereits ein Drainstrom fließt.
Soll der Arbeitspunkt (AP) im negativen Teil der Kennlinie liegen, so kann die Gate-Source-Vorspannung durch den Sourcewiderstand R_3 erzeugt werden (Abb. 18.5).
d) Soll der Arbeitspunkt (AP) im positiven Teil der Kennlinie liegen, so kann die Gate-Source-Vorspannung durch einen Spannungsteiler erzeugt werden (Abb. 18.6).

Aufgabe 18.3
Gegeben ist eine Schaltung mit einem MOSFET (Abb. 18.7) und sein Ausgangskennlinienfeld (Abb. 18.8).

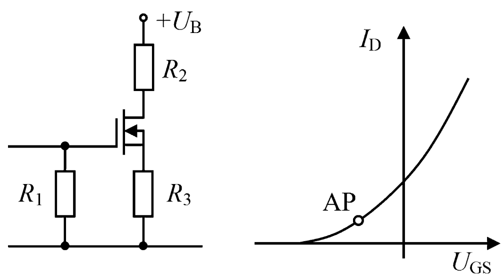


Abb. 18.5 Erzeugung der Gate-Source-Spannung beim selbstleitenden Isolierschicht-FET, Arbeitspunkt im negativen Teil der Kennlinie

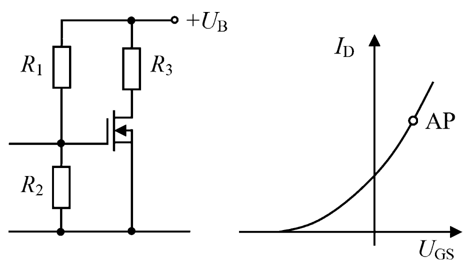


Abb. 18.6 Erzeugung der Gate-Source-Spannung beim selbstleitenden Isolierschicht-FET, Arbeitspunkt im positiven Teil der Kennlinie

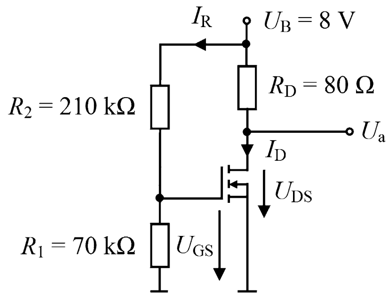


Abb. 18.7 Schaltung mit einem MOSFET

a) Berechnen Sie U_{GS} und I_R.
b) Bestimmen Sie grafisch die Werte I_D und U_{DS} des Arbeitspunktes.
c) Zu R_1 soll ein Widerstand R_P parallel geschaltet werden (ergibt R_{ers}), damit I_D nur 10 mA beträgt. Berechnen Sie R_P als Formel und seinen Widerstandswert.

Lösung

a) Da das Gate hochohmig ist, kann R_1 und R_2 als unbelasteter Spannungsteiler betrachtet werden.

$$U_{GS} = U_B \cdot \frac{R_1}{R_2 + R_1}; \quad \underline{\underline{U_{GS} = 2\,\text{V}}}; \quad I_R = \frac{8\,\text{V}}{210\,\text{k}\Omega + 70\,\text{k}\Omega} = \underline{\underline{28{,}6\,\mu\text{A}}}$$

b) Maschengleichung im Ausgangskreis:

$$-U_B + I_D \cdot R_D + U_{DS} = 0; \quad I_D = -\frac{1}{R_D} \cdot U_{DS} + \frac{U_B}{R_D}$$

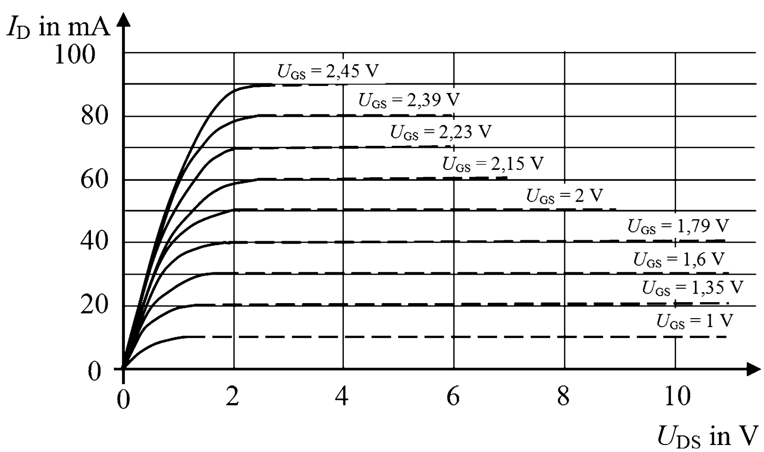


Abb. 18.8 Ausgangskennlinienfeld des Transistors in Abb. 18.7

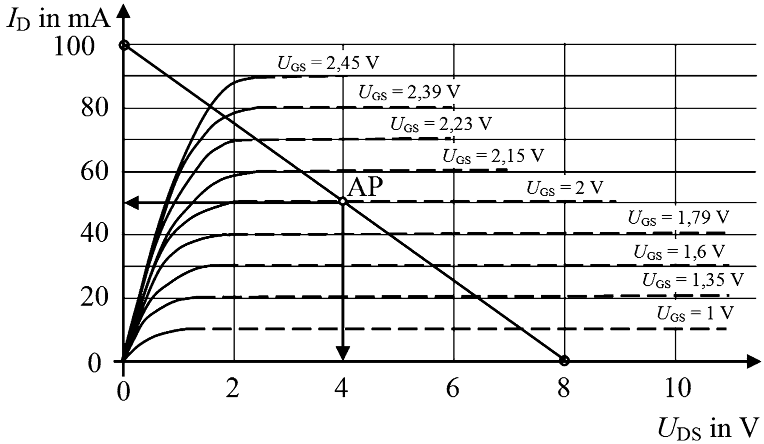


Abb. 18.9 Ausgangskennlinienfeld mit Arbeitsgerade und Arbeitspunkt AP

Die Gleichung der Lastgeraden ist: $I_D = -\frac{1}{80\,\Omega} \cdot U_{DS} + 100\,\text{mA}$
Für $I_D = 0$ ist $U_{DS} = 8\,\text{V}$; für $U_{DS} = 0$ ist $I_D = 100\,\text{mA}$.
Diese beiden Punkte legen die Arbeitsgerade fest (Abb. 18.9). Der Schnittpunkt der Arbeitsgeraden mit der Transistor-Kennlinie für $U_{GS} = 2\,\text{V}$ ergibt den Arbeitspunkt AP. Auf den Koordinatenachsen werden die zum Arbeitspunkt gehörenden Werte abgelesen: $\underline{\underline{U_{DS} = 4\,\text{V}}}$; $\underline{\underline{I_D = 50\,\text{mA}}}$.

c) R_1 wird ersetzt durch

$$R_{ers} = \frac{R_1 \cdot R_P}{R_1 + R_P}.$$

Nach Teilaufgabe b) gilt:

$$U_{GS} = U_B \cdot \frac{R_{ers}}{R_2 + R_{ers}} \Rightarrow R_{ers} = \frac{U_{GS} \cdot R_2}{U_B - U_{GS}}$$

Gleichsetzen:

$$\frac{R_1 \cdot R_P}{R_1 + R_P} = \frac{U_{GS} \cdot R_2}{U_B - U_{GS}};$$

auflösen nach R_P:

$$(R_1 + R_P) \cdot U_{GS} \cdot R_2 = R_1 \cdot R_P \cdot (U_B - U_{GS});$$
$$R_P \cdot U_{GS} \cdot R_2 + U_{GS} \cdot R_1 \cdot R_2 = R_P \cdot R_1 \cdot (U_B - U_{GS})$$
$$R_P \cdot U_{GS} \cdot R_2 = R_P \cdot R_1 \cdot (U_B - U_{GS}) - U_{GS} \cdot R_1 \cdot R_2;$$
$$R_P \cdot (U_{GS} \cdot R_2 - R_1 \cdot (U_B - U_{GS})) = -U_{GS} \cdot R_1 \cdot R_2$$
$$\underline{\underline{R_P = \frac{-U_{GS} \cdot R_1 \cdot R_2}{U_{GS} \cdot R_2 - R_1 \cdot (U_B - U_{GS})}}}; \text{ Zahlenwerte eingesetzt: } \underline{\underline{R_P = 52{,}5\,\text{k}\Omega}}$$

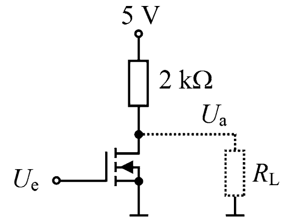


Abb. 18.10 MOSFET als Schalter

Falls nur der Widerstandswert von R_P berechnet werden soll, wird aus dem Kennlinienfeld entnommen: Für $I_D = 10\,\text{mA}$ ist $U_{GS} = 1\,\text{V}$.

$$R_{ers} = R_1 \parallel R_P = \frac{R_P \cdot R_1}{R_P + R_1}$$

$$\text{Aus a): } 1\,\text{V} = 8\,\text{V} \cdot \frac{R_{ers}}{\underbrace{210\,\text{k}\Omega}_{R_2} + R_{ers}} \Rightarrow R_{ers} = 30\,\text{k}\Omega$$

$$30\,\text{k}\Omega = \frac{R_P \cdot 70\,\text{k}\Omega}{R_P + 70\,\text{k}\Omega} \Rightarrow \underline{\underline{R_P = 52{,}5\,\text{k}\Omega}}$$

Aufgabe 18.4

Mit der Schaltung nach Abb. 18.10 wird ein Logiksignal U_e als invertiertes Signal U_a ausgegeben. Das Ausgangskennlinienfeld des MOSFET zeigt Abb. 18.11.

a) Zeichnen Sie die Arbeitsgerade in das Ausgangskennlinienfeld ein.
b) Wie groß ist U_a für $U_e = 5\,\text{V}$? Welche Leistung P_V wird in diesem Fall im Transistor umgesetzt?
c) Wie groß muss U_e mindestens sein, damit $U_a \leq 0{,}8\,\text{V}$ (logisch 0) ist?
d) Wie groß darf U_e im Fall des unbelasteten Ausgangs ($R_L \to \infty$) höchstens sein, damit $U_a \geq 2{,}4\,\text{V}$ (logisch 1) wird?
e) Welchen Wert muss R_L für $U_e = 0$ haben, damit $U_a \geq 2{,}4\,\text{V}$ (logisch 1) wird?

Lösung

a) Die Eingangsspannung U_e entspricht der Gate-Source-Spannung: $U_e = U_{GS}$. Die Ausgangsspannung U_a entspricht der Drain-Source-Spannung: $U_a = U_{DS}$. Die Schaltung in Abb. 18.10 zeigt einen selbstsperrenden MOSFET. Für $U_{GS} = 0\,\text{V}$ sperrt der Transistor vollständig, ein Punkt der Arbeitsgeraden ist ($I_D = 0; U_a = 5\,\text{V}$). Leitet der Transistor vollständig, so ist $U_a = U_{DS} = 0\,\text{V}$, der Drain-Source-Strom ist dann $I_D = \frac{5\,\text{V}}{2\,\text{k}\Omega} = 2{,}5\,\text{mA}$. Der zweite Punkt, der die Arbeitsgerade festlegt, ist ($I_D = 2{,}5\,\text{mA}; U_a = 0\,\text{V}$). Das Ausgangskennlinienfeld mit eingezeichneter Arbeitsgerade zeigt Abb. 18.12.
b) Für $U_e = U_{GS} = 5\,\text{V}$ ist $U_a \approx 0{,}2\,\text{V}$. Der Arbeitspunkt ist für diesen Fall in Abb. 18.12 mit „AP1“ gekennzeichnet. U_a wird auf der Abszisse abgelesen. AP1 hat die Werte

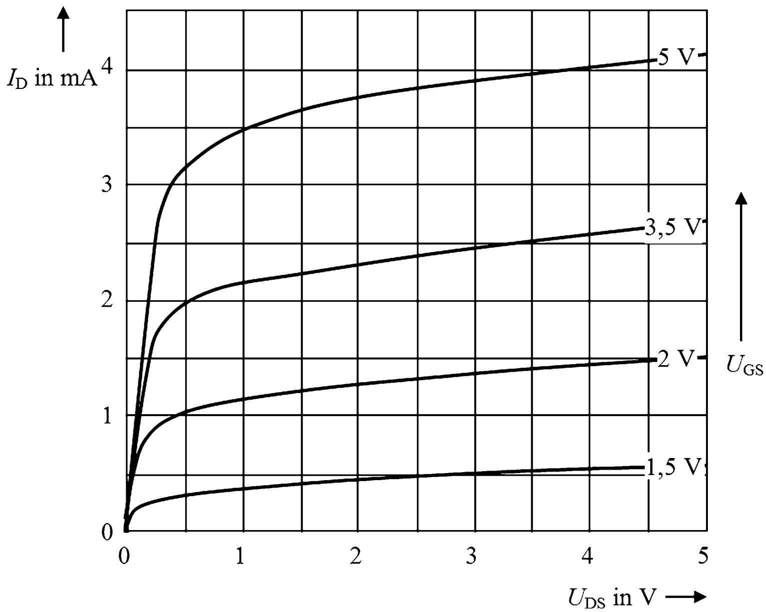


Abb. 18.11 Ausgangskennlinienfeld des MOSFET

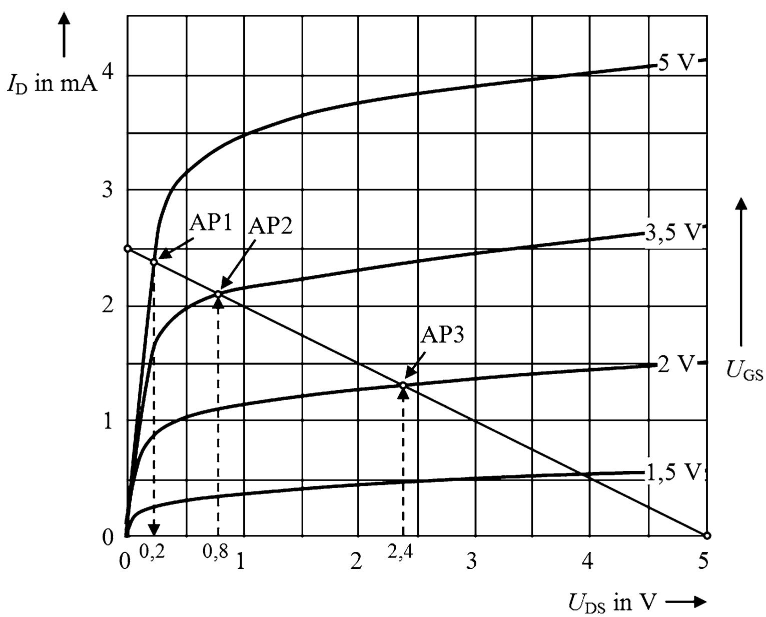


Abb. 18.12 Ausgangskennlinienfeld mit eingezeichneter Arbeitsgerade

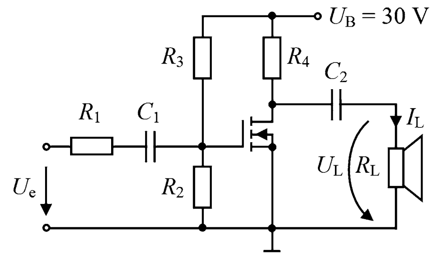


Abb. 18.13 FET-Verstärker

($I_D = 2{,}4\,\text{mA}$; $U_{DS} = 0{,}2\,\text{V}$). Die in diesem Arbeitspunkt im Transistor entstehende Verlustleistung ist $P_V = I_D \cdot U_{DS} = 2{,}4\,\text{mA} \cdot 0{,}2\,\text{V} = \underline{\underline{0{,}48\,\text{mW}}}$.

c) Bei $U_a = U_{DS} = 0{,}8\,\text{V}$ schneidet die Arbeitsgerade die Ausgangskennlinie mit dem Parameterwert $U_{GS} = 3{,}5\,\text{V}$ im Arbeitspunkt AP2 (Abb. 18.12). Für größere Werte von U_{GS} wird für Punkte auf der Arbeitsgeraden $U_a \leq 0{,}8\,\text{V}$. Es muss also $U_e \geq 3{,}5\,\text{V}$ sein.

d) Bei $U_a = U_{DS} = 2{,}4\,\text{V}$ schneidet die Arbeitsgerade die Ausgangskennlinie mit dem Parameterwert $U_{GS} = 2\,\text{V}$ im Arbeitspunkt AP3 (Abb. 18.12). Für kleinere Werte von U_{GS} wird für Punkte auf der Arbeitsgeraden $U_a \geq 2{,}4\,\text{V}$. Es muss also $U_e \leq 2\,\text{V}$ sein.

e) Für $U_e = 0\,\text{V}$ sperrt der Transistor vollständig, der Widerstand mit $2\,\text{k}\Omega$ wird als R_D bezeichnet. R_D und R_L bilden einen Spannungsteiler. Die Spannung an R_L soll $\geq 2{,}4\,\text{V}$ sein.

$$5\,\text{V} \cdot \frac{R_L}{R_L + R_D} \geq 2{,}4\,\text{V}; \quad R_L \geq R_D \cdot \frac{2{,}4\,\text{V}}{2{,}6\,\text{V}}; \quad \underline{\underline{R_L \geq 1{,}85\,\text{k}\Omega}}$$

Aufgabe 18.5

Ein Wechselspannungssignal wird mit einem FET verstärkt und über einen Lautsprecher mit dem ohmschen Widerstand $R_L = 15\,\Omega$ wiedergegeben (Abb. 18.13). Gegeben sind die Werte $R_1 = 100\,\Omega$, $R_3 = 1\,\text{M}\Omega$, $R_4 = 15\,\Omega$, $C_1 = 1\,\mu\text{F}$, $C_2 = 470\,\mu\text{F}$. Abb. 18.14 zeigt das Ausgangskennlinienfeld des FET.

a) Um welchen Typ eines FET handelt es sich?

Der Arbeitspunkt AP *soll zunächst bei* $U_{DS} = 15\,\text{V}$, $I_D = 1{,}0\,\text{A}$ *liegen*.

b) Zeichnen Sie die Arbeitsgerade mit dem Arbeitspunkt AP in das Ausgangskennlinienfeld ein.
c) Berechnen Sie den erforderlichen Wert des Widerstandes R_2.
d) Wie groß ist die Spannungsverstärkung $V = U_L/U_e$? Nehmen Sie dazu eine Schätzung der Übertragungssteilheit S des FET im Arbeitspunkt aus der Kennlinie vor.
e) Wie groß darf die Amplitude $\hat{U}_{e,max}$ von U_e maximal sein, ohne dass U_L begrenzt (verzerrt) wird?

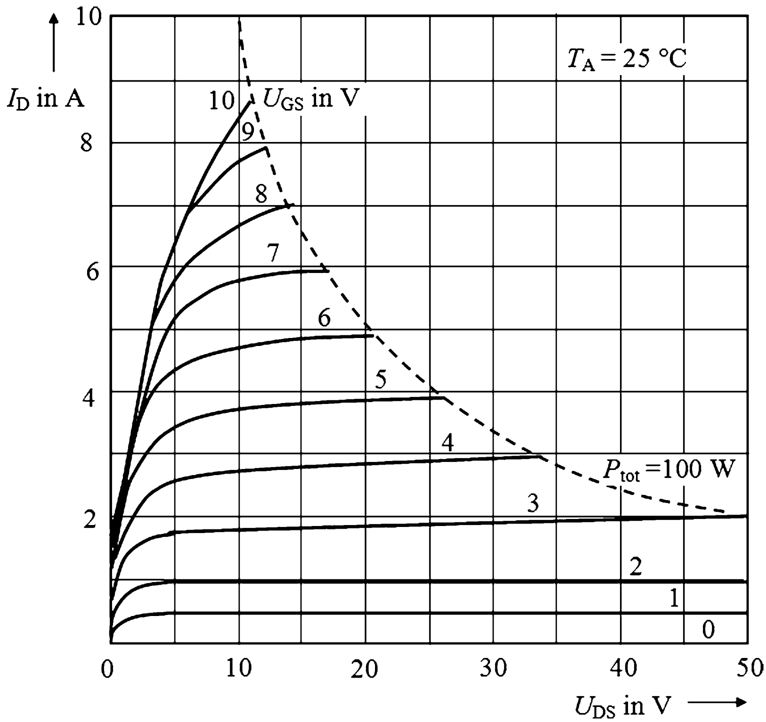


Abb. 18.14 Ausgangskennlinienfeld des FET

f) Wie groß ist dann der maximale Strom $I_{L,max}$ durch den Lautsprecher?

Für R_2 wird nun der Wert $110\,\mathrm{k\Omega}$ gewählt.

g) Wie sind die Werte U_{GS}, U_{DS} und I_D des sich jetzt ergebenden Arbeitspunktes AP1? Eignet sich dieser Arbeitspunkt zur Verstärkung der Eingangsspannung? Kurze Begründung!

Lösung

a) Es handelt sich um einen selbstsperrenden n-Kanal MOSFET (enhancement type, Anreicherungstyp).

b)

$$I_D = 0\colon\ U_{DS} = 30\,\mathrm{V}; \quad U_{DS} = 0\colon\ I_D = \frac{U_B}{R_4} = \frac{30\,\mathrm{V}}{15\,\mathrm{V}} = 2\,\mathrm{A}$$

Die beiden Punkte legen die Arbeitsgerade fest. Das Ausgangskennlinienfeld des FET mit der Arbeitsgeraden und dem Arbeitspunkt AP zeigt Abb. 18.15.

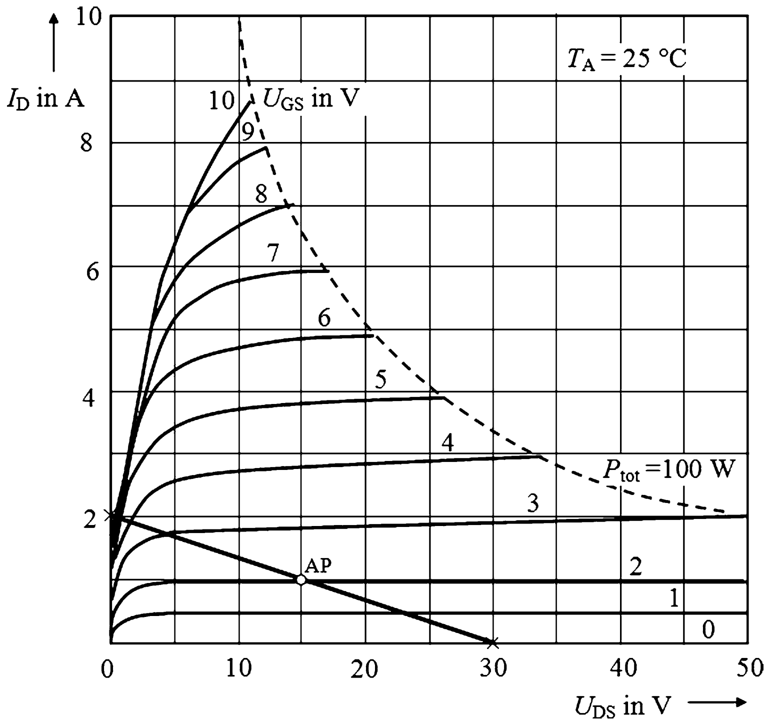


Abb. 18.15 Ausgangskennlinienfeld des FET mit Arbeitsgerade und Arbeitspunkt

c) Es ist $U_{GS} = 2\,\text{V}$. Der Spannungsteiler aus R_3, R_2 ist unbelastet (kein Gatestrom).

$$U_{GS} = U_B \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} \Rightarrow R_2 = \frac{U_{GS}}{U_B - U_{GS}} \cdot R_3; \quad R_2 = \frac{2\,\text{V}}{30\,\text{V} - 2\,\text{V}} \cdot 10^6\,\Omega = \underline{\underline{71{,}4\,\text{k}\Omega}}$$

d) Die Schaltung Abb. 18.13 ist eine Sourceschaltung. Die Sourceschaltung entspricht der Emitterschaltung beim bipolaren Transistor. Ein Unterschied zwischen Emitter- und Sourceschaltung ist, dass der statische Eingangswiderstand beim MOSFET sehr hoch ist und deshalb praktisch kein Eingangsstrom fließt. Bei beiden Schaltungen tritt eine Phasenverschiebung von 180° zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung auf. Dies ergibt ein Minuszeichen in der Formel für die Spannungsverstärkung V_U.
Die Spannungsverstärkung V_U ist definiert als das Verhältnis der Änderung der Ausgangsspannung U_a zur Änderung der Eingangsspannung U_e: $V_U = \frac{\Delta U_a}{\Delta U_e}$. Nach Abb. 18.16 gilt: $\Delta U_a = -R_D \cdot \Delta I_D$ und $\Delta U_e = \Delta U_{GS}$.
Die Steilheit S eines FETs ist definiert als

$$S = \frac{\Delta I_D}{\Delta U_{GS}}\Big|_{U_{DS}=\text{const}}.$$

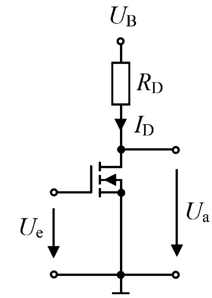


Abb. 18.16 Zur Arbeitsweise der Sourceschaltung mit einem n-Kanal MOSFET

Die Steilheit im Arbeitspunkt kann grafisch im Ausgangskennlinienfeld bestimmt werden. Dies zeigt Abb. 18.17.

$$S = \frac{\Delta I_D}{\Delta U_{GS}}\Big|_{U_{DS}=15\,V} = \frac{1{,}8\,A - 0\,A}{3\,V - 0\,V} = 0{,}6\,S = 0{,}6\,\frac{1}{\Omega}$$

$$V_U = \frac{\Delta U_a}{\Delta U_e} = \frac{-R_D \cdot \Delta I_D}{\Delta U_{GS}} = -S \cdot R_D$$

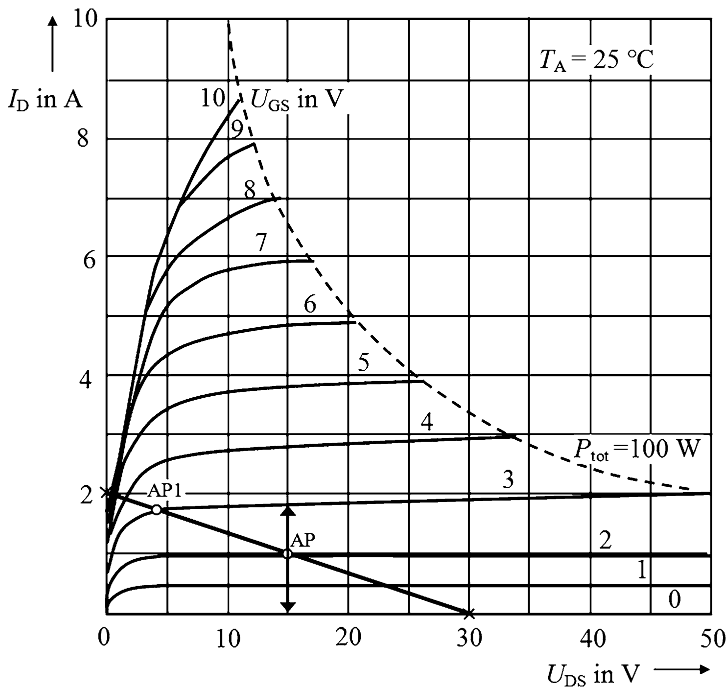


Abb. 18.17 Bestimmung der Übertragungssteilheit S des FET im Arbeitspunkt

Zum Arbeitswiderstand R_D in Abb. 18.16 (R_4 in Abb. 18.13) liegt wechselstrommäßig der Widerstand R_L des Lautsprechers parallel. Außerdem liegt zu diesen beiden Widerständen auch der differenzielle Ausgangswiderstand r_{DS} wechselstrommäßig parallel.

$$r_{DS} = \frac{\Delta U_{DS}}{\Delta I_D}\Big|_{U_{GS}=\mathrm{const}}$$

Da die Steigung der Ausgangskennlinie im Arbeitspunkt sehr klein ist, wird ΔI_D sehr klein bzw. r_{DS} sehr groß. r_{DS} kann somit vernachlässigt werden.
Für die Spannungsverstärkung folgt:

$$V = \frac{U_L}{U_e} = -S \cdot R_4 \parallel R_L = -0{,}6\,\frac{1}{\Omega} \cdot 7{,}5\,\Omega; \quad \underline{\underline{V = -4{,}5}}$$

e) Aus Abb. 18.17 wird abgelesen: $\underline{\underline{\hat{U}_{e,max} = 2\,\mathrm{V}}}$. Die Eingangsspannung entspricht U_{GS} im Arbeitspunkt, sie darf maximal 2 V um den Arbeitspunkt herum schwanken.

f) Aus dem Ausgangskennlinienfeld kann im Arbeitspunkt abgelesen werden: $\hat{I}_D = 1\,\mathrm{A}$ (Abb. 18.17). Da R_4 wechselstrommäßig parallel zu R_L liegt, ist der entstehende Stromteiler zu beachten.

$$I_{L,max} = \frac{\hat{I}_D}{2} = \underline{\underline{0{,}5\,\mathrm{A}}}$$

g)

$$U_{GS} = U_B \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 30\,\mathrm{V} \cdot \frac{110\,\mathrm{k\Omega}}{110\,\mathrm{k\Omega} + 1\,\mathrm{M\Omega}} \approx \underline{\underline{3\,\mathrm{V}}}$$

Der Arbeitspunkt AP verschiebt sich in den Arbeitspunkt AP1 mit den in Abb. 18.17 abgelesenen Werten: $\underline{\underline{U_{DS} \approx 4\,\mathrm{V}}}$, $\underline{\underline{I_D \approx 1{,}8\,\mathrm{A}}}$.
Für eine Verstärkung der Eingangsspannung U_e eignet sich AP1 schlecht, da I_D nur um maximal 0,2 A erhöht werden kann.

Operationsverstärker

19

Zusammenfassung

Die Grundlagen der Operationsverstärker und die Eigenschaften des idealen Operationsverstärkers werden betrachtet. Mit dem idealen Operationsverstärker werden erste Berechnungen von Schaltungen mit Operationsverstärkern durchgeführt. Dabei finden die Konzepte der virtuellen Masse und des virtuellen Kurzschlusses Verwendung. Es folgt eine Erläuterung der Funktionsweise der Gegentakt-Endstufe. Beispiele von Anwendungen als nichtinvertierender Verstärker, invertierender Verstärker, Impedanzwandler, Differenzierer, Addierer, Subtrahierer und Integrierer geben die Möglichkeit, unterschiedliche Schaltungsvarianten mit ihren speziellen Eigenschaften zu betrachten. Dabei werden auch Schaltungen mit mehreren Operationsverstärkern analysiert. In aktiven Filtern werden Operationsverstärkerschaltungen mit Hilfe der komplexen Rechnung und unter Anwendung der Übertragungsfunktion berechnet.

19.1 Grundwissen – kurz und bündig

- Operationsverstärker (OPV, OP) sind analoge, aktive Bauelemente (ICs).
- Die äußere Beschaltung legt Übertragungseigenschaften und Verwendungszweck des OPV fest.
- Ein OPV ist ein Differenzverstärker mit sehr hoher Verstärkung.
- Ein OPV besitzt zwei Eingänge: Einen invertierenden E– oder N-Eingang und einen nichtinvertierenden E+ oder P-Eingang.
- Die Eingänge des OPV sind hochohmig, der Ausgang ist niederohmig.
- Grundschaltungen sind der invertierende und der nichtinvertierende Verstärker.

Sofern nicht anders angegeben, wird ein idealer OPV symmetrisch versorgt (mit positiver und negativer Betriebsspannung gleicher Höhe) und arbeitet im linearen Bereich.

L. Stiny, *Aufgabensammlung zur Elektrotechnik und Elektronik*,
DOI 10.1007/978-3-658-14381-7_19

19.2 Grundlagen der Operationsverstärker

Aufgabe 19.1
Geben Sie die Eigenschaften eines idealen Operationsverstärkers an und erläutern Sie das daraus folgende Verhalten.

Lösung
Ein idealer Operationsverstärker zeigt ideales Verhalten und hat:

- eine unendlich hohe Leerlaufverstärkung V_0,
- einen unendlich hohen Eingangswiderstand R_e am invertierenden und nichtinvertierenden Eingang,
- einen unendlich kleinen Ausgangswiderstand R_a.

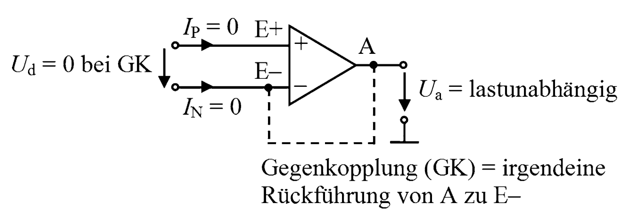
Daraus ergibt sich folgendes Verhalten:

- Die Eingangsströme sind null.
- Der Ausgang wirkt wie eine ideale Spannungsquelle mit dem Innenwiderstand $R_i = 0$. U_a ist belastungsunabhängig und wird nur durch das äußere Netzwerk bestimmt.
- *Nur* bei *Gegenkopplung*: Die Eingangs-Differenzspannung U_d ist null, dies bedeutet einen virtuellen Kurzschluss zwischen den Eingängen, es besteht kein Unterschied zwischen den Eingängen E+ (P-Eingang) und E− (N-Eingang).

Aufgrund der genannten Eigenschaften können beim OPV drei Fälle unterschieden werden (Abb. 19.1).

1. Der OPV ist *nicht* gegengekoppelt: $U_a = V_0 \cdot U_d$ mit der *Leerlauf*verstärkung V_0 ($\underline{\underline{U_d \neq 0}}$).
2. Der OPV *ist* gegengekoppelt: $\underline{\underline{U_d = 0}}$, d. h. virtueller Kurzschluss zwischen den Eingängen. Die Ausgangsspannung $U_a = V \cdot U_e$ mit V = *Betriebs*verstärkung wird durch die äußere Beschaltung festgelegt.
3. Der OPV *ist* gegengekoppelt *und* E+ liegt *direkt* auf Masse: Es ist $\underline{\underline{U_d = 0}}$ *und* der Eingang E− ist virtuelle Masse.

Abb. 19.1 Zu den Eigenschaften des idealen Operationsverstärkers



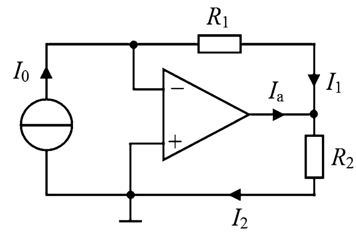


Abb. 19.2 Schaltung mit idealem Operationsverstärker

Aufgabe 19.2
Die Schaltung in Abb. 19.2 mit einem idealen Operationsverstärker (OPV) wird aus einer Stromquelle gespeist.

Gegeben: $I_0 = 100\,\mu\text{A}$, $R_1 = 10\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 2\,\text{k}\Omega$

a) Geben Sie vier wichtige Eigenschaften des idealen OPV an.
b) Wie groß ist I_1?
c) Wie groß ist I_2?
d) Wie groß ist I_a?

Lösung

a) Kennzeichen eines idealen OPV sind:
   1. unendlich große Eingangswiderstände,
   2. unendlich kleiner Ausgangswiderstand,
   3. unendlich große, frequenzunabhängige Differenzverstärkung (Leerlaufverstärkung),
   4. unendlich kleine Eingangsoffsetspannung.

b) Da die Eingangswiderstände unendlich groß sind, fließt kein Strom in die Eingänge E+ und E−. Man kann sich die Eingänge als geöffnet bzw. nicht verbunden vorstellen. In einer realen Schaltung darf ein solches „Herauslösen" eines OPV natürlich nicht erfolgen, sonst funktioniert die Schaltung nicht mehr.

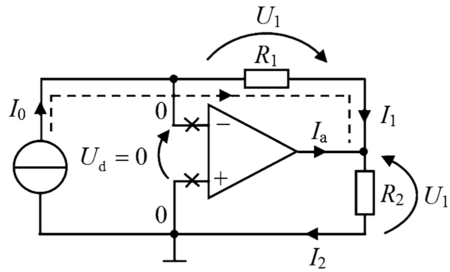
   Die Eingänge in Abb. 19.3 sind mit „**x**" als stromlos gekennzeichnet. Der Quellenstrom I_0 fließt somit durch R_1 und es ist $\underline{\underline{I_1 = I_0 = 100\,\mu\text{A}}}$. An R_1 fällt also die Spannung $U_1 = 100\,\mu\text{A} \cdot 10\,\text{k}\Omega = 1\,\text{V}$ ab.

c) Wegen der Gegenkopplung über R_1 ist die Spannung zwischen dem P- und dem N-Eingang null, beide Eingänge sind virtuell kurzgeschlossen. Folglich liegt der N-Eingang virtuell an Masse, sein Potenzial ist wie das des P-Eingangs „0". Deshalb liegt der Spannungsabfall U_1 auch an R_2, wobei die Spannungsrichtung zu beachten ist.

   Damit ergibt sich für I_2: $I_2 = -\frac{U_1}{R_2} = \frac{-1\,\text{V}}{2\,\text{k}\Omega} = \underline{\underline{-0{,}5\,\text{mA}}}$

d) Nach der Knotenregel (1. Kirchhoff'sches Gesetz) ist $I_a + I_1 - I_2 = 0$; $I_a = I_2 - I_1$
   $I_a = -0{,}5\,\text{mA} - 0{,}1\,\text{mA} = \underline{\underline{-0{,}6\,\text{mA}}}$

Abb. 19.3 Virtueller Kurzschluss der Eingänge



Aufgabe 19.3

Gegeben ist die Schaltung in Abb. 19.4 mit idealem OPV. Es wird zunächst nicht zwischen den Eingängen E+ und E− unterschieden.

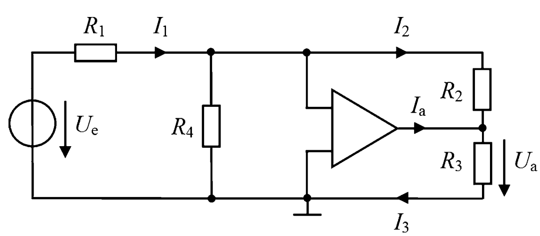
a) Berechnen Sie allgemein I_1, I_2, I_3 und U_a.
b) Wie groß sind die Werte von I_1, I_2, I_3, I_a und U_a? Wie groß ist der Wert der Spannungsverstärkung V_U in dB? Es sind: $R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 10\,\mathrm{k\Omega}$, $R_3 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $R_4 = 5\,\mathrm{k\Omega}$, $U_e = 1\,\mathrm{V}$.

Lösung

a) Es ist ein idealer OPV: Die Eingänge sind stromlos, gekennzeichnet durch „**x**“ (Abb. 19.5). Da sowohl über R_2 als auch über R_3 jeweils eine Verbindung vom Ausgang zu einem Eingang besteht, liegt auf alle Fälle eine Gegenkopplung vor. Eine Unterscheidung der Eingänge war deshalb nicht notwendig. Wegen der Gegenkopplung besteht ein virtueller Kurzschluss zwischen den Eingängen. Dies bedeutet, dass über R_4 (der parallel zu den Eingängen liegt) keine Spannung abfällt und R_4 somit stromlos ist, ebenfalls gekennzeichnet durch „**x**“. R_4 braucht man folglich nicht zu berücksichtigen. Dieser Widerstand hat keinerlei Funktion und könnte weggelassen werden. Wegen dem virtuellen Kurzschluss zwischen den Eingängen (die Spannung über R_4 ist null) folgt: $\underline{\underline{I_1 = \frac{U_e}{R_1}}}$.

   Da R_4 und der obere OPV-Eingang stromlos sind, folgt: $I_2 = I_1 = \underline{\underline{\frac{U_e}{R_1}}}$.

Abb. 19.4 Schaltung mit idealem OPV



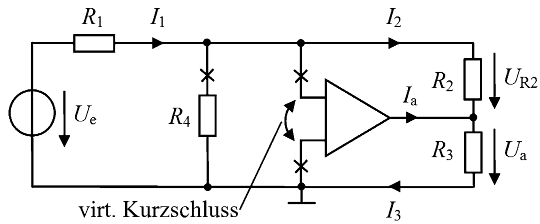


Abb. 19.5 Zur Analyse der Schaltung

Wegen dem virtuellen Kurzschluss ist $U_a = -U_{R2}$.

$$U_{R2} = R_2 \cdot I_2 = R_2 \cdot \frac{U_e}{R_1}; \quad \underline{\underline{U_a = -U_e \cdot \frac{R_2}{R_1}}}; \quad I_3 = \frac{U_a}{R_3}; \quad \underline{\underline{I_3 = -U_e \cdot \frac{R_2}{R_1 \cdot R_3}}}$$

b)

$$I_1 = I_2 = \frac{U_e}{R_1} = \frac{1\,\text{V}}{1\,\text{k}\Omega} = \underline{\underline{1\,\text{mA}}}; \quad U_{R2} = I_2 \cdot R_2 = 1\,\text{mA} \cdot 10\,\text{k}\Omega = 10\,\text{V};$$

$$U_a = -U_{R2} = \underline{\underline{-10\,\text{V}}}$$

$$I_3 = \frac{U_a}{R_3} = \frac{-10\,\text{V}}{2\,\text{k}\Omega} = \underline{\underline{-5\,\text{mA}}}; \quad I_a = I_3 - I_2 = \underline{\underline{-6\,\text{mA}}}$$

Da I_a negativ ist, müsste der Zählpfeil von I_a in umgekehrte Richtung zeigen als in Abb. 19.4 und Abb. 19.5 angenommen. Dies bedeutet, der Strom fließt in den Ausgang A des OPV *hinein*. Möglich wird dies durch eine Gegentakt-Endstufe des OPV mit symmetrischer Versorgung (Abb. 19.6).

Erläuterung der Funktionsweise der Gegentakt-Endstufe

U_e positiv: T_1 (npn) leitet, T_2 (pnp) sperrt. U_a ist positiv, Strom fließt aus A *heraus*.
U_e negativ: T_1 (npn) sperrt, T_2 (pnp) leitet. U_a ist negativ, Strom fließt in A *hinein*.

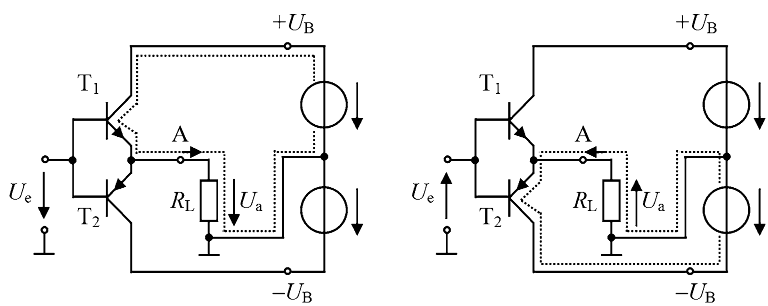
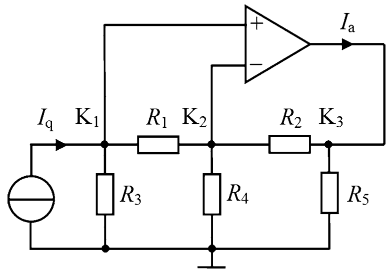


Abb. 19.6 Gegentakt-Endstufe eines OPV

Abb. 19.7 Schaltung mit idealem OPV



Die Spannungsverstärkung ist

$$V_U = \frac{U_a}{U_e} = -\frac{R_2}{R_1} = -10; \quad a = 20\,\text{dB} \cdot \log\left(\left|\frac{U_a}{U_e}\right|\right); \quad \underline{\underline{a = 20\,\text{dB}}}$$

V_U ist unabhängig von R_3, da der OPV-Ausgang eine ideale Spannungsquelle darstellt und damit belastungsunabhängig ist. V_U ist unabhängig von R_4, da die parallel liegenden OPV-Eingänge virtuell kurzgeschlossen sind, R_4 hat keine Funktion.

Aufgabe 19.4

Gegeben ist die OPV-Schaltung in Abb. 19.7. Der OPV ist als ideal zu betrachten.

Gegeben: $I_q = 1\,\text{mA}$, $R_1 = 1\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 2\,\text{k}\Omega$, $R_3 = 3\,\text{k}\Omega$, $R_4 = 4\,\text{k}\Omega$, $R_5 = 5\,\text{k}\Omega$

Gesucht sind alle Knotenspannungen und der Ausgangsstrom I_a des OPV.

Lösung

Der Bezugsknoten ist Masse. Da es sich um einen idealen OPV handelt, gilt folgendes:

Es fließen keine Eingangsströme, die OPV-Eingänge sind stromlos, Kennzeichen „**×**" in Abb. 19.8.

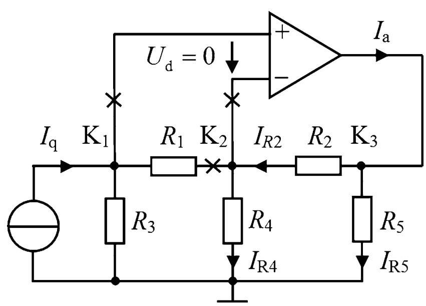
Wegen der Gegenkopplung besteht keine Spannung zwischen den Eingängen E+ und E−, R_1 ist stromlos (**×**).

Der Quellstrom I_q fließt somit vollständig durch R_3. $U_{R3} = U_{K1} = 1\,\text{mA} \cdot 3\,\text{k}\Omega = \underline{\underline{3\,\text{V}}}$

Über R_1 fällt keine Spannung ab, d. h. U_{R3} liegt auch an R_4. $U_{R4} = U_{K2} = \underline{\underline{3\,\text{V}}}$

Der Strom I_{R2} durch R_2 ist gleich dem Strom I_{R4} durch R_4. $I_{R2} = I_{R4} = \frac{3\,\text{V}}{4\,\text{k}\Omega} = 0{,}75\,\text{mA}$

Abb. 19.8 Zur Berechnung der Schaltung in Abb. 19.7



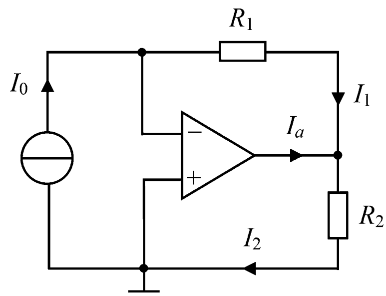


Abb. 19.9 Eine OPV-Schaltung

Damit ist der Spannungsabfall an R_2: $U_{R2} = 0{,}75\,\text{mA} \cdot 2\,\text{k}\Omega = 1{,}5\,\text{V}$
Die Spannung über R_5 und damit an Knoten K_3 ist:

$$U_{R5} = U_{K3} = U_{R2} + U_{R4} = 1{,}5\,\text{V} + 3\,\text{V} = \underline{\underline{4{,}5\,\text{V}}}$$

Der Strom durch R_5 ist:

$$I_{R5} = \frac{4{,}5\,\text{V}}{5\,\text{k}\Omega} = 0{,}9\,\text{mA}$$

Der OPV-Ausgangsstrom beträgt: $I_a = I_{R2} + I_{R5} = \underline{\underline{1{,}65\,\text{mA}}}$

Aufgabe 19.5
Gegeben ist die OPV-Schaltung in Abb. 19.9. Der OPV ist als ideal zu betrachten.
Gegeben: $I_0 = 100\,\mu\text{A}$, $R_1 = 10\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 2\,\text{k}\Omega$

a) Wie groß sind die Ströme I_1, I_2, I_a?
b) Welche Leistung P gibt die Stromquelle I_0 ab?
c) Wie groß ist die Leistung P_a, die am OPV-Ausgang umgesetzt wird?

Lösung
a) Da die Eingangsströme des OPV null sind (Kennzeichen „**x**" in Abb. 19.10), fließt I_0 durch R_1. $\underline{\underline{I_1 = I_0 = 100\,\mu\text{A}}}$
Über R_1 liegt die Spannung $U_{R1} = 10^4\,\Omega \cdot 10^{-4}\,\text{A} = 1\,\text{V}$
Wegen der Gegenkopplung über R_1 ist die Differenzspannung zwischen P- und N-Eingang null (virtueller Kurzschluss der beiden Eingänge). Der P-Eingang liegt zusätzlich direkt auf Masse, deshalb ist der N-Eingang virtuelle Masse. U_{R1} liegt somit auch an R_2.

$$I_2 = \frac{-U_{R1}}{R_2} = \underline{\underline{-0{,}5\,\text{mA}}}$$

Mit der Knotenregel erhält man: $I_a = I_2 - I_1 = \underline{\underline{-0{,}6\,\text{mA}}}$.
b) Wegen dem virtuellen Kurzschluss zwischen den beiden OPV-Eingängen liegt über der Stromquelle die Spannung $U_d = 0\,\text{V} \Rightarrow P = U_d \cdot I_0 = \underline{\underline{0\,\text{W}}}$
c) Mit $U_a = -U_{R1}$ folgt: $P_a = U_a \cdot I_a = (-1\,\text{V}) \cdot (-0{,}6\,\text{mA}) = \underline{\underline{0{,}6\,\text{mW}}}$.

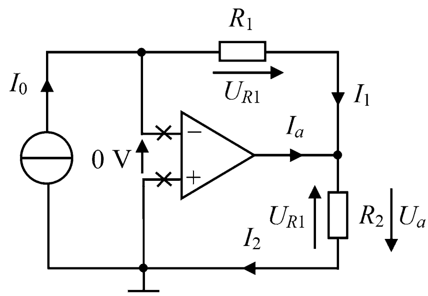


Abb. 19.10 Zur Berechnung der Schaltung in Abb. 19.9

Aufgabe 19.6

Die Leerlaufverstärkung eines OPV ist $V_0 = 90\,\text{dB}$. Die Offsetspannung ist kompensiert. Eine Änderung der Gleichtaktspannung an beiden Eingängen von $\Delta U_{\text{Gl}} = 3\,\text{V}$ bewirkt eine Änderung der Ausgangsspannung um $\Delta U_{\text{a}} = 0{,}95\,\text{V}$. Wie groß ist die Gleichtaktunterdrückung (CMRR) des OPV in dB?

Lösung

Die Gleichtaktverstärkung ist

$$V_{\text{G}} = \frac{\Delta U_{\text{a}}}{\Delta U_{\text{Gl}}} = \frac{0{,}95\,\text{V}}{3\,\text{V}} = 0{,}3166.$$

$$CMRR = 20\,\text{dB} \cdot \log\left(\frac{V_0}{V_{\text{G}}}\right)$$

$$CMRR = 20\,\text{dB} \cdot \log\left(\frac{10^{\frac{90}{20}}}{0{,}3166}\right) = 20\,\text{dB} \cdot \log 99.882{,}4 = \underline{\underline{99{,}99\,\text{dB}}}$$

Aufgabe 19.7

Auf welche Ausgangsspannung U_{a} wird ein Gleichtaktsignal von $U_{\text{Gl}} = 0{,}15\,\text{V}$ verstärkt, wenn der OPV eine Leerlaufverstärkung von $V_0 = 105\,\text{dB}$ und eine Gleichtaktunterdrückung $CMRR = 90\,\text{dB}$ besitzt?

Lösung

$$CMRR = 20\,\text{dB} \cdot \log\left(\frac{V_0}{V_{\text{G}}}\right); \quad V_G = \frac{V_0}{10^{\frac{CMMR}{20}}} \ (V_0, V_G \textit{ nicht} \text{ in dB})$$

$$V_{\text{G}} = \frac{10^{\frac{105}{20}}}{10^{\frac{90}{20}}} = 5{,}623 \text{ (Gleichtaktverstärkung)}; \quad U_{\text{a}} = 5{,}623 \cdot 0{,}15\,\text{V} = \underline{\underline{0{,}844\,\text{V}}}$$

19.3 Nichtinvertierender Verstärker

Aufgabe 19.8

Gegeben ist eine Schaltung mit einem idealen OPV (Abb. 19.11).

Es sind $\hat{U}_e = 200\,\text{mV}$, $R_1 = 20\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 10\,\text{k}\Omega$.

Gesucht ist das Verhältnis von R_4 zu R_3, damit sich am Ausgang eine Spannung von $\hat{U}_a = 1\,\text{V}$ einstellt. Geben Sie ein Beispiel für die Werte von R_3, R_4 an.

Lösung

Der nichtinvertierende Verstärker ist in etwas ungewohnter Darstellung gezeichnet, die Widerstände R_3 und R_4 führen meist vom Ausgang des OPV senkrecht nach unten, wobei auch die OPV-Eingänge vertauscht sind, P-Eingang oben, N-Eingang unten. Das Lesen eines Schaltplans soll hier geübt werden. Man erinnere sich, dass die Symbole von Bauelementen beliebig gedreht und gespiegelt werden können.

Der Verstärkereingang ist der P-Eingang des OPV, er wird mit der Spannung an R_2 gespeist. Mit der Spannungsteilerregel ergibt sich:

$$U_{\text{R2}} = U_e \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Die Verstärkung ist:

$$V = \frac{U_a}{U_{\text{R2}}} = \frac{U_a}{U_e}\frac{R_1 + R_2}{R_2} = 1 + \frac{R_4}{R_3} \Rightarrow \frac{R_4}{R_3} = \frac{U_a}{U_e}\frac{R_1 + R_2}{R_2} - 1; \quad \underline{\underline{\frac{R_4}{R_3} = 14}}$$

Wird z. B. $R_3 = 1\,\text{k}\Omega$ gewählt, so ist $R_4 = 14\,\text{k}\Omega$.

Aufgabe 19.9

Wie müssen in der Schaltung in Abb. 19.12 mit einem idealen Operationsverstärker die Bauteile R_2 und C dimensioniert werden, damit die Schaltung für Gleichspannung die Verstärkung $V_{\text{Gleich}} = 12$ und bei der Frequenz $f = 1\,\text{kHz}$ die Verstärkung $V_{\text{Wechsel}} = 20$ aufweist?

Gegeben: $R_1 = 1\,\text{k}\Omega$

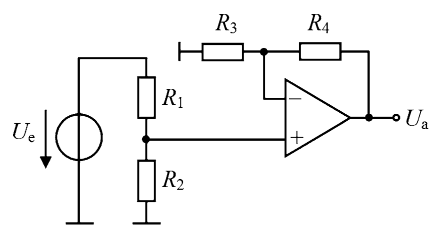


Abb. 19.11 Ein nichtinvertierender Verstärker

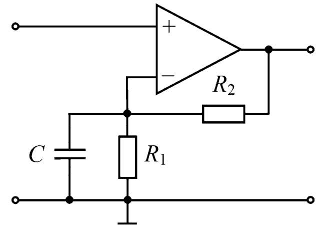


Abb. 19.12 Verstärkerschaltung

Lösung
Für Gleichspannung sperrt der Kondensator C. Die Verstärkung des nichtinvertierenden Verstärkers mit idealem OPV ist dann $V_{\text{Gleich}} = 1 + \frac{R_2}{R_1} = 12$. Somit ist $\underline{\underline{R_2 = 11\,\text{k}\Omega}}$.

Die komplexe Verstärkung ist

$$\underline{V}_{\text{Wechsel}} = 1 + \frac{R_2}{\underline{Z}} \text{ mit } \underline{Z} = R_1 \parallel C = \frac{R_1 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C}.$$

$$\underline{V}_{\text{Wechsel}} = \frac{R_1 + R_2 \cdot (1 + j\omega R_1 C)}{R_1};$$

$$|\underline{V}_{\text{Wechsel}}| = \frac{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega R_1 R_2 C)^2}}{R_1} = 20 \text{ bei } \omega = 2 \cdot \pi \cdot 1\,\text{kHz}$$

Umstellen und beide Seiten der Gleichung quadrieren ergibt:

$$(R_1 + R_2)^2 + (\omega R_1 R_2 C)^2 = 20^2 \cdot R_1^2; \quad \omega^2 R_1^2 R_2^2 C^2 = 20^2 \cdot R_1^2 - (R_1 + R_2)^2$$

Auflösen nach C:

$$C = \frac{\sqrt{20^2 \cdot R_1^2 - (R_1 + R_2)^2}}{\omega R_1 R_2}; \quad \underline{\underline{C = 231\,\text{nF}}}$$

19.4 Invertierender Verstärker

Aufgabe 19.10
Es soll ein invertierender Verstärker (Abb. 19.13) mit folgenden Daten entworfen werden: Verstärkung $V = 25\,\text{dB}$, Eingangswiderstand der Verstärkerschaltung $R_e = 10\,\text{k}\Omega$, Ausgangsspannung $U_a = 5\,\text{V}$. Der verwendete OPV hat eine Leerlaufverstärkung $V_0 = 95\,\text{dB}$.

a) Wie groß sind R_1 und R_2 zu wählen?
b) Wie groß ist die Eingangsspannung U_e zu wählen?
c) Wie groß wird der Strom I_1?
d) Welche Differenzeingangsspannung U_d liegt am OPV?

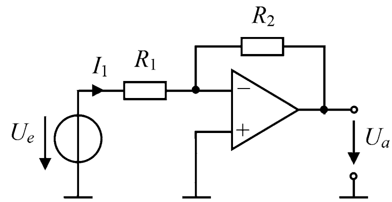


Abb. 19.13 Ein invertierender Verstärker

Lösung

a) Zunächst wird der OPV als ideal betrachtet, obwohl die Leerlaufverstärkung nicht unendlich groß ist. Es liegt Gegenkopplung über R_2 vor und gleichzeitig liegt der P-Eingang direkt auf Masse. Der N-Eingang ist somit virtuelle Masse. Der Eingangswiderstand der Schaltung ist durch R_1 gegeben: $\underline{\underline{R_1 = R_e = 10\,\text{k}\Omega}}$.

   25 dB entsprechen einem Verstärkungsfaktor von $V = 10^{\frac{25}{20}} = 17{,}78$.

$$|V| = \left|-\frac{R_2}{R_1}\right|; \quad R_2 = V \cdot R_1 = \underline{\underline{177{,}8\,\text{k}\Omega}}$$

   Ein erhältlicher Widerstandswert der E48-Reihe (Toleranz ±2 %) wäre 178 kΩ.

b)

$$U_e = \frac{U_a}{-V} = \frac{5\,\text{V}}{-17{,}78} = \underline{\underline{-0{,}28\,\text{V}}}$$

c)

$$I_1 = \frac{U_e}{R_1} = \frac{-0{,}28\,\text{V}}{10\,\text{k}\Omega} = \underline{\underline{-28\,\mu\text{A}}}$$

d)

$$U_d = \frac{U_a}{V_0} = \frac{5\,\text{V}}{10^{\frac{95}{20}}} = \underline{\underline{89\,\mu\text{V}}}.$$

   Der OPV wird jetzt nicht mehr als ideal betrachtet. Trotz Gegenkopplung ist $U_d \neq 0$, V_0 ist ja nicht unendlich wie bei einem idealen OPV.

Aufgabe 19.11

Gegeben ist die in Abb. 19.14 dargestellte Schaltung, der OPV ist als ideal zu betrachten.

Es sind: $\hat{U}_e = 200\,\text{mV}$, $R_1 = 20\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 10\,\text{k}\Omega$

Geben Sie Werte von R_3 und R_4 so an, dass sich am Ausgang betragsmäßig eine Spannung von $\hat{U}_a = 1\,\text{V}$ einstellt.

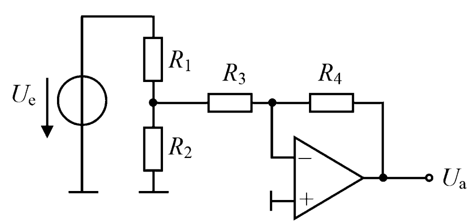


Abb. 19.14 Operationsverstärkerschaltung

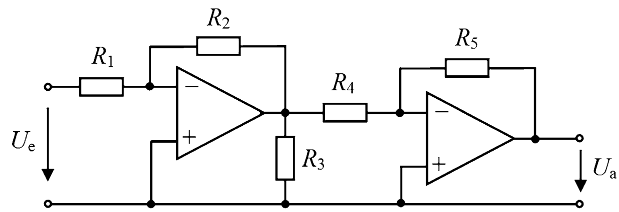


Abb. 19.15 Schaltung mit zwei Operationsverstärkern

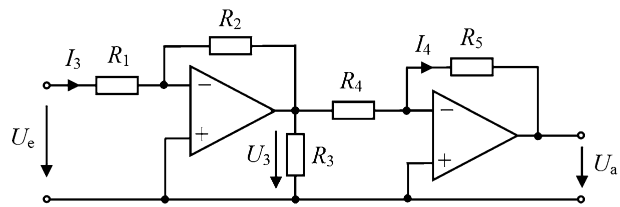


Abb. 19.16 Schaltung mit Spannungen und Strömen

Lösung

Unter Berücksichtigung der virtuellen Masse am N-Eingang liegt R_3 parallel zu R_2.

$$U_{R2} = U_e \cdot \frac{R_2 \parallel R_3}{R_1 + R_2 \parallel R_3}; \quad |V| = \frac{U_a}{U_{R2}} = \frac{U_a}{U_e}\frac{R_1 + R_2 \parallel R_3}{R_2 \parallel R_3} = \frac{R_4}{R_3};$$

$$\frac{U_a}{U_e}\frac{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}}{\frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{R_4}{R_3}$$

$$\frac{U_a}{U_e}\frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2 R_3} = \frac{R_4}{R_3}; \quad R_4 = \frac{U_a}{U_e}\frac{1}{R_2}\left[R_1 R_2 + R_3(R_1 + R_2)\right]$$

Wird z. B. $\underline{\underline{R_3 = 1\,\mathrm{k\Omega}}}$ gewählt, so ist $\underline{\underline{R_4 = 115\,\mathrm{k\Omega}}}$.

Aufgabe 19.12

Gegeben ist die Schaltung in Abb. 19.15 mit zwei idealen Operationsverstärkern.

Gesucht ist $\frac{U_a}{U_e}$ als Funktion der Widerstände R_1 bis R_5. Hat R_3 einen Einfluss auf $\frac{U_a}{U_e}$?

Lösung

Über R_2 und R_5 liegt jeweils Gegenkopplung vor, die P-Eingänge liegen zusätzlich direkt auf Masse. Somit liegen die N-Eingänge virtuell auf Masse. Die Ströme und Spannungen zeigt Abb. 19.16.

Die Schaltung stellt zwei in Reihe geschaltete invertierende Verstärker dar.

$$U_3 = -I_3 R_2 = -U_e \frac{R_2}{R_1}; \quad U_a = -I_4 R_5 = -U_3 \frac{R_5}{R_4}; \quad U_a = U_e \frac{R_2 R_5}{R_1 R_4}; \quad \underline{\underline{\frac{U_a}{U_e} = \frac{R_2 R_5}{R_1 R_4}}}$$

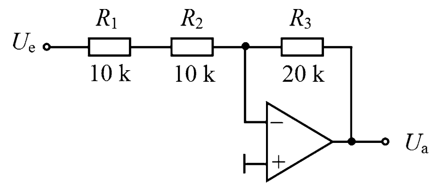
R_3 hat auf U_a keinen Einfluss, da der Ausgangswiderstand des idealen OPV null ist. Der ideale OPV verhält sich an seinem Ausgang wie eine ideale Spannungsquelle. Ein Widerstand parallel zu einer idealen Spannungsquelle hat ja auch keinen Einfluss auf deren Klemmenspannung.

Aufgabe 19.13

Für jede der Schaltungen in den Teilaufgaben 1 bis 6 mit idealem OPV soll die Betriebsspannungsverstärkung V (mit Vorzeichen) allgemein und als Zahlenwert berechnet werden. Geben Sie jeweils eine Herleitung bzw. Begründung an.

Teilaufgabe 1

Abb. 19.17 Schaltung 1



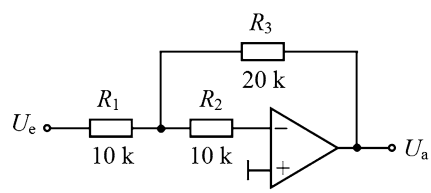
***Lösung* Teilaufgabe 1**

Es handelt sich bei Schaltung 1 (Abb. 19.17) um einen invertierenden Verstärker.

$$\underline{\underline{V = -\frac{R_3}{R_1 + R_2} = -1}}$$

Teilaufgabe 2

Abb. 19.18 Schaltung 2

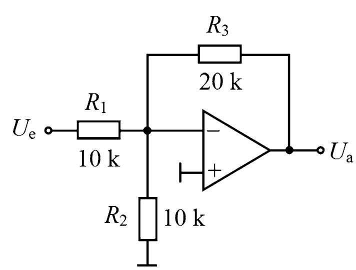


***Lösung* Teilaufgabe 2**

Der Eingangswiderstand des OPV ist unendlich, durch R_2 fließt kein Strom. Der Knoten zwischen R_1 und R_2 ist virtuelle Masse. Schaltung 2 (Abb. 19.18) ist ein invertierender Verstärker. $\underline{\underline{V = -\frac{R_3}{R_1} = -2}}$

Teilaufgabe 3

Abb. 19.19 Schaltung 3



***Lösung* Teilaufgabe 3**

Wegen der Gegenkopplung über R_3 und da zusätzlich der P-Eingang direkt auf Masse liegt, ist der N-Eingang virtuelle Masse (Abb. 19.19). Durch R_2 fließt kein Strom. Schaltung 3 ist ein invertierender Verstärker. $\underline{\underline{V = -\frac{R_3}{R_1} = -2}}$

Teilaufgabe 4

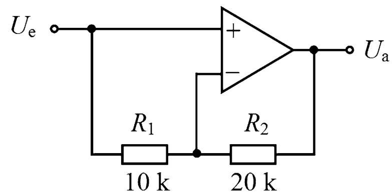


Abb. 19.20 Schaltung 4

***Lösung* Teilaufgabe 4**

Der Eingangswiderstand des OPV ist unendlich, durch R_1 und R_2 fließt kein Strom (Abb. 19.20). U_e ist mit U_a über die Reihenschaltung von R_1 und R_2 verbunden. An U_a ist keine Last angeschlossen, an R_1 und R_2 fällt keine Spannung ab, somit ist $U_a = U_e$. Schaltung 4 hat keine Funktion: $\underline{\underline{V = 1}}$

Teilaufgabe 5

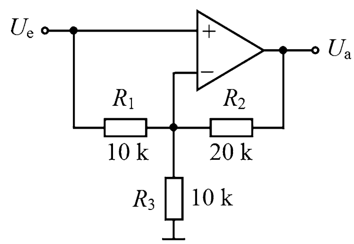


Abb. 19.21 Schaltung 5

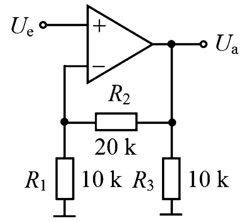
***Lösung* Teilaufgabe 5**

Wegen der Gegenkopplung über R_2 ist die Differenzeingangsspannung zwischen dem P- und N-Eingang null (Abb. 19.21). Durch R_1 fließt kein Strom. Bei Schaltung 5 handelt es sich um einen nichtinvertierenden Verstärker.

$$\underline{\underline{V = \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) = 3}}$$

Teilaufgabe 6

Abb. 19.22 Schaltung 6



***Lösung* Teilaufgabe 6**

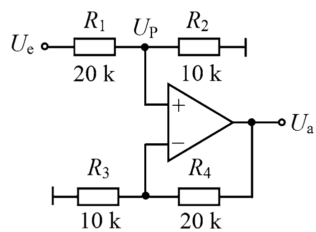
Der ideale OPV verhält sich an seinem Ausgang wie eine ideale Spannungsquelle (Abb. 19.22). Die Belastung des Ausgangs durch R_3 beeinflusst die Verstärkung nicht, da der Ausgangswiderstand des idealen OPV null ist. Es handelt sich bei Schaltung 6 um einen nichtinvertierenden Verstärker. $\underline{\underline{V = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = 3}}$

Aufgabe 19.14

Für die folgenden vier Schaltungen mit jeweils idealem OPV soll die Ausgangsspannung U_a allgemein und als Zahlenwert berechnet werden. Geben Sie eine Herleitung bzw. Begründung an.

Teilaufgabe 1

Abb. 19.23 Schaltung 1



***Lösung* Teilaufgabe 1**

U_P ist die Eingangsspannung für den nichtinvertierenden Verstärker (Abb. 19.23). Spannungsteiler:

$$U_P = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_e; \quad U_a = U_P \cdot \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) = \underline{\underline{\frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) \cdot U_e;}}$$

$$U_a = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot U_e; \quad \underline{\underline{U_a = U_e}}$$

Aus dem Ergebnis sehen wir, dass die Dimensionierung nicht gerade sinnvoll ist.

Teilaufgabe 2

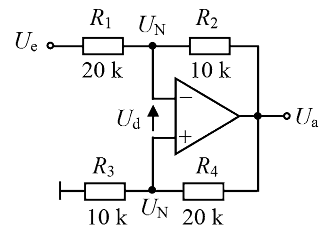


Abb. 19.24 Schaltung 2

Lösung **Teilaufgabe 2**
Knotengleichung für den oberen Knoten (Abb. 19.24):

$$\frac{U_e - U_N}{R_1} + \frac{U_a - U_N}{R_2} = 0 \text{ (Gl. 1)}$$

Wegen der Gegenkopplung über R_2 ist die Differenzeingangsspannung U_d zwischen dem P- und N-Eingang null, U_N liegt daher auch über R_3 (am unteren Knoten).

$$U_N = \frac{R_3}{R_3 + R_4} \cdot U_a \text{ (Gl. 2)}$$

Gl. 1 umformen und Gl. 2 in Gl. 1 einsetzen:

$$\frac{U_e - U_N}{R_1} = \frac{-U_a + U_N}{R_2}$$

$$R_2 U_e - R_2 U_N = -R_1 U_a + R_1 U_N; \quad R_2 U_e = (R_1 + R_2) U_N - R_1 U_a;$$

$$R_2 U_e = \frac{R_3 (R_1 + R_2)}{R_3 + R_4} U_a - R_1 U_a$$

$$\underline{\underline{U_a = \frac{R_2 (R_3 + R_4)}{R_2 R_3 - R_1 R_4} \cdot U_e}}; \quad U_a = \frac{10 \cdot 30}{100 - 400} U_e; \quad \underline{\underline{U_a = -U_e}}$$

Dieses Invertieren der Eingangsspannung könnte man auch unter Einsparung von zwei Widerständen mit einem Inverter erreichen.

Teilaufgabe 3

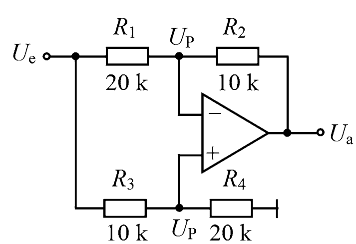


Abb. 19.25 Schaltung 3

***Lösung* Teilaufgabe 3**
In Abb. 19.25 ist die Spannung am unteren Knoten (Spannungsteiler):

$$U_P = \frac{R_4}{R_3 + R_4} U_e \text{ (Gl. 1)}$$

Wegen der Gegenkopplung über R_2 ist die Differenzeingangsspannung zwischen dem P- und N-Eingang null, U_P liegt daher auch am oberen Knoten (am N-Eingang).

Knotengleichung für den oberen Knoten:

$$\frac{U_e - U_P}{R_1} + \frac{U_a - U_P}{R_2} = 0 \text{ (Gl. 2)}$$

$$R_2 U_e - R_2 U_P = -R_1 U_a + R_1 U_P; \quad R_2 U_e = (R_1 + R_2)\, U_P - R_1 U_a; \text{ Gl. 1 einsetzen} \Rightarrow$$

$$R_2 U_e = \frac{(R_1 + R_2) R_4}{R_3 + R_4} U_e - R_1 U_a; \quad \underline{\underline{U_a = \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{R_1 (R_3 + R_4)} \cdot U_e;}}$$

$$U_a = \frac{20 \cdot 20 - 10 \cdot 10}{20(10 + 20)} U_e; \quad \underline{\underline{U_a = \frac{1}{2} \cdot U_e}}$$

Teilaufgabe 4

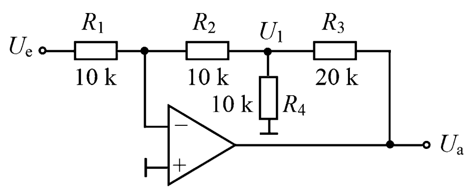


Abb. 19.26 Schaltung 4

***Lösung* Teilaufgabe 4**
Es liegt Gegenkopplung über R_2 und R_3 vor, zugleich liegt der P-Eingang direkt auf Masse (Abb. 19.26). Der N-Eingang ist somit virtuelle Masse.

Erste Knotengleichung (Knoten am N-Eingang):

$$\frac{U_e}{R_1} + \frac{U_1}{R_2} = 0 \text{ (Gl. 1)}$$

Wegen virtueller Masse liegt an R_4 die gleiche Spannung wie an R_2.

Zweite Knotengleichung:

$$-\frac{U_1}{R_2} - \frac{U_1}{R_4} + \frac{U_a - U_1}{R_3} = 0 \text{ (Gl. 2)}$$

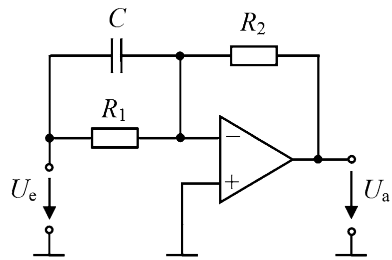


Abb. 19.27 Eine OPV-Schaltung

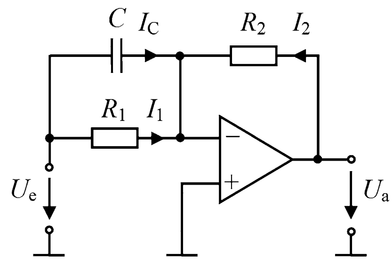


Abb. 19.28 Schaltung mit eingeführten Strömen

Einsetzen von $U_1 = -\frac{R_2}{R_1}U_e$ aus Gl. 1 in Gl. 2:

$$\frac{1}{R_1}U_e + \frac{R_2}{R_1R_4}U_e + \frac{U_a + \frac{R_2}{R_1}U_e}{R_3} = 0$$

$$\frac{1}{R_1}U_e + \frac{R_2}{R_1R_4}U_e + \frac{R_1U_a + R_2U_e}{R_1R_3} = 0; \quad \left(\frac{1}{R_1} + \frac{R_2}{R_1R_4} + \frac{R_2}{R_1R_3}\right)U_e = -\frac{1}{R_3}U_a$$

$$\underline{\underline{U_a = -\frac{R_3R_4 + R_2R_3 + R_2R_4}{R_1R_4} \cdot U_e;}} \quad U_a = -\frac{20 \cdot 10 + 10 \cdot 20 + 10 \cdot 10}{10 \cdot 10} \cdot U_e;$$

$$\underline{\underline{U_a = -5 \cdot U_e}}$$

Aufgabe 19.15

a) Was versteht man unter der Offsetspannung bei einem realen OPV?

b) Geben Sie die Abhängigkeit $U_a = f(U_e)$ der Ausgangsspannung U_a von der Eingangsspannung U_e der Beschaltung des idealen OPV in Abb. 19.27 an.

Lösung

a) Die Offsetspannung ist die Spannung am OPV-Ausgang, wenn beide Eingänge auf Masse liegen.

b) Es werden die Ströme I_1, I_2 und I_C eingeführt (Abb. 19.28).
Die Knotengleichung am N-Eingang ergibt: $I_1 + I_C + I_2 = 0$
Der N-Eingang ist virtuelle Masse, daraus folgt: $U_e = I_1 \cdot R_1$; $U_a = I_2 \cdot R_2$
Der Strom durch C ist: $I_C = C \cdot \frac{dU_e}{dt} \Rightarrow U_a = (-I_1 - I_C) \cdot R_2$

$$U_a = -\frac{U_e}{R_1}R_2 - C\frac{dU_e}{dt}R_2; \quad \underline{\underline{U_a(U_e) = -\frac{R_2}{R_1}U_e - R_2C\frac{dU_e}{dt}}}$$

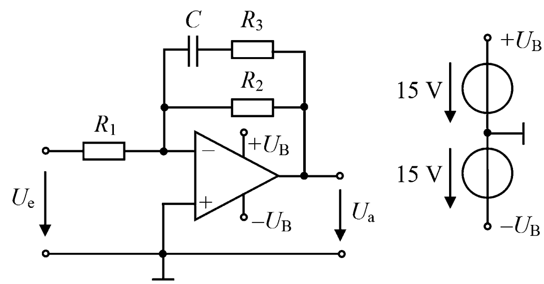


Abb. 19.29 Verstärkerschaltung

Der Ausgang hat einen Proportional- und einen Differenzialanteil der Eingangsspannung, dies ist ein Beispiel für einen PD-Regler.

Aufgabe 19.16

Der Operationsverstärker in der Verstärkerschaltung Abb. 19.29 ist als ideal anzusehen. Die bipolare Stromversorgung erfolgt über zwei Betriebsspannungsquellen $\pm U_B$. Die Signalquelle U_e am Eingang hat sinusförmigen Spannungsverlauf.

Gegeben: $R_1 = 10\,\mathrm{k\Omega}$, $R_3 = 100\,\mathrm{k\Omega}$, $C = 470\,\mathrm{nF}$

a) Wie groß muss R_2 gewählt werden, damit die Gleichspannungsverstärkung 20,0 dB beträgt?
b) Berechnen Sie die Spannungsverstärkung der Schaltung für hohe Frequenzen nach Betrag und Phase.
c) Geben Sie die Eingangsimpedanz Z_e an, welche an der Signalquelle U_e wirkt.
d) Berechnen Sie die Wirkleistung P_e in Watt, welche die Signalquelle bei $U_e = 1\,\mathrm{V}$ Gleichspannung aufbringen muss.
e) Berechnen Sie die Wirkleistung P_a in Watt, die der Schaltungsausgang (U_a) bei hohen Frequenzen an einem Lastwiderstand $R_L = 1\,\mathrm{k\Omega}$ aufbringen muss, wenn die Amplitude der Eingangsspannung $\hat{U}_e = 1\,\mathrm{V}$ beträgt.
f) Wie verändert sich prinzipiell das Verhalten der Schaltung, wenn U_e über einen Koppelkondensator $C_K = 10\,\mu\mathrm{F}$ an den Schaltungseingang angeschlossen wird?

Lösung

a) Das Verstärkungsmaß für Gleichspannung $V_{DC} = 20\,\mathrm{dB}$ entspricht dem Verstärkungsfaktor:
$$V_U = 10^{\frac{V_{DC}}{20\,\mathrm{dB}}} = 10^{\frac{20\,\mathrm{dB}}{20\,\mathrm{dB}}} = 10$$
Die grundsätzliche Beschaltung des Operationsverstärkers entspricht der Schaltung eines invertierenden Verstärkers. Für Gleichspannung sperrt C, die Reihenschaltung von C und R_3 kann als nicht vorhanden betrachtet werden. Die Spannungsverstärkung des invertierenden Verstärkers beträgt dann $|V_U| = \frac{R_2}{R_1} = 10. \Rightarrow \underline{\underline{R_2 = 100\,\mathrm{k\Omega}}}$
b) Für sehr hohe Frequenzen bildet C praktisch einen Kurzschluss, R_3 liegt dadurch parallel zu R_2.

Die Spannungsverstärkung ist dann

$$|V_U| = \frac{R_2 \parallel R_3}{R_1} = \frac{50\,\mathrm{k\Omega}}{10\,\mathrm{k\Omega}} = \underline{\underline{5}}.$$

In dB ergibt sich: $|V_U| = 20\,\mathrm{dB} \cdot \log(5) = \underline{\underline{14\,\mathrm{dB}}}$.
Dieser Wert der Verstärkung ist kleiner als die Gleichspannungsverstärkung mit 20,0 dB und somit plausibel, da die Gegenkopplung wegen des kleineren Gegenkopplungswiderstandes stärker wirkt.
Entsprechend der invertierenden Wirkung beträgt die Phasenverschiebung von U_a zu U_e:

$$\underline{\underline{\varphi = 180°}}.$$

c) Der invertierende Eingang liegt virtuell auf Masse. Damit kann man sich R_1 parallel geschaltet zur Eingangsspannung U_e vorstellen. Die Eingangsimpedanz Z_e der Schaltung ist:

$$\underline{\underline{Z_e = R_1 = 10\,\mathrm{k\Omega}}}.$$

d) Bei einer Eingangs-Gleichspannung von $U_e = 1\,\mathrm{V}$ ist die Eingangs-Wirkleistung:

$$P_e = \frac{U_e^2}{R_1} = \frac{1\,\mathrm{V}^2}{10\,\mathrm{k\Omega}} = \underline{\underline{0{,}1\,\mathrm{mW}}}$$

e) Für $\hat{U}_e = 1\,\mathrm{V}$ ist die Ausgangsspannung $\hat{U}_a = |V_U| \cdot \hat{U}_e = 5 \cdot 1\,\mathrm{V} = 5\,\mathrm{V}$
Der Effektivwert der Ausgangsspannung ist $U_a = \frac{\hat{U}_a}{\sqrt{2}}$.
Die Ausgangs-Wirkleistung ist

$$P_a = \frac{(U_a)^2}{R_L} = \frac{\frac{\hat{U}_a}{\sqrt{2}}}{R_L} = \frac{(5\,\mathrm{V})^2}{2 \cdot 1\,\mathrm{k\Omega}} = \underline{\underline{12{,}5\,\mathrm{mW}}}.$$

f) Durch einen Koppelkondensator am Eingang zeigt die Schaltung Hochpassverhalten.

Aufgabe 19.17
Ein invertierender Verstärker mit einem OPV hat eine Spannungsverstärkung $V = 38\,\mathrm{dB}$. Welcher relativer Fehler (in %) ergibt sich durch eine temperaturbedingte Offsetspannungsdrift von 5 mV, wenn die Ausgangsspannung $U_a = 4\,\mathrm{V}$ beträgt?

Lösung
$V = 38\,\mathrm{dB}$ entspricht einem Verstärkungsfaktor von 79,4. Durch die Offsetspannungsdrift ergibt sich am Ausgang eine Spannungsänderung von $\Delta U_{Off} = 80 \cdot 5\,\mathrm{mV} = 400\,\mathrm{mV}$. Bezogen auf die Signalausgangsspannung von $U_a = 4\,\mathrm{V}$ ist der relative Fehler:

$$\frac{\Delta U_{Off}}{U_a} = \frac{0{,}4\,\mathrm{V}}{4\,\mathrm{V}} = \underline{\underline{0{,}1 \mathrel{\widehat{=}} 10\,\%}}.$$

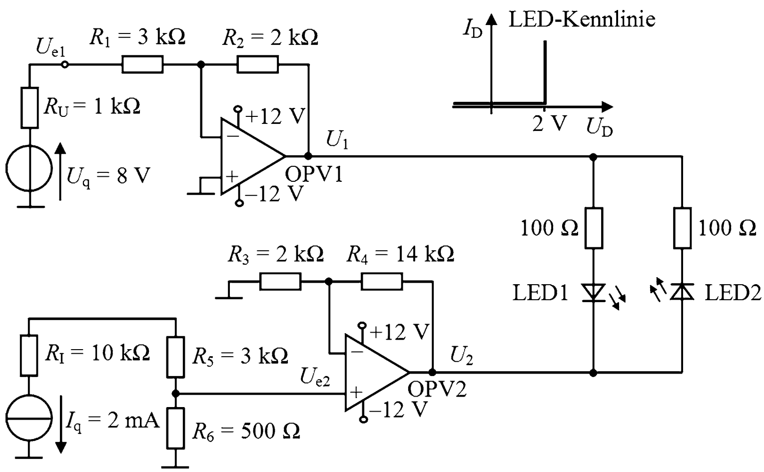


Abb. 19.30 Schaltung mit zwei OPVs

Aufgabe 19.18
Gegeben ist die Schaltung Abb. 19.30 mit idealen OPVs und die idealisierte Diodenkennlinie der LEDs.

a) Berechnen Sie U_1.
b) Berechnen Sie U_2.
c) Welche LED leuchtet?
d) Welche Leistung wird in der leuchtenden LED umgesetzt?

Lösung

a) Die Grundschaltung von OPV1 ist ein invertierender Verstärker. Der N-Eingang von OPV1 ist virtuelle Masse. R_1 liegt als Eingangswiderstand des Inverters in Reihe mit R_U an virtueller Masse. R_U kann als Innenwiderstand der realen Spannungsquelle bestehend aus U_q und R_U betrachtet werden. Zu beachten ist, dass das Potenzial am Punkt U_{e1} gegenüber Masse negativ ist. Der Spannungsabfall U_{e1} an R_1 ist (Spannungsteiler):

$$U_{e1} = -U_q \frac{R_1}{R_U + R_1} = -8\,V \frac{3\,k\Omega}{1\,k\Omega + 3\,k\Omega} = -6\,V$$

$$\frac{U_1}{U_{e1}} = -\frac{R_2}{R_1} = -\frac{2\,k\Omega}{3\,k\Omega} = -\frac{2}{3}; \quad \underline{\underline{U_1 = 4\,V}}$$

Alternativ kann R_U mit dem verstärkungsbestimmenden Widerstand R_1 zusammengefasst werden. Als Eingangsgröße bleibt dann nur die ideale Spannungsquelle U_q übrig.

$$\frac{U_1}{U_q} = -\frac{R_2}{R_U + R_1} = -\frac{2\,k\Omega}{1\,k\Omega + 3\,k\Omega} = -\frac{1}{2}; \quad U_1 = -8\,V \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{4\,V}}$$

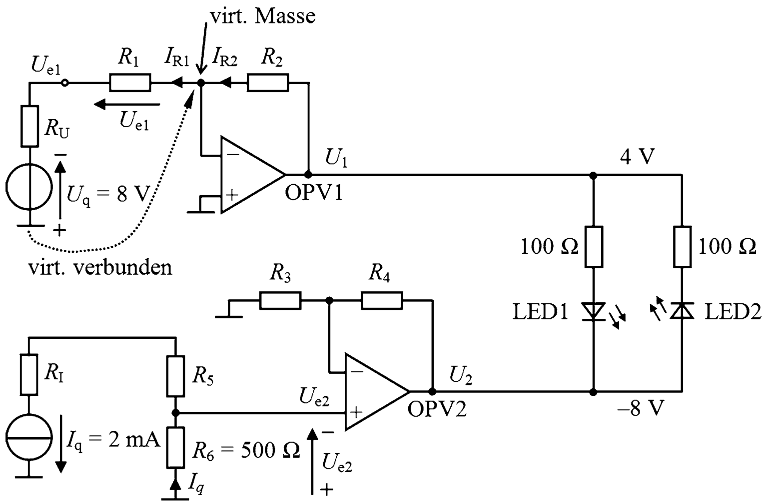


Abb. 19.31 Schaltung mit zwei OPVs mit eingetragenen Hilfsgrößen

Es folgt noch eine alternative Berechnungsweise. Der Strom I_{R1} fließt durch R_1 von rechts nach links (zum Punkt U_{e1}).

$$I_{R1} = \frac{U_q}{R_U + R_1} = 2\,\text{mA}$$

Der Strom I_{R2} fließt durch R_2 von rechts nach links (zum Verbindungsknoten von R_2 mit R_1 am N-Eingang). Aus der virtuellen Masse am N-Eingang folgt:

$$I_{R2} = \frac{U_1}{R_2} \text{ bzw. } U_1 = I_{R2} \cdot R_2$$

Knotengleichung: $I_{R1} = I_{R2} \Rightarrow U_1 = I_{R1} \cdot R_2 = 2\,\text{mA} \cdot 2\,\text{k}\Omega = \underline{\underline{4\,\text{V}}}$

b) Die Grundschaltung von OPV2 ist ein nichtinvertierender Verstärker.
I_q fließt durch R_6 (von unten nach oben): $U_{e2} = -I_q \cdot R_6 = -1\,\text{V}$
Das Potenzial am Punkt U_{e2} gegenüber Masse ist negativ.
Der Strom durch R_6, R_5 und R_I ist durch die Stromquelle I_q festgelegt. Die Werte von R_5 und R_I werden nicht benötigt.
Nichtinvertierender Verstärker:

$$\frac{U_2}{U_{e2}} = 1 + \frac{R_4}{R_3} = 8; \quad U_2 = 8 \cdot U_{e2} = \underline{\underline{-8\,\text{V}}}$$

Abb. 19.31 zeigt die Schaltung mit den eingetragenen Spannungen U_{e1}, U_{e2}, U_1, U_2 und den Strömen I_{R1}, I_{R2}.

c) LED1 leuchtet, da ihre Kathode negativer ist als ihre Anode, die Spannung liegt in Durchlassrichtung an der Reihenschaltung von 100 Ω und LED1 an.

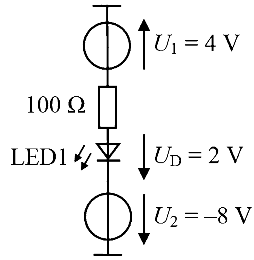


Abb. 19.32 Ersatzschaltbild für den Betrieb von LED1

d) Es wird das Ersatzschaltbild für den Betrieb von LED1 gezeichnet (Abb. 19.32). Der Diodenstrom I_D ist (Maschengleichung): $-(4\,\text{V}) + 100\,\Omega \cdot I_D + 2\,\text{V} + (-8\,\text{V}) = 0$.

$$I_D = 100\,\text{mA}; \quad P_{LED} = 2\,\text{V} \cdot 0{,}1\,\text{A} = \underline{\underline{0{,}2\,\text{W}}}$$

In der Praxis ist ein Strom von $I_D = 100\,\text{mA}$ für eine LED zu hoch, ein üblicher Wert ist z. B. 20 mA.

Aufgabe 19.19

Gegeben ist die Schaltung in Abb. 19.33 mit idealen OPVs, die Ausgangs-Sättigungsspannung der OPVs liegt $\pm 1{,}5$ V unter der Betriebsspannung. Die linearisierte Kennlinie der LEDs unter Vernachlässigung des differenziellen Widerstandes r_D ist ebenfalls gegeben.

a) Berechnen Sie die Spannung U_1 und die Ausgangsspannung U_a.
b) Welche LED am Ausgang leuchtet? Welche Leistung wird in ihr umgesetzt?
c) Wie verändert sich U_a, wenn U_q verdoppelt wird?

Lösung

a) Der erste (linke) OPV ist ein invertierender Verstärker. Sein Eingangswiderstand ist gegeben durch R_1. Der N-Eingang ist virtuelle Masse. R_i und R_1 bilden einen Span-

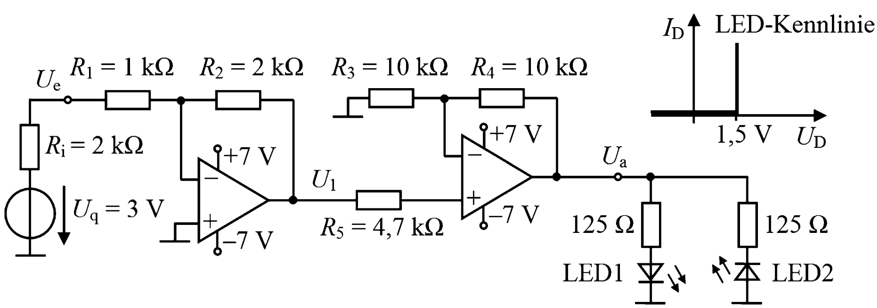
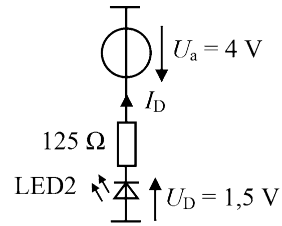


Abb. 19.33 Schaltung mit OPVs

Abb. 19.34 Ersatzschaltbild für den Betrieb von LED2



nungsteiler.

$$U_e = U_q \frac{R_1}{R_i + R_1}; \quad U_e = 1\,\text{V}$$

Die Verstärkung V des Inverters ist:

$$V = \frac{U_1}{U_e} = -\frac{R_2}{R_1} = -2; \quad U_1 = U_e \cdot (-2) = \underline{\underline{-2\,\text{V}}}$$

Alternativ kann R_i mit dem verstärkungsbestimmenden Widerstand R_1 zusammengefasst werden. Als Eingangsgröße bleibt dann nur die ideale Spannungsquelle U_q übrig.

$$\frac{U_1}{U_q} = -\frac{R_2}{R_i + R_1} = -\frac{2}{3}; \quad U_1 = -\frac{2}{3} \cdot U_q = \underline{\underline{-2\,\text{V}}}$$

Da durch R_5 kein Strom fließt (wegen des unendlich hohen Eingangswiderstandes des OPV), fällt an ihm keine Spannung ab. R_5 hat keine Funktion und könnte durch einen Kurzschluss ersetzt werden. U_1 liegt somit auch am P-Eingang des zweiten OPV. Dieser ist ein nichtinvertierender Verstärker:

$$\frac{U_a}{U_1} = 1 + \frac{R_4}{R_3}; \quad U_a = U_1 \cdot 2 = \underline{\underline{-4\,\text{V}}}$$

b) Entsprechend der Polarität von U_a ist nur LED2 in Flussrichtung geschaltet, sie leuchtet.
Es folgt das Ersatzschaltbild für den Betrieb von LED2 (Abb. 19.34).
Maschengleichung: $U_a - I_D \cdot 125\,\Omega - U_D = 0$
Der Strom durch LED2 ist

$$I_D = \frac{4\,\text{V} - 1{,}5\,\text{V}}{125\,\Omega} = 20\,\text{mA}.$$

Dies ist ein üblicher Wert für einen Strom durch eine LED. $P_{LED} = 1{,}5\,\text{V} \cdot 20\,\text{mA} = \underline{\underline{30\,\text{mW}}}$

c) U_a würde sich eigentlich auf -8 V verdoppeln. Da jedoch die Ausgangs-Sättigungsspannung $\pm 1{,}5$ V unter der Betriebsspannung von ± 7 V liegt, nimmt U_a einen minimalen Wert von $\underline{\underline{U_{a,min} = -5{,}5\,\text{V}}}$ an.

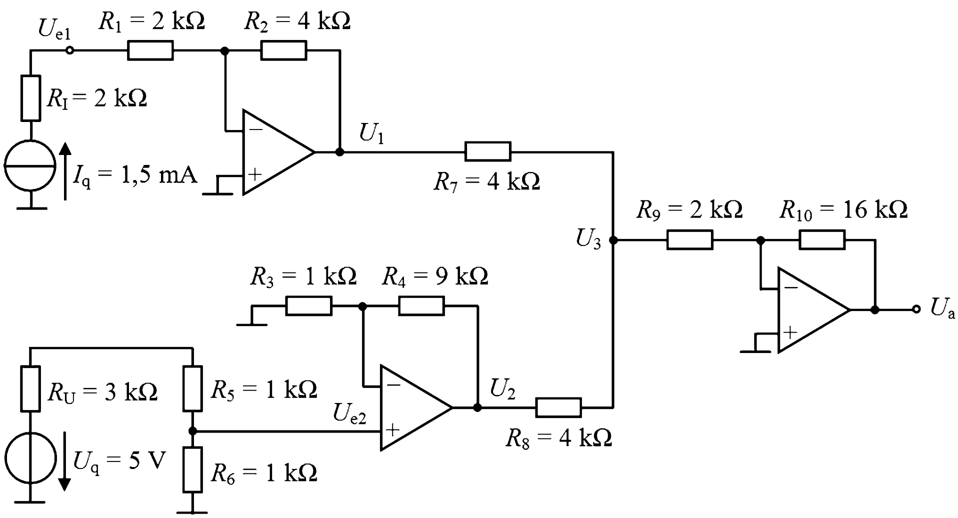


Abb. 19.35 Schaltung mit drei OPVs

Aufgabe 19.20
Gegeben ist die Schaltung Abb. 19.35 mit idealen OPVs. Gesucht ist die Ausgangsspannung U_a.

Lösung
Die obere Teilschaltung (der OPV bildet einen invertierenden Verstärker) wird von links nach rechts behandelt, es wird zuerst U_1 bestimmt. Der N-Eingang ist virtuelle Masse.

$$U_{e1} = I_q \cdot R_1 = 1{,}5\,\text{mA} \cdot 2\,\text{k}\Omega = 3\,\text{V}; \quad \frac{U_1}{U_{e1}} = -\frac{R_2}{R_1} = -\frac{4\,\text{k}\Omega}{2\,\text{k}\Omega} = -2; \quad U_1 = -6\,\text{V}$$

Jetzt wird die untere Teilschaltung betrachtet (ein nichtinvertierender Verstärker).

$$U_{e2} = U_q \frac{R_6}{R_U + R_5 + R_6} = 5\,\text{V} \cdot \frac{1\,\text{k}\Omega}{1\,\text{k}\Omega + 1\,\text{k}\Omega + 3\,\text{k}\Omega} = 1\,\text{V}; \quad \frac{U_2}{U_{e2}} = 1 + \frac{R_2}{R_1} = 10;$$
$$U_2 = 10\,\text{V}$$

Als Ersatzschaltung ergibt sich Abb. 19.36.

Vereinfacht als Ersatzspannungsquelle erhält man Abb. 19.37.

$$U_3' = 4\,\text{V} \cdot \frac{4\,\text{k}\Omega}{4\,\text{k}\Omega + 4\,\text{k}\Omega} = 2\,\text{V}$$

Der OPV ganz rechts in Abb. 19.35 bildet einen invertierenden Verstärker mit der Eingangsspannung U_3.

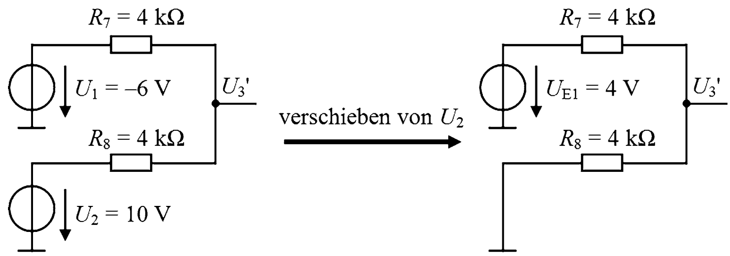
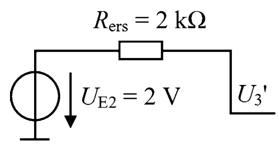


Abb. 19.36 Ersatzschaltung

Abb. 19.37 Ersatzspannungsquelle



R_9 liegt als Eingangswiderstand des Inverters in Reihe mit R_{ers} an virtueller Masse. Der Spannungsabfall U_3 an R_9 ist:

$$U_3 = U_{\text{E2}} \frac{R_9}{R_{\text{ers}} + R_9} = 2\,\text{V} \frac{2\,\text{k}\Omega}{2\,\text{k}\Omega + 2\,\text{k}\Omega} = 1\,\text{V}$$

Alternativ nach Abb. 19.36 rechts:

$$U_3 = U_{\text{E1}} \cdot \frac{R_8 \parallel R_9}{R_7 + R_8 \parallel R_9} = 4\,\text{V} \cdot \frac{4\,\text{k} \parallel 2\,\text{k}}{4\,\text{k} \parallel 2\,\text{k} + 4\,\text{k}} = 1\,\text{V}$$

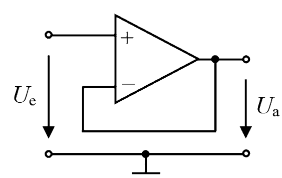
$$\frac{U_\text{a}}{U_3} = -\frac{R_{10}}{R_9} = -8; \quad \underline{\underline{U_\text{a} = -8\,\text{V}}}$$

19.5 Impedanzwandler (Spannungsfolger)

Aufgabe 19.21

Ein idealer Operationsverstärker ist wie in Abb. 19.38 angegeben verschaltet. Wie groß ist das Verhältnis U_a/U_e? Begründung? Welche Eigenschaften hat die Schaltung? Für welche Zwecke wird sie eingesetzt?

Abb. 19.38 Beschalteter OPV



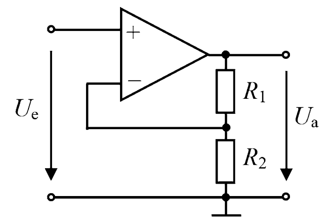


Abb. 19.39 Nichtinvertierender Verstärker

Lösung

Bei der Schaltung handelt es sich um einen Spannungsfolger (Impedanzwandler). Der Impedanzwandler kann als Sonderfall des nichtinvertierenden Verstärkers betrachtet werden (Abb. 19.39).

Die Verstärkung des nichtinvertierenden Verstärkers ist:

$$V = \frac{U_a}{U_e} = 1 + \frac{R_1}{R_2}$$

Mit $R_1 = 0$, $R_2 = \infty$ und $\frac{0}{\infty} = 0$ folgt:

$$\underline{\underline{V = \frac{U_a}{U_e} = 1.}}$$

Der Eingangswiderstand der Schaltung ist sehr groß (ideal $R_e \to \infty$), der Ausgangswiderstand ist sehr klein (ideal $R_a \to 0$). Der Impedanzwandler wird zur Verringerung des Ausgangswiderstandes einer Verstärkerstufe bzw. zur Entkopplung von Verstärkerstufen eingesetzt.

19.6 Differenzierer

Aufgabe 19.22

Gegeben ist die Schaltung in Abb. 19.40 mit einem idealen Operationsverstärker.

Geben Sie den Strom I_e und die Spannungen U_C, U_R und U_a in Abhängigkeit von U_0 an.

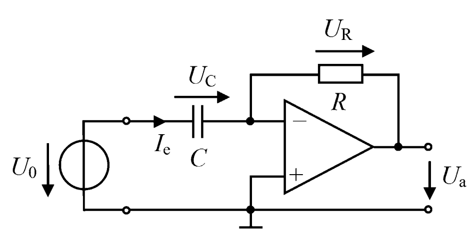


Abb. 19.40 Schaltung mit OPV

Abb. 19.41 Schaltung mit Berechnungsgrößen

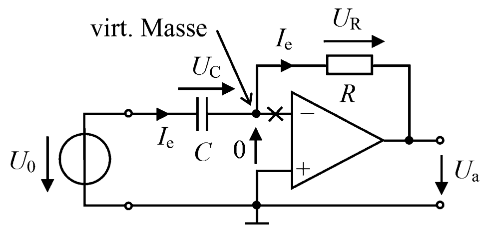
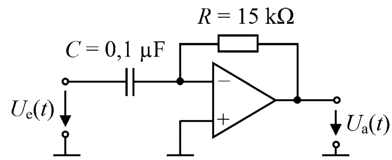


Abb. 19.42 OPV-Schaltung



Lösung

Der OPV ist ideal, das bedeutet:

a) In den invertierenden Eingang fließt kein Strom, die Verbindung wird in Abb. 19.41 mit „**×**" als stromlos gekennzeichnet.

b) Wegen der Gegenkopplung über R ist die Differenzeingangsspannung zwischen P-Eingang und N-Eingang null. Zusätzlich liegt der P-Eingang direkt auf Masse, somit ist der N-Eingang virtuelle Masse.
Der N-Eingang liegt virtuell auf Masse. Hieraus folgt unmittelbar: $\underline{\underline{U_C = U_0}}$

$$I_e = \frac{U_C}{\frac{1}{j\omega C}}; \quad \underline{\underline{I_e = j\omega C \cdot U_0}}$$

Der Strom I_e fließt auch durch den Widerstand R. Damit ist $\underline{\underline{U_R = j\omega RC \cdot U_0}}$.
Der linke Anschluss von R liegt virtuell auf Masse. Damit ist U_a entgegengesetzt zu U_R gerichtet. $\underline{\underline{U_a = -U_R = -j\omega RC \cdot U_0}}$

Aufgabe 19.23

Gegeben ist eine OPV-Schaltung (Abb. 19.42) mit idealem OPV und der zeitliche Verlauf der Eingangsspannung (Abb. 19.43).

a) Leiten Sie den Zusammenhang $U_a(t) = f[U_e(t)]$ her.

b) Stellen Sie den zeitlichen Verlauf von $U_a(t)$ für den abgebildeten Verlauf von $U_e(t)$ dar.

Lösung

a) Es werden die Ströme I_e und I_R eingeführt (Abb. 19.44).
In den N-Eingang fließt kein Strom, deshalb ist $I_e = -I_R$.

Abb. 19.43 Zeitlicher Verlauf der Eingangsspannung

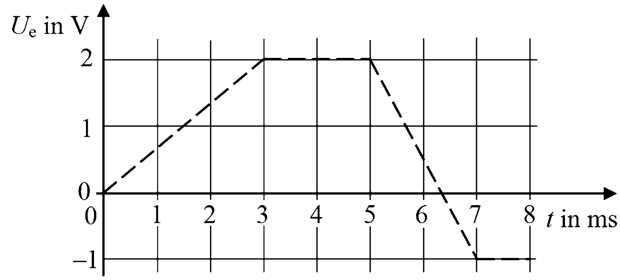
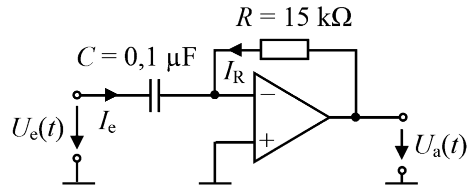


Abb. 19.44 Schaltung mit Strömen



Der N-Eingang ist virtuelle Masse, daher gilt:

$$I_e = C \cdot \frac{dU_e(t)}{dt}; \quad I_R = \frac{U_a}{R}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{U_a(t) = -RC \cdot \frac{dU_e(t)}{dt}}}.$$

Die Schaltung ist ein Differenzierer.

b) 0 bis 3 ms:

$$-\frac{2\,\text{V}}{3 \cdot 10^{-3}\,\text{s}} \cdot 15 \cdot 10^3\,\Omega \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{s}}{\Omega} = -1\,\text{V}$$

3 bis 5 ms: Die Ableitung von $U_e(t)$ ist null.

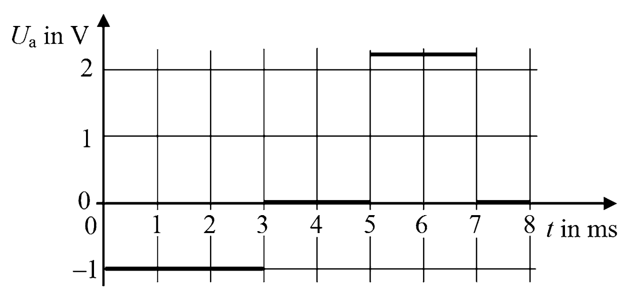
5 bis 7 ms:

$$-\frac{-3\,\text{V}}{2 \cdot 10^{-3}\,\text{s}} \cdot 15 \cdot 10^3\,\Omega \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{s}}{\Omega} = 2{,}25\,\text{V}$$

7 bis 8 ms: Die Ableitung von $U_e(t)$ ist null.

Den zeitlichen Verlauf von $U_a(t)$ zeigt Abb. 19.45.

Abb. 19.45 Zeitlicher Verlauf der Ausgangsspannung



19.7 Addierer, Subtrahierer

Aufgabe 19.24

Leiten Sie für die in Abb. 19.46 gezeigte OPV-Schaltung den Zusammenhang $U_a = f(U_1, U_2, R_1, R_2, R_3, R_4)$ her. Um welche Art von Schaltung handelt es sich? Der OPV ist als ideal zu betrachten.

Lösung

Es werden die Ströme I_1, I_2 und die Spannungen U_P, U_d und U_{R4} eingeführt (Abb. 19.47).

Der N-Eingang ist *nicht* virtuelle Masse, da der P-Eingang nicht *direkt* auf Masse liegt. Es liegt aber über R_3 eine Gegenkopplung vor, d. h. die Differenzeingangsspannung ist $U_d = 0$ (virtueller Kurzschluss zwischen den beiden Eingängen). Daraus folgt: $U_P = U_{R4}$ tritt auch oben am N-Eingang auf. Diese Spannung ist:

$$U_P = U_2 \cdot \frac{R_4}{R_2 + R_4}$$

$$\text{Spannung an } R_1\text{: } U_1 - U_P \Rightarrow I_1 = \frac{U_1 - U_P}{R_1}$$

$$\text{Spannung an } R_3\text{: } U_a - U_P \Rightarrow I_2 = \frac{U_a - U_P}{R_3}$$

$$\text{Knotenregel: } I_1 = -I_2 \Rightarrow \frac{U_1 - U_P}{R_1} = \frac{U_P - U_a}{R_3}; \quad \frac{R_3}{R_1}(U_1 - U_P) = U_P - U_a$$

$$U_a = -\frac{R_3}{R_1}U_1 + \frac{R_3}{R_1}U_P + U_P$$

$$U_P \text{ einsetzen } \Rightarrow U_a = -\frac{R_3}{R_1}U_1 + \frac{R_3}{R_1}\frac{R_4}{R_2 + R_4}U_2 + \frac{R_4}{R_2 + R_4}U_2$$

$$= \underline{\underline{U_2\frac{R_4}{R_1} \cdot \frac{R_1 + R_3}{R_2 + R_4} - U_1\frac{R_3}{R_1}}}$$

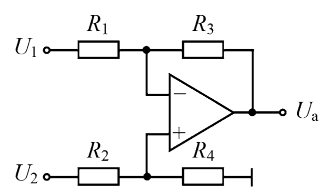


Abb. 19.46 OPV-Schaltung

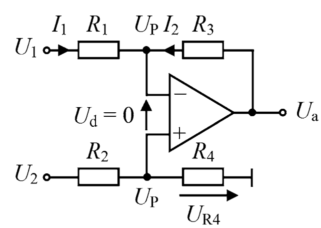


Abb. 19.47 Schaltung mit eingeführten Spannungen und Strömen

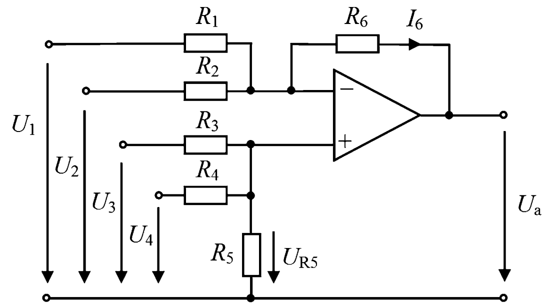


Abb. 19.48 Schaltung mit idealem Operationsverstärker

Die Schaltung ist ein Subtrahierer.

U_1 und U_2 sind bei der Differenzbildung noch unterschiedlich gewichtet.

Mit $R_1 = R_2$ und $R_3 = R_4$ folgt:

$$U_a = U_2\frac{R_3}{R_1}\cdot\frac{R_2+R_4}{R_2+R_4} - U_1\frac{R_3}{R_1}; \quad \underline{\underline{U_a = \frac{R_3}{R_1}(U_2-U_1)}}$$

Schließlich ist für $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$: $\underline{\underline{U_a = U_2 - U_1}}$

Aufgabe 19.25

Gegeben ist die Schaltung in Abb. 19.48 mit idealem Operationsverstärker.

Gegeben: $U_1 = 1\,\text{V}$, $U_2 = 4\,\text{V}$, $U_3 = 3\,\text{V}$, $U_4 = 5\,\text{V}$, $R_1 = 10\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 5\,\text{k}\Omega$, $R_3 = 10\,\text{k}\Omega$, $R_4 = 2\,\text{k}\Omega$, $R_5 = 10\,\text{k}\Omega$, $R_6 = 2\,\text{k}\Omega$

Berechnen Sie den Strom I_6 und die Spannungen U_{R5} und U_a.

Lösung

$$U_{R5} = I_5\cdot R_5 = (I_3+I_4)\cdot R_5; \quad U_{R5} = \left(\frac{U_3-U_{R5}}{R_3} + \frac{U_4-U_{R5}}{R_4}\right)\cdot R_5$$

$$U_{R5} = \frac{U_3R_4 - U_{R5}R_4 + U_4R_3 - U_{R5}R_3}{R_3R_4}R_5;$$

$$\frac{R_3R_4}{R_5}U_{R5} + U_{R5}R_4 + U_{R5}R_3 = U_3R_4 + U_4R_3$$

$$U_{R5}\left(\frac{R_3R_4}{R_5} + R_4 + R_3\right) = U_3R_4 + U_4R_3; \quad U_{R5} = \frac{U_3R_4+U_4R_3}{\frac{R_3R_4}{R_5}+R_4+R_3}$$

Zahlenwerte eingesetzt ergibt $\underline{\underline{U_{R5} = 4\,\text{V}}}$.

$$I_6 = I_1 + I_2 = \frac{U_1-U_{R5}}{R_1} + \frac{U_2-U_{R5}}{R_2} = \frac{-3\,\text{V}}{10\,\text{k}\Omega} = \underline{\underline{-0{,}3\,\text{mA}}}$$

$$U_a = -U_{R6} + U_{R5} = -I_6R_6 + U_{R5} = 0{,}3\,\text{mA}\cdot 2\,\text{k}\Omega + 4\,\text{V} = \underline{\underline{4{,}6\,\text{V}}}$$

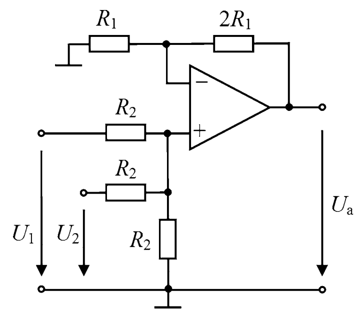


Abb. 19.49 Zu berechnende OPV-Schaltung

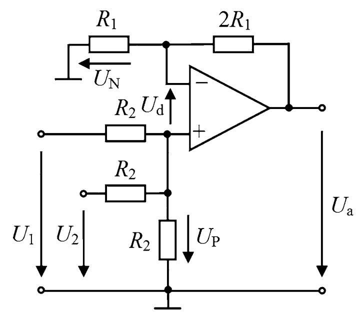


Abb. 19.50 Schaltung mit eingetragenen Berechnungsgrößen

Aufgabe 19.26
Berechnen Sie die Ausgangsspannung U_a als Funktion von U_1 und U_2 der Schaltung in Abb. 19.49. Der Operationsverstärker ist als ideal anzusehen.

Lösung
Die Schaltung mit eingetragenen Berechnungsgrößen zeigt Abb. 19.50.

Es liegt Gegenkopplung über $2R_1$ vor, somit ist die Differenzeingangsspannung $U_d = 0$. Es liegt ein virtueller Kurzschluss zwischen N- und P-Eingang vor, somit ist $U_N = U_P$. Außerdem sind die Ströme in die OPV-Eingänge null.

Zur Berechnung von U_P werden der Überlagerungssatz und die Spannungsteilerregel angewendet.

Wirkung von U_1: U_2 kurzschließen.

$$U'_P = U_1 \cdot \frac{\frac{R_2}{2}}{R_2 + \frac{R_2}{2}} = \frac{U_1}{3}$$

Wirkung von U_2: U_1 kurzschließen.

$$U''_P = U_2 \cdot \frac{\frac{R_2}{2}}{R_2 + \frac{R_2}{2}} = \frac{U_2}{3}$$

Überlagerung: $U_P = \frac{U_1}{3} + \frac{U_2}{3}$

Berechnung von U_N nach der Spannungsteilerregel:

$$U_N = U_a \cdot \frac{R_1}{R_1 + 2R_1} = \frac{U_a}{3}.$$

Mit $U_N = U_P$ folgt $\frac{U_a}{3} = \frac{U_1+U_2}{3}$. $\Rightarrow$ $\underline{\underline{U_a = U_1 + U_2}}$

19.8 Integrierer

Aufgabe 19.27
Gegeben ist die Schaltung Abb. 19.51 mit einem idealen OPV, es gilt $R \cdot C = 10\,\text{ms}$.

a) Zur Zeit $t = 0$ ist C vollständig entladen.
Zeichnen Sie den Verlauf von U_a für $0 < t \leq 100\,\text{ms}$, falls $U_e = 50\,\text{mV}$ und $U_e = 150\,\text{mV}$ ist.
b) Wie groß ist U_a für beide Eingangsspannungen zur Zeit $t = 100\,\text{ms}$?
c) Bei $t = 100\,\text{ms}$ wird U_e auf $U_e = -100\,\text{mV}$ umgeschaltet. Zeichnen Sie jeweils den weiteren Verlauf von U_a.

Lösung
a) Die Schaltung ist ein Integrierer, für den gilt:

$$U_a(t) = -\frac{1}{RC}\int U_e(t)dt + U_a(t = 0)$$

Da C am invertierenden Eingang an virtueller Masse liegt, ist $U_a(t) = U_C(t)$. Somit folgt:

$$U_a(t = 0) = U_C(t = 0) = 0$$
$$-\frac{1}{RC} = -\frac{1}{10\,\text{ms}} = -0{,}1\,\frac{1}{\text{ms}}$$
$$U_e = 50\,\text{mV:}\;\; U_a(t) = -0{,}1\,\frac{1}{\text{ms}} \cdot \int 50\,\text{mV}dt = -5\,\frac{\text{mV}}{\text{ms}} \cdot t$$

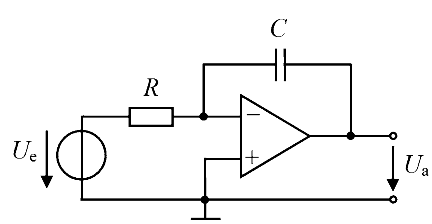


Abb. 19.51 OPV-Schaltung mit R und C

Dies ist eine Gerade durch den Ursprung mit negativer Steigung.

$$U_e = 150\,\mathrm{mV}\colon\; U_a(t) = -15\,\frac{\mathrm{mV}}{\mathrm{ms}} \cdot t$$

Dies ist ebenfalls eine Gerade durch den Ursprung mit negativer Steigung.
Damit die beiden Geraden bis 100 ms gezeichnet werden können, muss zuerst Teilaufgabe b) gelöst werden, um die Werte von U_a für 100 ms zu erhalten.

b)

$$U_e = 50\,\mathrm{mV}\colon\; U_a(t = 100\,\mathrm{ms}) = -5\,\frac{\mathrm{mV}}{\mathrm{ms}} \cdot 100\,\mathrm{ms} = \underline{\underline{-0{,}5\,\mathrm{V}}}$$

$$U_e = 150\,\mathrm{mV}\colon\; U_a(t = 100\,\mathrm{ms}) = -15\,\frac{\mathrm{mV}}{\mathrm{ms}} \cdot 100\,\mathrm{ms} = \underline{\underline{-1{,}5\,\mathrm{V}}}$$

Die beiden Geraden können jetzt von $t = 0$ bis $t = 100\,\mathrm{ms}$ gezeichnet werden.

c)

$$U_e = -100\,\mathrm{mV}\colon\; U_a(t) = -0{,}1\,\frac{1}{\mathrm{ms}} \cdot \int (-100\,\mathrm{mV})dt = 10\,\frac{\mathrm{mV}}{\mathrm{ms}} \cdot t$$

Dies ist eine Gerade mit positiver Steigung, deren Ursprung bei $t = 100\,\mathrm{ms}$, $U_a = -0{,}5\,\mathrm{V}$ liegt. Durch Einsetzen von t-Werten in diese Geradengleichung und unter Berücksichtigung ihres Ursprungs kann jeweils der weitere Verlauf von U_a gezeichnet werden.

$U_e = 50\,\mathrm{mV}$:

$$U_a(150\,\mathrm{ms}) = -500\,\mathrm{mV} + 10\,\frac{\mathrm{mV}}{\mathrm{ms}} \cdot 50\,\mathrm{ms} = 0\,\mathrm{V}$$

$$U_a(200\,\mathrm{ms}) = -500\,\mathrm{mV} + 10\,\frac{\mathrm{mV}}{\mathrm{ms}} \cdot 100\,\mathrm{ms} = 0{,}5\,\mathrm{V}$$

$U_e = 150\,\mathrm{mV}$:

$$U_a(200\,\mathrm{ms}) = -1{,}5\,\mathrm{V} + 10\,\frac{\mathrm{mV}}{\mathrm{ms}} \cdot 100\,\mathrm{ms} = -0{,}5\,\mathrm{V}$$

$$U_a(250\,\mathrm{ms}) = -1{,}5\,\mathrm{V} + 10\,\frac{\mathrm{mV}}{\mathrm{ms}} \cdot 150\,\mathrm{ms} = 0\,\mathrm{V}$$

Den Verlauf der Ausgangsspannung U_a zeigt Abb. 19.52.

Aufgabe 19.28

Gegeben ist die Schaltung in Abb. 19.53 mit einem idealen OPV.

Die Kurvenform von U_e zeigt Abb. 19.54.

a) Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit U_a zum Zeitpunkt $t = 0$ genau 0 Volt ist?
b) Skizzieren Sie den Verlauf von $U_a(t)$, skalieren Sie Ordinate noch nicht.
c) Dimensionieren Sie R und C so, dass $U_a(t = 20\,\mathrm{ms})$ genau 10 V erreicht.

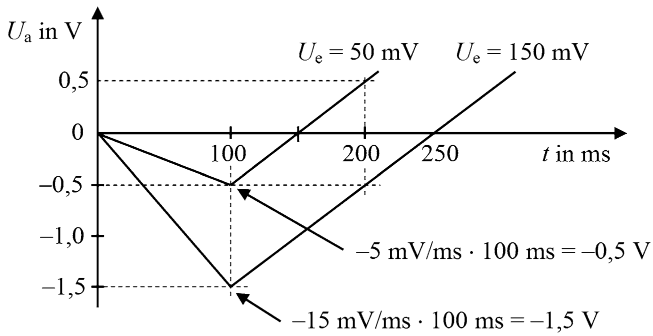
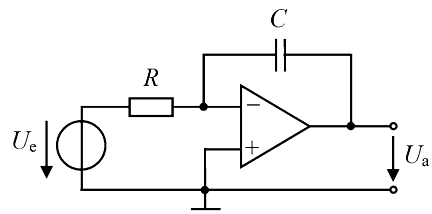


Abb. 19.52 Verlauf der Ausgangsspannung

Abb. 19.53 OPV-Schaltung als Integrierer



Lösung

a) C muss für $t = 0$ vollständig entladen sein.

b) Den Verlauf von $U_a(t)$ zeigt Abb. 19.55, die Ordinate wurde entsprechend Teilaufgabe c) bereits skaliert.

c)

$$U_a(t) = -\frac{1}{RC}\int U_e(t)dt + U_a(t = 0)$$

Es soll sein: $U_a(t = 20\,\text{ms}) = 10\,\text{V}$; jetzt $U_a = 10\,\text{V}$ in die Skizze Abb. 19.55 eintragen.
Wegen der Symmetrie von U_e gilt:
$U_a(t = 10\,\text{ms}) = 5\,\text{V}$; jetzt $U_a = 5\,\text{V}$ in die Skizze Abb. 19.55 eintragen.
Es erfolgt eine willkürliche Wahl des Startzeitpunktes, z. B. 5 ms mit dem Anfangswert $U_a(t = 5\,\text{ms}) = 0\,\text{V}$. Der Endwert ist 5 V.

Abb. 19.54 Kurvenform der Eingangsspannung

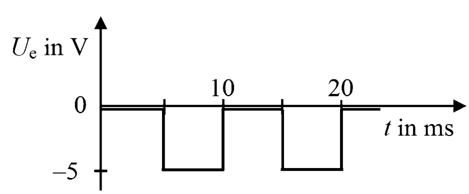
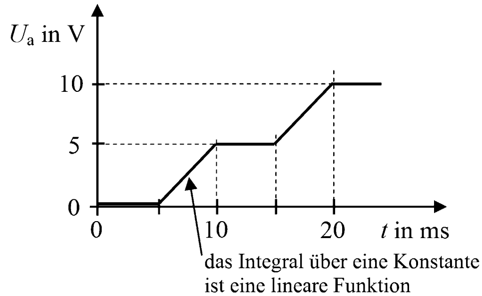


Abb. 19.55 Verlauf der Ausgangsspannung mit bereits skalierter Ordinate



Im Intervall 5 ms bis 10 ms gilt: $U_e(5\,\text{ms} < t \leq 10\,\text{ms}) = -5\,\text{V}$

$$5\,\text{V} = -\frac{1}{RC} \cdot -5\,\text{V} \cdot 5\,\text{ms} \Rightarrow \underline{\underline{RC = 5\,\text{ms}}}$$

z. B. mit den Werten $\underline{\underline{C = 1\,\mu\text{F}}}$, $\underline{\underline{R = 5\,\text{k}\Omega}}$

Aufgabe 19.29

Eine Schaltung erhält die Eingangsspannung U_e aus einem Generator und erzeugt die Ausgangsspannung U_a (Abb. 19.56).

a) Zeichnen Sie das Schaltbild für die gesuchte Schaltung unter Verwendung idealer OPVs.
b) Dimensionieren Sie alle Bauelemente.

Lösung

a) Es wird ein Integrierer mit nachfolgendem invertierenden Verstärker benötigt. Die Schaltung zeigt Abb. 19.57.
b)
$$U_a(t) = -\frac{1}{RC}\int U_e(t)dt + U_a(t = 0)$$

$U_a(t = 10\,\text{ms}) = 10\,\text{V}$ (Anfangswert); $U_a(t = 20\,\text{ms}) = -10\,\text{V}$ (Endwert)

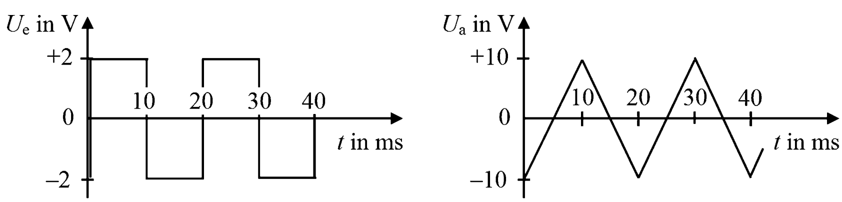


Abb. 19.56 Ein- und Ausgangsspannung einer Schaltung

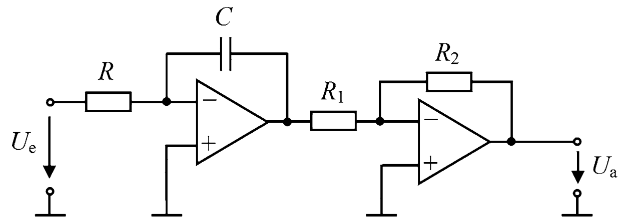


Abb. 19.57 Gesuchte Schaltung

Im Intervall 10 ms bis 20 ms ist $U_e(10\,\text{ms} < t \leq 20\,\text{ms}) = -2\,\text{V}$.

$$-10\,\text{V} = -\frac{1}{RC} \cdot -2\,\text{V} \cdot 10\,\text{ms} + 10\,\text{V} \Rightarrow \underline{\underline{RC = 1\,\text{ms}}}$$

Realisiert kann dies werden z. B. mit $\underline{\underline{C = 1\,\mu\text{F}}}$, $\underline{\underline{R = 1\,\text{k}\Omega}}$.
Für den Inverter eignet sich z. B. $\underline{\underline{R_1 = R_2 = 10\,\text{k}\Omega}}$.

19.9 Aktive Filter

Aufgabe 19.30
Die Schaltung in Abb. 19.58 mit einem idealen Operationsverstärker ist ein aktives Filter.
Bestimmen Sie $\frac{U_a}{U_e}$ in Abhängigkeit der Kreisfrequenz ω für $R_1C_1 = R_2C_2 = RC$.

Lösung
In den N-Eingang des OPV fließt kein Strom, somit ist $I_1 = -I_2$. Außerdem liegt der N-Eingang virtuell auf Masse. Deshalb lassen sich die Ströme durch die Spannungen und

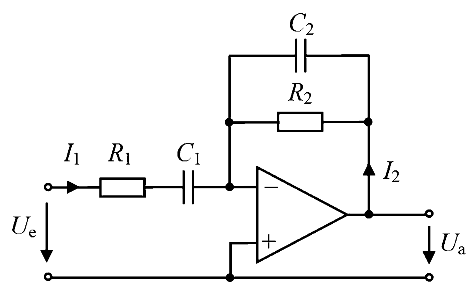


Abb. 19.58 Aktives Filter

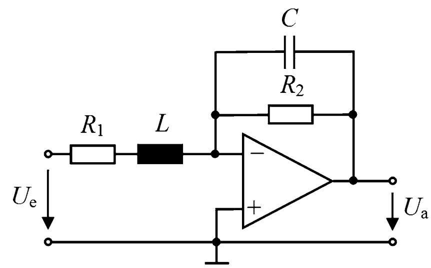


Abb. 19.59 Gegebene Schaltung

die Zweigwiderstände ausdrücken.

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_\mathrm{e}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}}; \quad -\underline{I}_2 = \frac{-\underline{U}_\mathrm{a}}{\frac{1}{\frac{1}{R_2}+j\omega C_2}};$$

$$\text{Gleichsetzen ergibt } \frac{\underline{U}_\mathrm{e}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{-\underline{U}_\mathrm{a}}{\frac{1}{\frac{1}{R_2}+j\omega C_2}}$$

$$\frac{\underline{U}_\mathrm{a}}{\underline{U}_\mathrm{e}} = -\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{R_2}+j\omega C_2}\cdot\left(R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}\right)} = \frac{j\omega R_2 C_1}{(1+j\omega R_1 C_1)(1+j\omega R_2 C_2)}$$

Mit $R_1 C_1 = R_2 C_2 = RC$ folgt:

$$\frac{\underline{U}_\mathrm{a}}{\underline{U}_\mathrm{e}} = -\frac{j\omega R_2 C_1}{(1+j\omega RC)^2} = -\frac{j\omega R_2 C_1}{1-(\omega RC)^2 + j2\omega RC}$$

$$\frac{U_\mathrm{a}}{U_\mathrm{e}} = \left|\frac{\underline{U}_\mathrm{a}}{\underline{U}_\mathrm{e}}\right| = \frac{\omega R_2 C_1}{\sqrt{(1-(\omega RC)^2)^2 + (2\omega RC)^2}}$$

$$= \frac{\omega R_2 C_1}{\sqrt{1-2(\omega RC)^2 + (\omega RC)^4 + 4(\omega RC)^2}}$$

$$\frac{U_\mathrm{a}}{U_\mathrm{e}} = \frac{\omega R_2 C_1}{\sqrt{1+2(\omega RC)^2 + (\omega RC)^4}} = \frac{\omega R_2 C_1}{\sqrt{(1+(\omega RC)^2)^2}}; \quad \underline{\underline{\frac{U_\mathrm{a}}{U_\mathrm{e}} = \frac{\omega R_2 C_1}{1+(\omega RC)^2}}}$$

Aufgabe 19.31
Gegeben ist die Schaltung in Abb. 19.59 mit einem idealen Operationsverstärker.

a) Bestimmen Sie den komplexen Frequenzgang (die Übertragungsfunktion $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_\mathrm{a}}{\underline{U}_\mathrm{e}}$).
b) Welche Filterfunktion ergibt sich?
c) Bestimmen Sie die Pol- und Nullstellen der Übertragungsfunktion.
d) Welche Bedeutung haben allgemein Pole und Nullstellen einer Übertragungsfunktion?

Lösung

a) Der OPV wird in der Grundschaltung eines invertierenden Verstärkers betrieben, die verstärkungsbestimmenden Widerstände sind hier allerdings die komplexen Widerstände $R_1 + L$ und $R_2 \parallel C$ (symbolisch geschrieben).

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_\text{a}}{\underline{U}_\text{e}} = -\frac{R_2 \parallel C}{R_1 + j\omega L} = -\frac{\frac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}}}{R_1 + j\omega L} = -\frac{\frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C}}{R_1 + j\omega L}$$

$$= \underline{\underline{-\frac{R_2}{(R_1 + j\omega L)(1 + j\omega R_2 C)}}}$$

b) Es handelt sich um einen Tiefpass zweiter Ordnung. Hat die Eingangsspannung U_e die Frequenz $f = 0$ (Gleichspannung), so erhält man aus der Übertragungsfunktion die Verstärkung $V = -\frac{U_\text{a}}{U_\text{e}} = -\frac{R_2}{R_1}$. Wird die Frequenz unendlich groß, so wird der Nenner unendlich groß, der Bruch (und damit die Ausgangsspannung U_a) also zu null. Die zweite Ordnung ergibt sich durch die zwei Energiespeicher L und C. Die zweite Ordnung kann man auch aus der zweiten Potenz von s erkennen, wenn man $j\omega = s$ setzt und den Nenner ausmultipliziert. Im Nenner erscheint dann ein Term mit s^2.

c) Der Zähler der Übertragungsfunktion ist unabhängig von der Frequenz f und kann somit für keinen Wert von f zu null werden. Die Übertragungsfunktion hat keine Nullstellen. Die Pole ergeben sich aus den Lösungen (den Nullstellen) des Nennerpolynoms. Im vorliegenden Fall können die Pole aus den Linearfaktoren des Nenners leicht bestimmt werden, indem diese einzeln zu null gesetzt werden.

$$R_1 + j\omega_{1\infty} L = 0; \quad j\omega_{1\infty} = -\frac{R_1}{L}; \quad \omega_{1\infty} = j\frac{R_1}{L}; \quad |\omega_{1\infty}| = \omega_{1\infty} = \frac{R_1}{L};$$

$$\underline{\underline{f_{1\infty} = \frac{R_1}{2\pi L}}}$$

$$1 + j\omega_{2\infty} R_2 C = 0; \quad j\omega_{2\infty} = -\frac{1}{R_2 C}; \quad \underline{\underline{f_{2\infty} = \frac{1}{2\pi R_2 C}}}$$

d) Wird ein Netzwerk mit einer Eingangsspannung gespeist, deren Frequenz gleich der Frequenz einer Nullstelle ist, so wird die Ausgangsspannung zu null. Ist die Frequenz der Eingangsspannung gleich der Frequenz eines Poles, so wird die Ausgangsspannung (theoretisch) unendlich groß.

Aufgabe 19.32

Gegeben ist die aktive Filterschaltung mit idealen Operationsverstärkern in Abb. 19.60.

a) Welche Funktion hat der Operationsverstärker OPV1?

b) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $\underline{H}_1(j\omega) = \frac{\underline{U}_\text{a1}}{\underline{U}_\text{e}}$ von Teilfilter 1 und $\underline{H}_2(j\omega) = \frac{\underline{U}_\text{a}}{\underline{U}_\text{a1}}$ von Teilfilter 2.

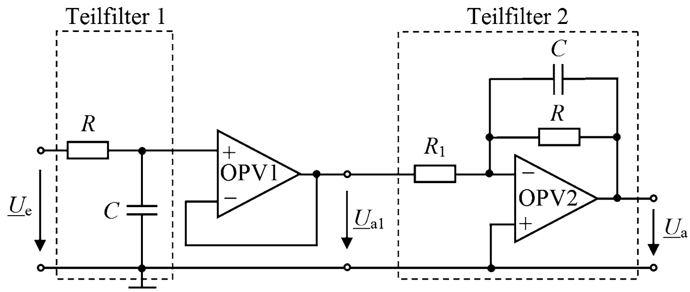


Abb. 19.60 Schaltung eines aktiven Filters

c) Bestimmen Sie die gesamte Übertragungsfunktion $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}$ der Filterschaltung. Stellen Sie $\underline{H}(j\omega)$ in der Form $\underline{H}(j\omega) = H_0 \cdot \frac{1}{1+j\omega a_1+\omega^2 a_2}$ dar. Geben Sie H_0, a_1 und a_2 an.

d) Die Schaltung soll eine Gleichspannungsverstärkung von 0 dB besitzen. Jede der Filterstufen soll eine Grenzfrequenz $f_g = 1000\,\text{Hz}$ haben. Der Wert der Kondensatoren ist $C = 10\,\text{nF}$. Bestimmen Sie die Werte für R und R_1.

e) Welche Art von Filter (Filterfunktion) stellt die Schaltung dar?

Lösung

a) OPV1 ist ein Impedanzwandler zur Entkopplung von Teilfilter 1 und Teilfilter 2. Der Eingangswiderstand R_1 von Teilfilter 2 (dessen Grundschaltung ist ein invertierender Verstärker) würde sonst die Spannung an C am Eingang von OPV1 belasten, er wäre parallel zu diesem C geschaltet (der invertierende Eingang von OPV2 ist virtuelle Masse).

b)

$$\underline{U}_{a1} = \underline{U}_e \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \underline{U}_e \cdot \frac{1}{1 + j\omega RC}; \quad \underline{H}_1(j\omega) = \frac{\underline{U}_{a1}}{\underline{U}_e} = \underline{\underline{\frac{1}{1 + j\omega RC}}}$$

$$\underline{H}_2(j\omega) = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_{a1}} = -\frac{R \parallel C}{R_1} = -\frac{\frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}}{R_1} = -\frac{\frac{\frac{R}{j\omega C}}{\frac{1+j\omega RC}{j\omega C}}}{R_1} = \underline{\underline{-\frac{R/R_1}{1 + j\omega RC}}}$$

c) Die Übertragungsfunktion von in Reihe geschalteten (kaskadierten) linearen Systemen ergibt sich aus der Multiplikation der Übertragungsfunktionen der einzelnen Systeme. Um die Gesamtverstärkung von kaskadierten Systemen zu erhalten, gilt:

1. Sind die einzelnen Verstärkungen als lineare *Verstärkungsfaktoren* gegeben, so werden diese miteinander *multipliziert*.
2. Sind die einzelnen Verstärkungen als logarithmisches *Übertragungsmaß* in dB gegeben, so werden diese *summiert*.

$$\underline{H}(j\omega) = \underline{H}_1(j\omega) \cdot \underline{H}_2(j\omega) = \frac{\underline{U}_{a1}}{\underline{U}_e} \cdot \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_{a1}} = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \cdot \frac{-R/R_1}{1 + j\omega RC} = \underline{\underline{-\frac{R}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega 2RC - \omega^2 R^2 C^2}}}$$

$$\underline{\underline{H_0 = -\frac{R}{R_1}}}; \quad \underline{\underline{a_1 = 2RC}}; \quad \underline{\underline{a_2 = -R^2 C^2}}$$

d) Bei der Grenzfrequenz f_g ist die Ausgangsspannung bzw. der Betrag der Übertragungsfunktion auf das $1/\sqrt{2}$-fache abgefallen.

$$|\underline{H}_1(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \Rightarrow \omega_g = \frac{1}{RC}$$

$$|\underline{H}_2(j\omega)| = \frac{R/R_1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \Rightarrow \omega_g = \frac{1}{RC} \text{ und } \frac{R}{R_1} = 1. \text{ Somit muss gelten: } \underline{\underline{R = R_1}}$$

$$2\pi f = \frac{1}{RC}; \quad R = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi \cdot 1000\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 10 \cdot 10^{-9}\,\frac{\mathrm{s}}{\Omega}}; \quad \underline{\underline{R = 15{,}9\,\mathrm{k}\Omega}}$$

e) Die Schaltung ist ein Tiefpass zweiter Ordnung, der aus zwei Tiefpässen erster Ordnung mit jeweils gleicher Grenzfrequenz aufgebaut ist.

Sachverzeichnis

L. Stiny, *Aufgabensammlung zur Elektrotechnik und Elektronik*,
DOI 10.1007/978-3-658-14381-7

F

G

T