



Wilfried Pläßmann  
Detlef Schulz *Hrsg.*

# Handbuch Elektrotechnik

Grundlagen und Anwendungen  
für Elektrotechniker

*6. Auflage*



---

Wilfried Pläßmann • Detlef Schulz (Hrsg.)

# Handbuch Elektrotechnik

Grundlagen und Anwendungen  
für Elektrotechniker

6., neu bearbeitete Auflage

Mit 1747 Abbildungen und 287 Tabellen

*Herausgeber*

Prof. em. Dr. Wilfried Pläßmann  
Bad Nenndorf, Deutschland

Prof. Dr.-Ing. Detlef Schulz  
Hamburg, Deutschland

ISBN 978-3-8348-1021-2  
DOI 10.1007/978-3-8348-2071-6

ISBN 978-3-8348-2071-6 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Springer Fachmedien Wiesbaden 1999, 2002, 2004, 2007, diese Auflagen erschienen unter dem Titel „Böge/Pläßmann, Vieweg Handbuch Elektrotechnik“, 2009, 2013

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Vieweg ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.  
[www.springer-vieweg.de](http://www.springer-vieweg.de)



|                                  |           |
|----------------------------------|-----------|
| <b>Mathematik</b>                | 1– 140    |
| <b>Physik</b>                    | 141– 192  |
| <b>Werkstoffkunde</b>            | 193– 230  |
| <b>Elektrotechnik</b>            | 231– 296  |
| <b>Elektronik</b>                | 297– 424  |
| <b>Technische Kommunikation</b>  | 425– 464  |
| <b>Datentechnik</b>              | 465– 642  |
| <b>Automatisierungstechnik</b>   | 643– 688  |
| <b>Regelungstechnik</b>          | 689– 716  |
| <b>Messtechnik</b>               | 717– 792  |
| <b>Energietechnik</b>            | 793– 900  |
| <b>Nachrichtentechnik</b>        | 901–1088  |
| <b>Signal- und Systemtheorie</b> | 1089–1128 |
| <b>Sachwortverzeichnis</b>       | 1129–1143 |

Wilfried Pläßmann, Detlef Schulz (Hrsg.)

## **Handbuch Elektrotechnik**

Beiträge und Mitarbeiter

---

|                                  |                                                             |
|----------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| <b>Mathematik</b>                | Prof. Dr. Arnfried Kemnitz                                  |
| <b>Physik</b>                    | Dr. Horst Steffen                                           |
| <b>Werkstoffkunde</b>            | Prof. Dipl.-Ing. Egon Döring                                |
| <b>Elektrotechnik</b>            | Reinhard von Liebenstein<br>Dr. Horst Steffen               |
| <b>Elektronik</b>                | Peter Döring                                                |
| <b>Technische Kommunikation</b>  | Peter Döring                                                |
| <b>Datentechnik</b>              | Prof. Dr. Ulrich Lindemann<br>Heribert Gierens †            |
| <b>Automatisierungstechnik</b>   | Günter Wellenreuther<br>Dieter Zastrow                      |
| <b>Regelungstechnik</b>          | Prof. Dr.-Ing. Joachim Horn                                 |
| <b>Messtechnik</b>               | Prof. Dr. Wilfried Pläßmann                                 |
| <b>Energietechnik</b>            | Reinhard von Liebenstein                                    |
| <b>Nachrichtentechnik</b>        | Prof. Dipl.-Ing. Egon Döring<br>Prof. Dr. Wilfried Pläßmann |
| <b>Signal- und Systemtheorie</b> | Prof. Dr. Wilfried Pläßmann                                 |

---

## Vorwort

Das *Handbuch Elektrotechnik* erscheint nunmehr in der 6. Auflage. Es wurde anfangs sowohl als studienbegleitendes Werk als auch als Nachschlagewerk für die Praxis konzipiert. Das Konzept hat sich bewährt und ist auch in dieser Auflage beibehalten worden.

Das Werk wurde gegenüber der 5. Auflage neu bearbeitet. Bewährte Kapitel, die die Grundlagen behandeln, wie Mathematik, Physik, Technische Kommunikation und Signal- und Systemtheorie, wurden belassen oder in geringem Umfang durch neue Kapitel ergänzt oder ersetzt. Kapitel, die vermehrt der technischen Entwicklung unterliegen, wurden neu bearbeitet und aktualisiert. Der Einsatz der Digitaltechnik in der Daten- und Nachrichtentechnik wurde dem Stand der Technik angepasst.

Das Kapitel *Regelungstechnik* wurde neu aufgenommen.

Das Handbuch ist als Informationsbasis für Studierende und in der Praxis tätige Ingenieure und Techniker ausgelegt. In diesem Werk finden die Anwender alle notwendigen Formeln, Hinweise, Tabellen, Schaltpläne und Normen. Zur Sicherung sachkundiger Anwendungen werden wichtige Berechnungsgleichungen ausführlich hergeleitet. Zahlreiche anwendungsbezogene Beispiele in jedem Kapitel erhöhen das Verständnis für die oft komplexen Zusammenhänge und geben die zur Problemlösung unerlässliche Sicherheit.

Die Herausgeber danken für die kritischen Anmerkungen zum Buch und sind auch weiterhin für Anregungen und Verbesserungsvorschläge dankbar. Weiterhin danken sie dem Verlag für die gute Zusammenarbeit bei der Realisierung des umfangreichen Werkes.

Die E-Mail-Adressen der Herausgeber lauten:

wilfried.plassmann@hs-hannover.de  
detlef.schulz@hsu-hh.de

Hannover/Hamburg, September 2012

Wilfried Pläßmann/Detlef Schulz  
Herausgeber

# Inhaltsverzeichnis

## Mathematik

|           |                                                            |    |
|-----------|------------------------------------------------------------|----|
| <b>I</b>  | <b>Arithmetik</b>                                          | 1  |
| 1         | Mengen                                                     | 1  |
| 2         | Aussageformen und logische Zeichen                         | 1  |
| 2.1       | Aussageformen                                              | 1  |
| 2.2       | Logische Zeichen                                           | 1  |
| 2.3       | Vollständige Induktion                                     | 2  |
| 3         | Einteilung der Zahlen                                      | 2  |
| 4         | Grundrechenarten                                           | 3  |
| 5         | Grundlegende Rechenregeln                                  | 4  |
| 5.1       | Buchstabenrechnen                                          | 4  |
| 5.2       | Kehrwert, Quersumme                                        | 4  |
| 5.3       | Teilbarkeitsregeln                                         | 4  |
| 5.4       | Punktrechnung vor Strichrechnung                           | 4  |
| 5.5       | Potenzrechnung vor Punktrechnung                           | 4  |
| 5.6       | Grundgesetze der Addition und Multiplikation               | 5  |
| 5.7       | Indizes, Summenzeichen, Produktzeichen                     | 5  |
| 5.8       | Binomische Formeln                                         | 5  |
| 5.9       | IFakultäten, Binomialkoeffizienten und Pascalsches Dreieck | 6  |
| 5.10      | Binomischer Lehrsatz                                       | 6  |
| 6         | Potenz- und Wurzelrechnung                                 | 7  |
| 6.1       | Definition der Potenz                                      | 7  |
| 6.2       | Regeln der Potenzrechnung                                  | 7  |
| 6.3       | Definition der Wurzel                                      | 9  |
| 6.4       | Regeln der Wurzelrechnung                                  | 9  |
| 7         | Dezimalzahlen und Dualzahlen                               | 11 |
| 7.1       | Dezimalsystem                                              | 11 |
| 7.2       | Dualsystem                                                 | 11 |
| 7.3       | Runden                                                     | 12 |
| 8         | Logarithmen                                                | 12 |
| 8.1       | Definition des Logarithmus                                 | 12 |
| 8.2       | Spezielle Basen                                            | 12 |
| 8.3       | Regeln der Logarithmenrechnung                             | 13 |
| 8.4       | Zusammenhang von Logarithmen mit verschiedenen Basen       | 13 |
| 8.5       | Dekadische Logarithmen                                     | 14 |
| 9         | Ungleichungen                                              | 14 |
| 9.1       | Definitionen und Rechenregeln                              | 14 |
| 9.2       | Absolutbetrag                                              | 15 |
| 9.3       | Intervalle                                                 | 15 |
| 10        | Komplexe Zahlen                                            | 16 |
| 10.1      | Algebraische Form                                          | 16 |
| 10.2      | Trigonometrische Form                                      | 17 |
| 10.3      | Addieren und Subtrahieren komplexer Zahlen                 | 17 |
| 10.4      | Multiplizieren komplexer Zahlen                            | 18 |
| 10.5      | Dividieren komplexer Zahlen                                | 18 |
| 10.6      | Potenzieren komplexer Zahlen                               | 19 |
| 10.7      | Radizieren komplexer Zahlen                                | 19 |
| 10.8      | Eulersche Formel                                           | 20 |
| <b>II</b> | <b>Gleichungen</b>                                         | 20 |
| 1         | Gleichungsarten                                            | 20 |
| 2         | Äquivalente Umformungen                                    | 22 |
| 3         | Lineare Gleichungen                                        | 22 |

|            |                                                                |    |
|------------|----------------------------------------------------------------|----|
| <b>4</b>   | <b>Proportionen</b>                                            | 23 |
| <b>5</b>   | <b>Quadratische Gleichungen</b>                                | 23 |
| 5.1        | Definitionen                                                   | 23 |
| 5.2        | Lösungsverfahren                                               | 24 |
| 5.2.1      | Normalform                                                     | 24 |
| 5.2.2      | Allgemeine Formen                                              | 25 |
| 5.2.3      | Zerlegung in Linearfaktoren                                    | 25 |
| 5.3        | Satz von Viëta für quadratische Gleichungen                    | 25 |
| <b>6</b>   | <b>Algebraische Gleichungen höheren Grades</b>                 | 26 |
| 6.1        | Kubische Gleichungen                                           | 26 |
| 6.2        | Polynomdivision                                                | 27 |
| 6.3        | Gleichungen vierten Grades                                     | 27 |
| 6.4        | Gleichungen $n$ -ten Grades                                    | 29 |
| 6.5        | Satz von Viëta für Gleichungen $n$ -ten Grades                 | 29 |
| <b>7</b>   | <b>Auf algebraische Gleichungen zurückföhrbare Gleichungen</b> | 30 |
| 7.1        | Bruchgleichungen                                               | 30 |
| 7.2        | Wurzelgleichungen                                              | 30 |
| <b>8</b>   | <b>Transzendente Gleichungen</b>                               | 31 |
| 8.1        | Exponentialgleichungen                                         | 31 |
| 8.2        | Logarithmische Gleichungen                                     | 32 |
| 8.3        | Trigonometrische Gleichungen                                   | 32 |
| <b>9</b>   | <b>Lineare Gleichungssysteme</b>                               | 33 |
| 9.1        | Definitionen                                                   | 33 |
| 9.2        | Zwei lineare Gleichungen mit zwei Variablen                    | 33 |
| 9.3        | Drei lineare Gleichungen mit drei Variablen                    | 34 |
| 9.4        | Matrizen und Determinanten                                     | 35 |
| <b>III</b> | <b>Planimetrie</b>                                             | 40 |
| <b>1</b>   | <b>Geraden und Strecken</b>                                    | 40 |
| <b>2</b>   | <b>Winkel</b>                                                  | 41 |
| <b>3</b>   | <b>Projektion</b>                                              | 42 |
| <b>4</b>   | <b>Geometrische Örter</b>                                      | 43 |
| <b>5</b>   | <b>Dreiecke</b>                                                | 43 |
| 5.1        | Allgemeine Dreiecke                                            | 43 |
| 5.2        | Gleichschenklige Dreiecke                                      | 44 |
| 5.3        | Gleichseitige Dreiecke                                         | 44 |
| 5.4        | Rechtwinklge Dreiecke                                          | 44 |
| 5.5        | Besondere Geraden, Strecken und Kreise                         | 44 |
| 5.6        | Flächensätze im rechtwinkligen Dreieck                         | 46 |
| <b>6</b>   | <b>Vierecke</b>                                                | 48 |
| 6.1        | Allgemeine Vierecke                                            | 48 |
| 6.2        | Trapeze                                                        | 48 |
| 6.3        | Parallelogramme                                                | 49 |
| 6.4        | Rhomben                                                        | 49 |
| 6.5        | Rechtecke                                                      | 49 |
| 6.6        | Quadrate                                                       | 49 |
| 6.7        | Drachen                                                        | 50 |
| 6.8        | Sehnenvierecke                                                 | 50 |
| 6.9        | Tangentenvierecke                                              | 50 |
| <b>7</b>   | <b>Reguläre <math>n</math>-Ecke</b>                            | 50 |
| <b>8</b>   | <b>Polygone</b>                                                | 52 |
| <b>9</b>   | <b>Kreise</b>                                                  | 52 |
| 9.1        | Definitionen                                                   | 52 |
| 9.2        | Kreissectoren                                                  | 53 |
| 9.3        | Kreissegmente                                                  | 53 |
| 9.4        | Kreise und Geraden                                             | 53 |
| 9.5        | Bogenmaß                                                       | 54 |

|           |                                                    |    |
|-----------|----------------------------------------------------|----|
| <b>10</b> | <b>Symmetrie</b>                                   | 54 |
| 10.1      | Punktsymmetrie                                     | 54 |
| 10.2      | Achsensymmetrie                                    | 54 |
| <b>11</b> | <b>Ähnlichkeit</b>                                 | 54 |
| 11.1      | Zentrische Streckung                               | 54 |
| 11.2      | Strahlensätze                                      | 55 |
| 11.3      | Ähnliche Figuren                                   | 55 |
| <b>IV</b> | <b>Stereometrie</b>                                | 56 |
| <b>1</b>  | <b>Prismen</b>                                     | 56 |
| 1.1       | Allgemeine Prismen                                 | 56 |
| 1.2       | Parallelepiped und Würfel                          | 57 |
| <b>2</b>  | <b>Zylinder</b>                                    | 57 |
| 2.1       | Allgemeine Zylinder                                | 57 |
| 2.2       | Gerade Kreiszylinder                               | 57 |
| 2.3       | Hohlzylinder                                       | 58 |
| <b>3</b>  | <b>Pyramiden</b>                                   | 58 |
| 3.1       | Allgemeine Pyramiden                               | 58 |
| 3.2       | Gerade quadratische Pyramiden                      | 59 |
| <b>4</b>  | <b>Kegel</b>                                       | 59 |
| 4.1       | Allgemeine Kegel                                   | 59 |
| 4.2       | Gerade Kreiskegel                                  | 59 |
| <b>5</b>  | <b>Cavalierisches Prinzip</b>                      | 59 |
| <b>6</b>  | <b>Kugeln</b>                                      | 59 |
| 6.1       | Definitionen                                       | 59 |
| 6.2       | Kugelsegmente                                      | 61 |
| 6.3       | Kugelsektoren                                      | 61 |
| 6.4       | Kugelschichten                                     | 61 |
| <b>V</b>  | <b>Funktionen</b>                                  | 62 |
| <b>1</b>  | <b>Definition und Darstellungen von Funktionen</b> | 62 |
| 1.1       | Definitionen                                       | 62 |
| 1.2       | Funktionsgleichung                                 | 62 |
| 1.3       | Graph einer Funktion                               | 63 |
| 1.4       | Wertetabelle einer Funktion                        | 63 |
| <b>2</b>  | <b>Verhalten von Funktionen</b>                    | 63 |
| 2.1       | Monotone Funktionen                                | 63 |
| 2.2       | Symmetrische Funktionen                            | 64 |
| 2.3       | Beschränkte Funktionen                             | 64 |
| 2.4       | Injektive Funktionen                               | 64 |
| 2.5       | Surjektive Funktionen                              | 65 |
| 2.6       | Bijektive Funktionen                               | 65 |
| 2.7       | Periodische Funktionen                             | 65 |
| 2.8       | Umkehrfunktionen                                   | 65 |
| 2.9       | Reelle und komplexe Funktionen                     | 66 |
| <b>3</b>  | <b>Einteilung der elementaren Funktionen</b>       | 66 |
| <b>4</b>  | <b>Ganze rationale Funktionen</b>                  | 67 |
| 4.1       | Konstante Funktionen                               | 67 |
| 4.2       | Lineare Funktionen                                 | 68 |
| 4.3       | Quadratische Funktionen                            | 69 |
| 4.4       | Kubische Funktionen                                | 73 |
| 4.5       | Ganze rationale Funktionen $n$ -ten Grades         | 73 |
| 4.6       | Horner-Schema                                      | 74 |
| <b>5</b>  | <b>Gebrochene rationale Funktionen</b>             | 75 |
| 5.1       | Nullstellen, Pole, Asymptoten                      | 75 |
| 5.2       | Partialbruchzerlegung                              | 78 |
| <b>6</b>  | <b>Irrationale Funktionen</b>                      | 79 |

|             |                                                         |     |
|-------------|---------------------------------------------------------|-----|
| <b>7</b>    | <b>Transzendente Funktionen</b>                         | 80  |
| 7.1         | Exponentialfunktionen                                   | 80  |
| 7.2         | Logarithmusfunktionen                                   | 81  |
| <b>VI</b>   | <b>Trigonometrie</b>                                    | 82  |
| <b>1</b>    | <b>Definition der trigonometrischen Funktionen</b>      | 82  |
| <b>2</b>    | <b>Trigonometrische Funktionen für beliebige Winkel</b> | 83  |
| <b>3</b>    | <b>Beziehungen für den gleichen Winkel</b>              | 84  |
| <b>4</b>    | <b>Graphen der trigonometrischen Funktionen</b>         | 85  |
| <b>5</b>    | <b>Reduktionsformeln</b>                                | 86  |
| <b>6</b>    | <b>Additionstheoreme</b>                                | 86  |
| <b>7</b>    | <b>Sinussatz und Kosinussatz</b>                        | 87  |
| <b>8</b>    | <b>Arkusfunktionen</b>                                  | 88  |
| <b>VII</b>  | <b>Analytische Geometrie</b>                            | 90  |
| <b>1</b>    | <b>Koordinatensysteme</b>                               | 90  |
| 1.1         | Kartesisches Koordinatensystem der Ebene                | 90  |
| 1.2         | Polarkoordinatensystem der Ebene                        | 90  |
| 1.3         | Zusammenhang zwischen kartesischen und Polarkoordinaten | 91  |
| 1.4         | Kartesisches Koordinatensystem des Raums                | 92  |
| <b>2</b>    | <b>Geraden</b>                                          | 92  |
| 2.1         | Geradengleichungen                                      | 92  |
| 2.2         | Abstände                                                | 94  |
| <b>3</b>    | <b>Kreise</b>                                           | 95  |
| 3.1         | Kreisgleichungen                                        | 95  |
| 3.2         | Berechnung von Kreisen                                  | 96  |
| <b>4</b>    | <b>Kugeln</b>                                           | 97  |
| <b>5</b>    | <b>Kegelschnitte</b>                                    | 97  |
| 5.1         | Ellipsen                                                | 98  |
| 5.2         | Hyperbeln                                               | 99  |
| 5.3         | Parabeln                                                | 101 |
| 5.4         | Anwendungen                                             | 102 |
| <b>6</b>    | <b>Vektoren</b>                                         | 103 |
| 6.1         | Definitionen                                            | 103 |
| 6.2         | Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar           | 103 |
| 6.3         | Addition und Subtraktion zweier Vektoren                | 103 |
| 6.4         | Komponentendarstellung von Vektoren in der Ebene        | 104 |
| 6.5         | Komponentendarstellung von Vektoren im Raum             | 104 |
| 6.6         | Skalarprodukt                                           | 105 |
| 6.7         | Vektorprodukt                                           | 106 |
| 6.8         | Spatprodukt                                             | 106 |
| <b>VIII</b> | <b>Differential- und Integralrechnung</b>               | 107 |
| <b>1</b>    | <b>Folgen</b>                                           | 107 |
| 1.1         | Grundbegriffe                                           | 107 |
| 1.2         | Arithmetische Folgen                                    | 108 |
| 1.3         | Geometrische Folgen                                     | 108 |
| 1.4         | Grenzwert einer Folge                                   | 108 |
| 1.5         | Tabelle einiger Grenzwerte                              | 109 |
| 1.6         | Divergente Folgen                                       | 109 |
| <b>2</b>    | <b>Reihen</b>                                           | 109 |
| 2.1         | Definitionen                                            | 109 |
| 2.2         | Arithmetische Reihen                                    | 110 |
| 2.3         | Geometrische Reihen                                     | 111 |
| 2.4         | Harmonische Reihen                                      | 111 |
| 2.5         | Alternierende Reihen                                    | 112 |
| <b>3</b>    | <b>Grenzwerte von Funktionen</b>                        | 112 |
| 3.1         | Grenzwert an einer endlichen Stelle                     | 112 |

|               |                                                                   |            |
|---------------|-------------------------------------------------------------------|------------|
| 3.2           | Einseitige Grenzwerte . . . . .                                   | 112        |
| 3.3           | Grenzwert im Unendlichen . . . . .                                | 113        |
| 3.4           | Rechenregeln für Grenzwerte . . . . .                             | 113        |
| 3.5           | Unbestimmte Ausdrücke . . . . .                                   | 113        |
| 3.6           | Stetigkeit einer Funktion . . . . .                               | 114        |
| 3.7           | Unstetigkeitsstellen . . . . .                                    | 114        |
| <b>4</b>      | <b>Ableitung einer Funktion . . . . .</b>                         | <b>115</b> |
| 4.1           | Definitionen . . . . .                                            | 115        |
| 4.2           | Differentiationsregeln . . . . .                                  | 116        |
| 4.3           | Höhere Ableitungen . . . . .                                      | 118        |
| 4.4           | Ableitungen einiger algebraischer Funktionen . . . . .            | 118        |
| 4.5           | Ableitungen einiger transzendenter Funktionen. . . . .            | 118        |
| 4.5.1         | Trigonometrische Funktionen . . . . .                             | 118        |
| 4.5.2         | Logarithmusfunktionen . . . . .                                   | 119        |
| 4.5.3         | Exponentialfunktionen . . . . .                                   | 119        |
| 4.5.4         | Zusammenfassende Übersicht. . . . .                               | 120        |
| 4.6           | Sekanten und Tangenten. . . . .                                   | 120        |
| 4.7           | Extremwerte von Funktionen . . . . .                              | 120        |
| 4.8           | Krümmungsverhalten von Funktionen . . . . .                       | 121        |
| 4.9           | Wendepunkte von Funktionen . . . . .                              | 121        |
| 4.10          | Kurvendiskussion . . . . .                                        | 122        |
| 4.11          | Anwendungsbeispiele . . . . .                                     | 122        |
| 4.12          | Näherungsverfahren zur Nullstellenbestimmung . . . . .            | 123        |
| 4.12.1        | Regula falsi . . . . .                                            | 123        |
| 4.12.2        | Newtonsches Verfahren . . . . .                                   | 124        |
| <b>5</b>      | <b>Integralrechnung. . . . .</b>                                  | <b>124</b> |
| 5.1           | Unbestimmtes Integral . . . . .                                   | 124        |
| 5.2           | Integrationsregeln . . . . .                                      | 125        |
| 5.3           | Unbestimmte Integrale einiger algebraischer Funktionen . . . . .  | 127        |
| 5.4           | Unbestimmte Integrale einiger transzendenter Funktionen . . . . . | 127        |
| 5.5           | Bestimmtes Integral . . . . .                                     | 127        |
| 5.6           | Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. . . . .         | 128        |
| 5.7           | Eigenschaften des bestimmten Integrals . . . . .                  | 128        |
| 5.8           | Einige Anwendungen der Integralrechnung . . . . .                 | 129        |
| <b>6</b>      | <b>Funktionenreihen . . . . .</b>                                 | <b>131</b> |
| 6.1           | Definitionen . . . . .                                            | 131        |
| 6.2           | Potenzreihen . . . . .                                            | 132        |
| 6.3           | Fourier-Reihen . . . . .                                          | 133        |
| <b>Anhang</b> |                                                                   |            |
| <b>A</b>      | <b>Symbole und Bezeichnungsweisen . . . . .</b>                   | <b>137</b> |
| <b>B</b>      | <b>Das griechische Alphabet . . . . .</b>                         | <b>139</b> |

## Physik

|           |                                              |            |
|-----------|----------------------------------------------|------------|
| <b>I</b>  | <b>Einführung. . . . .</b>                   | <b>141</b> |
| <b>1</b>  | <b>Physikalische Größen . . . . .</b>        | <b>141</b> |
| 1.1       | Skalare . . . . .                            | 141        |
| 1.2       | Vektoren . . . . .                           | 141        |
| <b>2</b>  | <b>SI – System . . . . .</b>                 | <b>141</b> |
| <b>II</b> | <b>Mechanik. . . . .</b>                     | <b>142</b> |
| <b>1</b>  | <b>Kinematik des Massenpunktes . . . . .</b> | <b>142</b> |
| 1.1       | Eindimensionale Bewegungen. . . . .          | 142        |
| 1.1.1     | Geschwindigkeit . . . . .                    | 142        |
| 1.1.2     | Beschleunigung . . . . .                     | 143        |
| 1.1.3     | Freier Fall . . . . .                        | 143        |
| 1.1.4     | Senkrechter Wurf. . . . .                    | 144        |
| 1.2       | Zusammengesetzte Bewegungen. . . . .         | 144        |
| 1.2.1     | Schiefer Wurf . . . . .                      | 145        |



|            |                                                               |            |
|------------|---------------------------------------------------------------|------------|
| 1.3        | Kreisbewegung . . . . .                                       | 146        |
| 1.3.1      | Bahngeschwindigkeit . . . . .                                 | 146        |
| 1.3.2      | Winkelgeschwindigkeit . . . . .                               | 146        |
| 1.3.3      | Kreisfrequenz . . . . .                                       | 146        |
| 1.3.4      | Winkelbeschleunigung . . . . .                                | 146        |
| <b>2</b>   | <b>Dynamik . . . . .</b>                                      | <b>147</b> |
| 2.1        | Newtonsche Axiome . . . . .                                   | 147        |
| 2.2        | Kraft . . . . .                                               | 147        |
| 2.2.1      | Zerlegung und Zusammensetzung von Kräften. . . . .            | 147        |
| 2.2.2      | Schiefe Ebene . . . . .                                       | 148        |
| 2.2.3      | Kräfte bei Kreisbewegungen. . . . .                           | 149        |
| 2.3        | Impuls. . . . .                                               | 150        |
| 2.3.1      | Impulserhaltungssatz . . . . .                                | 150        |
| 2.4        | Arbeit, Leistung, Wirkungsgrad und Energie . . . . .          | 150        |
| 2.4.1      | Arbeit. . . . .                                               | 150        |
| 2.4.2      | Leistung, Wirkungsgrad . . . . .                              | 151        |
| 2.4.3      | Energie . . . . .                                             | 152        |
| 2.5        | Stoßprozesse. . . . .                                         | 152        |
| 2.5.1      | Elastischer Stoß . . . . .                                    | 152        |
| 2.5.2      | Inelastischer Stoß . . . . .                                  | 152        |
| 2.6        | Rotation . . . . .                                            | 153        |
| 2.6.1      | Drehmoment . . . . .                                          | 153        |
| 2.6.2      | Massenmittelpunkt, Schwerpunkt . . . . .                      | 153        |
| 2.6.3      | Drehimpuls . . . . .                                          | 154        |
| 2.6.4      | Trägheitsmoment . . . . .                                     | 154        |
| 2.6.5      | Rotationsenergie . . . . .                                    | 155        |
| 2.7        | Gravitation . . . . .                                         | 156        |
| <b>3</b>   | <b>Elastische Verformung fester Körper . . . . .</b>          | <b>156</b> |
| <b>4</b>   | <b>Mechanik der ruhenden Flüssigkeiten und Gase . . . . .</b> | <b>157</b> |
| 4.1        | Druck . . . . .                                               | 157        |
| 4.2        | Kompressibilität . . . . .                                    | 157        |
| 4.3        | Volumenausdehnung. . . . .                                    | 157        |
| 4.4        | Hydrostatischer Druck in Flüssigkeiten . . . . .              | 157        |
| 4.5        | Schweredruck in Gasen . . . . .                               | 158        |
| 4.6        | Auftrieb . . . . .                                            | 158        |
| <b>5</b>   | <b>Hydrodynamik . . . . .</b>                                 | <b>158</b> |
| 5.1        | Kontinuitätsgleichung . . . . .                               | 158        |
| 5.2        | Bernoulli-Gleichung . . . . .                                 | 158        |
| 5.3        | Innere Reibung . . . . .                                      | 159        |
| <b>III</b> | <b>Thermodynamik. . . . .</b>                                 | <b>159</b> |
| <b>1</b>   | <b>Grundbegriffe . . . . .</b>                                | <b>159</b> |
| <b>2</b>   | <b>Temperatur . . . . .</b>                                   | <b>159</b> |
| 2.1        | Einheiten . . . . .                                           | 159        |
| 2.2        | Temperaturmessung . . . . .                                   | 160        |
| <b>3</b>   | <b>Thermische Ausdehnung. . . . .</b>                         | <b>160</b> |
| 3.1        | Feste Stoffe . . . . .                                        | 160        |
| 3.2        | Flüssigkeiten. . . . .                                        | 160        |
| 3.3        | Gase. . . . .                                                 | 161        |
| <b>4</b>   | <b>Ideale Gase . . . . .</b>                                  | <b>161</b> |
| 4.1        | Allgemeine Zustandsgleichung idealer Gase . . . . .           | 161        |
| 4.2        | Kinetische Gastheorie . . . . .                               | 162        |
| 4.3        | Wärmeenergie . . . . .                                        | 162        |
| 4.4        | Zustandsänderungen idealer Gase. . . . .                      | 163        |
| 4.5        | Kreisprozesse . . . . .                                       | 164        |
| <b>5</b>   | <b>Wärmeübertragung . . . . .</b>                             | <b>164</b> |
| 5.1        | Wärmeleitung . . . . .                                        | 164        |
| 5.2        | Wärmeströmung . . . . .                                       | 165        |
| 5.3        | Wärmestrahlung . . . . .                                      | 165        |
| <b>IV</b>  | <b>Schwingungen . . . . .</b>                                 | <b>165</b> |
| <b>1</b>   | <b>Freie ungedämpfte harmonische Schwingungen . . . . .</b>   | <b>165</b> |
| <b>2</b>   | <b>Gedämpfte Schwingungen. . . . .</b>                        | <b>166</b> |

|             |                                               |     |
|-------------|-----------------------------------------------|-----|
| <b>3</b>    | <b>Erzwungene Schwingungen</b>                | 166 |
| <b>4</b>    | <b>Überlagerung harmonischer Schwingungen</b> | 167 |
| 4.1         | Schwingungsrichtung parallel zueinander       | 167 |
| 4.2         | Schwingungsrichtung senkrecht zueinander      | 168 |
| <b>V</b>    | <b>Wellen</b>                                 | 169 |
| <b>1</b>    | <b>Harmonische Wellen</b>                     | 169 |
| 1.1         | Ausbreitung                                   | 169 |
| 1.2         | Interferenz                                   | 170 |
| <b>2</b>    | <b>Huygensches Prinzip</b>                    | 171 |
| 2.1         | Reflexion                                     | 171 |
| 2.2         | Brechung                                      | 172 |
| 2.3         | Beugung                                       | 172 |
| <b>3</b>    | <b>Dopplereffekt</b>                          | 173 |
| <b>VI</b>   | <b>Akustik</b>                                | 174 |
| <b>1</b>    | <b>Schallausbreitung</b>                      | 174 |
| <b>2</b>    | <b>Reflexion, Transmission, Absorption</b>    | 175 |
| <b>3</b>    | <b>Ultraschall</b>                            | 175 |
| <b>VII</b>  | <b>Optik</b>                                  | 176 |
| <b>1</b>    | <b>Eigenschaften des Lichtes</b>              | 176 |
| <b>2</b>    | <b>Geometrische Optik</b>                     | 176 |
| 2.1         | Reflexion des Lichtes                         | 176 |
| 2.2         | Brechungsgesetz                               | 178 |
| 2.3         | Optische Geräte                               | 182 |
| <b>3</b>    | <b>Wellenoptik</b>                            | 184 |
| 3.1         | Interferenz                                   | 184 |
| 3.2         | Beugung                                       | 185 |
| <b>4</b>    | <b>Photometrie</b>                            | 186 |
| 4.1         | Strahlungsphysikalische Größen                | 187 |
| 4.2         | Lichttechnische Größen                        | 188 |
| <b>5</b>    | <b>Licht als Korpuskel</b>                    | 189 |
| <b>VIII</b> | <b>Anhang</b>                                 | 191 |
| <b>A</b>    | <b>Physikalische Größen und Einheiten</b>     | 191 |
| <b>B</b>    | <b>Zahlenwerte physikalischer Größen</b>      | 192 |

## Werkstoffkunde

|           |                                     |     |
|-----------|-------------------------------------|-----|
| <b>I</b>  | <b>Stoffe</b>                       | 193 |
| <b>1</b>  | <b>Eigenschaften der Stoffe</b>     | 193 |
| <b>2</b>  | <b>Atombau und Periodensystem</b>   | 193 |
| <b>3</b>  | <b>Aufbau der festen Körper</b>     | 196 |
| <b>4</b>  | <b>Chemische Grundzusammenhänge</b> | 198 |
| <b>5</b>  | <b>Elektrochemie</b>                | 200 |
| <b>II</b> | <b>Elektrische Leitfähigkeit</b>    | 201 |
| <b>1</b>  | <b>Leitungsmechanismus</b>          | 201 |
| <b>2</b>  | <b>Isolator</b>                     | 202 |
| <b>3</b>  | <b>Halbleiter</b>                   | 202 |
| <b>4</b>  | <b>Normalleiter</b>                 | 203 |
| <b>5</b>  | <b>Supraleiter</b>                  | 203 |
| <b>6</b>  | <b>Halleffekt</b>                   | 204 |

|            |                                                     |     |
|------------|-----------------------------------------------------|-----|
| <b>III</b> | <b>Elektrische Leiter</b>                           | 205 |
| 1          | Normalleiter                                        | 205 |
| 2          | Halbleiter                                          | 206 |
| 3          | Supraleiter                                         | 209 |
| <b>IV</b>  | <b>Magnetische Leitfähigkeit</b>                    | 209 |
| 1          | Modellvorstellung                                   | 209 |
| 2          | Verhalten von Materie im Magnetfeld                 | 210 |
| 3          | Magnetisierung                                      | 211 |
| 4          | Magnetisierungskurve                                | 211 |
| 5          | Permeabilität                                       | 212 |
| <b>V</b>   | <b>Magnetika</b>                                    | 214 |
| 1          | Metalloxide (Ferrite)                               | 214 |
| 2          | Weichmagnetika                                      | 214 |
| 3          | Hartmagnetika (Dauermagnete)                        | 220 |
| <b>VI</b>  | <b>Dielektrische Eigenschaften</b>                  | 223 |
| 1          | Modellvorstellungen zur dielektrischen Polarisation | 223 |
| 2          | Dielektrische Materialeinteilung                    | 224 |
| 3          | Elektrische Materialeinteilung                      | 224 |
| <b>VII</b> | <b>Dielektrika</b>                                  | 226 |
| 1          | Natürliche anorganische Dielektrika                 | 226 |
| 2          | Natürliche organische Dielektrika                   | 228 |
| 3          | Künstliche anorganische Dielektrika                 | 228 |
| 4          | Künstliche organische Dielektrika                   | 229 |
| 5          | Silikone                                            | 230 |

# Grundlagen der Elektrotechnik

|           |                                                                   |     |
|-----------|-------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>I</b>  | <b>Grundbegriffe</b>                                              | 231 |
| 1         | Aufbau der Atome                                                  | 231 |
| 2         | Ladungsträger                                                     | 231 |
| 3         | Spannung                                                          | 231 |
| 4         | Strom                                                             | 231 |
| 4.1       | Bewegung von Ladungsträgern                                       | 231 |
| 4.2       | Stromstärke                                                       | 232 |
| 4.3       | Stromdichte                                                       | 232 |
| 5         | Das Ohmsche Gesetz                                                | 232 |
| 6         | Spezifischer Widerstand, Leitfähigkeit                            | 232 |
| 7         | Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes von Metallen | 233 |
| <b>II</b> | <b>Der Gleichstromkreis</b>                                       | 234 |
| 1         | Zählpfeilsysteme                                                  | 234 |
| 2         | Kirchhoffsche Gesetze                                             | 234 |
| 2.1       | Knotenregel                                                       | 234 |
| 2.2       | Maschenregel                                                      | 234 |
| 3         | Schaltung von Widerständen                                        | 235 |
| 3.1       | Reihenschaltung                                                   | 235 |
| 3.2       | Parallelschaltung                                                 | 235 |
| 3.3       | Stern-Dreieck Umwandlung                                          | 235 |
| 3.4       | Messbereichserweiterung                                           | 236 |
| 3.4.1     | Voltmeter                                                         | 236 |
| 3.4.2     | Amperemeter                                                       | 237 |

|            |                                                 |     |
|------------|-------------------------------------------------|-----|
| <b>4</b>   | <b>Reale Spannungsquelle</b>                    | 237 |
| 4.1        | Kombination von Spannungsquellen                | 237 |
| 4.1.1      | Reihenschaltung                                 | 238 |
| 4.1.2      | Parallelschaltung                               | 238 |
| <b>5</b>   | <b>Ersatzstromquelle</b>                        | 238 |
| <b>6</b>   | <b>Netzwerkberechnung</b>                       | 238 |
| 6.1        | Gemischte Schaltungen                           | 239 |
| 6.2        | Überlagerungsverfahren                          | 239 |
| 6.3        | Ersatzspannungsquelle                           | 240 |
| 6.4        | Nichtlineare Gleichstromkreise                  | 240 |
| <b>7</b>   | <b>Energie, Leistung, Wirkungsgrad</b>          | 241 |
| 7.1        | Leistungsanpassung                              | 241 |
| 7.2        | Leistungsverlust auf Leitungen                  | 242 |
| 7.3        | Wirkungsgrad                                    | 242 |
| 7.4        | Umwandlung elektrischer Energie                 | 242 |
| 7.4.1      | Wärme                                           | 242 |
| 7.4.2      | Mechanische Energie                             | 242 |
| <b>III</b> | <b>Das Elektrische Feld</b>                     | 243 |
| <b>1</b>   | <b>Grundgrößen</b>                              | 243 |
| 1.1        | Kräfte zwischen Ladungen                        | 243 |
| 1.2        | Feldstärke                                      | 244 |
| 1.3        | Feldlinien                                      | 244 |
| 1.4        | Potential, Spannung                             | 244 |
| 1.5        | Äquipotentiallinien                             | 245 |
| 1.6        | Elektrischer Fluss                              | 245 |
| 1.7        | Energie geladener Teilchen im elektrischen Feld | 245 |
| <b>2</b>   | <b>Materie im elektrischen Feld</b>             | 246 |
| 2.1        | Leiter                                          | 246 |
| 2.2        | Nichtleiter                                     | 246 |
| <b>3</b>   | <b>Kondensatoren</b>                            | 246 |
| 3.1        | Kapazität                                       | 247 |
| 3.1.1      | Plattenkondensator                              | 247 |
| 3.1.2      | Spezielle Kondensatoren                         | 247 |
| 3.2        | Schaltungen mit Kondensatoren                   | 248 |
| 3.2.1      | Reihenschaltung                                 | 248 |
| 3.2.2      | Parallelschaltung                               | 248 |
| 3.2.3      | Gemischte Schaltungen                           | 249 |
| 3.3        | Energie des elektrostatischen Feldes            | 249 |
| 3.4        | Laden und Entladen eines Kondensators           | 250 |
| 3.5        | RC-Reihenschaltung                              | 251 |
| <b>IV</b>  | <b>Das Magnetische Feld</b>                     | 252 |
| <b>1</b>   | <b>Feldlinien</b>                               | 252 |
| 1.1        | Dauermagnet                                     | 252 |
| 1.2        | Stromdurchflossene Leiter                       | 252 |
| 1.3        | Stromdurchflossene Spule                        | 252 |
| 1.4        | Magnetfeld der Erde                             | 253 |
| <b>2</b>   | <b>Magnetische Grundgrößen</b>                  | 253 |
| 2.1        | Feldstärke                                      | 253 |
| 2.2        | Fluss, Flussdichte                              | 256 |
| <b>3</b>   | <b>Kräfte im Magnetfeld</b>                     | 257 |
| 3.1        | Kräfte auf bewegliche Ladungsträger             | 257 |
| 3.2        | Stromdurchflossener Leiter                      | 257 |
| 3.3        | Magnetisches Moment                             | 258 |
| 3.4        | Kräfte zwischen zwei parallelen Leitern         | 258 |
| 3.5        | Hall-Effekt                                     | 259 |
| <b>4</b>   | <b>Energie des Magnetfeldes</b>                 | 260 |
| <b>5</b>   | <b>Materie im Magnetfeld</b>                    | 260 |
| 5.1        | Diamagnetismus                                  | 261 |
| 5.2        | Paramagnetismus                                 | 261 |
| 5.3        | Ferromagnetismus                                | 262 |
| 5.3.1      | Magnetisierungskurve Hysterese                  | 262 |
| 5.3.2      | Verlauf der Permeabilität                       | 263 |

|            |                                                                             |            |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.3.3      | Temperaturabhängigkeit . . . . .                                            | 263        |
| 5.3.4      | Magnetostriktion . . . . .                                                  | 264        |
| 5.4        | Antiferromagnetismus . . . . .                                              | 264        |
| 5.5        | Ferrimagnetismus . . . . .                                                  | 264        |
| <b>6</b>   | <b>Magnetische Kreise . . . . .</b>                                         | <b>264</b> |
| 6.1        | Magnetische Spannung . . . . .                                              | 264        |
| 6.2        | Magnetischer Widerstand . . . . .                                           | 265        |
| 6.3        | Unverzweigte Kreise . . . . .                                               | 265        |
| 6.4        | Verzweigte Kreise . . . . .                                                 | 266        |
| <b>V</b>   | <b>Induktion . . . . .</b>                                                  | <b>267</b> |
| <b>1</b>   | <b>Induktion bei Änderung der Fläche . . . . .</b>                          | <b>267</b> |
| <b>2</b>   | <b>Induktion bei Änderung des Magnetfeldes . . . . .</b>                    | <b>269</b> |
| <b>3</b>   | <b>Die Induktivität einer Spule . . . . .</b>                               | <b>269</b> |
| 3.1        | Selbstinduktion . . . . .                                                   | 269        |
| 3.2        | Gegeninduktion . . . . .                                                    | 270        |
| 3.3        | Energie im Magnetfeld einer Spule . . . . .                                 | 271        |
| 3.4        | Ein- und Ausschaltvorgänge . . . . .                                        | 271        |
| 3.5        | Zusammenschalten von Induktivitäten . . . . .                               | 272        |
| <b>VI</b>  | <b>Wechselstrom . . . . .</b>                                               | <b>272</b> |
| <b>1</b>   | <b>Grundbegriffe des Wechselstroms . . . . .</b>                            | <b>272</b> |
| 1.1        | Erzeugung einer sinusförmigen Wechselspannung . . . . .                     | 272        |
| 1.2        | Phasenverschiebung . . . . .                                                | 273        |
| 1.3        | Effektivwert . . . . .                                                      | 273        |
| 1.4        | Darstellungsarten . . . . .                                                 | 274        |
| 1.4.1      | Zeigerdarstellung von Sinusgrößen . . . . .                                 | 274        |
| 1.4.2      | Darstellung von Sinusgrößen in der komplexen Zahlenebene . . . . .          | 274        |
| <b>2</b>   | <b>Grundschaltelemente im Wechselstromkreis . . . . .</b>                   | <b>275</b> |
| 2.1        | Ohmscher Widerstand . . . . .                                               | 275        |
| 2.2        | Kapazität . . . . .                                                         | 275        |
| 2.3        | Spule . . . . .                                                             | 276        |
| <b>3</b>   | <b>Schaltungen von Wechselstromwiderständen . . . . .</b>                   | <b>277</b> |
| 3.1        | Reihenschaltung von Wechselstromwiderständen . . . . .                      | 277        |
| 3.1.1      | Wirkwiderstand und Induktivität . . . . .                                   | 277        |
| 3.1.2      | Wirkwiderstand und Kapazität . . . . .                                      | 278        |
| 3.1.3      | Wirkwiderstand, Induktivität und Kapazität . . . . .                        | 279        |
| 3.2        | Parallelschaltung von Wechselstromwiderständen . . . . .                    | 281        |
| 3.2.1      | Wirkwiderstand und Induktivität . . . . .                                   | 281        |
| 3.2.2      | Wirkwiderstand und Kapazität . . . . .                                      | 282        |
| 3.2.3      | Wirkwiderstand, Induktivität und Kapazität . . . . .                        | 283        |
| 3.3        | Gemischte Schaltungen . . . . .                                             | 284        |
| <b>4</b>   | <b>Passive Filter . . . . .</b>                                             | <b>285</b> |
| 4.1        | Hochpassschaltung mit $RC$ - und $RL$ -Glieder . . . . .                    | 285        |
| 4.2        | Tiefpassschaltung mit $RC$ - und $RL$ -Glieder . . . . .                    | 286        |
| 4.3        | Bandpassschaltung . . . . .                                                 | 287        |
| <b>5</b>   | <b>Schwingkreise . . . . .</b>                                              | <b>287</b> |
| 5.1        | Reihenresonanz . . . . .                                                    | 288        |
| 5.2        | Parallelresonanz . . . . .                                                  | 288        |
| <b>6</b>   | <b>Leistung und Arbeit im Wechselstromkreis . . . . .</b>                   | <b>288</b> |
| 6.1        | Leistung und Arbeit bei Phasengleichheit von Spannung und Strom . . . . .   | 288        |
| 6.2        | Leistung und Arbeit bei Phasenverschiebung von Spannung und Strom . . . . . | 289        |
| 6.3        | Leistung in komplexer Schreibweise . . . . .                                | 290        |
| 6.4        | Leistungsfaktor . . . . .                                                   | 290        |
| <b>VII</b> | <b>Drehstrom . . . . .</b>                                                  | <b>291</b> |
| <b>1</b>   | <b>Erzeugung von mehrphasigem Wechselstrom . . . . .</b>                    | <b>291</b> |
| <b>2</b>   | <b>Phasenverkettung . . . . .</b>                                           | <b>291</b> |
| 2.1        | Sternschaltung . . . . .                                                    | 291        |
| 2.2        | Dreieckschaltung . . . . .                                                  | 292        |
| <b>3</b>   | <b>Leistung des Dreiphasenstroms . . . . .</b>                              | <b>293</b> |
| <b>4</b>   | <b>Das unsymmetrische Dreiphasen-system . . . . .</b>                       | <b>293</b> |
| 4.1        | Das unsymmetrische Dreileiternetz . . . . .                                 | 293        |
| 4.2        | Das unsymmetrische Vierleiternetz . . . . .                                 | 294        |

# Elektronik

|            |                                                         |     |
|------------|---------------------------------------------------------|-----|
| <b>I</b>   | <b>Leitungsmechanismen bei Halbleitern, pn-Übergang</b> | 297 |
| 1          | Einführung in die Halbleiterphysik                      | 297 |
| 2          | Der pn-Übergang                                         | 299 |
| <b>II</b>  | <b>Dioden</b>                                           | 300 |
| 1          | Kennlinien                                              | 300 |
| 2          | Kenndaten und Grenzwerte                                | 301 |
| 3          | Kennzeichnung von Halbleiter-Bauelementen               | 304 |
| 4          | Diodenarten                                             | 305 |
| 4.1        | Kapazitätsdioden                                        | 306 |
| 4.2        | Schalterdioden                                          | 307 |
| 4.3        | Schottky-Dioden                                         | 308 |
| 4.4        | Gleichrichter-Dioden                                    | 308 |
| 4.5        | Z-Dioden                                                | 309 |
| 5          | Anwendungsschaltungen                                   | 310 |
| 5.1        | Begrenzerschaltungen                                    | 310 |
| 5.2        | Gleichrichter                                           | 311 |
| 5.2.1      | Einweggleichrichter (M1)                                | 311 |
| 5.2.2      | Mittelpunktschaltung (M2)                               | 313 |
| 5.2.3      | Brückengleichrichterschaltung (B2)                      | 314 |
| 5.3        | Spannungsvervielfacher                                  | 316 |
| 5.4        | Diode als Konstantspannungsquelle (Z-Diode)             | 317 |
| <b>III</b> | <b>Mehrschichtdioden und -trioden</b>                   | 318 |
| 1          | Vierschichtdioden                                       | 319 |
| 2          | Thyristoren                                             | 320 |
| 3          | Diac                                                    | 323 |
| 4          | Triac                                                   | 324 |
| 5          | Schutz der Dioden und Trioden                           | 324 |
| 6          | Zündmethoden                                            | 325 |
| <b>IV</b>  | <b>Transistoren</b>                                     | 327 |
| 1          | Bipolare Transistoren                                   | 327 |
| 1.1        | Transistoreffekt                                        | 327 |
| 1.2        | Transistorkennlinien                                    | 328 |
| 1.3        | Kenn- und Grenzwerte des Transistors                    | 330 |
| 2          | Feldeffekttransistoren (FET)                            | 334 |
| 2.1        | Aufbau und Wirkungsweise des Sperrschicht-FET           | 334 |
| 2.2        | Aufbau und Wirkungsweise des MOSFET                     | 336 |
| 2.3        | Kennlinien von FET                                      | 337 |
| 2.4        | Kennwerte von FET                                       | 338 |
| <b>V</b>   | <b>Besondere Halbleiter-Bauelemente</b>                 | 343 |
| 1          | Unijunction-Transistor (Doppelbasisdiode)               | 343 |
| 2          | Darlington-Transistor                                   | 344 |
| 3          | VMOS-Transistoren                                       | 345 |
| 4          | SIPMOS-Transistoren                                     | 346 |
| 5          | IGBT                                                    | 347 |
| <b>VI</b>  | <b>Analoge Verstärker</b>                               | 349 |
| 1          | Bipolarer Transistor als Verstärker                     | 349 |
| 1.1        | Grundschaltungen                                        | 351 |
| 1.2        | Arbeitspunktstabilisierung                              | 353 |
| 1.3        | Emitterschaltungen                                      | 357 |
| 1.4        | Kollektorschaltungen                                    | 359 |
| 1.5        | Basisschaltung                                          | 360 |

|             |                                                   |     |
|-------------|---------------------------------------------------|-----|
| <b>2</b>    | <b>Feldeffekt-Transistor als Verstärker</b>       | 361 |
| 2.1         | Arbeitspunkteinstellung und -stabilisierung       | 361 |
| 2.2         | Grundschaltungen von FET                          | 363 |
| 2.2.1       | Sourceschaltung                                   | 364 |
| 2.2.2       | Drainschaltung                                    | 366 |
| 2.2.3       | Gateschaltung                                     | 367 |
| 2.3         | Weitere Anwendungen                               | 368 |
| <b>3</b>    | <b>Mehrstufige Verstärker</b>                     | 370 |
| <b>VII</b>  | <b>Endstufen</b>                                  | 375 |
| 1           | Betriebsarten                                     | 375 |
| 2           | Schaltungen                                       | 375 |
| <b>VIII</b> | <b>Operationsverstärker</b>                       | 380 |
| 1           | Einführung                                        | 380 |
| 2           | Differenzverstärker                               | 380 |
| 3           | Grundlagen des OP                                 | 381 |
| 4           | Operationsverstärker als Verstärker               | 384 |
| 4.1         | Verstärker mit frequenzunabhängiger Gegenkopplung | 384 |
| 4.2         | Verstärker mit frequenzabhängiger Gegenkopplung   | 387 |
| 4.3         | OP als Leistungsverstärker                        | 389 |
| 4.4         | Aktive Filterschaltungen                          | 390 |
| <b>IX</b>   | <b>Elektronische Schalter, Kippstufen</b>         | 391 |
| 1           | Transistor als Schalter                           | 391 |
| 2           | Kippschaltungen mit Transistoren                  | 395 |
| 2.1         | Bistabile Kippstufe                               | 395 |
| 2.2         | Monostabile Kippstufe                             | 396 |
| 2.3         | Astabile Kippstufe                                | 397 |
| 2.4         | Triggerschaltungen                                | 397 |
| 3           | Operationsverstärker als Schalter                 | 398 |
| 4           | Kippschaltungen mit Operationsverstärker          | 399 |
| 4.1         | Triggerschaltungen mit Operationsverstärker       | 399 |
| 4.2         | Astabile Kippstufe mit Operationsverstärker       | 400 |
| 4.3         | Monostabile Kippstufe mit Operationsverstärker    | 401 |
| 4.4         | Bistabile Kippstufe mit Operationsverstärker      | 401 |
| 5           | Zeitgeber 555                                     | 402 |
| 6           | Trigger TCA 345 A                                 | 403 |
| <b>X</b>    | <b>Oszillatoren</b>                               | 403 |
| 1           | Allgemeines                                       | 403 |
| 2           | Sinusgeneratoren (RC-Oszillatoren)                | 404 |
| 3           | Funktionsgeneratoren                              | 406 |
| <b>XI</b>   | <b>Schaltungstechniken</b>                        | 407 |
| 1           | Integrierte Schaltungen                           | 407 |
| 2           | SMD-Technik                                       | 409 |
| <b>XII</b>  | <b>Optoelektronik</b>                             | 411 |
| 1           | Grundsätzliche Überlegungen                       | 411 |
| 2           | Optoelektronische Bauelemente                     | 411 |
| 2.1         | Fotowiderstand (LDR – light dependent resistor)   | 411 |
| 2.2         | Fotodiode und Fotoelement                         | 412 |
| 2.3         | Fototransistoren                                  | 414 |
| 2.4         | Lumineszenzdioden und Flüssigkristalle            | 415 |
| 3           | Anzeigeeinheiten                                  | 417 |
| 4           | Signalübertragung mit Optokoppler                 | 418 |
| 5           | Faseroptische Übertragungsmittel                  | 419 |

|             |                                |     |
|-------------|--------------------------------|-----|
| <b>XIII</b> | <b>Analog-Digital-Wandler</b>  | 419 |
| 1           | Grundlagen                     | 419 |
| 2           | Spannungs-Frequenz-Wandler     | 420 |
| 3           | Sägezahnverfahren              | 420 |
| 4           | Dual-Slope-Verfahren           | 420 |
| 5           | Flash-Wandler                  | 421 |
| 6           | Wandler nach dem Wägeverfahren | 421 |
| 7           | Integrierte Wandler            | 422 |
| <b>XIV</b>  | <b>Digital-Analog-Wandler</b>  | 422 |
| 1           | Grundlagen                     | 422 |
| 2           | D/A-Wandler-Varianten          | 422 |
| 3           | Integrierte Wandler            | 423 |

## Technische Kommunikation/Technisches Zeichnen

|            |                                                      |     |
|------------|------------------------------------------------------|-----|
| <b>I</b>   | <b>Grundlagen der zeichnerischen Darstellung</b>     | 425 |
| 1          | Zeichengeräte                                        | 425 |
| 2          | Normen für Technische Zeichnungen                    | 426 |
| 3          | Normteile und Konstruktionselemente                  | 426 |
| 4          | Nutzen der Normung                                   | 438 |
| <b>II</b>  | <b>Schaltungsunterlagen</b>                          | 438 |
| 1          | Schaltzeichen nach DIN                               | 441 |
| 2          | Elektrische Betriebsmittel                           | 444 |
| 3          | Schaltungsunterlagen der Energietechnik              | 446 |
| 4          | Schaltungsunterlagen der Elektronik                  | 449 |
| 4.1        | Allgemeines                                          | 450 |
| 4.2        | Schaltzeichen nach DIN 40900 Teil 12 Binäre Elemente | 450 |
| 4.3        | Entwurf von Schaltungen                              | 453 |
| 4.3.1      | Verdrahtungsplan mit Universalplatinen               | 453 |
| 4.3.2      | Entwurf und Herstellung gedruckter Schaltungen       | 453 |
| 5          | Projektierung                                        | 455 |
| <b>III</b> | <b>Schaltungssynthese und -analyse</b>               | 455 |
| 1          | Beispiele aus der Elektrotechnik                     | 455 |
| 2          | Beispiele aus der Elektronik                         | 455 |
| <b>IV</b>  | <b>CAD-Technik</b>                                   | 458 |
| 1          | Allgemeines                                          | 458 |
| 2          | Hardware und Software                                | 458 |
| 3          | Erstellen von Schaltplänen                           | 458 |
| 4          | Erstellen von Layouts                                | 458 |
| 5          | Anwendungen in der Elektronik                        | 461 |
| 6          | Auswahl von CAD-Systemen                             | 461 |



# Datentechnik

|          |                                                            |     |
|----------|------------------------------------------------------------|-----|
| <b>I</b> | <b>Digitaltechnik</b>                                      | 465 |
| <b>1</b> | <b>Grundbegriffe der Digitaltechnik</b>                    | 465 |
| <b>2</b> | <b>Logische Grundsaltungen</b>                             | 466 |
| 2.1      | Grundverknüpfungen.                                        | 466 |
| 2.1.1    | NICHT-Verknüpfung                                          | 466 |
| 2.1.2    | UND-Verknüpfung                                            | 466 |
| 2.1.3    | ODER-Verknüpfung                                           | 467 |
| 2.2      | Realisierungsmöglichkeiten logischer Verknüpfungen.        | 467 |
| <b>3</b> | <b>Schaltalgebra</b>                                       | 469 |
| 3.1      | Allgemeines                                                | 469 |
| 3.2      | Normalform einer binären Funktion                          | 469 |
| 3.2.1    | Disjunktive Normalform.                                    | 469 |
| 3.2.2    | Konjunktive Normalform                                     | 470 |
| 3.2.3    | Umwandeln der Gleichung in Schaltzeichen                   | 470 |
| 3.2.4    | Schaltungsminimierung mit Hilfe der Schaltalgebra          | 470 |
| 3.2.5    | Umsetzung in NAND- oder NOR-Technik                        | 470 |
| 3.2.6    | KV-Tabelle                                                 | 473 |
| 3.2.7    | Analyse logischer Schaltungen.                             | 473 |
| 3.2.8    | Synthese logischer Schaltungen                             | 474 |
| <b>4</b> | <b>Zahlensysteme in der Digital- und Datenverarbeitung</b> | 476 |
| 4.1      | Dualsystem                                                 | 476 |
| 4.1.1    | Bildung der Dualzahlen und Umwandlung in Dezimalzahlen     | 476 |
| 4.1.2    | Umwandlung dezimal nach dual                               | 476 |
| 4.2      | Hexadezimalsystem                                          | 478 |
| 4.3      | Rechnen mit Dualzahlen                                     | 478 |
| 4.4      | Zahlen in Rechenanlagen.                                   | 478 |
| 4.4.1    | Darstellung von Zahlen                                     | 478 |
| 4.4.2    | Einer- und Zweierkomplement.                               | 480 |
| 4.4.3    | Subtraktion mit Hilfe des Komplements                      | 480 |
| <b>5</b> | <b>Codes</b>                                               | 481 |
| 5.1      | Allgemeines                                                | 481 |
| 5.2      | Binär-Code                                                 | 481 |
| 5.3      | BCD-Code.                                                  | 481 |
| 5.3.1    | BCD-Dual-Code                                              | 481 |
| 5.3.2    | 3-Excess-Code                                              | 481 |
| 5.3.3    | Aiken-Code                                                 | 482 |
| 5.4      | Gray-Code.                                                 | 482 |
| 5.5      | Codierung alphanumerischer Zeichen.                        | 483 |
| 5.6      | Fehlererkennung und Redundanz                              | 484 |
| 5.6.1    | Einfache Prüfung auf Parität                               | 484 |
| 5.6.2    | Kreuzsicherungsprüfung.                                    | 485 |
| 5.6.3    | Hamming-Code                                               | 485 |
| <b>6</b> | <b>Digitale Grundsaltungen</b>                             | 486 |
| 6.1      | Allgemeines                                                | 486 |
| 6.2      | Schaltnetze                                                | 486 |
| 6.2.1    | Rechenetze                                                 | 486 |
| 6.2.1.1  | Halbaddierer                                               | 486 |
| 6.2.1.2  | Volladdierer                                               | 486 |
| 6.2.1.3  | Serieller n-Bit-Addierer.                                  | 487 |
| 6.2.1.4  | Paralleler n-Bit-Addierer                                  | 488 |
| 6.2.1.5  | Subtrahierer                                               | 488 |
| 6.2.1.6  | Addierer für BCD-Dualzahlen                                | 489 |
| 6.2.2    | Komparatoren.                                              | 489 |
| 6.2.2.1  | Einfacher Komparator                                       | 489 |
| 6.2.2.2  | Komparator mit Größer- und Kleiner-Vergleich               | 490 |
| 6.2.3    | Codewandler und Decoder.                                   | 491 |
| 6.2.3.1  | Codewandler                                                | 491 |
| 6.2.3.2  | 1-aus-n-Decoder                                            | 492 |
| 6.2.4    | Multiplexer und Demultiplexer                              | 492 |
| 6.2.4.1  | Multiplexer.                                               | 493 |
| 6.2.4.2  | Demultiplexer                                              | 494 |

|            |                                                               |            |
|------------|---------------------------------------------------------------|------------|
| 6.3        | Schaltwerke . . . . .                                         | 494        |
| 6.3.1      | Speicherbausteine . . . . .                                   | 494        |
| 6.3.1.1    | Allgemeines Flipflop . . . . .                                | 494        |
| 6.3.1.2    | RS-Flipflop . . . . .                                         | 495        |
| 6.3.1.3    | Flipflops mit dominierenden Eingängen . . . . .               | 495        |
| 6.3.1.4    | D-Flipflop . . . . .                                          | 495        |
| 6.3.1.5    | JK-Flipflop . . . . .                                         | 496        |
| 6.3.1.6    | Master-Slave-JK-Flipflop . . . . .                            | 496        |
| 6.3.1.7    | T-Flipflop . . . . .                                          | 497        |
| 6.3.2      | Grundschaltungen aus Speicherbausteinen. . . . .              | 497        |
| 6.3.2.1    | Register . . . . .                                            | 497        |
| 6.3.2.2    | Schieberegister . . . . .                                     | 498        |
| 6.3.2.3    | Frequenzteiler . . . . .                                      | 499        |
| 6.3.2.4    | Zähler . . . . .                                              | 500        |
| 6.3.2.4.1  | Asynchroner Zähler . . . . .                                  | 500        |
| 6.3.2.4.2  | Asynchroner BCD-Vorwärtszähler. . . . .                       | 502        |
| 6.3.2.4.3  | Synchroner Dual-Vorwärts-1-Zähler . . . . .                   | 503        |
| 6.3.2.4.4  | Zähler für mehrere Decaden . . . . .                          | 503        |
| 6.4        | Sonderschaltungen . . . . .                                   | 504        |
| 6.4.1      | Monoflops . . . . .                                           | 504        |
| 6.4.2      | Astabile Kippstufen . . . . .                                 | 505        |
| <b>II</b>  | <b>Integrierte Schaltkreise der Digitaltechnik. . . . .</b>   | <b>506</b> |
| <b>1</b>   | <b>Allgemeines . . . . .</b>                                  | <b>506</b> |
| <b>2</b>   | <b>Umgang mit integrierten Schaltungen. . . . .</b>           | <b>507</b> |
| <b>3</b>   | <b>Daten und Begriffe der Logikschaltungen . . . . .</b>      | <b>507</b> |
| 3.1        | Grenz- und Kenndaten . . . . .                                | 507        |
| 3.2        | Pegel . . . . .                                               | 507        |
| 3.3        | Störsicherheit . . . . .                                      | 508        |
| 3.4        | Lasteinheit . . . . .                                         | 508        |
| 3.5        | Temperaturbereich . . . . .                                   | 508        |
| 3.6        | Gatterlaufzeit . . . . .                                      | 509        |
| 3.7        | Verlustleistung . . . . .                                     | 509        |
| <b>4</b>   | <b>TTL-Familie . . . . .</b>                                  | <b>510</b> |
| 4.1        | Eigenschaften und Kenndaten . . . . .                         | 510        |
| 4.2        | Standard-TTL. . . . .                                         | 510        |
| 4.3        | Schaltungen mit 3-state . . . . .                             | 513        |
| 4.4        | Schottky-TTL und Low-Power-Schotky. . . . .                   | 514        |
| <b>5</b>   | <b>Emittergekoppelte Logik . . . . .</b>                      | <b>514</b> |
| <b>6</b>   | <b>Integrierte MOS-Schaltungen . . . . .</b>                  | <b>514</b> |
| 6.1        | NMOS- und PMOS-Technik . . . . .                              | 515        |
| 6.2        | CMOS . . . . .                                                | 515        |
| 6.2.1      | 4000-Serie . . . . .                                          | 515        |
| 6.2.2      | CMOS-Schalter . . . . .                                       | 517        |
| 6.2.3      | High-Speed-CMOS. . . . .                                      | 518        |
| 6.2.4      | BICMOS. . . . .                                               | 518        |
| <b>7</b>   | <b>Interfaceschaltungen . . . . .</b>                         | <b>519</b> |
| <b>8</b>   | <b>Anwendungsspezifische integrierte Schaltungen. . . . .</b> | <b>519</b> |
| 8.1        | Allgemeines . . . . .                                         | 519        |
| 8.2        | Kundenspezifische IC's . . . . .                              | 520        |
| 8.3        | Programmierbare Logikbausteine . . . . .                      | 521        |
| 8.3.1      | PROM . . . . .                                                | 521        |
| 8.3.2      | PAL . . . . .                                                 | 521        |
| 8.3.3      | GAL . . . . .                                                 | 525        |
| 8.3.4      | pLSI, ispLSI . . . . .                                        | 528        |
| <b>9</b>   | <b>Gehäuse . . . . .</b>                                      | <b>531</b> |
| <b>III</b> | <b>Mikrocomputertechnik . . . . .</b>                         | <b>532</b> |
| <b>1</b>   | <b>Komponenten eines Mikrocomputers . . . . .</b>             | <b>532</b> |
| <b>2</b>   | <b>Mikroprozessoren . . . . .</b>                             | <b>532</b> |
| 2.1        | Allgemeines . . . . .                                         | 532        |
| 2.2        | Architektur . . . . .                                         | 532        |
| 2.3        | Übersicht gängiger Mikroprozessoren . . . . .                 | 534        |

|          |                                                                    |            |
|----------|--------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.4      | 8-Bit-Mikroprozessoren . . . . .                                   | 534        |
| 2.4.1    | 8085-CPU . . . . .                                                 | 534        |
| 2.4.2    | Beispiel Z80 CPU . . . . .                                         | 542        |
| 2.5      | 16-Bit-Prozessoren . . . . .                                       | 545        |
| 2.5.1    | 8086/80286 . . . . .                                               | 545        |
| 2.5.2    | Adressenbildung . . . . .                                          | 547        |
| <b>3</b> | <b>Halbleiterspeicher . . . . .</b>                                | <b>548</b> |
| 3.1      | Allgemeines . . . . .                                              | 548        |
| 3.2      | Kenndaten und Technologie . . . . .                                | 548        |
| 3.3      | Bedeutung der Anschlüsse . . . . .                                 | 549        |
| 3.4      | Organisation und Aufbau . . . . .                                  | 549        |
| 3.4.1    | Bitorganisierter und wortorganisierter Speicher. . . . .           | 550        |
| 3.4.2    | Speicher mit Adressenzwischenspeicher . . . . .                    | 550        |
| 3.5      | Zeitverhalten. . . . .                                             | 551        |
| 3.6      | Speichertypen . . . . .                                            | 552        |
| 3.6.1    | Festwertspeicher . . . . .                                         | 552        |
| 3.6.1.1  | Masken-ROM . . . . .                                               | 553        |
| 3.6.1.2  | PROM . . . . .                                                     | 553        |
| 3.6.1.3  | EPROM . . . . .                                                    | 553        |
| 3.6.1.4  | EEPROM . . . . .                                                   | 555        |
| 3.6.1.5  | Flash-EPROM . . . . .                                              | 556        |
| 3.6.2    | Schreib-Lesespeicher . . . . .                                     | 557        |
| 3.6.2.1  | SRAM . . . . .                                                     | 557        |
| 3.6.2.2  | NVRAM . . . . .                                                    | 558        |
| 3.6.2.3  | DRAM . . . . .                                                     | 559        |
| 3.6.2.4  | PSRAM . . . . .                                                    | 560        |
| 3.7      | Speichererweiterung . . . . .                                      | 560        |
| 3.8      | Zentralspeicher . . . . .                                          | 561        |
| <b>4</b> | <b>Peripheriebausteine. . . . .</b>                                | <b>562</b> |
| 4.1      | Allgemeines . . . . .                                              | 562        |
| 4.2      | BUS-Treiber . . . . .                                              | 562        |
| 4.3      | Einfache E-/A-Bausteine für den parallelen Betrieb . . . . .       | 562        |
| 4.4      | Programmierbare Schnittstellen- bausteine . . . . .                | 564        |
| 4.5      | Zeitgeberbausteine . . . . .                                       | 569        |
| 4.6      | Programmierbarer E/A-Baustein mit Speicher und Zeitgeber . . . . . | 571        |
| 4.7      | Eingabe-Ausgabe-Bausteine für den seriellen Betrieb . . . . .      | 573        |
| 4.7.1    | Allgemeines. . . . .                                               | 573        |
| 4.7.2    | USART. . . . .                                                     | 576        |
| 4.8      | Bausteine mit Sonderfunktionen . . . . .                           | 579        |
| <b>5</b> | <b>Mikrocontroller . . . . .</b>                                   | <b>580</b> |
| 5.1      | Allgemeines . . . . .                                              | 580        |
| 5.2      | 8-Bit-Mikrocontroller . . . . .                                    | 581        |
| 5.2.1    | Funktionsbeschreibung des MC 8051 . . . . .                        | 581        |
| 5.2.2    | Ein-/Ausgabeeinheit. . . . .                                       | 584        |
| 5.2.3    | RESET-Schaltung . . . . .                                          | 584        |
| 5.2.4    | Taktgenerator . . . . .                                            | 584        |
| 5.2.5    | Stromaufnahme . . . . .                                            | 584        |
| 5.2.6    | TIMER . . . . .                                                    | 585        |
| 5.2.7    | Unterbrechungssystem . . . . .                                     | 586        |
| 5.2.8    | Speicher . . . . .                                                 | 587        |
| 5.2.9    | Serielle Schnittstelle. . . . .                                    | 588        |
| 5.3      | 16-Bit-Mikrocontroller . . . . .                                   | 589        |
| <b>6</b> | <b>Maschinensprache . . . . .</b>                                  | <b>591</b> |
| 6.1      | Allgemeines . . . . .                                              | 591        |
| 6.2      | Maschinencode . . . . .                                            | 591        |
| 6.3      | Befehlsaufbau . . . . .                                            | 592        |
| 6.4      | Befehlsdarstellung . . . . .                                       | 592        |
| 6.5      | Befehle . . . . .                                                  | 592        |
| 6.5.1    | Befehlsfunktionen. . . . .                                         | 592        |
| 6.5.2    | Adressierungsarten . . . . .                                       | 596        |
| 6.6      | Befehlszyklus und Befehlszeiten . . . . .                          | 597        |
| 6.6.1    | Befehlszyklus . . . . .                                            | 597        |
| 6.6.2    | Befehlszeiten . . . . .                                            | 599        |
| <b>7</b> | <b>Befehlsvorrat . . . . .</b>                                     | <b>599</b> |
| <b>8</b> | <b>Hinweise zur Programmierung und Programmbeispiele . . . . .</b> | <b>602</b> |

|           |                                    |     |
|-----------|------------------------------------|-----|
| <b>IV</b> | <b>Computertechnik</b>             | 603 |
| 1         | Komponenten eines Computers        | 603 |
| 2         | Massenspeicher                     | 603 |
| 2.1       | Magnetplatten                      | 603 |
| 2.1.1     | Diskette und Diskettenlaufwerk     | 603 |
| 2.1.2     | Festplatte und Festplattenlaufwerk | 607 |
| 2.1.3     | Magnetbandgeräte                   | 608 |
| 2.2       | CD-ROM- und CD-Laufwerk            | 608 |
| 3         | Eingabegeräte                      | 609 |
| 3.1       | Tastatur                           | 609 |
| 3.2       | Maus                               | 610 |
| 4         | Ausgabegeräte                      | 610 |
| 4.1       | Datensichtgeräte                   | 610 |
| 4.1.1     | Monitor                            | 610 |
| 4.1.2     | LCD-Bildschirm                     | 613 |
| 4.2       | Drucker                            | 613 |
| 4.2.1     | Typenraddrucker                    | 613 |
| 4.2.2     | Matrixdrucker                      | 613 |
| 4.2.3     | Tintenstrahldrucker                | 613 |
| 4.2.4     | Laserdrucker                       | 613 |
| <b>V</b>  | <b>Programmiertechnik</b>          | 614 |
| 1         | Programmiersprachen                | 614 |
| 1.1       | Assembler                          | 614 |
| 1.2       | ADA                                | 614 |
| 1.3       | ALGOL                              | 615 |
| 1.4       | BASIC                              | 615 |
| 1.5       | C                                  | 615 |
| 1.6       | FORTRAN                            | 615 |
| 1.7       | PASCAL                             | 615 |
| 1.8       | PL/M                               | 615 |
| 2         | Grundlagen der Programmierung      | 616 |
| 2.1       | Interpreter                        | 616 |
| 2.2       | Compiler                           | 616 |
| 2.3       | Editor                             | 616 |
| 2.4       | Integrierte Entwicklungsumgebung   | 616 |
| 2.5       | Methoden der Programmentwicklung   | 617 |
| 2.6       | Problembeschreibung                | 617 |
| 2.7       | Top-Down-Methode                   | 617 |
| 2.8       | Bottom-Up-Methode                  | 617 |
| 2.9       | Bewertung der Methoden             | 617 |
| 2.10      | Programm-Test                      | 618 |
| <b>VI</b> | <b>Datenkommunikation</b>          | 618 |
| 1         | Einführung                         | 618 |
| 1.1       | Warum Datenkommunikation?          | 619 |
| 1.2       | Geschichte der Datenkommunikation  | 619 |
| 2         | Computernetzwerke                  | 620 |
| 2.1       | Peer-to-Peer-Netz                  | 620 |
| 2.2       | Client/Server-Netz                 | 620 |
| 3         | Einteilung von Netzwerken          | 620 |
| 3.1       | Ausdehnung                         | 620 |
| 3.2       | Dienstarten und Verbindungen       | 621 |
| 3.2.1     | Verbindungsorientierter Dienst     | 621 |
| 3.2.2     | Kanalvermittlung                   | 621 |
| 3.2.3     | Verbindungsloser Dienst            | 621 |
| 3.2.4     | Punkt-zu-Punkt-Kanäle              | 621 |
| 3.2.5     | Rundsendekanäle                    | 621 |
| 3.3       | Basisband – Breitband              | 622 |
| 3.4       | FDM – DWDM – TDM                   | 622 |
| 4         | Netzwerk-Topologien                | 623 |
| 4.1       | Sternnetz                          | 623 |
| 4.2       | Busnetz                            | 623 |
| 4.3       | Ringnetz                           | 624 |

|          |                                                     |            |
|----------|-----------------------------------------------------|------------|
| 4.4      | Baumnetz . . . . .                                  | 624        |
| 4.5      | Vollverbindung . . . . .                            | 624        |
| 4.6      | Mischformen . . . . .                               | 624        |
| 4.6.1    | Stern-Stern-Netz . . . . .                          | 624        |
| 4.6.2    | Stern-Bus-Netz . . . . .                            | 625        |
| 4.7      | Sonderformen . . . . .                              | 625        |
| 4.7.1    | Linien-Netz . . . . .                               | 625        |
| 4.7.2    | Ring-Netz . . . . .                                 | 625        |
| <b>5</b> | <b>Das OSI-Referenzmodell . . . . .</b>             | <b>625</b> |
| 5.1      | Aufteilen langer Nachrichten . . . . .              | 626        |
| 5.2      | Schicht 0: Übertragungsmedien. . . . .              | 626        |
| 5.2.1    | Koaxialkabel . . . . .                              | 626        |
| 5.2.2    | Twisted-Pair-Kabel . . . . .                        | 627        |
| 5.2.3    | RJ45-Stecker . . . . .                              | 627        |
| 5.2.4    | Lichtwellenleiter (LWL). . . . .                    | 627        |
| 5.2.5    | Ethernet-Medien . . . . .                           | 628        |
| 5.2.6    | strukturierte Verkabelung. . . . .                  | 628        |
| 5.3      | Schicht 1: Bitübertragung . . . . .                 | 629        |
| 5.3.1    | Bit/s und Baud . . . . .                            | 629        |
| 5.3.2    | Maximale Bitrate . . . . .                          | 629        |
| 5.3.3    | Bitkodierungen . . . . .                            | 629        |
| 5.3.3.1  | V.24 . . . . .                                      | 629        |
| 5.3.3.2  | Manchester-Kodierung . . . . .                      | 630        |
| 5.3.3.3  | NRZI – Non Return to Zero/Invert . . . . .          | 630        |
| 5.3.3.4  | 4B/5B-Code Bild (VI-32). . . . .                    | 631        |
| 5.3.3.5  | MLT3-Kodierung. . . . .                             | 631        |
| 5.3.3.6  | PAM-5-Kodierung . . . . .                           | 631        |
| 5.3.3.7  | 128 DSQ-Kodierung . . . . .                         | 31         |
| 5.4      | Schicht 2: Datensicherung . . . . .                 | 632        |
| 5.4.1    | IEEE 802.3: CSMA/CD . . . . .                       | 632        |
| 5.4.1.1  | Funktionsweise. . . . .                             | 632        |
| 5.4.1.2  | Late Collisions . . . . .                           | 633        |
| 5.4.1.3  | Autonegotiation . . . . .                           | 633        |
| 5.4.2    | IEEE 802.5: Token Ring. . . . .                     | 633        |
| 5.5      | Schicht 3: Vermittlung . . . . .                    | 634        |
| 5.5.1    | Internet Protokoll, Version 4 (IPv4) . . . . .      | 634        |
| 5.5.2    | IP-Adressen. . . . .                                | 634        |
| 5.5.2.1  | Schreibweisen . . . . .                             | 634        |
| 5.5.2.2  | Netzmaske . . . . .                                 | 634        |
| 5.5.2.3  | Host-Adressen . . . . .                             | 635        |
| 5.5.2.4  | IP-Adressklassen . . . . .                          | 635        |
| 5.5.3    | Private IP-Adressen . . . . .                       | 635        |
| 5.5.4    | NAT: Network Address Translation . . . . .          | 636        |
| 5.5.5    | Router . . . . .                                    | 636        |
| 5.5.6    | Routing-Protokolle . . . . .                        | 636        |
| 5.5.7    | Paketfilter-Firewall . . . . .                      | 637        |
| 5.5.8    | Kostenabrechnung. . . . .                           | 637        |
| 5.5.9    | IPv6 . . . . .                                      | 637        |
| 5.6      | Schicht 4: Transport . . . . .                      | 637        |
| 5.6.1    | TCP/IP . . . . .                                    | 637        |
| 5.6.2    | Ziele von TCP/IP . . . . .                          | 637        |
| 5.6.3    | Das TCP/IP-Referenzmodell. . . . .                  | 638        |
| 5.6.4    | TCP/IP-Socket . . . . .                             | 638        |
| 5.6.5    | TCP: Transport Control Protocol. . . . .            | 638        |
| 5.6.6    | UDP: User Data Protocol . . . . .                   | 639        |
| 5.7      | Aufgaben der Schichten 5–7. . . . .                 | 639        |
| 5.7.1    | DNS: Domain Name Service . . . . .                  | 639        |
| 5.7.1.1  | Funktionsweise. . . . .                             | 639        |
| 5.7.1.2  | DNS-Namen . . . . .                                 | 640        |
| 5.7.2    | DHCP: Dynamic Host Configuration Protocol . . . . . | 640        |
| <b>6</b> | <b>Industrial Ethernet . . . . .</b>                | <b>641</b> |
| <b>7</b> | <b>Literatur . . . . .</b>                          | <b>641</b> |

# Automatisierungstechnik

|           |                                                                       |     |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>1</b>  | <b>Einführung</b>                                                     | 643 |
| <b>2</b>  | <b>Automatisierungsgeräte</b>                                         | 643 |
| <b>3</b>  | <b>Grundzüge der SPS-Norm IEC 61131-3</b>                             | 644 |
| 3.1       | Programmorganisationskonzept                                          | 644 |
| 3.2       | Deklaration von FB- und FC-Bausteinen                                 | 645 |
| 3.3       | Variablen                                                             | 646 |
| 3.4       | Programmiersprachen                                                   | 649 |
| <b>4</b>  | <b>Programmstrukturen</b>                                             | 650 |
| 4.1       | Lineares Programm                                                     | 650 |
| 4.2       | Gegliedertes Programm                                                 | 650 |
| 4.3       | Parametrierbares Programm                                             | 650 |
| <b>5</b>  | <b>Eingabe- und Ausgabesignale</b>                                    | 651 |
| 5.1       | Binäre Signale                                                        | 651 |
| 5.2       | Digitale Signale                                                      | 651 |
| 5.3       | Analoge Signale                                                       | 651 |
| <b>6</b>  | <b>Eingabe-/Ausgabebaugruppen</b>                                     | 651 |
| <b>7</b>  | <b>Verknüpfungssteuerungen</b>                                        | 652 |
| 7.1       | Logische Grundverknüpfungen in verschiedenen Darstellungen            | 652 |
| 7.2       | Zusammengesetzte logische Grundverknüpfungen                          | 652 |
| 7.3       | Schließer- und Öffnerkontakte, Drahtbruchsicherheit, Erdschlussgefahr | 654 |
| 7.4       | Speicherfunktionen                                                    | 654 |
| 7.5       | Flankenauswertung                                                     | 655 |
| 7.6       | Darstellung und Eigenschaften elektropneumatischer Stellglieder       | 655 |
| 7.7       | Regeln für das Umsetzen von Schützschaltungen in SPS-Programme        | 656 |
| 7.8       | Zeitfunktionen                                                        | 657 |
| 7.9       | Zählerfunktionen                                                      | 657 |
| 7.10      | Vergleichsfunktionen                                                  | 658 |
| 7.11      | MOVE-Funktion                                                         | 659 |
| 7.12      | EN /ENO-Mechanismus                                                   | 660 |
| <b>8</b>  | <b>Aufruf und Wertübergaben zwischen Bausteinen nach IEC 61131-3</b>  | 660 |
| 8.1       | Aufrufhierarchie der Bausteine P, FB und FC                           | 660 |
| 8.2       | Aufruf von Funktionsbausteinen in FBS                                 | 660 |
| 8.3       | Aufruf von Funktionsbausteinen in AWL                                 | 660 |
| 8.4       | Aufruf von Funktionen in AWL                                          | 661 |
| <b>9</b>  | <b>Ablaufsteuerung</b>                                                | 661 |
| 9.1       | Ablauf-Funktionsplan                                                  | 661 |
| 9.2       | Grafische Darstellung von Ablaufsteuerungsfunktionen                  | 662 |
| 9.3       | Betriebsartenteil und Bedienfeld                                      | 665 |
| <b>10</b> | <b>Kommunikation in Automatisierungssystemen</b>                      | 667 |
| 10.1      | Bussysteme                                                            | 667 |
| 10.2      | PROFINET – Offener Industrial Ethernet Standard                       | 667 |
| 10.3      | OPC-Technologie                                                       | 669 |
| <b>11</b> | <b>Steuerungssicherheit</b>                                           | 670 |
| 11.1      | Europäische Richtlinien und Sicherheitsnormen                         | 671 |
| 11.2      | Sicherheitsbegriff                                                    | 671 |
| <b>12</b> | <b>Regelungstechnische Grundbegriffe der Automatisierungstechnik</b>  | 673 |
| 12.1      | Unterschied zwischen Steuern und Regeln, regelungstechnische Größen   | 673 |
| 12.2      | Regler-Technologien                                                   | 675 |
| <b>13</b> | <b>Regelstrecken</b>                                                  | 675 |
| 13.1      | Beispiele für Regelstrecken                                           | 675 |
| 13.2      | Beschreibungsmittel zur Darstellung von Regelstreckeneigenschaften    | 676 |
| <b>14</b> | <b>Regler</b>                                                         | 679 |
| 14.1      | P-Regler, P-Regelfunktion                                             | 680 |
| 14.2      | I-Regler, I-Regelfunktion                                             | 681 |
| 14.3      | PI-Regler, PI-Regelfunktion                                           | 681 |
| 14.4      | PID-Regler, PID-Regelfunktion                                         | 683 |
| 14.5      | Vergleich der verschiedenen Reglertypen                               | 683 |
| 14.6      | PID-Reglerbaustein für digitale Abtastregelung                        | 683 |
| 14.7      | SPS als kontinuierlicher PID-Abtastregler                             | 685 |

|       |                                                   |     |
|-------|---------------------------------------------------|-----|
| 14.8  | Digitaler Schrittreger mit PI-Verhalten . . . . . | 686 |
| 14.9  | Zweipunktreger, Zweipunkt-Regelfunktion. . . . .  | 686 |
| 14.10 | Regelgüte . . . . .                               | 687 |

**Regelungstechnik**

|            |                                                                                      |            |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>I</b>   | <b>Einführung . . . . .</b>                                                          | <b>689</b> |
| <b>II</b>  | <b>Strukturbild und Übertragungsglieder . . . . .</b>                                | <b>690</b> |
|            | 1 Strukturbild . . . . .                                                             | 690        |
|            | 2 Übertragungsglieder . . . . .                                                      | 690        |
|            | 3 Klassifikation von Übertragungsgliedern . . . . .                                  | 690        |
|            | 3.1 Statische und dynamische Übertragungsglieder . . . . .                           | 690        |
|            | 3.2 Lineare und nichtlineare Übertragungsglieder. . . . .                            | 691        |
|            | 3.3 Zeitinvariante und zeitvariante Übertragungsglieder. . . . .                     | 692        |
|            | 3.4 Kausale und akausale Übertragungsglieder . . . . .                               | 692        |
|            | 4 Beschreibung von Übertragungsgliedern um einen Arbeitspunkt . . . . .              | 692        |
|            | 4.1 Arbeitspunkt eines Übertragungsgliedes . . . . .                                 | 692        |
|            | 4.2 Linearisierung um den Arbeitspunkt . . . . .                                     | 692        |
|            | 5 Impulsantwort und Sprungantwort einfacher Übertragungsglieder . . . . .            | 693        |
|            | 5.1 $P$ -Glieder . . . . .                                                           | 693        |
|            | 5.2 $I$ -Glieder. . . . .                                                            | 693        |
|            | 5.3 $D$ -Glieder . . . . .                                                           | 693        |
|            | 5.4 $TZ$ -Glieder. . . . .                                                           | 693        |
|            | 5.5 $PT_1$ -Glieder . . . . .                                                        | 693        |
|            | 5.6 $PT_2$ -Glieder . . . . .                                                        | 694        |
| <b>III</b> | <b>Übertragungsverhalten linearer, zeitinvarianter Übertragungsglieder . . . . .</b> | <b>695</b> |
|            | 1 Übertragungsfunktion . . . . .                                                     | 695        |
|            | 2 Frequenzgangfunktion . . . . .                                                     | 695        |
|            | 3 Frequenzkennlinien elementarer Übertragungsfunktionen . . . . .                    | 696        |
|            | 3.1 Verstärkungsfaktor. . . . .                                                      | 696        |
|            | 3.2 Integrierer . . . . .                                                            | 696        |
|            | 3.3 Differenzierer . . . . .                                                         | 696        |
|            | 3.4 Reeller Pol. . . . .                                                             | 696        |
|            | 3.5 Reelle Nullstelle . . . . .                                                      | 698        |
|            | 3.6 Konjugiert komplexes Polpaar . . . . .                                           | 698        |
|            | 3.7 Konjugiert komplexes Nullstellenpaar . . . . .                                   | 699        |
|            | 3.8 Totzeit. . . . .                                                                 | 700        |
|            | 3.9 Allpass erster Ordnung. . . . .                                                  | 700        |
|            | 3.10 Allpass zweiter Ordnung . . . . .                                               | 700        |
| <b>IV</b>  | <b>Stabilität. . . . .</b>                                                           | <b>702</b> |
|            | 1 Definition der Stabilität . . . . .                                                | 702        |
|            | 1.1 Asymptotische Stabilität . . . . .                                               | 702        |
|            | 1.2 BIBO-Stabilität . . . . .                                                        | 702        |
|            | 2 Stabilitätskriterien . . . . .                                                     | 702        |
|            | 2.1 Grundlegendes Stabilitätskriterium . . . . .                                     | 702        |
|            | 2.2 Hurwitz-Kriterium . . . . .                                                      | 703        |
|            | 2.3 Nyquist-Kriterium . . . . .                                                      | 703        |
|            | 2.4 Phasenreserve und Amplitudenreserve . . . . .                                    | 704        |
| <b>V</b>   | <b>Entwurf von Regelkreisen. . . . .</b>                                             | <b>707</b> |
|            | 1 Forderungen an die Regelung . . . . .                                              | 707        |
|            | 1.1 Stabilität. . . . .                                                              | 707        |
|            | 1.2 Stationäre Genauigkeit . . . . .                                                 | 707        |
|            | 1.3 Hinreichende Dämpfung . . . . .                                                  | 708        |
|            | 1.4 Hinreichende Schnelligkeit. . . . .                                              | 708        |

|          |                                                                            |     |
|----------|----------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>2</b> | <b>Reglertypen</b>                                                         | 708 |
| 2.1      | Standardregler                                                             | 709 |
| 2.2      | Korrekturglieder                                                           | 709 |
| 2.2.1    | Proportionalglied (P-Glied)                                                | 709 |
| 2.2.2    | Integrierglied (I-Glied)                                                   | 710 |
| 2.2.3    | Lead-Glied                                                                 | 710 |
| 2.2.4    | Lag-Glied                                                                  | 711 |
| <b>3</b> | <b>Faustregeln für die Wahl der Reglerstruktur und der Reglerparameter</b> | 711 |
| <b>4</b> | <b>Reglerentwurf mit dem Frequenzkennlinienverfahren</b>                   | 711 |
| 4.1      | Entwurf eines PI-Reglers für ein Verzögerungssystem                        | 711 |
| 4.2      | Reglerentwurf für eine doppelt integrierende Strecke                       | 712 |
| <b>5</b> | <b>Einstellregeln bei speziellen Regelstrecken</b>                         | 713 |
| 5.1      | Betragsoptimum                                                             | 713 |
| 5.2      | Symmetrisches Optimum                                                      | 714 |

## Messtechnik

|            |                                                              |     |
|------------|--------------------------------------------------------------|-----|
| <b>I</b>   | <b>Grundlagen und Grundbegriffe der Messtechnik</b>          | 717 |
| 1          | Begriffe                                                     | 717 |
| 2          | Einheiten                                                    | 717 |
| 3          | Messabweichung, Messfehler                                   | 718 |
| 3.1        | Systematische Abweichungen                                   | 718 |
| 3.2        | Zufällige Abweichungen                                       | 719 |
| 3.3        | Arithmetischer Mittelwert, Erwartungswert                    | 719 |
| 3.4        | Standardabweichung                                           | 719 |
| 4          | Abweichungsfortpflanzung, Fehlerfortpflanzung                | 720 |
| 5          | Fehlerangaben von Messgeräten                                | 721 |
| 5.1        | Analog anzeigende Messgeräte                                 | 721 |
| 5.2        | Digital anzeigende Messgeräte                                | 721 |
| 6          | Arithmetischer Mittelwert und Effektivwert von Wechselgrößen | 722 |
| 7          | Häufigkeitsverteilung, Vertrauensbereich                     | 722 |
| 8          | Bearbeitung und Auswertung von Messwerten                    | 723 |
| <b>II</b>  | <b>Analog anzeigende Messgeräte</b>                          | 723 |
| 1          | Grundlagen                                                   | 723 |
| 2          | Drehspul-Messwerk                                            | 724 |
| 3          | Dreheisen-Messwerk                                           | 725 |
| 4          | Elektrodynamisches Messwerk                                  | 725 |
| 5          | Symbole und Instrumentenbeschriftungen                       | 726 |
| <b>III</b> | <b>Oszilloskop</b>                                           | 727 |
| 1          | Übersicht                                                    | 727 |
| 2          | Aufbau eines Oszilloskopes                                   | 727 |
| 3          | Zusatzeinrichtungen                                          | 730 |
| <b>IV</b>  | <b>Schreibende Messgeräte</b>                                | 732 |
| 1          | Betriebsarten                                                | 732 |
| 2          | Schreibstiftauslenkung                                       | 733 |
| <b>V</b>   | <b>Digital anzeigende Messgeräte</b>                         | 733 |
| 1          | Digitalvoltmeter                                             | 733 |
| 2          | Digitalmultimeter                                            | 734 |
| 3          | Messung von Kapazitäten, Frequenzen und Stromverstärkungen   | 735 |
| 4          | Messung von Temperaturen                                     | 735 |



|            |                                                                                                  |            |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>VI</b>  | <b>Messverfahren zur Messung elektrischer Größen . . . . .</b>                                   | <b>736</b> |
| <b>1</b>   | <b>Messung von Gleichspannungen . . . . .</b>                                                    | <b>736</b> |
| 1.1        | Analog anzeigende Spannungsmessgeräte . . . . .                                                  | 736        |
| 1.2        | Digital anzeigende Spannungsmessgeräte . . . . .                                                 | 736        |
| 1.3        | Messabweichung durch den Innenwiderstand des Spannungsmessers . . . . .                          | 736        |
| 1.4        | Spannungsmessung mit dem Kompensator . . . . .                                                   | 737        |
| <b>2</b>   | <b>Messung von Gleichströmen . . . . .</b>                                                       | <b>737</b> |
| 2.1        | Analog anzeigende Strommessgeräte . . . . .                                                      | 737        |
| 2.2        | Digital anzeigende Strommessgeräte . . . . .                                                     | 737        |
| 2.3        | Messabweichung durch den Innenwiderstand des Strommessers . . . . .                              | 737        |
| <b>3</b>   | <b>Messbereichserweiterung . . . . .</b>                                                         | <b>738</b> |
| 3.1        | Spannungsmessung . . . . .                                                                       | 738        |
| 3.2        | Strommessung . . . . .                                                                           | 738        |
| <b>4</b>   | <b>Messung von Wechselspannungen . . . . .</b>                                                   | <b>738</b> |
| 4.1        | Analog anzeigende Wechselspannungsmessgeräte . . . . .                                           | 738        |
| 4.1.1      | Spannungsmesser mit Dreheisenmesswerk . . . . .                                                  | 738        |
| 4.1.2      | Spannungsmesser mit Drehspulmesswerk . . . . .                                                   | 739        |
| 4.1.3      | Spannungsmesser mit Thermoumformermesswerk . . . . .                                             | 739        |
| 4.2        | Digital anzeigende Wechselspannungsmessgeräte . . . . .                                          | 739        |
| <b>5</b>   | <b>Messung von Wechselströmen . . . . .</b>                                                      | <b>740</b> |
| 5.1        | Analog anzeigende Wechselstrommessgeräte . . . . .                                               | 740        |
| 5.2        | Digital anzeigende Wechselstrommessgeräte . . . . .                                              | 740        |
| <b>6</b>   | <b>Widerstands- und Impedanzmessung . . . . .</b>                                                | <b>740</b> |
| 6.1        | Gleichstrom-Messbrücken zur Widerstandsmessung . . . . .                                         | 740        |
| 6.1.1      | Grundlagen . . . . .                                                                             | 740        |
| 6.1.2      | Wheatstone-Messbrücke im Abgleichverfahren . . . . .                                             | 741        |
| 6.1.3      | Thomson-Messbrücke im Abgleichverfahren . . . . .                                                | 741        |
| 6.1.4      | Wheatstone-Messbrücke im Ausschlagverfahren . . . . .                                            | 742        |
| 6.1.5      | Wheatstone-Messbrücke im Ausschlagverfahren mit Widerstand in der<br>Brückendiagonalen . . . . . | 743        |
| 6.2        | Wechselstrom-Messbrücken zur Widerstands- und Impedanzmessung . . . . .                          | 743        |
| 6.2.1      | Messung von ohmschen Widerständen . . . . .                                                      | 743        |
| 6.2.2      | Messung von Impedanzen . . . . .                                                                 | 744        |
| 6.3        | Vergleich mit bekanntem Widerstand – Spannungsvergleich . . . . .                                | 744        |
| 6.4        | Messung von Strom und Spannung . . . . .                                                         | 745        |
| 6.5        | Widerstandsmessung mit analogen Multimetern . . . . .                                            | 745        |
| <b>7</b>   | <b>Leistungsmessung . . . . .</b>                                                                | <b>746</b> |
| 7.1        | Wirkleistungsmessung . . . . .                                                                   | 746        |
| 7.1.1      | Wirkleistungsmessung bei Wechselstrom . . . . .                                                  | 746        |
| 7.1.2      | Wirkleistungsmessung in Drehstromsystemen . . . . .                                              | 747        |
| 7.1.3      | Symmetrisch belastetes Drehstromsystem . . . . .                                                 | 747        |
| 7.1.4      | Beliebig belastetes Dreileiter-Drehstromsystem . . . . .                                         | 747        |
| 7.1.5      | Beliebig belastetes Vierleiter-Drehstromsystem . . . . .                                         | 748        |
| 7.2        | Blindleistungsmessung . . . . .                                                                  | 749        |
| 7.2.1      | Blindleistungsmessung bei Wechselstrom . . . . .                                                 | 749        |
| 7.2.2      | Blindleistungsmessung in symmetrisch belasteten Dreileiter-Drehstromsystemen . . . . .           | 749        |
| 7.2.3      | Blindleistungsmessung in beliebig belasteten Vierleiter-Drehstromsystemen . . . . .              | 749        |
| 7.3        | Scheinleistungsmessung . . . . .                                                                 | 750        |
| 7.4        | Messbereichserweiterung bei der Leistungsmessung . . . . .                                       | 750        |
| 7.5        | Leistungsfaktormessung . . . . .                                                                 | 750        |
| <b>8</b>   | <b>Messung der Arbeit . . . . .</b>                                                              | <b>750</b> |
| <b>9</b>   | <b>Messung von <math>L</math>, <math>C</math>, Gütefaktor und Verlustfaktor . . . . .</b>        | <b>752</b> |
| 9.1        | Messung von $ Z_L $ oder $ Z_C $ . . . . .                                                       | 752        |
| 9.2        | Messung von $Z_L$ , $Z_C$ , Gütefaktor und Verlustfaktor . . . . .                               | 752        |
| <b>10</b>  | <b>Messung magnetischer Größen . . . . .</b>                                                     | <b>753</b> |
| 10.1       | Magnetischer Fluss . . . . .                                                                     | 753        |
| 10.2       | Magnetische Flussdichte . . . . .                                                                | 754        |
| 10.3       | Magnetische Feldstärke . . . . .                                                                 | 754        |
| 10.4       | Permeabilität . . . . .                                                                          | 755        |
| <b>VII</b> | <b>Messverfahren zur Messung nichtelektrischer Größen . . . . .</b>                              | <b>756</b> |
| <b>1</b>   | <b>Messaufnehmer . . . . .</b>                                                                   | <b>757</b> |
| 1.1        | Ohmsche Aufnehmer . . . . .                                                                      | 757        |
| 1.2        | Kapazitive Aufnehmer . . . . .                                                                   | 759        |

|             |                                                                      |            |
|-------------|----------------------------------------------------------------------|------------|
| 1.3         | Induktive Aufnehmer . . . . .                                        | 759        |
| 1.4         | Optische Aufnehmer . . . . .                                         | 759        |
| 1.4.1       | Fotodiode . . . . .                                                  | 760        |
| 1.4.2       | Fotovervielfacher . . . . .                                          | 760        |
| 1.5         | Ladungsliefernde Aufnehmer . . . . .                                 | 760        |
| 1.6         | Thermische Aufnehmer . . . . .                                       | 761        |
| 1.6.1       | Thermoelemente . . . . .                                             | 761        |
| 1.7         | Chemische Aufnehmer . . . . .                                        | 763        |
| 1.7.1       | pH-Wert-Messeinrichtung mit Glaselektrode . . . . .                  | 763        |
| 1.7.2       | Aufnehmer zur Messung der Sauerstoffkonzentration . . . . .          | 764        |
| 1.8         | Aufnehmer zur Messung von Gaskonzentrationen allgemein . . . . .     | 764        |
| <b>2</b>    | <b>Messverfahren . . . . .</b>                                       | <b>765</b> |
| 2.1         | Kraftmessung mit Dehnungsmessstreifen (DMS). . . . .                 | 765        |
| 2.2         | Füllstandsmessung und Messung der Foliendicke . . . . .              | 767        |
| 2.3         | Drehzahlmessung . . . . .                                            | 768        |
| 2.4         | Durchflussmessung . . . . .                                          | 770        |
| 2.5         | Zeit- und Frequenzmessung . . . . .                                  | 772        |
| 2.6         | Weg- und Winkelmessung . . . . .                                     | 773        |
| 2.7         | Beschleunigungsmessung . . . . .                                     | 775        |
| <b>VIII</b> | <b>Messdatenaufbereitung . . . . .</b>                               | <b>776</b> |
| <b>1</b>    | <b>Verringerung der Störeinflüsse von außen . . . . .</b>            | <b>776</b> |
| <b>2</b>    | <b>Messverstärker . . . . .</b>                                      | <b>778</b> |
| <b>IX</b>   | <b>Bussysteme für die Messtechnik . . . . .</b>                      | <b>779</b> |
| <b>1</b>    | <b>Grundbegriffe . . . . .</b>                                       | <b>779</b> |
| <b>2</b>    | <b>IEC-Bus . . . . .</b>                                             | <b>780</b> |
| <b>3</b>    | <b>DIN-Messbus . . . . .</b>                                         | <b>782</b> |
| <b>4</b>    | <b>Aktuator-Sensor-Interface (ASI). . . . .</b>                      | <b>782</b> |
| <b>5</b>    | <b>CAN-BUS . . . . .</b>                                             | <b>785</b> |
| <b>6</b>    | <b>USB-Übertragung . . . . .</b>                                     | <b>786</b> |
| <b>7</b>    | <b>LAN (Local Area Network). . . . .</b>                             | <b>786</b> |
| <b>X</b>    | <b>Probleme bei der Digitalisierung analoger Messwerte . . . . .</b> | <b>786</b> |
| <b>1</b>    | <b>Fehler bei der Digitalisierung . . . . .</b>                      | <b>786</b> |
| <b>2</b>    | <b>Signal-Quantisierungs-Geräuschabstand . . . . .</b>               | <b>787</b> |
| <b>3</b>    | <b>Verbesserung des Signal-Rausch-Verhältnisses . . . . .</b>        | <b>788</b> |
| <b>4</b>    | <b>Abtast-Halte-Glied . . . . .</b>                                  | <b>788</b> |
| <b>5</b>    | <b>Aliasing . . . . .</b>                                            | <b>788</b> |
| <b>6</b>    | <b>Erfassung von Momentanwerten . . . . .</b>                        | <b>788</b> |
| <b>XI</b>   | <b>PC-gestützte Messverfahren und Messsignalanalyse . . . . .</b>    | <b>789</b> |
| <b>1</b>    | <b>Statistische Verfahren zur Messsignalauswertung. . . . .</b>      | <b>789</b> |
| <b>2</b>    | <b>Graphische Darstellung . . . . .</b>                              | <b>789</b> |
| <b>3</b>    | <b>Ermittlung von Kenngrößen, Klassierung . . . . .</b>              | <b>790</b> |
| <b>4</b>    | <b>Messsignalanalyse . . . . .</b>                                   | <b>790</b> |
| 4.1         | Verfahren . . . . .                                                  | 791        |
| 4.2         | Anwendungen . . . . .                                                | 791        |
| 4.2.1       | Messung des Klirrfaktors . . . . .                                   | 791        |
| 4.2.2       | Geräuschmessung zur Schadenfrüherkennung . . . . .                   | 791        |
| 4.2.3       | Abstandsmessung . . . . .                                            | 791        |
| 4.2.4       | Erkennung periodischer Signalanteile . . . . .                       | 791        |
| <b>5</b>    | <b>Automatisierung von Messabläufen . . . . .</b>                    | <b>791</b> |

# Energietechnik

|          |                                                    |     |
|----------|----------------------------------------------------|-----|
| <b>I</b> | <b>Elektrische Maschinen</b>                       | 793 |
| <b>1</b> | <b>Transformatoren</b>                             | 793 |
| 1.1      | Aufgaben eines Transformators                      | 793 |
| 1.2      | Bauteile eines Transformators                      | 793 |
| 1.2.1    | Eisenkerne                                         | 793 |
| 1.2.2    | Wicklungen                                         | 793 |
| 1.2.3    | Kühlung                                            | 794 |
| 1.3      | Wirkungsweise eines Einphasen-Transformators       | 794 |
| 1.3.1    | Leerlauf                                           | 794 |
| 1.3.2    | Belastung                                          | 795 |
| 1.3.3    | Leerlaufversuch                                    | 796 |
| 1.3.4    | Kurzschlussversuch                                 | 797 |
| 1.3.5    | Wirkungsgrad                                       | 798 |
| 1.4      | Aufbau und Schaltung von Drehstrom-Transformatoren | 799 |
| 1.4.1    | Wirkungsweise                                      | 799 |
| 1.4.2    | Schaltgruppen                                      | 800 |
| 1.4.3    | Unsymmetrische Belastungen                         | 800 |
| 1.5      | Parallelschalten von Transformatoren               | 800 |
| 1.6      | Transformatorschutz                                | 801 |
| 1.7      | Überlastung von Transformatoren                    | 801 |
| 1.8      | Aufstellen von Transformatoren                     | 801 |
| 1.9      | Sondertransformatoren                              | 802 |
| 1.9.1    | Spartransformatoren                                | 802 |
| 1.9.2    | Drosselspulen                                      | 802 |
| 1.9.3    | Streueldtransformatoren                            | 803 |
| 1.10     | Messwandler                                        | 803 |
| 1.10.1   | Spannungswandler                                   | 803 |
| 1.10.2   | Stromwandler                                       | 804 |
| <b>2</b> | <b>Drehstrommaschinen</b>                          | 804 |
| 2.1      | Die Drehstromasynchronmaschine                     | 805 |
| 2.1.1    | Wirkungsweise der Asynchronmaschine                | 805 |
| 2.1.2    | Betriebsverhalten der Asynchronmaschine            | 805 |
| 2.1.2.1  | Spannungsgleichung, Ersatzschaltbild               | 806 |
| 2.1.2.2  | Leistungsfluss                                     | 806 |
| 2.1.2.3  | Betriebskennlinien                                 | 807 |
| 2.1.3    | Kurzschlussläufer                                  | 807 |
| 2.1.3.1  | Anlassverfahren                                    | 808 |
| 2.1.3.2  | Bremsverfahren                                     | 809 |
| 2.1.3.3  | Drehzahlsteuerung                                  | 810 |
| 2.1.3.4  | Ständerspannungsänderung                           | 810 |
| 2.1.3.5  | Frequenzänderung                                   | 810 |
| 2.1.3.6  | Polumschaltung                                     | 812 |
| 2.1.4    | Der Schleifringläufer                              | 812 |
| 2.1.4.1  | Anlassverfahren                                    | 812 |
| 2.1.4.2  | Bremsverfahren                                     | 813 |
| 2.1.4.3  | Drehzahlsteuerung                                  | 813 |
| 2.2      | Linearmotor                                        | 814 |
| 2.2.1    | Aufbau des Linearmotors                            | 814 |
| 2.3      | Drehstromsynchronmaschinen                         | 814 |
| 2.3.1    | Wirkungsweise der Synchronmaschine                 | 815 |
| 2.3.2    | Spannungsgleichung der Synchronmaschine            | 816 |
| 2.3.3    | Anlauf und Synchronisation                         | 816 |
| <b>3</b> | <b>Einphasen-Asynchronmotoren</b>                  | 817 |
| 3.1      | Einsträngiger Motor                                | 817 |
| 3.2      | Zweistängiger Motor                                | 817 |
| 3.3      | Kondensatormotor                                   | 817 |
| 3.4      | Spaltpolmotor                                      | 818 |
| <b>4</b> | <b>Drehstrommotor im Einphasenbetrieb</b>          | 818 |
| <b>5</b> | <b>Sonderbauformen</b>                             | 819 |
| 5.1      | Schrittmotor                                       | 819 |
| 5.2      | Servomotor                                         | 819 |

|           |                                                              |            |
|-----------|--------------------------------------------------------------|------------|
| 5.2.1     | Scheibenläufermotor . . . . .                                | 820        |
| 5.2.2     | Stabankermotoren . . . . .                                   | 820        |
| <b>6</b>  | <b>Gleichstrommaschinen . . . . .</b>                        | <b>820</b> |
| 6.1       | Aufbau und Wirkungsweise . . . . .                           | 821        |
| 6.1.1     | Ankerrückwirkungen . . . . .                                 | 821        |
| 6.2       | Betriebsverhalten von Gleichstrommaschinen . . . . .         | 822        |
| 6.2.1     | Nebenschlussmotor . . . . .                                  | 822        |
| 6.2.2     | Reihenschlussmotor . . . . .                                 | 824        |
| 6.2.3     | Doppelschlussmotor . . . . .                                 | 826        |
| 6.3       | Betriebsverhalten von Gleichstromgeneratoren . . . . .       | 826        |
| 6.3.1     | Fremderregter Generator . . . . .                            | 827        |
| 6.3.2     | Nebenschlussgenerator . . . . .                              | 827        |
| 6.3.3     | Reihenschlussgenerator . . . . .                             | 827        |
| 6.3.4     | Doppelschlussgenerator . . . . .                             | 828        |
| 6.4       | Gleichstrommaschine am Wechsel- oder Drehstromnetz . . . . . | 828        |
| 6.4.1     | Wechselstrombrücken . . . . .                                | 828        |
| 6.4.1.1   | Einquadrantenantrieb (1-Q-Betrieb) . . . . .                 | 828        |
| 6.4.1.2   | Zweiquadrantenantrieb (2-Q-Betrieb) . . . . .                | 829        |
| 6.4.1.3   | Vierquadrantenantrieb (4-Q-Betrieb) . . . . .                | 829        |
| 6.4.2     | Drehstrombrücken . . . . .                                   | 830        |
| 6.4.2.1   | Zweiquadrantenbetrieb (2-Q-Betrieb) . . . . .                | 830        |
| 6.4.2.2   | Vierquadrantenbetrieb (4-Q-Betrieb) . . . . .                | 830        |
| 6.5       | Universalmotor . . . . .                                     | 830        |
| <b>7</b>  | <b>Auswahl von Motoren . . . . .</b>                         | <b>831</b> |
| 7.1       | Auswahl unter Berücksichtigung der Normen . . . . .          | 831        |
| 7.1.1     | Bauform und Baugrößen . . . . .                              | 831        |
| 7.1.2     | Schutzart . . . . .                                          | 831        |
| 7.1.3     | Kühlart . . . . .                                            | 834        |
| 7.1.4     | Isolierstoffklassen . . . . .                                | 834        |
| 7.1.5     | Motorschutz . . . . .                                        | 834        |
| 7.1.5.1   | Thermischer Auslöser . . . . .                               | 835        |
| 7.1.5.2   | Thermistor-Motorvollschutz . . . . .                         | 836        |
| 7.1.6     | Abstimmung des Motors auf die Arbeitsmaschine . . . . .      | 836        |
| 7.1.6.1   | Wartung von Maschinen . . . . .                              | 837        |
| 7.1.7     | Störungsbeseitigung . . . . .                                | 838        |
| 7.1.8     | Anschlusskennzeichnungen von Maschinen . . . . .             | 840        |
| <b>II</b> | <b>Elektrische Anlagen . . . . .</b>                         | <b>841</b> |
| <b>1</b>  | <b>Struktur der Elektrizitätswirtschaft . . . . .</b>        | <b>841</b> |
| <b>2</b>  | <b>Elektrische Energieerzeugung . . . . .</b>                | <b>842</b> |
| 2.1       | Energiebedarf . . . . .                                      | 842        |
| 2.3       | Wärme- und Wasserkraftwerke . . . . .                        | 843        |
| 2.2       | Energiereserven . . . . .                                    | 843        |
| 2.3.1     | Konventionelle Dampfkraftwerke . . . . .                     | 844        |
| 2.3.2     | Kombikraftwerke . . . . .                                    | 844        |
| 2.3.3     | Kernkraftwerke . . . . .                                     | 844        |
| 2.3.3.1   | Druckwasserreaktor . . . . .                                 | 845        |
| 2.3.3.2   | Siedewasserreaktor . . . . .                                 | 845        |
| 2.3.3.3   | Hochtemperaturreaktor . . . . .                              | 845        |
| 2.3.4     | Umweltschutz . . . . .                                       | 846        |
| 2.4       | Wasserkraftwerke . . . . .                                   | 847        |
| 2.5       | Windkraftwerke . . . . .                                     | 848        |
| 2.6       | Solarkraftwerke . . . . .                                    | 848        |
| 2.6.1     | Sonnenwärmekraftwerke . . . . .                              | 848        |
| 2.6.2     | Photovoltaische Kraftwerke . . . . .                         | 849        |
| 2.6.3     | Solar-Wasserstoff-Anlage . . . . .                           | 849        |
| 2.7       | Sonstige Kraftwerke . . . . .                                | 849        |
| 2.7.1     | Biomasse . . . . .                                           | 849        |
| 2.7.2     | Brennstoffzellen . . . . .                                   | 849        |
| 2.7.3     | Fusionsreaktor . . . . .                                     | 850        |
| <b>3</b>  | <b>Elektrische Energieverteilung . . . . .</b>               | <b>850</b> |
| 3.1.1     | Gleichstromnetz . . . . .                                    | 851        |
| 3.1.2     | Wechselstromnetz . . . . .                                   | 851        |
| 3.1.3     | Drehstromnetz . . . . .                                      | 851        |
| 3.2       | Netzstrukturen . . . . .                                     | 852        |
| 3.2.1     | Strahlennetz . . . . .                                       | 852        |

|             |                                                     |            |
|-------------|-----------------------------------------------------|------------|
| 3.2.2       | Ringnetz . . . . .                                  | 853        |
| 3.2.3       | Maschennetz . . . . .                               | 853        |
| 3.2.4       | Verbundnetz . . . . .                               | 853        |
| <b>4</b>    | <b>Betriebsmittel der Energietechnik . . . . .</b>  | <b>854</b> |
| 4.1         | Bemessung und Auswahl . . . . .                     | 854        |
| 4.2         | Kabel, Leitungen und Schienen . . . . .             | 854        |
| 4.2.1       | Freileitungen . . . . .                             | 854        |
| 4.2.2       | Kabel . . . . .                                     | 855        |
| 4.2.2.1     | Leiterwerkstoffe . . . . .                          | 855        |
| 4.2.2.2     | Leiterisolierung . . . . .                          | 856        |
| 4.2.2.4     | Erwärmung . . . . .                                 | 856        |
| 4.2.2.5     | Verlegung . . . . .                                 | 858        |
| 4.2.2.6     | Verlegung in Erde . . . . .                         | 858        |
| 4.2.2.7     | Verlegung in Luft . . . . .                         | 858        |
| 4.2.2.8     | Überstromschutz . . . . .                           | 862        |
| 4.2.2.8.1   | Überlastschutz . . . . .                            | 862        |
| 4.2.2.8.2   | Kurzschlusschutz . . . . .                          | 863        |
| 4.2.3       | Leitungen . . . . .                                 | 864        |
| 4.2.3.1     | Spannungsfall auf Kabeln und Leitungen . . . . .    | 867        |
| 4.2.3.2     | Verlegung von Kabeln und Leitungen . . . . .        | 868        |
| 4.2.3.3     | Ersatzschaltung von Kabeln und Leitungen . . . . .  | 868        |
| 4.2.4       | Sammelschienen . . . . .                            | 868        |
| 4.2.4.2     | Kurzschlussfestigkeit . . . . .                     | 871        |
| 4.2.4.3     | Mechanische Kurzschlussfestigkeit . . . . .         | 871        |
| 4.2.4.4     | Thermische Kurzschlussfestigkeit . . . . .          | 872        |
| 4.3         | Schaltanlagen . . . . .                             | 872        |
| 4.3.1       | Hochspannungsschaltanlagen . . . . .                | 873        |
| 4.3.2       | Mittelspannungsanlagen . . . . .                    | 873        |
| 4.3.2.1     | Bauart von Mittelspannungsschaltanlagen . . . . .   | 873        |
| 4.3.2.2     | Störlichtbogenfestigkeit . . . . .                  | 874        |
| 4.3.2.3     | Schaltgeräte . . . . .                              | 875        |
| 4.3.2.3.1   | Trennschalter . . . . .                             | 875        |
| 4.3.2.3.2   | Last- und Lasttrennschalter . . . . .               | 876        |
| 4.3.2.3.3   | Leistungsschalter . . . . .                         | 876        |
| 4.3.2.3.4   | Erdungsschalter . . . . .                           | 877        |
| 4.3.2.3.5   | Sicherungen . . . . .                               | 877        |
| 4.3.2.3.6   | $I_s$ -Begrenzer . . . . .                          | 877        |
| 4.3.2.4     | Schutzgeräte . . . . .                              | 878        |
| 4.3.2.4.1   | Überstromrelais/Überstromzeitrelais . . . . .       | 878        |
| 4.3.2.4.2   | Überlastrelais . . . . .                            | 878        |
| 4.3.2.4.3   | Differentialrelais . . . . .                        | 878        |
| 4.3.2.4.4   | Distanzrelais . . . . .                             | 878        |
| 4.3.2.4.5   | Kurzunterbrechungsrelais . . . . .                  | 878        |
| 4.3.2.4.6   | Erdschlussrichtungsrelais . . . . .                 | 878        |
| 4.3.3       | Anlagenräume . . . . .                              | 878        |
| 4.3.4       | Niederspannungsschaltanlagen . . . . .              | 879        |
| 4.3.4.1     | Niederspannungs-Schaltgerätekombinationen . . . . . | 880        |
| 4.3.4.1.1   | Niederspannungs-Schaltgeräte . . . . .              | 880        |
| 4.3.4.1.1.1 | Leistungsschalter . . . . .                         | 880        |
| 4.3.4.1.1.2 | Schütze . . . . .                                   | 880        |
| 4.3.4.1.1.3 | Sicherungen . . . . .                               | 882        |
| 4.3.4.1.1.4 | Leitungsschutzschalter . . . . .                    | 882        |
| 4.3.4.1.1.5 | Fehlerstromschutzschalter . . . . .                 | 882        |
| <b>5</b>    | <b>Schutzmaßnahmen . . . . .</b>                    | <b>882</b> |
| 5.1         | Wirkung des Stroms . . . . .                        | 883        |
| 5.2         | Schutz gegen direktes Berühren . . . . .            | 883        |
| 5.3         | Schutz gegen indirektes Berühren . . . . .          | 883        |
| 5.3.1       | Schutzisolierung . . . . .                          | 884        |
| 5.3.2       | Schutztrennung . . . . .                            | 884        |
| 5.3.3       | Schutz durch nichtleitende Räume . . . . .          | 885        |
| 5.3.4       | Schutzkleinspannung . . . . .                       | 885        |

|            |                                                   |            |
|------------|---------------------------------------------------|------------|
| 5.3.5      | Funktionskleinspannung . . . . .                  | 886        |
| 5.3.6      | Schutz durch Abschalten und Melden . . . . .      | 886        |
| 5.3.6.1    | Überstromschutzeinrichtung . . . . .              | 887        |
| 5.3.6.2    | FI-Schutzeinrichtung . . . . .                    | 888        |
| 5.3.6.3    | Isolationsüberwachung . . . . .                   | 888        |
| 5.3.6.4    | Zusätzlicher Potentialausgleich . . . . .         | 888        |
| <b>6</b>   | <b>Arbeiten an elektrischen Anlagen . . . . .</b> | <b>889</b> |
| <b>7</b>   | <b>Überprüfung der Schutzmaßnahme . . . . .</b>   | <b>890</b> |
| <b>8</b>   | <b>Kurzschlussberechnung (VDE 0102) . . . . .</b> | <b>891</b> |
| <b>III</b> | <b>Elektrische Energieanwendung . . . . .</b>     | <b>893</b> |
| <b>1</b>   | <b>Kompensationsanlagen . . . . .</b>             | <b>893</b> |
| <b>2</b>   | <b>Beleuchtungsanlagen . . . . .</b>              | <b>895</b> |
| 2.1        | Grundgrößen der Lichttechnik . . . . .            | 895        |
| 2.2        | Lichtquellen . . . . .                            | 896        |
| 2.3        | Glühlampen. . . . .                               | 897        |
| 2.4        | Leuchtstofflampen . . . . .                       | 897        |
| 2.5        | Entladungslampen. . . . .                         | 897        |
| 2.6        | Leuchten . . . . .                                | 897        |
| 2.7        | Berechnung von Beleuchtungsanlagen . . . . .      | 898        |

## Nachrichtentechnik

|          |                                                                            |            |
|----------|----------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>I</b> | <b>Grundlagen der Nachrichtenübertragung . . . . .</b>                     | <b>901</b> |
| <b>1</b> | <b>Prinzip der elektrischen Nachrichtenübertragung. . . . .</b>            | <b>901</b> |
| <b>2</b> | <b>Aufgaben der Nachrichtentechnik . . . . .</b>                           | <b>903</b> |
| <b>3</b> | <b>Grundbegriffe . . . . .</b>                                             | <b>903</b> |
| <b>4</b> | <b>Nachricht, Information und Signal . . . . .</b>                         | <b>903</b> |
| 4.1      | Informationsgehalt . . . . .                                               | 903        |
| 4.2      | Signale in der Nachrichtentechnik . . . . .                                | 903        |
| 4.3      | Entropie . . . . .                                                         | 904        |
| 4.4      | Redundanz . . . . .                                                        | 904        |
| 4.5      | Informationsfluss . . . . .                                                | 905        |
| 4.6      | Kanalkapazität, Dynamik . . . . .                                          | 905        |
| 4.7      | Nachrichtenquader . . . . .                                                | 905        |
| 4.8      | Signale im Zeitbereich: Analog, digital, kontinuierlich, diskret . . . . . | 906        |
| 4.9      | Signale im Frequenzbereich . . . . .                                       | 906        |
| 4.9.1    | Periodische sinusförmige Signale . . . . .                                 | 907        |
| 4.9.2    | Periodische nichtsinusförmige Signale . . . . .                            | 907        |
| 4.9.3    | Nichtperiodische Signale . . . . .                                         | 907        |
| 4.10     | Abtasttheorem von Shannon . . . . .                                        | 910        |
| 4.11     | Zufällige (stochastische) Signale. . . . .                                 | 911        |
| 4.11.1   | Rauschen. . . . .                                                          | 911        |
| 4.11.2   | Kenngrößen von stochastischen Signalen . . . . .                           | 912        |
| 4.11.3   | Anwendungen der Kenngrößen von stochastischen Signalen . . . . .           | 913        |
| 4.12     | Verzerrungen . . . . .                                                     | 913        |
| 4.12.1   | Lineare Verzerrungen . . . . .                                             | 914        |
| 4.12.2   | Nichtlineare Verzerrungen . . . . .                                        | 914        |
| 4.12.3   | Klirrfaktor . . . . .                                                      | 915        |
| <b>5</b> | <b>Kenngrößen der Übertragungsstrecke . . . . .</b>                        | <b>915</b> |
| 5.1      | Dämpfungsfaktor . . . . .                                                  | 915        |
| 5.2      | Übertragungsfaktor . . . . .                                               | 915        |
| 5.3      | Dämpfungsmaß . . . . .                                                     | 916        |
| 5.4      | Übertragungsmaß, Verstärkungsmaß. . . . .                                  | 916        |
| 5.5      | Pegel . . . . .                                                            | 916        |
| 5.5.1    | Absoluter Pegel . . . . .                                                  | 916        |
| 5.5.2    | Relativer Pegel . . . . .                                                  | 916        |

|            |                                                                                                                    |            |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.5.3      | Dämpfungsmaß, Übertragungsmaß . . . . .                                                                            | 917        |
| 5.5.4      | Pegeldiagramm . . . . .                                                                                            | 917        |
| <b>II</b>  | <b>Zweitore, Vierpole . . . . .</b>                                                                                | <b>918</b> |
| <b>1</b>   | <b>Zweitor allgemein. . . . .</b>                                                                                  | <b>918</b> |
| 1.1        | Grundlagen . . . . .                                                                                               | 918        |
| 1.2        | Zweitorgleichungen, Zusammenschaltung von Zweitoren . . . . .                                                      | 918        |
| 1.3        | Bestimmung der Zweitorparameter . . . . .                                                                          | 920        |
| 1.4        | Elementarzweitore . . . . .                                                                                        | 921        |
| 1.5        | Betriebskenngrößen . . . . .                                                                                       | 921        |
| <b>2</b>   | <b>Spezielle Zweitore. . . . .</b>                                                                                 | <b>929</b> |
| 2.1        | Übertragungssymmetrische (reziproke) Zweitore . . . . .                                                            | 929        |
| 2.2        | Widerstandssymmetrische Zweitore . . . . .                                                                         | 930        |
| 2.3        | Längssymmetrische Zweitore. . . . .                                                                                | 930        |
| 2.4        | Rückwirkungsfreie Zweitore . . . . .                                                                               | 930        |
| <b>3</b>   | <b>Wellenparameter passiver Zweitore . . . . .</b>                                                                 | <b>930</b> |
| 3.1        | Allgemeine passive Zweitore . . . . .                                                                              | 930        |
| 3.2        | Längssymmetrische passive Zweitore. . . . .                                                                        | 931        |
| 3.3        | Wellenwiderstand bei passiven längssymmetrischen Zweitoren . . . . .                                               | 931        |
| 3.4        | Übertragungsmaß bei passiven längssymmetrischen Zweitoren . . . . .                                                | 932        |
| 3.5        | Spezielle Zweitore . . . . .                                                                                       | 932        |
| 3.5.1      | Doppel-T-Filter . . . . .                                                                                          | 932        |
| 3.5.2      | Kreuzschaltung . . . . .                                                                                           | 933        |
| 3.5.3      | Frequenzkompensierter Spannungsteiler . . . . .                                                                    | 933        |
| <b>III</b> | <b>Leitungen . . . . .</b>                                                                                         | <b>934</b> |
| <b>1</b>   | <b>Leitungsbeläge und Leitungsgleichungen . . . . .</b>                                                            | <b>934</b> |
| <b>2</b>   | <b>Leitung mit sinusförmigen Spannungen und Strömen. . . . .</b>                                                   | <b>936</b> |
| 2.1        | Allgemeine Lösung . . . . .                                                                                        | 936        |
| 2.2        | Wellenwiderstand . . . . .                                                                                         | 936        |
| 2.3        | Ausbreitungskoeffizient . . . . .                                                                                  | 937        |
| 2.4        | Verlustlose Leitung . . . . .                                                                                      | 937        |
| 2.5        | Lösung mit Zeigerdarstellung . . . . .                                                                             | 937        |
| 2.6        | Unendlich lange Leitung . . . . .                                                                                  | 938        |
| 2.7        | Anpassung. . . . .                                                                                                 | 938        |
| 2.8        | Phasengeschwindigkeit, Gruppengeschwindigkeit. . . . .                                                             | 938        |
| <b>3</b>   | <b>Leitung mit sinusförmigen Spannungen und Strömen und beliebiger Abschlussimpedanz <math>Z_L</math>. . . . .</b> | <b>938</b> |
| 3.1        | Reflexionsfaktor, Übertragungsfaktor. . . . .                                                                      | 938        |
| 3.2        | Eingangsimpedanz. . . . .                                                                                          | 939        |
| 3.3        | Verzerrungsfreie Leitung. . . . .                                                                                  | 940        |
| 3.4        | Leitung als Vierpol. . . . .                                                                                       | 940        |
| 3.4.1      | Allgemeine Ersatzschaltung . . . . .                                                                               | 940        |
| 3.4.2      | Elektrisch kurze Leitung. . . . .                                                                                  | 941        |
| <b>4</b>   | <b>Verlustlose Leitung . . . . .</b>                                                                               | <b>941</b> |
| 4.1        | Eigenschaften . . . . .                                                                                            | 941        |
| 4.2        | Wanderwellen bei Reflexion am Leitungsein- und -ausgang . . . . .                                                  | 941        |
| 4.3        | Elektrisch lange Leitung . . . . .                                                                                 | 942        |
| 4.4        | Leitung als Transformator . . . . .                                                                                | 943        |
| 4.5        | Stehende Wellen. . . . .                                                                                           | 943        |
| 4.6        | Kettenleiter . . . . .                                                                                             | 943        |
| 4.7        | Wellenfilter . . . . .                                                                                             | 944        |
| 4.8        | Filterentwurf. . . . .                                                                                             | 945        |
| 4.9        | Dielektrische Filter. . . . .                                                                                      | 945        |
| <b>5</b>   | <b>Daten von Leitungen . . . . .</b>                                                                               | <b>949</b> |
| <b>6</b>   | <b>Hochfrequenzleitungen. . . . .</b>                                                                              | <b>951</b> |
| 6.1        | Hochfrequenz-Koaxialkabel . . . . .                                                                                | 951        |
| 6.2        | Hohlleiter . . . . .                                                                                               | 953        |
| 6.3        | Streifenleitungen. . . . .                                                                                         | 956        |
| <b>7</b>   | <b>s-Parameter . . . . .</b>                                                                                       | <b>960</b> |
| 7.1        | Signalflussdiagramm. . . . .                                                                                       | 960        |
| 7.2        | Leistungsverstärkung. . . . .                                                                                      | 962        |
| <b>8</b>   | <b>Kreisdiagramm . . . . .</b>                                                                                     | <b>962</b> |
| 8.1        | Doppel-Kreisdiagramm . . . . .                                                                                     | 965        |

|           |                                                                          |            |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------|------------|
| 8.2       | $s$ -Parameter im Kreisdiagramm . . . . .                                | 966        |
| <b>IV</b> | <b>Antennen . . . . .</b>                                                | <b>968</b> |
| 1         | Grundlagen . . . . .                                                     | 968        |
| 2         | Kenngrößen . . . . .                                                     | 970        |
| 3         | Ausführungsformen von Antennen . . . . .                                 | 972        |
| 3.1       | Vertikalantenne . . . . .                                                | 972        |
| 3.2       | Rahmenantenne . . . . .                                                  | 972        |
| 3.3       | Ferritantenne . . . . .                                                  | 972        |
| 3.4       | $\lambda/2$ -Dipol, $\lambda/2$ -Faltdipol . . . . .                     | 973        |
| 3.5       | Breitbanddipol . . . . .                                                 | 973        |
| 3.6       | Gruppenstrahler . . . . .                                                | 973        |
| 3.7       | Yagi-Antenne . . . . .                                                   | 973        |
| 3.8       | Langdrahtantenne . . . . .                                               | 974        |
| 3.9       | Rohrschlitzstrahler . . . . .                                            | 974        |
| 3.10      | Parabolantenne . . . . .                                                 | 974        |
| 4         | Wellenausbreitung . . . . .                                              | 974        |
| 4.1       | Boden- und Raumwelle . . . . .                                           | 974        |
| 4.2       | Erdatmosphäre . . . . .                                                  | 975        |
| 4.3       | Wellenausbreitung im Plasma . . . . .                                    | 975        |
| 4.4       | Wellenausbreitung im Bereich 30 kHz bis 30 GHz . . . . .                 | 976        |
| <b>V</b>  | <b>Modulation . . . . .</b>                                              | <b>978</b> |
| 1         | Übersicht . . . . .                                                      | 978        |
| 2         | Sinusträger – mit Analogsignal moduliert . . . . .                       | 978        |
| 2.1       | Amplitudenmodulation (AM) . . . . .                                      | 979        |
| 2.1.1     | Modulation durch Multiplikation . . . . .                                | 979        |
| 2.1.2     | Kenngrößen der Amplitudenmodulation . . . . .                            | 979        |
| 2.1.3     | Modulation an einer quadratischen Kennlinie . . . . .                    | 980        |
| 2.1.4     | Modulation an einer nichtlinearen nichtquadratischen Kennlinie . . . . . | 981        |
| 2.1.5     | Zeigerdiagramm . . . . .                                                 | 981        |
| 2.1.6     | Modulationstrapez . . . . .                                              | 981        |
| 2.1.7     | Demodulation von AM . . . . .                                            | 982        |
| 2.1.8     | Leistung von Träger und Seitenbändern . . . . .                          | 982        |
| 2.1.9     | Störungen bei amplitudenmodulierten Signalen . . . . .                   | 982        |
| 2.1.10    | Kreuzmodulation . . . . .                                                | 983        |
| 2.2       | Sonderformen der Amplitudenmodulation . . . . .                          | 983        |
| 2.2.1     | Einseitenbandmodulation (ESB, SSB) . . . . .                             | 983        |
| 2.2.2     | Restseitenbandmodulation (RM, VSB) . . . . .                             | 984        |
| 2.2.3     | Quadraturmodulation . . . . .                                            | 985        |
| 2.3       | Technische Ausführung der Amplitudenmodulation . . . . .                 | 985        |
| 2.4       | Winkelmodulation . . . . .                                               | 986        |
| 2.4.1     | Grundlagen . . . . .                                                     | 986        |
| 2.4.2     | Kenngrößen . . . . .                                                     | 987        |
| 2.4.3     | Zeigerdarstellung . . . . .                                              | 987        |
| 2.4.4     | Spektrum und Bandbreitenbedarf . . . . .                                 | 987        |
| 2.4.5     | Störungen bei winkelmodulierten Signalen . . . . .                       | 988        |
| 2.4.6     | Preemphasis, Deemphasis . . . . .                                        | 989        |
| 2.4.7     | Erzeugung von Frequenz- und Phasenmodulation . . . . .                   | 989        |
| 2.4.8     | Demodulation von Frequenz- und Phasenmodulation . . . . .                | 991        |
| 3         | Sinusträger – mit Digitalsignal moduliert . . . . .                      | 992        |
| 3.1       | Amplitudenumtastung (ASK) . . . . .                                      | 992        |
| 3.2       | Frequenzumtastung (FSK) . . . . .                                        | 993        |
| 3.3       | Phasenumtastung (PSK) . . . . .                                          | 993        |
| 3.3.1     | Zweiphasenumtastung (2-PSK) . . . . .                                    | 994        |
| 3.3.2     | Vierphasenumtastung (4-PSK) . . . . .                                    | 995        |
| 3.3.3     | $n$ -Phasen-Umtastung . . . . .                                          | 996        |
| 3.3.4     | QAPSK kombinierte Amplituden-Phasenumtastung . . . . .                   | 997        |
| 4         | Pulsträger uncodiert . . . . .                                           | 997        |
| 4.1       | Pulsamplitudenmodulation (PAM) . . . . .                                 | 997        |
| 4.2       | Pulsfrequenz- und Pulsphasen- modulation (PFM, PPM) . . . . .            | 997        |
| 4.3       | Pulsdauermodulation (PDM) . . . . .                                      | 999        |
| 4.4       | Pulsmodulation (PCM) . . . . .                                           | 999        |
| 4.4.1     | Prinzip . . . . .                                                        | 999        |
| 4.4.2     | Aliasing-Effekt . . . . .                                                | 1000       |



|             |                                                                      |             |
|-------------|----------------------------------------------------------------------|-------------|
| 4.4.3       | Abtast-Halte-Glied . . . . .                                         | 1000        |
| 4.4.4       | Quantisierung . . . . .                                              | 1002        |
| 4.4.5       | Quantisierungsgeräusch . . . . .                                     | 1002        |
| 4.4.6       | Kompondierung . . . . .                                              | 1002        |
| 4.4.7       | Codierung . . . . .                                                  | 1003        |
| 4.4.8       | Deltamodulation (DM) und Differenz-Pulsmodulation (DPCM) . . . . .   | 1004        |
| <b>VI</b>   | <b>Filter . . . . .</b>                                              | <b>1005</b> |
| 1           | <b>Einfache passive R-C-Filter . . . . .</b>                         | <b>1005</b> |
| 1.1         | Allgemeines . . . . .                                                | 1005        |
| 1.2         | Passive R-C-Filter . . . . .                                         | 1006        |
| 1.2.1       | Passive R-C-Tiefpassfilter . . . . .                                 | 1006        |
| 1.2.2       | Passive R-C-Hochpassfilter . . . . .                                 | 1007        |
| 1.2.3       | Bandpass aus R-C-Hoch- und Tiefpassfilter . . . . .                  | 1007        |
| 1.2.4       | R-L-C-Bandpass und -Bandsperr . . . . .                              | 1009        |
| 1.2.5       | Bandfilter . . . . .                                                 | 1011        |
| 2           | <b>Weitere Ausführungsformen . . . . .</b>                           | <b>1012</b> |
| 2.1         | Quarzfilter, keramische Filter . . . . .                             | 1012        |
| 2.2         | Digitale Filter . . . . .                                            | 1013        |
| 2.3         | Filter mit geschalteten Kondensatoren, SC-Filter . . . . .           | 1014        |
| 3           | <b>Allgemeiner Filterentwurf . . . . .</b>                           | <b>1015</b> |
| 3.1         | Allgemeine Eigenschaften und Entwurfskriterien . . . . .             | 1015        |
| 3.2         | Tiefpassfilter . . . . .                                             | 1017        |
| 3.3         | Filtertransformationen . . . . .                                     | 1021        |
| 3.3.1       | Hochpassfilter . . . . .                                             | 1021        |
| 3.3.2       | Bandpassfilter . . . . .                                             | 1022        |
| 3.3.3       | Bandsperr . . . . .                                                  | 1022        |
| 3.4         | Besondere Filterschaltungen . . . . .                                | 1022        |
| 3.4.1       | Allpassfilter . . . . .                                              | 1022        |
| 3.4.2       | Sallen-Key-Filter . . . . .                                          | 1022        |
| <b>VII</b>  | <b>Empfängerschaltungstechnik . . . . .</b>                          | <b>1023</b> |
| 1           | <b>Geradeusempfänger . . . . .</b>                                   | <b>1023</b> |
| 2           | <b>Überlagerungsempfänger . . . . .</b>                              | <b>1023</b> |
| 3           | <b>Automatische Verstärkungsregelung (AVR) . . . . .</b>             | <b>1024</b> |
| 4           | <b>Weitere Schaltungskonzepte . . . . .</b>                          | <b>1024</b> |
| <b>VIII</b> | <b>Ton- und Bildübertragung . . . . .</b>                            | <b>1024</b> |
| 1           | <b>Rundfunk-Stereoübertragung . . . . .</b>                          | <b>1024</b> |
| 2           | <b>Digitale Farbfernsehtchnik . . . . .</b>                          | <b>1026</b> |
| <b>IX</b>   | <b>Mehrfachübertragung – Multiplexverfahren . . . . .</b>            | <b>1031</b> |
| 1           | <b>Zeitmultiplexverfahren . . . . .</b>                              | <b>1032</b> |
| 1.1         | Analoge Signalübertragung . . . . .                                  | 1032        |
| 1.2         | Digital codierte Signalübertragung . . . . .                         | 1033        |
| 2           | Frequenzmultiplexverfahren . . . . .                                 | 1033        |
| <b>X</b>    | <b>Richtfunktechnik . . . . .</b>                                    | <b>1035</b> |
| <b>XI</b>   | <b>Nachrichtenübertragung über Satellit . . . . .</b>                | <b>1036</b> |
| <b>XII</b>  | <b>Nachrichtenübertragung über Lichtwellenleiter (LWL) . . . . .</b> | <b>1040</b> |
| 1           | <b>Physikalische Grundlagen . . . . .</b>                            | <b>1040</b> |
| 2           | <b>Grundmodelle von Lichtwellenleitern . . . . .</b>                 | <b>1041</b> |
| 2.1         | Mehrmoden-Stufenindex mit Totalreflexion . . . . .                   | 1041        |
| 2.2         | Mehrmoden-Gradientenindex . . . . .                                  | 1042        |
| 2.3         | Einmoden-Stufenindex . . . . .                                       | 1042        |
| 4           | <b>Lichtsender . . . . .</b>                                         | <b>1042</b> |
| 5           | <b>Lichtempfänger . . . . .</b>                                      | <b>1043</b> |
| 6           | <b>Verbinden von Lichtleitern . . . . .</b>                          | <b>1043</b> |
| 7           | <b>Optische Schalter . . . . .</b>                                   | <b>1044</b> |
| <b>XIII</b> | <b>Funkmesstechnik . . . . .</b>                                     | <b>1044</b> |

|                                                                           |      |
|---------------------------------------------------------------------------|------|
| <b>1 Radar</b>                                                            | 1044 |
| 1.1 Grundlagen, Kenngrößen                                                | 1044 |
| 1.2 Daten von Radaranlagen                                                | 1048 |
| <b>2 Funkortungssystem OMEGA</b>                                          | 1049 |
| <b>3 GPS – Global Positioning System</b>                                  | 1049 |
| <b>XIV Elektroakustische Wandler</b>                                      | 1050 |
| <b>1 Definitionen, Kenngrößen</b>                                         | 1050 |
| <b>2 Schallempfänger</b>                                                  | 1052 |
| 2.1 Kenngrößen für Mikrofone                                              | 1052 |
| 2.2 Mikrofonsysteme                                                       | 1053 |
| 2.2.1 Kohlemikrofon                                                       | 1053 |
| 2.2.2 Kristallmikrofon                                                    | 1054 |
| 2.2.3 (Elektro-)Magnetisches Mikrofon                                     | 1054 |
| 2.2.4 (Elektro-)Dynamisches Mikrofon als Tauchspul- oder Bändchenmikrofon | 1054 |
| 2.2.5 Kondensatormikrofon                                                 | 1054 |
| 2.2.6 Elektret-Kondensatormikrofon                                        | 1055 |
| 2.3 Daten und Eigenschaften verschiedener Mikrofonsysteme                 | 1055 |
| <b>3 Schallsender</b>                                                     | 1055 |
| 3.1 Lautsprecher- und Hörer-Systeme                                       | 1055 |
| 3.1.1 Elektrodynamisches System                                           | 1055 |
| 3.1.2 (Elektro-)Magnetisches System                                       | 1056 |
| 3.1.3 Dynamisches System                                                  | 1057 |
| 3.1.4 Elektrostatisches System                                            | 1057 |
| 3.1.5 Piezoelektrisches System                                            | 1057 |
| 3.2 Kenngrößen, Daten                                                     | 1057 |
| <b>XV Vermittlungstechnik</b>                                             | 1059 |
| <b>1 Grundbegriffe</b>                                                    | 1059 |
| <b>2 Vermittlung</b>                                                      | 1059 |
| <b>3 Verkehrstheorie</b>                                                  | 1061 |
| <b>4 Endgerät</b>                                                         | 1061 |
| <b>XVI Kommunikations- und Datennetze</b>                                 | 1063 |
| <b>1 Strukturen lokaler Kommunikations- und Datennetze</b>                | 1063 |
| <b>2 Öffentliche Kommunikations- und Datennetze</b>                       | 1063 |
| 2.1 Einführung                                                            | 1063 |
| 2.2 ISDN                                                                  | 1065 |
| 2.2.1 Telefon, Telefax, Internet (<64 kBit/s)                             | 1065 |
| 2.2.2 Internet über DSL (>64 kBit/s), VoIP, IPTV                          | 1067 |
| <b>3 Öffentliche Funknetze</b>                                            | 1069 |
| 3.1 Mobilfunk mit GSM-Technik                                             | 1069 |
| 3.2 Mobilfunk mit UMTS-Technik                                            | 1070 |
| <b>4 Private Funknetze</b>                                                | 1071 |
| 4.1 Schnurlostelefone                                                     | 1071 |
| 4.2 Bluetooth                                                             | 1071 |
| 4.3 WLAN                                                                  | 1072 |
| <b>XVII Optimierte Nachrichten- und Datenübertragung</b>                  | 1072 |
| <b>1 Codierung</b>                                                        | 1072 |
| 1.1 Quellencodierung                                                      | 1073 |
| 1.1.1 Grundlagen                                                          | 1073 |
| 1.1.2 Optimalcodes                                                        | 1074 |
| 1.1.3 Datenreduktion                                                      | 1075 |
| 1.2 Kanalcodierung                                                        | 1075 |
| 1.2.1 Grundlagen                                                          | 1075 |
| 1.2.2 Maximum-Likelihood-Verfahren                                        | 1076 |
| 1.2.3 Faltungscodierer mit Likelihood-Viterbi-Decodierer                  | 1077 |
| <b>2 Optimalfilter</b>                                                    | 1079 |
| <b>3 Anwendung der Korrelation bei gestörten Signalen</b>                 | 1081 |
| <b>4 Verschlüsselung von Daten</b>                                        | 1082 |
| <b>5 Fensterung</b>                                                       | 1085 |

# Signal- und Systemtheorie

|                                                                             |      |
|-----------------------------------------------------------------------------|------|
| <b>Häufig verwendete Formelzeichen</b>                                      | 1089 |
| <b>I Einführung</b>                                                         | 1090 |
| 1 Darstellung in der Zeit- und in der Frequenzebene                         | 1090 |
| 2 Hinweise zur Anwendung                                                    | 1091 |
| <b>II Grundbegriffe</b>                                                     | 1092 |
| <b>III Periodische nichtsinusförmige zeitkontinuierliche Signale</b>        | 1093 |
| 1 Reelle und komplexe Fourierreihe                                          | 1093 |
| 2 Beispiele und Anwendungen                                                 | 1094 |
| <b>IV Nichtperiodische zeitkontinuierliche Signale</b>                      | 1097 |
| 1 Fouriertransformation                                                     | 1097 |
| 1.1 Transformationsregeln                                                   | 1097 |
| 1.2 Eigenschaften                                                           | 1097 |
| 1.3 Korrespondenztabelle                                                    | 1099 |
| 1.4 Beispiele                                                               | 1100 |
| 2 Laplacetransformation                                                     | 1100 |
| 2.1 Einführung                                                              | 1100 |
| 2.2 Transformation                                                          | 1100 |
| 2.3 Sätze zur Laplacetransformation                                         | 1103 |
| 2.4 Anwendung der Laplace- transformation bei bekanntem $H(s)$              | 1104 |
| 2.5 Bestimmung von $H(s)$                                                   | 1104 |
| 2.5.1 Bestimmung von $H(s)$ mit Differenzialgleichung                       | 1104 |
| 2.5.2 Bestimmung von $H(s)$ durch direkte Transformation der Einzelelemente | 1104 |
| 2.6 Beispiele                                                               | 1106 |
| <b>V Spezielle Signale</b>                                                  | 1111 |
| 1 Stoßfunktion, $\delta$ -Funktion, Dirac-Impuls                            | 1111 |
| 2 Sprungfunktion $\sigma(t)$                                                | 1111 |
| 3 Verknüpfung von $\sigma$ - und $\delta$ -Funktion                         | 1112 |
| 4 Harmonische Schwingungen                                                  | 1112 |
| <b>VI Leistung</b>                                                          | 1113 |
| <b>VII Faltungsintegral</b>                                                 | 1114 |
| <b>VIII Abtasttheorem</b>                                                   | 1115 |
| <b>IX Nichtkontinuierliche (zeitdiskrete) Signale</b>                       | 1116 |
| 1 Diskrete Fouriertransformation (DFT)                                      | 1117 |
| 2 Schnelle Fouriertransformation (FFT)                                      | 1118 |
| 3 $z$ -Transformation                                                       | 1118 |
| <b>X Zufällige Signale</b>                                                  | 1122 |
| 1 Grundbegriffe und Kenngrößen                                              | 1122 |
| 2 Verteilungen                                                              | 1125 |
| 2.1 Binomialverteilung                                                      | 1125 |
| 2.2 Poissonverteilung                                                       | 1125 |
| 2.3 Normalverteilung, Gaußverteilung                                        | 1125 |
| 3 Rauschen                                                                  | 1126 |
| 4 Signalerkennung bei gestörter Übertragung                                 | 1127 |
| 4.1 Erkennen versteckter Periodizitäten                                     | 1127 |
| 4.2 Signalerkennung allgemein                                               | 1127 |
| 4.3 Signalangepasste Filter (matched filter)                                | 1127 |
| <b>Sachwortverzeichnis</b>                                                  | 1129 |

# Mathematik

## I Arithmetik

### 1 Mengen

Die in der Mathematik betrachteten Gegenstände werden oftmals durch Symbole, meistens Buchstaben, bezeichnet. Dabei kennzeichnen manche Symbole feste Dinge, zum Beispiel  $\pi$  das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser eines beliebigen Kreises. Andere Symbole sind Veränderliche (auch Variable oder Platzhalter genannt), das heißt, sie können jeden Gegenstand einer Klasse von Gegenständen bezeichnen.

In der Mathematik wird jede Zusammenfassung von bestimmten wohl unterscheidbaren Objekten zu einer Gesamtheit eine Menge genannt. Eine Menge ist definiert, wenn feststeht, welche Objekte zu dieser Menge gehören und welche nicht. Die zur Menge gehörenden Objekte heißen ihre Elemente. Mengen werden meistens mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet und die Elemente mit kleinen Buchstaben.

Es gibt zwei Möglichkeiten, Mengen zu definieren: Durch Aufzählen ihrer Elemente, die in beliebiger Reihenfolge zwischen geschweiften Klammern (Mengenklammern) gesetzt sind und durch Komma getrennt werden (Schreibweise: {Element 1, Element 2, ...}).

Durch Angabe einer die Elemente charakterisierenden Eigenschaft (Schreibweise:  $\{x | x \text{ erfüllt Eigenschaft}\}$ ).

Eine Menge von Punkten heißt Punktmenge.

#### ■ Beispiele:

1.  $A = \{1, 2, 3\}$  (die Menge  $A$  besteht aus den Elementen 1, 2 und 3)
2.  $B = \{x | x^2 - 1 = 0\}$  (die Menge  $B$  besteht aus den Elementen  $x$ , für die  $x^2 - 1 = 0$  gilt)
3.  $B = \{1, -1\}$  (da  $x^2 - 1 = 0$  die Lösungen  $x = 1$  und  $x = -1$  besitzt, kann man die Menge  $B$  auch in dieser Form schreiben)
4.  $C = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  (die Menge  $C$  besteht aus den Elementen  $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ )

Gehört ein Objekt  $a$  einer Menge  $M$  an, so schreibt man  $a \in M$  (gelesen:  $a$  ist Element von  $M$ ). Gehört  $a$  nicht zu  $M$ , so schreibt man  $a \notin M$ .

Wenn jedes Element einer Menge  $M$  auch Element einer Menge  $N$  ist, so nennt man  $M$  Teilmenge von  $N$  und schreibt  $M \subseteq N$ . Nach dieser Definition ist offenbar jede Menge Teilmenge von sich selbst.

Die leere Menge  $\emptyset = \{\}$  enthält kein Element.

#### ■ Beispiele:

$$2 \in A; 2 \in C; 4 \in C; 4 \notin A; A \subseteq C; \emptyset = \{x | x \neq x\}$$

Die Vereinigung  $A \cup B$  zweier Mengen  $A$  und  $B$  besteht aus denjenigen Elementen, die in  $A$  oder in  $B$ , also in mindestens einer der beiden Mengen  $A, B$  enthalten sind:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

Der Durchschnitt  $A \cap B$  zweier Mengen  $A$  und  $B$  besteht aus denjenigen Elementen, die sowohl in  $A$  als auch in  $B$ , also gleichzeitig in beiden Mengen  $A, B$  enthalten sind:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ und } x \in B\}$$

#### ■ Beispiel:

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, -1\}; A \cup B = \{-1, 1, 2, 3\}, A \cap B = \{1\}$$

Eine Menge heißt endlich, wenn sie nur endlich viele Elemente besitzt. Die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge  $M$  heißt Mächtigkeit der Menge, bezeichnet mit  $|M|$ .

#### ■ Beispiele:

1.  $M = \{2, 4, 6, 8, 10\} \Rightarrow |M| = 5$
2.  $M = \{1, 2, 3, \dots, 99, 100\} \Rightarrow |M| = 100$

## 2 Aussageformen und logische Zeichen

### 2.1 Aussageformen

Eine Aussageform ist ein mathematischer Ausdruck, in dem Variable vorkommen.

Aussageformen erhalten einen Wahrheitswert, wenn allen in ihnen vorkommenden Variablen ein Wert zugeordnet wird.

#### ■ Beispiele:

1. Die Aussageform „ $x - 3 = 5$ “ wird zu einer wahren Aussage, wenn man für  $x$  die Zahl 8 einsetzt ( $x = 8$  ist die Lösung der Gleichung).
2. Die Aussageform „ $x^2 = 1$ “ wird zu einer wahren Aussage, wenn man für  $x$  die Zahl 1 oder  $-1$  einsetzt ( $x_{1,2} = \pm 1$  sind die Lösungen der quadratischen Gleichung).
3. Die Aussageform „ $x + 1 = 3$ “ wird zu einer falschen Aussage, wenn man für  $x$  die Zahl 1 einsetzt (denn die Lösung der Gleichung ist  $x = 2$ ).

### 2.2 Logische Zeichen

In der Mathematik ist es häufig sinnvoll, kompliziertere Aussagen mit Hilfe logischer Zeichen zu formalisieren.

Sind  $A$  und  $B$  Aussagen, dann bedeutet

|                         |                                                                  |
|-------------------------|------------------------------------------------------------------|
| $A \wedge B$ ,          | dass $A$ und $B$ gelten,                                         |
| $A \vee B$ ,            | dass $A$ oder $B$ gilt,                                          |
| $\neg A$ (nicht $A$ ),  | dass das Gegenteil von $A$ gilt,                                 |
| $A \Rightarrow B$ ,     | dass $B$ aus $A$ folgt,                                          |
| $A \Leftrightarrow B$ , | dass sowohl $A \Rightarrow B$ als auch $B \Rightarrow A$ gelten. |

Die logischen Zeichen bezeichnet man auch als Junktoren. Das Symbol  $\vee$  ist das nicht ausschließende Oder (also nicht entweder ... oder).

Eine Aussage  $A \Rightarrow B$  heißt eine Implikation, man sagt:  $A$  impliziert  $B$ . Man nennt  $A$  die Prämisse,  $B$  die Konklusion. Die Prämisse enthält die Voraussetzungen, unter denen die Aussage  $B$  gilt.

Gilt  $A \Leftrightarrow B$ , so sagt man, die beiden Aussagen  $A$  und  $B$  sind äquivalent oder gleichwertig.

#### ■ Beispiele:

1. Für eine natürliche Zahl  $n \geq 1$  ist die Implikation „6 teilt  $n \Rightarrow 2$  teilt  $n$ “ wahr. Die umgekehrte Implikation gilt nicht.
2. „6 teilt  $n$ “ und „2 teilt  $n$  und 3 teilt  $n$ “ sind zwei äquivalente Aussagen.

## 2.3 Vollständige Induktion

Mathematische Aussagen müssen in der Regel bewiesen werden. Neben direkten Beweisen und Widerspruchsbeweisen ist eine häufig verwendete Beweismethode die vollständige Induktion. Dieses Beweisverfahren lässt sich bei Aussagen über natürliche Zahlen (vgl. Abschnitt I.3) anwenden.

Ein Beweis mit vollständiger Induktion, dass eine Aussage  $A(n)$  (eine Eigenschaft oder eine Formel) für alle natürlichen Zahlen  $n \geq m$  (also von  $m$  an) richtig ist, besteht aus drei Schritten:

1. Induktionsanfang (Induktionsverankerung):  
 $A(n)$  ist richtig für  $n = m$ . Dies muss meistens auf direktem Weg nachgewiesen werden.
2. Induktionsannahme (Induktionsvoraussetzung):  
Die Aussage  $A(n)$  ist für eine beliebige natürliche Zahl  $n_0$  ( $n_0 \geq m$ ) richtig, es gilt also  $A(n_0)$ .
3. Induktionsschluss (Induktionsschritt):  
Unter Benutzung der Induktionsannahme wird gezeigt, dass die Aussage  $A(n)$  dann auch für  $n_0 + 1$  richtig ist, das heißt, aus  $A(n_0)$  folgt  $A(n_0 + 1)$ . Man nennt diesen Schritt auch Schluss von  $n_0$  auf  $n_0 + 1$ .

Man beachte, dass sowohl der Induktionsanfang als auch der Induktionsschluss durchgeführt werden müssen. Der Induktionsschluss von  $n_0$  auf  $n_0 + 1$  macht den Nachweis der Gültigkeit für  $n = m$  (Induktionsanfang) nicht überflüssig. Der Induktionsschluss kann gelingen, auch wenn die Aussage  $A(n)$  für alle natürlichen Zahlen falsch ist.

#### ■ Beispiel:

Behauptung:

Für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 0$  gilt

$$0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

Beweis der Behauptung mit vollständiger Induktion

Induktionsanfang:

Für  $n = 0$  ist die Behauptung richtig, denn auf beiden Seiten des

$$\text{Gleichheitszeichens steht Null: } 0 = \frac{0 \cdot 1}{2} = 0$$

Induktionsannahme:

Für eine beliebige natürliche Zahl  $n_0$  ist die Behauptung richtig:

$$0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n_0 = \frac{n_0 \cdot (n_0 + 1)}{2}$$

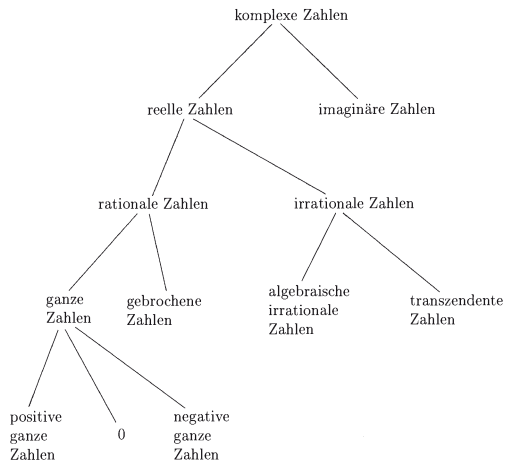
Induktionsschluss (von  $n_0$  auf  $n_0 + 1$ ):

Addiert man auf beiden Seiten der Induktionsannahme  $n_0 + 1$ , so folgt

$$\begin{aligned} 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n_0 + (n_0 + 1) &= \frac{n_0 \cdot (n_0 + 1)}{2} + (n_0 + 1) \\ &= (n_0 + 1) \cdot \left(\frac{n_0}{2} + 1\right) = \frac{(n_0 + 1)(n_0 + 2)}{2} = \frac{(n_0 + 1)((n_0 + 1) + 1)}{2} \end{aligned}$$

Aus der Richtigkeit der Annahme für  $n_0$  folgt somit auch die Richtigkeit für  $n_0 + 1$ . Damit gilt die Formel für alle  $n \geq 0$ .

## 3 Einteilung der Zahlen



Einige der Zahlenbereiche werden häufig in Mengenschreibweise dargestellt:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Menge der natürlichen Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Menge der ganzen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

Menge der rationalen Zahlen

$$\mathbb{R} \text{ Menge der reellen Zahlen}$$

$$\mathbb{C} = \{z = a + bj \mid a, b \in \mathbb{R}, j = \sqrt{-1}\}$$

Menge der komplexen Zahlen

Die natürlichen Zahlen sind die positiven ganzen Zahlen und die Null.

Eine Teilmenge der natürlichen Zahlen sind die Primzahlen. Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl größer als 1, die nur durch 1 und durch sich selbst ohne Rest teilbar ist.

Die Primzahlen sind die Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ..., die Zahl 1 ist keine Primzahl. Es gibt unendlich viele Primzahlen, das heißt, es gibt keine größte Primzahl, zu jeder Primzahl gibt es noch größere. 2 ist die einzige gerade Primzahl. Alle Primzahlen zusammen bilden die Menge  $\mathbb{P}$  der Primzahlen, die eine Teilmenge der Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen ist.

Jede natürliche Zahl  $n \geq 2$  lässt sich in ein Produkt von Primzahlen zerlegen, die Zerlegung ist eindeutig bis auf die Reihenfolge der Faktoren (sogenannte Primfaktorzerlegung).

■ **Beispiele zur Primfaktorzerlegung:**

$$100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^2; \quad 546 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$$

Die ganzen Zahlen setzen sich zusammen aus den natürlichen Zahlen und den negativen ganzen Zahlen.

Die rationalen Zahlen sind alle ganzen und gebrochenen Zahlen. Rationale Zahlen lassen sich als Brüche aus ganzen Zahlen darstellen. Jede rationale Zahl kann als endlicher oder unendlicher periodischer Dezimalbruch dargestellt werden.

Der Dezimalbruch einer rationalen Zahl ist die Darstellung der rationalen Zahl als Dezimalzahl, also als Zahl „mit Stellen hinter dem Komma“ (siehe auch Abschnitt I.7.1). Bei einem endlichen Dezimalbruch ist die Anzahl der Stellen nach dem Komma endlich, bei einem periodischen Dezimalbruch wiederholen sich die Stellen nach dem Komma nach einem gewissen Muster (Periode).

Die reellen Zahlen sind alle Zahlen, die auf der reellen Achse der Zahlenebene (Gaußsche Zahlenebene), der sogenannten Zahlengeraden, darstellbar sind.

Die reellen Zahlen setzen sich zusammen aus den rationalen Zahlen und den irrationalen Zahlen. Der Dezimalbruch einer irrationalen Zahl hat unendlich viele Stellen und keine Periode.

Man unterteilt die irrationalen Zahlen in algebraische irrationale Zahlen und transzendente Zahlen.

Eine algebraische irrationale Zahl ist eine irrationale Zahl, die Lösung (Wurzel) einer algebraischen Gleichung (Bestimmungsgleichung)  $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0 = 0$  mit rationalen Zahlen als Koeffizienten  $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$  ist, wobei  $n$  für eine natürliche Zahl größer Null steht.

Es gibt keine reelle Zahl, die Lösung der Gleichung  $x^2 + 1 = 0$  ist. Deshalb werden die reellen Zahlen zu den komplexen Zahlen erweitert.

Komplexe Zahlen sind Zahlen der Form  $z = a + bj$ , wobei  $a$  und  $b$  reelle Zahlen sind und  $j$  die imaginäre Einheit,  $j^2 = -1$  ( $j$  ist eine Lösung der algebraischen Gleichung  $x^2 + 1 = 0$ )<sup>1)</sup>.

Eine komplexe Zahl  $z$  besteht also aus einem reellen Teil  $a$  (Realteil) und einem imaginären Teil  $b$  (Imaginärteil). Komplexe Zahlen  $z$  mit Realteil gleich 0 (also  $a = 0$ ) heißen imaginäre Zahlen, die komplexen Zahlen  $z$  mit Imaginärteil gleich 0 (also  $b = 0$ ) sind die reellen Zahlen.

Komplexe Zahlen lassen sich in der Zahlenebene darstellen.

■ **Beispiele für ganze Zahlen:**

$$38; -700\,632; 0; 105$$

■ **Beispiele für rationale Zahlen:**

$$-2; \frac{3}{2} = 1,5; \frac{4}{3} = 1,333 \dots = 1,\overline{3}; -\frac{1}{8} = -0,125;$$

$$-\frac{16}{11} = -1,454\,545 \dots = -1,\overline{45}$$

(der periodische Teil wird überstrichen)

■ **Beispiele für reelle Zahlen:**

$$-4; \frac{3}{4}; 4 - \pi; e^3; \sqrt{3}; \sin 5^\circ$$

■ **Beispiele für irrationale Zahlen:**

$$\sqrt{3} = 1,732\,050\,808 \dots; \sqrt[3]{4} = 1,587\,401\,052 \dots;$$

$$5 - 2\sqrt{3} = 1,535\,898\,385 \dots; -\pi = -3,141\,592\,654 \dots;$$

$$e = 2,718\,281\,828 \dots$$

■ **Beispiele für algebraische irrationale Zahlen:**

$$\sqrt{3} \text{ (denn } \sqrt{3} \text{ ist Lösung der Gleichung } x^2 - 3 = 0);$$

$$\sqrt[3]{4} \text{ (denn } \sqrt[3]{4} \text{ ist Lösung der Gleichung } x^3 - 4 = 0);$$

$$5 - 2\sqrt{3} \text{ (denn } 5 - 2\sqrt{3} \text{ ist Lösung der Gleichung } x^2 - 10x + 13 = 0)$$

■ **Beispiele für transzendente Zahlen:**

$$-\pi; e$$

■ **Beispiele für komplexe Zahlen:**

$$3 + \sqrt{2}j; -1 + 5j; e + \pi^2j; -4j \text{ (imaginäre Zahl);}$$

$$3\sqrt{2} \text{ (reelle Zahl)}$$

Ein hochgestellter Stern bedeutet die entsprechende Menge ohne die Null:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\};$$

Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null

$$\mathbb{Z}^* = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$= \{x | x \in \mathbb{Z}, x \neq 0\};$$

Menge der ganzen Zahlen ohne die Null

$$\mathbb{Q}^* = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}^* \right\} = \{x | x \in \mathbb{Q}, x \neq 0\};$$

Menge der rationalen Zahlen ohne die Null

$$\mathbb{R}^* = \{x | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\};$$

Menge der reellen Zahlen ohne die Null

Ein hochgestelltes Plus bedeutet die Menge der entsprechenden positiven Zahlen:

$$\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\} = \{x | x \in \mathbb{Z}, x > 0\};$$

Menge der positiven ganzen Zahlen

$$\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}^* \right\} = \{x | x \in \mathbb{Q}, x > 0\};$$

Menge der positiven rationalen Zahlen

$$\mathbb{R}^+ = \{x | x \in \mathbb{R}, x > 0\};$$

Menge der positiven reellen Zahlen

## 4 Grundrechenarten

Die vier Grundrechenarten sind die Addition, die Subtraktion, die Multiplikation und die Division.

Addition: Summand plus Summand gleich Summe

Subtraktion: Minuend minus Subtrahend gleich Differenz

Multiplikation: Faktor mal Faktor gleich Produkt

Division: Dividend geteilt durch Divisor gleich Quotient

<sup>1)</sup> In der Mathematik wird für die imaginäre Einheit der Buchstabe  $i$  verwendet, in der Elektrotechnik nimmt man den Buchstaben  $j$ , um Verwechslungen mit der Stromstärke  $i$  zu vermeiden.

■ **Beispiele:**

$4 + 5 = 9$  (Addition);  $7 - 2 = 5$  (Subtraktion);  
 $3 \cdot 8 = 24$  (Multiplikation);  $87 : 3 = 29$  (Division)

Vereinbarung:

Der Multiplikationspunkt (Malpunkt) kann weggelassen werden zwischen zwei Variablen, zwischen einer Zahl und einer Variablen, zwischen einer Variablen und einer Klammer sowie zwischen zwei Klammern.

■ **Beispiele:**

$a \cdot b = ab$ ,  $4 \cdot a = 4a$ ,  $2 \cdot (a + b) = 2(a + b)$ ,  
 $a \cdot (3 + a) = a(3 + a)$ ,  $(a + b) \cdot (c - d) = (a + b)(c - d)$

Achtung: Der Multiplikationspunkt zwischen zwei Zahlen darf nicht weggelassen werden.

■ **Beispiel:**  $3 \cdot 4 \neq 34$ 

Eine Variable oder Veränderliche oder Platzhalter ist eine Größe, die in der Regel verschiedene Werte annehmen kann. Variable werden durch Symbole dargestellt (meist lateinische Buchstaben). Variable sind zum Beispiel die Platzhalter für die gesuchten Lösungen von einer oder mehreren gegebenen Gleichungen.

## 5 Grundlegende Rechenregeln

### 5.1 Buchstabenrechnen

Buchstabenrechnen ist das Rechnen mit unbestimmten Zahlen. Formuliert man eine mathematische Aussage, die nicht nur für eine bestimmte Zahl, sondern für einen ganzen Zahlbereich oder sogar für alle Zahlen gilt, dann benutzt man statt einer Zahl einen Buchstaben. Der Buchstabe heißt unbestimmte Zahl.

■ **Beispiele:**

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  (binomische Formel, sie gilt für alle reellen Zahlen  $a, b$ )
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$  (Assoziativgesetz bezüglich der Multiplikation, gilt für alle reellen Zahlen  $a, b, c$ )
- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$  (gilt für alle positiven reellen Zahlen  $a, b$  und alle natürlichen Zahlen  $n \geq 2$ )

### 5.2 Kehrwert, Quersumme

Der Kehrwert einer Zahl  $a \neq 0$  ist die Zahl  $\frac{1}{a}$ . Man sagt statt Kehrwert auch reziproker Wert.

So ist zum Beispiel der Kehrwert von 3 gleich  $\frac{1}{3}$ , der Kehrwert von  $-17$  ist  $-\frac{1}{17}$ , der Kehrwert von  $\frac{1}{4}$  ist 4.

Die Quersumme einer ganzen Zahl ist die Summe ihrer Ziffern.

So ist zum Beispiel die Quersumme der Zahl 239 503 618 gleich  $2 + 3 + 9 + 5 + 0 + 3 + 6 + 1 + 8 = 37$ , die Quersumme von 3 972 611 028 ist  $3 + 9 + 7 + 2 + 6 + 1 + 1 + 0 + 2 + 8 = 39$ , und die Quersumme der Zahl 209 334 042 ist  $2 + 0 + 9 + 3 + 3 + 4 + 0 + 4 + 2 = 27$ .

### 5.3 Teilbarkeitsregeln

Die einzelnen Zeichen einer Zahl sind ihre Ziffern. Aus Eigenschaften der Ziffern lassen sich Teilbarkeitseigenschaften der Zahlen ableiten.

Eine ganze Zahl ist teilbar durch

- 2, wenn die letzte Ziffer durch 2 teilbar ist
- 3, wenn die Quersumme der Zahl (also die Summe der Ziffern) durch 3 teilbar ist
- 4, wenn die Zahl aus den letzten beiden Ziffern durch 4 teilbar ist
- 5, wenn die letzte Ziffer durch 5 teilbar ist (also 0 oder 5 ist)
- 6, wenn die letzte Ziffer durch 2 und die Quersumme der Zahl durch 3 teilbar ist
- 8, wenn die Zahl aus den letzten drei Ziffern durch 8 teilbar ist
- 9, wenn die Quersumme der Zahl durch 9 teilbar ist
- 11, wenn die alternierende Quersumme der Zahl (also die Summe der Ziffern, die abwechselnd positives und negatives Vorzeichen erhalten) durch 11 teilbar ist

■ **Beispiele:**

- 2486 ist teilbar durch 2, denn 6 ist teilbar durch 2
- 263 451 ist teilbar durch 3, denn die Quersumme  $2 + 6 + 3 + 4 + 5 + 1 = 21$  ist teilbar durch 3
- 2 563 488 ist teilbar durch 4, denn 88 ist teilbar durch 4
- 823 620 ist teilbar durch 5, denn 0 ist teilbar durch 5
- 2 598 018 ist teilbar durch 6, denn 8 ist teilbar durch 2 und die Quersumme  $2 + 5 + 9 + 8 + 0 + 1 + 8 = 33$  ist teilbar durch 3
- 524 299 168 ist teilbar durch 8, denn 168 ist teilbar durch 8
- 11 929 545 ist teilbar durch 9, denn die Quersumme  $1 + 1 + 9 + 2 + 9 + 5 + 4 + 5 = 36$  ist teilbar durch 9
- 14 739 296 ist teilbar durch 11, denn die alternierende Quersumme  $1 - 4 + 7 - 3 + 9 - 2 + 9 - 6 = 11$  ist teilbar durch 11

### 5.4 Punktrechnung vor Strichrechnung

Die Rechenzeichen  $\cdot$  und  $:$  binden stärker als  $+$  und  $-$ , das heißt, Multiplikation und Division müssen vor Addition und Subtraktion ausgeführt werden.

$$\begin{aligned} a + b \cdot c &= a + (b \cdot c) \\ a - b : c &= a - (b : c) \end{aligned}$$

■ **Beispiele:**

$$\begin{aligned} a : b \cdot c - d &= (a : b) \cdot c - d; \quad 3 : 4 \cdot 5 - 6 = 3 : 4 \cdot 5 - 6 = 17 \\ 8 - 5 \cdot 4 : 3 + 36 : 9 + 6 \cdot (12 + 2 \cdot 7) &= 8 - 60 + 4 + 6 \cdot 26 = 108 \end{aligned}$$

Die Klammern geben an, welcher Teil der Rechnung zuerst ausgeführt wird.

### 5.5 Potenzrechnung vor Punktrechnung

Potenzieren bindet stärker als Multiplizieren und Dividieren.

$$a \cdot b^2 = a \cdot (b^2)$$

Es gilt also  $ab^2 \neq (ab)^2$ .

■ **Beispiele:**

$$a : b^2 - 3 \cdot 2^3 = \frac{a}{b^2} - 3(2^3) = \frac{a}{b^2} - 24;$$

$$4 \cdot 5^3 - 7 \cdot 4^2 = 4 \cdot 125 - 7 \cdot 16 = 388$$

## 5.6 Grundgesetze der Addition und Multiplikation

1. *Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)*

Für reelle Zahlen gilt bezüglich der Addition und bezüglich der Multiplikation das Kommutativgesetz:

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Bei der Addition kann man also die Summanden vertauschen, bei der Multiplikation kann man die Faktoren vertauschen.

■ **Beispiele:**  $3 + 4 = 4 + 3$ ;  $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$

2. *Assoziativgesetz (Verknüpfungsgesetz)*

Für reelle Zahlen gilt bezüglich der Addition und bezüglich der Multiplikation das Assoziativgesetz:

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$$

Bei der Addition kann man also Summanden beliebig verknüpfen (zusammenfassen), bei der Multiplikation kann man Faktoren beliebig verknüpfen.

■ **Beispiele:**  $(3 + 4) + 7 = 3 + (4 + 7) = 3 + 4 + 7$ ;  
 $(3 \cdot 4) \cdot 7 = 3 \cdot (4 \cdot 7) = 3 \cdot 4 \cdot 7$

3. *Distributivgesetze (Zerlegungsgesetze)*

Für reelle Zahlen gelten die Distributivgesetze:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

■ **Beispiele:**  $(3 + 4) \cdot 7 = 3 \cdot 7 + 4 \cdot 7$ ;  $3 \cdot (4 + 7) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 7$

Aus diesen Grundgesetzen ergeben sich die wichtigen Regeln der Klammerrechnung.

## 5.7 Indizes, Summenzeichen, Produktzeichen

Ein Index (Plural Indizes) ist ein Zeichen, das an Symbole für Variable, Funktionen oder Operationen angebracht wird.

Bezeichnet man zum Beispiel Variable mit  $x$ , dann kennzeichnet man verschiedene Variable dadurch, dass man an das  $x$  verschiedene tiefgestellte Indizes anhängt:  $x_1, x_2, x_3, \dots$ . Ein Index ist meistens eine Zahl.

Das Summenzeichen  $\sum$  (entstanden aus dem griechischen Buchstaben für S) dient zur vereinfachten Darstellung von Summen (gesprochen: Summe über  $a_k$  von  $k = 1$  bis  $k = n$ ).

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Man erhält alle Summanden der Summe, wenn man in  $a_k$  für den Index  $k$  zunächst 1, dann 2 usw. und schließlich  $n$  setzt. Dieser Buchstabe  $k$  heißt Summationsindex und kann durch einen beliebigen anderen Buchstaben ersetzt werden. Es gilt also zum

Beispiel  $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^n a_j$ .

■ **Beispiele:**

1.  $\sum_{k=1}^6 k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$

2.  $\sum_{i=1}^3 \log(2i) = \log 2 + \log 4 + \log 6$

3.  $\sum_{j=1}^5 6 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 5 \cdot 6 = 30$

Das Produktzeichen  $\prod$  dient zur vereinfachten Darstellung von Produkten (gesprochen: Produkt über  $a_k$  von  $k = 1$  bis  $k = n$ ).

$$\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n$$

Man erhält alle Faktoren des Produkts, wenn man in  $a_k$  für den Index  $k$  zunächst 1, dann 2 usw. und schließlich  $n$  setzt. Der Index  $k$  kann durch einen beliebigen anderen Buchstaben ersetzt werden. Zum

Beispiel gilt  $\prod_{k=1}^n a_k = \prod_{i=1}^n a_i = \prod_{j=1}^n a_j$ .

■ **Beispiele:**

1.  $\prod_{k=1}^7 k^2 = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot 6^2 \cdot 7^2$

2.  $\prod_{i=2}^4 3^i = 3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4 = 3^{2+3+4} = 3^9$

3.  $\prod_{j=1}^5 4 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5$

## 5.8 Binomische Formeln

Ein Binom ist ein zweigliedriger Ausdruck der Form  $a + b$  oder  $a - b$ . Die Multiplikation von Binomen führt zu den binomischen Formeln (zwei Faktoren) und zum binomischen Lehrsatz ( $n$  Faktoren,  $n \geq 1$  beliebig).

Die folgenden Rechenregeln heißen binomische Formeln oder binomische Gleichungen 2. Grades ( $a$  und  $b$  sind beliebige reelle Zahlen).

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$



■ **Beispiele:**

- $21^2 = (20 + 1)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 1 + 1^2 = 441$
- $(2c + 3)^2 = (2c)^2 + 2 \cdot 2c \cdot 3 + 3^2 = 4c^2 + 12c + 9$
- $19^2 = (20 - 1)^2 = 20^2 - 2 \cdot 20 \cdot 1 + 1^2 = 361$
- $(2x - 5y)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5y + (5y)^2 = 4x^2 - 20xy + 25y^2$
- $21 \cdot 19 = (20 + 1)(20 - 1) = 20^2 - 1^2 = 399$
- $(3x + 4y)(3x - 4y) = (3x)^2 - (4y)^2 = 9x^2 - 16y^2$

## 5.9 Fakultäten, Binomialkoeffizienten und Pascalsches Dreieck

Für eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}^*$  ist  $n!$  (gesprochen:  $n$  Fakultät) definiert als das Produkt der ersten  $n$  von Null verschiedenen natürlichen Zahlen.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

Außerdem wird  $0! = 1$  für  $n = 0$  gesetzt.

Die Fakultät lässt sich mit der Formel  $n! = n \cdot (n - 1)!$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  berechnen (Rekursionsformel).

■ **Beispiele:**

- $$\begin{aligned} 0! &= 1, 1! = 1, 2! = 1 \cdot 2 = 2, 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \\ 4! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24, 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120, \\ 6! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720 \end{aligned}$$

Für alle natürlichen Zahlen  $n, k$  mit  $1 \leq k \leq n$  ist der Binomialkoeffizient  $\binom{n}{k}$  (gesprochen:  $n$  über  $k$ ) definiert durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Man setzt außerdem  $\binom{n}{0} = 1$  und  $\binom{0}{0} = 1$ .

Für die praktische Rechnung eignet sich die Formel

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}$$

Zähler und Nenner bestehen jeweils aus  $k$  Faktoren. Dabei sind die  $k$  Faktoren im Nenner von 1 an um jeweils 1 aufsteigend und im Zähler von  $n$  an um jeweils 1 fallend.

Für die Binomialkoeffizienten gibt es eine Reihe von Rechenregeln. Für die praktische Berechnung sind wichtig:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k} && \text{Symmetrie} \\ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \binom{n}{k} && \text{Additionssatz} \end{aligned}$$

Beweis der Symmetrie:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\begin{aligned} \binom{n}{n-k} &= \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \end{aligned}$$

■ **Beispiele:**

$$\begin{aligned} \binom{8}{3} &= \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56; \quad \binom{8}{3} = \binom{8}{5} \\ \binom{n}{n} &= 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2} \end{aligned}$$

Für jede natürliche Zahl  $n$  lassen sich die Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  im Pascalschen Dreieck darstellen. Wegen  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$  sind die Zahlen der Ränder des Dreiecks gleich Eins. Jede nicht am Rand stehende Zahl des Dreiecks ist wegen des Additionssatzes gleich der Summe der beiden unmittelbar darüberstehenden Zahlen.

Pascalsches Dreieck:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & \\ & & & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & \\ & & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \\ & & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \\ & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \\ \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & \\ \binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Rechnet man die Binomialkoeffizienten aus, so lauten die ersten Zeilen des Pascalschen Dreiecks:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 2 & 1 & \\ & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Am Pascalschen Dreieck erkennt man die Symmetrie der Binomialkoeffizienten.

Oftmals ist es einfacher, die Binomialkoeffizienten nicht direkt, sondern mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks zu berechnen.

## 5.10 Binomischer Lehrsatz

Für beliebige reelle Zahlen  $a, b \neq 0$  und jede natürliche Zahl  $n \geq 1$  gilt der binomische Lehrsatz (bino-

mische Gleichung  $n$ -ten Grades)

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 \\ &\quad + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots \\ &\quad + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\end{aligned}$$

Die untere Form ist die abgekürzte Summenschreibweise (gesprochen: Summe über  $\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$  von  $k=0$  bis  $k=n$ ). Man erhält also alle Summanden der Summe, wenn man für den Index  $k$  zunächst 0, dann 1, dann 2 usw. und schließlich  $n$  setzt. Die so erhaltenen Glieder werden dann addiert.

Man beachte, dass  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ ,  $a^0 = b^0 = 1$  und  $a^1 = a$ ,  $b^1 = b$  gilt.

Für  $n=2$  ergeben sich die beiden ersten binomischen Formeln.

Spezialfälle:

$$\begin{aligned}a=b=1: \quad &\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n\end{aligned}$$

Die Summe der Binomialkoeffizienten der  $n$ -ten Zeile des Pascalschen Dreiecks ist also  $2^n$ .

$$\begin{aligned}a=1, b=-1: \quad &\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0\end{aligned}$$

Die alternierende Summe (das heißt, abwechselnde Vorzeichen  $+$  und  $-$ ) der Binomialkoeffizienten der  $n$ -ten Zeile des Pascalschen Dreiecks ist also 0.

#### ■ Beispiele:

- $(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2 b + \binom{3}{2} a b^2 + \binom{3}{3} b^3$   
 $= a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^6 = \binom{6}{0} a^6 - \binom{6}{1} a^5 b + \binom{6}{2} a^4 b^2 - \binom{6}{3} a^3 b^3$   
 $\quad + \binom{6}{4} a^2 b^4 - \binom{6}{5} a b^5 + \binom{6}{6} b^6$   
 $= a^6 - 6a^5 b + 15a^4 b^2 - 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 - 6ab^5 + b^6$

Man vergleiche die Koeffizienten mit der letzten hingeschriebenen Zeile des Pascalschen Dreiecks!

- $(x-3)^5 = \binom{5}{0} x^5 + \binom{5}{1} x^4 (-3) + \binom{5}{2} x^3 (-3)^2$   
 $\quad + \binom{5}{3} x^2 (-3)^3 + \binom{5}{4} x (-3)^4 + \binom{5}{5} (-3)^5$   
 $= x^5 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 405x - 243$

## 6 Potenz- und Wurzelrechnung

### 6.1 Definition der Potenz

Eine Zahl der Form  $a^x$  (gesprochen:  $a$  hoch  $x$ ) heißt Potenz. Dabei ist  $a$  die Basis oder die Grundzahl

und  $x$  der Exponent oder die Hochzahl der Potenz.

|       |                     |
|-------|---------------------|
| $a^x$ | Potenz              |
| $a$   | Basis (Grundzahl)   |
| $x$   | Exponent (Hochzahl) |

Ist die Basis  $a$  eine beliebige reelle Zahl und der Exponent  $x$  eine natürliche Zahl aus  $\mathbb{N}^*$ , dann steht  $a^x$  für die Vorschrift, die Basis  $a$  insgesamt  $x$ -mal mit sich selbst zu multiplizieren.

$$a^x = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \quad (x \text{ Faktoren, } x \in \mathbb{N}^*)$$

Man spricht vom Potenzieren für diese algebraische Operation.

Ist der Exponent  $x$  eine natürliche Zahl  $\neq 0$ , dann kann die Basis  $a$  eine beliebige reelle Zahl sein.

Ist der Exponent  $x$  eine beliebige reelle Zahl, dann ist die Potenz nur für positive Basen  $a$  definiert ( $a \in \mathbb{R}^+$ ). Dabei sind Potenzen mit irrationalen Exponenten mit Hilfe eines Grenzübergangs erklärt.

$$a^{\frac{p}{q}} = c \Leftrightarrow a^p = c^q$$

Für negative Exponenten gilt

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

Für die Exponenten 1 und 0 gilt

$$a^1 = a \quad a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

Eine spezielle Potenz für  $k \in \mathbb{Z}$  ist

$$(-1)^k = \begin{cases} +1 & \text{falls } k \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

#### ■ Beispiele:

- $2^{\frac{3}{2}} = 2,8284 \dots$  Potenz mit Basis 2 und Exponent  $\frac{3}{2} = 1,5$
- $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$
- $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$
- $3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$
- $6^0 = 1$
- $\left(-\frac{1}{6}\right)^0 = 1$
- $8^{\frac{4}{3}} = c \Leftrightarrow 8^4 = c^3 \Leftrightarrow c = 16$
- $8^{-\frac{4}{3}} = c \Leftrightarrow 8^{-4} = c^3 \Leftrightarrow c = \frac{1}{16}$
- $4^1 = 4, (-12)^1 = -12$
- $(-1)^5 = -1, (-1)^4 = 1, (-1)^0 = 1, (-1)^{-11} = -1$

## 6.2 Regeln der Potenzrechnung

### 1. Potenzrechnung vor Punktrechnung

$$ba^n = b \cdot (a^n)$$

Soll erst Punktrechnung erfolgen, dann muss ein Klammerpaar gesetzt werden.

■ **Beispiele:**

$$5 \cdot 3^4 = 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 5 \cdot (3^4); \\ (5 \cdot 3)^4 = 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 = 15^4$$

**Fehlerwarnung:**

$$ba^n \neq (ba)^n \text{ für } a, b \neq 0, b, n \neq 1$$

2. **Addieren und Subtrahieren**

Potenzen kann man nur addieren oder subtrahieren, wenn sie in Basis *und* Exponent übereinstimmen.

$$pa^n + qa^n = (p + q) a^n$$

■ **Beispiel:**  $2 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^4 = (2 + 5) \cdot 3^4 = 7 \cdot 3^4$

**Fehlerwarnungen:**  $2^4 + 3^4 \neq 5^4$ ,  $3^2 + 3^4 \neq 3^6$

3. **Multiplizieren und Dividieren bei gleicher Basis**

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert (genauer: indem man die gemeinsame Basis mit der Summe der Exponenten potenziert).

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert (genauer: indem man die gemeinsame Basis mit der Differenz der Exponenten potenziert).

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Der Wert einer Potenz bleibt erhalten, wenn man gleichzeitig die Basis durch ihren Kehrwert und das Vorzeichen des Exponenten durch das entgegengesetzte ersetzt.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

**Fehlerwarnungen:**  $3^6 \cdot 3^4 \neq 3^{6 \cdot 4} = 3^{24}$ ,  
 $3^{12} : 3^4 \neq 3^{12:4} = 3^3$ ,  $a^{-2} \neq -a^2$

■ **Beispiele:**

- $3^6 \cdot 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^{10} = 3^{6+4}$
- $\frac{3^6}{3^4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = 3 \cdot 3 = 3^2 = 3^{6-4}$
- $3^5 : 3^4 = 3^{5-4} = 3^1 = 3$
- $3^4 : 3^4 = 3^{4-4} = 3^0 = 1$
- $\left(\frac{3}{2}\right)^4 : \left(\frac{3}{2}\right)^6 = \left(\frac{3}{2}\right)^{4-6} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

4. **Multiplizieren und Dividieren bei gleichem Exponenten**

Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem man die Basen multipliziert (genauer: indem man das Produkt der Basen mit

dem gemeinsamen Exponenten potenziert).

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

**Fehlerwarnung:**  $a^n \cdot b^n \neq (ab)^{2n}$  (außer in Sonderfällen wie  $n = 0$ ), zum Beispiel:  $2^3 \cdot 5^3 \neq 10^6$

Potenzen mit gleichem Exponenten werden dividiert, indem man die Basen dividiert (genauer: indem man den Quotienten der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert).

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

**Fehlerwarnung:**  $\frac{a^n}{b^n} \neq \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$  (außer in Sonderfällen)  
 im Gegensatz zu  $\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}$

**Umkehrungen**

Ein Produkt wird potenziert, indem man die einzelnen Faktoren potenziert (genauer: indem man die Potenzen der einzelnen Faktoren miteinander multipliziert).

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Ein Bruch wird potenziert, indem man Zähler und Nenner einzeln potenziert (genauer: indem man die Potenzen von Zähler und Nenner durcheinander dividiert).

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

**Fehlerwarnung:** Die Berechnung von  $(a + b)^n$  darf nicht verwechselt werden mit der von  $(a \cdot b)^n$ . Es gilt  $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ , aber  $(a + b)^n \neq a^n + b^n$  (außer in Sonderfällen).

■ **Beispiele:**

- $2^4 \cdot 5^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$   
 $= (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10\,000$
- $\frac{3^4}{5^4} = \left(\frac{3}{5}\right)^4 = 0,6^4 = 0,1296$
- $30^5 = (3 \cdot 10)^5 = 3^5 \cdot 10^5 = 243 \cdot 100\,000$   
 $= 24\,300\,000 = 2,43 \cdot 10^7$
- $0,3^5 = \left(\frac{3}{10}\right)^5 = \frac{3^5}{10^5} = \frac{243}{100\,000} = 0,00243 = 2,43 \cdot 10^{-3}$

5. **Potenzieren einer Potenz**

Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert (genauer: indem man die Basis mit dem Produkt der Exponenten potenziert).

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Bei der Potenz einer Potenz kann man die Exponenten miteinander vertauschen.

$$(a^n)^m = (a^m)^n$$

Fehlerwarnung:  $(2^3)^4 \neq 2^7$

■ **Beispiele:**

- $(2^3)^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$
- $(3^4)^2 = 81^2 = 6561 = 9^4 = (3^2)^4$

■ **Beispiele zur gesamten Potenzrechnung:**

- $ar^p + bs^p - cr^p + ds^p = (a - c)r^p + (b + d)s^p$
- $x^{3m-1}x^{m+1} = x^{3m-1+m+1} = x^{4m}$
- $\frac{8^2 \cdot 5^2}{8^2 + 6^2} = \frac{(4 \cdot 2)^2 \cdot 5^2}{64 + 36} = \frac{4^2 \cdot (2 \cdot 5)^2}{100} = 4^2 = 16$
- $\frac{5a^{x+y}b^{3u+v}}{7c^2} : \frac{28a^{y-x}b^{v-2u}}{5c^4} = \frac{5 \cdot 28 \cdot a^{x+y}a^{y-x}b^{3u+v}b^{v-2u}}{7 \cdot 5 \cdot c^2c^6}$   
 $= \frac{4a^{2y}b^{u+2v}}{c^8} \quad (c \neq 0)$
- $(-u^2)^3 = (-1)^3 u^{2 \cdot 3} = -u^6, \quad (-u^3)^2 = (-1)^2 u^{3 \cdot 2} = u^6,$   
 $((-u)^2)^3 = ((-1)^2 u^2)^3 = (u^2)^3 = u^{2 \cdot 3} = u^6$
- $\left(\frac{5a^{-1}}{-2^2b^{-3}}\right)^{-4} = \begin{cases} \left(-\frac{5b^3}{2^2a}\right)^{-4} = \left(-\frac{4a}{5b^3}\right)^4 = \frac{256a^4}{625b^{12}} \\ \frac{5^{-4}a^4}{(-1)^{-4}2^{-8}b^{12}} = \frac{2^8a^4}{5^4b^{12}} = \frac{256a^4}{625b^{12}} \end{cases} \quad (a, b \neq 0)$
- $\left(\frac{2}{3}x^{-1} - 3x\right)\left(3x^{-1} - \frac{2}{3}x\right) = 2x^{-2} - \frac{4}{9} - 9 + 2x^2$   
 $= \frac{2}{x^2} - 9\frac{4}{9} + 2x^2 \quad (x \neq 0)$

### 6.3 Definition der Wurzel

Eine Zahl der Form  $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$  (gesprochen:  $n$ -te Wurzel aus  $a$ ) heißt Wurzel. Dabei heißt  $a$  Radikand der Wurzel und ist eine reelle Zahl größer als 0, und  $n$  heißt Wurzelexponent und ist eine natürliche Zahl größer als 1.

|               |                |
|---------------|----------------|
| $\sqrt[n]{a}$ | Wurzel         |
| $a > 0$       | Radikand       |
| $n > 1$       | Wurzelexponent |

Die Wurzel  $\sqrt[n]{a}$  ist definiert als die eindeutig bestimmte Zahl  $x \geq 0$  mit  $x^n = a$ . Die  $n$ -te Wurzel aus  $a \geq 0$  ist also die nichtnegative reelle Zahl, deren  $n$ -te Potenz gleich  $a$  ist.

$$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a$$

Man spricht vom Radizieren oder Wurzelziehen für diese algebraische Operation.

Ist der Wurzelexponent gleich 2, so heißt  $\sqrt[n]{a} = \sqrt{a}$  (der Wurzelexponent 2 braucht nicht geschrieben zu werden) Quadratwurzel (oder einfach Wurzel) aus  $a$ ;  $\sqrt[3]{a}$  heißt Kubikwurzel aus  $a$ .

Bemerkungen:

- Nach der Definition der Wurzel ist die Wurzel aus einer positiven Zahl wieder eine positive Zahl:  $\sqrt{a^2} = |a|$  für jede reelle Zahl  $a$  (zum Absolutbetrag  $|a|$  einer Zahl  $a$  vgl. Abschnitt I 9.2). Es gilt daher zum Beispiel nur  $\sqrt{4} = 2$ , nicht auch  $\sqrt{4} = -2$ . Dagegen hat die Gleichung  $x^2 = 4$  die Lösungen  $x_1 = +\sqrt{4} = +2$  und  $x_2 = -\sqrt{4} = -2$ .
- Für ungerade  $n$  (zum Beispiel  $n = 3$ ) kann die  $n$ -te Wurzel auch für negative Zahlen  $a$  eindeutig definiert werden, denn die  $n$ -te Potenz einer ne-

gativen Zahl ist selbst negativ. Zum Beispiel gilt  $\sqrt[3]{-27} = -3$ .

- Wegen  $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$  ergeben sich die Regeln der Wurzelrechnung aus den entsprechenden Regeln der Potenzrechnung.

Wegen der besonderen Bedeutung werden die übertragbaren Regeln hier in Wurzelschreibweise wiederholt.

### 6.4 Regeln der Wurzelrechnung

#### 1. Addieren und Subtrahieren

Wurzeln kann man nur addieren oder subtrahieren, wenn sie in Radikand und Wurzelexponent übereinstimmen.

$$p \sqrt[n]{a} + q \sqrt[n]{a} = (p + q) \sqrt[n]{a}$$

■ **Beispiel:**  $2 \cdot \sqrt[4]{3} + 5 \cdot \sqrt[4]{3} = (2 + 5) \cdot \sqrt[4]{3} = 7 \cdot \sqrt[4]{3}$

Fehlerwarnungen:  $\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3} \neq \sqrt[4]{5},$

$$\sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{2} \neq \sqrt[7]{2}$$

(beides lässt sich nicht zusammenfassen)

#### 2. Multiplizieren und Dividieren bei gleichem Radikanden

Wurzeln mit gleichem Radikanden und den Wurzelexponenten  $n, m$  werden multipliziert, indem man aus dem in die  $(m + n)$ -te Potenz erhobenen Radikanden die  $nm$ -te Wurzel zieht (denn  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} = a^{\frac{m+n}{nm}} = a^{\frac{1}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{a^{m+n}}$ ).

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^{m+n}}$$

■ **Beispiel:**  $\sqrt[3]{4096} \cdot \sqrt[4]{4096} = \sqrt[12]{16 \cdot 8 \cdot 128} = \sqrt[12]{4096^3} = 2^7 = 128$

Fehlerwarnung:  $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \neq \sqrt[12]{a}, \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \neq \sqrt[12]{a^2},$   
 $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \neq \sqrt[7]{a}$   
 (richtig:  $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} = \sqrt[3 \cdot 4]{a^{4+3}} = \sqrt[12]{a^7}$ )

Wurzeln mit gleichem Radikanden und den Wurzelexponenten  $n$  und  $m$  werden dividiert, indem man aus dem in die  $(m - n)$ -te Potenz erhobenen Radikanden die  $nm$ -te Wurzel zieht (denn  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{m}}} = a^{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}} = a^{\frac{m-n}{nm}} = \sqrt[n \cdot m]{a^{m-n}}$ ).

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a^{m-n}}$$

■ **Beispiel:**  $\frac{\sqrt[3]{4096}}{\sqrt[4]{4096}} = \sqrt[3 \cdot 4]{16 \cdot 8 \cdot 2} = \sqrt[12]{4096^{4-3}} = \sqrt[12]{4096} = \sqrt[12]{2^{12}} = 2$

#### 3. Multiplizieren und Dividieren bei gleichem Wurzelexponenten

Wurzeln mit gleichem Wurzelexponenten werden multipliziert, indem man die Radikanden multipliziert (genauer: indem man die Wurzel aus dem Produkt der Radikanden zieht) (denn

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}.$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

■ **Beispiel:**  $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 3 = 6 \\ \sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{216} = 6 \end{array} \right.$

**Fehlerwarnung:**  $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a+b}$  (außer in Sonderfällen); der gegebene Ausdruck lässt sich nicht vereinfachen.

Wurzeln mit gleichem Wurzelexponenten werden dividiert, indem man die Radikanden dividiert (genauer: indem man die Wurzel aus dem Quotienten der Radikanden zieht) (denn  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ ).

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

■ **Beispiel:**  $\sqrt[3]{8} : \sqrt[3]{27} = \left\{ \begin{array}{l} 2 : 3 = \frac{2}{3} \\ \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3} \end{array} \right.$

**Umkehrungen**

Man zieht die Wurzel aus einem Produkt, indem man die Wurzel aus den einzelnen Faktoren zieht (genauer: indem man die Wurzeln aus den einzelnen Faktoren miteinander multipliziert).

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

■ **Beispiel:**  $\sqrt{36} = \left\{ \begin{array}{l} 6 \\ \sqrt{4 \cdot 9} = 2 \cdot 3 = 6 \end{array} \right.$

**Fehlerwarnung:**  $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$  (außer in Sonderfällen)

Man zieht die Wurzel aus einem Bruch, indem man sie aus Zähler und Nenner einzeln zieht (genauer: indem man die Wurzeln aus Zähler und Nenner durcheinander dividiert).

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

**Spezialfall**

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

■ **Beispiele:**

- $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \sqrt[3]{8} : \sqrt[3]{27} = 2 : 3 = \frac{2}{3}$
- $\sqrt[4]{\frac{1}{625}} = \frac{1}{\sqrt[4]{625}} = \frac{1}{5}$

#### 4. Radizieren und Potenzieren einer Wurzel

Man zieht die Wurzel aus einer Wurzel, indem man die Wurzelexponenten multipliziert (genauer: indem man aus dem Radikanden die Wurzel mit dem aus dem Produkt beider Wurzelexponenten gebildeten neuen Wurzelexponenten zieht) (denn  $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = (a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$ ).

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

■ **Beispiel:**  $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4096}} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[4]{16} = 2 \\ \sqrt[12]{4096} = 2 \end{array} \right.$

**Fehlerwarnung:**  $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}} \neq \sqrt[8]{7}$   
(richtig:  $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}} = \sqrt[15]{7}$ )

Bei der Wurzel aus einer Wurzel kann man die Wurzelexponenten miteinander vertauschen (denn  $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = a^{\frac{1}{mn}} = a^{\frac{1}{nm}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ ).

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

■ **Beispiele:**

- $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4096}} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[4]{16} = 2 \\ \sqrt[3]{\sqrt[4]{4096}} = \sqrt[3]{8} = 2 \end{array} \right.$
- $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{27}} = \sqrt[4]{3}$

Eine Wurzel wird potenziert, indem man den Radikanden potenziert (genauer: indem man die Wurzel aus der Potenz des Radikanden zieht) (denn  $(a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}}$ ).

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

■ **Beispiele:**

- $(\sqrt[3]{8})^4 = \left\{ \begin{array}{l} 2^4 = 16 \\ \sqrt[3]{8^4} = \sqrt[3]{4096} = 16 \end{array} \right.$
- $(\sqrt[4]{4})^2 = \sqrt[4]{16} = 2$

**Umkehrung**

Man zieht die Wurzel aus einer Potenz, indem man die Wurzel aus der Basis in die entsprechende Potenz erhebt.

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

■ **Beispiel:**  $\sqrt{4^3} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{64} = 8 \\ (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8 \end{array} \right.$

**Spezialfall**

$$(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$$

■ **Beispiel:**  $(\sqrt[3]{3})^5 = \sqrt[3]{3^5} = 3$

Exponenten und Wurzelexponenten kann man gegeneinander kürzen.

$$\sqrt[n]{a^{nq}} = (\sqrt[n]{a})^{nq} = \sqrt[q]{a^q} = (\sqrt[q]{a})^q$$

■ **Beispiel:**  $\sqrt[12]{2^8} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

### 5. Rationalmachen des Nenners

Zum Rationalmachen des Nenners eines Bruches erweitert man den Bruch so, dass die Wurzel im Nenner wegfällt.

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

■ **Beispiele:**

- $\frac{a^2}{\sqrt{a}} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{a}}{a} = a\sqrt{a}$
- $\frac{a}{\sqrt[3]{a}} = \frac{a \cdot \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}} = \frac{a \cdot \sqrt[3]{a^2}}{a} = \sqrt[3]{a^2}$
- $\frac{x + \sqrt{y}}{x - \sqrt{y}} = \frac{(x + \sqrt{y})(x + \sqrt{y})}{(x - \sqrt{y})(x + \sqrt{y})} = \frac{(x + \sqrt{y})^2}{x^2 - y} = \frac{x^2 + 2x\sqrt{y} + y}{x^2 - y}$

## 7 Dezimalzahlen und Dualzahlen

Es gibt verschiedene Möglichkeiten zur Darstellung von Zahlen. Die einzelnen Zeichen zur Darstellung von Zahlen sind die Zahlzeichen oder Ziffern. Grundsätzlich unterscheidet man zwischen sogenannten Positions- oder Stellenwertsystemen und Additionssystemen. Bei einem Positionssystem ist der Wert einer Ziffer abhängig von der Position dieser Ziffer innerhalb der Zahl. Bei Additionssystemen wird der Wert aller Zahlzeichen einfach addiert, um den Wert der Zahl festzulegen.

Ein Beispiel für ein Positionssystem ist unser Dezimalsystem, ein Beispiel für ein Additionssystem ist das römische Zahlensystem.

### 7.1 Dezimalsystem

Die heute übliche Schreibweise der Zahlen ist die Dezimalschreibweise, das heißt, es gibt 10 verschiedene Ziffern (0, 1, 2, ..., 9) zur Darstellung der Zahlen. Jede Ziffer hat den zehnfachen Stellenwert der ihr rechts folgenden Ziffer. Im Dezimalsystem dargestellte Zahlen nennt man Dezimalzahlen.

■ **Beispiel:**

$$3607 = 3 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 = 3000 + 600 + 0 + 7$$

Der Wert einer Ziffer innerhalb der Zahl ergibt sich also folgendermaßen: Die Einerstelle bleibt unverändert (Multiplikation mit  $10^0 = 1$ ), die Zehnerstelle wird mit  $10^1 = 10$ , die Hunderterstelle wird mit  $10^2 = 100$ , die Tausenderstelle wird mit  $10^3 = 1000$ , ..., die  $n$ -te Stelle wird mit  $10^{n-1}$  multipliziert.

Das Dezimalsystem (auch Zehnersystem genannt) ist also ein Positionssystem zur Basis 10. Eine solche Schreibweise wurde erst möglich nach Einführung der Null (für „nichts“).

Unser Zahlensystem wurde im ersten Jahrtausend nach der Zeitenwende in Indien entwickelt. Es gelangte über den arabischen Raum zunächst nach Spanien und dann nach Mitteleuropa, wo noch bis zum 16. Jahrhundert mit dem römischen Zahlensystem gerechnet wurde. Wegen dieses Ursprungs nennt man unsere Ziffern auch indisch-arabische Ziffern.

Im Dezimalsystem lassen sich auch rationale und reelle Zahlen darstellen. Die Darstellung einer reellen (rationalen oder irrationalen) Zahl als Dezimalzahl nennt man auch Dezimalbruch (vgl. auch Abschnitt I.3).

■ **Beispiel:**

$$486,2545 = 4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4} = 400 + 80 + 6 + 0,2 + 0,05 + 0,004 + 0,0005$$

Der Wert einer Ziffer innerhalb der Zahl ergibt sich dadurch, dass die  $n$ -te Stelle vor dem Komma mit  $10^{n-1}$  und die  $m$ -te Stelle nach dem Komma mit  $10^{-m}$  multipliziert wird.

Ist  $a = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m}$  eine Zahl mit den Ziffern  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$  vor dem Komma und den Ziffern  $a_{-1}, a_{-2}, \dots, a_{-m}$  nach dem Komma, dann gilt also

$$a = \sum_{i=-m}^n a_i 10^i \quad (*)$$

Die Stellen mit  $i \geq 0$  bilden den ganzen Teil, die mit  $i < 0$  den gebrochenen Teil der Zahl.

Für andere Zahlensysteme, nämlich Positionssysteme zur Basis  $B$ , gilt (\*) ganz analog, wenn man 10 durch die entsprechende Basis  $B$  ersetzt (zum Beispiel  $B = 2$  für das Dualsystem).

### 7.2 Dualsystem

Das Dualsystem ist ein System zur Darstellung der Zahlen, in dem es nur zwei Ziffern (0 und 1) gibt. Das Dualsystem wird deshalb manchmal auch Binärsystem oder Zweiersystem genannt. Es ist ein Positionssystem zur Basis 2. Der Wert einer Ziffer ist also abhängig von der Position innerhalb der Zahl. Jede Ziffer hat den doppelten Stellenwert der ihr rechts folgenden Ziffer. Im Dualsystem dargestellte Zahlen nennt man Dualzahlen.

■ **Beispiel:**

$$\begin{aligned} \text{Der Dualzahl } 1001101 \text{ entspricht die Dezimalzahl} \\ 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ = 64 + 0 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1 = 77. \end{aligned}$$

Die Umrechnung von einem Zahlensystem in ein anderes wird als Konvertierung bezeichnet. Werden mehrere Zahlensysteme gleichzeitig benutzt, so ist

es zur Vermeidung von Irrtümern üblich, die Basis als Index anzuhängen.

■ **Beispiel:**

$$1001101_2 = 77_{10}$$

Die Darstellung reeller Zahlen im Dualsystem ist analog der Darstellung im Dezimalsystem. Der Wert einer Ziffer innerhalb der Zahl ergibt sich dadurch, dass die  $n$ -te Stelle vor dem Komma mit  $2^{n-1}$  und die  $m$ -te Stelle nach dem Komma mit  $2^{-m}$  multipliziert wird.

■ **Beispiel:**

$$\begin{aligned} 101100011,1011_2 &= 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ &+ 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} \\ &= 256 + 64 + 32 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 355 \frac{11}{16} = 355,6875_{10} \end{aligned}$$

Dualsysteme sind sehr bedeutend in Elektrotechnik und Datenverarbeitung. Computer sind zeichenverarbeitende Maschinen. Die externen Zeichen (Buchstaben, Ziffern, Sonderzeichen) werden intern im Binärcode in Form von Bitfolgen dargestellt. Ein Bit (Abkürzung von Binary Digit) ist die kleinste darstellbare Informationseinheit mit den Werten 0 und 1. Acht Bit werden zur nächsthöheren Einheit, dem Byte, zusammengefaßt. Zahlen werden in Computern in mehreren aufeinanderfolgenden Bytes dargestellt. Die interne Durchführung arithmetischer Operationen erfolgt im Computer also im Dualsystem. Andere Zahlensysteme, die im Zusammenhang mit der Nutzung von Computern eine Rolle spielen, sind das Oktalsystem (Positionssystem zur Basis 8) mit den Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 und das Hexadezimalsystem (Positionssystem zur Basis 16) mit den Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F (die Buchstaben A, ..., F stehen für die Werte 10, ..., 15).

### 7.3 Runden

Als Dezimalstellen einer Dezimalzahl bezeichnet man die Stellen nach dem Komma. Runden ist das Verkürzen einer Dezimalzahl, also die Darstellung einer Dezimalzahl mit einer vorgegebenen Anzahl von Dezimalstellen.

*Rundungsregel*

Ist die erste weggelassene Ziffer 0, 1, 2, 3, 4, dann bleibt die letzte geschriebene Ziffer unverändert. Ist die erste weggelassene Ziffer 5, 6, 7, 8, 9, dann erhöht sich die letzte geschriebene Ziffer um 1.

Ist die gerundete Zahl kleiner als die ursprüngliche Zahl (die erste weggelassene Ziffer ist dann 0, 1, 2, 3 oder 4), spricht man von Abrunden. Ist die gerundete Zahl jedoch größer als die ursprüngliche Zahl (die erste weggelassene Ziffer ist dann 5, 6, 7, 8 oder 9), so spricht man von Aufrunden.

■ **Beispiele:**

$$\begin{aligned} 3,456 &\approx 3,46 \text{ (aufgerundet)}; 23,699 \approx 23,70 \text{ (aufgerundet)}; \\ 14,3449 &\approx 14,34 \text{ (abgerundet)}; 17,249\,6389 \approx 17,2496 \text{ (auf 4 Dezimalstellen gerundet)} \end{aligned}$$

## 8 Logarithmen

### 8.1 Definition des Logarithmus

Eine Zahl der Form  $\log_a b$  (gesprochen: Logarithmus  $b$  zur Basis  $a$ ) heißt Logarithmus. Dabei heißt  $b$  Numerus des Logarithmus und ist eine reelle Zahl größer als 0, und  $a$  heißt Basis des Logarithmus und ist eine positive reelle Zahl ungleich 1.

|                   |                               |
|-------------------|-------------------------------|
| $\log_a b$        | Logarithmus $b$ zur Basis $a$ |
| $b > 0$           | Numerus                       |
| $a > 0, a \neq 1$ | Basis                         |

Der Logarithmus  $\log_a b$  ist definiert als die eindeutige Lösung  $x$  der Gleichung  $a^x = b$ .

|                                        |
|----------------------------------------|
| $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ |
|----------------------------------------|

Der Logarithmus  $x = \log_a b$  ist also der Exponent zu der Basis  $a$ , für den die Potenz  $a^x$  gleich dem Numerus  $b$  ist.

Aus der Definition folgt (denn  $a^1 = a$  und  $a^0 = 1$ )

|                |
|----------------|
| $\log_a a = 1$ |
|----------------|

|                |
|----------------|
| $\log_a 1 = 0$ |
|----------------|

■ **Beispiele:**

|                                 |                               |                                                    |
|---------------------------------|-------------------------------|----------------------------------------------------|
| 1. $\log_2 8 = x$               | $\Rightarrow x = 3$           | denn $2^3 = 8$                                     |
| 2. $\log_4 16 = x$              | $\Rightarrow x = 2$           | denn $4^2 = 16$                                    |
| 3. $\log_4 4 = x$               | $\Rightarrow x = 1$           | denn $4^1 = 4$                                     |
| 4. $\log_5 1 = x$               | $\Rightarrow x = 0$           | denn $5^0 = 1$                                     |
| 5. $\log_3 81 = x$              | $\Rightarrow x = 4$           | denn $3^4 = 81$                                    |
| 6. $\log_5 5^7 = x$             | $\Rightarrow x = 7$           | denn $5^7 = 5^7$                                   |
| 7. $\log_{10} 1000 = x$         | $\Rightarrow x = 3$           | denn $10^3 = 1000$                                 |
| 8. $\log_2 0,5 = x$             | $\Rightarrow x = -1$          | denn $2^{-1} = \frac{1}{2} = 0,5$                  |
| 9. $\log_a 8 = 1$               | $\Rightarrow a = 8$           | denn $8^1 = 8$                                     |
| 10. $\log_a \frac{1}{125} = -3$ | $\Rightarrow a = 5$           | denn $5^{-3} = \frac{1}{125}$                      |
| 11. $\log_a \frac{3}{5} = -1$   | $\Rightarrow a = \frac{5}{3}$ | denn $\left(\frac{5}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{5}$ |
| 12. $\log_{10} b = -1$          | $\Rightarrow b = 0,1$         | denn $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$                |
| 13. $\log_4 b = \frac{5}{2}$    | $\Rightarrow b = 32$          | denn $4^{\frac{5}{2}} = \sqrt{4^5} = 2^5 = 32$     |

### 8.2 Spezielle Basen

Logarithmen zur Basis  $a = 10$  heißen Zehnerlogarithmen oder dekadische Logarithmen oder Briggsche Logarithmen (nach dem englischen Mathematiker Henry Briggs, 1556–1630). Man schreibt statt  $\log_{10} b$  auch einfach  $\lg b$ .

|                       |
|-----------------------|
| $\log_{10} b = \lg b$ |
|-----------------------|

Logarithmen mit der Eulerschen Zahl  $e = 2,71828182\dots$  als Basis werden natürliche Logarithmen oder Nepersche Logarithmen (nach dem schottischen Mathematiker John Neper (Napier), 1550 bis 1617) genannt. Man schreibt  $\ln b$  für  $\log_e b$ .

|                    |
|--------------------|
| $\log_e b = \ln b$ |
|--------------------|

Die Eulersche Zahl  $e$  ist der Grenzwert der Folge

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (\text{vgl. Abschnitt VIII.1.5}):$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,7182818284 \dots$$

Sie hat ihren Namen nach dem schweizerischen Mathematiker Leonhard Euler (1707–1783). Die Eulersche Zahl ist eine irrationale Zahl.

Logarithmen zur Basis  $a = 2$  heißen Zweierlogarithmen oder binäre Logarithmen oder duale Logarithmen. Man schreibt statt  $\log_2 b$  manchmal auch  $\text{ld } b$ .

$$\log_2 b = \text{ld } b$$

■ **Beispiele:**

- |                                      |                                |                                   |
|--------------------------------------|--------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $\log_2 32 = \text{ld } 32 = x$   | $\Rightarrow x = 5$            | denn $2^5 = 32$                   |
| 2. $\text{ld } \sqrt{2} = x$         | $\Rightarrow x = \frac{1}{2}$  | denn $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ |
| 3. $\log_{10} 10000 = \lg 10000 = x$ | $\Rightarrow x = 4$            | denn $10^4 = 10000$               |
| 4. $\lg 0,01 = x$                    | $\Rightarrow x = -2$           | denn $10^{-2} = 0,01$             |
| 5. $\log_e 5 = \ln 5 = x$            | $\Rightarrow x = 1,6094 \dots$ | denn $e^{1,6094 \dots} = 5$       |

### 8.3 Regeln der Logarithmenrechnung

1. Der Logarithmus eines Produkts ist gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren. Oder: Addiert man zum Logarithmus einer Zahl  $u$  den Logarithmus einer Zahl  $v$ , dann erhält man als Summe den Logarithmus des Produkts  $uv$ .

$$\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$$

*Beweis:*

Setze  $\log_a u = x$ ,  $\log_a v = y$   
 $\Rightarrow \log_a u + \log_a v = x + y$   
 $a^x = u$ ,  $a^y = v \Rightarrow u \cdot v = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$   
 $\Rightarrow \log_a (u \cdot v) = x + y$

■ **Beispiel:**

$$\log_2 256 = \text{ld } 256 = \text{ld } (4 \cdot 64) = \text{ld } 4 + \text{ld } 64 = 2 + 6 = 8$$

2. Der Logarithmus eines Bruches (Quotienten) ist gleich der Differenz der Logarithmen von Zähler (Dividend) und Nenner (Divisor). Oder: Subtrahiert man vom Logarithmus einer Zahl  $u$  den Logarithmus einer Zahl  $v$ , dann erhält man als Differenz den Logarithmus des Bruches (Quotienten)  $\frac{u}{v}$ .

$$\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$$

*Beweis:*

Setze  $\log_a u = x$ ,  $\log_a v = y \Rightarrow \log_a u - \log_a v = x - y$   
 $a^x = u$ ,  $a^y = v \Rightarrow \frac{u}{v} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$   
 $\Rightarrow \log_a \frac{u}{v} = x - y$

■ **Beispiel:**  $\log_3 \frac{9}{243} = \log_3 9 - \log_3 243 = 2 - 5 = -3$

3. Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem mit dem Exponenten multiplizierten Logarithmus der Basis. Oder: Multipliziert man den Logarithmus einer Zahl  $u$  mit einer Zahl  $r$ , dann erhält man den Logarithmus der Potenz  $u^r$ .

$$\log_a (u^r) = r \cdot \log_a u$$

*Beweis:*

Setze  $\log_a u = x \Rightarrow a^x = u \Rightarrow u^r = (a^x)^r = a^{rx}$   
 $\Rightarrow rx = \log_a (u^r) = r \log_a u$

■ **Beispiele:**

- $\log_2 8^3 = 3 \log_2 8 = 3 \log_2 2^3 = 3 \cdot 3 = 9$
- $\lg 10000 = \lg 10^4 = 4 \lg 10 = 4$

4. Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem durch den Wurzelexponenten dividierten Logarithmus des Radikanden. Oder: Dividiert man den Logarithmus einer Zahl  $u$  durch eine Zahl  $n$ , dann erhält man den Logarithmus der Wurzel  $\sqrt[n]{u}$ .

$$\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \log_a u$$

*Beweis:*

Wegen  $\sqrt[n]{u} = u^{\frac{1}{n}}$  folgt  
 $\log_a \sqrt[n]{u} = \log_a u^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log_a u$   
 aus der Potenzregel.

■ **Beispiele:**

- $\log_5 \sqrt[3]{5} = \frac{1}{3} \log_5 5 = \frac{1}{3}$
- $\log_2 \sqrt[3]{64} = \frac{1}{3} \cdot \log_2 64 = \frac{1}{3} \cdot \log_2 2^6 = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2$

5. Aus den Regeln ergeben sich die folgenden Spezialfälle (denn  $a^r = a^r$  und  $\log_a \frac{1}{v} = \log_a 1 - \log_a v = 0 - \log_a v$ ).

$$\log_a (a^r) = r$$

und

$$\log_a \frac{1}{v} = -\log_a v$$

### 8.4 Zusammenhang von Logarithmen mit verschiedenen Basen

Für Logarithmen mit verschiedenen Basen  $a$  und  $c$  gilt folgende Umrechnungsregel

$$\log_a u = \frac{\log_c u}{\log_c a}$$

*Beweis:*

Setze  $\log_a u = x$ . Es folgt  $a^x = u$ , also auch  $\log_c a^x = \log_c u$ . Nach der Potenzregel ergibt sich



$x \log_c a = \log_c u$  und nach  $x$  aufgelöst  $x = \frac{\log_c u}{\log_c a}$ . We-

gen  $x = \log_a u$  folgt die Behauptung:  $\log_a u = \frac{\log_c u}{\log_c a}$ .

Logarithmen zu verschiedenen Basen ( $a$  und  $c$ ) unterscheiden sich also nur durch einen konstanten

Faktor  $\left(\frac{1}{\log_c a}\right)$ .

Für  $c = u = b$  ergibt sich der Spezialfall

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

#### ■ Beispiele:

- $\ln u = \frac{1}{\lg e} \cdot \lg u = \frac{1}{0,4342 \dots} \cdot \lg u$
- $\lg u = \frac{1}{\ln 10} \cdot \ln u = \frac{1}{2,3025 \dots} \cdot \ln u$
- $\log_5 u = \frac{1}{\lg 5} \cdot \lg u = \frac{1}{0,6989 \dots} \cdot \lg u$
- $\ln 1000 = \frac{1}{\lg e} \cdot \lg 1000 \approx \frac{1}{0,4342944819} \cdot 3 \approx 6,907755279$

## 8.5 Dekadische Logarithmen

Die dekadischen Logarithmen (auch Briggsche Logarithmen oder Zehnerlogarithmen genannt) haben den Vorteil, dass man mit den Logarithmen der Dezimalzahlen zwischen 1 und 10 über die Logarithmen aller positiven reellen Zahlen verfügt.

Begründung: Jede reelle Zahl  $x$  lässt sich durch Abspalten einer Zehnerpotenz  $10^k$  mit ganzzahligem  $k$  in der Form  $x = 10^k \cdot \bar{x}$  mit  $1 \leq \bar{x} < 10$  schreiben. Dabei ist  $\bar{x}$  durch die Ziffernfolge von  $x$  bestimmt, während  $10^k$  die Größenordnung von  $x$  angibt. Logarithmieren ergibt  $\lg x = \lg(10^k \cdot \bar{x}) = \lg(10^k) + \lg \bar{x} = k + \lg \bar{x}$  mit  $0 \leq \lg \bar{x} < 1$  (also  $\lg \bar{x} = 0, \dots$ ). Man nennt  $k$  die Kennzahl und die Ziffernfolge hinter dem Komma von  $\lg \bar{x}$  die Mantisse des Logarithmus von  $x$ .

Von einer vor dem Komma  $n$ -stelligen Zahl ist die Kennzahl  $n - 1$  (also um 1 kleiner). Für Zahlen kleiner als 1 sind die Kennzahlen negativ.

Logarithmentafeln enthalten in der Regel nur die Mantisse.

Alle Zahlen, die sich nur durch Zehnerpotenzen unterscheiden, haben die gleiche Mantisse, aber unterschiedliche Kennzahlen.

#### ■ Beispiele:

- $\lg 2250 = \lg(1000 \cdot 2,25) = \lg(10^3 \cdot 2,25) = \lg 10^3 + \lg 2,25 \approx 3 + 0,3522 = 3,3522$
- $\lg 0,0315 = \lg\left(3,15 \cdot \frac{1}{100}\right) = \lg(3,15 \cdot 10^{-2}) = \lg 3,15 + \lg 10^{-2} \approx 0,4983 - 2 = \lg 3,15 + \lg 10^{-2} \approx 0,4983 - 2$
- $\lg 2000 = \lg(10^3 \cdot 2) = \lg 10^3 + \lg 2 \approx 3 + 0,3010 = 3,3010$ ,  
 $\lg 200 \approx 2,3010$ ,  $\lg 20 \approx 1,3010$ ,  $\lg 2 \approx 0,3010$ ,  
 $\lg 0,2 \approx 0,3010 - 1$ ,  $\lg 0,02 \approx 0,3010 - 2$ ,  
 $\lg 0,002 \approx 0,3010 - 3$

## 9 Ungleichungen

### 9.1 Definitionen und Rechenregeln

Zwischen zwei reellen Zahlen  $a$  und  $b$  besteht genau eine der drei Beziehungen:  $a = b$  ( $a$  ist gleich  $b$ ),  $a < b$  ( $a$  ist kleiner als  $b$ ),  $a > b$  ( $a$  ist größer als  $b$ ). Der Winkelhaken ist dabei immer nach der größeren Seite hin geöffnet.

$$a, b \in \mathbb{R}: a = b \text{ oder } a < b \text{ oder } a > b$$

Wegen dieser Eigenschaft nennt man die Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen geordnet.

Im Falle  $a \neq b$  ( $a$  ungleich  $b$ ) gilt genau eine der beiden Ungleichungen  $a < b$  oder  $a > b$ .

$$a \neq b \Rightarrow a < b \text{ oder } a > b$$

Die Ungleichung  $a \leq b$  bedeutet, dass  $a$  kleiner oder gleich  $b$  ist ( $a$  ist also nicht größer als  $b$ ), und die Ungleichung  $a \geq b$  bedeutet entsprechend, dass  $a$  größer oder gleich  $b$  ist ( $b$  ist also nicht größer als  $a$ ).

Ist  $a < b$  und  $b < c$ , dann kann man die beiden Ungleichungen fortlaufend schreiben:  $a < b < c$ . Man nennt dies fortlaufende Ungleichung oder Ungleichungskette.

$$a < b < c \Leftrightarrow a < b \text{ und } b < c$$

Entsprechend schreibt man zum Beispiel  $a < x$  und  $x \leq b$  zusammenfassend als  $a < x \leq b$ . Fortlaufende Ungleichungen werden oft benutzt, um einen Bereich oder ein Intervall anzugeben, aus dem eine Größe  $x$  gewählt werden darf oder gewählt werden soll.

Eigenschaften von Ungleichungen:

- $a \leq a$  (Reflexivität)
- $a \leq b$  und  $b \leq c \Rightarrow a \leq c$  (Transitivität)
- $a \leq b$  und  $b \leq a \Rightarrow a = b$  (Antisymmetrie)

Rechenregeln für Ungleichungen:

Eine Ungleichung kann von beiden Seiten gelesen werden:

$$a < b \Leftrightarrow b > a \text{ für alle } a, b \in \mathbb{R}$$

Auf beiden Seiten einer Ungleichung darf dieselbe Zahl addiert werden:

$$a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c \text{ für alle } a, b, c \in \mathbb{R}$$

Zwei gleichgerichtete Ungleichungen dürfen addiert werden:

$$a \leq b \text{ und } c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d \text{ für alle } a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

$$a < b \text{ und } c \leq d \Rightarrow a + c < b + d \text{ für alle } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Eine Ungleichung darf mit einer nichtnegativen Zahl multipliziert werden:

$$a \leq b \text{ und } c \geq 0 \Rightarrow ac \leq bc \text{ für alle } a, b \in \mathbb{R}$$

Wird eine Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert, so dreht sich das Ungleichheitszeichen um:

$$a \leq b \text{ und } c \leq 0 \Rightarrow ac \geq bc \text{ für alle } a, b \in \mathbb{R}$$

Bildet man auf beiden Seiten einer Ungleichung den Kehrwert, so dreht sich das Ungleichheitszeichen um:

$$a \leq b \Rightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \text{ für alle } a, b \in \mathbb{R}^*$$

Aus der Multiplikationsregel folgt im besonderen (Multiplikation mit  $-1$ ), dass das Vertauschen der Vorzeichen auf beiden Seiten einer Ungleichung das Ungleichheitszeichen umdreht:

$$a < b \Rightarrow -a > -b$$

#### ■ Beispiele:

- $3 \leq 3; 5 \geq 5; -12,2 \leq -12,2$
- $3 \leq 5, 5 \leq 6 \Rightarrow 3 \leq 6; -4 \geq -5, -5 \geq -7,1 \Rightarrow -4 \geq -7,1$
- $3 \leq 3, 3 \geq 3 \Rightarrow 3 = 3$
- $3 < 5 \Leftrightarrow 5 > 3; -1 > -2 \Leftrightarrow -2 < -1$
- $5 \leq 7 \Rightarrow 5 + 2 \leq 7 + 2; 4 > 1 \Rightarrow 4 - 3 > 1 - 3$
- $3 < 4, 7 < 9 \Rightarrow 3 + 7 < 4 + 9; 4 \geq 3, -2 \geq -5 \Rightarrow 4 - 2 \geq 3 - 5$
- $5 \leq 7 \Rightarrow 5 \cdot 3 \leq 7 \cdot 3; -3 > -4 \Rightarrow -3 \cdot 2 > -4 \cdot 2$
- $4 > 2 \Rightarrow 4 \cdot (-2) < 2 \cdot (-2); 6 \geq 7 \Rightarrow 6 \cdot (-1) \geq 7 \cdot (-1) \Rightarrow -6 \geq -7$
- $2 < 3 \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{3}; -5 > -6 \Rightarrow -\frac{1}{5} < -\frac{1}{6}$

## 9.2 Absolutbetrag

Der Betrag oder Absolutbetrag  $|a|$  einer Zahl  $a$  stellt auf der Zahlengeraden den Abstand der Zahl  $a$  vom Nullpunkt dar. Da Abstände nicht negativ sind, gilt  $|a| = a$  für  $a \geq 0$  und  $|a| = -a$  für  $a < 0$ .

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

Beträge sind nicht negativ.

Eigenschaften:

- $|-a| = |a|$
- $|a| \geq 0; |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$  für  $b \neq 0; \left|\frac{1}{b}\right| = \frac{1}{|b|}$  für  $b \neq 0$
- $|a^n| = |a|^n$  für  $n \in \mathbb{N}; \left|\frac{1}{a^n}\right| = \frac{1}{|a|^n}$  für  $n \in \mathbb{N}, a \neq 0$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$   
(sogenannte Dreiecksungleichung)

#### ■ Beispiele:

- $|4, 3| = 4, 3; |-2| = 2; |-\pi| = \pi; |0| = 0$
- $|3 \cdot 4| = |3| \cdot |4| = 3 \cdot 4 = 12; |(-3) \cdot 4| = |-3| \cdot |4| = 3 \cdot 4 = 12$
- $\left|\frac{-2}{3}\right| = \frac{|-2|}{|3|} = \frac{2}{3}; \left|\frac{1}{-4}\right| = \frac{1}{|-4|} = \frac{1}{4}$
- $|(-3)^5| = |-3|^5 = 3^5; \left|\frac{1}{(-2)^3}\right| = \frac{1}{|-2|^3} = \frac{1}{2^3}$
- $|4 + 2| \leq |4| + |2| \Rightarrow 6 \leq 4 + 2 = 6;$   
 $|5 - 3| \leq |5| + |-3| \Rightarrow 2 \leq 5 + 3 = 8$

## 9.3 Intervalle

Es seien  $a$  und  $b$  zwei reelle Zahlen mit  $a < b$ . Die Menge aller reellen Zahlen  $x$ , die die fortlaufende Ungleichung  $a < x < b$  erfüllen, heißt Intervall oder Zahlenintervall mit den Endpunkten oder Randpunkten  $a$  und  $b$  (genauer: offenes und beschränktes Intervall).

Gehört der Randpunkt nicht selbst zum Intervall, so spricht man von einem offenen Intervallende, im entgegengesetzten Fall von einem abgeschlossenen Intervallende.

Die Angabe eines Intervalls erfolgt durch seine Randpunkte  $a$  und  $b$ , indem diese in Klammern gesetzt werden. Eine eckige Klammer steht für ein abgeschlossenes Intervallende, eine runde für ein offenes Intervallende. Gehören beide Randpunkte zu dem Intervall, so heißt es abgeschlossen. Gehört nur einer der Randpunkte (also entweder  $a$  oder  $b$ ) zum Intervall, so heißt es halboffen. Gehört keiner der Randpunkte zum Intervall, so heißt es offen.

Intervalle dienen der Beschreibung von Zahlenmengen. Man unterscheidet beschränkte und nicht beschränkte Intervalle.

Bei einem beschränkten Intervall sind die Intervallgrenzen  $a$  und  $b$  reelle Zahlen. Es besteht aus allen reellen Zahlen  $x$ , die zwischen diesen beiden Grenzen liegen.

#### Beschränkte Intervalle

|                                                                  |                             |
|------------------------------------------------------------------|-----------------------------|
| $[a, b] = \{x   x \in \mathbb{R} \text{ und } a \leq x \leq b\}$ | (abgeschlossenes Intervall) |
| $(a, b) = \{x   x \in \mathbb{R} \text{ und } a < x < b\}$       | (offenes Intervall)         |
| $[a, b) = \{x   x \in \mathbb{R} \text{ und } a \leq x < b\}$    | (halboffenes Intervall)     |
| $(a, b] = \{x   x \in \mathbb{R} \text{ und } a < x \leq b\}$    | (halboffenes Intervall)     |

Das Symbol mit der Schreibweise  $\infty$  heißt unendlich und steht für „beliebig groß“. Das Symbol  $-\infty$  heißt entsprechend minus unendlich und steht für „beliebig klein“. Die Symbole  $\infty$  und  $-\infty$  sind keine reellen Zahlen;  $-\infty$  ist kleiner als jede reelle Zahl,  $\infty$  ist größer als jede reelle Zahl.

Bei einem nicht beschränkten Intervall ist mindestens eine der Intervallgrenzen  $-\infty$  oder  $\infty$ . Solche Intervalle können durch eine Ungleichung beschrieben werden.

#### Nicht beschränkte Intervalle

|                                                                 |                                                              |
|-----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| $[a, \infty) = \{x   x \in \mathbb{R} \text{ und } x \geq a\}$  | (halboffenes Intervall, nach rechts unbeschränkt)            |
| $(a, \infty) = \{x   x \in \mathbb{R} \text{ und } x > a\}$     | (offenes Intervall, nach rechts unbeschränkt)                |
| $(-\infty, a] = \{x   x \in \mathbb{R} \text{ und } x \leq a\}$ | (halboffenes Intervall, nach links unbeschränkt)             |
| $(-\infty, a) = \{x   x \in \mathbb{R} \text{ und } x < a\}$    | (offenes Intervall, nach links unbeschränkt)                 |
| $(-\infty, \infty) = \{x   x \in \mathbb{R}\}$                  | (offenes Intervall, nach links und nach rechts unbeschränkt) |

#### ■ Beispiele:

- $[3, 4] = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ und } 3 \leq x \leq 4 < 4\}$   
Alle reellen Zahlen zwischen 3 und 4; sowohl 3 als auch 4 gehören zum Intervall.

- $[3, 4) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } 3 \leq x < 4\}$   
Alle reellen Zahlen zwischen 3 und 4; 3 gehört zum Intervall, 4 jedoch nicht.
- $(3, 4] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } 3 < x \leq 4\}$   
Alle reellen Zahlen zwischen 3 und 4; 3 gehört nicht zum Intervall, aber 4.
- $(3, 4) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } 3 < x < 4\}$   
Alle reellen Zahlen zwischen 3 und 4; weder 3 noch 4 gehören zum Intervall.
- $[3, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x \geq 3\}$   
Alle reellen Zahlen größer oder gleich 3 gehören zum Intervall (3 gehört dazu).
- $(3, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x > 3\}$   
Alle reellen Zahlen größer als 3 gehören zum Intervall (3 gehört nicht dazu).
- $(-\infty, 4] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x \leq 4\}$   
Alle reellen Zahlen kleiner oder gleich 4 gehören zum Intervall (4 gehört dazu).
- $(-\infty, 4) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x < 4\}$   
Alle reellen Zahlen kleiner als 4 gehören zum Intervall (4 gehört nicht dazu).
- $(-\infty, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$   
Alle reellen Zahlen gehören zum Intervall.

## 10 Komplexe Zahlen

### 10.1 Algebraische Form

Im Bereich der reellen Zahlen besitzt die Gleichung  $x^2 + 1 = 0$  keine Lösung. Ebenso stellen  $\sqrt{-3}$  oder  $\sqrt[4]{-6}$  keine reellen Zahlen dar.

Falls eine quadratische Gleichung keine reelle Lösung besitzt, ist es trotzdem möglich, Lösungen anzugeben und zwar komplexe Zahlen als Lösungen. Zur Darstellung dieser komplexen Zahlen wird eine Erweiterung des Bereichs der reellen Zahlen vorgenommen.

Ausgangspunkt ist die imaginäre Einheit  $j$ , deren Quadrat gleich  $-1$  ist:  $j^2 = -1$ .<sup>2)</sup>

Imaginäre Einheit  $j$

$$j^2 = -1$$

Für die imaginäre Einheit gilt

$$\begin{aligned} j^2 &= -1, j^3 = -j, j^4 = 1 \\ j^{4n-3} &= j, j^{4n-2} = -1, j^{4n-1} = -j, j^{4n} = 1 \\ (n \in \mathbb{N}^*) \end{aligned}$$

Die Zahlen  $j$  und  $-j$  sind Lösungen der quadratischen Gleichung  $x^2 + 1 = 0$ .

Mit dieser imaginären Einheit  $j$  und zwei reellen Zahlen  $a$  und  $b$  stellt  $z = a + bj$  eine komplexe Zahl dar.

$$z = a + bj, a, b \in \mathbb{R}$$

Eine komplexe Zahl  $z$  besteht also aus einem reellen Teil  $a$  (Realteil) und einem imaginären Teil  $b$  (Imaginärteil).

Wenn  $a$  und  $b$  alle möglichen reellen Werte durchlaufen, dann werden alle möglichen komplexen Zahlen erzeugt.

Alle komplexen Zahlen bilden zusammen die Menge  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen.

$$\mathbb{C} = \{z = a + bj \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Komplexe Zahlen  $z$  mit Realteil gleich 0 (also  $a = 0$ ) heißen imaginäre Zahlen, die komplexen Zahlen  $z$  mit Imaginärteil gleich 0 (also  $b = 0$ ) sind die reellen Zahlen. Die komplexen Zahlen umfassen also die imaginären Zahlen und die reellen Zahlen.

$$\begin{aligned} z &= a + bj && \text{komplexe Zahlen} \\ z &= bj \ (a = 0) && \text{imaginäre Zahlen} \\ z &= a \ (b = 0) && \text{reelle Zahlen} \end{aligned}$$

Komplexe Zahlen  $z = a + bj$  und  $\bar{z} = a - bj$ , also mit gleichem Realteil und entgegengesetzt gleichem Imaginärteil, heißen konjugiert komplex.

Komplexe Zahlen sind nicht mehr auf einer Zahlengeraden, sondern nur noch in einer Zahlenebene, der sogenannten Gaußschen Zahlenebene, darstellbar (Name nach dem deutschen Mathematiker Carl Friedrich Gauß, 1777–1855).

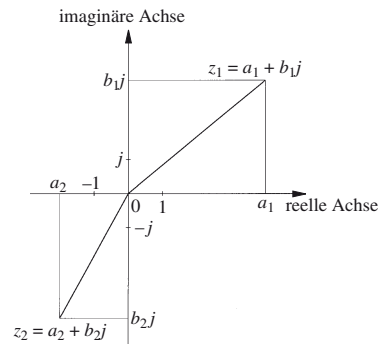


**Bild I-1** Darstellung komplexer Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene

Dabei wird in einem kartesischen Koordinatensystem der Ebene (siehe Abschnitt VII.1.1) der Realteil  $a$  von  $z$  auf der Abszissenachse und der Imaginärteil  $b$  von  $z$  auf der Ordinatenachse abgetragen. Jeder komplexen Zahl entspricht ein Punkt der Ebene und umgekehrt. Die Zuordnung von Zahl und Punkt ist eineindeutig. Die reellen Zahlen liegen auf der Abszissenachse, die imaginären Zahlen liegen auf der Ordinatenachse. Deshalb nennt man die Abszissenachse auch reelle Achse und die Ordinatenachse imaginäre Achse.

Die Darstellung einer komplexen Zahl in der Form  $z = a + bj$ , bei der kartesische Koordinaten verwendet werden, heißt algebraische Form. Daneben gibt es für die Darstellung der komplexen Zahlen die trigonometrische Form und die Exponentialform.

<sup>2)</sup> In der Mathematik wird für die imaginäre Einheit der Buchstabe  $i$  verwendet, in der Elektrotechnik nimmt man statt dessen jedoch den Buchstaben  $j$ , um Verwechslungen mit der Stromstärke  $i$  zu vermeiden.

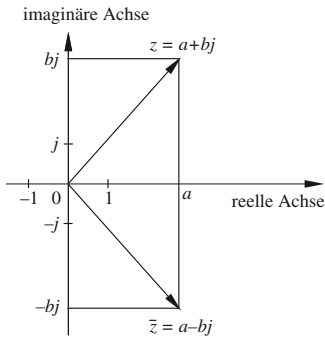


**Bild I-2** Konjugiert komplexe Zahlen  $z$  und  $\bar{z}$  in algebraischer Form

## 10.2 Trigonometrische Form

Neben der Darstellung der komplexen Zahlen in algebraischer Form gibt es die Darstellung in trigonometrischer Form (vgl. Kapitel VI):  $z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$ . Dabei heißt  $r$  Modul oder Absolutbetrag (also  $r = |z|$ ) und  $\varphi$  Argument der komplexen Zahl  $z$ . Der (orientierte) Winkel  $\varphi$  wird im Bogenmaß (vgl. Abschnitt III.9.5) gemessen und ist nur bis auf Vielfache von  $2\pi$  bestimmt. Deshalb wählt man meist für  $\varphi$  das halboffene Intervall  $[0, 2\pi)$ , also  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

$$z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi), \quad r \in \mathbb{R}, r \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Für  $\varphi = 0$  ergeben sich die positiven reellen Zahlen, für  $\varphi = \pi$  die negativen reellen Zahlen, für  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  die positiven imaginären Zahlen und für  $\varphi = \frac{3}{2}\pi$  die negativen imaginären Zahlen. Statt trigonometrischer Form sagt man mitunter auch goniometrische Form der komplexen Zahlen. Für die Darstellung der komplexen Zahlen in der Ebene werden für die trigonometrische Form Polarkoordinaten (siehe Abschnitt VII.1.2) verwendet, wohingegen für die algebraische Form kartesische Koordinaten (siehe Abschnitt VII.1.1) benutzt werden.

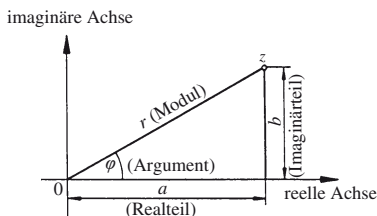


**Bild I-3** Algebraische und trigonometrische Form einer komplexen Zahl  $z$

Für den Zusammenhang zwischen algebraischer und trigonometrischer Form gilt

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan \varphi = \frac{b}{a}$$

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi$$

Derselbe Zusammenhang gilt für die kartesischen Koordinaten und die Polarkoordinaten eines Punktes in der Ebene.

Multiplizieren, Dividieren, Potenzieren und Radizieren komplexer Zahlen lassen sich in der trigonometrischen Form einfacher durchführen.

## 10.3 Addieren und Subtrahieren komplexer Zahlen

Komplexe Zahlen  $z_1 = a_1 + b_1j$  und  $z_2 = a_2 + b_2j$  werden addiert, indem man die Realteile addiert und die Imaginärteile addiert.

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1j) + (a_2 + b_2j)$$

$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)j$$

Komplexe Zahlen  $z_1 = a_1 + b_1j$  und  $z_2 = a_2 + b_2j$  werden voneinander subtrahiert, indem man die Realteile subtrahiert und die Imaginärteile subtrahiert.

$$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1j) - (a_2 + b_2j)$$

$$= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)j$$

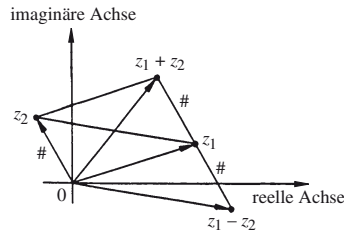


**Bild I-4** Addition und Subtraktion komplexer Zahlen  $z_1$  und  $z_2$  (die mit # gekennzeichneten Strecken sind parallel und gleichlang)

Die Summe konjugiert komplexer Zahlen  $z = a + bj$  und  $\bar{z} = a - bj$  ist reell, die Differenz konjugiert komplexer Zahlen ist imaginär.

$$z + \bar{z} = (a + bj) + (a - bj) = 2a$$

$$z - \bar{z} = (a + bj) - (a - bj) = 2bj$$

### ■ Beispiele:

- $z_1 + z_2 = (2,66 + 0,89j) + (-0,81 + 1,49j) = 1,85 + 2,38j$
- $z_1 - z_2 = (2,66 + 0,89j) - (-0,81 + 1,49j) = 3,47 - 0,60j$
- $z + \bar{z} = (2,4 + 0,9j) + (2,4 - 0,9j) = 4,8$
- $z - \bar{z} = (2,4 + 0,9j) - (2,4 - 0,9j) = 1,8j$

## 10.4 Multiplizieren komplexer Zahlen

Komplexe Zahlen  $z_1 = a_1 + b_1j$  und  $z_2 = a_2 + b_2j$  in algebraischer Form werden wie algebraische Summen multipliziert (denn  $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1j)(a_2 + b_2j) = a_1a_2 + a_1b_2j + b_1a_2j + b_1b_2j^2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)j$  wegen  $j^2 = -1$ ).

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1j)(a_2 + b_2j) \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)j \end{aligned}$$

Das Produkt konjugiert komplexer Zahlen ist reell.

$$z \cdot \bar{z} = (a + bj)(a - bj) = a^2 + b^2$$

### ■ Beispiele:

- $z_1 \cdot z_2 = (3 + 4j)(5 - 2j) = (3 \cdot 5 - 4 \cdot (-2)) + (3 \cdot (-2) + 5 \cdot 4)j = 23 + 14j$
- $z \cdot \bar{z} = (2,4 + 0,9j)(2,4 - 0,9j) = (2,4)^2 + (0,9)^2 = 5,76 + 0,81 = 6,57$

Komplexe Zahlen  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)$  und  $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)$  in trigonometrischer Form werden multipliziert, indem man die Moduln ( $r_1$  und  $r_2$ ) multipliziert und die Argumente ( $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ ) addiert.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2) \\ &= r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \end{aligned}$$

### Beweis:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2) \\ &= r_1r_2[(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)j] \\ &= r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \end{aligned}$$

denn  $\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$  und  $\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 = \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$ .

### ■ Beispiele:

- $z_1 = 3(\cos 20^\circ + j \sin 20^\circ)$ ,  $z_2 = 7(\cos 65^\circ + j \sin 65^\circ)$   
 $\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = 3(\cos 20^\circ + j \sin 20^\circ) \cdot 7(\cos 65^\circ + j \sin 65^\circ) = 21(\cos 85^\circ + j \sin 85^\circ)$
- $z_1 = 5(\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ) = \frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{2}j$   
 $z_2 = 13(\cos 60^\circ + j \sin 60^\circ) = \frac{13}{2} + \frac{13}{2}j\sqrt{3}$   
 (denn  $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$  und  $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ).  
 Es folgt  
 $z_1 \cdot z_2 = 5(\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ) \cdot 13(\cos 60^\circ + j \sin 60^\circ) = 65(\cos 90^\circ + j \sin 90^\circ) = 65j$   
 oder  
 $z_1 \cdot z_2 = \left(\frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{2}j\right) \left(\frac{13}{2} + \frac{13}{2}j\sqrt{3}\right) = \frac{65}{4}\sqrt{3} - \frac{65}{4}\sqrt{3} + \left(\frac{65 \cdot 3}{4} + \frac{65}{4}\right)j = 65j$

## 10.5 Dividieren komplexer Zahlen

Komplexe Zahlen  $z_1 = a_1 + b_1j$  und  $z_2 = a_2 + b_2j$  in algebraischer Form werden dividiert, indem man mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners (Divi-

sors) erweitert.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1j}{a_2 + b_2j} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}j \quad (z_2 \neq 0)$$

### Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + b_1j}{a_2 + b_2j} = \frac{(a_1 + b_1j)(a_2 - b_2j)}{(a_2 + b_2j)(a_2 - b_2j)} \\ &= \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + (b_1a_2 - a_1b_2)j}{a_2^2 + b_2^2} \\ &= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}j \end{aligned}$$

Der Quotient konjugiert komplexer Zahlen ist wieder eine komplexe Zahl.

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{a + bj}{a - bj} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \frac{2ab}{a^2 + b^2}j \quad (z \neq 0)$$

### ■ Beispiele:

- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 4j}{5 - 2j} = \frac{3 \cdot 5 + 4 \cdot (-2)}{5^2 + (-2)^2} + \frac{4 \cdot 5 - 3 \cdot (-2)}{5^2 + (-2)^2}j = \frac{15 - 8}{25 + 4} + \frac{20 + 6}{25 + 4}j = \frac{7}{29} + \frac{26}{29}j$
- $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{2,4 + 0,9j}{2,4 - 0,9j} = \frac{(2,4)^2 - (0,9)^2}{(2,4)^2 + (0,9)^2} + \frac{2 \cdot 2,4 \cdot 0,9}{(2,4)^2 + (0,9)^2}j = \frac{5,76 - 0,81}{5,76 + 0,81} + \frac{4,32}{5,76 + 0,81}j = \frac{4,95}{6,57} + \frac{4,32}{6,57}j$
- $\frac{1}{j} = \frac{1 \cdot (-j)}{j \cdot (-j)} = -j$

Komplexe Zahlen  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)$  und  $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)$  in trigonometrischer Form werden dividiert, indem man die Moduln ( $r_1$  und  $r_2$ ) dividiert und die Argumente ( $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ ) subtrahiert.

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \end{aligned}$$

### Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \frac{(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - j \sin \varphi_2)}{(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)(\cos \varphi_2 - j \sin \varphi_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \frac{[\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + j(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)]}{\sin^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_2} \\ &= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \end{aligned}$$

denn  $\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ ,  $\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 = \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$  und  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ .

■ **Beispiele:**

$$4. \quad z_1 = 3(\cos 20^\circ + j \sin 20^\circ), \quad z_2 = 7(\cos 65^\circ + j \sin 65^\circ)$$

$$\Rightarrow \frac{z_2}{z_1} = \frac{7(\cos 65^\circ + j \sin 65^\circ)}{3(\cos 20^\circ + j \sin 20^\circ)} = \frac{7}{3} (\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ)$$

$$5. \quad z_1 = 5(\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ) = \frac{5}{2} \sqrt{3} + \frac{5}{2} j,$$

$$z_2 = 13(\cos 60^\circ + j \sin 60^\circ) = \frac{13}{2} + \frac{13}{2} \sqrt{3} j$$

Es folgt

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5(\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ)}{13(\cos 60^\circ + j \sin 60^\circ)} = \frac{5}{13} (\cos (-30^\circ) + j \sin (-30^\circ))$$

$$= \frac{5}{13} (\cos 30^\circ - j \sin 30^\circ) = \frac{5}{13} \left( \frac{1}{2} \sqrt{3} - \frac{1}{2} j \right)$$

$$= \frac{5}{26} \sqrt{3} - \frac{5}{26} j$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\frac{5}{2} \sqrt{3} + \frac{5}{2} j}{\frac{13}{2} + \frac{13}{2} \sqrt{3} j} = \frac{\left( \frac{5}{2} \sqrt{3} + \frac{5}{2} j \right) \left( \frac{13}{2} - \frac{13}{2} \sqrt{3} j \right)}{\left( \frac{13}{2} + \frac{13}{2} \sqrt{3} j \right) \left( \frac{13}{2} - \frac{13}{2} \sqrt{3} j \right)} \\ &= \frac{\frac{65}{4} \sqrt{3} - \frac{65}{4} \cdot 3j + \frac{65}{4} j + \frac{65}{4} \sqrt{3}}{169} = \frac{5}{26} \sqrt{3} - \frac{5}{26} j \end{aligned}$$

**10.6 Potenzieren komplexer Zahlen**

Ist  $n$  eine natürliche Zahl, so wird die  $n$ -te Potenz  $z^n$  von  $z$  wie üblich durch  $z^0 = 1$ ,  $z^n = z^{n-1} \cdot z$  definiert.

■ **Beispiele:**

$$\begin{aligned} 1. \quad z^3 &= (a + bj)^2 (a + bj) = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)j \\ 2. \quad z^4 &= (a + bj)^3 (a + bj) = [a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)j] (a + bj) \\ &= a^4 - 6a^2b^2 + b^4 + (4a^3b - 4ab^3)j \end{aligned}$$

Einfacher lässt sich das Potenzieren komplexer Zahlen in der trigonometrischen Form durchführen. Mit Hilfe der Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen erhält man die Formel von Moivre.

$$z^n = [r(\cos \varphi + j \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + j \sin n\varphi) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Eine komplexe Zahl in trigonometrischer Form wird also in die  $n$ -te Potenz erhoben, indem man den Modul ( $r$ ) in die entsprechende Potenz  $r^n$  erhebt und das Argument ( $\varphi$ ) mit dem Exponenten  $n$  multipliziert.

■ **Beispiel:**

$$3. \quad z = 5(\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ) = \frac{5}{2} \sqrt{3} + \frac{5}{2} j$$

$$\begin{aligned} z^4 &= \left[ \frac{5}{2} \sqrt{3} + \frac{5}{2} j \right]^4 \\ &= \left( \frac{5}{2} \sqrt{3} \right)^4 - 6 \left( \frac{5}{2} \sqrt{3} \right)^2 \left( \frac{5}{2} \right)^2 + \left( \frac{5}{2} \right)^4 \\ &\quad + \left[ 4 \left( \frac{5}{2} \sqrt{3} \right)^3 \cdot \frac{5}{2} - 4 \cdot \frac{5}{2} \sqrt{3} \left( \frac{5}{2} \right)^3 \right] j \\ &= \frac{625 \cdot 9}{16} - \frac{6 \cdot 25 \cdot 3 \cdot 25}{4 \cdot 4} + \frac{625}{16} \\ &\quad + \left[ \frac{4 \cdot 125 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} \cdot 5}{8 \cdot 2} - \frac{4 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} \cdot 125}{2 \cdot 8} \right] j \\ &= -\frac{625}{2} + \frac{625 \cdot \sqrt{3}}{2} j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^4 &= [5(\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ)]^4 = 5^4 (\cos 120^\circ + j \sin 120^\circ) \\ &= 5^4 \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{3} j \right) \\ &= -\frac{625}{2} + \frac{625 \cdot \sqrt{3}}{2} j \end{aligned}$$

Die Moivresche Formel lässt sich durch vollständige Induktion beweisen. Ihre Gültigkeit lässt sich schrittweise bis auf reelle Exponenten ausdehnen.

**10.7 Radizieren komplexer Zahlen**

Die  $n$ -te Wurzel  $\sqrt[n]{z}$  einer komplexen Zahl  $z$  ist definiert als eine komplexe Zahl  $w$ , deren  $n$ -te Potenz gleich  $z$  ist, also eine Lösung der Gleichung  $w^n = z$ . Setzt man  $z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$  und  $w = \rho(\cos \psi + j \sin \psi)$ , dann folgt mit der Formel von Moivre  $w^n = \rho^n (\cos n\psi + j \sin n\psi)$  und wegen  $w^n = z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$  weiter  $\rho^n = r$ ;  $\cos n\psi = \cos \varphi$ ,  $\sin n\psi = \sin \varphi$ . Aus  $\rho^n = r$  ergibt sich  $\rho = \sqrt[n]{r}$ , während es für  $\cos n\psi = \cos \varphi$ ,  $\sin n\psi = \sin \varphi$  wegen  $\cos \varphi = \cos(\varphi + 2k\pi)$ ,  $\sin \varphi = \sin(\varphi + 2k\pi)$  genau  $n$  verschiedene Lösungen  $\psi_k = \frac{\varphi + 2(k-1)\pi}{n}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ , gibt.

Somit gilt:

Für  $n \in \mathbb{N}^*$  besitzt die Gleichung  $w^n = z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$  genau  $n$  verschiedene Lösungen  $w_1, w_2, \dots, w_n$  (die  $n$ -ten Wurzeln aus  $z$ ).

$$w_k =$$

$$\sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2(k-1)\pi}{n} + j \sin \frac{\varphi + 2(k-1)\pi}{n} \right),$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

Die  $n$ -te Wurzel aus  $z$  ist also nicht eindeutig. Für  $k = 1$  ergibt sich der sogenannte Hauptwert  $w_1$  der  $n$ -ten Wurzel.

Hauptwert

$$w_1 = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi}{n} + j \sin \frac{\varphi}{n} \right)$$

Stellt man die  $n$ -ten Wurzeln  $w_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  in der Gaußschen Zahlenebene dar, so ergeben sich die Eckpunkte eines regelmäßigen  $n$ -Ecks mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Die Punkte liegen auf einem Kreis mit dem Radius  $\rho = \sqrt[n]{r}$ . Der Hauptwert  $w_1$  besitzt das Argument  $\frac{\varphi}{n}$ . Durch wiederholte Drehung um den Winkel  $\frac{2\pi}{n}$  erhält man die weiteren Lösungen.

■ **Beispiel:**

$$z = 2,985 \, 984 (\cos 60^\circ + j \sin 60^\circ) = (1,2)^6 (\cos 60^\circ + j \sin 60^\circ),$$

$$n = 6$$

Wegen  $\sqrt[6]{r} = \sqrt[6]{(1,2)^6} = 1,2$  und  $\frac{\varphi}{n} = \frac{60^\circ}{6} = 10^\circ$  lauten die sechs-

ten Wurzeln aus  $z$ :

$$w_1 = 1,2(\cos 10^\circ + j \sin 10^\circ), \quad w_2 = 1,2(\cos 70^\circ + j \sin 70^\circ)$$

$$w_3 = 1,2(\cos 130^\circ + j \sin 130^\circ), \quad w_4 = 1,2(\cos 190^\circ + j \sin 190^\circ)$$

$$w_5 = 1,2(\cos 250^\circ + j \sin 250^\circ), \quad w_6 = 1,2(\cos 310^\circ + j \sin 310^\circ)$$

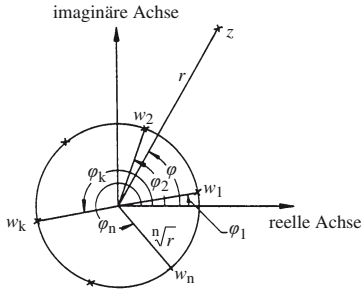


**Bild I-5** Die  $n$ -ten Wurzeln  $w_1, w_2, \dots, w_k, \dots, w_n$  einer komplexen Zahl  $z$

Die  $n$ -ten Wurzeln aus  $z = 1$  sind die sogenannten  $n$ -ten Einheitswurzeln.

$n$ -te Einheitswurzeln Lösungen von  $w^n = z = 1$

■ **Beispiele:**

1.  $n = 2$ :  $z = w^2 = 1$   
 $w_1 = 1(\cos 0^\circ + j \sin 0^\circ) = 1$ ;  
 $w_2 = 1(\cos 180^\circ + j \sin 180^\circ) = -1$
2.  $n = 3$ :  $z = w^3 = 1$   
 $w_1 = 1(\cos 0^\circ + j \sin 0^\circ) = 1$   
 $w_2 = 1(\cos 120^\circ + j \sin 120^\circ) = 1(-\cos 60^\circ + j \sin 60^\circ)$   
 $= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}j$   
 $w_3 = 1(\cos 240^\circ + j \sin 240^\circ) = 1(-\cos 60^\circ - j \sin 60^\circ)$   
 $= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}j$
3.  $n = 4$ :  $z = w^4 = 1$   
 $w_1 = 1(\cos 0^\circ + j \sin 0^\circ) = 1$   
 $w_2 = 1(\cos 90^\circ + j \sin 90^\circ) = j$   
 $w_3 = 1(\cos 180^\circ + j \sin 180^\circ) = -1$   
 $w_4 = 1(\cos 270^\circ + j \sin 270^\circ) = -j$

## 10.8 Eulersche Formel

Die Eulersche Formel für komplexe Zahlen  $z$  verknüpft die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen miteinander (nach dem schweizerischen Mathematiker Leonhard Euler, 1707–1783). Dabei ist  $e$  die Eulersche Zahl (vgl. Abschnitt I.7).

$$e^{jz} = \cos z + j \sin z, \quad z \in \mathbb{C}$$

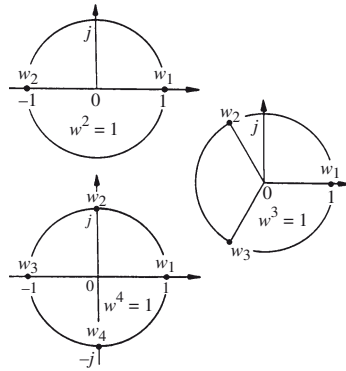


**Bild I-6** Die  $n$ -ten Einheitswurzeln für  $n = 2$ ,  $n = 3$  und  $n = 4$

Für reelle Zahlen  $x$  (die reellen Zahlen sind eine Teilmenge der komplexen Zahlen) gilt  $e^{jx} = \cos x + j \sin x$ .

Setzt man  $x = \varphi$ , dann erhält man die sogenannte Exponentialform der komplexen Zahlen.

$$z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi) = re^{j\varphi}$$

Dabei ist  $r$  der Modul und  $\varphi$  das Argument der komplexen Zahl  $z$ .

Für das Produkt und den Quotienten zweier komplexer Zahlen  $z_1 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1}$  und  $z_2 = r_2 \cdot e^{j\varphi_2}$  ergibt sich

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1} \cdot r_2 \cdot e^{j\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \frac{e^{j\varphi_1}}{e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (z_2 \neq 0)$$

■ **Beispiel für eine komplexe Zahl in verschiedenen Formen:**

$$z = 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j \right) = 1 + \sqrt{3}j \quad (\text{algebraische Form})$$

$$= 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad (\text{trigonometrische Form})$$

$$= 2e^{j\frac{\pi}{3}} \quad (\text{Exponentialform})$$

## II Gleichungen

### 1 Gleichungsarten

Ein Term ist ein mathematischer Ausdruck, der aus Zahlen, Variablen, Rechenzeichen (mathematischen Operationen) und möglicherweise noch anderen mathematischen Symbolen (zum Beispiel Funktionswerten) besteht.

Will man ausdrücken, daß ein Term  $T_1$  zu einem anderen Term  $T_2$  äquivalent (gleichwertig) ist, so

schreibt man

Gleichung  $T_1 = T_2$

Eine solche Darstellung heißt Gleichung. Die linke Seite der Gleichung ist  $T_1$ , die rechte Seite der Gleichung ist  $T_2$ .

Mit Hilfe von Gleichungen lassen sich quantitative Beziehungen in Natur und Technik beschreiben.



Meist liegen jedoch in der Praxis auftretende Aufgaben nicht in Form von Gleichungen zwischen Termen vor, sondern sie werden als Textgleichungen mit Worten beschrieben. Daraus muss dann durch eine Übersetzung in die formale Sprache der Mathematik eine mathematische Beziehung hergestellt werden.

Die Überlegenheit der mathematischen Symbolik zeigt folgendes Beispiel:

Textgleichung: Den Umfang eines Kreises berechnet man, indem man das Produkt aus dem Verhältnis von Umfang eines beliebigen Kreises zu seinem Durchmesser  $\left(\frac{U}{d} = \pi\right)$  und dem Kreisradius ( $r$ ) mit 2 multipliziert (vgl. Abschnitt III.9).

Termgleichung:  $U_{\text{Kreis}} = 2\pi r$

Man unterscheidet drei verschiedene Arten von Gleichungen:

1. Identische Gleichungen
2. Bestimmungsgleichungen
3. Funktionsgleichungen

Eine identische Gleichung oder Identität ist eine Gleichung zwischen zwei algebraischen Ausdrücken, die bei Einsetzen beliebiger Zahlenwerte anstelle der darin aufgeführten Buchstabensymbole erhalten bleibt.

■ **Beispiele für identische Gleichungen (Identitäten):**

1.  $a(b+c) = ab+ac$
2.  $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$
3.  $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
4.  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
5.  $a^n a^m = a^{n+m}$
6.  $\sqrt[n]{c} \sqrt[n]{d} = \sqrt[n]{cd}$
7.  $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
8.  $e^{ix} = \cos x + j \sin x$

Eine Bestimmungsgleichung ist eine Gleichung, in der Variable (Unbekannte) auftreten, die durch eine Rechnung bestimmt werden sollen. Mit Hilfe zulässiger Rechenoperationen sollen alle Werte der Variablen aus dem zugrunde liegenden Zahlenbereich bestimmt werden, für die die Gleichung erfüllt ist. Man nennt diese Werte Lösungen oder auch Wurzeln der Gleichung. Alle Lösungen zusammen bilden die Lösungsmenge  $L$  der Bestimmungsgleichung. Eine Gleichung hat keine, eine oder mehrere Lösungen.

Eine Bestimmungsgleichung ist also nur für einige spezielle Werte der Variablen erfüllt.

■ **Beispiele für Bestimmungsgleichungen:**

1.  $x+2=3$  Lösung:  $x=1$   
Lösungsmenge:  $L=\{1\}$
2.  $x+2=x+3$  Keine Lösung  
Lösungsmenge:  $L=\{\}=\emptyset$
3.  $2x+1=x^2-2$  Lösungen:  $x=3$  und  $x=-1$   
Lösungsmenge:  $L=\{-1, 3\}$
4.  $5x^2-5=x^3-x$  Lösungen:  $x=5$ ,  $x=1$  und  $x=-1$   
Lösungsmenge:  $L=\{-1, 1, 5\}$
5.  $11-\sqrt{x+3}=6$  Lösung:  $x=22$   
Lösungsmenge:  $L=\{22\}$
6.  $3^x=4^{x-2} \cdot 2^x$  Lösung:  
$$x = \frac{4 \log 2}{3 \log 2 - \log 3} \approx 2,826\,780$$
  
Lösungsmenge:  $L = \left\{ \frac{4 \log 2}{3 \log 2 - \log 3} \right\}$

7.  $\lg(6x+10) - \lg(x-3) = 1$  Lösung:  $x=10$   
Lösungsmenge:  $L=\{10\}$
8.  $\sin^2 x - 1 = -0,5$  Lösung:  $x=45^\circ + k \cdot 180^\circ$ ,  $k \in \mathbb{Z}$   
Lösungsmenge:  
 $L = \{x | x = 45^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

Die Bestimmungsgleichungen werden unterteilt in die algebraischen Gleichungen und in die transzendenten Gleichungen.

In einer algebraischen Gleichung werden mit der oder den Variablen nur algebraische Rechenoperationen vorgenommen; sie werden addiert, subtrahiert, multipliziert, dividiert, potenziert oder radiziert. Sowohl die auftretenden Zahlen (Koeffizienten genannt) als auch die Lösungen können aber transzendente Zahlen sein. Jede algebraische Gleichung mit genau einer Variablen  $x$  lässt sich in der allgemeinen Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

schreiben. Die Zahlen  $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$  heißen Koeffizienten (Beizahlen) der Gleichung. Sie stehen für beliebige reelle oder komplexe Zahlen.

Ist  $x^n$  die höchste auftretende Potenz der Variablen  $x$ , so heißt die Gleichung vom Grad  $n$ .

Algebraische Gleichungen vom Grad 1 heißen auch lineare Gleichungen, Gleichungen vom Grad 2 quadratische Gleichungen und Gleichungen vom Grad 3 kubische Gleichungen.

Der sogenannte Fundamentalsatz der Algebra sagt aus, dass jede algebraische Gleichung  $n$ -ten Grades genau  $n$  (reelle oder komplexe) Lösungen (Wurzeln) besitzt.

Alle Bestimmungsgleichungen, die nicht algebraisch sind, heißen transzendent (deutsch: übersteigend). Sie haben ihren Namen daher, dass sie im allgemeinen schwieriger aufzulösen sind als die algebraischen Gleichungen. Sie erfordern Auflösungsmethoden, die die Mittel der Algebra übersteigen.

Beispiele für transzendente Gleichungen sind Exponentialgleichungen, logarithmische Gleichungen und trigonometrische Gleichungen.

Bei den ersten fünf Beispielen handelt es sich um algebraische Bestimmungsgleichungen, bei den letzten drei Beispielen um transzendente Gleichungen.

Eine Funktionsgleichung dient dazu, eine Funktion zu definieren. Eine Funktion beschreibt den Zusammenhang zwischen verschiedenen veränderlichen Größen. Eine Funktionsgleichung enthält in der Regel zwei oder mehr Variable, die durch die Gleichung einander zugeordnet werden.

Funktionen werden ausführlich im Abschnitt V behandelt.

■ **Beispiele für Funktionsgleichungen:**

1.  $y=2x+1$
2.  $y=-x^2+x-5$
3.  $y=2x^2-x-3\sqrt{x}+4$
4.  $y=\sin x$
5.  $y=2^x-5x+1$



## 2 Äquivalente Umformungen

Oft ist es möglich, eine gegebene Gleichung durch zulässige Rechenoperationen in eine Gleichung zu überführen, die die gleiche Lösungsmenge wie die Ausgangsgleichung besitzt, aber einfacher zu lösen ist. Eine solche Umformung heißt äquivalent. Man nennt auch die beiden Gleichungen äquivalent (gleichwertig).

Bei den zulässigen Rechenoperationen ist darauf zu achten, dass sie gleichzeitig auf beiden Seiten einer Gleichung durchgeführt werden, zum Beispiel die Addition einer Konstanten oder die Multiplikation mit einer Konstanten.

Grundregeln für äquivalente Umformungen:

Addition einer Zahl (hier  $a$ ) auf beiden Seiten einer Gleichung

$$\begin{array}{l|l} x - a = b & + a \\ \hline x = b + a \end{array}$$

Subtraktion einer Zahl (hier  $a$ ) von beiden Seiten einer Gleichung

$$\begin{array}{l|l} x + a = b & - a \\ \hline x = b - a \end{array}$$

Multiplikation beider Seiten einer Gleichung mit der gleichen Zahl (hier mit  $a$ ); Bedingung:  $a \neq 0$

$$\begin{array}{l|l} \frac{x}{a} = b & \cdot a \\ \hline x = b \cdot a \end{array}$$

Division beider Seiten einer Gleichung durch die gleiche Zahl (hier durch  $a$ ); Bedingung:  $a \neq 0$

$$\begin{array}{l|l} ax = b & : a \\ \hline x = \frac{b}{a} \end{array}$$

### ■ Beispiele:

- $5x - 6 = 29 \quad | + 6$  (Addition auf beiden Seiten)  
 $5x = 35 \quad | : 5$  (Division auf beiden Seiten)  
 $x = 7$

Alle Gleichungen sind äquivalent mit der Lösungsmenge  $L = \{7\}$ .

- $5x - 20 = 60 - 11x \quad | + 11x$  (Addition auf beiden Seiten)  
 $16x - 20 = 60 \quad | + 20$  (Addition auf beiden Seiten)  
 $16x = 80 \quad | : 16$  (Division auf beiden Seiten)  
 $x = 5$

Alle vier Gleichungen sind äquivalent mit der Lösungsmenge  $L = \{5\}$ .

- $\frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x+2} \quad (x \neq 0, 1, -2) \quad | \cdot x(x-1)(x+2)$   
 $2(x-1)(x+2) - x(x+2) = x(x-1)$  (Hauptnenner)  
 $2(x^2 + x - 2) - (x^2 + 2x) = x^2 - x$   
 $x^2 - 4 = x^2 - x \quad | - x^2 + x$   
 $x - 4 = 0 \quad | + 4$   
 $x = 4$

Alle Gleichungen sind äquivalent mit der Lösungsmenge  $L = \{4\}$ .

$$\begin{array}{l|l} 4. \quad 4x^2 - x + 3 = 6x^2 + x - 1 & | - (4x^2 - x + 3) \\ 0 = 6x^2 + x - 1 - 4x^2 + x - 3 & \\ 0 = 2x^2 + 2x - 4 & | : 2 \\ 0 = x^2 + x - 2 & | \text{Vertauschen der Seiten} \\ x^2 + x - 2 = 0 & \end{array}$$

Berechnen der Lösungen der quadratischen Gleichung:

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -2$$

Alle Gleichungen sind äquivalent mit der Lösungsmenge  $L = \{1, -2\}$ .

$$\begin{array}{l|l} 5. \quad \sqrt{x+8} = x+2 & | \text{Quadrieren} \\ x+8 = (x+2)^2 & | \text{Klammer „beseitigen“} \\ x+8 = x^2 + 4x + 4 & | - (x+8) \\ 0 = x^2 + 3x - 4 & | \text{Vertauschen der Seiten} \\ x^2 + 3x - 4 = 0 & \end{array}$$

Berechnen der Lösungen der quadratischen Gleichung:

$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -4$$

$x_1 = 1$  erfüllt die Ausgangsgleichung wegen  $\sqrt{1+8} = 1+2$ , dagegen ist  $x_2 = -4$  keine Lösung der Ausgangsgleichung, denn es ist  $\sqrt{-4+8} \neq -4+2$ .

Somit: Das Quadrieren ist keine äquivalente Umformung!

## 3 Lineare Gleichungen

Eine lineare Gleichung oder Gleichung ersten Grades ist eine algebraische Gleichung, in der die Variable  $x$  in keiner höheren als der ersten Potenz vorkommt.

Jede lineare Gleichung lässt sich durch äquivalente Umformungen überführen in die äquivalente Gleichung

$$ax + b = 0, \quad a \neq 0$$

Diese Gleichung heißt allgemeine Form der linearen Gleichung. Durch Division durch  $a \neq 0$  erhält man die sogenannte Normalform der linearen Gleichung.

$$x + \frac{b}{a} = x + c = 0, \quad c = \frac{b}{a}$$

Die Lösung der linearen Gleichung ist  $x = -c = -\frac{b}{a}$ . Für die Lösungsmenge gilt also:  $L = \{-c\} = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$ .

Allgemeines Verfahren zur Bestimmung der Lösung: Man „beseitigt“ zunächst alle Klammern und Brüche und ordnet dann die Glieder so, dass alle Glieder mit der Variablen  $x$  links vom Gleichheitszeichen und alle anderen rechts davon stehen:

$$a(bx + c) = d(ex + f)$$

$$abx + ac = dex + df$$

$$abx - dex = df - ac$$

$$x(ab - de) = df - ac$$

$$x = \frac{df - ac}{ab - de}$$

( $ab \neq de$  ist Bedingung, denn durch 0 darf nicht dividiert werden.)

### ■ Beispiel:

$$\begin{array}{l} 3(x+2) = 5(-2x+9) \\ 3x+6 = -10x+45 \\ 3x+10x = 45-6 \\ 13x = 39 \\ x = 3 \end{array}$$

Probe:

$$\begin{aligned} 3(3+2) &= 5(-6+9) \\ 3 \cdot 5 &= 5 \cdot 3 \\ 15 &= 15 \end{aligned}$$

Grundsätzlich sollte eine Probe durchgeführt werden. Dabei ist jede Seite der Gleichung einzeln auszurechnen. Der berechnete Wert für  $x$  sollte stets in die Ausgangsgleichung eingesetzt werden.

**Fehlerwarnung:** Nach Einsetzen der Lösung sollen nicht die gleichen Umformungen wie bei der Hauptrechnung vorgenommen werden, da sonst leicht ein möglicher Fehler wiederholt werden kann.

## 4 Proportionen

Eine Sonderstellung unter den linearen Gleichungen mit einer Variablen nehmen die Proportionen wegen ihrer vielseitigen Anwendbarkeit ein.

Eine Proportion ist eine Verhältnisleichung

$$a : b = c : x$$

oder mit  $x = d$

$$a : b = c : d$$

und in Bruchschreibweise

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

(gesprochen:  $a$  verhält sich zu  $b$  wie  $c$  zu  $d$ ).

Treten in einer Proportion gleiche Innenglieder oder gleiche Außenglieder auf, so heißt die Proportion stetig. Im Fall gleicher Innenglieder, also  $a : b = b : c$ , nennt man  $b$  mittlere Proportionale.

Sind von den Gliedern einer Proportion drei bekannt, dann lässt sich die vierte Proportionale berechnen. Sind zum Beispiel  $a, b, c$  bekannt und  $d$  gesucht, so gilt  $d = \frac{bc}{a}$ .

### ■ Beispiele:

1. Welche Kraft  $F$  dehnt eine Feder um 4 cm, wenn die Kraft 3 N (Newton) eine Dehnung um 2 cm bewirkt?

Ansatz (Hookesches Gesetz):  $F : 4 \text{ cm} = 3 \text{ N} : 2 \text{ cm}$

$$\text{Auflösung nach } F: F = \frac{4 \text{ cm} \cdot 3 \text{ N}}{2 \text{ cm}} = 6 \text{ N}$$

Antwort: Die Kraft 6 N bewirkt die Dehnung um 4 cm.

2. Wie weit kommt ein Flugzeug in  $2\frac{1}{2}$  Stunden, wenn es 10 km in 45 s zurücklegt?

Ansatz (Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit):

$$x : 9000 \text{ s} = 10 \text{ km} : 45 \text{ s}$$

$$\text{Auflösung nach } x: x = \frac{9000 \text{ s} \cdot 10 \text{ km}}{45 \text{ s}} = 2000 \text{ km}$$

Antwort: Das Flugzeug fliegt 2000 km weit.

Die Proportion  $a : b = c : d$  lässt sich verschieden umformen. Äquivalente Formen sind

$$\begin{aligned} d : c &= b : a \\ a : c &= b : d \\ d : b &= c : a \\ b : a &= d : c \\ a \cdot d &= b \cdot c \end{aligned}$$

Aus der Proportion  $a : b = c : d$  lassen sich weitere Proportionen ableiten, etwa durch Addition oder Subtraktion von 1 auf beiden Seiten. Man nennt ein solches Umformen der Proportion korrespondierende Addition oder korrespondierende Subtraktion (Bedingung in allen Fällen: Nenner ungleich 0).

|                                 |                                 |
|---------------------------------|---------------------------------|
| $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ | $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ |
| $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ | $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$ |

Dies sind Sonderfälle des allgemeinen Gesetzes der korrespondierenden Addition und Subtraktion. Aus  $a : b = c : d$  folgt für beliebige reelle Zahlen  $p, q, r, s$  ( $r$  und  $s$  dürfen nicht gleichzeitig 0 sein)

$$\frac{pa+qb}{ra+sb} = \frac{pc+qd}{rc+sd}$$

### ■ Beispiele:

$$3. \quad \frac{5}{4} = \frac{5+x}{x}$$

Nenner vom Zähler subtrahieren (korrespondierende Subtraktion):

$$\frac{5-4}{4} = \frac{5+x-x}{x}$$

Vereinfachen:

$$\frac{1}{4} = \frac{5}{x}$$

Nach  $x$  auflösen (Multiplikation der Gleichung mit  $4x$ ):

$$x = 20$$

Die Lösung ist  $x = 20$ , wie die Probe bestätigt.

$$4. \quad 5x : (4-x) = 30 : 9$$

In Bruchschreibweise:

$$\frac{5x}{4-x} = \frac{30}{9}$$

Addition von  $\frac{1}{5}$  des Zählers zum Nenner (korrespondierende Addition):

$$\frac{5x}{4-x+\frac{5x}{5}} = \frac{30}{9+\frac{30}{5}}$$

Vereinfachen:

$$\frac{5x}{4} = \frac{30}{15} (=2) \quad \text{Multiplikation mit } \frac{4}{5}:$$

$$x = \frac{8}{5}$$

Die Lösung ist  $x = \frac{8}{5}$ .

Probe:

$$\frac{5 \cdot \frac{8}{5}}{4 - \frac{8}{5}} = \frac{30}{9} \Leftrightarrow \frac{8}{2\frac{2}{5}} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow 8 \cdot \frac{5}{12} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow \frac{10}{3} = \frac{10}{3}$$

## 5 Quadratische Gleichungen

### 5.1 Definitionen

Eine quadratische Gleichung oder Gleichung zweiten Grades ist eine algebraische Gleichung, in der die Variable  $x$  in keiner höheren als der zweiten Potenz vorkommt.

Jede quadratische Gleichung lässt sich durch äquivalente Umformungen überführen in die Gleichung

Allgemeine Form

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

Diese Gleichung heißt allgemeine Form der quadratischen Gleichung.

Durch Division durch  $a \neq 0$  erhält man die sogenannte Normalform der quadratischen Gleichung (mit  $p = \frac{b}{a}$ ,  $q = \frac{c}{a}$ ).

Normalform

$$x^2 + px + q = 0$$

## 5.2 Lösungsverfahren

### 5.2.1 Normalform

Die Lösungen der Normalform  $x^2 + px + q = 0$  der quadratischen Gleichung bestimmt man mit der Methode der „quadratischen Ergänzung“. Zunächst bringt man  $q$  auf die rechte Seite der Gleichung, das heißt, von beiden Seiten der Gleichung wird  $q$  subtrahiert. Auf beiden Seiten addiert man dann die quadratische Ergänzung  $\left(\frac{p}{2}\right)^2$  des Terms  $x^2 + px$ . Damit wird die linke Seite der Gleichung zu einem „vollständigen Quadrat“ (binomische Formel). Durch Radizieren und anschließender Subtraktion von  $\frac{p}{2}$  ergeben sich dann die Lösungen  $x_1$  und  $x_2$  der Gleichung.

Bestimmung der Lösungen:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= 0 \\ x^2 + px &= -q \\ x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\ \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\ \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \frac{p^2}{4} - q \\ x + \frac{p}{2} &= \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \\ x &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Normalform

$$\begin{aligned} \text{Gleichung: } & x^2 + px + q = 0 \\ \text{Lösungen: } & x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \\ & x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \end{aligned}$$

Die Gleichung  $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$  für die Lösungen nennt man auch  $(p, q)$ -Formel.

$(p, q)$ -Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

#### ■ Beispiele:

1. (ausführlich)

$$\begin{aligned} x^2 + 12x + 35 &= 0 \\ x^2 + 12x &= -35 \\ x^2 + 12x + 6^2 &= -35 + 6^2 \\ (x + 6)^2 &= 1 \\ x + 6 &= \pm 1 \\ x &= -6 \pm 1 \end{aligned}$$

Lösungen:  $x_1 = -6 + 1 = -5$ ,  $x_2 = -6 - 1 = -7$

Es sind zwei Proben durchzuführen!

2. (mit  $(p, q)$ -Formel)

$$25x^2 + 13 = 70x$$

Sortieren und Dividieren durch 25 zum Beschaffen der Normalform:

$$x^2 - \frac{14}{5}x + \frac{13}{25} = 0 \Rightarrow p = -\frac{14}{5} \text{ und } q = \frac{13}{25}$$

Einsetzen in die  $(p, q)$ -Formel ergibt die Lösungen:

$$x_1 = \frac{7}{5} + \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2 - \frac{13}{25}} = \frac{7}{5} + \sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{7}{5} + \frac{6}{5} = \frac{13}{5},$$

$$x_2 = \frac{7}{5} - \frac{6}{5} = \frac{1}{5}$$

Es sind zwei Proben durchzuführen!

Den Radikanden in der  $(p, q)$ -Formel nennt man die Diskriminante  $D$  der Normalform der quadratischen Gleichung.

Diskriminante der Normalform

$$D = \frac{p^2}{4} - q$$

Die Lösungen der Normalform lassen sich auch mit Hilfe der Diskriminante schreiben.

Normalform

$$\begin{aligned} \text{Gleichung: } & x^2 + px + q = 0 \\ \text{Lösungen: } & x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}, \\ & D = \frac{p^2}{4} - q \end{aligned}$$

Der Wert der Diskriminante  $D$  bestimmt die Anzahl der reellen Lösungen der quadratischen Gleichung. Für  $D > 0$  existieren zwei reelle Lösungen  $x_1$  und  $x_2$ , für  $D = 0$  gibt es eine reelle Lösung (Doppel-Lösung  $x_1 = x_2$ ), für  $D < 0$  hat die quadratische Gleichung keine reelle Lösung, es existieren zwei komplexe Lösungen  $x_1$  und  $x_2$  ( $x_1$  und  $x_2$  sind konjugiert komplex zueinander).

#### ■ Beispiele:

3.  $2x^2 - 10x + 12 = 0$  (allgemeine Form)

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad (\text{Normalform})$$

$$p = -5, q = 6 \Rightarrow D = \frac{p^2}{4} - q = \frac{25}{4} - 6 = \frac{1}{4}$$

$D > 0 \Rightarrow$  zwei reelle Lösungen

Lösungen:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = -\frac{-5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3, x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2 \end{aligned}$$

4.  $-9x^2 + 18x - 9 = 0$  (allgemeine Form)

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad (\text{Normalform})$$

$$p = -2, q = 1 \Rightarrow D = \frac{p^2}{4} - q = \frac{4}{4} - 1 = 0$$

$D = 0 \Rightarrow$  Doppel-Lösung  $x_1 = x_2$

$$\text{Lösung: } x_1 = x_2 = -\frac{-2}{2} = 1$$

5.  $3x^2 - 36x + 120 = 0$  (allgemeine Form)

$x^2 - 12x + 40 = 0$  (Normalform)

$$p = -12, q = 40 \Rightarrow D = \frac{p^2}{4} - q = \frac{(-12)^2}{4} - 40$$

$$= \frac{144}{4} - 40 = -\frac{16}{4} = -4$$

$D < 0 \Rightarrow$  zwei konjugiert komplexe Lösungen

Lösungen:  $x_{1,2} = -\frac{-12}{2} \pm \sqrt{-4} = 6 \pm \sqrt{-4}$

$= 6 \pm 2\sqrt{-1} = 6 \pm 2j \Rightarrow x_1 = 6 + 2j, x_2 = 6 - 2j$

### 5.2.2 Allgemeine Form

Die Lösungen der allgemeinen Form  $ax^2 + bx + c = 0$  erhält man durch Setzen von  $p = \frac{b}{a}$ ,  $q = \frac{c}{a}$  in der  $(p, q)$ -Formel.

Allgemeine Form:

Gleichung:  $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

Lösungen:  $x_1 = \frac{1}{2a}(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})$ ,

$$x_2 = \frac{1}{2a}(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})$$

#### ■ Beispiel:

1.  $2x^2 - 10x + 12 = 0$

$a = 2, b = -10, c = 12$

Lösungen:

$$x_1 = \frac{1}{4} \left( -(-10) + \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12} \right)$$

$$= \frac{1}{4} (10 + \sqrt{100 - 96}) = \frac{1}{4} (10 + 2) = 3,$$

$$x_2 = \frac{1}{4} (10 - 2) = 2$$

Den Radikanden in der Lösungsformel nennt man die Diskriminante  $\bar{D}$  der allgemeinen Form der quadratischen Gleichung.

Diskriminante der allgemeinen Form

$$\bar{D} = b^2 - 4ac$$

Die Lösungen der allgemeinen Form lassen sich auch mit Hilfe der Diskriminante schreiben.

Allgemeine Form:

Gleichung:  $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

Lösungen:  $x_{1,2} = \frac{1}{2a}(-b \pm \sqrt{\bar{D}})$ ,

$$\bar{D} = b^2 - 4ac$$

Auch hier bestimmt der Wert der Diskriminante  $\bar{D}$  die Anzahl der reellen Lösungen der quadratischen Gleichung.

Für  $\bar{D} > 0$  gibt es zwei reelle Lösungen  $x_1$  und  $x_2$ , für  $\bar{D} = 0$  gibt es eine reelle Doppellösung ( $x_1 = x_2$ ), und für  $\bar{D} < 0$  gibt es keine reelle Lösung, sondern zwei konjugiert komplexe Lösungen  $x_1$  und  $x_2$ .

#### ■ Beispiel:

2.  $3x^2 - 18x + 42 = 0$

$a = 3, b = -18, c = 42 \Rightarrow \bar{D} = (-18)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 42$

$= 324 - 504 = -180 < 0$

$\bar{D} < 0 \Rightarrow$  zwei konjugiert komplexe Lösungen

Lösungen:

$$x_{1,2} = \frac{1}{6} (18 \pm \sqrt{-180}) = \frac{1}{6} (18 \pm \sqrt{36 \cdot (-5)}) = 3 \pm \sqrt{-5}$$

$$\Rightarrow x_1 = 3 + \sqrt{5}j, x_2 = 3 - \sqrt{5}j$$

### 5.2.3 Zerlegung in Linearfaktoren

Sind  $x_1$  und  $x_2$  die (nicht unbedingt verschiedenen) Lösungen der quadratischen Gleichung  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$ , dann kann der quadratische Ausdruck in Linearfaktoren zerlegt werden.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Die Faktoren  $x - x_1$  und  $x - x_2$  heißen linear, weil die Variable  $x$  nur in erster Potenz, also linear auftritt.

Da ein Produkt genau dann gleich 0 ist, wenn mindestens einer der Faktoren gleich 0 ist, ergeben sich auch hieraus wieder die Lösungen  $x_1$  und  $x_2$ .

Man nennt  $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$  auch Produktform der quadratischen Gleichung.

#### ■ Beispiele:

1.  $2x^2 - 6x = 0$

Zerlegung in Linearfaktoren:  $2x^2 - 6x = 2x(x - 3) = 0$

Lösungen:  $x_1 = 0, x_2 = 3$

2.  $x^2 - x - 6 = 0$

Zerlegung in Linearfaktoren:  $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) = 0$

Lösungen:  $x_1 = 3$  (denn  $x - 3 = 0$  für  $x = 3$ ),

$x_2 = -2$  (denn  $x + 2 = 0$  für  $x = -2$ )

### 5.3 Satz von Viëta für quadratische Gleichungen

Die Produktform der quadratischen Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  in Normalform lautet

$(x - x_1)(x - x_2) = 0$ . Ausmultiplizieren und Vergleich ergibt

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$x^2 - xx_2 - x_1x + x_1x_2 = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$$

$$x^2 + px + q = 0$$

also die Beziehungen  $p = -(x_1 + x_2)$ ,  $q = x_1x_2$ . Der Koeffizient  $p$  von  $x$  ist somit gleich der negativen Summe der beiden Lösungen, das Absolutglied  $q$  der quadratischen Gleichung ist gleich dem Produkt der Lösungen. Diese Beziehungen nennt man den Satz von Viëta für quadratische Gleichungen (nach dem französischen Mathematiker François Viëta, 1540–1603).

Satz von Viëta  $p = -(x_1 + x_2), q = x_1x_2$

#### ■ Beispiele:

1. Die quadratische Gleichung  $x^2 - 5x + 6 = 0$  mit  $p = -5$ ,  $q = 6$  hat die Lösungen  $x_1 = 3, x_2 = 2$ . Es gilt:

$p = -5 = -(3 + 2) = -(x_1 + x_2), q = 6 = 3 \cdot 2 = x_1x_2$

2. Die quadratische Gleichung  $x^2 - 12x + 40 = 0$  mit  $p = -12$ ,  $q = 40$  hat die Lösungen  $x_1 = 6 + 2j, x_2 = 6 - 2j$  (siehe oben). Es gilt:

$p = -12 = -(6 + 2j + 6 - 2j) = -(x_1 + x_2),$

$q = 40 = 36 + 4 = 36 - 4j^2 = (6 + 2j)(6 - 2j) = x_1x_2$

3. Welche quadratische Gleichung hat die Lösungen  $x_1 = 5$  und  $x_2 = -3$ ?

Nach dem Satz von Viëta folgt:

$$p = -(x_1 + x_2) = -(5 - 3) = -2, \quad q = x_1 x_2 = 5 \cdot (-3) = -15$$

Antwort: Die Normalform der gesuchten quadratischen Gleichung ist

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

**Hinweis:** Der Satz von Viëta lässt sich auch für die Probe anwenden!

## 6 Algebraische Gleichungen höheren Grades

### 6.1 Kubische Gleichungen

Die allgemeine Form einer kubischen Gleichung lautet

Allgemeine Form  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad a \neq 0$

Die Normalform erhält man aus der allgemeinen Form durch Division durch  $a \neq 0$  und Setzen von  $\frac{b}{a} = r, \quad \frac{c}{a} = s, \quad \frac{d}{a} = t$ .

Normalform  $x^3 + rx^2 + sx + t = 0$

Dabei sind  $a, b, c, d$  und somit auch  $r, s, t$  reelle (oder komplexe) Koeffizienten.

„Kubisch“ bedeutet, dass die Variable  $x$  in keiner höheren als der dritten Potenz vorkommt. Deshalb nennt man kubische Gleichungen auch Gleichungen dritten Grades.

Mit Hilfe der sogenannten Cardanischen Formel lassen sich die Lösungen exakt berechnen. Es gibt entweder drei reelle Lösungen oder eine reelle Lösung und zwei konjugiert komplexe Lösungen.

In Spezialfällen führen oftmals einfachere Methoden zum Ziel.

Sind  $x_1, x_2, x_3$  die Lösungen der kubischen Gleichung  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , dann gilt

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$$

Man nennt dies Produktform der kubischen Gleichung oder Zerlegung in Linearfaktoren.

Ist  $t = 0$  in der Normalform (für die allgemeine Form ist die Methode ganz analog), also  $x^3 + rx^2 + sx = 0$ , dann erhält man durch Ausklammern von  $x$  die Gleichung  $x(x^2 + rx + s) = 0$ . Neben der reellen Lösung  $x_1 = 0$  sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung  $x^2 + rx + s = 0$  die weiteren Lösungen.

Sonderfall  $t = 0$ :

Gleichung:  $x^3 + rx^2 + sx = 0$

Lösungen:  $x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} - s},$

$$x_3 = -\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - s}$$

**Fehlerwarnung:** Durch Division durch  $x$  geht die Lösung  $x = 0$  verloren!

#### ■ Beispiel:

1.  $x^3 - x^2 - 2x = 0$

Ausklammern von  $x$ :  $x(x^2 - x - 2) = 0$

Erste Lösung:  $x_1 = 0$

Die quadratische Gleichung  $x^2 - x - 2 = 0$  hat die Lösungen

$$x_{2,3} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - (-2)} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2},$$

$$\text{also } x_2 = 2, \quad x_3 = -1$$

Lösungen der kubischen Gleichung  $x^3 - x^2 - 2x = 0$  somit:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -1$$

Ist eine Lösung  $x_1$  von  $x^3 + rx^2 + sx + t = 0$  bekannt, dann lässt sich die kubische Gleichung durch Abspalten des Faktors  $x - x_1$  reduzieren (auch diese Methode lässt sich für die allgemeine Form anwenden).

$$x^3 + rx^2 + sx + t = (x - x_1)(x^2 + ux + v) = 0$$

Dividiert man die linke Seite  $x^3 + rx^2 + sx + t$  der kubischen Gleichung durch  $x - x_1$ , so erhält man einen quadratischen Term  $x^2 + ux + v$ . Die Wurzeln von  $x^2 + ux + v = 0$  sind auch Lösungen der kubischen Gleichung.

Diese Methode heißt Reduktionsmethode, und die dabei durchgeführte Division nennt man Polynomdivision (vgl. auch nächsten Abschnitt).

Lösung  $x_1$  bekannt:

Gleichung:  $x^3 + rx^2 + sx + t$   
 $= (x - x_1)(x^2 + ux + v) = 0$

Lösungen:  $x_1, x_2 = -\frac{u}{2} + \sqrt{\frac{u^2}{4} - v},$

$$x_3 = -\frac{u}{2} - \sqrt{\frac{u^2}{4} - v}$$

#### ■ Beispiele:

2.  $x^3 - 6x^2 - x + 6 = 0$

Eine Lösung dieser kubischen Gleichung ist  $x_1 = 1$  (erhält man durch Probieren).

Division von  $x^3 - 6x^2 - x + 6$  durch  $x - 1$ :

$$\begin{array}{r} (x^3 - 6x^2 - x + 6) : (x - 1) = x^2 - 5x - 6 \\ -(x^3 - x^2) \\ \hline -5x^2 - x \\ -(-5x^2 + 5x) \\ \hline -6x + 6 \\ -(-6x + 6) \\ \hline 0 \end{array}$$

Die Lösungen der quadratischen Gleichung  $x^2 - 5x - 6 = 0$  sind  $x_2 = 6, \quad x_3 = -1$ .

Lösungen der kubischen Gleichung  $x^3 - 6x^2 - x + 6 = 0$  somit:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 6, \quad x_3 = -1$$

3.  $4x^3 - 12x^2 + 11x - 3 = 0$

Eine Lösung dieser Gleichung ist  $x_1 = 1$  (Probieren!).

Division von  $4x^3 - 12x^2 + 11x - 3$  durch  $x - 1$ :

$$\begin{array}{r} (4x^3 - 12x^2 + 11x - 3) : (x - 1) = 4x^2 - 8x + 3 \\ -(4x^3 - 4x^2) \\ \hline -8x^2 + 11x \\ -(-8x^2 + 8x) \\ \hline 3x - 3 \\ -(3x - 3) \\ \hline 0 \end{array}$$

Die Lösungen der quadratischen Gleichung  $4x^2 - 8x + 3 = 0$  sind  $x_2 = \frac{3}{2}$ ,  $x_3 = \frac{1}{2}$ .

Lösungen der kubischen Gleichung  $x^3 - 6x^2 - x + 6 = 0$  somit:  
mit:  
 $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \frac{3}{2}$ ,  $x_3 = \frac{1}{2}$

## 6.2 Polynomdivision

Ein Ausdruck der folgenden Form mit  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$  heißt Polynom in  $x$ .

Polynom

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$= \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

Das  $x$  in Klammern hinter  $P_n$  weist darauf hin, dass  $x$  die Variable ist. Die Koeffizienten  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$  dürfen dabei beliebige reelle (oder auch komplexe) Zahlen sein.

Ein Polynom ist also die linke Seite der allgemeinen Form einer algebraischen Gleichung.

Ist dabei  $x^n$  die höchste auftretende Potenz der Variablen  $x$ , so hat das Polynom den Grad  $n$ .

Zwei Polynome sind gleich, wenn sie vom gleichen Grad sind und die entsprechenden Koeffizienten übereinstimmen.

### ■ Beispiele für Polynome:

1.  $x^3 - 6x^2 - x + 6$  (Polynom vom Grad 3)
2.  $x - 1$  (Polynom vom Grad 1)
3.  $x^5 - \frac{1}{3}x^4 + 2x - 3$  (Polynom vom Grad 5)
4.  $0,34x^9 - 24,3x^6 + 22x^5 - \frac{1}{3}x^4 + 11$  (Polynom vom Grad 9)
5.  $x^{27} + 3$  (Polynom vom Grad 27)

Die Division zweier Polynome  $P_n(x)$  und  $P_m(x)$  mit  $n \geq m$  verläuft ganz analog dem schriftlichen Dividieren von Dezimalzahlen. Dabei wird zuerst die höchste Potenz von  $x$  des Dividenden durch die höchste Potenz von  $x$  des Divisors geteilt.

Ist der Quotient der Polynomdivision wieder ein Polynom, gilt also  $\frac{P_n(x)}{P_m(x)} = P_k(x)$  mit einem Polynom  $P_k(x)$ , dann heißt  $P_m(x)$  Faktor des Polynoms  $P_n(x)$  oder genauer Faktor  $m$ -ten Grades (und  $P_k(x)$  ist ein Faktor  $k$ -ten Grades von  $P_n(x)$ ).

Für  $m = 1$  heißt  $P_m(x)$  linearer Faktor, für  $m = 2$  quadratischer Faktor und für  $m = 3$  kubischer Faktor von  $P_n(x)$ .

### ■ Beispiele zur Polynomdivision:

1.  $P_3(x) = x^3 - 6x^2 - x + 6 = 0, P_1(x) = x - 1$   

$$\begin{array}{r} x^3 - 6x^2 - x + 6 : (x - 1) = x^2 - 5x - 6 \\ \underline{-(x^3 - x^2)} \phantom{+ 6} \\ -5x^2 - x \phantom{+ 6} \\ \underline{-(-5x^2 + 5x)} \phantom{+ 6} \\ -6x + 6 \\ \underline{-(-6x + 6)} \\ 0 \end{array}$$

Es gilt somit:

$$\frac{P_3(x)}{P_1(x)} = \frac{x^3 - 6x^2 - x + 6}{x - 1} = x^2 - 5x - 6 = P_2(x)$$

$P_1(x) = x - 1$  ist also ein linearer Faktor und  $P_2(x) = x^2 - 5x - 6$  ein quadratischer Faktor von  $P_3(x) = x^3 - 6x^2 - x + 6$ .

$$\begin{array}{r} 2. \quad P_3(x) = 4x^3 - 12x^2 + 11x - 3, P_1(x) = x - 1 \\ (4x^3 - 12x^2 + 11x - 3) : (x - 1) = 4x^2 - 8x + 3 \\ \underline{-(4x^3 - 4x^2)} \phantom{+ 11x - 3} \\ 8x^2 + 11x \phantom{- 3} \\ \underline{-(-8x^2 + 8x)} \phantom{- 3} \\ 3x - 3 \\ \underline{-(3x - 3)} \\ 0 \end{array}$$

Es gilt  $P_3(x) = 4x^3 - 12x^2 + 11x - 3 = (x - 1)(4x^2 - 8x + 3) = P_1(x) \cdot P_2(x)$ .

$P_1(x) = x - 1$  ist ein linearer Faktor,  $P_2(x) = 4x^2 - 8x + 3$  ist ein quadratischer Faktor von  $P_3(x) = 4x^3 - 12x^2 + 11x - 3$ .

$$\begin{array}{r} 3. \quad P_4(x) = 3x^4 - 10x^3 + 22x^2 - 24x + 10, P_2(x) = x^2 - 2x + 3 \\ (3x^4 - 10x^3 + 22x^2 - 24x + 10) : (x^2 - 2x + 3) = 3x^2 - 4x + 5 \\ \underline{-(3x^4 - 6x^3 + 9x^2)} \phantom{+ 10} \\ -4x^3 + 13x^2 - 24x \phantom{+ 10} \\ \underline{-(-4x^3 + 8x^2 - 12x)} \phantom{+ 10} \\ 5x^2 - 12x + 10 \\ \underline{-(5x^2 - 10x + 15)} \\ -2x - 5 \end{array}$$

Es gilt somit:

$$\begin{array}{r} (3x^4 - 10x^3 + 22x^2 - 24x + 10) : (x^2 - 2x + 3) \\ = 3x^2 - 4x + 5 + \frac{-2x - 5}{x^2 - 2x + 3} \end{array}$$

Also ist  $P_2(x) = x^2 - 2x + 3$  kein Faktor von  $P_4(x) = 3x^4 - 10x^3 + 22x^2 - 24x + 10$ .

Eine Zahl  $x_0$  heißt Nullstelle des Polynoms  $P_n(x)$ , wenn  $P_n(x_0) = 0$  gilt. Das Polynom  $P_n(x)$  lässt sich dann durch  $x - x_0$  dividieren,  $x - x_0$  ist also ein linearer Faktor von  $P_n(x)$ . Es gibt dann ein Polynom  $(n - 1)$ -ten Grades  $P_{n-1}(x)$  mit  $P_n(x) = (x - x_0) \cdot P_{n-1}(x)$ . Findet man eine Zerlegung  $P_n(x) = (x - x_0)^m \cdot P_k(x)$ , wobei  $P_k(x)$  ein Polynom mit  $P_k(x_0) \neq 0$  ist, dann heißt  $x_0$  eine  $m$ -fache Nullstelle von  $P_n(x)$ , oder  $m$  heißt Vielfachheit der Nullstelle  $x_0$ .

$$P_n(x) = (x - x_0)^m \cdot P_k(x)$$

Ist  $x_0$  eine reelle Zahl, dann nennt man  $x_0$  eine reelle Nullstelle des Polynoms.

### ■ Beispiele:

1.  $P_3(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3 = (x - 3)(x^2 + 1) = (x - 3)P_2(x)$   
Wegen  $P_2(3) \neq 0$  ist  $x_0 = 3$  eine einfache Nullstelle des Polynoms  $P_3(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$ .
2.  $P_3(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$   
Somit ist  $x_0 = 1$  eine dreifache Nullstelle des Polynoms  $P_3(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ .
3.  $P_3(x) = x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$   
Es ist also  $x_0 = 1$  eine doppelte Nullstelle und  $x_1 = -2$  eine einfache Nullstelle von  $P_3(x) = x^3 - 3x + 2$ .

## 6.3 Gleichungen vierten Grades

Die allgemeine Form einer Gleichung vierten Grades lautet

Allgemeine Form

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \quad a \neq 0$$

Die Normalform erhält man aus der allgemeinen Form durch Division durch  $a \neq 0$  und Setzen von

$$\frac{b}{a} = r, \quad \frac{c}{a} = s, \quad \frac{d}{a} = t, \quad \frac{e}{a} = u.$$

Normalform

$$x^4 + rx^3 + sx^2 + tx + u = 0$$

Dabei sind  $a, b, c, d, e$  und somit auch  $r, s, t, u$  reelle (oder komplexe) Koeffizienten.

Auch für die Gleichungen vierten Grades existiert eine allgemeine Lösungsformel. Diese ist aber noch wesentlich komplizierter als die für die kubischen Gleichungen und wird deshalb hier weggelassen.

Eine Gleichung vierten Grades muss nicht unbedingt eine reelle Lösung besitzen. Im Bereich der komplexen Zahlen gibt es jedoch vier Lösungen. Dabei können Doppellösungen vorkommen. Komplexe Lösungen treten paarweise als konjugiert komplexe Zahlen auf.

In Spezialfällen führen manchmal einfachere Methoden zum Ziel.

Sind  $x_1, x_2, x_3, x_4$  die Lösungen der Gleichung vierten Grades  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ , dann gilt

$$\begin{aligned} ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \\ = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 0 \end{aligned}$$

Man nennt dies wieder Produktform oder Zerlegung in Linearfaktoren.

Ist  $u = 0$  in der Normalform (für die allgemeine Form ist die Methode analog), also  $x^4 + rx^3 + sx^2 + tx = 0$ , dann erhält man durch Ausklammern von  $x$  die Gleichung  $x(x^3 + rx^2 + sx + t) = 0$ . Eine Lösung ist  $x_1 = 0$ , die weiteren Lösungen sind die Wurzeln der kubischen Gleichung  $x^3 + rx^2 + sx + t = 0$ .

#### ■ Beispiel:

1.  $x^4 - 6x^3 - x^2 + 6x = 0$

Ausklammern von  $x$ :  $x(x^3 - 6x^2 - x + 6) = 0$

Erste Lösung:  $x_1 = 0$

Die kubische Gleichung  $x^3 - 6x^2 - x + 6 = 0$  hat die Lösungen  $x_2 = 1, x_3 = 6, x_4 = -1$  (vgl. Beispiel 2 im Abschnitt II.6.1).

Lösungen der Gleichung vierten Grades  $x^4 - 6x^3 - x^2 + 6x = 0$  somit:  $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 6, x_4 = -1$

Ist eine Lösung  $x_1$  von  $x^4 + rx^3 + sx^2 + tx + u = 0$  bekannt, dann lässt sich die Gleichung durch Abspalten des Faktors  $x - x_1$  durch Polynomdivision reduzieren (diese sogenannte Reduktionsmethode lässt sich auch wieder für die allgemeine Form anwenden):

$$\begin{aligned} x^4 + rx^3 + sx^2 + tx + u \\ = (x - x_1)(x^3 + kx^2 + lx + m) = 0 \end{aligned}$$

Die Wurzeln der kubischen Gleichung  $x^3 + kx^2 + lx + m = 0$  sind auch Lösungen der Gleichung vierten Grades  $x^4 + rx^3 + sx^2 + tx + u = 0$ .

#### ■ Beispiele:

2.  $x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 7x - 6 = 0$

Durch Probieren findet man die Lösung  $x_1 = 1$ .

Polynomdivision ergibt:

$$\begin{array}{r} (x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 7x - 6) : (x - 1) = x^3 - 6x^2 - x + 6 \\ \underline{-(x^4 - x^3)} \phantom{+ 5x^2 + 7x - 6} \\ -6x^3 + 5x^2 \phantom{+ 7x - 6} \\ \underline{-(-6x^3 + 6x^2)} \phantom{+ 7x - 6} \\ -x^2 + 7x \phantom{- 6} \\ \underline{-(-x^2 + x)} \phantom{- 6} \\ 6x - 6 \\ \underline{-(6x - 6)} \\ 0 \end{array}$$

Die kubische Gleichung  $x^3 - 6x^2 - x + 6 = 0$  hat die Lösungen  $x_2 = 1, x_3 = 6, x_4 = -1$  (vgl. Beispiel 2 im Abschnitt II.6.1).

Lösungen der Gleichung vierten Grades  $x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 7x - 6 = 0$  somit:  $x_1 = x_2 = 1, x_3 = 6, x_4 = -1$

3.  $4x^4 - 8x^3 - x^2 + 8x - 3 = 0$

Durch Probieren erhält man die Lösung  $x_1 = -1$ .

Polynomdivision von  $4x^4 - 8x^3 - x^2 + 8x - 3$  durch  $x + 1$  ergibt:

$$\begin{array}{r} (4x^4 - 8x^3 - x^2 + 8x - 3) : (x + 1) = 4x^3 - 12x^2 + 11x - 3 \\ \underline{-(4x^4 + 4x^3)} \phantom{- 3} \\ -12x^3 - x^2 \phantom{+ 8x - 3} \\ \underline{-(-12x^3 - 12x^2)} \phantom{+ 8x - 3} \\ 11x^2 + 8x \phantom{- 3} \\ \underline{-(11x^2 + 11x)} \phantom{- 3} \\ -3x - 3 \\ \underline{-(-3x - 3)} \\ 0 \end{array}$$

Die kubische Gleichung  $4x^3 - 12x^2 + 11x - 3 = 0$  hat die Lösungen  $x_2 = 1, x_3 = \frac{3}{2}, x_4 = \frac{1}{2}$  (vgl. Beispiel 3 im Abschnitt II.6.1).

Lösungen der Gleichung vierten Grades  $4x^4 - 8x^3 - x^2 + 8x - 3 = 0$  somit:  $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = \frac{3}{2}, x_4 = \frac{1}{2}$

Sind in einer Gleichung vierten Grades die Koeffizienten von  $x^3$  und  $x$  gleich Null, dann heißt sie bi-quadratische Gleichung:  $ax^4 + cx^2 + e = 0, a \neq 0$  (allgemeine Form) oder  $x^4 + sx^2 + u = 0$  (Normalform).

Eine Substitution ist die Ersetzung eines algebraischen Ausdrucks durch einen anderen. Bei komplizierten Gleichungen können oftmals mit Hilfe einer geeigneten Substitution Lösungen gefunden werden.

Mit Hilfe der Substitution  $x^2 = z$  wird aus einer bi-quadratischen Gleichung eine quadratische Gleichung mit der Variablen  $z$ :  $az^2 + cz + e = 0$  oder  $z^2 + sz + u = 0$ . Aus deren Lösungen  $z_1, z_2$  erhält man die Lösungen der biquadratischen Gleichung durch Radizieren (Wurzelziehen):  $x_{1,2} = \pm\sqrt{z_1}, x_{3,4} = \pm\sqrt{z_2}$ .

Biquadratische Gleichung

$$\begin{aligned} \text{Gleichung (Normalform): } x^4 + sx^2 + u = 0 \\ \text{Substitution } x^2 = z: z^2 + sz + u = 0 \\ \text{Lösungen: } z_{1,2} = -\frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} - u} \\ \text{Lösungen der biquadratischen Gleichung:} \\ x_{1,2} = \pm\sqrt{z_1}, x_{3,4} = \pm\sqrt{z_2} \end{aligned}$$

#### ■ Beispiele:

4.  $2x^4 - 6x^2 + 4 = 0$

Division durch 2 ergibt die Normalform:  $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

Substitution  $x^2 = z$  ergibt eine quadratische Gleichung in  $z$ :  $z^2 - 3z + 2 = 0$

Lösungen der quadratischen Gleichung:  $z_1 = 1, z_2 = 2$

Lösungen der biquadratischen Gleichung durch Radizieren:

$x_1 = \sqrt{z_1} = \sqrt{1} = 1, x_2 = -\sqrt{z_1} = -1, x_3 = \sqrt{z_2} = \sqrt{2},$

$x_4 = -\sqrt{z_2} = -\sqrt{2}$

5.  $x^4 + 2x^2 - 15 = 0$

Substitution  $x^2 = z$  ergibt eine quadratische Gleichung in  $z$ :  $z^2 + 2z - 15 = 0$

Lösungen der quadratischen Gleichung:  $z_1 = 3, z_2 = -5$

Lösungen der biquadratischen Gleichung durch Radizieren:

$x_1 = \sqrt{z_1} = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{z_1} = -\sqrt{3}, x_3 = \sqrt{z_2} = \sqrt{-5} = j\sqrt{5},$

$x_4 = -\sqrt{z_2} = -\sqrt{-5} = -j\sqrt{5}$



6.  $x^4 - 4x^2 - 1 = 0$

Substitution  $x^2 = z$  ergibt eine quadratische Gleichung in  $z$ :

$$z^2 - 4z - 1 = 0$$

Lösungen der quadratischen Gleichung:  $z_1 = 2 + \sqrt{5}$ ,

$$z_2 = 2 - \sqrt{5} = -(\sqrt{5} - 2)$$

Lösungen der biquadratischen Gleichung durch Radizieren:

$$x_1 = \sqrt{z_1} = \sqrt{2 + \sqrt{5}}, x_2 = -\sqrt{z_1} = -\sqrt{2 + \sqrt{5}},$$

$$x_3 = \sqrt{z_2} = \sqrt{-(\sqrt{5} - 2)} = j\sqrt{\sqrt{5} - 2}, x_4 = -\sqrt{z_2}$$

$$= -\sqrt{-(\sqrt{5} - 2)} = -j\sqrt{\sqrt{5} - 2}$$

## 6.4 Gleichungen $n$ -ten Grades

Die allgemeine Form einer Gleichung  $n$ -ten Grades lautet

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0$$

Die Normalform erhält man aus der allgemeinen Form durch Division durch  $a_n \neq 0$  und Setzen von  $\frac{a_i}{a_n} = b_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ .

Normalform

$$x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = 0$$

Dabei sind  $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$  und  $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_2, b_1, b_0$  reelle (oder komplexe) Koeffizienten, und  $n$  ist eine von Null verschiedene natürliche Zahl.

Nur für  $n \leq 4$  (Gleichungen höchstens vierten Grades) gibt es allgemeine Lösungsformeln, in denen nur ineinander geschachtelte Wurzeln stehen. Für Gleichungen fünften und höheren Grades existieren solche Lösungsformeln nicht. In der Regel lassen sich dann die Lösungen außer in Spezialfällen nicht mehr exakt berechnen, man muss sich mit sogenannten Näherungslösungen begnügen. Besonders bei der Behandlung praktischer Probleme werden verschiedene Näherungsverfahren verwendet (wie zum Beispiel Regula falsi oder Newtonsches Verfahren, vgl. Abschnitt VIII.4.12).

In Spezialfällen führen die für Gleichungen dritten und vierten Grades vorgeführten Methoden wie zum Beispiel die Reduktionsmethode jedoch zu Lösungen.

Ist  $x_1$  eine Lösung der Gleichung  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ , dann gilt

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = (x - x_1) (c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0) = 0$$

mit  $c_{n-1} = a_n$ . Die weiteren Lösungen der Gleichung  $n$ -ten Grades  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$  sind die Lösungen der Gleichung  $(n-1)$ -ten Grades  $c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0$ . Der Grad der zu lösenden Gleichung wird also um 1 reduziert.

### ■ Beispiel:

$$x^6 - 6x^5 + 14x^4 - 14x^3 + 5x^2 = 0$$

Sofort zu erkennen:  $x_1 = 0, x_2 = 0$

Es folgt:

$$x^6 - 6x^5 + 14x^4 - 14x^3 + 5x^2 = x^2(x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 14x + 5) = 0$$

Durch Probieren:

$$x_3 = 1 \text{ ist Lösung von } x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 14x + 5 = 0$$

Polynomdivision:

$$(x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 14x + 5) : (x - 1) = x^3 - 5x^2 + 9x - 5$$

Es folgt:

$$x^6 - 6x^5 + 14x^4 - 14x^3 + 5x^2 = x^2(x - 1)(x^3 - 5x^2 + 9x - 5) = 0$$

Durch Probieren:  $x_4 = 1$  ist Lösung von  $x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = 0$

Polynomdivision:  $(x^3 - 5x^2 + 9x - 5) : (x - 1) = x^2 - 4x + 5$

Es folgt:

$$x^6 - 6x^5 + 14x^4 - 14x^3 + 5x^2 = x^2(x - 1)^2(x^2 - 4x + 5) = 0$$

Die quadratische Gleichung  $x^2 - 4x + 5 = 0$  hat die Lösungen

$$x_5 = 2 + j, x_6 = 2 - j$$

Es folgt:

$$x^6 - 6x^5 + 14x^4 - 14x^3 + 5x^2 = x^2(x - 1)^2(x - 2 - j)(x - 2 + j) = 0$$

Alle Lösungen von  $x^6 - 6x^5 + 14x^4 - 14x^3 + 5x^2 = 0$  somit:

$$x_1 = x_2 = 0, x_3 = x_4 = 1, x_5 = 2 + j, x_6 = 2 - j$$

## 6.5 Satz von Viëta für Gleichungen $n$ -ten Grades

Wie für quadratische Gleichungen, so erhält man auch für beliebige Gleichungen  $n$ -ten Grades durch Vergleich der Normalform und der Produktform Beziehungen zwischen den Lösungen und den Koeffizienten der Potenzen von  $x$  in der Normalform. Ausmultiplizieren der Produktform, Gleichsetzen mit der Normalform und Koeffizientenvergleich (das heißt, Vergleich der Koeffizienten von  $x^{n-1}, x^{n-2}, \dots, x^2, x^1, x, x^0 = 1$  auf beiden Seiten der Gleichung) ergibt die folgenden Beziehungen, die als Satz von Viëta bezeichnet werden.

Kubische Gleichungen:

$$\text{Normalform: } x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = 0,$$

Lösungen:  $x_1, x_2, x_3$

Satz von Viëta:

$$b_2 = -(x_1 + x_2 + x_3); \quad b_1 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3;$$

$$b_0 = -x_1 x_2 x_3$$

Gleichungen vierten Grades:

$$\text{Normalform: } x^4 + b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = 0,$$

Lösungen  $x_1, x_2, x_3, x_4$

Satz von Viëta:

$$b_3 = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

$$b_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4$$

$$b_1 = -(x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4)$$

$$b_0 = x_1 x_2 x_3 x_4$$

Gleichungen  $n$ -ten Grades:

Normalform:

$$x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = 0$$

Lösungen:  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

Satz von Viëta:

$$b_{n-1} = -(x_1 + x_2 + \dots + x_n),$$

$$b_{n-2} = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_1 x_n + x_2 x_3$$

$$+ x_2 x_4 + \dots + x_2 x_n + \dots + x_{n-1} x_n,$$

$$b_{n-3} = -(x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_1 x_2 x_n + x_1 x_3 x_4$$

$$+ x_1 x_3 x_5 + \dots + x_1 x_3 x_n + \dots + x_2 x_3 x_4$$

$$+ x_2 x_3 x_5 + \dots + x_2 x_3 x_n + x_2 x_4 x_5 + \dots$$

$$+ x_n - 2 x_{n-1} x_n),$$

.....



$$b_1 = (-1)^{n-1} (x_1 x_2 x_3 \dots x_{n-1} + x_1 x_2 \dots x_{n-2} x_n \\ + x_1 x_2 \dots x_{n-3} x_{n-1} x_n + \dots + x_1 x_3 x_4 \dots x_n \\ + x_2 x_3 \dots x_n), \\ b_0 = (-1)^n x_1 x_2 x_3 \dots x_n$$

### ■ Beispiele:

1. Die kubische Gleichung  $x^3 - 6x^2 - x + 6 = 0$  (also  $b_2 = -6$ ,  $b_1 = -1$ ,  $b_0 = 6$ ) hat die Lösungen  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 6$ ,  $x_3 = -1$  (vgl. Beispiel 2 im Abschnitt II.6.1). Es gilt nach dem Satz von Viëta:

$$b_2 = -(x_1 + x_2 + x_3) = -(1 + 6 - 1) = -6, \\ b_1 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 1 \cdot 6 + 1 \cdot (-1) + 6 \cdot (-1) \\ = 6 - 1 - 6 = -1,$$

$$b_0 = -x_1 x_2 x_3 = -1 \cdot 6 \cdot (-1) = -(-6) = 6$$

2. Für die Gleichung vierten Grades  $x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 7x - 6 = 0$  gilt:  $b_3 = -7$ ,  $b_2 = 5$ ,  $b_1 = 7$ ,  $b_0 = -6$ .

Die Gleichung hat die Lösungen  $x_1 = x_2 = 1$ ,  $x_3 = 6$ ,  $x_4 = -1$  (vgl. Beispiel 2 im Abschnitt II.6.3).

Nach dem Satz von Viëta gilt:

$$b_3 = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = -(1 + 1 + 6 - 1) = -7 \\ b_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 \\ = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 6 + 1 \cdot (-1) + 6 \cdot (-1) \\ = 1 + 6 - 1 + 6 - 1 - 6 = 5$$

$$b_1 = -(x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4) \\ = -(1 \cdot 1 \cdot 6 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 6 \cdot (-1) + 1 \cdot 6 \cdot (-1)) \\ = -(6 - 1 - 6 - 6) = 7$$

$$b_0 = x_1 x_2 x_3 x_4 = 1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot (-1) = -6$$

3. Welche Normalform hat die kubische Gleichung mit den Lösungen  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = -\frac{1}{2}$ ,  $x_3 = \frac{1}{2}$ ?

$$\text{Normalform: } x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = 0$$

Nach dem Satz von Viëta gilt:

$$b_2 = -(x_1 + x_2 + x_3) = -\left(-2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2$$

$$b_1 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = (-2) \left(-\frac{1}{2}\right) + (-2) \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{2} \\ = 1 - 1 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$b_0 = -x_1 x_2 x_3 = -\left((-2) \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

Die Normalform der kubischen Gleichung lautet somit  $x^3 + 2x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = 0$ .

## 7 Auf algebraische Gleichungen zurückführbare Gleichungen

### 7.1 Bruchgleichungen

Bestimmungsgleichungen mit Bruchtermen, bei denen die Variable (auch) im Nenner auftritt, heißen Bruchgleichungen.

Alle diese Bruchterme sind Quotienten  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , wo

$P(x)$  und  $Q(x)$  Polynome mit der gleichen Variablen  $x$  sind, also  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  und  $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$  mit  $n \geq 0$ ,  $m \geq 1$  (vgl. Abschnitt II.6.2).

Multipliziert man eine solche Gleichung mit dem Hauptnenner aller auf beiden Seiten der Gleichung auftretenden Nenner durch, dann entsteht eine algebraische Gleichung (oder eine identische Gleichung).

Durch die Multiplikation mit dem Hauptnenner können Lösungen hinzukommen, es gehen aber keine Lösungen verloren. Deshalb ist es unbedingt erforderlich, die Lösungen der erhaltenen algebraischen Gleichung in die Ausgangsgleichung einzusetzen. Dadurch werden hinzugekommene Lösungen, die nicht Lösungen der Ausgangsgleichung sind, aus-

gesondert, insbesondere solche Werte, für die ein Nenner der Ausgangsgleichung Null ist.

### ■ Beispiele:

$$1. \frac{x+2}{2x-1} = \frac{4x-1}{x}$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner  $x(2x-1)$ :

$$(x+2)x = (4x-1)(2x-1)$$

$$\text{Auflösen der Klammern: } x^2 + 2x = 8x^2 - 4x - 2x + 1$$

$$\text{Sortieren nach Potenzen von } x: 7x^2 - 8x + 1 = 0$$

Quadratische Gleichung in allgemeiner Form mit  $a = 7$ ,  $b = -8$ ,  $c = 1$  (vgl. Abschnitt II.5.2.2)

Lösungen:

$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = \frac{1}{14} (8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 7 \cdot 1}) = \frac{1}{14} (8 \pm 6) \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{7}$$

Einsetzen von  $x_1$  in die Ausgangsgleichung:

$$\frac{1+2}{2 \cdot 1 - 1} = \frac{4 \cdot 1 - 1}{1} \Rightarrow 3 = 3$$

Einsetzen von  $x_2$  in die Ausgangsgleichung:

$$\frac{\frac{1}{7} + 2}{2 \cdot \frac{1}{7} - 1} = \frac{4 \cdot \frac{1}{7} - 1}{\frac{1}{7}} \Rightarrow \frac{\frac{15}{7}}{-\frac{6}{7}} = \frac{-\frac{6}{7}}{\frac{1}{7}} \Rightarrow -3 = -3$$

Beide Werte sind also auch Lösungen der Ausgangsgleichung.

$$\text{Lösungsmenge: } L = \left\{ \frac{1}{7}, 1 \right\}$$

$$2. \frac{2x+1}{x-3} + \frac{3x-5}{x+3} = \frac{2x^2+2x+18}{x^2-9}$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner  $(x-3)(x+3) = x^2 - 9$ :

$$(2x+1)(x+3) + (3x-5)(x-3) = 2x^2 + 2x + 18$$

Auflösen der Klammern:

$$2x^2 + 6x + x + 3 + 3x^2 - 9x - 5x + 15 = 2x^2 + 2x + 18$$

$$\text{Sortieren nach Potenzen von } x: 3x^2 - 9x = 0$$

Durch 3 dividieren und  $x$  ausklammern:  $x(x-3) = 0$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 3$

Einsetzen von  $x_1$  in die Ausgangsgleichung:

$$\frac{1}{-3} + \frac{-5}{3} = \frac{18}{-9} \Rightarrow -2 = -2$$

$x_2 = 3$  ist keine Lösung der Ausgangsgleichung, da für  $x = 3$  zwei der Nenner gleich 0 sind.

Lösungsmenge:  $L = \{0\}$

$$3. \frac{2x+3}{x-1} + \frac{4x+5}{x+1} = \frac{6x^2+6x-2}{x^2-1}$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner  $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ :

$$(2x+3)(x+1) + (4x+5)(x-1) = 6x^2 + 6x - 2$$

Auflösen der Klammern:

$$2x^2 + 2x + 3x + 3 + 4x^2 - 4x + 5x - 5 = 6x^2 + 6x - 2$$

$$\text{Zusammenfassen: } 6x^2 + 6x - 2 = 6x^2 + 6x - 2$$

Dies ist eine identische Gleichung, die für alle reellen  $x$  erfüllt ist.

Für  $x = 1$  und  $x = -1$  ist die Ausgangsgleichung nicht erklärt, da Nenner gleich 0 sind.

Lösungsmenge:  $L = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ und } x \neq 1, x \neq -1\}$

$$4. \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x-3} = -\frac{2x+1}{x^2-4x+3}$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner

$$(x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3: 3(x-3) - 2(x-1) = -(2x+1)$$

$$\text{Auflösen der Klammern: } 3x - 9 - 2x + 2 = -2x - 1$$

$$\text{Sortieren nach Potenzen von } x: 3x - 6 = 0$$

Die Lösung dieser linearen Gleichung ist  $x = 2$ .

Einsetzen in die Ausgangsgleichung:

$$\frac{3}{1} - \frac{2}{-1} = -\frac{5}{-1} \Rightarrow 5 = 5$$

Lösungsmenge:  $L = \{2\}$

### 7.2 Wurzelgleichungen

Bestimmungsgleichungen, bei denen die Variable (auch) unter einer Wurzel vorkommt, heißen Wurzelgleichungen.

Über die Existenz und die Anzahl von Lösungen bei Wurzelgleichungen lassen sich allgemein keine Aussagen machen. Ziel für die Bestimmung der Lösungen ist es, die in der Gleichung auftretenden Wurzeln zu beseitigen und die Gleichung in eine algebraische Gleichung zu überführen.

Oftmals gelingt es, die Wurzeln zu isolieren (das heißt, die Gleichung so umzuformen, dass die Wurzel allein auf einer Seite der Gleichung steht) und dann beide Seiten der Gleichung in die entsprechende Potenz zu erheben. Viele Wurzelgleichungen können auch schon durch ein- oder mehrmaliges Quadrieren in eine algebraische Gleichung überführt werden.

Durch das Quadrieren oder allgemeiner durch das Potenzieren können Lösungen hinzukommen, es gehen aber keine Lösungen verloren (Potenzieren ist keine äquivalente Umformung!). Durch die Probe mit Einsetzen der gefundenen Lösungen in die Ausgangsgleichung lassen sich diese zusätzlichen Werte aber leicht feststellen und aussortieren.

#### ■ Beispiele:

- $11 - \sqrt{x+3} = 6$   
Isolieren der Wurzel ergibt  $\sqrt{x+3} = 11 - 6$ , also  $\sqrt{x+3} = 5$ , woraus man durch Quadrieren der Gleichung  $x+3 = 25$ , also  $x = 22$  erhält.  
Einsetzen in die Ausgangsgleichung bestätigt  $x = 22$  als Lösung:  $11 - \sqrt{22+3} = 6$   
Lösungsmenge:  $L = \{22\}$
- $5 + \sqrt{9x^2 - 65} = 3x$   
Isolieren der Wurzel und Quadrieren der Gleichung ergibt  $\sqrt{9x^2 - 65} = 3x - 5 \Rightarrow 9x^2 - 65 = (3x - 5)^2 = 9x^2 - 30x + 25 \Rightarrow 30x = 90 \Rightarrow x = 3$   
Einsetzen in die Ausgangsgleichung ergibt  $x = 3$  als Lösung.  
Lösungsmenge:  $L = \{3\}$
- $\sqrt{11-x} = x+1$   
Quadrieren ergibt  $11-x = x^2 + 2x + 1$ , also die quadratische Gleichung  $x^2 + 3x - 10 = 0$ , die die Lösungen  $x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 10}$ , also  $x_1 = 2$  und  $x_2 = -5$  hat.  
Die Probe zeigt, dass  $x_1$  die Wurzelgleichung erfüllt,  $x_2$  jedoch nicht.  
Lösungsmenge:  $L = \{2\}$
- $\sqrt{x+5} = \sqrt{2x+3} + 1$   
Quadrieren der Gleichung ergibt  $x+5 = 2x+3+2\sqrt{2x+3}+1$ .  
Durch Zusammenfassen und Isolieren der Wurzel erhält man  $-x+1 = 2\sqrt{2x+3}$ .  
Erneutes Quadrieren ergibt  $x^2 - 2x + 1 = 4(2x+3)$  und somit die quadratische Gleichung  $x^2 - 10x - 11 = 0$ .  
Diese Gleichung hat die Lösungen  $x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25+11}$ , also  $x_1 = 11$  und  $x_2 = -1$ .  
Einsetzen in die Ausgangsgleichung  $\sqrt{x+5} = \sqrt{2x+3} + 1$  zeigt, dass  $x_2$  eine Lösung ist,  $x_1$  aber nicht.  
Lösungsmenge:  $L = \{-1\}$
- $\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+7} = 4$   
Quadrieren:  $x+2 + \sqrt{2x+7} = 16$   
Wurzel isolieren:  $\sqrt{2x+7} = 14-x$   
Quadrieren:  $2x+7 = 196-28x+x^2$   
Sortieren nach Potenzen von  $x$ :  $x^2 - 30x + 189 = 0$   
Lösungen dieser quadratischen Gleichung:  
 $x_{1,2} = 15 \pm \sqrt{225-189} = 15 \pm 6 \Rightarrow x_1 = 21, x_2 = 9$   
Einsetzen von  $x_1$  in Ausgangsgleichung:  $\sqrt{21+2} + \sqrt{2 \cdot 21+7} = 4 \Rightarrow \sqrt{30} = 4$ : unwahr! Somit ist  $x_1$  keine Lösung der Ausgangsgleichung.

Einsetzen von  $x_2$  in Ausgangsgleichung:  $\sqrt{9+2} + \sqrt{2 \cdot 9+7} = 4 \Rightarrow 4 = 4$ : wahr,  $x_2 = 9$  ist also Lösung.

Lösungsmenge:  $L = \{9\}$

$$6. \sqrt[3]{x+2} = 3$$

In die 3. Potenz erheben:  $x+2 = 3^3 = 27 \Rightarrow x = 25$

Einsetzen in die Ausgangsgleichung:  $\sqrt[3]{25+2} = 3 \Rightarrow 3 = 3$

Lösungsmenge:  $L = \{25\}$

$$7. x + 5\sqrt[3]{x^2} - 22\sqrt[3]{x} + 16 = 0$$

Umformung der Wurzelexponenten:  $x + 5x^{\frac{2}{3}} - 22x^{\frac{1}{3}} + 16 = 0$

Durch Potenzieren lassen sich die Wurzeln nicht beseitigen, statt dessen Substitution:  $z = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

Es folgt:  $z^3 + 5z^2 - 22z + 16 = 0$

Durch Probieren erhält man die Lösung  $z = 1$  dieser kubischen Gleichung.

Polynomdivision:

$$(z^3 + 5z^2 - 22z + 16) : (z - 1) = z^2 + 6z - 16$$

Lösungen der quadratischen Gleichung  $z^2 + 6z - 16 = 0$ :

$$z_{2,3} = -3 \pm \sqrt{9+16} = -3 \pm 5 \Rightarrow z_2 = 2, z_3 = -8$$

Substitutionsgleichung in die dritte Potenz erheben:  $x = z^3$

Einsetzen der Lösungen:  $x_1 = z_1^3 = 1^3 = 1, x_2 = z_2^3 = 2^3 = 8,$

$$x_3 = z_3^3 = (-8)^3 = -512$$

Einsetzen von  $x_1$  in Ausgangsgleichung:

$$1 + 5\sqrt[3]{1^2} - 22\sqrt[3]{1} + 16 = 0 \Rightarrow 1 + 5 - 22 + 16 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Einsetzen von  $x_2$  in Ausgangsgleichung:

$$8 + 5\sqrt[3]{8^2} - 22\sqrt[3]{8} + 16 = 0 \Rightarrow 8 + 20 - 44 + 16 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Einsetzen von  $x_3$  in Ausgangsgleichung:

$$-512 + 5\sqrt[3]{(-512)^2} - 22\sqrt[3]{-512} + 16 = 0 \Rightarrow -512 + 5 \cdot 64 - 22 \cdot (-8) + 16 = 0 \Rightarrow -512 + 320 + 176 + 16 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Lösungsmenge:  $L = \{-512, 1, 8\}$

## 8 Transzendente Gleichungen

### 8.1 Exponentialgleichungen

Bestimmungsgleichungen, bei denen die Variable (auch) im Exponenten einer Potenz steht, heißen Exponentialgleichungen.

Im allgemeinen lassen sich in Exponentialgleichungen die Lösungen nur durch Näherungsverfahren (siehe Abschnitt VIII.4.12) bestimmen. Tritt in einer Exponentialgleichung die Variable jedoch nur in den Exponenten auf, so kann man sie oftmals lösen, und zwar

durch Umformung mit Hilfe der Potenzgesetze und anschließendes Logarithmieren zu einer beliebigen Basis oder

durch Überführung in eine algebraische Gleichung mit Hilfe einer geeigneten Substitution und anschließendem Logarithmieren.

Die Exponentialgleichung  $a \cdot b^x = c$  geht durch Logarithmieren über in  $\log a + x \cdot \log b = \log c$ , woraus sich für  $b \neq 1$  die Lösung  $x = \frac{\log c - \log a}{\log b}$  ergibt.

Die Exponentialgleichung  $a_n b^{nx} + a_{n-1} b^{(n-1)x} + \dots + a_2 b^{2x} + a_1 b^x + a_0 = 0$  geht mit Hilfe der Substitution  $z = b^x$  über in die algebraische Gleichung  $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$ . Ist  $z > 0$  eine reelle Lösung dieser Gleichung, so ist  $x = \frac{\log z}{\log b}$  eine Lösung der Exponentialgleichung.

#### ■ Beispiele:

$$1. 3^x = 4^x - 2^x$$

Logarithmieren zu einer beliebigen Basis ergibt  $x \log 3 = (x-2) \log 4 + x \log 2$ .

Auflösen nach  $x$  gibt die Lösung

$$x = \frac{2 \log 4}{\log 4 - \log 3 + \log 2} = \frac{4 \log 2}{3 \log 2 - \log 3} \approx 2,826\,780$$

Bei der letzten Umformung wurde  $\log 4 = 2 \log 2$  gesetzt.

Lösungsmenge:  $L = \{2,826\,780 \dots\}$

2.  $5 \cdot 6^x = 2^x \cdot 7^{-x}$

Durch Umformung ergibt sich  $\left(\frac{2}{7 \cdot 6}\right)^x = \left(\frac{1}{21}\right)^x = 5$ ,

woraus man durch Logarithmieren die Lösung erhält:

$$x = \frac{\log 5}{\log \left(\frac{1}{21}\right)} = \frac{\log 5}{-\log 21} \approx -0,528\,634$$

Lösungsmenge:  $L = \{-0,528\,633 \dots\}$

3.  $e^{2x+3} = e^{x-4}$

Logarithmieren zur Basis  $e$  ergibt die Gleichheit der Exponenten:  $2x+3 = x-4$ , woraus sich unmittelbar die Lösung  $x = -7$  ergibt.

Lösungsmenge:  $L = \{-7\}$

4.  $2^{2x} - \frac{5}{2} \cdot 2^{x+1} + 6 = 0$

Durch Umformung erhält man  $(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$ , und mit der Substitution  $z = 2^x$  ergibt sich die quadratische Gleichung in  $z$ :  $z^2 - 5z + 6 = 0$ , die die Lösungen  $z_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6}$ , also  $z_1 = 2$  und  $z_2 = 3$  hat.

Durch Einsetzen dieser Werte in die Substitutionsgleichung ergeben sich die Lösungen  $x_1$  und  $x_2$  der Exponentialgleichung:

$$2^{x_1} = z_1 = 2 \Rightarrow x_1 = 1; \quad 2^{x_2} = z_2 = 3 \Rightarrow x_2 = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,584\,963$$

Lösungsmenge:  $L = \{1; 1,584\,962 \dots\}$

5.  $3^x = x + 4$

In dieser Gleichung steht  $x$  nicht nur im Exponenten, die Gleichung lässt sich deshalb nur mit einem Näherungsverfahren lösen.

Man setzt  $y = 3^x - x - 4$  und wendet etwa Regula falsi oder das Newtonsche Verfahren an (vgl. Abschnitt VIII.4.12). Mit den Startwerten  $x_1 = 1,55$ ,  $x_2 = 1,57$  ( $\Rightarrow y_1 = -0,0604 \dots$ ,  $y_2 = 0,0415 \dots$ ) erhält man zum Beispiel mit Regula falsi (Sekantenverfahren) in zwei Schritten die Näherungslösung:  $x \approx 1,561\,919$ .

Lösungsmenge:  $L = \{1,561\,918 \dots\}$

## 8.2 Logarithmische Gleichungen

Bestimmungsgleichungen, bei denen die Variable (auch) im Argument eines Logarithmus vorkommt, heißen logarithmische Gleichungen.

Einige dieser Gleichungen lassen sich mit Hilfe der Logarithmenrechnung auf die lösbare Form  $\log_a x = b$  bringen. Die Lösung lautet dann  $x = a^b$ . Spezielle logarithmische Gleichungen können mit Hilfe einer geeigneten Substitution in eine algebraische Gleichung umgewandelt werden.

Tritt die Variable nicht nur im Argument von Logarithmen auf, dann lassen sich die Lösungen von logarithmischen Gleichungen im allgemeinen nur durch Näherungsverfahren bestimmen (siehe Abschnitt VIII.4.12).

### ■ Beispiele:

1.  $\log_7 (x^2 + 19) = 3$

Durch Potenzieren ergibt sich  $7^3 = x^2 + 19$ , also  $x^2 = 324$ .

Daraus erhält man die Lösungen  $x_1 = 18$  und  $x_2 = -18$ .

Lösungsmenge:  $L = \{18, -18\}$

2.  $\lg(6x + 10) - \lg(x - 3) = 1$

Es folgt  $\lg \frac{6x+10}{x-3} = 1$  und durch Potenzieren  $\frac{6x+10}{x-3} = 10^1 = 10$  und somit  $6x + 10 = 10x - 30$ , also  $4x = 40$ . Daraus ergibt sich  $x = 10$  als Lösung der logarithmischen Gleichung.

Lösungsmenge:  $L = \{10\}$

3.  $\lg(11x - 10) + [\lg(11x - 10)]^2 = 6$

Durch die Substitution  $z = \lg(11x - 10)$  erhält man die quadratische Gleichung  $z^2 + z - 6 = 0$  mit den Lösungen

$$z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6}, \text{ also } z_1 = -3 \text{ und } z_2 = 2.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die Substitutionsgleichung ergeben sich die Lösungen  $x_1$  und  $x_2$  der logarithmischen Ausgangsgleichung:

$$z = \lg(11x - 10) \Rightarrow 10^z = 11x - 10 \Rightarrow x = \frac{10^z + 10}{11}$$

$$z_1 = -3 \Rightarrow x_1 = \frac{10^{-3} + 10}{11} = 0,909\,\overline{18}$$

$$z_2 = 2 \Rightarrow x_2 = \frac{10^2 + 10}{11} = 10$$

Lösungsmenge:  $L = \{0,909\,\overline{18}, 10\}$

## 8.3 Trigonometrische Gleichungen

Bestimmungsgleichungen, in denen die Variable (auch) im Argument einer trigonometrischen Funktion auftritt, heißen trigonometrische Gleichungen oder goniometrische Gleichungen (siehe Kapitel VI).

Trigonometrische Gleichungen sind ebenfalls transzendente Gleichungen. Sie lassen sich nur in Spezialfällen rechnerisch exakt lösen. Es existieren jedoch stets Näherungsverfahren, mit deren Hilfe sich die Lösungen mit beliebiger Genauigkeit angeben lassen (zum Beispiel Newtonsches Verfahren oder Regula falsi, vgl. Abschnitt VIII.4.12).

Tritt in der Gleichung nur eine trigonometrische Funktion auf, so erhält man mit den Arkusfunktionen die Lösungen (vgl. Abschnitt VI.7). Auch für solche Gleichungen, in denen verschiedene trigonometrische Funktionen auftreten, die das gleiche Argument haben, kann man oft mit Hilfe der Arkusfunktionen die Lösungen berechnen. Die Lösungen können im Gradmaß oder im Bogenmaß angegeben werden.

Die Probe durch Einsetzen der gefundenen Werte ist wichtig, weil beim Lösen in der Regel auch nicht-äquivalente Umformungen vorgenommen werden.

Im allgemeinen sind trigonometrische Gleichungen nicht eindeutig lösbar.

### ■ Beispiele:

1.  $\sin^2 x - 1 = -0,5$

Man berechnet:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x = \arcsin\left(\pm \frac{1}{2} \sqrt{2}\right) = \pm 45^\circ$$

Wegen  $\sin x = \sin(180^\circ - x)$  und  $\sin x = \sin(x + k \cdot 360^\circ)$  ergibt sich als Lösungsmenge der trigonometrischen Gleichung (im Gradmaß):  $L = \{x \mid x = 45^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ .

Die Probe in der Ausgangsgleichung bestätigt diese Werte.

2.  $\sin^2 x + 2 \cos x = 1,5$

Wegen  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  ergibt sich  $1 - \cos^2 x + 2 \cos x = 1,5 \Rightarrow \cos^2 x - 2 \cos x + 0,5 = 0$ .

Dies ist eine quadratische Gleichung in  $\cos x$ . Mit der Substitution  $z = \cos x$  ergibt sich die quadratische Gleichung  $z^2 - 2z + 0,5 = 0$  mit den Lösungen  $z = \cos x = 1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{2}$ .

Wegen  $\cos x \leq 1$  kommt  $\cos x = 1 + \frac{1}{2} \sqrt{2}$  für eine Lösung nicht in Betracht. Somit folgt

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2} \sqrt{2} \Rightarrow x = \arccos\left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{2}\right) \approx 1,2735.$$

Wegen  $\cos x = \cos(-x)$  und  $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$  ergibt sich als Lösungsmenge der Ausgangsgleichung (im Bogenmaß):

$L = \{x \mid x \approx \pm 1,2735 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

- Die Probe in der Ausgangsgleichung bestätigt diese Werte.
3.  $\sin x + \cos x - 0,9x = 0$   
 Diese Gleichung ist nicht geschlossen lösbar. Eine Näherungslösung erhält man zum Beispiel mit Regula falsi (vgl. Abschnitt VIII.4.12).  
 Man setzt  $y = \sin x + \cos x - 0,9x$  und erhält mit den Startwerten  $x_1 = 77^\circ$ ,  $x_2 = 76,5^\circ$  ( $\Rightarrow y_1 = -0,0101 \dots$ ,  $y_2 = 0,0041 \dots$ ) im ersten Schritt die Näherungslösung  $x \approx 1,3378$ .

## 9 Lineare Gleichungssysteme

### 9.1 Definitionen

Die Schwierigkeiten beim Bestimmen der Lösungen von Gleichungen werden noch größer, wenn nicht nur eine Variable aus einer Bestimmungsgleichung errechnet werden soll, sondern wenn mehrere Variable mehrere Gleichungen gleichzeitig erfüllen sollen. Zum Beispiel sollen in den Gleichungen  $x - 2y = 4$  und  $2x + 5y = 35$  die Variablen  $x$  und  $y$  so berechnet werden, dass deren Werte beide Gleichungen erfüllen.

Sollen  $m$  Gleichungen von  $n$  Variablen gleichzeitig erfüllt sein, so spricht man von einem System von  $m$  Gleichungen mit  $n$  Variablen. Ein solches Gleichungssystem zu lösen, heißt, die Werte der Variablen zu bestimmen, die alle Gleichungen dieses Systems erfüllen. Eine Lösung eines Gleichungssystems mit  $m$  Gleichungen und  $n$  Variablen besteht also aus  $n$  Werten, einem sogenannten  $n$ -Tupel (für jede Variable ein Wert). So besteht eine Lösung eines Gleichungssystems mit zwei Variablen aus einem Paar (2-Tupel) von Werten, ein Gleichungssystem mit drei Variablen hat ein Lösungstriplett (3-Tupel). In dem Beispiel ist das Paar  $x = 10$ ,  $y = 3$  Lösung. Man schreibt auch  $(x, y) = (10, 3)$ , oder die Lösungsmenge  $L$  der beiden Gleichungen ist  $L = \{(10, 3)\}$  (die Reihenfolge ist zu beachten!).

Eine Gleichung in mehreren Variablen heißt linear, wenn alle Variablen höchstens in der ersten Potenz auftreten und nicht miteinander multipliziert werden. Die beiden Gleichungen des Beispiels sind lineare Gleichungen. Ein Gleichungssystem heißt linear, wenn alle Gleichungen des Systems lineare Gleichungen sind.

Im allgemeinen ist die Bestimmung von Lösungen oder sogar aller Lösungen eines Gleichungssystems sehr schwierig oder auch nicht möglich. Für lineare Gleichungssysteme ist jedoch eine Methode entwickelt worden, die alle Lösungen des Systems liefert. Ein lineares Gleichungssystem ist durch die Koeffizienten der Variablen und durch die Absolutglieder (die Terme, die die Variablen nicht enthalten) bestimmt.

### 9.2 Zwei lineare Gleichungen mit zwei Variablen

Die allgemeine Form eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und zwei Variablen  $x, y$  lautet:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

$a_1, a_2$  sind die Koeffizienten von  $x$ , die Koeffizienten von  $y$  sind  $b_1, b_2$ , und  $c_1, c_2$  sind die Absolutglieder des Gleichungssystems.

Es gibt verschiedene Methoden, solche lineare Gleichungssysteme zu lösen. Übliche Verfahren sind das Einsetzungsverfahren (Substitutionsverfahren), das Additionsverfahren und das Gleichsetzungsverfahren.

#### Einsetzungsverfahren

Beim Einsetzungsverfahren wird eine der beiden Gleichungen nach einer der Variablen aufgelöst, und der entsprechende Term wird in die andere Gleichung eingesetzt. Man erhält so eine lineare Gleichung mit einer Variablen, die gelöst werden kann. Durch Einsetzen dieses Wertes in eine der beiden Ausgangsgleichungen ergibt sich eine lineare Gleichung mit der anderen Variablen, die daraus dann auch berechnet werden kann.

Führt man das Verfahren mit der allgemeinen Form des Gleichungssystems durch, so ergibt sich

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Fallunterscheidung:

1. Ist der Nenner  $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ , so erhält man genau eine Lösung, und zwar das Zahlenpaar

$$(x, y) = \left( \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \right).$$

2. Ist der Nenner  $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ , aber (mindestens) einer der Zähler  $b_2c_1 - b_1c_2$  oder  $a_1c_2 - a_2c_1$  ungleich 0, so gibt es keine Lösung.
3. Ist der Nenner gleich 0, und sind außerdem beide Zähler gleich 0, so gibt es unendlich viele Lösungen, und zwar jedes Paar  $(x, y)$ , das die erste gegebene Gleichung  $a_1x + b_1y = c_1$  und damit dann zugleich die zweite gegebene Gleichung  $a_2x + b_2y = c_2$  erfüllt.

Der Graph (das Schaubild) zu jeder einzelnen gegebenen Gleichung ist eine Gerade (vgl. Abschnitt V.4.2). Im ersten Fall ist das die Lösung bildende Zahlenpaar das Koordinatenpaar des eindeutigen Schnittpunktes der beiden Geraden. Im zweiten Fall gibt es keine Lösung, die Graphen der beiden gegebenen Gleichungen sind parallele Geraden (Parallelen haben keinen Schnittpunkt). Im dritten Fall gibt es unendlich viele Lösungen, die Graphen der beiden gegebenen Gleichungen sind gleich, es handelt sich um ein und dieselbe Gerade.

**Wichtiger Hinweis:** Man sollte stets die Probe in den noch nicht umgeformten Ausgangsgleichungen durchführen!

#### Beispiele:

1. (I)  $-x + y = 1$ , (II)  $2x + y = 4$   
 (I)  $\Rightarrow y = 1 + x$ ; Einsetzen in (II):  $2x + 1 + x = 4 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$   
 Einsetzen in (I)  $\Rightarrow y = 2$

Lösung:  $(x, y) = (1, 2)$  (oder Lösungsmenge:  $L = \{(1, 2)\}$ )  
 Berechnung der Lösung durch Einsetzen von  $a_1 = -1$ ,  
 $b_1 = 1$ ,  $c_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ ,  $b_2 = 1$ ,  $c_2 = 4$  in die Lösungsformel:  

$$x = \frac{1 \cdot 1 - 1 \cdot 4}{(-1) \cdot 1 - 2 \cdot 1} = \frac{-3}{-3} = 1, \quad y = \frac{(-1) \cdot 4 - 2 \cdot 1}{(-1) \cdot 1 - 2 \cdot 1} = \frac{-6}{-3} = 2$$

Probe: (I)  $-1 + 2 = 1 \Rightarrow 1 = 1$ , (II)  $2 \cdot 1 + 2 = 4 \Rightarrow 4 = 4$

2. (I)  $2x + 3y = 8$ , (II)  $x + 4y = 9$

(II)  $\Rightarrow x = 9 - 4y$ ; Einsetzen in (I):  $2(9 - 4y) + 3y = 8$

$\Rightarrow 18 - 5y = 8 \Rightarrow 5y = 10 \Rightarrow y = 2$

Einsetzen in (II)  $\Rightarrow x = 9 - 4 \cdot 2 = 1$

Lösung:  $(x, y) = (1, 2)$  (oder Lösungsmenge:  $L = \{(1, 2)\}$ )

Berechnung der Lösung durch Einsetzen von  $a_1 = 2$ ,  
 $b_1 = 3$ ,  $c_1 = 8$ ,  $a_2 = 1$ ,  $b_2 = 4$ ,  $c_2 = 9$  in die Lösungsformel:

$$x = \frac{4 \cdot 8 - 3 \cdot 9}{2 \cdot 4 - 1 \cdot 3} = \frac{5}{5} = 1, \quad y = \frac{2 \cdot 9 - 1 \cdot 8}{2 \cdot 4 - 1 \cdot 3} = \frac{10}{5} = 2$$

Probe: (I)  $2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8 \Rightarrow 8 = 8$ , (II)  $1 + 4 \cdot 2 = 9 \Rightarrow 9 = 9$

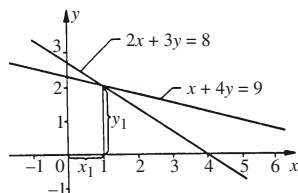


Bild II-1 Geraden von Beispiel 2

### Additionsverfahren

Beim Additionsverfahren werden beide Gleichungen jeweils so mit einem Faktor multipliziert, dass bei anschließender Addition der Gleichungen eine der Variablen wegfällt. Man erhält so eine lineare Gleichung mit einer Variablen, die gelöst werden kann. Durch Einsetzen dieses Wertes in eine der beiden Ausgangsgleichungen ergibt sich eine lineare Gleichung mit der anderen Variablen, die daraus dann auch berechnet werden kann.

### Beispiele:

3. (I)  $-x + y = 1$ , (II)  $2x + y = 4$

Multiplikation von (I) mit 2: (I')  $-2x + 2y = 2$

Addition von (I') und (II):  $y + 2y = 4 + 2 \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow y = 2$

Einsetzen in (I)  $\Rightarrow x = 1$

Lösung:  $(x, y) = (1, 2)$  (oder Lösungsmenge:  $L = \{(1, 2)\}$ )

4. (I)  $2x + 3y = 8$ , (II)  $x + 4y = 9$

Multiplikation von (II) mit  $-2$ : (II')  $-2x - 8y = -18$

Addition von (I) und (II'):  $3y - 8y = 8 - 18 \Rightarrow 5y = 10$

$\Rightarrow y = 2$

Einsetzen in (I)  $\Rightarrow x = 1$

Lösung:  $(x, y) = (1, 2)$

### Gleichsetzungsverfahren

Beim Gleichsetzungsverfahren löst man beide Gleichungen nach derselben Variablen (oder dem gleichen Vielfachen einer Variablen) auf und setzt die entsprechenden Terme gleich. Man erhält so eine lineare Gleichung mit einer Variablen, die gelöst werden kann. Durch Einsetzen dieses Wertes in eine der beiden Ausgangsgleichungen ergibt sich eine lineare Gleichung mit der anderen Variablen, die daraus dann auch berechnet werden kann.

### Beispiele:

5. (I)  $-x + y = 1$ , (II)  $2x + y = 4$

(I)  $\Rightarrow y = 1 + x$ , (II)  $\Rightarrow y = 4 - 2x$

Gleichsetzen  $\Rightarrow 1 + x = 4 - 2x \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$

Einsetzen in (I)  $\Rightarrow y = 2$

Lösung:  $(x, y) = (1, 2)$  (oder Lösungsmenge:  $L = \{(1, 2)\}$ )

6. (I)  $2x + 3y = 8$ , (II)  $x + 4y = 9$

(I)  $\Rightarrow (I') 2x = 8 - 3y$

Multiplikation von (II) mit 2: (II')  $2x + 8y = 18 \Rightarrow$

(II'')  $2x = 18 - 8y$

Gleichsetzen von (I') und (II'')  $\Rightarrow 8 - 3y = 18 - 8y$

$\Rightarrow 5y = 10 \Rightarrow y = 2$

Einsetzen in (I'):  $2x = 2 \Rightarrow x = 1$

Lösung:  $(x, y) = (1, 2)$

### Weitere Beispiele:

7. (I)  $2x + 3y = 8$ , (II)  $4x + 6y = 13$

Nach der Lösungsformel ist der Nenner  $a_1b_2 - a_2b_1 = 2 \cdot 6 - 4 \cdot 3 = 0$ . Der Zähler des  $x$ -Terms ist  $b_2c_1 - b_1c_2 = 6 \cdot 8 - 3 \cdot 13 = 9 \neq 0$  (der Zähler des  $y$ -Terms ist  $a_1c_2 - a_2c_1 = 2 \cdot 13 - 4 \cdot 8 = -6 \neq 0$ ). Es gibt also keine Lösung, die Graphen zu beiden gegebenen Gleichungen sind parallele Geraden.

Anderer Nachweis, dass es keine Lösung gibt:

Multiplikation von (I) mit  $-2$ : (I')  $-4x - 6y = -16$

Addition von (I') und (II):  $0 = -3$

Dies ist ein Widerspruch, also kann das Gleichungssystem keine Lösung haben.

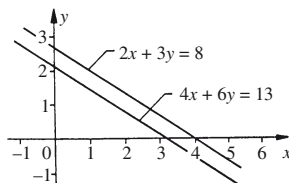


Bild II-2 Geraden von Beispiel 7

8. (I)  $2x + 3y = 8$ , (II)  $6x + 9y = 24$

Nach der Lösungsformel ist der Nenner  $a_1b_2 - a_2b_1 = 2 \cdot 9 - 6 \cdot 3 = 0$ . Der Zähler des  $x$ -Terms ist  $b_2c_1 - b_1c_2 = 9 \cdot 8 - 3 \cdot 24 = 0$ , der Zähler des  $y$ -Terms ist  $a_1c_2 - a_2c_1 = 2 \cdot 24 - 6 \cdot 8 = 0$ . Es gibt also unendlich viele Lösungen, die Graphen der beiden gegebenen Gleichungen sind dieselbe Gerade.

Anderer Nachweis, dass es unendlich viele Lösungen gibt:

Multiplikation von (I) mit 3 ergibt (II). Es handelt sich also um dieselbe Geradengleichung. Zu jedem  $x$ -Wert lässt sich ein  $y$ -Wert eindeutig berechnen.

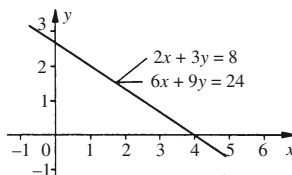


Bild II-3 Geraden von Beispiel 8

## 9.3 Drei lineare Gleichungen mit drei Variablen

Die allgemeine Form eines linearen Gleichungssystems mit drei Gleichungen und drei Variablen

$x, y, z$  lautet:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

$a_1, a_2, a_3$  sind die Koeffizienten von  $x$ , die Koeffizienten von  $y$  sind  $b_1, b_2, b_3$ , die Koeffizienten von  $z$  sind  $c_1, c_2, c_3$ , und  $d_1, d_2, d_3$  sind die Absolutglieder des Gleichungssystems.

Auch hier gibt es unterschiedliche Möglichkeiten, die Lösung oder die Lösungen eines solchen linearen Gleichungssystems zu bestimmen.

#### Einsetzungsverfahren

Beim Einsetzungsverfahren wird eine der drei Gleichungen nach einer Variablen aufgelöst und dann in die beiden anderen Gleichungen eingesetzt. Man erhält so ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Variablen, das man entsprechend Abschnitt II.9.2 löst.

#### ■ Beispiel:

1. (I)  $3x - 9y - z = 5$   
 (II)  $4x + 10y - 9z = 43$   
 (III)  $5x - y - 2z = 36$   
 Gleichung (I) nach  $z$  auflösen:  $z = 3x - 9y - 5$   
 Einsetzen in die beiden anderen Gleichungen (II) und (III):  
 (II)  $4x + 10y - 9(3x - 9y - 5) = 43$   
 (III)  $5x - y - 2(3x - 9y - 5) = 36$   
 Klammern auflösen und zusammenfassen:  
 (II)  $-23x + 91y = -2$   
 (III)  $-x + 17y = 26$   
 Gleichung (III) nach  $x$  auflösen:  $x = 17y - 26$   
 Einsetzen in (II):  
 $-23(17y - 26) + 91y = -2 \Rightarrow 300y = 600 \Rightarrow y = 2$   
 Einsetzen in (III):  $x = 8$   
 Einsetzen von  $x = 8$  und  $y = 2$  in (I):  $z = 3 \cdot 8 - 9 \cdot 2 - 5 = 1$   
 Lösung:  $(x, y, z) = (8, 2, 1)$   
 (oder Lösungsmenge:  $L = \{(8, 2, 1)\}$ )

Probe:

- (I)  $3 \cdot 8 - 9 \cdot 2 - 1 = 5 \Rightarrow 24 - 18 - 1 = 5 \Rightarrow 5 = 5$   
 (II)  $4 \cdot 8 + 10 \cdot 2 - 9 \cdot 1 = 43 \Rightarrow 32 + 20 - 9 = 43 \Rightarrow 43 = 43$   
 (III)  $5 \cdot 8 - 2 \cdot 2 - 1 = 36 \Rightarrow 40 - 2 - 2 = 36 \Rightarrow 36 = 36$

**Wichtiger Hinweis:** Die Probe stets in allen noch nicht umgeformten Ausgangsgleichungen durchführen!

#### Additionsverfahren

Beim Additionsverfahren wird eine der Gleichungen jeweils so äquivalent umgeformt, dass bei Addition dieser umgeformten Gleichung mit einer der beiden anderen Gleichungen jeweils die gleiche Variable herausfällt. Auch dadurch erhält man wieder zwei Gleichungen mit zwei Variablen.

#### ■ Beispiel:

2. (I)  $x - 2y - 3z = -5$   
 (II)  $3x + 3y + z = 6$   
 (III)  $2x + y - z = 0$   
 Multiplikation von (II) mit 3: (II')  $9x + 9y + 3z = 18$   
 Addition von (I) und (II'): (IV)  $10x + 7y = 13$   
 Addition von (II) und (III): (V)  $5x + 4y = 6$   
 Multiplikation von (V) mit  $-2$ : (V')  $-10x - 8y = -12$   
 Addition von (IV) und (V'):  $-y = 1 \Rightarrow y = -1$   
 Einsetzen in (V):  $5x - 4 = 6 \Rightarrow x = 2$   
 Einsetzen von  $x = 2$  und  $y = -1$  in (III):  
 $z = 2x + y = 2 \cdot 2 - 1 = 3$   
 Lösung:  $(x, y, z) = (2, -1, 3)$   
 (oder Lösungsmenge:  $L = \{(2, -1, 3)\}$ )

Weitere Lösungsverfahren wie die Cramersche Regel werden mit Hilfe der Determinantenrechnung im Abschnitt II.9.4 formuliert.

## 9.4 Matrizen und Determinanten

Eine Matrix (Plural Matrizen) ist ein System von  $m \cdot n$  Größen, die in einem rechteckigen Schema von  $m$  (waagerechten) Zeilen und  $n$  (senkrechten) Spalten angeordnet sind. Die  $m \cdot n$  Größen nennt man die Elemente der Matrix, es sind beliebige reelle (oder komplexe) Zahlen. Die Stellung eines Elementes, etwa  $a_{ij}$ , im Schema wird durch einen Doppelindex gekennzeichnet. Dabei gibt der erste Index  $i$  die Zeile und der zweite Index  $j$  die Spalte an, in der das Element steht. Die Numerierungen der Zeilen verlaufen von oben nach unten, die der Spalten von links nach rechts. Das Element  $a_{ij}$  befindet sich also im Kreuzungspunkt der  $i$ -ten Zeile und der  $j$ -ten Spalte.

Eine Matrix mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten nennt man  $(m, n)$ -Matrix. Meist kürzt man Matrizen durch große lateinische Buchstaben  $A, B, \dots$  ab. Man schreibt eine Matrix, indem man das Schema in eckige Klammern (oder auch in runde Klammern) setzt:

Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Abkürzend schreibt man dafür auch  $A = (a_{ij})$ .

#### ■ Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 & 5 \\ 14 & 0 & -6 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Dies ist eine  $(3, 4)$ -Matrix, also eine Matrix mit 3 Zeilen und 4 Spalten. Zum Beispiel ist  $a_{12} = -2$  das Element, das in der ersten Zeile und zweiten Spalte steht.

**Achtung:** Die Doppelindizes sind einzeln zu lesen, zum Beispiel wird  $a_{12}$  gesprochen:  $a$  – eins – zwei.

#### Quadratische Matrizen:

Gilt  $m = n$ , also Zeilenanzahl gleich Spaltenanzahl, dann heißt  $A$  eine  $n$ -reihige quadratische Matrix oder eine quadratische Matrix der Ordnung  $n$ . Die Elemente einer quadratischen Matrix, für die  $i = j$  gilt, bilden die sogenannte Hauptdiagonale der Matrix.

#### ■ Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 5 & 1 & 1 \\ -1 & 10 & -4 \end{bmatrix}$$

$A$  ist eine quadratische 3reihige Matrix. Die Hauptdiagonalelemente sind  $a_{11} = \frac{4}{5}$ ,  $a_{22} = 1$ ,  $a_{33} = -\frac{4}{3}$ . Alle Elemente der zweiten Zeile sind gleich 1:  $a_{21} = a_{22} = a_{23} = 1$ .



**Nullmatrix  $O$ :**

Eine Matrix, deren Elemente alle gleich Null sind, also  $a_{ij} = 0$  für  $i = 1, \dots, m$  und  $j = 1, \dots, n$ , heißt eine Nullmatrix.

**Einheitsmatrix  $E$ :**

Eine quadratische Matrix heißt Einheitsmatrix, falls

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

**Diagonalmatrix:**

Eine quadratische Matrix, bei der für alle  $i \neq j$  die Elemente  $a_{ij}$  gleich Null sind, heißt Diagonalmatrix.

**■ Beispiel:**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

**Obere Dreiecksmatrix:**

Eine quadratische Matrix, bei der für alle  $i > j$  die Elemente  $a_{ij}$  gleich Null sind, heißt obere Dreiecksmatrix.

**■ Beispiel:**

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

**Untere Dreiecksmatrix:**

Eine quadratische Matrix, bei der für alle  $i < j$  die Elemente  $a_{ij}$  gleich Null sind, heißt untere Dreiecksmatrix.

**Matrizen vom gleichen Typ:**

Zwei Matrizen heißen vom gleichen Typ, wenn sie die gleiche Anzahl von Zeilen und die gleiche Anzahl von Spalten haben, wenn also beide  $(m, n)$ -Matrizen sind mit dem gleichen  $m$  und dem gleichen  $n$ .

**■ Beispiel:**

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 24 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$A$  und  $B$  sind vom gleichen Typ,  $C$  ist jedoch nicht vom gleichen Typ wie  $A$  und  $B$ .

**Gleichheit von Matrizen:**

Zwei Matrizen  $A$  und  $B$  heißen gleich, wenn beide vom gleichen Typ sind und wenn die entsprechenden Elemente übereinstimmen, wenn also  $a_{ij} = b_{ij}$  für alle  $i = 1, \dots, m$  und  $j = 1, \dots, n$  gilt.

**■ Beispiel:**

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 24 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 24 & 0 \end{bmatrix}; \quad A = B$$

**Transponierte Matrix:**

Die transponierte oder gespiegelte Matrix  $A^T$  der Matrix  $A$  ist die Matrix, die durch Vertauschung von

Zeilen und Spalten von  $A$  gebildet wird:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

**■ Beispiel:**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -5 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

**Symmetrische Matrix:**

Eine quadratische Matrix  $A$  heißt symmetrisch, wenn  $A = A^T$  ist, wenn also  $a_{ij} = a_{ji}$  für alle  $i$  und  $j$  gilt.

**■ Beispiel:**

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} = A^T$$

**Antisymmetrische Matrix:**

Eine quadratische Matrix  $A$  heißt antisymmetrisch oder schiefsymmetrisch, wenn  $A^T = -A$  ist.

**Addition und Subtraktion von Matrizen:**

Matrizen können nur dann addiert oder subtrahiert werden, wenn sie vom gleichen Typ sind.

Zwei Matrizen vom gleichen Typ werden addiert bzw. subtrahiert, indem man ihre korrespondierenden Elemente addiert bzw. subtrahiert:

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$A - B = (a_{ij}) - (b_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij})$$

**Eigenschaften der Addition:**

1.  $A + B = B + A$  (Kommutativgesetz)
2.  $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$  (Assoziativgesetz)
3.  $(A + B)^T = A^T + B^T$

**■ Beispiel:**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad B - A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

**Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl:**

Man multipliziert eine Matrix  $A$  mit einer reellen Zahl  $k$ , indem man jedes Element der Matrix mit  $k$  multipliziert:

$$kA = k(a_{ij}) = (ka_{ij})$$

Eigenschaften:

Sind  $k$  und  $l$  zwei reelle Zahlen und  $A$  und  $B$  zwei Matrizen, so gilt:

1.  $k(lA) = l(kA) = (kl)A$
2.  $(k+l)A = kA + lA$
3.  $k(A+B) = kA + kB$
4.  $(kA)^T = kA^T$

■ **Beispiel:**

$$3A = 3 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -3 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

**Multiplikation von Matrizen:**

Das Produkt  $AB$  zweier Matrizen  $A$  und  $B$  kann nur dann gebildet werden, wenn die Spaltenanzahl von  $A$  gleich der Zeilenanzahl von  $B$  ist.

Ist  $A = (a_{ij})$  eine  $(m, n)$ -Matrix und  $B = (b_{jk})$  eine  $(n, r)$ -Matrix (Anzahl der Spalten von  $A$  = Anzahl der Zeilen von  $B$ ), so ist die Produktmatrix  $C = AB$  eine  $(m, r)$ -Matrix mit den Elementen  $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}$ . Das Element  $c_{ik}$  von  $C = AB$  für ein festes  $i$  und ein festes  $k$  erhält man also, indem man das  $j$ -te Element der  $i$ -ten Zeile von  $A$  mit dem  $j$ -ten Element der  $k$ -ten Spalte von  $B$  multipliziert für  $j = 1, \dots, n$  und alle diese Produkte addiert.

$$\boxed{\begin{array}{l} A = (a_{ij}), \quad B = (b_{jk}) \Rightarrow C = AB = (c_{ik}) \\ \text{mit } c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} \end{array}}$$

Schematische Darstellung:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix} = B$$

$$= \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & c_{ik} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = AB$$

■ **Beispiel:**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 5 & 10 & 3 \\ 1 & -5 & -6 & 5 \end{bmatrix} = AB$$

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 10 & 3 \\ 1 & -5 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

$BA$  existiert nicht.

Eigenschaften der Matrizenmultiplikation:

1.  $A(BC) = (AB)C$  (Assoziativgesetz)
2.  $A(B+C) = AB + AC$  (Distributivgesetz)

3.  $AB \neq BA$  (Kommutativgesetz gilt nicht)
4.  $AE = EA = A$  ( $E$  Einheitsmatrix)
5.  $AN = NA = N$  ( $N$  Nullmatrix)
6.  $(AB)^T = B^T A^T$  (Reihenfolge ändert sich)

**Orthogonale Matrix:**

Eine quadratische Matrix  $A$  heißt orthogonal, wenn  $AA^T = A^T A = E$  ( $E$  Einheitsmatrix) ist.

**Inverse Matrix:**

Eine Matrix  $B$  heißt Inverse der quadratischen Matrix  $A$ , wenn  $AB = E$  ( $E$  Einheitsmatrix) gilt. Man schreibt dann  $B = A^{-1}$ . Existiert die Inverse einer Matrix, dann ist sie eindeutig.

Eine Matrix  $A$ , für die die Inverse  $A^{-1}$  existiert, heißt regulär, andernfalls heißt sie singulär.

■ **Beispiel:**

Man berechne die Inverse der Matrix  $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ .

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A^{-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

Es ergibt sich das lineare Gleichungssystem  $-2a + 3c = 1$ ,  $-2b + 3d = 0$ ,  $a - 2c = 0$ ,  $b - 2d = 1$ . Die Lösung des Gleichungssystems ist  $a = -2$ ,  $b = -3$ ,  $c = -1$ ,  $d = -2$ .

$$\text{Es folgt: Inverse } A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Eine Determinante  $D$  ist ein algebraischer Ausdruck, der jeder  $n$ -reihigen quadratischen Matrix  $A$

mit reellen (oder komplexen) Elementen  $a_{ij}$  eindeutig zugeordnet wird. Dieser algebraische Ausdruck ist eine reelle (oder komplexe) Zahl. Die Determinante einer  $n$ -reihigen quadratischen Matrix nennt man  $n$ -reihige Determinante.

Man schreibt eine Determinante, indem man das quadratische Schema der Matrix zwischen senkrechte Striche setzt, oder in Kurzform  $D = \det(A) = |A|$ :

Determinante

$$D = \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$



Definition für zweireihige Determinanten ( $n = 2$ ):

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Die Elemente  $a_{11}, a_{22}$  bilden die Hauptdiagonale, die Elemente  $a_{12}, a_{21}$  die sogenannte Nebendiagonale.

**Merkregel zur Berechnung:** Produkt der Hauptdiagonalelemente minus Produkt der Nebendiagonalelemente.

■ **Beispiel:**

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 2 = -3$$

Die allgemeine Lösungsformel  $x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$ ,  $y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$  für ein lineares Gleichungssystem

$a_1x + b_1y = c_1$ ,  $a_2x + b_2y = c_2$  (vgl. Abschnitt II.9.2) lässt sich auch mit Hilfe von zweireihigen Determinanten schreiben:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Die gemeinsame Nennerdeterminante wird aus den Koeffizienten von  $x$  und  $y$  der beiden Gleichungen in der gegebenen Anordnung gebildet. Die Nennerdeterminante heißt deshalb auch Koeffizientendeterminante. Man erhält die Zählerdeterminante von  $x$ , indem man die Koeffizienten von  $x$  durch die Absolutglieder ersetzt, und die Zählerdeterminante von  $y$  entsprechend durch Ersetzung der Koeffizienten von  $y$  durch die Absolutglieder (immer in der gleichen Reihenfolge, also Ersetzung von  $b_1$  durch  $c_1$  usw.).

Man nennt diese Methode Cramersche Regel zur Berechnung der Lösung eines linearen Gleichungssystems (nach dem schweizerischen Mathematiker Gabriel Cramer, 1704–1752).

■ **Beispiel:**

$$(I) x - 2y = 4, (II) 2x + 5y = 35$$

Einsetzen von  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ ,  $b_1 = -2$ ,  $b_2 = 5$ ,  $c_1 = 4$ ,  $c_2 = 35$  in die Determinantengleichungen für  $x$  und  $y$  ergibt:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 35 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{4 \cdot 5 - (-2) \cdot 35}{1 \cdot 5 - (-2) \cdot 2} = \frac{20 + 70}{5 + 4} = \frac{90}{9} = 10,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 35 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{1 \cdot 35 - 4 \cdot 2}{1 \cdot 5 - (-2) \cdot 2} = \frac{35 - 8}{5 + 4} = \frac{27}{9} = 3$$

Definition für dreireihige Determinanten ( $n = 3$ ):

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) \\ &\quad + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

■ **Beispiel:**

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 4 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 3(0 \cdot 1 - 6(-4)) - 4(7 \cdot 1 - (-2)(-4)) - 2(7 \cdot 6 - (-2) \cdot 0) \\ &= 3 \cdot 24 - 4(-1) - 2 \cdot 42 = -8 \end{aligned}$$

Man nennt dies „Entwickeln“ der dreireihigen Determinante nach der ersten Spalte. Dabei wird nacheinander jedes Element der ersten Spalte mit derjenigen zweireihigen Determinante multipliziert, die man erhält, wenn man in der dreireihigen Determinante die Zeile und die Spalte streicht, in der das Element steht. Die so gebildeten Produkte werden mit alternierenden (wechselnden) Vorzeichen versehen, angefangen mit einem +, und anschließend addiert.

Bezeichnet man die Determinante, die man durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und der  $j$ -ten Spalte der Determinante  $D$  erhält, mit  $D_{ij}$ , so kann man das obige Entwickeln auch darstellen als

$$D = a_{11} \cdot D_{11} - a_{21} \cdot D_{21} + a_{31} \cdot D_{31}$$

Die mit dem Faktor  $(-1)^{i+j}$  (dieser Faktor ist  $+1$  oder  $-1$ ) multiplizierte Determinante  $D_{ij}$  heißt Adjunkte oder algebraisches Komplement  $A_{ij}$  des Elements  $a_{ij}$ . Somit kann man für das obige Entwickeln auch schreiben

$$D = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31}$$

Zur Berechnung kann man die Determinante nach einer beliebigen Zeile oder Spalte entwickeln.

Entwicklung nach einer beliebigen Zeile:

$$D = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3} = \sum_{j=1}^3 a_{ij} A_{ij}, \quad 1 \leq i \leq 3$$

Bei Entwicklung nach der ersten Zeile ist  $i = 1$ , bei Entwicklung nach der zweiten Zeile ist  $i = 2$ , und bei Entwicklung nach der dritten Zeile ist  $i = 3$ .

Entwicklung nach einer beliebigen Spalte:

$$D = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + a_{3j} \cdot A_{3j} = \sum_{i=1}^3 a_{ij} A_{ij},$$

$$1 \leq j \leq 3$$

Bei Entwicklung nach der ersten Spalte ist  $j = 1$ , bei Entwicklung nach der zweiten Spalte ist  $j = 2$ , und bei Entwicklung nach der dritten Spalte ist  $j = 3$ .

■ **Beispiel:**

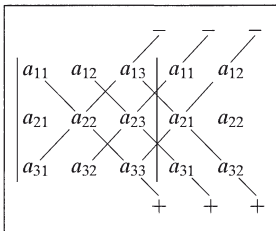
$$D = \begin{vmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 4 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach der zweiten Zeile:

$$\begin{aligned} D &= a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} \\ &= 4 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot A_{22} + 6 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} \\ &= -4[7 \cdot 1 - (-2) \cdot (-4)] + 0 - 6[3 \cdot (-4) - 7 \cdot (-2)] \\ &= -4 \cdot (-1) - 6 \cdot 2 = 4 - 12 = -8 \end{aligned}$$

Dreireihige Determinanten können auch mit der Regel von Sarrus berechnet werden (nach dem französischen Mathematiker Pierre F. Sarrus, 1798 bis 1861).

Man fügt bei der Regel von Sarrus die ersten beiden Spalten der Determinante nochmals als 4. und 5. Spalte hinzu. Dann multipliziert man je drei diagonal aufeinanderfolgende Elemente und addiert (Hauptdiagonalen) bzw. subtrahiert (Nebendiagonalen) die so entstehenden sechs Produkte.



Die Regel ausgeführt ergibt

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

■ **Beispiel:**

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 4 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot 1 + 7 \cdot 6 \cdot (-2) + (-2) \cdot 4 \cdot (-4) \\ - (-2) \cdot 0 \cdot (-2) - 3 \cdot 6 \cdot (-4) - 7 \cdot 4 \cdot 1 \\ = 0 - 84 + 32 - 0 + 72 - 28 = -8$$

**Fehlerwarnung:** Die Regel von Sarrus gilt nur für dreireihige Determinanten!

Definition für  $n$ -reihige Determinanten ( $n \geq 4$ ):

Auch für beliebige  $n$ -reihige Determinanten lässt sich der Wert mit Hilfe des Entwicklungssatzes definieren.

Entwicklung nach einer beliebigen Zeile:

$$D = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij},$$

$$1 \leq i \leq n$$

Bei Entwicklung nach der ersten Zeile ist  $i = 1$ , bei Entwicklung nach der zweiten Zeile ist  $i = 2$ , usw., und bei Entwicklung nach der  $n$ -ten Zeile ist  $i = n$ .

Entwicklung nach einer beliebigen Spalte:

$$D = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij},$$

$$1 \leq j \leq n$$

Bei Entwicklung nach der ersten Spalte ist  $j = 1$ , bei Entwicklung nach der zweiten Spalte ist  $j = 2$ , usw., und bei Entwicklung nach der  $n$ -ten Spalte ist  $j = n$ .

Die Cramersche Regel zur Berechnung der Lösung eines linearen Gleichungssystems ist immer dann anwendbar, wenn bei dem betrachteten linearen Gleichungssystem die Anzahl der Gleichungen und die Anzahl der Variablen übereinstimmen (und die Koeffizientendeterminante von Null verschieden ist).

Die Koeffizientendeterminante eines allgemeinen linearen Gleichungssystems mit drei Gleichungen und drei Variablen lautet

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Ersetzt man die erste Spalte von  $D$ , also die Koeffizienten von  $x$ , durch die Absolutglieder des linearen Gleichungssystems, so ergibt sich die Determinante

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Durch Ersetzen der Koeffizienten von  $y$  und  $z$  erhält man analog die Matrizen

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Für  $D \neq 0$  ergibt sich dann als eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

Ist jedoch  $D = 0$ , dann gibt es entweder keine oder unendlich viele Lösungen des linearen Gleichungssystems. In diesem Fall ist die Cramersche Regel nicht anwendbar.

### ■ Beispiel:

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 3x + 15y + 8z &= 10 \\ -5x + 10y + 12z &= -1 \\ 2x + 7y + z &= 1 \end{aligned}$$

Nennerdeterminante (Determinante der Koeffizientenmatrix):

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 15 & 8 \\ -5 & 10 & 12 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 30 + 360 - 280 - 160 - 252 + 75 = -227$$

Zählerdeterminanten:

$$D_x = \begin{vmatrix} 10 & 15 & 8 \\ -1 & 10 & 12 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 100 + 180 - 56 - 80 - 840 + 15 = -681$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 10 & 8 \\ -5 & -1 & 12 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 240 - 40 + 16 - 36 + 50 = 227$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & 15 & 10 \\ -5 & 10 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 30 - 30 - 350 - 200 + 21 + 75 = -454$$

Somit ergibt sich als Lösung des linearen Gleichungssystems:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-681}{-227} = 3, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{227}{-227} = -1,$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-454}{-227} = 2$$

Die Lösung des Gleichungssystems ist also das (geordnete) Zahlentripel  $(x, y, z) = (3, -1, 2)$   
(oder Lösungsmenge:  $L = \{(3, -1, 2)\}$ ).

## III Planimetrie

Die Planimetrie (griech., Flächenmessung) ist ein Teilgebiet der Geometrie (griech., Erdmessung) und befaßt sich mit höchstens zweidimensionalen Objekten. Dabei interessieren zum Beispiel Form, Größe und gegenseitige Lage solcher Objekte. Die Grundelemente dieser Geometrie der Ebene sind Punkte und Geraden.

### 1 Geraden und Strecken

Eine Gerade ist eine beidseitig unbegrenzte gerade Linie. Ein Punkt ist die Schnittstelle zweier Geraden.

Eine Gerade ist durch zwei voneinander verschiedene Punkte eindeutig bestimmt. Die kürzeste Verbindung zweier Punkte  $P_1$  und  $P_2$  liegt auf der Geraden durch  $P_1$  und  $P_2$ . Zwei verschiedene Geraden in der Ebene sind parallel zueinander oder haben

einen Punkt, ihren Schnittpunkt, gemeinsam. Die Gerade durch die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  schreibt man  $P_1P_2$  (gesprochen: Gerade  $P_1P_2$ ) oder  $P_2P_1$ . Geraden kürzt man oft mit  $g$  ab, also  $g = P_1P_2 = P_2P_1$ .  $A \in g$  ist eine abkürzende Schreibweise dafür, daß der Punkt  $A$  ein Punkt der Geraden  $g$  ist, also auf der Geraden  $g$  liegt, und  $B \notin g$  bedeutet, daß  $B$  außerhalb von  $g$  liegt.

$AB \parallel CD$  oder  $g \parallel h$  (gesprochen:  $g$  parallel  $h$ ) bedeutet, daß  $AB$  und  $CD$  zwei parallele Geraden sind, also keinen Schnittpunkt haben.

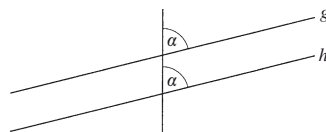


**Bild III-1** Parallele Geraden  $g$  und  $h$

Ein Strahl oder eine Halbgerade ist ein Teil einer Geraden, der von einem Punkt  $S$  einer Geraden aus in einer Richtung läuft. Der Punkt  $S$  heißt Anfangspunkt des Strahls. Jeder Punkt einer Geraden bestimmt zwei verschiedene Strahlen.

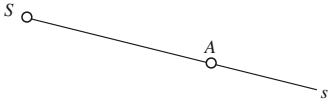


**Bild III-2** Strahl  $s$  ( $A$  ist ein beliebiger Punkt von  $s$ )

Eine Strecke ist ein Abschnitt einer Geraden zwischen zwei Punkten. Eine Strecke ist also eine beidseitig begrenzte gerade Linie. Die Strecke zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  schreibt man  $\overline{AB}$  (gesprochen: Strecke  $AB$ ). Die Punkte  $A$  und  $B$  heißen die Endpunkte der Strecke, alle anderen Punkte der Strecke bilden das Innere. Die Länge der Strecke wird mit  $|\overline{AB}|$  bezeichnet (gesprochen: Länge oder Betrag der Strecke  $AB$ ).

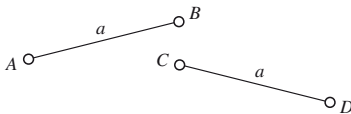


**Bild III-3** Strecken  $\overline{AB}$  und  $\overline{CD}$  mit derselben Länge  $a$

## 2 Winkel

Zwei Strahlen, die von demselben Punkt  $S$  ausgehen, können durch eine Drehung um  $S$  ineinander überführt werden, durch die der Winkel zwischen ihnen bestimmt wird. Die Strahlen heißen die Schenkel des Winkels, der Punkt  $S$  heißt Scheitelpunkt.

Sind  $g$  und  $h$  die beiden Strahlen und  $A$  ein Punkt von  $g$  und  $B$  ein Punkt von  $h$ , so bezeichnet man den Winkel mit  $\sphericalangle(g, h)$  (gesprochen: Winkel zwischen  $g$  und  $h$ ) oder mit  $\sphericalangle ASB$  (gesprochen: Winkel  $ASB$ ).

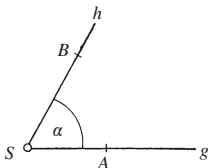


**Bild III-4**  
Winkel  $\alpha = \sphericalangle(g, h) = \sphericalangle ASB$

Winkel werden meist mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet:

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots, \varphi, \dots$

Man unterscheidet in der Regel nicht zwischen Winkel und Größe (Maß, Betrag) eines Winkels.

Zur Winkelmessung unterscheidet man zwei verschiedene Winkelmaße: das Gradmaß und das Bogenmaß (Bogenmaß siehe Abschnitt III.9.5). Beide beruhen auf Kreisteilungen.

Beim Gradmaß wird ein Vollwinkel in 360 gleiche Teile eingeteilt (Sexagesimaleinteilung). Die Einheit des Gradmaßes ist Grad ( $^\circ$ ).  $1^\circ$  entspricht  $\frac{1}{360}$  des Vollwinkels. Untereinheiten des Grads sind Minuten und Sekunden.

$$\begin{aligned} 1^\circ (1 \text{ Grad}) &= 60' (60 \text{ Minuten}), \\ 1' (1 \text{ Minute}) &= 60'' (60 \text{ Sekunden}) \\ 1' &= \left(\frac{1}{60}\right)^\circ, \quad 1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' \end{aligned}$$

In der Geodäsie wird eine Zentesimaleinteilung verwendet. Dabei wird der Vollwinkel in 400 gleiche Teile eingeteilt. Die Einheit ist gon (Gon). 1 gon entspricht also  $\frac{1}{400}$  des Vollwinkels. Ältere, heute nicht mehr gebräuchliche Einheit ist Neugrad.

$$1 \text{ Vollwinkel} = 360^\circ = 400 \text{ gon}$$

Für bestimmte Winkel gibt es besondere Bezeichnungen:

Ein Winkel  $\alpha$  mit  $\alpha = 0^\circ$  heißt Nullwinkel.

Ein Winkel  $\alpha$  mit  $\alpha = 90^\circ$  heißt rechter Winkel.

Ein Winkel  $\alpha$  mit  $\alpha = 180^\circ$  heißt gestreckter Winkel.

Ein Winkel  $\alpha$  mit  $\alpha = 360^\circ$  heißt Vollwinkel.

Ein Winkel  $\alpha$ , der größer als 0 und kleiner als ein rechter Winkel ist, heißt spitzer Winkel:  
 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ .

Ein Winkel  $\alpha$ , der größer als ein rechter Winkel ist, heißt stumpfer Winkel:  $\alpha > 90^\circ$ .

Ein Winkel  $\alpha$ , der größer als ein gestreckter Winkel ist, heißt überstumpfer Winkel:  $\alpha > 180^\circ$ .

In einer Figur kennzeichnet man einen rechten Winkel mit einem Punkt zwischen seinen Schenkeln und einem Winkelbogen.

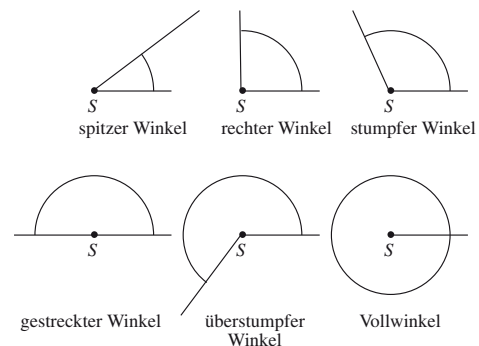


**Bild III.5** Winkelbezeichnungen

Einige Paare von Winkeln haben bestimmte Namen:

### 1. Komplementwinkel

Winkel, die sich zu  $90^\circ$  ergänzen. Der Komplementwinkel zu einem Winkel  $\alpha$  ist der Winkel  $\beta = 90^\circ - \alpha$ .

■ **Beispiel:**  $\alpha = 32^\circ$  und  $\beta = 58^\circ$  sind Komplementwinkel.

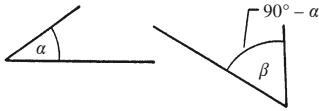


**Bild III-6** Komplementwinkel

### 2. Supplementwinkel

Winkel, die sich zu  $180^\circ$  ergänzen. Der Supplementwinkel zu einem Winkel  $\alpha$  ist der Winkel  $\beta = 180^\circ - \alpha$ .

■ **Beispiel:**  $\alpha = 62^\circ$  und  $\beta = 118^\circ$  sind Supplementwinkel.



**Bild III-7** Supplementwinkel

### 3. Scheitelwinkel

Gegenüberliegende Winkel an zwei sich schneidenden Geraden. Scheitelwinkel sind gleich groß.

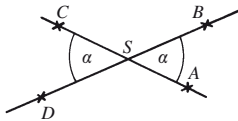


**Bild III-8** Scheitelwinkel ( $\angle ASB$  und  $\angle CSD$ )

### 4. Nebenwinkel

Benachbarte Winkel an zwei sich schneidenden Geraden. Nebenwinkel sind Supplementwinkel, sie ergänzen sich also zu  $180^\circ$ .

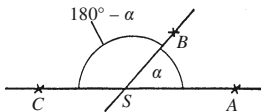


**Bild III-9** Nebenwinkel ( $\angle ASB$  und  $\angle BSC$ )

### 5. Stufenwinkel

Gleichliegende Winkel an von einer Geraden geschnittenen Parallelen. Stufenwinkel sind gleich groß.

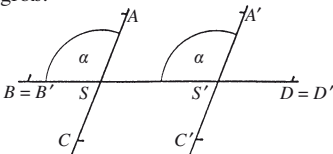


**Bild III-10** Stufenwinkel ( $\angle ASB$  und  $\angle A'S'B'$ )

### 6. Wechselwinkel

Entgegengesetzt liegende Winkel an von einer Geraden geschnittenen Parallelen. Wechselwinkel sind gleich groß.

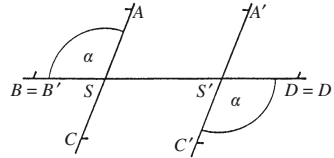


**Bild III-11** Wechselwinkel ( $\angle ASB$  und  $\angle C'S'D'$ )

## 3 Projektion

Man unterscheidet Parallelprojektion und Zentralprojektion.

Eine Parallelprojektion ist die Abbildung eines ebenen Gegenstandes durch parallele Strahlen auf eine Gerade (in der Stereometrie die Abbildung eines räumlichen Gegenstandes durch parallele Strahlen auf eine Ebene). Bei senkrechter Parallelprojektion stehen die projizierenden Strahlen senkrecht auf der Geraden (Stereometrie: auf der Ebene), bei schiefer Parallelprojektion nicht.

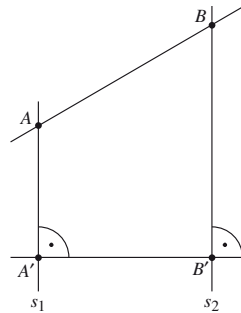


**Bild III-12**

Senkrechte Parallelprojektion einer Strecke  $\overline{AB}$

Eine Zentralprojektion ist die Abbildung eines ebenen Gegenstandes durch Strahlen, die alle durch einen festen Punkt  $Z$  gehen (durch das Zentrum oder Projektionszentrum), auf eine Gerade (in der Stereometrie die Abbildung eines räumlichen Gegenstandes auf eine Ebene).

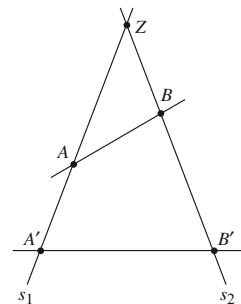


**Bild III-13**

Zentralprojektion von  $Z$  einer Strecke  $\overline{AB}$

## 4 Geometrische Örter

Ein geometrischer Ort ist eine Punktmenge, die alle Elemente mit einer bestimmten geometrischen Eigenschaft (oder mit mehreren Eigenschaften) enthält.

In der Planimetrie sind die geometrischen Örter Linien, daher werden sie auch geometrische Ortslinien genannt. In der Stereometrie sind die geometrischen Örter Flächen.

### ■ Beispiele für geometrische Ortslinien:

1. Der geometrische Ort aller Punkte, die von einem festen Punkt  $M$  die feste Entfernung  $r$  haben, ist der Kreis um  $M$  mit dem Radius  $r$ .
2. Der geometrische Ort aller Punkte, die von einer gegebenen Geraden  $g$  den festen Abstand  $d$  haben, ist eine Parallele zu  $g$  im Abstand  $d$ .
3. Geometrischer Ort aller Punkte, die von zwei festen Punkten  $A$  und  $B$  gleich weit entfernt sind, ist die Mittelsenkrechte auf der Strecke  $\overline{AB}$ .
4. Geometrischer Ort aller Punkte, die von zwei festen nicht parallelen Geraden  $g$  und  $h$  den gleichen Abstand haben, sind die beiden (zueinander senkrechten) Winkelhalbierenden zwischen  $g$  und  $h$ .

## 5 Dreiecke

### 5.1 Allgemeine Dreiecke

Ein Dreieck besteht aus drei nicht auf einer Geraden liegenden Punkten  $A, B, C$  und den Strecken  $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ .

Die Punkte  $A, B, C$  sind die Eckpunkte des Dreiecks, die Strecken  $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$  sind die Seiten des Dreiecks, und ihre Längen  $|\overline{AB}|, |\overline{AC}|, |\overline{BC}|$  sind die Seitenlängen des Dreiecks.

Meistens werden die Seitenlängen mit  $a, b, c$  und die Innenwinkel des Dreiecks mit  $\alpha, \beta, \gamma$  bezeichnet, und zwar in der Weise, dass der Punkt  $A$  der Seite mit der Länge  $a$ , der Punkt  $B$  der Seite mit der Länge  $b$ , der Punkt  $C$  der Seite mit der Länge  $c$  gegenüberliegt und dass der Winkel  $\alpha$  den Scheitelpunkt  $A$ , der Winkel  $\beta$  den Scheitelpunkt  $B$  und der Winkel  $\gamma$  den Scheitelpunkt  $C$  hat.

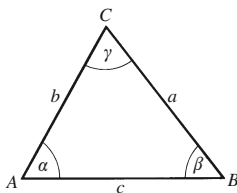


**Bild III-14**  
Bezeichnungen im Dreieck

Abkürzend verwendet man für ein Dreieck den großen griechischen Buchstaben  $\Delta$ , und für ein Dreieck mit den Eckpunkten  $A, B, C$  schreibt man  $\Delta(ABC)$ .

Die Winkelsumme in jedem Dreieck beträgt  $180^\circ$ .

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

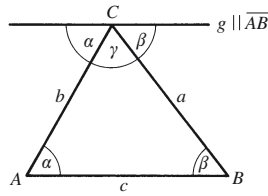


**Bild III-15** Winkelsumme gleich  $180^\circ$

Im Dreieck ist die Summe zweier Seitenlängen stets größer als die dritte.

$$a + b > c, \quad a + c > b, \quad b + c > a$$

Diese drei Ungleichungen zusammen heißen Dreiecksungleichungen.

Die Supplementwinkel der Dreieckswinkel nennt man Außenwinkel des Dreiecks. Die Summe der Außenwinkel  $\alpha', \beta', \gamma'$  in jedem Dreieck beträgt  $360^\circ$ .

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^\circ$$

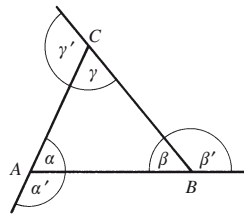


**Bild III-16**  
Außenwinkelsumme  
gleich  $360^\circ$

In einem Dreieck liegt der größeren Seite stets der größere Winkel gegenüber.

$$a > b > c \Leftrightarrow \alpha > \beta > \gamma$$

In einem spitzwinkligen Dreieck sind alle drei Innenwinkel kleiner als  $90^\circ$ , in einem rechtwinkligen Dreieck ist ein Winkel gleich  $90^\circ$ , in einem stumpfwinkligen Dreieck ist ein Winkel größer als  $90^\circ$ .

Der Umfang  $u$  eines Dreiecks ist die Summe der Seitenlängen.

$$u = a + b + c$$

Der Flächeninhalt  $A$  eines Dreiecks berechnet sich nach der Grundformel

$$A = \frac{1}{2} \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}$$

Daraus ergeben sich folgende Formeln für den Flächeninhalt  $A$  (vgl. Kapitel VI)

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c \\ &= \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta \\ &= \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha \\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \\ s &= \frac{1}{2} (a+b+c) \end{aligned}$$

Die letzte Formel ist die sogenannte Heronische Flächenformel (nach dem griechischen Mathematiker Heron von Alexandria, 1. Jahrhundert u. Z.), damit ist die Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks allein mit den Seitenlängen möglich.

## 5.2 Gleichschenklige Dreiecke

Ein Dreieck mit zwei gleich langen Seiten heißt gleichschenklige.

Die gleich langen Seiten heißen Schenkel und die dritte Seite Basis des Dreiecks. Die Winkel an der Basis sind die Basiswinkel. Der der Basis gegenüberliegende Punkt heißt Spitze.

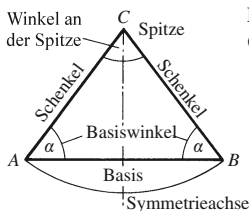


**Bild III-17**  
Gleichschenkliges Dreieck

Die Basiswinkel sind gleich groß. Höhe, Seitenhalbierende, Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende der Basis sind identisch (vgl. Abschnitt III.5.5). Sind umgekehrt in einem Dreieck je zwei dieser Strecken gleich, dann ist das Dreieck gleichschenklige.

## 5.3 Gleichseitige Dreiecke

Ein Dreieck mit drei gleich langen Dreiecksseiten heißt gleichseitig.

In einem gleichseitigen Dreieck sind auch alle Winkel gleich groß, jeder Winkel beträgt also  $60^\circ$ .

Das gleichseitige Dreieck hat drei Symmetrieachsen. Die Höhen, Winkelhalbierenden, Seitenhalbierenden und Mittelsenkrechten fallen beim gleichseitigen

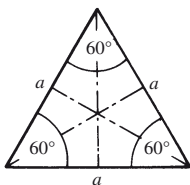


**Bild III-18**  
Gleichseitiges Dreieck

Dreieck zusammen (vgl. Abschnitt III.5.5). Folglich fallen auch die Mittelpunkte des Inkreises und des Umkreises mit dem Schwerpunkt des Dreiecks zusammen.

Ein gleichseitiges Dreieck heißt auch reguläres oder regelmäßiges Dreieck.

## 5.4 Rechtwinklige Dreiecke

Ein Dreieck mit einem rechten Winkel, also mit einem Winkel von  $90^\circ$ , heißt rechtwinklig.

Die Summe der beiden anderen (spitzen) Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck ist ebenfalls  $90^\circ$ .

Die dem rechten Winkel gegenüberliegende Dreiecksseite ist die Hypotenuse, die beiden anderen Seiten (also die Schenkel des rechten Winkels) sind die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks.

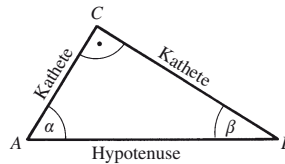


**Bild III-19** Rechtwinkliges Dreieck ( $\alpha + \beta = 90^\circ$ )

Für das rechtwinklige Dreieck gelten einige interessante Flächensätze (vgl. Abschnitt III.5.6).

## 5.5 Besondere Geraden, Strecken und Kreise

Der Umkreis eines Dreiecks ist der Kreis durch die drei Eckpunkte des Dreiecks, der dem Dreieck umschriebene Kreis.

Der Inkreis eines Dreiecks berührt die drei Dreiecksseiten von innen, er hat die Dreiecksseiten also als Tangenten. Der Inkreis ist der dem Dreieck eingeschriebene Kreis.

Die Mittelsenkrechte einer Strecke ist die Senkrechte durch den Mittelpunkt der Strecke. Beim Dreieck schneiden sich die drei Mittelsenkrechten in einem Punkt  $M$ , dem Mittelpunkt des Umkreises. Bei spitzwinkligen Dreiecken liegt  $M$  innerhalb des Dreiecks, bei stumpfwinkligen Dreiecken außerhalb und bei rechtwinkligen Dreiecken auf dem Rand (Mittelpunkt der Hypotenuse) des Dreiecks.

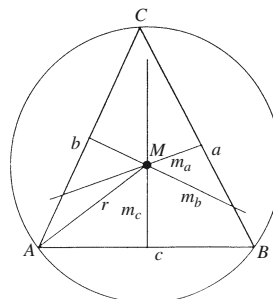


**Bild III-20**  
Dreieck mit Umkreis

Eine Höhe in einem Dreieck ist der Teil des Lotes von einem Eckpunkt auf die gegenüberliegende Seite, der von dem Eckpunkt und dieser Seite (bzw. ihrer Verlängerung) begrenzt wird.

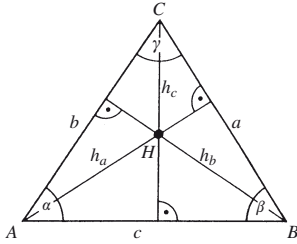


**Bild III-21** Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt  $H$

Die drei Höhen eines Dreiecks (bzw. ihre Verlängerungen) schneiden sich in einem Punkt  $H$ . Der Höhenschnittpunkt des Dreiecks heißt Orthozentrum des Dreiecks.

Bei spitzwinkligen Dreiecken liegt der Höhenschnittpunkt  $H$  im Innern des Dreiecks, bei einem rechtwinkligen Dreieck fällt  $H$  mit dem Scheitelpunkt des rechten Winkels zusammen (zwei Höhen fallen mit den Katheten zusammen), bei stumpfwinkligen Dreiecken liegt der Höhenschnittpunkt  $H$  außerhalb des Dreiecks.

Die Längen der Höhen im Dreieck werden mit  $h_a$ ,  $h_b$ ,  $h_c$  bezeichnet.

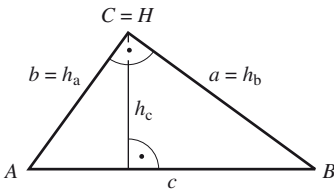


**Bild III-22** In einem rechtwinkligen Dreieck fällt  $H$  mit dem Scheitelpunkt des rechten Winkels zusammen

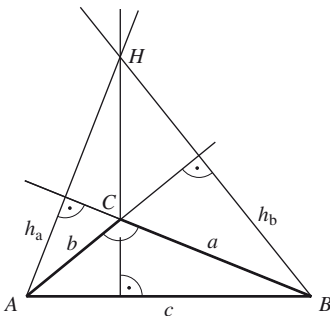


**Bild III-23** In einem stumpfwinkligen Dreieck liegt  $H$  außerhalb des Dreiecks

Sind  $a, b, c$  die Dreiecksseiten und  $\alpha, \beta, \gamma$  die Winkel des Dreiecks, so gilt (vgl. Kapitel VI)

$$h_a = c \sin \beta = b \sin \gamma, \quad h_b = c \sin \alpha = a \sin \gamma, \\ h_c = a \sin \beta = b \sin \alpha$$

Die Längen der Höhen verhalten sich umgekehrt proportional wie die zugehörigen Seitenlängen.

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

Eine Winkelhalbierende ist eine Gerade durch den Scheitelpunkt eines Winkels, so dass die beiden Winkel zwischen Gerade und je einem Schenkel gleich sind.

Im Dreieck sind die drei Winkelhalbierenden Strecken  $\overline{PQ}$ , wobei  $P$  ein Eckpunkt (Scheitelpunkt des entsprechenden Winkels) und  $Q$  der Schnittpunkt mit der gegenüberliegenden Seite ist. Die drei Winkelhalbierenden im Dreieck schneiden sich in einem Punkt, dem Mittelpunkt des Inkreises.

Die Längen der Winkelhalbierenden im Dreieck werden mit  $w_\alpha, w_\beta, w_\gamma$  bezeichnet.

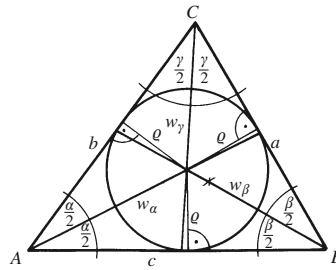


**Bild III-24** Dreieck mit Inkreis

Für die Winkelhalbierenden gilt (vgl. Kapitel VI)

$$w_\alpha = \frac{2bc \cos \frac{\alpha}{2}}{b+c}, \quad w_\beta = \frac{2ac \cos \frac{\beta}{2}}{a+c}, \\ w_\gamma = \frac{2ab \cos \frac{\gamma}{2}}{a+b}$$

Eine Winkelhalbierende teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der Längen der anliegenden Seiten.

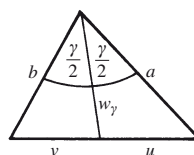


**Bild III-25** Winkelhalbierende im Dreieck ( $u : v = a : b$ )



Eine Seitenhalbierende (auch Median genannt) in einem Dreieck ist die Verbindungsstrecke einer Ecke mit dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite.

Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt  $S$ , dem Schwerpunkt des Dreiecks. Der Schwerpunkt teilt die Seitenhalbierenden vom Eckpunkt aus im Verhältnis 2:1.

Die Längen der Seitenhalbierenden im Dreieck werden mit  $s_a, s_b, s_c$  bezeichnet.

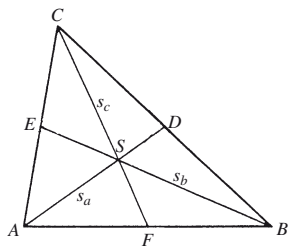


**Bild III-26** Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich im Schwerpunkt  $S$   
 $(|AS| : |SD| = |BS| : |SE| = |CS| : |SF| = 2 : 1)$

Für die Seitenhalbierenden gilt (vgl. Kapitel VI)

$$\begin{aligned} s_a &= \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha} \\ s_b &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + c^2 + 2ac \cos \beta} \\ s_c &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \gamma} \end{aligned}$$

Mit Hilfe unterschiedlicher Größen des Dreiecks lassen sich die Radien des Inkreises und des Umkreises berechnen. Dabei ist  $s$  der halbe Umfang des Dreiecks,  $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ .

Radius  $q$  des Inkreises

$$\begin{aligned} q &= \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} \\ &= s \cdot \tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\beta}{2} \cdot \tan \frac{\gamma}{2} \end{aligned}$$

Radius  $r$  des Umkreises

$$\begin{aligned} r &= \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \gamma} \\ &= \frac{bc}{2h_a} = \frac{ac}{2h_b} = \frac{ab}{2h_c} \\ &= \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} \end{aligned}$$

## 5.6 Flächensätze im rechtwinkligen Dreieck

### 1. Kathetensatz

In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete gleich dem Rechteck aus Hypotenuse und zugehörigem Hypotenusenabschnitt.

Der Hypotenusenabschnitt ist die Projektion (Parallelprojektion) der entsprechenden Kathete auf die Hypotenuse.

Sind  $a, b$  die Kathetenlängen,  $c$  die Hypotenusenlänge und  $p, q$  die zugehörigen Hypotenusenabschnitte des Dreiecks, so gilt

$$a^2 = pc, \quad b^2 = qc$$

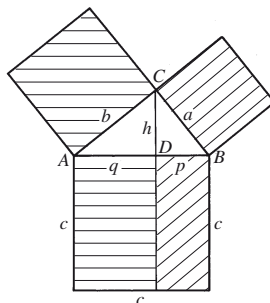


**Bild III-27**  
Kathetensatz

Der Kathetensatz heißt auch erster Satz des Euklid (nach dem hellenistischen Mathematiker Euklid von Alexandria, ~ 365–300 v. u. Z.).

### 2. Satz des Pythagoras

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadrate über den Katheten gleich dem Quadrat der Hypotenuse.

Sind  $a$  und  $b$  die Kathetenlängen und  $c$  die Hypotenusenlänge, so gilt

$$a^2 + b^2 = c^2$$

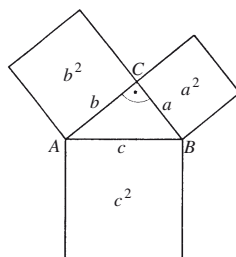


**Bild III-28**  
Satz des Pythagoras:  
 $a^2 + b^2 = c^2$

Einfacher Beweis des Satzes von Pythagoras:

In ein Quadrat  $Q_1$  der Seitenlänge  $a + b$  wird ein Quadrat  $Q_2$  der Seitenlänge  $c$  so gelegt, dass die Eckpunkte von  $Q_2$  die Seiten von  $Q_1$  im Verhältnis  $a : b$  teilen. Dann haben die vier innerhalb von  $Q_1$  entstandenen Dreiecke alle den Flächen-

inhalt  $\frac{1}{2} ab$ , und deshalb gilt:

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} ab \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

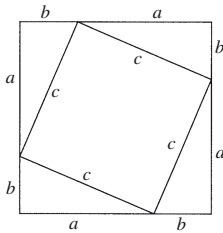


**Bild III-29**  
Zum Beweis  
des Satzes  
von Pythagoras

### 3. Höhensatz

In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe auf der Hypotenuse gleich dem Rechteck aus den beiden durch die Höhe gebildeten Hypotenusenabschnitten.

Bezeichnet man die Höhe mit  $h$  und die Hypotenusenabschnitte mit  $p$  und  $q$ , so gilt

$$h^2 = pq$$

Beweis des Höhensatzes:

Nach dem Satz des Pythagoras gilt  $a^2 = h^2 + p^2$  und nach dem Kathetensatz  $a^2 = pc = p(p+q)$ .

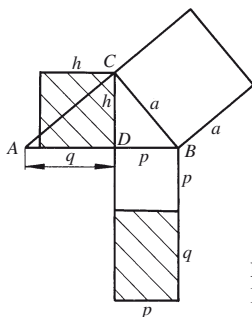


**Bild III-30**  
Höhensatz

Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt  $0 = h^2 + p^2 - (p^2 + pq) = h^2 - pq$ , woraus  $h^2 = pq$  folgt.

Der Höhensatz heißt auch zweiter Satz des Euklid.

**Gegeben:**  $b, c, \beta \geq 90^\circ$  (Seite, Seite, Winkel)

**Konstruktion:** Nach Konstruktion von  $\overline{AB}$  und Antragen von  $\beta$  wie oben sind hier folgende Fälle möglich:

- Der Kreis um A mit dem Radius  $b_f$  schneidet den freien Schenkel des gegebenen Winkels  $\beta$  nicht; keine Lösung.
- Der Kreis um A mit dem Radius  $b_g$  geht durch den Punkt B; „Lösung“ ist ein zur Strecke  $(\overline{AB})$  entartetes Dreieck.

- Der Kreis um A mit dem Radius  $b_h$  schneidet den freien Schenkel des gegebenen Winkels  $\beta$  in C; eine Lösung.

Der Kongruenzsatz SSW gilt hier nur für den Fall h).

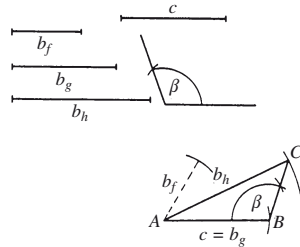


**Bild III-31** Grundkonstruktion SSW  
(gegeben:  $b, c, \beta \geq 90^\circ$ )

### 3. Grundkonstruktion SWS

**Gegeben:**  $b, a, c$  (Seite, Winkel, Seite)

**Konstruktion:** Den Schenkeln des Winkels  $\alpha$  gibt man die Längen  $b = |\overline{AC}|$  und  $c = |\overline{AB}|$ . Man verbindet B und C.

**Bedingung:**  $\alpha < 180^\circ$

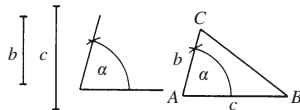


**Bild III-32** Grundkonstruktion SWS

### 4. Grundkonstruktion SSS

**Gegeben:**  $a, b, c$  (Seite, Seite, Seite).

**Konstruktion:** Man zeichnet  $c = |\overline{AB}|$  und schlägt um A einen Kreisbogen mit dem Radius  $b$  und um B einen Kreisbogen mit dem Radius  $a$ . Der Eckpunkt C ist der Schnittpunkt der Kreisbögen, der „oberhalb“ von  $\overline{AB}$  liegt (A, B, C folgen im mathematisch positiven Drehsinn, also entgegen dem Uhrzeigersinn aufeinander). Anschließend wird noch C mit den Eckpunkten A und B verbunden.

**Bedingungen:**  $a < b + c$ ,  $b < a + c$ ,  $c < a + b$  (Dreiecksungleichungen)

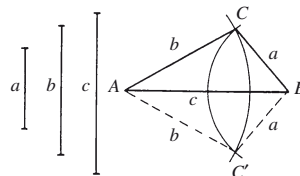


**Bild III-33** Grundkonstruktion SSS

**Anmerkung:** Wenn sich, wie bei der letzten Konstruktion, zwei spiegelbildlich gleiche Lösungen er-

geben (denn die Kreise schneiden sich zweimal, in  $C$  und  $C'$ , falls die Dreiecksungleichungen erfüllt sind), wählt man diejenige aus, bei der die Punkte  $A, B, C$  entgegen dem Uhrzeigersinn, also im mathematisch positiven Sinn, aufeinander folgen.

## 6 Vierecke

### 6.1 Allgemeine Vierecke

Ein Viereck besteht aus vier Punkten  $A, B, C, D$ , von denen keine drei auf einer Geraden liegen, und den Strecken  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ .

Die Punkte  $A, B, C, D$  sind die Eckpunkte des Vierecks, die Strecken  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$  sind die Seiten des Vierecks, und ihre Längen  $|\overline{AB}|, |\overline{BC}|, |\overline{CD}|, |\overline{DA}|$  sind die Seitenlängen des Vierecks.

Meistens werden die Seitenlängen mit  $a, b, c, d$  und die Innenwinkel des Vierecks mit  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  bezeichnet, und zwar so, dass  $a = |\overline{AB}|$ ,  $b = |\overline{BC}|$ ,  $c = |\overline{CD}|$ ,  $d = |\overline{DA}|$  und dass der Winkel  $\alpha$  den Scheitelpunkt  $A$ , der Winkel  $\beta$  den Scheitelpunkt  $B$ , der Winkel  $\gamma$  den Scheitelpunkt  $C$  und der Winkel  $\delta$  den Scheitelpunkt  $D$  hat.

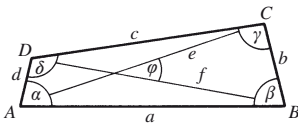


Bild III-34 Bezeichnungen im Viereck

Die Strecken  $\overline{AC}$  und  $\overline{BD}$  heißen Diagonalen des Vierecks, ihre Längen werden meist mit  $e$  und  $f$  bezeichnet:  $e = |\overline{AC}|$ ,  $f = |\overline{BD}|$ .

Abkürzend verwendet man für ein Viereck das Symbol  $\square$ , und für ein Viereck mit den Eckpunkten  $A, B, C, D$  schreibt man  $\square(ABCD)$ .

Die Winkelsumme in einem beliebigen Viereck beträgt  $360^\circ$ .

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$$

Für die Längen der Seiten und der Diagonalen in einem Viereck gilt folgender Zusammenhang:

In einem Viereck ist das Produkt der Diagonalenlängen kleiner oder gleich der Summe der Produkte der Längen je zwei gegenüberliegender Seiten.

$$ef \leq ac + bd$$

Die Gleichheit gilt genau dann, wenn das Viereck ein Sehnenviereck ist (bei einem Sehnenviereck liegen alle vier Punkte auf einem Kreis).

Diese Aussage ist der verallgemeinerte Satz des Ptolemäus (vgl. Abschnitt III.6.8).

Der Umfang  $u$  eines Vierecks ist die Summe der Seitenlängen.

$$u = a + b + c + d$$

Für den Flächeninhalt  $A$  eines Vierecks gilt (vgl. Kapitel VI):

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} (ad \sin \alpha + bc \sin \gamma) = \frac{1}{2} (ab \sin \beta + cd \sin \delta) \\ &= \frac{1}{2} ef \sin \varphi \\ &= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2}} \\ &= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2 \frac{\beta + \delta}{2}} \end{aligned}$$

Dabei ist  $\varphi$  der Winkel zwischen den Diagonalen und  $s$  der halbe Umfang des Vierecks, also  $s = \frac{1}{2} (a + b + c + d)$ .

Die beiden letzten Formeln sind Verallgemeinerungen der Heronischen Flächenformel für Dreiecke.

### 6.2 Trapeze

Ein Trapez ist ein Viereck, bei dem zwei Seiten zueinander parallel sind.

Die parallelen Seiten heißen Grundlinien und die anderen beiden Seiten Schenkel des Trapezes. Die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte der Schenkel heißt Mittellinie, sie ist parallel zu den Grundlinien. Die Höhe eines Trapezes ist der Abstand der parallelen Grundlinien.

Sind die Schenkel gleich lang, so heißt das Trapez gleichschenkelig.

Ist  $m$  die Länge der Mittellinie, so gilt  $m = \frac{a+c}{2}$ .

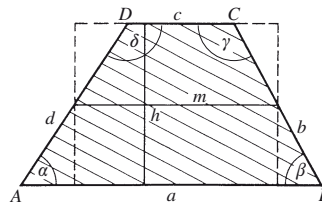


Bild III-35 Trapez

Das Trapez mit den Grundlinienlängen  $a$  und  $c$  und der Höhe  $h$  ist flächengleich einem Rechteck mit den Seitenlängen  $m$  und  $h$ .

Für den Flächeninhalt  $A$  des Trapezes gilt

$$A = mh = \frac{a+c}{2} h$$

### 6.3 Parallelogramme

Ein Parallelogramm ist ein Viereck, bei dem die beiden jeweils einander gegenüberliegenden Seiten parallel sind.

Einander gegenüberliegende Seiten im Parallelogramm sind gleich lang; einander gegenüberliegende Winkel sind gleich groß; benachbarte Winkel ergänzen sich zu  $180^\circ$ ; die Diagonalen halbieren sich in ihrem Schnittpunkt.

Das Parallelogramm mit den Seitenlängen  $a$  und  $b$  ist flächengleich einem Rechteck mit den Seitenlängen  $a$  und  $h_a$  (oder  $b$  und  $h_b$ ).

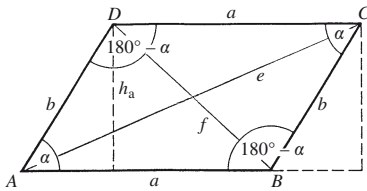


**Bild III-36** Parallelogramm

Für den Umfang  $u$  und den Flächeninhalt  $A$  eines Parallelogramms mit den Seitenlängen  $a$  und  $b$  gilt

|               |                                    |
|---------------|------------------------------------|
| Umfang        | $u = 2a + 2b$                      |
| Flächeninhalt | $A = ah_a = bh_b = ab \sin \alpha$ |

Für die Längen der Seiten und der Diagonalen in einem Parallelogramm gilt folgender Zusammenhang: In einem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der Seitenlängen gleich der Summe der Quadrate der Diagonalenlängen, also

$$2a^2 + 2b^2 = e^2 + f^2$$

Diese Aussage ist der Satz von Apollonios (nach dem hellenistischen Geometer und Astronom Apollonios von Perge,  $\sim 262 - 190$  v. u. Z.).

### 6.4 Rhomben

Ein Rhombus ist ein Parallelogramm mit gleich langen Seiten.

Damit gelten für Rhomben alle Eigenschaften von Parallelogrammen. Darüber hinaus gilt: Die Diagonalen eines Rhombus halbieren sich in ihrem Schnittpunkt, sie halbieren alle Winkel, und sie stehen senkrecht aufeinander. Statt Rhombus sagt man auch Raute.

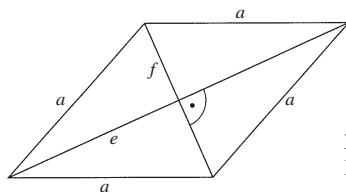


**Bild III-37**  
Rhombus

Für den Umfang  $u$  und den Flächeninhalt  $A$  eines Rhombus der Seitenlänge  $a$  gilt ( $e$  und  $f$  sind die Längen der Diagonalen)

|               |                                        |
|---------------|----------------------------------------|
| Umfang        | $u = 4a$                               |
| Flächeninhalt | $A = a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} ef$ |

### 6.5 Rechtecke

Ein Rechteck ist ein Parallelogramm mit vier rechten Winkeln.

Die Diagonalen eines Rechtecks halbieren sich in ihrem Schnittpunkt und sind gleich lang, es gilt  $e = f = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

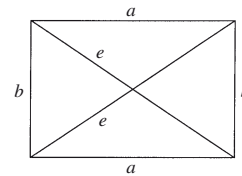


**Bild III-38**  
Rechteck

Für den Umfang  $u$  und den Flächeninhalt  $A$  eines Rechtecks mit den Seitenlängen  $a$  und  $b$  gilt

|               |               |
|---------------|---------------|
| Umfang        | $u = 2a + 2b$ |
| Flächeninhalt | $A = ab$      |

### 6.6 Quadrate

Ein Quadrat ist ein Rechteck mit gleich langen Seiten. Die Diagonalen eines Quadrats sind gleich lang und stehen senkrecht aufeinander. Es gilt  $e = f = a\sqrt{2}$ .

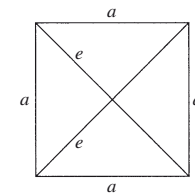


**Bild III-39**  
Quadrat

Ein Quadrat ist auch ein Rhombus (eine Raute) mit vier rechten Winkeln.

Für den Umfang  $u$  und den Flächeninhalt  $A$  eines Quadrats der Seitenlänge  $a$  gilt

|               |                             |
|---------------|-----------------------------|
| Umfang        | $u = 4a$                    |
| Flächeninhalt | $A = a^2 = \frac{1}{2} e^2$ |

Ein Quadrat heißt auch reguläres oder regelmäßiges Viereck.

## 6.7 Drachen

Ein Drachen ist ein Viereck mit zwei Paaren gleich langer benachbarter Seiten.

Statt Drachen sagt man auch Drachenviereck.

Die Diagonalen eines Drachens stehen senkrecht aufeinander.

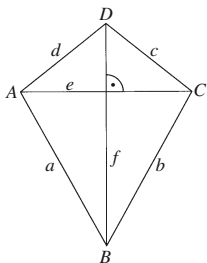


**Bild III-40**  
Drachen

Ein Drachen mit vier gleich langen Seiten ist ein Rhombus (eine Raute).

Sind  $e$  und  $f$  die Längen der Diagonalen, dann gilt für den Flächeninhalt  $A$  des Drachens

$$A = \frac{1}{2} ef$$

## 6.8 Sehnenvierecke

Ein Sehnenviereck ist ein Viereck, bei dem alle vier Eckpunkte auf einem Kreis liegen.

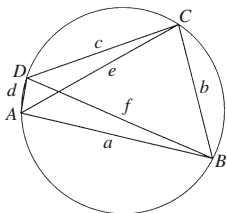


**Bild III-41**  
Sehnenviereck

Der Kreis heißt Umkreis des Vierecks, die Seiten sind Sehnen dieses Kreises.

Ein Viereck ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn gegenüberliegende Winkel Supplementwinkel sind, sich also zu  $180^\circ$  ergänzen.

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$

In einem Sehnenviereck ist das Produkt der Diagonalenlängen gleich der Summe der Produkte der Längen je zwei gegenüberliegender Seiten (Satz von Ptolemäus).

$$ef = ac + bd$$

Die Formel wurde hergeleitet und bewiesen von dem hellenistischen Geometer und Astronom Ptolemaios von Alexandria ( $\sim 83-161$  u. Z.).

In einem Sehnenviereck verhalten sich die Längen der Diagonalen wie die Summen der Produkte der

Längen jener Seitenpaare, die sich in den Endpunkten der Diagonalen treffen (Satz von Brahmagupta).

$$\frac{e}{f} = \frac{ab + cd}{ad + bc}$$

Die Formel wurde von dem Inder Brahmagupta (6./7. Jahrhundert u. Z.) entdeckt, der erste Beweis stammt von dem deutschen Mathematiker Johannes Müller, genannt Regiomontanus (1436–1476).

Durch Multiplikation bzw. Division dieser beiden Formeln erhält man Ausdrücke für die Längen der beiden Diagonalen.

$$e = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}},$$

$$f = \sqrt{\frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}}$$

Für den Flächeninhalt  $A$  des Sehnenvierecks gilt, wenn  $s$  der halbe Umfang des Sehnenvierecks ist, also  $s = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$ ,

$$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

## 6.9 Tangentenvierecke

Ein Tangentenviereck ist ein Viereck, bei dem alle vier Seiten denselben Kreis berühren.

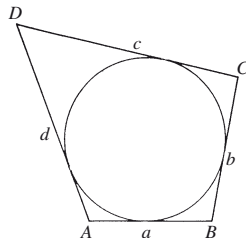


**Bild III-42**  
Tangentenviereck

Der Kreis heißt Inkreis des Vierecks, die Seiten sind Tangenten dieses Kreises.

Ein Viereck ist genau dann ein Tangentenviereck, wenn die Summe der Längen zweier gegenüberliegender Seiten gleich der Summe der Längen der beiden anderen Seiten ist.

$$a + c = b + d$$

## 7 Reguläre $n$ -Ecke

Ein  $n$ -Eck besteht aus  $n$  Punkten, den Eckpunkten des  $n$ -Ecks, und  $n$  Seiten, den Strecken zwischen den Eckpunkten.

Haben alle Seiten die gleiche Länge und sind alle Innenwinkel gleich groß, dann heißt das  $n$ -Eck regulär oder regelmäßig.

Bei einem regulären  $n$ -Eck liegen alle Eckpunkte auf einem Kreis, dem Umkreis des  $n$ -Ecks, und alle Seiten sind Tangenten eines eingeschriebenen Kreises, dem Inkreis des  $n$ -Ecks. Die Seiten sind Sehnen des Umkreises.

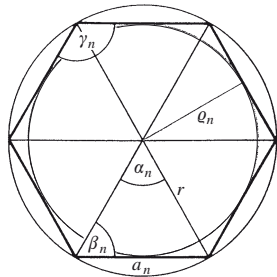


**Bild III-43** Bezeichnungen im regulären  $n$ -Eck

Ein reguläres Dreieck ist ein gleichseitiges Dreieck, ein reguläres Viereck ist ein Quadrat. Die Summe der Innenwinkel in einem beliebigen  $n$ -Eck ist  $(n-2) \cdot 180^\circ$ . Da alle  $n$  Innenwinkel  $\gamma_n$  gleich groß sind, gilt

Innenwinkel  $\gamma_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$

Durch die Verbindungsstrecken der Eckpunkte mit dem Mittelpunkt des Umkreises wird das reguläre  $n$ -Eck in  $n$  kongruente Dreiecke zerlegt. Für die Ba-

siswinkel  $\beta_n$  und die Zentriwinkel  $\alpha_n$  gilt

Basiswinkel  $\beta_n = \frac{1}{2} \gamma_n = \frac{n-2}{n} \cdot 90^\circ$   
Zentriwinkel  $\alpha_n = \frac{360^\circ}{n}$

Für die Seitenlänge  $a_n$ , den Umkreisradius  $r$  und den Inkreisradius  $\varrho_n$  des regulären  $n$ -Ecks gilt (vgl. Kapitel VI):

Seitenlänge  $a_n = 2 \sqrt{r^2 - \varrho_n^2} = 2r \sin \frac{\alpha_n}{2}$   
 $= 2\varrho_n \tan \frac{\alpha_n}{2}$   
Umkreisradius  $r = \frac{a_n}{2 \sin \frac{\alpha_n}{2}}$   
Inkreisradius  $\varrho_n = \frac{a_n}{2} \cot \frac{\alpha_n}{2}$

Für den Umfang  $u_n$  und den Flächeninhalt  $A_n$  des regulären  $n$ -Ecks ergibt sich dann

Umfang  $u_n = na_n$   
Flächeninhalt  $A_n = \frac{1}{2} na_n \varrho_n = \frac{1}{2} nr^2 \sin \alpha_n$   
 $= \frac{1}{4} na_n^2 \cot \frac{\alpha_n}{2}$

Mit wachsendem  $n$  nähert der Umfang  $u_n$  sich dem Umfang  $2r \cdot \pi = 2r \cdot 3,1415 \dots$  und der Flächeninhalt  $A_n$  sich dem Flächeninhalt  $\pi r^2$  des Kreises mit dem Radius  $r$  an.

Übersicht über die regulären  $n$ -Ecke für kleine  $n$  ( $r$  = Umkreisradius)

| $n$ | Innenwinkel<br>$\gamma_n$ | Zentriwinkel<br>$\alpha_n$ | Seitenlänge $a_n$                   | Umfang $u_n$            | Flächeninhalt $A_n$                     |
|-----|---------------------------|----------------------------|-------------------------------------|-------------------------|-----------------------------------------|
| 3   | $60^\circ$                | $120^\circ$                | $r \sqrt{3}$                        | $2r \cdot 2,5980 \dots$ | $\frac{3}{4} \sqrt{3} r^2$              |
| 4   | $90^\circ$                | $90^\circ$                 | $r \sqrt{2}$                        | $2r \cdot 2,8284 \dots$ | $2r^2$                                  |
| 5   | $108^\circ$               | $72^\circ$                 | $\frac{r}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ | $2r \cdot 2,9389 \dots$ | $\frac{5}{8} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} r^2$ |
| 6   | $120^\circ$               | $60^\circ$                 | $r$                                 | $2r \cdot 3$            | $\frac{3}{2} \sqrt{3} r^2$              |
| 8   | $135^\circ$               | $45^\circ$                 | $r \sqrt{2 - \sqrt{2}}$             | $2r \cdot 3,0614 \dots$ | $2 \sqrt{2} r^2$                        |
| 10  | $144^\circ$               | $36^\circ$                 | $\frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1)$        | $2r \cdot 3,0901 \dots$ | $\frac{5}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} r^2$ |
| 12  | $150^\circ$               | $30^\circ$                 | $r \sqrt{2 - \sqrt{3}}$             | $2r \cdot 3,1058 \dots$ | $3r^2$                                  |

## 8 Polygone

Ein Polygon ist ein geschlossener Streckenzug der Ebene.

Ein Polygon oder Vieleck mit  $n$  Eckpunkten ist ein  $n$ -Eck. Die Strecken zwischen den Eckpunkten sind die Seiten des Polygons.

Ein einfaches Polygon teilt die Ebene in zwei Gebiete, das Innere und das Äußere, die durch die Seiten des Polygons getrennt werden.

Die Länge des geschlossenen Streckenzugs ist der Umfang des Polygons, und die Fläche des Inneren ist der Flächeninhalt des Polygons. Eine Verbindungsstrecke zweier nicht benachbarter Eckpunkte ist eine Diagonale des Polygons. (Zwei Eckpunkte heißen benachbart, wenn es zwischen ihnen eine Seite gibt.) Jeder Eckpunkt kann also mit  $n - 3$  anderen Eckpunkten durch eine Diagonale verbunden werden (denn jeder der  $n$  Eckpunkte hat  $n - 3$  andere Eckpunkte nicht als Nachbarn). Die Innenwinkel des Polygons haben als Scheitelpunkte die Eckpunkte des Polygons. In einem konvexen Polygon liegen alle Diagonalen im Innern des Polygons, und alle Innenwinkel sind kleiner als  $180^\circ$ .

Da man das Innere eines  $n$ -Ecks durch  $n - 2$  sich nicht überschneidende Diagonalen in  $n - 2$  Dreiecke zerlegen kann und die Winkelsumme im Dreieck  $180^\circ$  ist, beträgt die Summe der Innenwinkel in einem beliebigen  $n$ -Eck  $(n - 2) \cdot 180^\circ$ .

In einem regulären (regelmäßigen) Polygon haben alle Seiten die gleiche Länge, und alle Innenwinkel sind gleich groß.

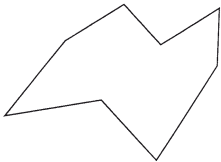


**Bild III-44**  
Einfaches Polygon

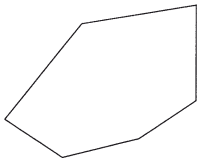


**Bild III-45**  
Konvexes Polygon

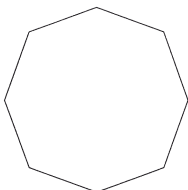


**Bild III-46**  
Reguläres Polygon

## 9 Kreise

### 9.1 Definitionen

Ein Kreis ist der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, die von einem festen Punkt  $M$  einen konstanten Abstand  $r$  haben.

Der Punkt  $M$  ist der Mittelpunkt und  $r$  der Radius des Kreises.

Zur Unterscheidung von der durch einen Kreis in der Ebene abgegrenzten Fläche, der Kreisfläche, wird der Kreis selbst auch als Kreisperipherie oder Kreisrand bezeichnet.

Einen Kreis mit dem Radius  $r = 0$  nennt man entartet.

Ein Kreis mit dem Radius  $r = 1$  heißt Einheitskreis.

Kreise kürzt man oft mit  $k$  ab, und für die Peripherie des Kreises mit dem Radius  $r$  und dem Mittelpunkt  $M$  schreibt man  $k(M, r)$ .

Jede Gerade durch zwei Punkte der Kreisperipherie nennt man Sekante. Der zwischen den Punkten gelegene Teil der Sekante heißt Sehne. Eine Sehne durch den Mittelpunkt heißt Durchmesser des Kreises. Durchmesser sind die größten Sehnen des Kreises. Für die Länge  $d$  eines Durchmessers gilt  $d = 2r$ .

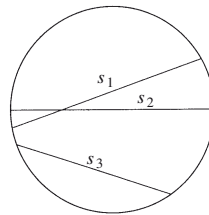


**Bild III-47**  
Sehnen eines Kreises  
(Sehne  $s_2$  ist auch Durchmesser)

Winkel, deren Scheitelpunkt ein Punkt der Kreisperipherie ist und deren Schenkel Sekanten des Kreises sind, heißen Peripherie- oder Umfangswinkel.

Winkel, deren Scheitelpunkt der Kreismittelpunkt ist, nennt man Zentri- oder Mittelpunktswinkel. Der durch einen Peripherie- oder Zentriwinkel ausgeschnittene Teil der Kreisperipherie heißt Kreisbogen.

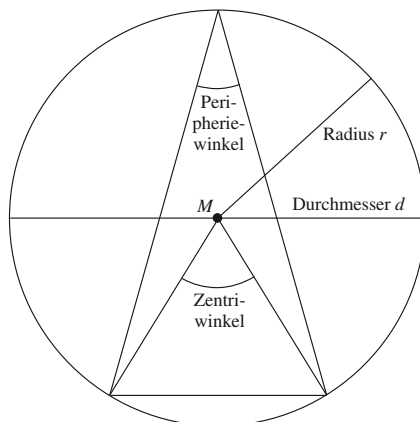


**Bild III-48** Bezeichnungen am Kreis

Für den Umfang  $u$  und die Fläche  $A$  eines Kreises mit dem Radius  $r$  und dem Durchmesser  $d$  gilt

$$\begin{array}{ll} \text{Kreisumfang} & u = 2\pi r = \pi d \\ \text{Kreisfläche} & A = \pi r^2 = \frac{\pi}{4} d^2 \end{array}$$

Das Verhältnis des Umfangs zum Durchmesser eines beliebigen Kreises definiert die so genannte Kreiszahl  $\pi = 3,141\,592\,653\,5\dots$ . Die Zahl  $\pi$  (kleines „Pi“) ist transzendent (vgl. Abschnitt I.3).

Ein Kreis ist festgelegt durch den Mittelpunkt und einen weiteren Punkt oder durch drei Punkte (die nicht alle auf einer Geraden liegen).

Kreise, die den gleichen Mittelpunkt haben, heißen konzentrische Kreise. Zwei Kreise mit verschiedenen Mittelpunkten nennt man exzentrisch.

Die von zwei konzentrischen Kreisen begrenzte Fläche heißt Kreisring. Ist  $R$  der Radius des äußeren Kreises und  $r$  der Radius des inneren Kreises, dann gilt für den Flächeninhalt  $A$  des Kreisrings

$$A = \pi(R^2 - r^2)$$

## 9.2 Kreissektoren

Ein Kreissektor oder Kreisausschnitt ist der Teil der Fläche eines Kreises, der von den Schenkeln eines Zentriwinkels und dem zugehörigen Kreisbogen begrenzt wird.

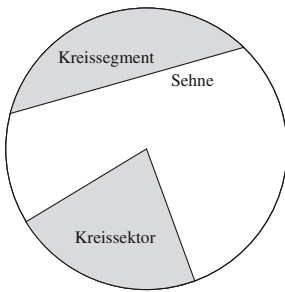


**Bild III-49**  
Kreissektor und  
Kreissegment

Ist  $\alpha$  ein Zentriwinkel und hat der Kreis den Radius  $r$ , dann ergibt sich für die Länge  $l_\alpha$  des Kreisbogens

$$l_\alpha = \frac{\alpha}{180^\circ} \pi r$$

Für die Fläche  $A_\alpha$  des Kreissektors gilt

$$A_\alpha = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi r^2 = \frac{1}{2} r l_\alpha$$

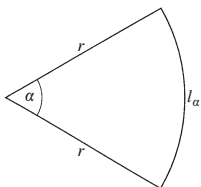


**Bild III-50**  
Bezeichnungen Kreissektor

## 9.3 Kreissegmente

Ein Kreissegment oder Kreisabschnitt ist der Teil der Fläche eines Kreises, der von einer Sehne  $\overline{AB}$  und einem der zugehörigen Kreisbögen  $\widehat{AB}$  oder  $\widehat{BA}$  begrenzt wird.

Ein Kreissegment ist also der Teil eines Kreissektors, der zwischen dem Kreisbogen und der zugehörigen Sehne liegt. Ein Kreis wird von einer Sehne in zwei Segmente zerlegt.

Ist  $r$  der Radius eines Kreises,  $\alpha$  ein Zentriwinkel,  $s$  die Länge der zugehörigen Sehne und  $h$  die Höhe des Kreissegments, dann berechnet man  $s = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$  und  $h = 2r \sin^2 \frac{\alpha}{4}$ , woraus sich für die Länge  $l_\alpha$  des Kreisbogens ergibt

$$l_\alpha = \frac{\alpha}{180^\circ} \pi r$$

Für die Fläche  $A_\alpha$  des Kreissegments gilt

$$A_\alpha = \frac{1}{2} [r l_\alpha - s(r - h)]$$

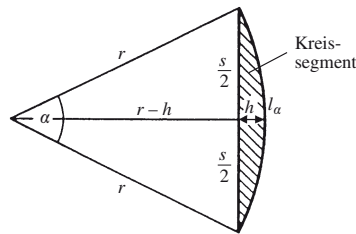


**Bild III-51** Bezeichnungen Kreissegment

## 9.4 Kreise und Geraden

Ein Kreis und eine Gerade können drei grundsätzlich verschiedene Lagen zueinander haben:

Die Gerade ist eine Passante  $p$ , sie hat mit dem Kreis keinen Punkt gemeinsam.

Die Gerade ist eine Tangente  $t$ , sie hat mit dem Kreis genau einen Punkt, den Berührungspunkt  $P$ , gemeinsam.

Die Gerade ist eine Sekante  $s$ , sie hat mit dem Kreis zwei Punkte, die Schnittpunkte  $P_1$  und  $P_2$ , gemeinsam.

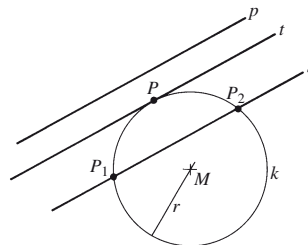


**Bild III-52** Sekante  $s$ , Tangente  $t$ , Passante  $p$



## 9.5 Bogenmaß

Neben dem Gradmaß gibt es das Bogenmaß zur Winkelmessung.

Beim Bogenmaß wird die Größe eines Zentriwinkels  $\alpha$  in einem beliebigen Kreis durch das Verhältnis des zugehörigen Kreisbogens  $b$  zum Radius  $r$  des Kreises angegeben. Der Quotient  $\frac{b}{r}$  heißt Bogenmaß des Winkels  $\alpha$ .

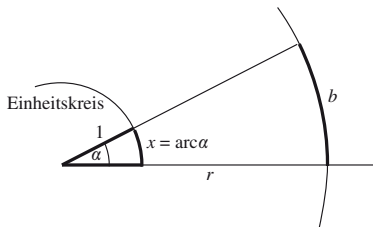


**Bild III-53** Zusammenhang zwischen Gradmaß ( $\alpha$ ) und Bogenmaß ( $x = \text{arc } \alpha$ ) eines Winkels

Die Einheit des Bogenmaßes ist der Radian (rad), also der Zentriwinkel, dessen Bogen gleich dem Radius ist. Mitunter schreibt man  $\text{arc } \alpha$  (Arcus  $\alpha$ ) für das Bogenmaß des Winkels  $\alpha$ .

$$\text{Bogenmaß } \text{arc } \alpha = \frac{b}{r}$$

Da der Einheitskreis, also der Kreis mit dem Radius  $r = 1$ , den Umfang  $2\pi$  hat, ist das Bogenmaß des Vollwinkels  $2\pi$ .

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ \quad \text{oder} \quad 1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57,2958^\circ$$

Bezeichnet  $\alpha$  den in Grad und  $x = \text{arc } \alpha$  den in Radian gemessenen Winkel, so gilt für die Umrechnung von Gradmaß und Bogenmaß eines Winkels

$$x = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha, \quad \alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot x$$

### Beispiele zur Umrechnung:

$$\begin{aligned} 1^\circ &= \frac{\pi}{180} \text{ rad} = 0,0174 \dots \text{ rad} & 10^\circ &= \frac{10\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{18} \text{ rad} \\ & & &= 0,1745 \dots \text{ rad} \\ 30^\circ &= \frac{\pi}{6} \text{ rad} & 45^\circ &= \frac{\pi}{4} \text{ rad} \\ 57,2957 \dots^\circ &= 1 \text{ rad} & 90^\circ &= \frac{\pi}{2} \text{ rad} \\ 0,5 \text{ rad} &= \frac{0,5 \cdot 180^\circ}{\pi} = 28,6478 \dots^\circ & \frac{\pi}{3} \text{ rad} &= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 60^\circ \end{aligned}$$

## 10 Symmetrie

### 10.1 Punktsymmetrie

Eine ebene Figur  $F$  heißt punkt- oder zentralsymmetrisch, wenn sich in ihrer Ebene ein Punkt  $P$  angeben lässt, so dass  $F$  durch eine Spiegelung an  $P$  in

sich übergeführt wird. Der Punkt  $P$  heißt dann Symmetriezentrum.

#### Beispiele:

Folgende Figuren sind punktsymmetrisch:

1. Strecke mit ihrem Mittelpunkt als Symmetriezentrum
2. Rechteck mit seinem Mittelpunkt als Symmetriezentrum
3. Ellipse mit ihrem Mittelpunkt als Symmetriezentrum (vgl. Abschnitt VII.5.1)

## 10.2 Achsensymmetrie

Eine ebene Figur  $F$  heißt achsen- oder axialsymmetrisch, wenn sich in ihrer Ebene eine Gerade  $g$  angeben lässt, so dass  $F$  durch eine Spiegelung an  $g$  in sich übergeführt wird. Die Gerade  $g$  heißt dann Symmetrieachse.

#### Beispiele:

Folgende Figuren sind achsensymmetrisch:

1. Gleichseitiges Dreieck mit einer der Winkelhalbierenden als Symmetrieachse
2. Rechteck mit einer Mittellinie als Symmetrieachse
3. Kreis mit einer beliebigen Geraden durch den Mittelpunkt als Symmetrieachse

## 11 Ähnlichkeit

### 11.1 Zentrische Streckung

Die zentrische Streckung ist eine Abbildung, bei der für jedes Element Bild  $Q$  und Urbild  $P$  auf einem Strahl durch einen festen Punkt  $Z$ , dem Zentrum, liegen und für jedes Element das Verhältnis der Länge der Strecke vom Bild zum Zentrum zu der Länge der Strecke vom Urbild zum Zentrum konstant ist.

$$\frac{|ZQ|}{|ZP|} = k \quad (k \text{ konstant})$$

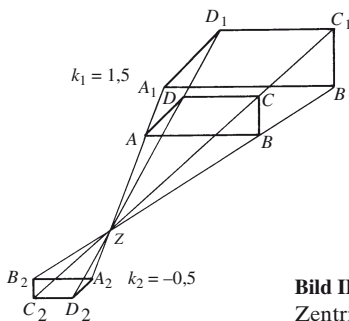


**Bild III-54**  
Zentrische Streckung

Eigenschaften:

Die Bilder von Strecke, Strahl, Gerade sind wieder Strecke, Strahl, Gerade. Bild und Urbild von Strecke, Strahl, Gerade sind zueinander parallel.

Entsprechende Winkel von Bild und Urbild sind gleich.

Die Längen entsprechender Strecken von Bild und Urbild haben das gleiche Verhältnis, und zwar den Betrag des Streckungsfaktors  $k$ , also  $|k|$ .

### 11.2 Strahlensätze

Unmittelbare Anwendungen der zentrischen Streckung sind die Strahlensätze.

#### Erster Strahlensatz

Werden zwei Strahlen mit gleichem Anfangspunkt (Zentrum) von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Längen der Abschnitte eines Strahls wie die Längen entsprechender Abschnitte des anderen Strahls.

$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2$$

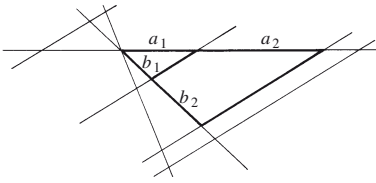


**Bild III-55** Erster Strahlensatz:  $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$

#### Zweiter Strahlensatz

Werden zwei Strahlen mit gleichem Anfangspunkt von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Längen der zwischen den Strahlen liegenden Abschnitte wie die Längen der zugehörigen vom Anfangspunkt aus gemessenen Abschnitte auf den Strahlen.

$$c_1 : c_3 = a_1 : a_3$$

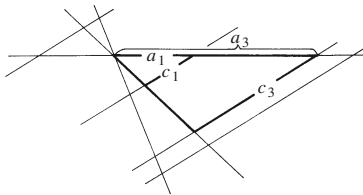


**Bild III-56** Zweiter Strahlensatz:  $c_1 : c_3 = a_1 : a_3$

■ **Beispiel:** Welche Länge  $B$  ergibt sich für das Bild eines Gegenstands der Länge  $G$  bei einer Bildweite  $b$  und einer Gegenstandsweite  $g$ ?

Nach dem zweiten Strahlensatz gilt

$$\frac{g}{b} = \frac{G}{B} \Rightarrow B = G \frac{b}{g}$$

Anmerkung: Ist  $g \gg b$  ( $g$  sehr groß gegenüber  $b$ ), dann kann man  $b \approx f$  ( $f$  Brennweite) setzen und damit die zu erwartende Bildgröße abschätzen.

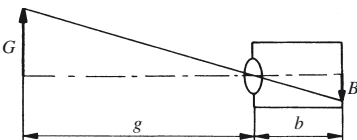


**Bild III-57** Anwendung des zweiten Strahlensatzes

### 11.3 Ähnliche Figuren

Geometrische Figuren heißen ähnlich, wenn sie nach geeigneter Parallelverschiebung, Drehung, Spiegelung durch zentrische Streckung zur Deckung gebracht werden können.

So sind zum Beispiel zwei Quadrate ähnlich (mit beliebigen Seitenlängen) oder zwei Kreise (mit beliebigen Radien und beliebigen Mittelpunkten) oder zwei gleichseitige Dreiecke (mit beliebigen Seitenlängen).

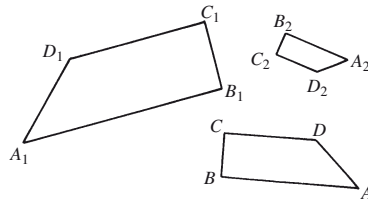


**Bild III-58** Ähnliche Figuren

Entsprechend den vier Kongruenzsätzen für Dreiecke gelten die folgenden Bedingungen für die Ähnlichkeit von Dreiecken:

1. Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.

Da im Dreieck die Winkelsumme gleich  $180^\circ$  ist, folgt, dass dann auch die jeweils dritten Winkel übereinstimmen.

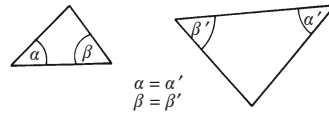


**Bild III-59** Ähnliche Dreiecke

2. Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in dem Längenverhältnis eines Seitenpaares und dem Gegenwinkel der längeren Seite übereinstimmen.

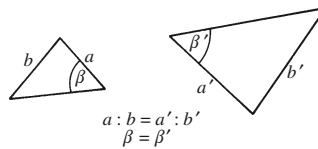


**Bild III-60** Ähnliche Dreiecke

3. Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in dem Längenverhältnis eines Seitenpaares und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

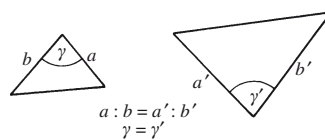


**Bild III-61** Ähnliche Dreiecke

4. Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in den Längenverhältnissen zweier Seitenpaare übereinstimmen.

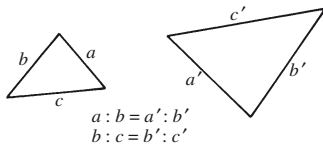


**Bild III-62** Ähnliche Dreiecke

Bemerkungen:

- Die Strahlensätze sind Anwendungen der Eigenschaften ähnlicher Dreiecke.
- Nur bei Dreiecken folgt aus der Gleichheit der Winkel die Ähnlichkeit.  
Zum Beispiel haben ein Rechteck mit den Seitenlängen  $a$  und  $b \neq a$  und ein Quadrat gleich große Winkel, sind aber nicht ähnlich, denn ihre Seitenverhältnisse sind verschieden.
- Da ein rechtwinkliges Dreieck durch seine Höhe in zwei untereinander und dem ganzen Dreieck ähnliche Teildreiecke geteilt wird (gleiche Winkel), folgen aus der Proportionalität der Längen entsprechender Seiten der Kathetensatz und der Höhensatz.

## IV Stereometrie

Das Wort Stereometrie kommt aus dem Griechischen und bedeutet Körpermessung. Man beschäftigt sich in dieser Teildisziplin der Geometrie mit Form, gegenseitiger Lage, Größe und anderen Beziehungen geometrischer Objekte im Raum.

### 1 Prismen

#### 1.1 Allgemeine Prismen

Gleitet eine Gerade, ohne ihre Richtung zu ändern, im Raum an den Begrenzungslinien eines ebenen  $n$ -Ecks ( $n = 3, 4, \dots$ ) entlang, so beschreibt sie eine prismatische Fläche. Schneiden zwei parallele Ebenen die prismatische Fläche, dann schließen sie zusammen mit dem zwischen ihnen liegenden Abschnitt der prismatischen Fläche einen Teil des Raums vollständig ein. Ein solcher Körper heißt Prisma (griech., das Gesägte) oder genauer  $n$ -seitiges Prisma.

Die Schnitte der Ebenen mit der prismatischen Fläche sind kongruente  $n$ -Ecke. Diese  $n$ -Ecke heißen Grundfläche und Deckfläche des Prismas. Die Seitenflächen des Prismas heißen Mantelflächen. Die Kanten der Seitenflächen heißen Mantellinien. Die Mantelflächen sind Parallelogramme.

Bei einem Prisma sind alle Schnitte parallel zu Grund- und Deckfläche kongruent zu diesen Flächen. Ein Prisma ist also ein Körper mit einem gleichbleibenden Querschnitt.

Gleitet die Gerade senkrecht zur Ebene der Grundfläche, dann heißt das Prisma gerade. Bei einem geraden Prisma stehen die Mantellinien senkrecht auf der Grund- und Deckfläche, und die Mantelflächen sind Rechtecke. Ein nicht gerades Prisma nennt man auch schiefes Prisma.

Ein physikalisches Prisma ist mathematisch ein gerades dreiseitiges Prisma.

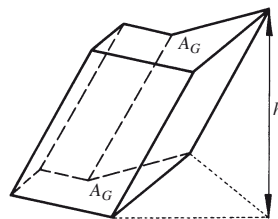


**Bild IV-1**  
Prisma

Das Volumen  $V$  eines Prismas ist der Inhalt  $A_G$  der Grundfläche multipliziert mit der Höhe  $h$ .

Volumen Prisma

$$V = A_G \cdot h$$

Die Oberfläche  $A_O$  eines Prismas ist die Summe der Mantelfläche  $A_M$  und der doppelten Grundfläche  $A_G$  (denn Grund- und Deckfläche sind kongruent, und damit ist ihr Flächeninhalt gleich).

Oberfläche Prisma

$$A_O = A_M + 2A_G$$

## 1.2 Parallelepiped und Würfel

Ein Prisma mit einem Parallelogramm als Grundfläche heißt Parallelepiped oder Parallelfach oder Spat. Ein gerades Prisma mit einem Rechteck als Grundfläche heißt Quader.

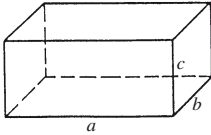


**Bild IV-2**  
Quader

Sind  $a$  und  $b$  die Seitenlängen des Rechtecks und  $c$  die Höhe des Quaders, so gilt:

Quader

|                   |                         |
|-------------------|-------------------------|
| Volumen           | $V = abc$               |
| Oberfläche        | $A_O = 2(ab + ac + bc)$ |
| Gesamtkantenlänge | $l = 4(a + b + c)$      |

Ein Quader mit einem Quadrat als Grundfläche heißt quadratische Säule.

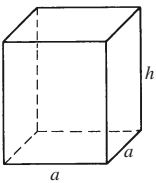


**Bild IV-3**  
Quadratische Säule

Ist  $a$  die Seitenlänge des Quadrats und  $h$  die Höhe der quadratischen Säule, dann gilt:

Quadratische Säule

|                   |                    |
|-------------------|--------------------|
| Volumen           | $V = a^2 h$        |
| Oberfläche        | $A_O = 2a^2 + 4ah$ |
| Gesamtkantenlänge | $l = 8a + 4h$      |

Ein Quader mit lauter gleich langen Kanten heißt Würfel.

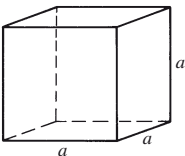


**Bild IV-4**  
Würfel

Ist  $a$  die Kantenlänge des Würfels, so gilt:

Würfel

|                   |              |
|-------------------|--------------|
| Volumen           | $V = a^3$    |
| Oberfläche        | $A_O = 6a^2$ |
| Gesamtkantenlänge | $l = 12a$    |

Der Würfel ist einer der platonischen Körper (siehe Abschnitt IV.7). Er wird von sechs Quadraten begrenzt.

## 2 Zylinder

### 2.1 Allgemeine Zylinder

Wird eine Gerade (Erzeugende) im Raum längs einer ebenen geschlossenen Kurve (Leitkurve) parallel verschoben (also ohne ihre Richtung zu verändern), so entsteht eine Zylinderfläche. Ein Zylinder ist ein Körper, der von einer Zylinderfläche und zwei parallelen ebenen Flächenstücken begrenzt wird. Die ebenen Begrenzungsflächenstücke müssen nicht senkrecht auf der erzeugenden Gerade stehen.

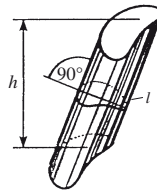


**Bild IV-5**  
Zylinder ( $l$  = Mantellinie)

Ein Zylinder ist ein Körper mit gleichbleibendem Querschnitt.

Der Teil der Zylinderfläche zwischen den parallelen Begrenzungsflächenstücken heißt Mantelfläche des Zylinders, die parallelen Flächenstücke sind Grund- und Deckfläche des Zylinders. Grundfläche und Deckfläche sind zueinander kongruent. Die zwischen den Flächenstücken liegenden Strecken der Erzeugenden heißen Mantellinien, sie sind alle parallel und gleich lang. Der senkrechte Abstand zwischen Grund- und Deckfläche ist die Höhe des Zylinders.

Prismen sind spezielle Zylinder, nämlich solche mit  $n$ -Ecken als Grundfläche.

Ein Zylinder heißt gerade, wenn die Mantellinien senkrecht auf Grund- und Deckfläche stehen. Ein nicht gerader Zylinder heißt schiefer Zylinder.

Ein Zylinder mit einer Kreisfläche als Grundfläche heißt Kreiszylinder.

Das Volumen  $V$  eines Zylinders ist der Inhalt  $A_G$  der Grundfläche multipliziert mit der Höhe  $h$ . Die Oberfläche  $A_O$  eines Zylinders ist die Summe der Mantelfläche  $A_M$  und der doppelten Grundfläche  $A_G$ .

|            |                    |
|------------|--------------------|
| Volumen    | $V = A_G \cdot h$  |
| Oberfläche | $A_O = A_M + 2A_G$ |

### 2.2 Gerade Kreiszylinder

Ein Zylinder mit senkrecht auf Grund- und Deckfläche stehenden Mantellinien und mit einer Kreisfläche als Grundfläche heißt gerader Kreiszylinder oder Walze.

Die Mantelfläche eines geraden Kreiszylinders kann in ein Rechteck mit den Seitenlängen  $h$  und  $2\pi r$  (Kreisumfang) abgewickelt werden, wobei  $h$  die Höhe des geraden Kreiszylinders ist und  $r$  der Radius des Kreises. Dies kann man sich dadurch veranschaulichen, dass man eine Dose ohne Deckel und Boden längs einer Mantellinie aufschneidet und in eine Ebene abwickelt.

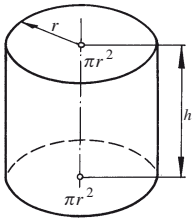


**Bild IV-6**  
Gerader Kreiszylinder

Der Kreis als Grund- und Deckfläche (Grund- und Deckfläche sind kongruent) hat den Flächeninhalt  $\pi r^2$ .

Somit gilt für die Oberfläche insgesamt  $A_O = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h)$ .

|            |                       |
|------------|-----------------------|
| Volumen    | $V = \pi r^2 h$       |
| Oberfläche | $A_O = 2\pi r(r + h)$ |

## 2.3 Hohlzylinder

Ein Hohlzylinder ist ein gerader Kreiszylinder (Kreis mit Radius  $R$ ), aus dem ein kleinerer gerader Kreiszylinder (konzentrischer Kreis mit Radius  $r$ ,  $r < R$ ) ausgeschnitten ist.

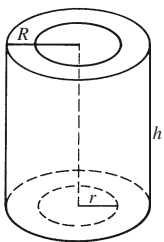


**Bild IV-7**  
Hohlzylinder

Die Grundflächen der beiden Zylinder sind also konzentrische Kreise, das heißt, sie haben den gleichen Mittelpunkt.

Das Volumen des Hohlzylinders ist die Differenz der Volumina der beiden geraden Kreiszylinder. Die Oberfläche setzt sich aus der äußeren Mantelfläche  $A_{M_a} = 2\pi R h$  ( $h$  ist die Höhe des Hohlzylinders), aus der inneren Mantelfläche  $A_{M_i} = 2\pi r h$ , aus der Grundfläche und aus der Deckfläche zusammen. Grundfläche  $A_G$  und Deckfläche  $A_D$  sind gleich, sie ergeben sich aus der Differenz zweier Kreisflächen:  $A_G = A_D = \pi(R^2 - r^2)$ .

Für das Volumen und die Oberfläche des Hohlzylinders gilt somit

|            |                                                                       |
|------------|-----------------------------------------------------------------------|
| Volumen    | $V = \pi h(R^2 - r^2)$                                                |
| Oberfläche | $A_O = 2\pi h(R + r) + 2\pi(R^2 - r^2)$<br>$= 2\pi(R + r)(R - r + h)$ |

## 3 Pyramiden

### 3.1 Allgemeine Pyramiden

Gleitet ein von einem festen Punkt  $S$  des Raums ausgehender Strahl an den Begrenzungslinien eines ebenen  $n$ -Ecks ( $n = 3, 4, \dots$ ) entlang, in dessen Ebene der Anfangspunkt  $S$  des Strahls nicht liegt, so beschreibt der gleitende Strahl eine Pyramidenfläche. Das  $n$ -Eck schließt zusammen mit dem zwischen ihm und dem Punkt  $S$  liegenden Abschnitt der Pyramidenfläche einen Teil des Raums vollständig ein. Ein solcher Körper heißt Pyramide.

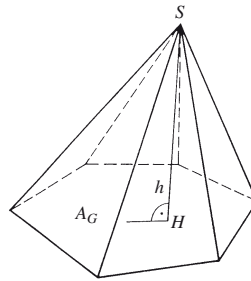


**Bild IV-8**  
Pyramide

Das  $n$ -Eck heißt Grundfläche, der Punkt  $S$  Spitze, der zum Körper gehörende Teil der Pyramidenfläche ist die Mantelfläche der Pyramide. Die Kanten der Grundfläche heißen Grundkanten, die Kanten der Mantelfläche Seitenkanten, und die ebenen Flächen der Mantelfläche sind die Seitenflächen.

Alle Seitenflächen einer Pyramide sind Dreiecke. Es gibt bei einem  $n$ -Eck als Grundfläche genau  $n$  Dreiecke als Seitenflächen. Deshalb nennt man solche eine Pyramide auch genauer  $n$ -seitige Pyramide.

Ist das  $n$ -Eck ein reguläres  $n$ -Eck, dann heißt die Pyramide reguläre ( $n$ -seitige) Pyramide.

Der Abstand der Spitze  $S$  von der Ebene der Grundfläche ist die Höhe der Pyramide. Man erhält die Höhe, indem man von  $S$  das Lot auf die Ebene der Grundfläche fällt. Das Lot durchstößt die Ebene der Grundfläche im Höhenfußpunkt  $H$ . Dieser kann auch außerhalb der Grundfläche liegen, dann liegt die Höhe außerhalb der Pyramide.

Fällt der Höhenfußpunkt mit dem Mittelpunkt der Grundfläche zusammen, so heißt die Pyramide gerade. Alle anderen Pyramidenformen nennt man schief. Die Höhe einer geraden Pyramide ist gleichzeitig ihre Achse.

Die Seitenflächen von regulären geraden Pyramiden sind kongruente gleichschenklige Dreiecke.

Für das Volumen  $V$  und die Oberfläche  $A_O$  einer beliebigen Pyramide gilt

|            |                               |
|------------|-------------------------------|
| Volumen    | $V = \frac{1}{3} A_G \cdot h$ |
| Oberfläche | $A_O = A_M + A_G$             |

$A_G$  ist der Flächeninhalt des  $n$ -Ecks,  $A_M$  der Inhalt der Mantelfläche, also die Summe der Flächeninhalte der Seitendreiecke, und  $h$  ist die Höhe der Pyramide.

Eine gerade reguläre dreiseitige Pyramide, bei der die Seitendreiecke kongruent zum Grunddreieck sind, heißt Tetraeder. Ein Tetraeder wird also von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzt.

### 3.2 Gerade quadratische Pyramiden

Eine gerade quadratische Pyramide hat ein Quadrat als Grundfläche, und die Spitze der Pyramide steht senkrecht über dem Mittelpunkt des Quadrats, dem Diagonalschnittpunkt. Die Mantelfläche besteht aus vier kongruenten gleichschenkligen Dreiecken.

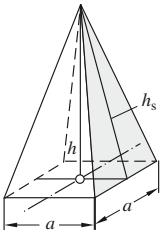


**Bild IV-9**  
Gerade quadratische Pyramide

Ist  $a$  die Kantenlänge des Quadrats der Grundfläche,  $h$  die Höhe der Pyramide und  $s$  die Kantenlänge der Seitenkanten, so folgt aus dem Satz des Pythagoras  $s^2 = h^2 + \frac{1}{2} a^2$ .

Bezeichnet man mit  $h_s$  die Höhe des gleichschenkligen Seitenflächendreiecks  $\Delta_s$ , dann folgt ebenfalls mit dem Satz von Pythagoras  $s^2 = h_s^2 + \frac{1}{4} a^2$ , denn die Basis dieses Dreiecks hat die Länge  $\frac{a}{2}$ . Löst man nach  $h_s$  auf und ersetzt  $s^2$  durch  $h^2 + \frac{1}{2} a^2$ , so ergibt sich  $h_s = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4} a^2}$ . Daraus berechnet man den Flächeninhalt  $A_{\Delta_s}$  von  $\Delta_s$  zu  $A_{\Delta_s} = \frac{1}{2} a \cdot h_s = \frac{1}{2} a \sqrt{h^2 + \frac{1}{4} a^2}$  und den Inhalt der Mantelfläche zu  $A_M = 4 A_{\Delta_s} = 2a \sqrt{h^2 + \frac{1}{4} a^2}$ .

Für Volumen und Oberfläche einer geraden quadratischen Pyramide gilt somit

|            |                                               |
|------------|-----------------------------------------------|
| Volumen    | $V = \frac{1}{3} a^2 \cdot h$                 |
| Oberfläche | $A_O = 2a \sqrt{h^2 + \frac{1}{4} a^2} + a^2$ |

Die Grabstätten altägyptischer Pharaone waren während des Alten und des Mittleren Reichs häufig gerade quadratische Pyramiden. Besonders beeindruckend sind die Pyramiden der Pharaonen Cheops, Chephren und Mykerinos in Gizeh am südlichen Rand von Kairo. Sie stammen aus dem Alten Reich und wurden in der Zeit zwischen 2600 und 2480 v. u. Z. erbaut, sie sind also rund 4500 Jahre alt. Die größte Pyramide ist die Cheopspyramide: Das Quadrat der Grundfläche hat eine Kantenlänge von 227,5 m (ursprünglich 230,38 m), und die Höhe ist 137 m (ursprünglich 146,6 m). Nimmt man die ursprünglichen Werte, so berechnet man für das Volumen:

$$V = \frac{1}{3} (230,38)^2 \cdot 146,6 = 2\,593\,595,61 \dots,$$

also mehr als 2,5 Millionen Kubikmeter! Für die Oberfläche ergibt sich:

$$\begin{aligned} A_O &= 2 \cdot 230,38 \cdot \sqrt{(146,6)^2 + \frac{1}{4} (230,38)^2} + (230,38)^2 \\ &= 138\,979,56 \dots \end{aligned}$$

Der Bau der Pyramiden war eine großartige ingenieurtechnische und logistische Leistung der Ägypter!

## 4 Kegel

### 4.1 Allgemeine Kegel

Wird eine Gerade (Erzeugende) im Raum längs einer ebenen geschlossenen Kurve (Leitkurve) so bewegt, dass sie durch einen festen Punkt, die Spitze  $S$ , geht, so entsteht eine Kegelfläche. Ein Kegel ist ein Körper, der von einer Kegelfläche und einem nicht durch deren Spitze gehenden ebenen Flächenstück begrenzt wird.

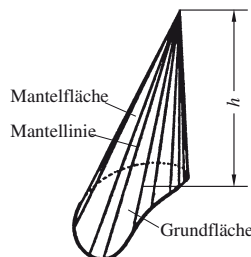


**Bild IV-10**  
Kegel

Der Teil der Kegelfläche zwischen dem ebenen Flächenstück und der Spitze heißt Mantelfläche, das ebene Flächenstück Grundfläche des Kegels. Die zwischen Grundfläche und Spitze liegenden Strecken der Erzeugenden heißen Mantellinien. Der senkrechte Abstand der Spitze zur Ebene der Grundfläche ist die Höhe des Kegels.

Pyramiden sind spezielle Kegel, nämlich Kegel mit  $n$ -Ecken als Grundfläche.

Hat die Grundfläche einen Mittelpunkt (wie Kreis oder Ellipse), und liegt die Spitze senkrecht über diesem Mittelpunkt, so heißt der Kegel gerade, andernfalls schief.

Ein Kegel mit einer Kreisfläche als Grundfläche heißt Kreiskegel.

Das Volumen  $V$  eines Kegels ist ein Drittel des Inhalts  $A_G$  der Grundfläche multipliziert mit der Höhe  $h$ . Die Oberfläche  $A_O$  eines Kegels ist die Summe der Mantelfläche  $A_M$  und der Grundfläche  $A_G$ .

|            |                               |
|------------|-------------------------------|
| Volumen    | $V = \frac{1}{3} A_G \cdot h$ |
| Oberfläche | $A_O = A_M + A_G$             |

## 4.2 Gerade Kreiskegel

Ein Kegel mit einer Kreisfläche als Grundfläche und der Spitze  $S$  senkrecht über dem Kreismittelpunkt heißt gerader Kreiskegel.

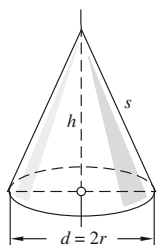


**Bild IV-11**  
Gerader Kreiskegel

Alle Mantellinien eines geraden Kreiskegels sind gleich lang. Ihre Länge ist  $s = \sqrt{r^2 + h^2}$ , wobei  $r$  der Radius des Kreises und  $h$  die Höhe des geraden Kreiskegels sind.

Die Mantelfläche kann in die Ebene abgewickelt werden. Dabei entsteht ein Kreissektor mit dem Radius  $s$  (Länge der Mantellinien) und der Kreisbogenlänge  $2\pi r$  (Umfang des Kreises der Grundfläche). Der Flächeninhalt  $A_M$  dieses Kreissektors (= Mantelfläche) verhält sich zur gesamten Kreisfläche  $\pi s^2$  wie die Kreisbogenlänge  $2\pi r$  zum Gesamtkreisumfang  $2\pi s$ , woraus sich für die Mantelfläche  $A_M = \pi r s$  ergibt. Der Kreis der Grundfläche, der Grundkreis, hat den Flächeninhalt  $\pi r^2$ .

Daraus folgt für die Oberfläche  $A_O = \pi r s + \pi r^2 = \pi r(r + s) = \pi r(r + \sqrt{r^2 + h^2})$ .

Somit gilt für den geraden Kreiskegel

|                       |                             |
|-----------------------|-----------------------------|
| Volumen               | $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ |
| Oberfläche            | $A_O = \pi r(r + s)$        |
| Länge der Mantellinie | $s = \sqrt{r^2 + h^2}$      |

## 5 Cavalierisches Prinzip

Wesentlich zur Berechnung des Volumens von Prismen, Zylindern, Pyramiden und Kegeln ist das Cavalierische Prinzip (nach dem italienischen Mathematiker Bonaventura Cavalieri, ~1591/98–1647, ein Schüler Galileis):

Körper mit inhaltsgleichem Querschnitt in gleichen Höhen haben gleiches Volumen.

Speziell gilt also: Prismen, Zylinder, Pyramiden und Kegel mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe haben gleiches Volumen.

## 6 Kugeln

### 6.1 Definitionen

Eine Kugel ist der geometrische Ort aller Punkte des Raumes, die von einem festen Punkt  $M$  einen konstanten Abstand  $r$  haben.

Der Punkt  $M$  ist der Mittelpunkt und  $r$  der Radius der Kugel.

Zur Unterscheidung von dem durch eine Kugel abgegrenzten Raum nennt man die Kugel selbst auch Kugelfläche.

Eine Kugel mit dem Radius  $r = 1$  heißt Einheitskugel.

Für das Volumen  $V$  und die Oberfläche  $A_O$  einer Kugel mit dem Radius  $r$  und dem Durchmesser  $d$  gilt

|            |                                               |
|------------|-----------------------------------------------|
| Volumen    | $V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{\pi}{6} d^3$ |
| Oberfläche | $A_O = 4\pi r^2 = \pi d^2$                    |

Eine Kugel ist festgelegt durch den Mittelpunkt und einen weiteren Punkt oder durch vier Punkte (die nicht alle in einer Ebene liegen).

Kugeln mit gleichem Mittelpunkt heißen konzentrisch.

Jede die Kugel schneidende Ebene schneidet sie in einem Kreis.

Geraden haben mit einer Kugelfläche entweder zwei Punkte, einen Punkt oder keinen Punkt gemeinsam.

Eine Sekante  $s$  schneidet die Kugelfläche in zwei Punkten. Der zwischen den Punkten gelegene Teil der Sekante heißt Sehne. Eine Sehne durch den Mittelpunkt heißt Durchmesser der Kugel. Durchmesser sind die größten Sehnen der Kugel, für ihre Länge  $d$  gilt  $d = 2r$ .

Eine Tangente  $t$  berührt die Kugel in einem Punkt. Im Berührungspunkt sind beliebig viele Tangenten möglich: alle Tangenten zusammen spannen die Tangentialebene auf.

Eine Passante  $p$  hat mit der Kugel keinen Punkt gemeinsam.



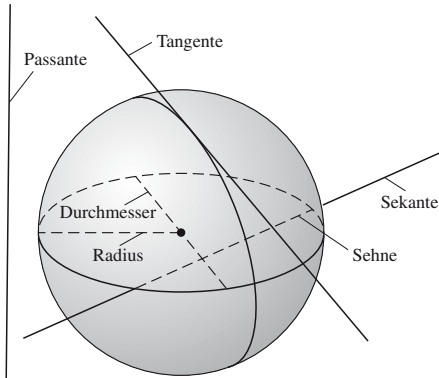
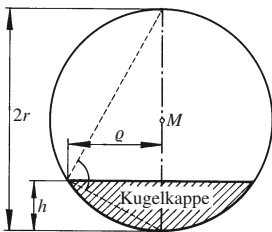


Bild IV-12 Bezeichnungen an der Kugel

## 6.2 Kugelsegmente

Ein Kugelsegment oder Kugelabschnitt ist ein durch eine Ebene abgeschnittener Teil einer Kugel.

Bild IV-13  
Kugelsegment

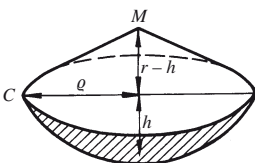
Die Mantelfläche des Kugelsegments heißt Kugelkappe.

Ist  $r$  der Radius der Kugel,  $q$  der Radius des von der Ebene ausgeschnittenen Kreises und  $h$  die Höhe des Kugelsegments, dann gilt

|                          |                                                                          |
|--------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| Radius Schnittkreis      | $q = \sqrt{h(2r - h)}$                                                   |
| Volumen Kugelsegment     | $V = \frac{1}{6} \pi h (3q^2 + h^2)$<br>$= \frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h)$ |
| Flächeninhalt Kugelkappe | $A = 2\pi rh$                                                            |
| Oberfläche Kugelsegment  | $A_O = 2\pi rh + \pi q^2$<br>$= \pi(2rh + q^2)$                          |

## 6.3 Kugelsektoren

Einem Kugelsegment (Kugelabschnitt) ist ein Kegel zugeordnet, dessen Grundfläche der Schnittkreis des

Bild IV-14  
Kugelsektor

Kugelsegments und dessen Spitze der Kugelmittelpunkt ist. Der Gesamtkörper aus Kugelsegment und zugeordnetem Kegel heißt Kugelsektor oder Kugelausschnitt.

Das Volumen  $V$  des Kugelsektors setzt sich aus dem Volumen des Kugelabschnitts und dem des zugeordneten Kegels zusammen:  $V = \pi \frac{h^2}{3} (3r - h) + \pi \frac{q^2}{3} (r - h)$ .

Dabei ist  $r$  der Radius der Kugel,  $q$  der Radius des Schnittkreises und  $h$  die Höhe des Kugelsegments. Durch Einsetzen von  $q^2 = h(2r - h)$  erhält man  $V = \frac{2}{3} \pi r^2 h$ .

Die Oberfläche  $A_O$  des Kugelsektors ist die Summe der Flächeninhalte von Kugelkappe und Kegelmantel:  $A_O = 2\pi rh + \pi qr = \pi r(2h + q)$ .

|                        |                             |
|------------------------|-----------------------------|
| Volumen Kugelsektor    | $V = \frac{2}{3} \pi r^2 h$ |
| Oberfläche Kugelsektor | $A_O = \pi r(2h + q)$       |

## 6.4 Kugelschichten

Eine Kugelschicht ist der durch zwei zueinander parallelen Ebenen ausgeschnittene Teil einer Kugel.

Die durch die beiden Ebenen ausgeschnittene Kugeloberfläche, also die Mantelfläche der Kugelschicht, heißt Kugelzone.

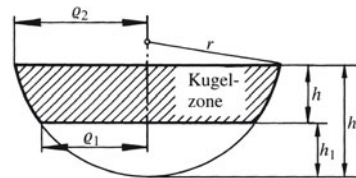


Bild IV-15 Kugelschicht

Ist  $r$  der Radius der Kugel,  $q_1$  und  $q_2$  die Radien der von den parallelen Ebenen ausgeschnittenen Kreise und  $h$  die Dicke der Kugelschicht, dann gilt

|                         |                                                                        |
|-------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| Radien Schnittkreise    | $q_1 = \sqrt{h_1(2r - h_1)}$<br>$q_2 = \sqrt{(h + h_1)(2r - h - h_1)}$ |
| Volumen Kugelschicht    | $V = \frac{1}{6} \pi h (3q_1^2 + 3q_2^2 + h^2)$                        |
| Flächeninhalt Kugelzone | $A = 2\pi rh$                                                          |
| Oberfläche Kugelschicht | $A_O = \pi(2rh + q_1^2 + q_2^2)$                                       |



# V Funktionen

## 1 Definition und Darstellungen von Funktionen

### 1.1 Definitionen

Eine Abbildung oder Funktion  $f$  ist eine Zuordnung, die jeder Zahl  $x$  einer gegebenen Zahlenmenge  $D$  eine Zahl  $y$  einer Zahlenmenge  $W$  zuordnet. Die Zuordnung ist eindeutig, das heißt, jeder Zahl  $x$  wird genau eine Zahl  $y$  zugeordnet. Man schreibt dafür  $y = f(x)$  oder manchmal auch  $x \mapsto f(x)$ . Man nennt  $f(x)$  das Bild von  $x$  und umgekehrt  $x$  das Urbild von  $f(x)$ .

Die Menge  $D$  heißt Urbildmenge, Definitionsmenge oder Definitionsbereich. Die Menge  $W$ , aus der die Bilder stammen, heißt Wertemenge oder Wertebereich. Die Menge der Bilder (also alle  $y$ -Werte zusammen) heißt Bildmenge, bezeichnet mit  $f(D)$ .

|        |                    |
|--------|--------------------|
| $D$    | Definitionsbereich |
| $W$    | Wertebereich       |
| $f(D)$ | Bildmenge          |

Die Elemente der Bildmenge nennt man Funktionswerte. Die Bildmenge  $f(D)$  ist eine Teilmenge des Wertebereichs  $W$ , und  $W$  ist eine Teilmenge der Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen.

$$f(D) \subseteq W \subseteq \mathbb{R}$$

Eine Funktion besteht aus drei Teilen: der Zuordnungsvorschrift  $f$ , dem Definitionsbereich  $D$  und dem Wertebereich  $W$ .

Zwei Funktionen sind genau dann gleich, wenn sowohl die Zuordnungsvorschriften als auch die Definitionsbereiche als auch die Wertebereiche übereinstimmen.

#### ■ Beispiele:

1.  $y = f(x) = 5x$ ,  $D = \mathbb{N}$ ,  $W = \mathbb{N}$

Die Zuordnungsvorschrift ist hier „5 mal“, das heißt, man muss jeden  $x$ -Wert mit 5 multiplizieren, um den zugehörigen Funktionswert  $y$  zu erhalten. Für  $x = 3$  erhält man zum Beispiel  $y = f(3) = 5 \cdot 3 = 15$ .

Sowohl der Definitionsbereich als auch der Wertebereich sind die natürlichen Zahlen. Für die Bildmenge ergibt sich  $f(D) = \{0, 5, 10, 15, 20, \dots\}$ .

2.  $D = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$ ;  $W = \{1, 2, 3, 4, \dots, 24, 25\}$ ,  
 $f(-1) = 1$ ,  $f(-2) = 4$ ,  $f(-3) = 9$ ,  $f(-4) = 16$ ,  $f(-5) = 25$
3.  $D = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$ ;  $W = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  
 $f(-1) = 1$ ,  $f(-2) = 2$ ,  $f(-3) = 3$ ,  $f(-4) = 4$ ,  $f(-5) = 5$
4.  $y = f(x) = x + 2$ ,  $D = \mathbb{R}$ ,  $W = \mathbb{R}$

**Bemerkung:** Man kann Abbildungen (Funktionen) auch allgemeiner als eine Zuordnung zwischen beliebigen Mengen (also nicht eingeschränkt auf Zahlenmengen) definieren.

### 1.2 Funktionsgleichung

#### Explizite Darstellung der Funktionsgleichung

Die Zuordnungsvorschrift für eine Funktion ist im Regelfall eine Gleichung, die Funktionsgleichung  $y = f(x)$  (gesprochen:  $y$  gleich  $f$  von  $x$ ). Dabei heißt  $x$  unabhängige Variable und  $y$  abhängige Variable. Man nennt  $x$  auch das Argument der Funktion.

Die Form  $y = f(x)$  heißt explizite Darstellung der Funktionsgleichung. Darüber hinaus gibt es die implizite Darstellung und die Parameterdarstellung der Funktionsgleichung (siehe unten).

Funktionen können aber zum Beispiel auch durch Tabellen, Schaubilder (Graphen), Pfeildiagramme oder geordnete Wertepaare (Wertetabelle) dargestellt werden.

Fehlt bei einer Funktion die Angabe des Definitionsbereichs, so gilt  $D = \mathbb{R}$ . Fehlt bei einer Funktion die Angabe des Wertebereichs, so gilt ebenfalls  $W = \mathbb{R}$ .

Die Schreibweise  $y = f(x)$ ,  $f : D \rightarrow W$  für eine Funktion bedeutet, dass  $y = f(x)$  die Funktionsgleichung ist, dass die Funktion den Definitionsbereich  $D$  und den Wertebereich  $W$  hat.

$$y = f(x), \quad f : D \rightarrow W$$

#### ■ Beispiele:

1.  $y = f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
2.  $y = f(x) = x^2 - 1$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
3.  $y = f(x) = \frac{x-3}{x^2-2}$ ,  $f : [1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  (also  $D = [1, 1]$ ,  $W = \mathbb{R}$ )
4.  $y = f(x) = \sqrt{x}$ ,  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
5.  $y = f(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0, \\ +1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Eine Funktion mit der Funktionsgleichung  $y = f(x)$ , deren Definitions- und Wertemenge nur reelle Zahlen enthalten, nennt man eine reelle Funktion einer reellen Variablen.

#### ■ Beispiele:

6.  $y = x^2$ ,  $D = (-\infty, \infty)$ ,  $W = [0, \infty)$
7.  $y = \sqrt{x}$ ,  $D = [0, \infty)$ ,  $W = [0, \infty)$

#### Implizite Darstellung der Funktionsgleichung

Die Darstellung einer Funktion in der Form  $F(x, y) = 0$  heißt implizit, falls sich diese Gleichung eindeutig nach  $y$  auflösen lässt.

Statt impliziter Darstellung der Funktion sagt man auch einfach nur implizite Funktion.

#### ■ Beispiel:

8.  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ ,  $D = [-1, 1]$ ,  $y \geq 0$

Es handelt sich hierbei um die obere Hälfte des Einheitskreises mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung (vgl. Abschnitt VII.3.1).

Man beachte, dass mit  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  keine reelle Funktion definiert wird, denn die Zuordnung ist nicht eindeutig, da jedem Element des Definitionsbereichs zwei Werte zugeordnet werden (einer auf dem oberen Halbkreis und einer auf dem unteren Halbkreis).

*Parameterdarstellung der Funktionsgleichung*

Die Darstellung einer Funktion in der Form  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  heißt Parameterdarstellung. Die Werte von  $x$  und  $y$  werden dabei jeweils als Funktion einer Hilfsvariablen  $t$  angegeben, die Parameter genannt wird. Die Funktionen  $\varphi(t)$  und  $\psi(t)$  müssen denselben Definitionsbereich haben.

■ **Beispiele:**

9.  $x = 2t + 5$ ,  $y = 8t + 4$ ,  $t \in \mathbb{R}$   
Durch Elimination von  $t$  erhält man  
 $4x - 20 = y - 4 \Rightarrow y = 4x - 16$ ,  
also eine Geradengleichung (in expliziter Form) (vgl. Abschnitt VII.2.1).
10.  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  mit  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$  und  $0 \leq t \leq \pi$   
Hierbei handelt es sich um die obere Hälfte des Einheitskreises mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung, denn Quadrieren und Addieren ergibt  
 $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ ,  
und  $t$  durchläuft den ersten und den zweiten Quadranten (vgl. Abschnitt VI).

**1.3 Graph einer Funktion**

Eine Möglichkeit der Funktionsdarstellung ist, den Graph der Funktion zu zeichnen.

Der Graph einer Funktion  $f$  mit dem Definitionsbereich  $D$  ist das Bild, das man erhält, wenn man die geordneten Zahlenpaare  $(x, y) = (x, f(x))$  mit  $x \in D$  in ein Koordinatenkreuz einträgt. Geordnet bedeutet, dass in  $(x, y)$  die Reihenfolge von  $x$  und  $y$  wichtig ist:  $(x, y)$  ist verschieden von  $(y, x)$  (außer möglicherweise in Sonderfällen).

In einem kartesischen Koordinatensystem (siehe Abschnitt VII.1) ist die waagerechte Achse die  $x$ -Achse oder Abszissenachse, die senkrechte Achse ist die  $y$ -Achse oder Ordinatenachse. Die Zahl  $x$  ist die Abszisse und  $y$  die Ordinate eines Punktes  $(x|y)$  mit den Koordinaten  $x$  und  $y$ .

Statt Graph einer Funktion sagt man auch Schaubild oder Kurve der Funktion.

**Bemerkung:** Bei einem Zahlenpaar setzt man ein Komma oder ein Semikolon zwischen die beiden Komponenten:  $(x, y)$  oder  $(x; y)$ . Bei der Darstellung eines Punktes setzt man einen senkrechten Strich zwischen die beiden Koordinaten:  $(x|y)$ .

■ **Beispiel:**

Graph der Funktion mit der Funktionsgleichung  $y = f(x) = 2x + 1$  und dem Definitionsbereich  $D = \mathbb{R}$ :

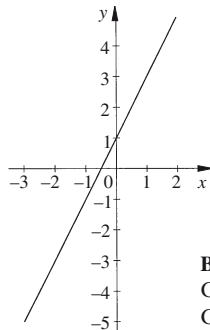


**Bild V-1**  
Graph der Funktion mit der Gleichung  $y = f(x) = 2x + 1$

**1.4 Wertetabelle einer Funktion**

Auch mittels einer Wertetabelle kann eine Funktion dargestellt werden.

In einer Wertetabelle werden für einige ausgewählte Argumente  $x$  die geordneten Zahlenpaare  $(x, y) = (x, f(x))$  für eine Funktion  $y = f(x)$  eingetragen. Dabei müssen die ausgewählten Werte für  $x$  Elemente des Definitionsbereichs  $D$  der Funktion sein.

Man stellt oftmals eine Wertetabelle auf, um den Graph einer Funktion zeichnen zu können.

■ **Beispiel:**

Wertetabelle für die Funktion  $y = -x^2 - 4x + 3$ ,  $D = \mathbb{R}$ :

|     |    |    |    |    |    |   |    |    |
|-----|----|----|----|----|----|---|----|----|
| $x$ | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1  | 2  |
| $y$ | -2 | 3  | 6  | 7  | 6  | 3 | -2 | -9 |

**2 Verhalten von Funktionen**

**2.1 Monotone Funktionen**

Eine Funktion mit der Gleichung  $y = f(x)$  heißt in einem bestimmten Bereich  $B$  ( $B$  ist eine Teilmenge des Definitionsbereichs  $D$ )

- monoton wachsend, wenn aus  $x_1 < x_2$  stets  $f(x_1) \leq f(x_2)$  folgt,
- streng monoton wachsend, wenn aus  $x_1 < x_2$  stets  $f(x_1) < f(x_2)$  folgt,
- monoton fallend, wenn aus  $x_1 < x_2$  stets  $f(x_1) \geq f(x_2)$  folgt,
- streng monoton fallend, wenn aus  $x_1 < x_2$  stets  $f(x_1) > f(x_2)$  folgt.

Dabei sind  $x_1, x_2$  beliebige Punkte aus diesem Bereich  $B$ .

■ **Beispiele:**

1.  $f(x) = 3x$ ,  $D = \mathbb{R}$  ist streng monoton wachsend in  $D$ .

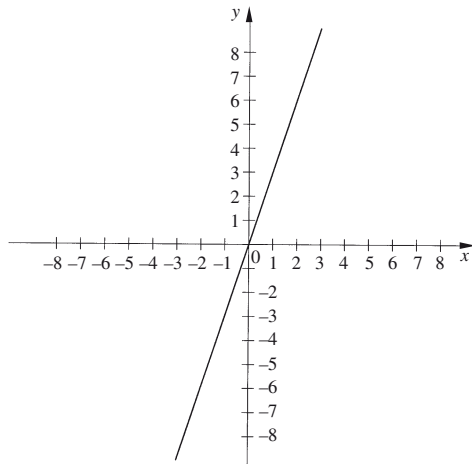


**Bild V-2** Graph der Funktion mit der Gleichung  $f(x) = 3x$

2.  $f(x) = x^2$ ,  $D = \mathbb{R}$  ist in  $B_1 = \{x \mid x \in D \text{ und } x \leq 0\}$  streng monoton fallend und in  $B_2 = \{x \mid x \in D \text{ und } x \geq 0\}$  streng monoton wachsend.

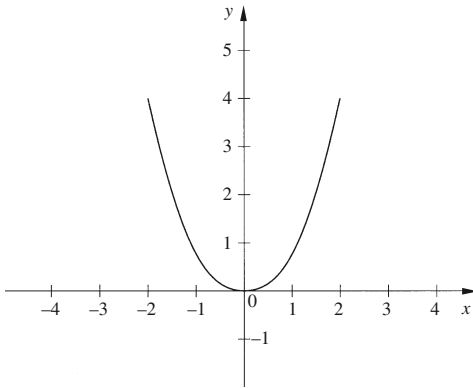


**Bild V-3** Graph der Funktion mit der Gleichung  $f(x) = x^2$

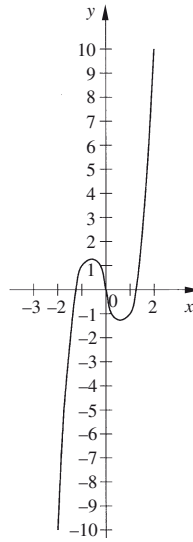


**Bild V-5** Graph der Funktion mit der Gleichung  $f(x) = 2x^3 - 3x$

## 2.2 Symmetrische Funktionen

Der Graph einer Funktion mit der Gleichung  $y = f(x)$  ist symmetrisch zur  $y$ -Achse, wenn  $f(x) = f(-x)$  für alle  $x \in D$  gilt. Eine solche Funktion heißt eine gerade Funktion.

Der Graph einer Funktion  $y = f(x)$  ist symmetrisch zum Koordinatenursprung, wenn  $f(-x) = -f(x)$  für alle  $x \in D$  gilt. Eine solche Funktion heißt eine ungerade Funktion.

### ■ Beispiele:

1.  $f(x) = 2x^4 + 1$

Wegen  $f(-x) = 2(-x)^4 + 1 = 2x^4 + 1 = f(x)$  ist  $y = f(x)$  symmetrisch zur  $y$ -Achse, also eine gerade Funktion.

2.  $f(x) = 2x^3 - 3x$

Wegen  $f(-x) = 2(-x)^3 - 3(-x) = -2x^3 + 3x = -f(x)$  ist  $y = f(x)$  symmetrisch zum Koordinatenursprung, also eine ungerade Funktion.

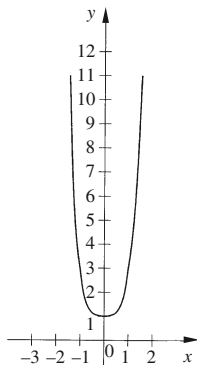


**Bild V-4** Graph der Funktion mit der Gleichung  $f(x) = 2x^4 + 1$

## 2.3 Beschränkte Funktionen

Eine Funktion heißt nach oben beschränkt, wenn ihre Funktionswerte eine bestimmte Zahl nicht übertreffen, und nach unten beschränkt, wenn ihre Funktionswerte nicht kleiner als eine bestimmte Zahl sind. Eine Funktion, die sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist, heißt beschränkt.

Bei einer beschränkten Funktion  $y = f(x)$  existieren also reelle Zahlen  $a$  und  $b$  mit  $a < b$ , so dass gilt:

$$a \leq f(x) \leq b \quad \text{für alle } x \in D$$

### ■ Beispiele:

- $y = 1 - x^2$  ist nach oben beschränkt, denn  $y \leq 1$ .
- $y = e^x$  ist nach unten beschränkt, denn  $y > 0$ .
- $y = \frac{4}{1+x^2}$  ist beschränkt, denn  $0 < y \leq 4$ .

## 2.4 Injektive Funktionen

Eine Funktion heißt injektiv, wenn jedes Bild genau ein Urbild besitzt.

Bei einer injektiven Funktion gehören zu verschiedenen Argumenten also stets verschiedene Bilder.

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

### ■ Beispiele:

Folgende Funktionen sind injektiv:

- $D = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$ ,  $W = \{1, 2, 3, 4, \dots, 24, 25\}$ ,  
 $f(-1) = 1$ ,  $f(-2) = 4$ ,  $f(-3) = 9$ ,  $f(-4) = 16$ ,  $f(-5) = 25$
- $D = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$ ,  $W = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  
 $f(-1) = 1$ ,  $f(-2) = 2$ ,  $f(-3) = 3$ ,  $f(-4) = 4$ ,  $f(-5) = 5$
- $y = f(x) = x + 2$ ,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (also  $D = W = \mathbb{R}$ )
- $y = f(x) = \sqrt{x}$ ,  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

Folgende Funktionen sind nicht injektiv:

- $y = f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$ ,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- $y = f(x) = x^2 - 1$ ,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

3.  $y = f(x) = \frac{x-3}{x^2-2}, f: [1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  (also  $D = [1, 1], W = \mathbb{R}$ )
4.  $y = f(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0, \\ +1 & \text{falls } x > 0 \end{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

## 2.5 Surjektive Funktionen

Eine Funktion heißt surjektiv, wenn ihre Bildmenge gleich dem Wertebereich ist.

$$f(D) = W$$

### Beispiele:

Folgende Funktionen sind surjektiv:

- $D = \{-1, -2, -3, -4, -5\}, W = \{1, 2, 3, 4, 5\},$   
 $f(-1) = 1, f(-2) = 2, f(-3) = 3, f(-4) = 4, f(-5) = 5$
- $y = f(x) = x + 2, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- $y = f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Folgende Funktionen sind nicht surjektiv:

- $D = \{-1, -2, -3, -4, -5\}, W = \{1, 2, 3, 4, \dots, 24, 25\},$   
 $f(-1) = 1, f(-2) = 4, f(-3) = 9, f(-4) = 16, f(-5) = 25$
- $y = f(x) = x^2 - 1, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- $y = f(x) = \frac{x-3}{x^2-2}, f: [1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
- $y = f(x) = \sqrt{x}, f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
- $y = f(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0, \\ +1 & \text{falls } x > 0 \end{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

## 2.6 Bijektive Funktionen

Eine Funktion heißt bijektiv, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Bei einer bijektiven Funktion ist also die Bildmenge gleich dem Wertebereich, und jedes Bild besitzt genau ein Urbild. Ist  $y = f(x), f: D \rightarrow W$  eine bijektive Funktion, so sind die Mengen  $D$  und  $W$  gleich mächtig, das heißt, sie besitzen gleich viele Elemente.

Die bijektiven Funktionen besitzen eine Umkehrfunktion.

### Beispiele:

Folgende Funktionen sind bijektiv:

- $D = \{-1, -2, -3, -4, -5\}, W = \{1, 2, 3, 4, 5\},$   
 $f(-1) = 1, f(-2) = 2, f(-3) = 3, f(-4) = 4, f(-5) = 5$
- $y = f(x) = x + 2, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Folgende Funktionen sind nicht bijektiv:

- $D = \{-1, -2, -3, -4, -5\}, W = \{1, 2, 3, 4, \dots, 24, 25\},$   
 $f(-1) = 1, f(-2) = 4, f(-3) = 9, f(-4) = 16, f(-5) = 25$
- $y = f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- $y = f(x) = x^2 - 1, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- $y = f(x) = \frac{x-3}{x^2-2}, f: [1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
- $y = f(x) = \sqrt{x}, f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
- $y = f(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0, \\ +1 & \text{falls } x > 0 \end{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

## 2.7 Periodische Funktionen

Eine Funktion, deren Funktionsgleichung die Bedingung  $f(x+T) = f(x)$  erfüllt, wobei  $T$  eine Konstante (feste reelle Zahl) ist, heißt periodische Funktion. Die Gleichung  $f(x+T) = f(x)$  gilt für alle  $x$  aus dem Definitionsbereich.

$$f(x+T) = f(x)$$

Die kleinste positive Zahl  $T$  mit dieser Eigenschaft heißt die Periode der Funktion. Den absolut größten Funktionswert nennt man Amplitude der periodischen Funktion.

Beispiele für periodische Funktionen sind die trigonometrischen Funktionen (vgl. Kapitel VI).

## 2.8 Umkehrfunktionen

Die Funktion, die durch Vertauschen von  $x$  und  $y$  aus einer bijektiven Funktion  $y = f(x)$  entsteht, heißt Umkehrfunktion oder inverse Funktion von  $y = f(x)$ .

Bei einer bijektiven Funktion  $y = f(x), f: D \rightarrow W$  ist jedes Element  $y \in W$  Bild von genau einem Element  $x \in D$ . Man kann eine neue Funktion definieren, die jedem  $y \in W$  als Bild gerade das  $x \in D$  zuordnet, das Urbild von  $y$  ist. Diese Funktion leistet das Umgekehrte wie  $f$ , ihr Definitionsbereich ist  $W$ , und ihr Wertebereich ist  $D$ . Man nennt diese Funktion daher die Umkehrfunktion von  $f$  und bezeichnet sie mit  $f^{-1}$ .

$$y = f^{-1}(x), f^{-1}: W \rightarrow D$$

Versteht man unter der Schreibweise  $g(f(x))$ , dass man auf  $x$  die Zuordnungsvorschrift  $f$  und dann auf  $f(x)$  die Vorschrift  $g$  anwendet, so gilt  $f^{-1}(f(x)) = x$  und  $f(f^{-1}(x)) = x$ .

Zu einer streng monoton wachsenden oder streng monoton fallenden Funktion existiert die Umkehrfunktion.

Bestimmung der Umkehrfunktion:

- Auflösen von  $y = f(x)$  nach  $x$ :  $x = f^{-1}(y)$
- Vertauschen von  $x$  und  $y$ :  $y = f^{-1}(x)$

Diesen Operationen entspricht die Spiegelung des Graphen der Funktion an der Winkelhalbierenden  $y = x$ .

### Beispiele:

- $y = f(x) = 4x - 1, D = W = \mathbb{R}$   
Umkehrfunktion:  $y = f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}, D = W = \mathbb{R}$

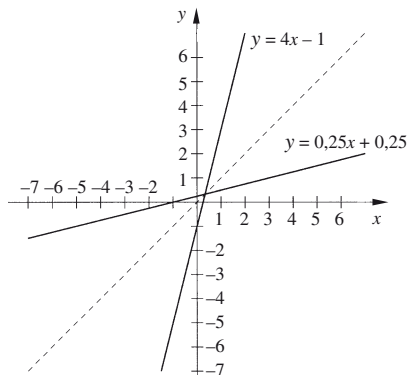


Bild V-6 Graphen der Funktionen von Beispiel 1

2.  $y = f(x) = x^2$ ,  $D = W = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$   
 Umkehrfunktion:  
 $y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ,  $D = W = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$

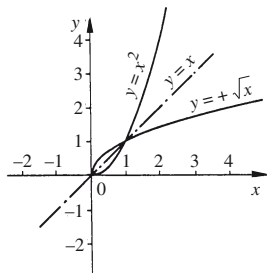


Bild V-7 Graphen der Funktionen von Beispiel 2

3.  $y = f(x) = e^x$ ,  $D = \mathbb{R}$ ,  $W = \mathbb{R}^+$   
 Umkehrfunktion:  $y = f^{-1}(x) = \ln x$ ,  $D = \mathbb{R}^+$ ,  $W = \mathbb{R}$   
 4.  $y = f(x) = 2^x$ ,  $D = \mathbb{R}$ ,  $W = \mathbb{R}^+$   
 Umkehrfunktion:  $y = f^{-1}(x) = \log_2 x$ ,  $D = \mathbb{R}^+$ ,  $W = \mathbb{R}$

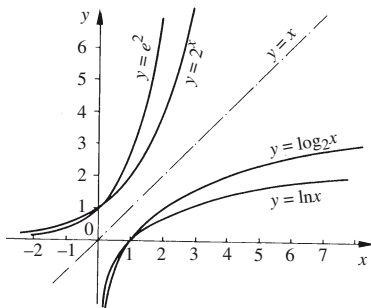


Bild V-8 Graphen der Funktionen von Beispiel 3 und Beispiel 4

## 2.9 Reelle und komplexe Funktionen

Eine Funktion mit der Funktionsgleichung  $y = f(x)$ , deren Definitions- und Wertebereich nur reelle Zahlen enthalten, nennt man eine reelle Funktion einer reellen Variablen.

### Beispiele:

1.  $y = x^2$ ,  $D = (-\infty, \infty)$ ,  $W = [0, \infty)$
2.  $y = \sqrt{x}$ ,  $D = [0, \infty)$ ,  $W = [0, \infty)$

Ist dagegen die unabhängige Variable einer Funktionsgleichung eine komplexe Zahl  $z$ , dann wird durch  $w = f(z)$  eine komplexe Funktion einer komplexen Variablen beschrieben. Komplexe Funktionen werden in dem mathematischen Gebiet Funktionentheorie behandelt.

## 3 Einteilung der elementaren Funktionen

Eine elementare Funktion ist eine Funktion, deren Funktionsgleichung durch einen geschlossenen analytischen Ausdruck dargestellt werden kann. Elementare Funktionen sind durch Formeln definiert, die nur endlich viele mathematische Operatio-

nen mit der unabhängigen Variablen  $x$  und den Koeffizienten enthalten.

Man teilt die elementaren Funktionen in algebraische Funktionen und transzendente Funktionen ein.

Bei algebraischen Funktionen lassen sich die Verknüpfung der unabhängigen Variablen  $x$  und der abhängigen Variablen  $y$  in einer algebraischen Gleichung folgender Form darstellen, wobei  $p_0, p_1, \dots, p_n$  Polynome in  $x$  beliebigen Grades sind.

$$p_0(x) + p_1(x)y + p_2(x)y^2 + \dots + p_n(x)y^n = 0$$

Elementare Funktionen, die nicht algebraisch sind, heißen transzendent.

### Beispiele für algebraische Funktionen:

1.  $y = 3x^2 + 4$
2.  $y = \frac{2x}{x^3 + 2x - 1}$
3.  $y = \sqrt{2x + 3}$
4.  $3xy^3 - 4xy + x^3 - 1 = 0$  (hier also  $p_0(x) = x^3 - 1$ ,  
 $p_1(x) = -4x$ ,  $p_2(x) = 0$ ,  $p_3(x) = 3x$ )

Zu den transzenten Funktionen gehören zum Beispiel die Exponentialfunktionen, die Logarithmusfunktionen und die trigonometrischen Funktionen.

### Beispiele für transzendente Funktionen:

1.  $y = e^x$
2.  $y = \sin x$
3.  $y = \ln x$
4.  $y = \frac{\ln x + \sqrt{\sin x}}{x^2 + 5}$

Die algebraischen Funktionen untergliedern sich in die rationalen Funktionen und in die irrationalen Funktionen.

Eine rationale Funktion ist eine algebraische Funktion, für die die Funktionsgleichung  $y = f(x)$  als eine explizite Formel angegeben werden kann, in der auf die unabhängige Variable  $x$  nur endlich viele rationale Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) angewandt werden. Eine algebraische Funktion, die nicht rational ist, heißt irrational.

### Beispiele für rationale Funktionen:

1.  $y = 3x^3 - \frac{1}{4}$
2.  $y = \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^3 + 3x^2 - 2}$

Bei irrationalen Funktionen tritt die unabhängige Variable auch unter einem Wurzelzeichen auf.

### Beispiele für irrationale Funktionen:

1.  $y = \sqrt{3x^2 + 4}$
2.  $y = \sqrt[3]{(x^2 + 1)\sqrt{x}}$

Für rationale Funktionen ist  $f(x)$  ein Polynom (dann ist  $y = f(x)$  eine ganze rationale Funktion) oder ein Quotient aus Polynomen (dann heißt  $y = f(x)$  eine gebrochene rationale Funktion).

Ganze rationale Funktionen lassen sich also darstellen in folgender Form mit

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$ .

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

Ist  $n$  der Grad des Polynoms, so nennt man die Funktion ganze rationale Funktion  $n$ -ten Grades. Bei ganzen rationalen Funktionen werden auf die unabhängige Variable  $x$  nur die Operationen Addition, Subtraktion und Multiplikation angewandt.

Ganze rationale Funktionen vom Grad 0 ( $y = a_0$ ) nennt man konstante Funktionen, vom Grad 1 ( $y = a_1 x + a_0$ ) lineare Funktionen, vom Grad 2 ( $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ) quadratische Funktionen und vom Grad 3 ( $y = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ) kubische Funktionen.

|                         |                                       |
|-------------------------|---------------------------------------|
| Konstante Funktionen    | $y = a_0$                             |
| Lineare Funktionen      | $y = a_1 x + a_0$                     |
| Quadratische Funktionen | $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$           |
| Kubische Funktionen     | $y = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ |

#### ■ Beispiele für ganze rationale Funktionen:

1.  $y = 23x^4 - 12x + 4$
2.  $y = \frac{11}{12} x^{23} - 11x^{17} - 12x^9 - \pi x^6 - \frac{12}{\sqrt{5}} x - 2$
3.  $y = 1 - 3x + x^6 - 2x^2$
4.  $y = -7$  (konstante Funktion)
5.  $y = 3x - 4\pi$  (lineare Funktion)
6.  $y = x^2 - x + 1$  (quadratische Funktion)
7.  $y = 4x^3 - 2x + 5$  (kubische Funktion)

Gebrochene rationale Funktionen sind Funktionen mit einer Funktionsgleichung  $y = f(x)$ , bei der  $f(x)$  als Quotient zweier Polynome darstellbar ist. Sie besitzen also eine Darstellung folgender Form mit  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}, a_n, b_m \neq 0, m \neq 0$ .

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} \\ = \frac{\sum_{i=0}^n a_i x^i}{\sum_{k=0}^m b_k x^k}$$

Eine gebrochene rationale Funktion kann also immer als Quotient zweier ganzer rationaler Funktionen dargestellt werden. Bei gebrochenen rationalen Funktionen werden auf die unabhängige Variable  $x$  nur die Grundrechenarten (also die Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) angewandt. Die Definitionsmenge einer gebrochenen rationalen Funktion besteht aus denjenigen reellen Zahlen, für die der Nenner nicht Null wird.

Für  $n < m$  heißt die Funktion echt gebrochene rationale Funktion, für  $n \geq m$  heißt sie unecht gebrochene rationale Funktion.

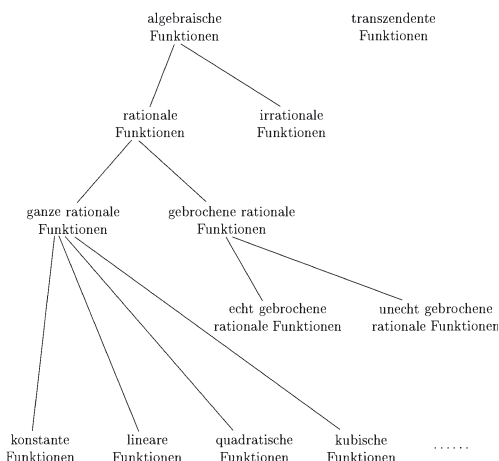
Gebrochene rationale Funktionen mit  $n = 1$  und  $m = 1$ , also  $y = \frac{a_1 x + a_0}{b_1 x + b_0}$ , heißen gebrochene lineare Funktionen.

#### ■ Beispiele für gebrochene rationale Funktionen:

1.  $y = \frac{2}{x}$
2.  $y = \frac{x^4 - 22x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 12}{x^5 - 11x^3 + x + 1}$
3.  $y = \frac{2x}{x^3 - 5x^2 - 2x + 1}$
4.  $y = \frac{2x + 4}{x - 3}$  (gebrochene lineare Funktion)
5.  $y = \frac{x^5 - 2}{x^2 + 1}$
6.  $y = x^2 + x + \frac{1}{x} \left( = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x} \right)$

Bei den ersten drei Beispielen handelt es sich um echt gebrochene rationale Funktionen, bei den letzten drei Beispielen um unecht gebrochene rationale Funktionen.

#### Zusammenfassende Übersicht über die elementaren Funktionen



## 4 Ganze rationale Funktionen

### 4.1 Konstante Funktionen

Funktionen mit einer Funktionsgleichung

$$y = f(x) = n \quad (n \in \mathbb{R})$$

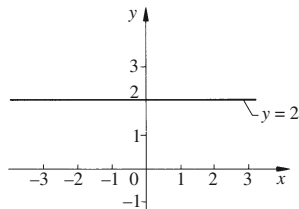
Der Graph einer konstanten Funktion ist eine Parallele zur  $x$ -Achse, und zwar im Abstand  $n$ . Im Fall  $n = 0$  ist die Gerade die  $x$ -Achse selbst. Die Geradengleichung der  $x$ -Achse ist also  $y = 0$ .

Um den Graph einer Funktion zu zeichnen, ist es sinnvoll, sich die Koordinaten von Punkten des Graphen in einer Wertetabelle aufzuschreiben. Da eine Gerade durch zwei auf ihr liegende Punkte festgelegt ist, reicht es im Prinzip, bei Geraden die Koordinaten von zwei Punkten zu berechnen.

■ **Beispiel:**Funktionsgleichung:  $y = f(x) = 2$ 

Wertetabelle:

| x | -1 | 0 | 1 |
|---|----|---|---|
| y | 2  | 2 | 2 |

Bild V-9 Graph der konstanten Funktion  $y = 2$ **4.2 Lineare Funktionen**

Funktionen mit einer Funktionsgleichung

$$y = f(x) = mx + n \quad (m, n \in \mathbb{R}, m \neq 0)$$

Eine lineare Funktion ist eine ganze rationale Funktion 1. Grades.

Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade (daher der Name lineare Funktion), und zwar die Gerade mit der Steigung  $m$  und dem Achsenabschnitt  $n$  auf der  $y$ -Achse (vgl. Abschnitt VII.2.1). Die Steigung  $m$  einer Geraden ist der „Höhenzuwachs“ (die Differenz der  $y$ -Werte) bei einem Schritt um 1 nach rechts. Der Achsenabschnitt  $n$  ist der  $y$ -Wert, bei dem die Gerade die  $y$ -Achse schneidet.

Für  $m > 0$  ist die Funktion streng monoton wachsend, für  $m < 0$  ist sie streng monoton fallend.

Schnittpunkt des Graphen der Funktion mit der  $x$ -Achse:  $S_x\left(\frac{-n}{m} \mid 0\right)$ , Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse:  $S_y(0 \mid n)$ .

■ **Beispiel:**Funktionsgleichung:  $y = f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ 

Wertetabelle:

| x | -6 | -4 | -2 | 0 | 2 | 4 |
|---|----|----|----|---|---|---|
| y | -1 | 0  | 1  | 2 | 3 | 4 |

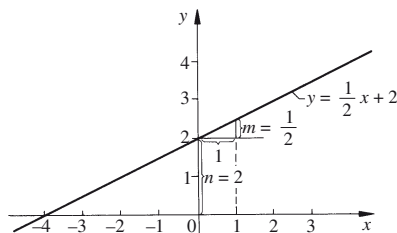


Bild V-10 Graph der linearen Funktion

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

Ist  $n = 0$ , so nennt man die lineare Funktion  $y = mx$  ( $m \in \mathbb{R}, m \neq 0$ ) auch Proportionalfunktion. Der Graph einer Proportionalfunktion ist eine Gerade durch den Koordinatenursprung, und zwar mit der Steigung  $m$ .

Man nennt  $m$  auch den Proportionalitätsfaktor der Gleichung, denn es gilt  $m = \frac{y}{x}$ .

■ **Beispiel:**Funktionsgleichung:  $y = f(x) = \frac{1}{2}x$ 

Wertetabelle:

| x | -3                    | -2 | -1                    | 0 | 1                   | 2 | 3                   |
|---|-----------------------|----|-----------------------|---|---------------------|---|---------------------|
| y | $-\frac{3}{2} = -1,5$ | -1 | $-\frac{1}{2} = -0,5$ | 0 | $\frac{1}{2} = 0,5$ | 1 | $\frac{3}{2} = 1,5$ |

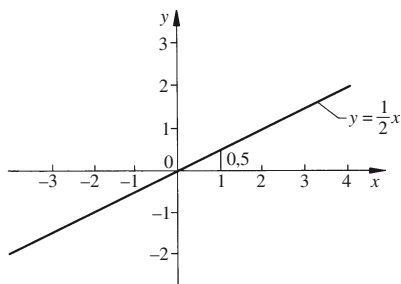


Bild V-11 Graph der Proportionalfunktion

$$y = \frac{1}{2}x$$

■ **Anwendungsbeispiele:**

## 1. Hookesches Gesetz

Funktionsgleichung:  $F = c \Delta l$  (statt  $y = mx$ )

Dabei bedeuten:

$F$  Federkraft,  $c$  Federkonstante (Federrate, Federsteifigkeit),  
 $\Delta l$  Längenveränderung der Feder

■ **Beispiel** (vgl. Abschnitt II.4):

Welche Kraft  $F$  dehnt eine Feder um 4 cm, wenn die Kraft 3 N (Newton) eine Dehnung um 2 cm bewirkt?

$$c = \frac{3 \text{ N}}{2 \text{ cm}} = 1,5 \frac{\text{N}}{\text{cm}}, \quad \Delta l = 4 \text{ cm}$$

Einsetzen in die Funktionsgleichung:

$$F = 1,5 \frac{\text{N}}{\text{cm}} \cdot 4 \text{ cm} = 6 \text{ N}$$

Antwort: Die Kraft 6 N bewirkt die Dehnung um 4 cm.

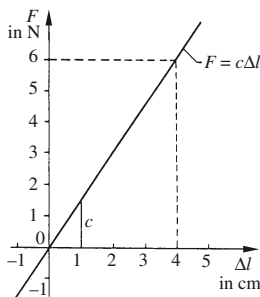


Bild V-12 Hookesches Gesetz

*Anmerkung:* Es muss sichergestellt sein, dass sich die Werte im materialbedingten Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes bewegen.

2. *Geschwindigkeit im Weg-Zeit-Diagramm*

Funktionsgleichung:  $\Delta s = v \Delta t$  (statt  $y = mx$ )

Dabei bedeuten:

$\Delta s$  zurückgelegter Weg,  $v$  Geschwindigkeit,  $\Delta t$  abgelaufene Zeit

■ **Beispiel** (vgl. Abschnitt II.4):

Wie weit kommt ein Flugzeug in  $2\frac{1}{2}$  Stunden, wenn es 10 km in 45 s zurücklegt?

$$v = \frac{10\,000\text{ m}}{45\text{ s}} = 222,2\frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \Delta t = 2,5\text{ h} \cdot \frac{3600\text{ s}}{\text{h}} = 9000\text{ s}$$

Einsetzen in die Funktionsgleichung:

$$\Delta s = \frac{10\,000\text{ m}}{45\text{ s}} \cdot 9000\text{ s} = 2000\text{ km}$$

Antwort: Das Flugzeug fliegt 2000 km weit.

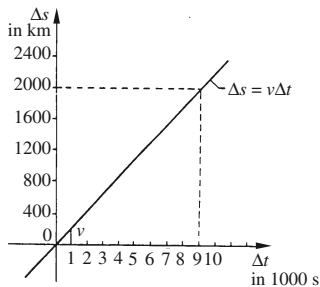


**Bild V-13** Geschwindigkeit im Weg-Zeit-Diagramm

3. *Gay-Lussacsches Gesetz*

Funktionsgleichung:  $V = V_0(1 + \gamma\delta)$  oder  $V = V_0\gamma\delta + V_0$   
(statt  $y = mx + n$ )

Dabei bedeuten:

$V$  variables Gasvolumen,  $V_0$  Volumen derselben Gasmenge bei  $0^\circ\text{C}$ ,  $\gamma = \frac{1}{273}$  konstanter Volumenausdehnungskoeffizient,  $\delta$  Maßzahl der in  $^\circ\text{C}$  gemessenen variablen Temperatur. Ein Vergleich mit der linearen Funktion ergibt:

$$V = y, \quad V_0\gamma = \frac{V_0}{273} = m, \quad \delta = x, \quad V_0 = b$$

Der Definitionsbereich ist gegeben durch die Bedingung  $-273 \leq \delta < \infty$ .

■ **Beispiel:**

Im Winderhitzer eines Hochofens werden stündlich  $42\,000\text{ m}^3$  Luft von  $17^\circ\text{C}$  auf  $800^\circ\text{C}$  erwärmt. Wie groß ist das Volumen der vom Winderhitzer pro Stunde gelieferten erhitzten Luft?

*Lösung:* Die Gleichung  $V = V_0(1 + \gamma\delta)$  wird zweimal benutzt.

Zuerst Berechnung von  $V_0$ :

$$V_0 = V_1 \frac{1}{1 + \gamma\delta_1} = 42\,000\text{ m}^3 \frac{1}{1 + \frac{1}{273} \cdot 17} = 39\,537,9310\ldots\text{ m}^3$$

Anschließend Berechnung des gesuchten  $V_2$ :

$$V_2 = V_0(1 + \gamma\delta_2) = 39\,537,9310\ldots\text{ m}^3 \left(1 + \frac{1}{273} \cdot 800\right) = 155\,400\text{ m}^3$$

Antwort: Das Volumen beträgt  $155\,400\text{ m}^3$ .

Wertetabelle:

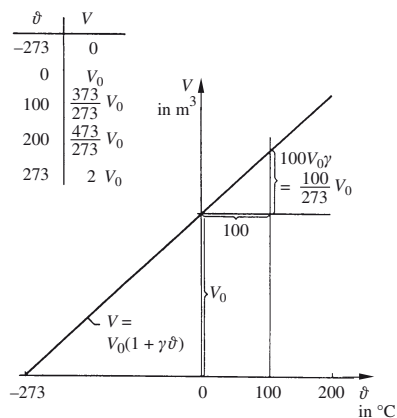


**Bild V-14** Gay-Lussacsches Gesetz

### 4.3 Quadratische Funktionen

Funktionen mit einer Funktionsgleichung

$$y = f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$(a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}, a_2 \neq 0)$$

Eine quadratische Funktion ist eine ganze rationale Funktion 2. Grades.

Der Graph jeder quadratischen Funktion ist eine Parabel (vgl. auch Abschnitt VII.5.3).

Für spezielle Koeffizienten  $a_2, a_1, a_0$  in der Funktionsgleichung erhält man spezielle Parabeln.

*Normalparabel*

Mit den Koeffizienten  $a_2 = 1, a_1 = 0, a_0 = 0$  in der Gleichung  $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$  der quadratischen Funktion erhält man die Gleichung  $y = x^2$  der Normalparabel.

Normalparabel

$$y = x^2$$

Der Punkt  $(0|0)$ , also der Koordinatenursprung, ist der Scheitelpunkt der Normalparabel. Die Normalparabel ist symmetrisch zur y-Achse und nach oben geöffnet. Der Definitionsbereich ist  $D = \mathbb{R}$ , der Wertebereich ist  $W = \mathbb{R}$ , und die Bildmenge  $f(D)$  ist die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen:  $f(D) = \mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ .

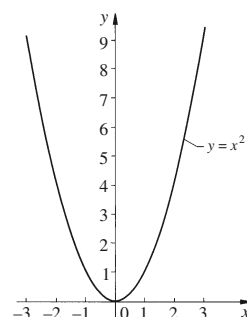


**Bild V-15**

Normalparabel



**Verschobene Normalparabel**

Mit  $a_2 = 1$  und beliebigen Werten für  $a_1$  und  $a_0$  (aber nicht beide gleich 0) in  $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$  ergibt sich die Gleichung  $y = x^2 + a_1x + a_0$  einer verschobenen Normalparabel.

Verschobene Normalparabel

$$y = x^2 + a_1x + a_0$$

Eine verschobene Normalparabel hat dieselbe Form wie die Normalparabel, der Scheitelpunkt liegt jedoch nicht im Koordinatenursprung.

Berechnung des Scheitelpunkts  $S$  der verschobenen Normalparabel mit der Gleichung  $y = x^2 + a_1x + a_0$ : Subtraktion von  $a_0$  ergibt  $y - a_0 = x^2 + a_1x$ .

Durch quadratische Ergänzung erhält man  $y - a_0 + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 = x^2 + a_1x + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2$ , woraus  $y - \left(a_0 - \frac{a_1^2}{4}\right) = \left(x + \frac{a_1}{2}\right)^2$  folgt.

Die rechte Gleichungsseite und damit auch die linke ist  $\geq 0$ . Der kleinste  $y$ -Wert ergibt sich, wenn beide Gleichungsseiten gleich 0 sind, also für  $y = a_0 - \frac{a_1^2}{4}$ . Dies ist der Wert der Ordinate des Scheitelpunkts.

Die rechte Gleichungsseite wird für  $x = -\frac{a_1}{2}$  gleich 0, dem Wert der Abszisse des Scheitelpunkts. Man erhält somit als Scheitelpunkt der verschobenen Normalparabel

$$S(x_S | y_S) = S\left(-\frac{a_1}{2} \mid a_0 - \frac{a_1^2}{4}\right)$$

Berechnung des Schnittpunkts  $S_y$  der verschobenen Normalparabel mit der  $y$ -Achse:

Die Ordinate des Schnittpunkts mit der  $y$ -Achse ergibt sich, wenn man in der Funktionsgleichung  $x = 0$  setzt:  $y = 0 + 0 + a_0 = a_0$ . Somit ist  $S_y = S_y(0 | a_0)$ .

Berechnung der Schnittpunkte  $S_{x_1}$  und  $S_{x_2}$  der verschobenen Normalparabel mit der  $x$ -Achse:

Die Abszissen der Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse erhält man, wenn man in der Funktionsgleichung  $y = 0$  setzt:  $0 = x^2 + a_1x + a_0$ . Dies ist eine quadratische Gleichung in  $x$ , deren Nullstellen bestimmt werden müssen:

$$x_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}.$$

Die Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse lauten also:

$$S_{x_1} = S_{x_1}\left(-\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} \mid 0\right),$$

$$S_{x_2} = S_{x_2}\left(-\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} \mid 0\right)$$

**Beispiele:**

$$1. \quad y = x^2 - x - 1 \quad (\text{also } a_1 = -1 \text{ und } a_0 = -1)$$

Wegen  $\frac{a_1^2}{4} = \frac{(-1)^2}{4} = \frac{1}{4}$  ergibt sich

$$\text{Scheitelpunkt: } S = S\left(\frac{1}{2} \mid -1 - \frac{1}{4}\right) = S\left(\frac{1}{2} \mid -\frac{5}{4}\right)$$

Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse:  $S_y = S_y(0 | -1)$

Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse:

$$\begin{aligned} S_{x_1} &= S_{x_1}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1} \mid 0\right) = S_{x_1}\left(\frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}) \mid 0\right) \\ &= S_{x_1}(1,6180 \dots | 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{x_2} &= S_{x_2}\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 1} \mid 0\right) = S_{x_2}\left(\frac{1}{2} (1 - \sqrt{5}) \mid 0\right) \\ &= S_{x_2}(-0,6180 \dots | 0) \end{aligned}$$

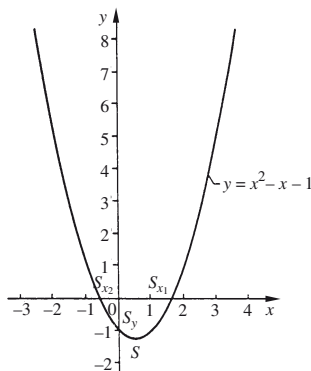


**Bild V-16** Verschobene Normalparabel

$$2. \quad y = x^2 - 4x \quad (\text{also } a_1 = -4 \text{ und } a_0 = 0)$$

Es ergibt sich  $\frac{a_1^2}{4} = \frac{(-4)^2}{4} = 4$ . Damit berechnet man den Scheitelpunkt:

$$S = S\left(-\frac{-4}{2} \mid -4\right) = S(2 | -4)$$

Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse:  $S_y = S_y(0 | 0)$

Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse:

$$S_{x_1} = S_{x_1}(2 + \sqrt{4 - 0} | 0) = S_{x_1}(4 | 0),$$

$$S_{x_2} = S_{x_2}(2 - 2 | 0) = S_{x_2}(0 | 0)$$

Die Parabel geht durch den Koordinatenursprung, deshalb fällt der Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse mit dem einen Schnittpunkt mit der  $x$ -Achse zusammen.

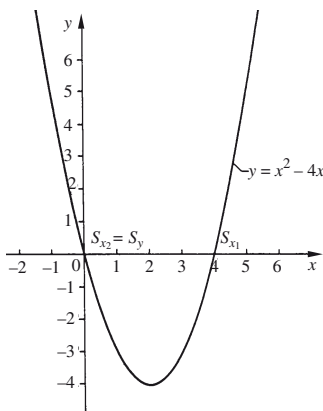


**Bild V-17** Verschobene Normalparabel

**Gespiegelte Normalparabel**

Mit den Koeffizienten  $a_2 = -1$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_0 = 0$  in  $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$  ergibt sich die Gleichung  $y = -x^2$  der gespiegelten Normalparabel.

Gespiegelte Normalparabel  $y = -x^2$

Die gespiegelte Normalparabel entsteht aus der Normalparabel durch Spiegelung an der  $x$ -Achse. Der Punkt  $(0|0)$  ist der Scheitelpunkt der gespiegelten Normalparabel. Sie ist symmetrisch zur  $y$ -Achse und nach unten geöffnet.

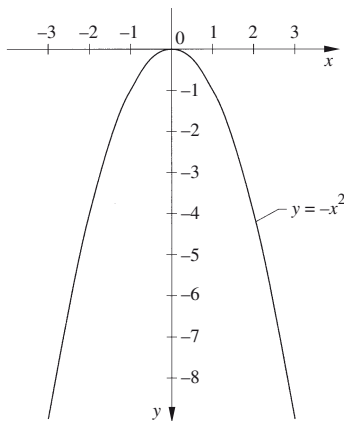


**Bild V-18** Gespiegelte Normalparabel

**Gespiegelte verschobene Normalparabel**

Mit  $a_2 = -1$  und beliebigen Werten für  $a_1$  und  $a_0$  (aber nicht beide gleich 0) ergibt sich die Gleichung  $y = -x^2 + a_1x + a_0$  einer gespiegelten verschobenen Normalparabel.

Gespiegelte verschobene Normalparabel

$$y = -x^2 + a_1x + a_0$$

Berechnung des Scheitelpunkts  $S$ :

Subtraktion von  $a_0$ :  $y - a_0 = -x^2 + a_1x$

Subtraktion von  $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2$ :

$$y - a_0 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 = -x^2 + a_1x - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2$$

Zusammenfassen auf der linken Seite des Gleichheitszeichens und Ausklammern von  $-1$  auf der rechten Seite:

$$y - \left(a_0 + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2\right) = -\left(x^2 - a_1x + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2\right)$$

Anwenden der zweiten binomischen Formel auf der rechten Seite:

$$y - \left(a_0 + \frac{a_1^2}{4}\right) = -\left(x - \frac{a_1}{2}\right)^2$$

Die rechte Gleichungsseite und damit auch die linke ist  $\leq 0$ . Der größte  $y$ -Wert ergibt sich, wenn beide

Gleichungsseiten gleich 0 sind, also für  $y = a_0 + \frac{a_1^2}{4}$ . Dies ist der Wert der Ordinate des Scheitelpunkts.

Die rechte Gleichungsseite wird für  $x = \frac{a_1}{2}$  gleich 0, dem Wert der Abszisse des Scheitelpunkts. Somit ergibt sich für den Scheitelpunkt der gespiegelten verschobenen Normalparabel

$$S(x_S | y_S) = S\left(\frac{a_1}{2} \mid a_0 + \frac{a_1^2}{4}\right)$$

Berechnung des Schnittpunkts  $S_y$  mit der  $y$ -Achse:

Durch Einsetzen von  $x = 0$  in die Funktionsgleichung erhält man  $y = a_0$  als Ordinate des Schnittpunkts und als Schnittpunkt somit  $S_y = S_y(0 | a_0)$ .

Berechnung der Schnittpunkte  $S_{x_1}$  und  $S_{x_2}$  mit der  $x$ -Achse:

Durch Einsetzen von  $y = 0$  in die Funktionsgleichung ergibt sich  $0 = -x^2 + a_1x + a_0$  und nach Multiplikation der Gleichung mit  $-1$  die quadratische Gleichung  $x^2 - a_1x - a_0 = 0$ , die die Lösungen  $x_{1,2} = \frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 + a_0}$  hat. Die Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse lauten somit:

$$S_{x_1} = S_{x_1}\left(\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} + a_0} \mid 0\right),$$

$$S_{x_2} = S_{x_2}\left(\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} + a_0} \mid 0\right)$$

■ **Beispiel:**

3.  $y = -x^2 - 4x + 3$  (also  $a_1 = -4$  und  $a_0 = 3$ )

Man berechnet  $\frac{a_1^2}{4} = \frac{(-4)^2}{4} = 4$

Scheitelpunkt:  $S = S(-2 | 3 + 4) = S(-2 | 7)$

Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse:  $S_y = S_y(0 | 3)$

Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse:

$$S_{x_1} = S_{x_1}(-2 + \sqrt{4 + 3} | 0) = S_{x_1}(-2 + \sqrt{7} | 0)$$

$$= S_{x_1}(0,6457 \dots | 0),$$

$$S_{x_2} = S_{x_2}(-2 - \sqrt{7} | 0) = S_{x_2}(-4,6457 \dots | 0)$$

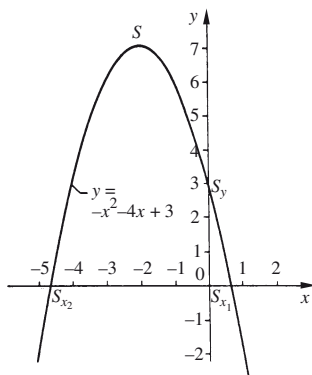


**Bild V-19** Gespiegelte verschobene Normalparabel

## Allgemeiner Fall

Parabel  $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$

Für  $a_2 > 0$  ist die Parabel nach oben, für  $a_2 < 0$  nach unten geöffnet.

Für  $|a_2| > 1$  ist die Parabel im Vergleich zur Normalparabel gestreckt und für  $|a_2| < 1$  gestaucht. Man nennt  $|a_2|$  deshalb den Streckungsfaktor der Parabel.

Eine Änderung des Koeffizienten  $a_1$  bewirkt eine Verschiebung der Parabel in  $x$ -Richtung, eine Änderung von  $a_0$  bewirkt eine Verschiebung in  $y$ -Richtung.

Berechnung des Scheitelpunkts  $S$ :

Subtraktion von  $a_0$ :  $y - a_0 = a_2x^2 + a_1x$

Ausklammern von  $a_2$  auf der rechten Seite:

$$y - a_0 = a_2 \left( x^2 + \frac{a_1}{a_2} x \right)$$

Quadratische Ergänzung in der Klammer auf der rechten Seite, also Addition von  $\frac{a_1^2}{4a_2}$  auf beiden Seiten der Gleichung:

$$y - a_0 + \frac{a_1^2}{4a_2} = a_2 \left( x^2 + \frac{a_1}{a_2} x + \left( \frac{a_1}{2a_2} \right)^2 \right)$$

Anwenden der ersten binomischen Formel auf der rechten Seite:

$$y - \left( a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2} \right) = a_2 \left( x + \frac{a_1}{2a_2} \right)^2$$

Hieraus liest man die Koordinaten des Scheitelpunkts ab, nämlich diejenigen Werte für  $x$  und  $y$ , für die beide Seiten der Gleichung gleich 0 werden:

$$x_S = -\frac{a_1}{2a_2}, \quad y_S = a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2}$$

Scheitelpunkt  $S$  der Parabel:

$$S(x_S | y_S) = S \left( -\frac{a_1}{2a_2} \mid a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2} \right)$$

Man nennt die Gleichung  $y - y_S = a_2(x - x_S)^2$  Scheitelform der quadratischen Funktion, wohingegen  $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$  Normalform der quadratischen Funktion heißt.

Scheitelform der quadratischen Funktion

$$y - y_S = a_2(x - x_S)^2$$

Berechnung des Schnittpunkts  $S_y$  mit der  $y$ -Achse:

Setzt man in der Funktionsgleichung  $x = 0$  ein, so erhält man  $y = a_0$  als Ordinate des Schnittpunkts  $S_y$  und als Schnittpunkt somit  $S_y = S_y(0 | a_0)$ .

Der Wert  $D = a_1^2 - 4a_2a_0$  heißt Diskriminante der quadratischen Funktion  $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ . Gilt  $D > 0$ , so hat die zugehörige Parabel zwei Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse. Für  $D = 0$  gibt es einen Schnittpunkt (der Schnittpunkt ist dann ein Berührungspunkt). Für  $D < 0$  gibt es keinen Schnittpunkt mit der  $x$ -Achse.

Berechnung des Schnittpunkts (für  $D = 0$ ) bzw. der Schnittpunkte (für  $D > 0$ ) der Parabel mit der  $x$ -Achse:

Durch Einsetzen von  $y = 0$  in die Funktionsgleichung  $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$  erhält man die quadratische Gleichung  $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ , die die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{1}{2a_2} \left( -a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0} \right)$$

hat. Daraus ergeben sich die Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse:

$$S_{x_1} \left( \frac{1}{2a_2} \left( -a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0} \right) \mid 0 \right),$$

$$S_{x_2} \left( \frac{1}{2a_2} \left( -a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0} \right) \mid 0 \right).$$

## ■ Beispiele:

4.  $y = 4x^2$  (also  $a_2 = 4$ ,  $a_1 = a_0 = 0$ )

Wegen  $|a_2| = |4| = 4 > 1$  ist die Parabel im Vergleich zur Normalparabel gestreckt, und wegen  $a_2 = 4 > 0$  ist die Parabel nach oben geöffnet.

Aus  $a_1 = a_0 = 0$  folgt  $S = S(0 | 0)$  und  $S = S_x = S_y$ .

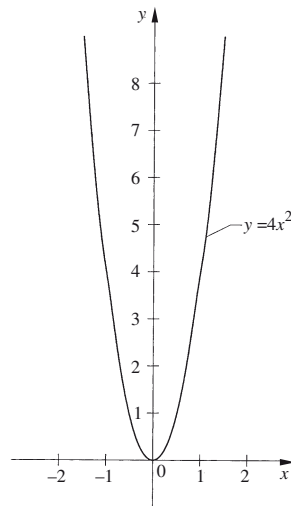


Bild V-20 Parabel

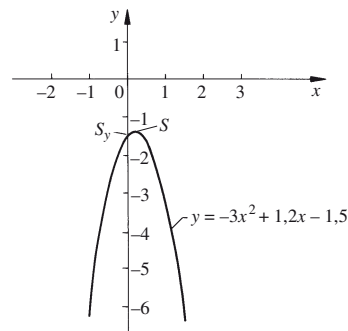


Bild V-21 Parabel

5.  $y = -3x^2 + 1,2x - 1,5$  (also  $a_2 = -3$ ,  $a_1 = 1,2$ ,  $a_0 = -1,5$ )  
 Aus  $|a_2| = |-3| = 3 > 1$  folgt, dass die Parabel im Vergleich zur Normalparabel gestreckt ist. Wegen  $a_2 = -3 < 0$  ist die Parabel nach unten geöffnet.

Berechnung des Scheitelpunkts  $S$ :

$$\begin{aligned} S(x_S | y_S) &= S\left(-\frac{1,2}{2 \cdot (-3)} \mid -1,5 - \frac{(1,2)^2}{4 \cdot (-3)}\right) \\ &= S\left(\frac{1,2}{6} \mid -1,5 + \frac{1,44}{12}\right) \\ &= S(0,2 \mid -1,5 + 0,12) = S(0,2 \mid -1,38) \end{aligned}$$

Scheitelform der Parabelgleichung:  $y + 1,38 = -3(x - 0,2)^2$

Berechnung des Schnittpunkts  $S_y$  mit der  $y$ -Achse:

$$S_y = S_y(0 \mid -1,5)$$

Berechnung der Diskriminante  $D$ :

$$D = a_1^2 - 4a_2a_0 = (1,2)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-1,5) = -16,56.$$

Wegen  $D < 0$  gibt es keinen Schnittpunkt mit der  $x$ -Achse.

## 4.4 Kubische Funktionen

Funktionen mit einer Funktionsgleichung

$$y = f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$(a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}, a_3 \neq 0)$

Eine kubische Funktion ist eine ganze rationale Funktion 3. Grades.

Der Graph einer kubischen Funktion ist eine kubische Parabel.

Das Verhalten der Funktion hängt wesentlich von dem Koeffizienten  $a_3$  und der Diskriminante  $D = 3a_3a_1 - a_2^2$  ab. Wenn  $D \geq 0$  ist, dann ist die Funktion für  $a_3 > 0$  monoton wachsend und für  $a_3 < 0$  monoton fallend (vgl. Abschnitt V.2.1). Für  $D < 0$  besitzt die Funktion ein Maximum und ein Minimum (siehe Abschnitt VIII.4.10). Für  $a_3 > 0$  ist die Funktion dann von  $-\infty$  bis zum Maximum monoton wachsend, monoton fallend vom Maximum bis zum Minimum und danach bis  $+\infty$  wieder monoton wachsend. Für  $a_3 < 0$  (und  $D < 0$ ) ist die Funktion von  $-\infty$  bis zum Minimum monoton fallend, vom Minimum bis zum Maximum monoton wachsend und danach bis  $+\infty$  wieder monoton fallend.

Es gibt ein, zwei (dann ist ein Schnittpunkt ein Berührungspunkt) oder drei Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse (abhängig von den Koeffizienten  $a_3, a_2, a_1, a_0$ ). Der Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse ist  $S_y(0 \mid a_0)$ .

Spezialfälle:

*Kubische Normalparabel*

Mit den Koeffizienten  $a_3 = 1$ ,  $a_2 = 0$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_0 = 0$  ergibt sich die kubische Normalparabel  $y = x^3$ . Sie schneidet sowohl die  $x$ - als auch die  $y$ -Achse im Ursprung.

Kubische Normalparabel  $y = x^3$

*Gespiegelte kubische Normalparabel*

Mit den Koeffizienten  $a_3 = -1$ ,  $a_2 = 0$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_0 = 0$  erhält man die gespiegelte kubische Normalparabel  $y = -x^3$ .

Gespiegelte kubische Normalparabel  $y = -x^3$

### ■ Beispiele:

1.  $y = x^3$
2.  $y = -\frac{1}{2}x^3$
3.  $y = \frac{1}{4}x^3 - x$

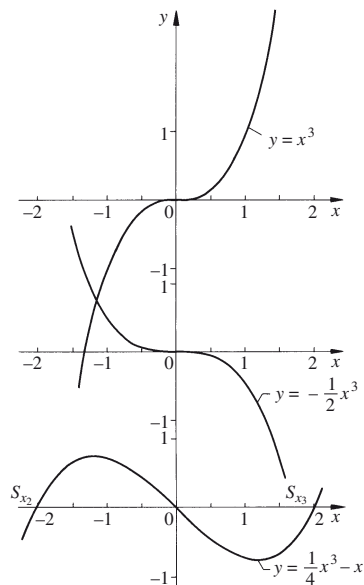


Bild V-22 Graphen der kubischen Funktionen

$$y = x^3, y = -\frac{1}{2}x^3 \text{ und } y = \frac{1}{4}x^3 - x$$

## 4.5 Ganze rationale Funktionen $n$ -ten Grades

Funktionen mit einer Funktionsgleichung folgender Art, wobei  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} y &= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ &= \sum_{k=0}^n a_kx^k \end{aligned}$$

Die rechte Seite der Gleichung heißt auch Polynom  $n$ -ten Grades.

Der Graph einer ganzen rationalen Funktion  $n$ -ten Grades ist eine zusammenhängende Kurve, die von links aus dem Unendlichen kommt und nach rechts im Unendlichen verschwindet. Dabei hängt der Kurvenverlauf ganz wesentlich vom Grad  $n$  der Funk-

tion und vom Vorzeichen von  $a_n$  ab. Es gilt:

|                                                                                                                                                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $n$ gerade ( $n = 2, 4, 6, \dots$ ) und $a_n > 0$ :<br>$x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$<br>$x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$   |
| $n$ gerade ( $n = 2, 4, 6, \dots$ ) und $a_n < 0$ :<br>$x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow -\infty$<br>$x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow -\infty$   |
| $n$ ungerade ( $n = 1, 3, 5, \dots$ ) und $a_n > 0$ :<br>$x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow -\infty$<br>$x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$ |
| $n$ ungerade ( $n = 1, 3, 5, \dots$ ) und $a_n < 0$ :<br>$x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$<br>$x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow -\infty$ |

Dabei bedeutet zum Beispiel  $x \rightarrow -\infty$ , dass  $x$  sich  $-\infty$  nähert.

Ist von den Koeffizienten in der Funktionsgleichung nur  $a_n \neq 0$ , gilt also  $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_{n-2} = a_{n-1} = 0$ , dann nennt man die Funktion Potenzfunktion.

Potenzfunktionen

$$y = a_n x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0)$$

Die Graphen der Potenzfunktionen heißen für  $n \geq 2$  Parabeln  $n$ -ter Ordnung.

Der Definitionsbereich der Potenzfunktionen ist  $D = \mathbb{R}$ . Für die Bildmenge gilt  $f(D) = \{z \mid z \in \mathbb{R}, z \geq 0\}$  für gerade  $n \geq 2$  und  $a_n > 0$ ,  $f(D) = \{z \mid z \in \mathbb{R}, z \leq 0\}$  für gerade  $n \geq 2$  und  $a_n < 0$  und  $f(D) = \mathbb{R}$  für ungerade  $n$ .

Die Kurve der Funktion  $y = ax^n$  ist im Vergleich zur Kurve der Funktion  $y = x^n$  für  $|a| < 1$  gestaucht, für  $|a| > 1$  gestreckt und für  $a < 0$  an der  $x$ -Achse gespiegelt.

#### ■ Beispiele:

1.  $y = x^2$  und  $y = x^4$

Die Graphen dieser Funktionen sind Parabeln 2. bzw. 4. Ordnung.

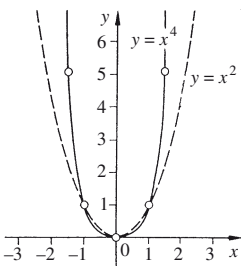


Bild V-23 Parabeln 2. und 4. Ordnung

2.  $y = x^3$  und  $y = x^5$

Die Graphen dieser Funktionen sind Parabeln 3. bzw. 5. Ordnung.

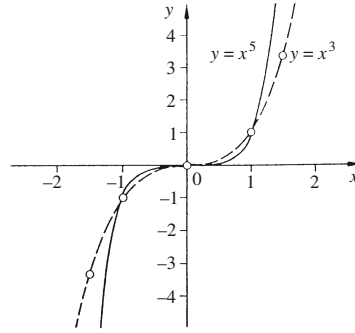


Bild V-24 Parabeln 3. und 5. Ordnung

$$3. \quad y = \frac{1}{100}x^6 + \frac{1}{100}x^5 - \frac{17}{100}x^4 - \frac{1}{20}x^3 + \frac{16}{25}x^2 + \frac{1}{25}x - \frac{12}{25}$$

Das Polynom der rechten Seite lässt sich umformen:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{100}x^6 + \frac{1}{100}x^5 - \frac{17}{100}x^4 - \frac{1}{20}x^3 + \frac{16}{25}x^2 + \frac{1}{25}x - \frac{12}{25} \\ &= \frac{1}{100}(x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 + x - 12) \end{aligned}$$

Da ein Produkt genau dann gleich 0 ist, wenn mindestens einer der Faktoren gleich 0 ist, erhält man als Nullstellen der gegebenen Funktion die Lösungen der drei quadratischen Gleichungen  $x^2 - 1 = 0$ ,  $x^2 - 4 = 0$  und  $x^2 + x - 12 = 0$ :

$$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = -2, x_5 = 3, x_6 = -4$$

Die Nullstellen sind die Abszissen der Schnittpunkte des Graphen der Funktion mit der  $x$ -Achse.

Weil eine algebraische Gleichung  $n$ -ten Grades höchstens  $n$  reelle Wurzeln besitzt, hat die Kurve für den gegebenen Grad die Höchstzahl an Schnittpunkten mit der  $x$ -Achse, nämlich  $n = 6$ .

Da  $a_n = \frac{1}{100} > 0$  und  $n = 6$  geradzahlig ist, kommt die Kurve von links aus dem Positiv-Unendlichen und geht nach rechts ins Positiv-Unendliche.

Zur Berechnung des Schnittpunkts  $S_y$  mit der  $y$ -Achse setzt man in der Funktionsgleichung  $x = 0$  ein und erhält  $y = -\frac{12}{25}$  als Ordinate des Schnittpunkts und damit als Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse:

$$S_y = S_y \left( 0 \mid -\frac{12}{25} \right)$$

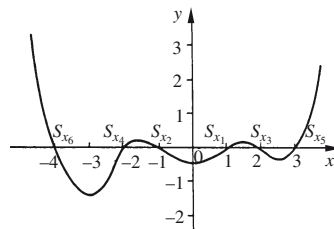


Bild V-25 Graph der Funktion zu der Gleichung aus Beispiel 3

## 4.6 Horner-Schema

Das Horner-Schema ist ein Verfahren zur Berechnung von Funktionswerten ganzer rationaler Funktionen.

Ist eine Funktion  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  gegeben und der Funktions-

wert an der Stelle  $x_0$  gesucht, so dividiert man das Polynom  $\sum_{k=0}^n a_k x^k$  durch  $(x - x_0)$ :

$$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) : (x - x_0) = a_n x^{n-1} + c_1 x^{n-2} + \dots + c_{n-2} x + c_{n-1} + \frac{c_n}{x - x_0}.$$

Für die Koeffizienten  $c_i$  gilt  $c_1 = a_n x_0 + a_{n-1}$  und  $c_i = c_{i-1} x_0 + a_{n-i}$  für  $i = 2, 3, \dots, n$ . Damit kann die Funktion  $f(x)$  auch durch die Gleichung  $f(x) = (a_n x^{n-1} + c_1 x^{n-2} + \dots + c_{n-2} x + c_{n-1})(x - x_0) + c_n$  beschrieben werden. Für  $x = x_0$  ergibt sich dann  $f(x_0) = c_n$ . Die Berechnung des Funktionswertes  $f(x_0)$  ist somit auf die Berechnung der Konstante  $c_n$  zurückgeführt worden, die man in  $n$  Schritten durch einander folgende Berechnung von  $c_1, c_2, \dots, c_n$  ermittelt. Man berechnet zuerst  $c_1$  aus  $c_1 = a_n x_0 + a_{n-1}$ , dann  $c_2$  aus  $c_2 = c_1 x_0 + a_{n-2}$  und so weiter und schließlich  $c_n$  aus  $c_n = c_{n-1} x_0 + a_0$ .

Dieses Verfahren nennt man Horner-Schema (nach dem englischen Mathematiker William George Horner, 1786–1837). Es lässt sich folgendermaßen schematisch darstellen:

|   |       |           |           |         |               |               |
|---|-------|-----------|-----------|---------|---------------|---------------|
|   | $a_n$ | $a_{n-1}$ | $a_{n-2}$ | $\dots$ | $a_1$         | $a_0$         |
| + |       | $a_n x_0$ | $c_1 x_0$ | $\dots$ | $c_{n-2} x_0$ | $c_{n-1} x_0$ |
|   | $a_n$ | $c_1$     | $c_2$     | $\dots$ | $c_{n-1}$     | $c_n$         |

■ **Beispiel:**

$$f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 2x^2 + 28x - 48$$

Gesucht ist  $f(-3)$ , also der Funktionswert an der Stelle  $x_0 = -3$ .

Horner-Schema:

|   |   |                    |                        |                     |                         |
|---|---|--------------------|------------------------|---------------------|-------------------------|
|   | 2 | -8                 | 2                      | 28                  | -48                     |
| + |   | -6                 | 42                     | -132                | 312                     |
|   |   | $(= 2 \cdot (-3))$ | $(= (-14) \cdot (-3))$ | $(= 44 \cdot (-3))$ | $(= (-104) \cdot (-3))$ |
|   | 2 | -14                | 44                     | -104                | 264                     |

Es gilt also  $f(-3) = 264$ .

## 5 Gebrochene rationale Funktionen

### 5.1 Nullstellen, Pole, Asymptoten

Funktionen mit einer Funktionsgleichung folgender Art, wobei  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}, a_n, b_m \neq 0, m \neq 0$ , heißen gebrochene rationale Funktionen.

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i x^i}{\sum_{k=0}^m b_k x^k}$$

Eine gebrochene rationale Funktion  $y = f(x)$  kann immer als Quotient zweier ganzer rationaler Funktionen dargestellt werden (sowohl Zähler als auch

Nenner sind Polynome in  $x$ ).

Gebrochene rationale Funktionen

$$y = \frac{P_n(x)}{P_m(x)}$$

Eine gebrochene rationale Funktion ist nicht für alle  $x$  definiert. Die Nullstellen des Nenners gehören nicht zum Definitionsbereich der Funktion.

Ist der Grad des Nennerpolynoms größer als der Grad des Zählerpolynoms ( $n < m$ ), dann heißt die Funktion echt gebrochene rationale Funktion, andernfalls (also für  $n \geq m$ ) heißt sie unecht gebrochene rationale Funktion.

Gebrochene rationale Funktionen, bei denen sowohl das Zählerpolynom als auch das Nennerpolynom den Grad 1 haben (also  $n = 1$  und  $m = 1$ ), heißen gebrochene lineare Funktionen.

Gebrochene lineare Funktionen

$$y = \frac{a_1 x + a_0}{b_1 x + b_0}$$

Die Graphen der gebrochenen rationalen Funktionen  $y = \frac{a}{x^n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1, a \in \mathbb{R}, a \neq 0$  heißen Hyperbeln  $n$ -ter Ordnung (zu Hyperbeln vgl. auch Abschnitt VII.5.2).

Durch Polynomdivision lässt sich jede unecht gebrochene rationale Funktion  $y = f(x)$  darstellen als Summe einer ganzen rationalen Funktion  $g(x)$  und einer echt gebrochenen rationalen Funktion  $h(x)$ :  $y = f(x) = g(x) + h(x)$ .

■ **Beispiel:**

$$1. \quad \frac{2x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 4x + 1}{x^2 - 3x + 1} = 2x^2 + 9x + 30 + \frac{77x - 29}{x^2 - 3x + 1}$$

$x_0$  ist eine Nullstelle von  $y = f(x) = \frac{P_n(x)}{P_m(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ,

wenn an der Stelle  $x = x_0$  der Zähler Null ist und der Nenner von Null verschieden, also  $P(x_0) = 0, Q(x_0) \neq 0$ .

Eine Stelle  $x = x_p$  heißt ein Pol der Funktion

$y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , wenn  $x_p$  eine Nullstelle des Nenners  $Q(x)$

ist und der Zähler  $P(x)$  an der Stelle  $x_p$  von Null verschieden ist, also  $Q(x_p) = 0, P(x_p) \neq 0$ . Ist  $x = x_p$  eine  $k$ -fache Nullstelle des Nenners  $Q(x)$  und gilt  $P(x_p) \neq 0$ , dann heißt  $x_p$  ein Pol  $k$ -ter Ordnung von

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Zwei Polynome  $P(x)$  und  $Q(x)$  heißen teilerfremd, wenn alle ihre Nullstellen verschieden sind. Gilt also für eine Stelle  $x = x_1$ , dass  $P(x_1) = 0$ , so folgt  $Q(x_1) \neq 0$ , und gilt umgekehrt für eine Stelle  $x = x_2$ , dass  $Q(x_2) = 0$ , so folgt  $P(x_2) \neq 0$ .

Jede gebrochene rationale Funktion lässt sich als Quotient zweier teilerfremder Polynome darstellen.

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad P(x) \text{ und } Q(x) \text{ teilerfremd}$$

Eine solche Darstellung heißt Normalform der gebrochenen rationalen Funktion.

Die Nullstellen einer gebrochenen rationalen Funktion in Normalform sind die Nullstellen des Zählerpolynoms  $P(x)$ .

Ist  $x = x_p$  ein Pol  $k$ -ter Ordnung der Funktion  $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$  mit teilerfremden  $P(x)$  und  $Q(x)$ , dann lässt sich die Funktion in der Nähe des Pols darstellen durch

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{(x - x_p)^k} \cdot \frac{P(x)}{Q_1(x)}.$$

Dabei haben weder  $P(x)$  noch  $Q_1(x)$  in der Nähe von  $x = x_p$  eine Nullstelle, sie ändern also ihr Vorzeichen nicht. Ihr Quotient hat deshalb einen von Null verschiedenen, beschränkten positiven oder negativen Wert. Die Funktion  $\frac{1}{(x - x_p)^k}$  wächst aber, wenn sich  $x$  dem Pol  $x_p$  nähert, über alle Grenzen.

Nähert man sich dem Pol mit wachsenden  $x$ -Werten (also  $x < x_p$ ), so ist  $x - x_p$  negativ. Für ungerade  $k$  ( $k = 1, 3, 5, \dots$ ) geht dann  $\frac{1}{(x - x_p)^k}$  gegen  $-\infty$ , für gerade  $k$  ( $k = 2, 4, 6, \dots$ ) dagegen gegen  $+\infty$ .

Nähert man sich dem Pol mit abnehmenden  $x$ -Werten (also  $x > x_p$ ), so ist  $x - x_p$  positiv,  $\frac{1}{(x - x_p)^k}$  geht dann also stets gegen  $+\infty$ .

Für negative Werte des Faktors  $\frac{P(x)}{Q_1(x)}$  dreht sich das Vorzeichen der Funktion  $y = f(x)$  um.

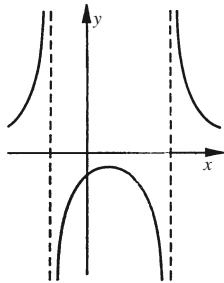


**Bild V-26** Funktionsverlauf bei Polen ungerader Ordnung

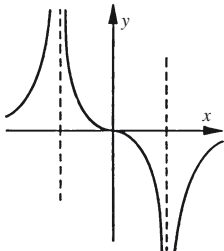


**Bild V-27** Funktionsverlauf bei Polen gerader Ordnung

Die Gerade  $x = x_p$  heißt Asymptote der gebrochenen rationalen Funktion  $y = f(x)$ . Asymptoten einer Funktion sind Geraden, denen sich der Graph der Funktion unbeschränkt nähert, ohne sie je zu erreichen (Asymptote = Nichtzusammenlaufende).

Das Verhalten einer gebrochenen rationalen Funktion  $y = f(x) = \frac{P_n(x)}{P_m(x)}$  im Unendlichen:

Ist  $y = f(x)$  eine echt gebrochene rationale Funktion, gilt also  $n < m$ , dann ist die  $x$ -Achse (Gerade mit der Gleichung  $y = 0$ ) eine Asymptote.

Im Falle  $n = m$  ist die zur  $x$ -Achse parallele Gerade mit der Gleichung  $y = \frac{a_n}{b_m}$  eine Asymptote.

Ist  $n > m$ , so gilt  $y = f(x) = g(x) + h(x)$ , wobei  $g(x)$  eine ganze rationale Funktion und  $h(x)$  eine echt gebrochene rationale Funktion sind. Die Funktion  $y = f(x)$  verhält sich dann im Unendlichen wie die rationale Funktion  $y = g(x)$ .

■ **Beispiele:**

2.  $y = \frac{1}{x}$

Zum Definitionsbereich gehören alle  $x$  außer  $x = 0$ .

Wegen  $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$  ist die Funktion ungerade, der Graph der Funktion ist also symmetrisch zum Nullpunkt (Koordinatenursprung).

Die Funktion hat keine Nullstelle, denn der Zähler ist stets von Null verschieden ( $P(x) = 1$ ).

Die Stelle  $x = 0$  ist ein Pol erster Ordnung der Funktion. Nähert man sich diesem Pol mit wachsenden  $x$ -Werten (also  $x < 0$ ), dann geht  $y$  gegen  $-\infty$ . Nähert man sich dem Pol dagegen mit abnehmenden  $x$ -Werten (also  $x > 0$ ), so geht  $y$  gegen  $+\infty$ .

Die Geraden  $x = 0$  ( $y$ -Achse) und  $y = 0$  ( $x$ -Achse) sind Asymptoten der Funktion.

Der Graph der Funktion ist eine Hyperbel.

Wertetabelle ( $y$ -Werte auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet):

| $x$ | -4    | -3    | -2    | -1 | -0,5 | -0,25 | -0,1 | -0,01 | 1 | 2    | 3    | 4    |
|-----|-------|-------|-------|----|------|-------|------|-------|---|------|------|------|
| $y$ | -0,25 | -0,33 | -0,50 | -1 | -2   | -4    | -10  | -100  | 1 | 0,50 | 0,33 | 0,25 |

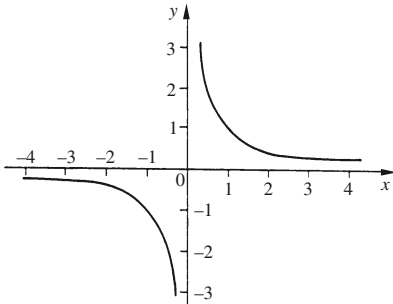


**Bild V-28** Graph der Funktion mit der Gleichung  $y = \frac{1}{x}$

3.  $y = \frac{1}{x^2}$

Die Funktion ist definiert für alle  $x \neq 0$ .

Es gilt  $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = f(x)$ , die Funktion ist also gerade, ihr Graph ist symmetrisch zur  $y$ -Achse.

Da der Zähler konstant gleich 1 ist, besitzt die Funktion keine Nullstellen.

Die Stelle  $x = 0$  ist ein Pol zweiter Ordnung. Nähert man sich dem Pol mit wachsenden  $x$ -Werten (also  $x < 0$ ) oder mit abnehmenden  $x$ -Werten (also  $x > 0$ ), dann geht  $y$  gegen  $+\infty$ . Die Geraden  $x = 0$  ( $y$ -Achse) und  $y = 0$  ( $x$ -Achse) sind Asymptoten der Funktion.

Wertetabelle:

| x | 4    | 3    | 2    | 1 | 0,5 | 0,25 | 0,1 | -1 | -2   | -3   | -4   |
|---|------|------|------|---|-----|------|-----|----|------|------|------|
| y | 0,06 | 0,11 | 0,25 | 1 | 4   | 16   | 100 | 1  | 0,25 | 0,11 | 0,06 |

Die  $y$ -Werte in der Wertetabelle sind auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

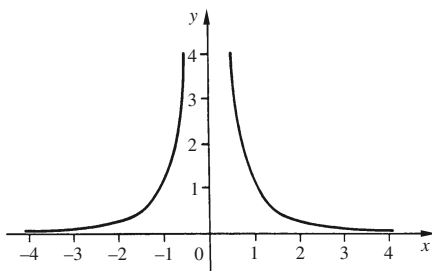


**Bild V-29** Graph der Funktion mit der Gleichung

$$y = \frac{1}{x^2}$$

4.  $y = \frac{1}{x^2 - 1}$

Die Funktion ist definiert für alle  $x$ , für die der Nenner ungleich 0 ist.

Die Nullstellen des Nenners berechnet man, indem man den Nenner (das Nennerpolynom) gleich Null setzt:  $x^2 - 1 = 0$ . Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen  $x_1 = 1$  und  $x_2 = -1$ .

Wegen  $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2 - 1} = \frac{1}{x^2 - 1} = f(x)$  ist die Funktion gerade, der Graph der Funktion ist also symmetrisch zur  $y$ -Achse.

Die Funktion hat keine Nullstellen (Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse), denn der Zähler ist für alle  $x$  des Definitionsbereiches von Null verschieden.

Die Stellen  $x_1 = 1$  und  $x_2 = -1$  sind Pole erster Ordnung der Funktion.

Nähert man sich dem Pol  $x_2$  mit wachsenden  $x$ -Werten (also  $x < -1$ ), dann ist der Faktor  $\frac{P(x)}{Q_1(x)} = \frac{1}{x-1}$  in der Zerlegung der Funktion

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x-x_2} \cdot \frac{P(x)}{Q_1(x)} = \frac{1}{x-(-1)} \cdot \frac{1}{x-1}$$

negativ, das heißt,  $y$  geht gegen  $+\infty$ .

Nähert man sich entsprechend dem Pol  $x_2$  mit abnehmenden  $x$ -Werten (also  $x > -1$ ) oder dem Pol  $x_1$  mit wachsenden  $x$ -Werten (also  $x < 1$ ), so geht  $y$  gegen  $-\infty$ . Nähert man sich dagegen  $x_1$  mit abnehmenden  $x$ -Werten (also  $x > 1$ ), so geht  $y$  gegen  $+\infty$ .

Die Geraden  $x_1 = 1$  und  $x_2 = -1$  sowie  $y = 0$  ( $x$ -Achse) sind Asymptoten der Funktion.

Funktionswerte für  $-1 < y \leq 0$  gibt es nicht, da der Nenner nicht kleiner als  $-1$  werden kann.

Wertetabelle ( $y$ -Werte auf drei Stellen nach dem Komma gerundet):

| x | $\pm 3$ | $\pm 2$ | $\pm 1,5$ | $\pm 1,1$ | $\pm 0,9$ | $\pm 0,5$ | 0  |
|---|---------|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|----|
| y | 0,125   | 0,333   | 0,800     | 4,762     | -5,263    | -1,333    | -1 |

5.  $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Die Funktion ist definiert für alle reellen  $x$ , denn es gibt keine Nullstellen des Nenners und damit keine Pole. Die Nullstellen der Funktion sind  $x_1 = 1$  und  $x_2 = -1$ .

Die zur  $x$ -Achse parallele Gerade mit der Gleichung

$$y = \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{1} = 1 \text{ ist Asymptote.}$$

Der Graph der Funktion verläuft überall unterhalb der Asymptote.

Wertetabelle:

| x | $\pm 4$ | $\pm 3$ | $\pm 2$ | $\pm 1,5$ | $\pm 1$ | $\pm 0,5$ | $\pm 0,3$ | $\pm 0,1$ | 0  |
|---|---------|---------|---------|-----------|---------|-----------|-----------|-----------|----|
| y | 0,87    | 0,80    | 0,60    | 0,38      | 0       | -0,60     | -0,84     | -0,98     | -1 |

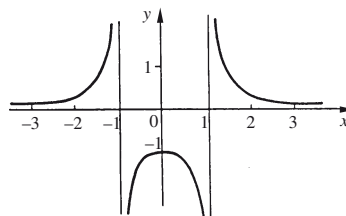


**Bild V-30** Graph der Funktion mit der Gleichung

$$y = \frac{1}{x^2 - 1}$$

Die  $y$ -Werte in der Wertetabelle sind auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

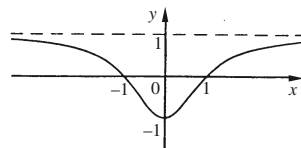


**Bild V-31** Graph der Funktion mit der Gleichung

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

6.  $y = \frac{x^2 - x - 2}{2x - 6}$

Die Funktion hat die Nullstellen  $x_1 = -1$  und  $x_2 = 2$  und einen Pol bei  $x = 3$ .

Die Funktion ist also definiert für alle  $x \neq 3$ .

Die Funktion ist weder gerade noch ungerade, eine Symmetrie des Graphen bezüglich des Nullpunktes oder der  $y$ -Achse liegt also nicht vor.

Durch Polynomdivision erhält man die Darstellung

$$y = \frac{x^2 - x - 2}{2x - 6} = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{4}{2x - 6}$$

der Funktion als Summe einer ganzen rationalen Funktion und einer echt gebrochenen rationalen Funktion. Es ist also

$y = \frac{1}{2}x + 1$  eine Asymptote der Funktion. Die Annäherung



Wertetabelle (y-Werte auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet):

| x | -5    | -3    | -2    | -1 | 0    | 1    | 1,5  | 2 | 2,5   | 2,9    | 3,1   | 3,5  | 4 | 5    | 7 |
|---|-------|-------|-------|----|------|------|------|---|-------|--------|-------|------|---|------|---|
| y | -1,75 | -0,83 | -0,40 | 0  | 0,33 | 0,50 | 0,42 | 0 | -1,75 | -17,55 | 22,55 | 6,75 | 5 | 4,50 | 5 |

an die Asymptote erfolgt für  $x \rightarrow -\infty$  von unten und für  $x \rightarrow \infty$  von oben.

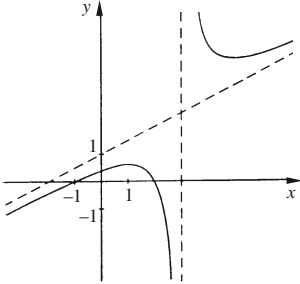


Bild V-32 Graph der Funktion mit der Gleichung

$$y = \frac{x^2 - x - 2}{2x - 6}$$

## 5.2 Partialbruchzerlegung

Eine Partialbruchzerlegung ist die Zerlegung einer gebrochenen rationalen Funktion  $y = f(x)$  mit

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} \quad \text{in}$$

eine Summe von Brüchen.

Durch eine Partialbruchzerlegung von  $f(x)$  wird oftmals die Integration der Funktion einfacher oder überhaupt erst möglich (vgl. Abschnitt VIII.5.2).

Jede echt gebrochene rationale Funktion (also  $n < m$ ) kann eindeutig in eine Summe von Partialbrüchen zerlegt werden.

Praktische Durchführung der Partialbruchzerlegung:

1. Im Falle  $n \geq m$  Abspalten des ganzen rationalen Anteils mit Polynomdivision.
2. Kürzen des Bruches (also Division des Zählers und des Nenners) durch  $b_m$ , den Koeffizienten der höchsten Potenz des Nenners:

$$f(x) = \frac{c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0}{x^m + d_{m-1} x^{m-1} + \dots + d_2 x^2 + d_1 x + d_0}$$

Es gilt also  $\frac{a_i}{b_m} = c_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) und  $\frac{b_j}{b_m} = d_j$  ( $1 \leq j < m$ ).

3. Bestimmung der Nullstellen  $x_1, x_2, \dots, x_r$  ( $r \leq m$ ) des Nennerpolynoms.
4. Zerlegung des Nennerpolynoms in die Form
 
$$x^m + d_{m-1} x^{m-1} + \dots + d_2 x^2 + d_1 x + d_0 = (x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x - x_r)^{k_r} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} (x^2 + p_2 x + q_2)^{l_2} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_s x + q_s)^{l_s}$$

Eine solche Zerlegung ist immer möglich. Dabei sind  $x_1, x_2, \dots, x_r$  alle reellen Nullstellen mit den Vielfachheiten  $k_1, k_2, \dots, k_r$ . Die restlichen qua-

dratischen Faktoren ergeben die konjugierten Paare komplexer Nullstellen (also  $p_i^2 - 4q_i < 0$ ).

5. Zerlegung von  $f(x)$  in eine Summe von Brüchen:

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{A_{11}}{x - x_1} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} \\ & + \frac{A_{21}}{x - x_2} + \frac{A_{22}}{(x - x_2)^2} + \dots + \frac{A_{2k_2}}{(x - x_2)^{k_2}} \\ & + \dots \\ & + \frac{A_{r1}}{x - x_r} + \frac{A_{r2}}{(x - x_r)^2} + \dots + \frac{A_{rk_r}}{(x - x_r)^{k_r}} \\ & + \frac{B_{11} + C_{11}x}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{B_{12} + C_{12}x}{(x^2 + p_1 x + q_1)^2} \\ & + \dots + \frac{B_{1l_1} + C_{1l_1}x}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1}} + \frac{B_{21} + C_{21}x}{x^2 + p_2 x + q_2} \\ & + \frac{B_{22} + C_{22}x}{(x^2 + p_2 x + q_2)^2} + \dots + \frac{B_{2l_2} + C_{2l_2}x}{(x^2 + p_2 x + q_2)^{l_2}} \\ & + \dots \\ & + \frac{B_{s1} + C_{s1}x}{x^2 + p_s x + q_s} + \frac{B_{s2} + C_{s2}x}{(x^2 + p_s x + q_s)^2} \\ & + \dots + \frac{B_{sl_s} + C_{sl_s}x}{(x^2 + p_s x + q_s)^{l_s}} \end{aligned}$$

Dabei sind die Koeffizienten  $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}$  reelle Zahlen.

6. Bestimmung der Koeffizienten der Partialbrüche zum Beispiel mit der Methode des Koeffizientenvergleichs.

Die Brühe im Schritt 5 nennt man die Partialbrüche der gebrochenen rationalen Funktion  $f(x)$ .

Spezialfälle:

Wenn das Nennerpolynom nur reelle Nullstellen besitzt, dann fallen die Partialbrüche mit den nicht zerlegbaren quadratischen Funktionen im Nenner weg.

Besitzt das Nennerpolynom nur die einfachen reellen Nullstellen  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , dann lautet die Partialbruchzerlegung

$$f(x) = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \dots + \frac{A_m}{x - x_m}$$

### Beispiele:

$$1. \quad f(x) = \frac{6x^2 - 4}{2x^3 + 4x^2 + 4x + 2}$$

Division durch  $b_3 = 2$ :  $f(x) = \frac{3x^2 - 2}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$

Nullstelle des Nennerpolynoms:  $x_1 = -1$

Zerlegung des Nennerpolynoms:

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)$$

Zerlegung von  $f(x)$  in eine Summe von Partialbrüchen:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$$

Bestimmung der Koeffizienten  $A, B, C$  durch Koeffizientenvergleich:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+x+1)}$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 2 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x+1)$$

$$= (A+B)x^2 + (A+B+C)x + (A+C)$$

Vergleich der Koeffizienten von  $x^2$ , von  $x$  und der Absolutglieder links und rechts vom Gleichheitszeichen ergibt:

$$A+B=3, \quad A+B+C=0, \quad A+C=-2$$

$$\Rightarrow A=1, \quad B=2, \quad C=-3$$

Lösung somit:

$$f(x) = \frac{6x^2 - 4}{2x^3 + 4x^2 + 4x + 2} = \frac{1}{x+1} + \frac{2x-3}{x^2+x+1}$$

$$2. \quad f(x) = \frac{3x^2 - x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}$$

Nullstellen des Nennerpolynoms:  $x_1 = 0, x_2 = 1$  ( $x_2$  ist doppelte Nullstelle)

Zerlegung des Nennerpolynoms:  $x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$

Zerlegung von  $f(x)$  in Partialbrüche:

$$f(x) = \frac{3x^2 - x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

Bestimmung der Koeffizienten  $A, B, C$  durch Koeffizientenvergleich:

$$f(x) = \frac{3x^2 - x + 1}{x(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow 3x^2 - x + 1 = A(x^2 - 2x + 1) + B(x^2 - x) + Cx$$

$$= (A+B)x^2 + (C-2A-B)x + A$$

Vergleich der Koeffizienten von  $x^2$ , von  $x$  und der Absolutglieder links und rechts vom Gleichheitszeichen ergibt:

$$A+B=3, \quad C-2A-B=-1, \quad A=1 \Rightarrow A=1, \quad B=2, \quad C=3$$

Lösung somit:

$$f(x) = \frac{3x^2 - x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}$$

$$3. \quad f(x) = \frac{6x^2 - x + 1}{x^3 - x}$$

Nullstellen des Nennerpolynoms:  $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$

Zerlegung des Nennerpolynoms:  $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$

Zerlegung von  $f(x)$  in Partialbrüche:

$$f(x) = \frac{6x^2 - x + 1}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

Bestimmung der Koeffizienten  $A, B, C$  durch Koeffizientenvergleich:

$$f(x) = \frac{6x^2 - x + 1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$$

$$\Rightarrow 6x^2 - x + 1 = A(x^2 - 1) + B(x^2 + x) + C(x^2 - x)$$

$$= (A+B+C)x^2 + (B-C)x - A$$

Vergleich der Koeffizienten von  $x^2$ , von  $x$  und der Absolutglieder links und rechts vom Gleichheitszeichen ergibt:

$$A+B+C=6, \quad B-C=-1, \quad -A=1$$

$$\Rightarrow A=-1, \quad B=3, \quad C=4$$

Lösung somit:

$$f(x) = \frac{6x^2 - x + 1}{x^3 - x} = \frac{1}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{4}{x+1}$$

auf die unabhängige Variable  $x$  nur endlich viele rationale Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) angewandt. Bei irrationalen Funktionen tritt die unabhängige Variable  $x$  auch unter einem Wurzelzeichen auf.

#### ■ Beispiele:

$$1. \quad y = x^2 + x + \sqrt{x}$$

$$2. \quad y = \sqrt{5x^3 - 2}$$

$$3. \quad y = \sqrt[7]{(x^2 - 1) \sqrt[3]{5x + 1}}$$

Eine besonders wichtige Klasse von irrationalen Funktionen sind die sogenannten Wurzelfunktionen.

Wurzelfunktionen  $y = \sqrt[n]{x} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$

Der Definitionsbereich der Wurzelfunktionen ist  $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$  für gerade  $n$  und  $D = \mathbb{R}$  für ungerade  $n$ , die Bildmenge ist gleich dem Definitionsbereich, also  $f(D) = D$ .

Die Wurzelfunktionen sind im ganzen Definitionsbereich streng monoton wachsend.

Für ungerade  $n$  ist  $y = \sqrt[n]{x}$  eine ungerade Funktion, der Graph der Funktion ist also punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

Die Graphen der Wurzelfunktionen gehen durch den Koordinatenursprung und durch den Punkt  $P(1|1)$ .

Für das Verhalten der Wurzelfunktionen im Unendlichen gilt:

$$n \in \mathbb{N}, n \geq 2: \quad x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$$

$$n \text{ ungerade } (n = 3, 5, 7, \dots): \quad x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow -\infty$$

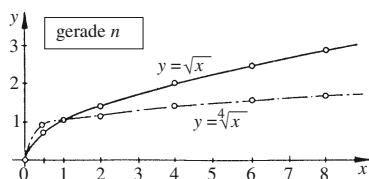


Bild V-33 Graph der Wurzelfunktionen  $y = \sqrt{x}$  und  $y = \sqrt[4]{x}$

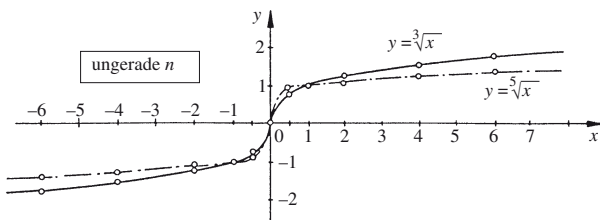


Bild V-34 Graph der Wurzelfunktionen  $y = \sqrt[3]{x}$  und  $y = \sqrt[5]{x}$

## 6 Irrationale Funktionen

Irrationale Funktionen sind algebraische Funktionen, die nicht rational sind. In der Funktionsgleichung  $y = f(x)$  einer rationalen Funktion werden

Die quadratische Funktion  $y = x^2$  ist in den zwei getrennten Intervallen  $0 \leq x < +\infty$  und  $-\infty < x \leq 0$

jeweils monoton. Sie hat deshalb zwei Umkehrfunktionen, und zwar  $y = +\sqrt{x}$  und  $y = -\sqrt{x}$ . Für beide Umkehrfunktionen ist der Definitionsbereich  $0 \leq x < +\infty$  (entspricht  $0 \leq y < +\infty$  der Funktion  $y = x^2$ ), die Bildmenge ist  $0 \leq y < +\infty$  bzw.  $-\infty < y \leq 0$ . Die Graphen der Umkehrfunktionen ergeben sich aus der Normalparabel durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden  $y = x$ . Die (positive) Quadratwurzelfunktion  $y = \sqrt{x}$  zum Beispiel ist also die Umkehrfunktion der Funktion des rechten Normalparabelastes.

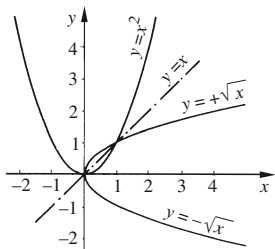


**Bild V-35** Graphen von Funktionen und ihren Umkehrfunktionen

Die kubische Funktion  $y = x^3$  ist in ihrem ganzen Definitionsbereich  $D = (-\infty, \infty)$  monoton steigend. Ihre Umkehrfunktion ist  $y = \sqrt[3]{x}$ . Der Definitionsbereich der Umkehrfunktion ist  $-\infty < x < \infty$ , die Bildmenge  $-\infty < y < \infty$ . Der Graph der Umkehrfunktion ergibt sich aus der kubischen Normalparabel durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden  $y = x$ .

Allgemein gilt:

Für ungerade  $n$  ist die Wurzelfunktion  $y = f(x) = \sqrt[n]{x}$ ,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Umkehrfunktion der Potenzfunktion  $y = f(x) = x^n$ ,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Für gerade  $n$  ist die Wurzelfunktion  $y = f(x) = \sqrt[n]{x}$ ,  $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  die Umkehrfunktion der Potenzfunktion  $y = f(x) = x^n$ ,  $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ .

Man bezeichnet allgemeiner auch Funktionen  $y = a \sqrt[n]{x}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  als Wurzelfunktionen. Die Kurve der Funktion  $y = a \sqrt[n]{x}$  ist im Vergleich zur Kurve der Funktion  $y = \sqrt[n]{x}$  für  $|a| < 1$  gestaucht, für  $|a| > 1$  gestreckt und für  $a < 0$  an der  $x$ -Achse gespiegelt.

#### ■ Beispiele:

4.  $y = b + \sqrt{r^2 - (x-a)^2}$ ,  $D = \{x \mid |x-a| \leq r\}$ ,  $W = \mathbb{R}$   
Der Graph dieser Funktion ist der obere Halbkreis des Kreises mit dem Mittelpunkt  $M(a|b)$  und dem Radius  $r$ .

**Fehlerwarnung:** Die Gleichung  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$  des Kreises mit dem Mittelpunkt  $M(a|b)$  und dem Radius  $r$  (vgl. Abschnitt VII.3.1) ist keine (implizite) Funktion, denn die Zuordnung einer Zahl  $y$  zu einer Zahl  $x$  ist nicht eindeutig, wie in der Definition einer Funktion gefordert (zu jedem  $x$  mit  $|x-a| < r$  gibt es zwei  $y$ )!

Analog zu oben ist der Graph der Funktion  $y = b - \sqrt{r^2 - (x-a)^2}$ ,  $D = \{x \mid |x-a| \leq r\}$ ,  $W = \mathbb{R}$  die untere Hälfte des Kreises mit dem Mittelpunkt  $M(a|b)$  und dem Radius  $r$ .

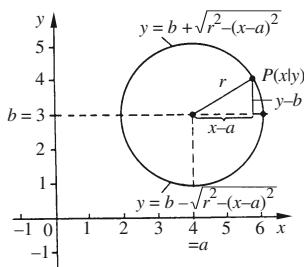


**Bild V-36** Graphen der Funktionen

$$y = b + \sqrt{r^2 - (x-a)^2}$$

$$\text{und } y = b - \sqrt{r^2 - (x-a)^2}$$

mit  $a = 4$  und  $b = 3$

5. Aus der Gleichung der Astroide  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  ( $a > 0$ ) erhält man durch Auflösen nach  $y$  die Funktionen

$$y = +\sqrt{(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}, D = \{x \mid |x| \leq a\}, W = \mathbb{R}$$

bzw.

$$y = -\sqrt{(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}, D = \{x \mid |x| \leq a\}, W = \mathbb{R}.$$

Die Graphen dieser Funktionen sind der obere Teil ( $y \geq 0$ ) bzw. der untere Teil ( $y \leq 0$ ) der Astroide.

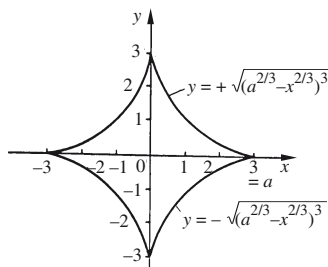


**Bild V-37** Graphen der Funktionen

$$y = +\sqrt{(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{und } y = -\sqrt{(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}$$

mit  $a = 3$

## 7 Transzendente Funktionen

Elementare Funktionen, die nicht algebraisch sind, heißen transzendent.

Wichtige Klassen von transzendenten Funktionen sind die Exponentialfunktionen, die Logarithmusfunktionen sowie die trigonometrischen Funktionen und ihre Umkehrfunktionen, die Arkusfunktionen. Die trigonometrischen Funktionen und die Arkusfunktionen werden in Kapitel VI behandelt.

### 7.1 Exponentialfunktionen

Bei einer Exponentialfunktion steht die unabhängige Variable  $x$  im Exponenten.

$$y = a^x, \quad a \in \mathbb{R}^+$$

Dabei ist die Basis  $a$  eine beliebige positive reelle Zahl.

Alle Exponentialfunktionen  $y = a^x$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$  haben als Definitionsbereich  $D = \mathbb{R}$  und, falls  $a \neq 1$ , als Bildmenge  $W = f(D) = \mathbb{R}^+$ . Alle Funktionswerte sind also positiv.

Wegen  $a^0 = 1$  gehen die Graphen aller Funktionen durch den Punkt  $P(0|1)$ .

Für  $a > 1$  ist die Funktion  $y = a^x$  streng monoton wachsend mit  $y \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow -\infty$  und  $y \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \infty$ . Die (negative)  $x$ -Achse ist also Asymptote.

Für  $0 < a < 1$  ist die Funktion  $y = a^x$  streng monoton fallend mit  $y \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow -\infty$  und  $y \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \infty$ . Die (positive)  $x$ -Achse ist somit Asymptote. Der Graph der Funktion nähert sich um so schneller der  $x$ -Achse, je größer  $|\ln a|$  ist, für  $a > 1$  also je größer  $a$  ist und für  $a < 1$  je kleiner  $a$  ist.

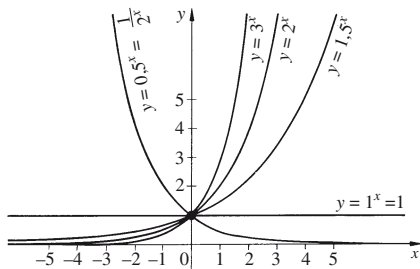


**Bild V-38** Graphen von Exponentialfunktionen

Für  $a = 1$  gilt  $y = 1$ , der Graph der Funktion ist also eine Parallele zur  $x$ -Achse.

Die Exponentialfunktionen  $y = a^x$ ,  $a > 0$  können wegen der Regeln der Logarithmen- und der Potenzrechnung auch in der Form

$$y = a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \cdot \ln a}$$

dargestellt werden. Dabei ist  $e = 2,7182818284 \dots$  die Eulersche Zahl (vgl. Abschnitt VIII.4.5).

Die Funktion  $y = e^x$ ,  $D = \mathbb{R}$ ,  $W = f(D) = \mathbb{R}^+$ , also die Exponentialfunktion mit der Basis  $a = e$ , heißt natürliche Exponentialfunktion oder  $e$ -Funktion.

$$y = e^x, \quad D = \mathbb{R}, \quad W = f(D) = \mathbb{R}^+$$

Es handelt sich um eine spezielle Exponentialfunktion, die häufig als *die* Exponentialfunktion bezeichnet wird. Diese Funktion spielt bei vielen Wachstumsprozessen eine wichtige Rolle.

Noch allgemeiner bezeichnet man manchmal auch solche Funktionen, die eine algebraische Funktion des Arguments  $x$  im Exponenten haben, als Exponentialfunktionen, zum Beispiel  $y = 2^{3x^2 - 7x}$ .

Die Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen  $y = a^x$  sind für  $a \neq 1$  die Logarithmusfunktionen  $y = \log_a x$ . Die Umkehrfunktion der  $e$ -Funktion ist die natürliche Logarithmusfunktion  $y = \ln x$ .

## 7.2 Logarithmusfunktionen

Logarithmusfunktionen sind Funktionen der Form

$$y = \log_a x, \quad a \in \mathbb{R}^+, \quad a \neq 1$$

Alle Logarithmusfunktionen  $y = \log_a x$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $a \neq 1$  haben als Definitionsbereich  $D = \mathbb{R}^+$  und als Bildmenge  $W = f(D) = \mathbb{R}$ .

Wegen  $\log_a 1 = 0$  gehen die Graphen aller Funktionen durch den Punkt  $P(1|0)$ .

Für  $a > 1$  ist die Funktion  $y = \log_a x$  streng monoton wachsend mit  $y \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \infty$  und  $y \rightarrow -\infty$  für  $x \rightarrow 0$ ,  $x > 0$ . Die (negative)  $y$ -Achse ist also Asymptote. Für  $x > 1$  gilt  $\log_a x > 0$ , für  $x = 1$  gilt  $\log_a 1 = 0$ , und für  $x$  mit  $0 < x < 1$  gilt  $\log_a x < 0$ .

Für  $0 < a < 1$  ist die Funktion  $y = \log_a x$  streng monoton fallend mit  $y \rightarrow -\infty$  für  $x \rightarrow \infty$  und  $y \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow 0$ ,  $x > 0$ . Die (positive)  $y$ -Achse ist somit Asymptote.

Für  $x > 1$  gilt  $\log_a x < 0$ , für  $x = 1$  gilt  $\log_a 1 = 0$ , und für  $x$  mit  $0 < x < 1$  gilt  $\log_a x > 0$ .

Der Graph der Funktion nähert sich für alle  $a$  um so schneller der  $y$ -Achse, je größer  $|\ln a|$  ist, für  $a > 1$  also je größer  $a$  ist und für  $a < 1$  je kleiner  $a$  ist.

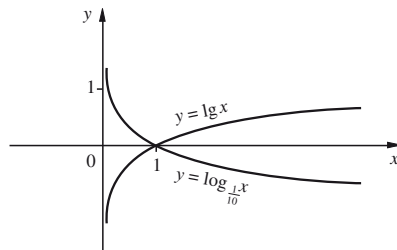


**Bild V-39** Graphen der logarithmischen Funktionen  $y = \lg x$  und  $y = \log_{\frac{1}{10}} x$

Die Logarithmusfunktionen  $y = \log_a x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  können wegen der Regeln der Logarithmenrechnung auch in der Form

$$y = \log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x, \quad a \neq 1$$

dargestellt werden.

Dabei heißt die Logarithmusfunktion mit der Basis  $a = e = 2,7182 \dots$  natürliche Logarithmusfunktion.

$$y = \ln x, \quad D = \mathbb{R}^+, \quad W = f(D) = \mathbb{R}$$

Allgemeiner noch bezeichnet man auch solche Funktionen, die eine algebraische Funktion des Arguments  $x$  als Numerus haben, als Logarithmusfunktion, zum Beispiel  $y = \log_2 (5x^2 - 4x)$ .

Die Logarithmusfunktion  $y = \log_a x$  ist für  $a \neq 1$  die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion  $y = a^x$  und umgekehrt. Die natürliche Logarithmusfunktion  $y = \ln x$  ist die Umkehrfunktion der  $e$ -Funktion  $y = e^x$  und umgekehrt.

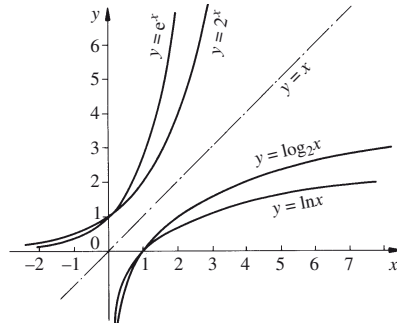


**Bild V-40** Graphen der logarithmischen Funktionen  $y = \ln x$  und  $y = \log_2 x$  und ihrer Umkehrfunktionen  $y = e^x$  und  $y = 2^x$

## VI Trigonometrie

Das Wort Trigonometrie kommt aus dem Griechischen und bedeutet Dreiecksmessung. Die Trigonometrie ist die Lehre von der Dreiecksberechnung mit Hilfe von Winkelfunktionen (trigonometrischen Funktionen).

### 1 Definition der trigonometrischen Funktionen

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse die dem rechten Winkel gegenüberliegende Dreiecksseite, die beiden anderen Seiten (also die Schenkel des rechten Winkels) sind die Katheten (vgl. Abschnitt III.6.4).

In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Winkeln  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma = 90^\circ$  gilt  $\alpha + \beta = 90^\circ$ .

Die Ankathete eines Winkels  $\alpha$  in einem rechtwinkligen Dreieck ist die Kathete, die auf einem Schenkel von  $\alpha$  liegt. Die andere Kathete heißt Gegenkathete von  $\alpha$ .

Das Verhältnis zweier beliebiger Seiten im rechtwinkligen Dreieck ist abhängig von dem Winkel  $\alpha$  (und wegen  $\beta = 90^\circ - \alpha$  natürlich auch vom Winkel  $\beta$ ), das heißt, das Verhältnis zweier Seiten ist eine Funktion des Winkels  $\alpha$  (bzw. des Winkels  $\beta$ ). Die trigonometrischen Funktionen sind definiert als das Verhältnis zweier Seiten im rechtwinkligen Dreieck.

In einem rechtwinkligen Dreieck ist

$\sin \alpha$ , der Sinus des Winkels  $\alpha$ , das Verhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse,

$\cos \alpha$ , der Kosinus des Winkels  $\alpha$ , das Verhältnis von Ankathete zu Hypotenuse,

$\tan \alpha$ , der Tangens des Winkels  $\alpha$ , das Verhältnis von Gegenkathete zu Ankathete,

$\cot \alpha$ , der Kotangens des Winkels  $\alpha$ , das Verhältnis von Ankathete zu Gegenkathete.

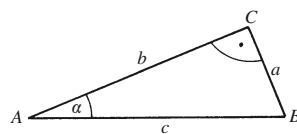


**Bild VI-1**  $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ ,  $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ ,  
 $\tan \alpha = \frac{a}{b}$ ,  $\cot \alpha = \frac{b}{a}$

|            |                                                                             |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| Sinus :    | $\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ |
| Kosinus:   | $\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$    |
| Tangens:   | $\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$  |
| Kotangens: | $\cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$  |

Andere, weniger gebräuchliche Namen für trigonometrische Funktionen sind Winkelfunktionen oder Kreisfunktionen oder goniometrische Funktionen. In der folgenden Tabelle sind einige spezielle Werte der trigonometrischen Funktionen angegeben:

| Gradmaß $\varphi$ | $0^\circ$ | $30^\circ$           | $45^\circ$           | $60^\circ$           | $90^\circ$      |
|-------------------|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| Bogenmaß $b$      | 0         | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ |
| sin               | 0         | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               |
| cos               | 1         | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               |
| tan               | 0         | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | –               |
| cot               | –         | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0               |

Merkregel:

| Gradmaß $\varphi$ | $0^\circ$              | $30^\circ$             | $45^\circ$             | $60^\circ$             | $90^\circ$             |
|-------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| sin $\varphi$     | $\frac{1}{2} \sqrt{0}$ | $\frac{1}{2} \sqrt{1}$ | $\frac{1}{2} \sqrt{2}$ | $\frac{1}{2} \sqrt{3}$ | $\frac{1}{2} \sqrt{4}$ |

Die meisten dieser Werte lassen sich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnen. Dies soll am Beispiel des Sinus vorgeführt werden.

Für die Höhe  $h$  in einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge  $a$  gilt nach dem Satz des Pythagoras  $h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ , also  $h = \frac{a}{2} \sqrt{3}$ . Es folgt

$$\sin 30^\circ = \frac{\frac{a}{2} \sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \sin 60^\circ = \frac{h}{a} = \frac{1}{2} \sqrt{3}.$$

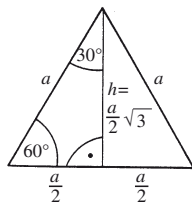


**Bild VI-2**  
Zur Berechnung  
von  $\sin 30^\circ$  und  $\sin 60^\circ$

Für den Durchmesser  $d$  in einem Quadrat der Seitenlänge  $a$  gilt nach dem Satz des Pythagoras  $d^2 = a^2 + a^2$ , also  $d = a\sqrt{2}$ . Es folgt

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{d} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

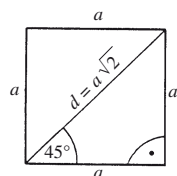


**Bild VI-3**  
Zur Berechnung von  $\sin 45^\circ$

Die beiden spitzen Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  in einem rechtwinkligen Dreieck sind Komplementwinkel, es gilt also  $\beta = 90^\circ - \alpha$ . Aus der Definition der trigonometrischen Funktionen folgt

$$\sin \beta = \frac{b}{c} \quad \text{und} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow \sin \beta = \cos \alpha$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c} \quad \text{und} \quad \sin \alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow \cos \beta = \sin \alpha$$

$$\tan \beta = \frac{b}{a} \quad \text{und} \quad \cot \alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow \tan \beta = \cot \alpha$$

$$\cot \beta = \frac{a}{b} \quad \text{und} \quad \tan \alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow \cot \beta = \tan \alpha$$

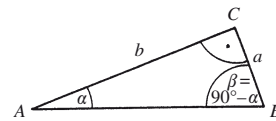


**Bild VI-4**  
Komplementwinkel

Komplementwinkel

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \tan(90^\circ - \alpha) &= \cot \alpha \\ \cot(90^\circ - \alpha) &= \tan \alpha \end{aligned}$$

## 2 Trigonometrische Funktionen für beliebige Winkel

Die Definition der trigonometrischen Funktionen eines Winkels  $\alpha$  im rechtwinkligen Dreieck ist nur für spitze Winkel möglich (also  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ). Am Einheitskreis (Kreis mit dem Radius  $r = 1$ ) lassen sich die trigonometrischen Funktionen für beliebige Winkel definieren:

Der Mittelpunkt des Einheitskreises sei der Koordinatenursprung  $O$  eines kartesischen Koordinatensystems (vgl. Abschnitt VII.1.1). Ein beliebiger Punkt  $P = P(x|y)$  auf dem Einheitskreis legt einen Winkel  $\alpha$  fest, nämlich den Winkel zwischen der  $x$ -Achse und der Geraden durch  $O$  und  $P$ . Dabei wird  $\alpha$  in mathematisch positiver Richtung, also gegen den Uhrzeigersinn, gemessen.

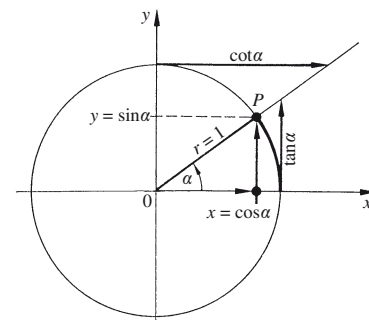


**Bild VI-5** Definition der trigonometrischen Funktionen für beliebige Winkel

Mit den vorzeichenbehafteten Koordinaten  $x$  und  $y$  des Punktes  $P$  werden die trigonometrischen Funktionen dann definiert durch

|            |                             |
|------------|-----------------------------|
| Sinus:     | $\sin \alpha = y$           |
| Kosinus:   | $\cos \alpha = x$           |
| Tangens:   | $\tan \alpha = \frac{y}{x}$ |
| Kotangens: | $\cot \alpha = \frac{x}{y}$ |

Der Abschnitt des Einheitskreises zwischen der  $x$ -Achse und dem Punkt  $P$  ist das Bogenmaß  $b$  des Winkels  $\alpha$ .

Durchläuft  $P$  den Einheitskreis im mathematisch positiven Drehsinn, dann sind  $\alpha$  und  $b$  positiv. Durchläuft  $P$  den Einheitskreis jedoch im mathematisch negativen Drehsinn, dann sind  $\alpha$  und  $b$  negativ.

Im Einheitskreis sind damit die trigonometrischen Funktionen für beliebige Winkel  $\alpha$  im Gradmaß oder für beliebige reelle Zahlen  $b$  (Bogenmaß von  $\alpha$ ) definiert, für die die entsprechenden Nenner nicht verschwinden.

Bei der Berechnung von Funktionswerten muß beachtet werden, ob das Argument im Gradmaß oder im Bogenmaß angegeben ist.

Durch die beiden orientierten Achsen eines kartesischen Koordinatensystems wird die Ebene in vier Teile eingeteilt, die Quadranten.

Die Punkte des ersten Quadranten haben sowohl positive  $x$ - als auch positive  $y$ -Koordinaten, die Punkte des zweiten Quadranten haben negative  $x$ - und positive  $y$ -Koordinaten, die Punkte des dritten Quadranten haben negative  $x$ - und negative  $y$ -Koordinaten und die Punkte des vierten Quadranten haben positive  $x$ - und negative  $y$ -Koordinaten.

Für die Vorzeichen der trigonometrischen Funktionen in den einzelnen Quadranten gilt:

| Quadrant | sin | cos | tan | cot |
|----------|-----|-----|-----|-----|
| I        | +   | +   | +   | +   |
| II       | +   | −   | −   | −   |
| III      | −   | −   | +   | +   |
| IV       | −   | +   | −   | −   |

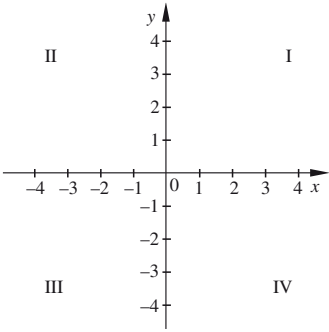


**Bild VI-6**  
Quadranten

**3 Beziehungen für den gleichen Winkel**

Für beliebige Winkel  $\alpha$  gelten folgende Umrechnungsformeln:<sup>1)</sup>

|                                                                         |                                                                         |
|-------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cot \alpha}$ | $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha}$ |
| $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$                                     | $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$                                     |
| $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$                           | $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$                           |

Diese Beziehungen lassen sich im rechtwinkligen Dreieck leicht nachrechnen.

■ **Beispiel:**  
 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1$ , denn nach dem Satz des Pythagoras gilt im rechtwinkligen Dreieck  $a^2 + b^2 = c^2$ .

Alle Beziehungen gelten auch allgemein, das heißt, für beliebige Winkel  $\alpha$ .

Nach diesen Beziehungen läßt sich jede trigonometrische Funktion durch jede andere desselben Winkels ausdrücken.

Will man zum Beispiel  $\sin \alpha$  durch  $\cos \alpha$  ausdrücken, so folgt  $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$  aus  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ .

Für Winkel im ersten Quadranten, also für Winkel  $\alpha$  mit  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  gilt:

<sup>1)</sup> Für Potenzen  $(f(x))^k$  von Funktionswerten ist die Schreibweise  $f^k(x)$  üblich, etwa  $\sin^2 \alpha$  (gesprochen: Sinus Quadrat Alpha) für  $(\sin \alpha)^2$ .

|                 | $\sin \alpha$                                  | $\cos \alpha$                                  | $\tan \alpha$                                  | $\cot \alpha$                                  |
|-----------------|------------------------------------------------|------------------------------------------------|------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| $\sin \alpha =$ | $\sin \alpha$                                  | $\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$                     | $\frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$ | $\frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$           |
| $\cos \alpha =$ | $\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$                     | $\cos \alpha$                                  | $\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$           | $\frac{\cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$ |
| $\tan \alpha =$ | $\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$ | $\frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$ | $\tan \alpha$                                  | $\frac{1}{\cot \alpha}$                        |
| $\cot \alpha =$ | $\frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$ | $\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$ | $\frac{1}{\tan \alpha}$                        | $\cot \alpha$                                  |

In den übrigen Quadranten sind die Vorzeichen der Wurzeln nach der Vorzeichentabelle (vgl. Abschnitt VI.2) oder am Einheitskreis zu bestimmen.

■ **Beispiel:**

Im dritten Quadranten sind sowohl  $\sin \alpha$  als auch  $\cos \alpha$  negativ. Deswegen gilt für Winkel  $\alpha$  mit  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$  zum Beispiel  $\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$  und  $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ .

## 4 Graphen der trigonometrischen Funktionen

Ein anschauliches Bild von Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen erhält man, wenn in einem kartesischen Koordinatensystem (vgl. Abschnitt VII.1.1) als Abszissen ( $x$ -Werte) die Winkel (im Gradmaß oder im Bogenmaß) und als Ordinaten ( $y$ -Werte) die Werte der betreffenden trigonometrischen Funktionen eingetragen werden. Die Funktionswerte ergeben sich als vorzeichenbehaftete Längen der entsprechenden Strecken am Einheitskreis (Bilder VI-7 und VI-8 siehe S. 85).

Die Graphen der trigonometrischen Funktionen nennt man auch Kurven. So ist zum Beispiel die Sinuskurve der Graph der Sinusfunktion.

In der folgenden Aufzählung sind alle Winkel im Bogenmaß angegeben.

### 1. Sinusfunktion

Die Funktion  $y = \sin x$  mit dem Definitionsbereich  $D = \mathbb{R}$  und dem Wertebereich  $W = [-1, 1]$ . Die Sinusfunktion hat die Periode  $2\pi$ , es gilt also  $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$  für  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Die Amplitude der Funktion ist 1, denn es gilt  $|\sin x| \leq 1$  und  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ .

Die Sinusfunktion ist wegen  $\sin(-x) = -\sin x$  für alle  $x$  eine ungerade Funktion. Die Sinuskurve ist also symmetrisch zum Koordinatenursprung.

### 2. Kosinusfunktion

Die Funktion  $y = \cos x$  mit dem Definitionsbereich  $D = \mathbb{R}$  und dem Wertebereich  $W = [-1, 1]$ . Die Kosinusfunktion hat ebenfalls die Periode  $2\pi$ , es gilt  $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$  für  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Die Amplitude der Funktion ist 1, denn es gilt  $|\cos x| \leq 1$  und  $\cos 0 = 1$ .

Die Kosinusfunktion ist wegen  $\cos(-x) = \cos x$  für alle  $x$  eine gerade Funktion. Die Kosinuskurve ist also symmetrisch zur  $y$ -Achse.

### 3. Tangensfunktion

Die Funktion  $y = \tan x$  mit dem Definitionsbereich  $D = \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  und dem Wertebereich  $W = \mathbb{R}$ .

Die Stellen  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  sind Pole der

Funktion. Nähert man sich einem Pol  $x = x_p$  mit wachsenden  $x$ -Werten (also  $x < x_p$ ), dann geht  $\tan x$  gegen  $+\infty$ . Nähert man sich dagegen einem Pol  $x = x_p$  mit abnehmenden  $x$ -Werten (also  $x > x_p$ ), so geht  $\tan x$  gegen  $-\infty$ . Die Geraden

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  sind Asymptoten der Funktion.

Die Tangensfunktion hat die Periode  $\pi$ , es gilt also  $\tan(x + k\pi) = \tan x$  für  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Eine Amplitude besitzt die Funktion nicht (Pole!).

Die Tangensfunktion ist wegen  $\tan(-x) = -\tan x$  für alle  $x$  eine ungerade Funktion. Die Tangenskurve ist also symmetrisch zum Koordinatenursprung.

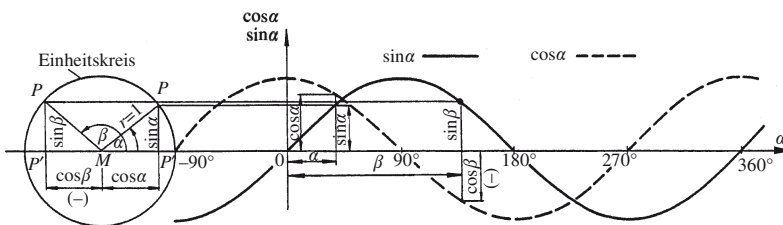


**Bild VI-7**  
Sinuskurve  
und Kosinuskurve

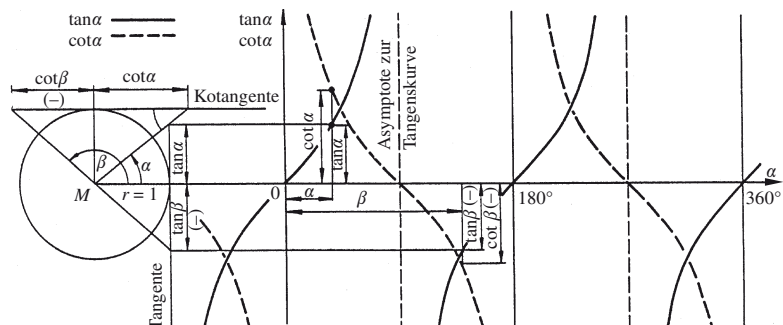


**Bild VI-8**  
Tangenskurve und  
Kotangenskurve



4. *Kotangensfunktion*

Die Funktion  $y = \cot x$  mit dem Definitionsbereich  $D = \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$  und dem Wertebereich  $W = \mathbb{R}$ .

Die Stellen  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$  sind Pole der Funktion. Nähert man sich einem Pol  $x = x_p$  mit wachsenden  $x$ -Werten (also  $x < x_p$ ), dann geht  $\cot x$  gegen  $-\infty$ . Nähert man sich dagegen einem Pol  $x = x_p$  mit abnehmenden  $x$ -Werten (also  $x > x_p$ ), so geht  $\cot x$  gegen  $+\infty$ . Die Geraden  $x = k\pi$  sind Asymptoten der Funktion.

Die Kotangensfunktion hat die Periode  $\pi$ , es gilt also  $\cot(x + k\pi) = \cot x$  für  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Eine Amplitude besitzt die Funktion nicht (Pole!).

Die Kotangensfunktion ist ungerade, denn es gilt  $\cot(-x) = -\cot x$ . Die Kotangenskurve ist also symmetrisch zum Koordinatenursprung.

5 Reduktionsformeln

Wegen der Periodizität können die trigonometrischen Funktionen für beliebige Winkel beim Sinus und Kosinus auf solche zwischen  $0^\circ$  und  $360^\circ$  und beim Tangens und Kotangens auf solche zwischen  $0^\circ$  und  $180^\circ$  zurückgeführt werden. Für beliebige ganze Zahlen  $k$  gilt:

$$\begin{aligned} \sin(360^\circ \cdot k + \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(360^\circ \cdot k + \alpha) &= \cos \alpha \\ \tan(180^\circ \cdot k + \alpha) &= \tan \alpha \\ \cot(180^\circ \cdot k + \alpha) &= \cot \alpha \end{aligned}$$

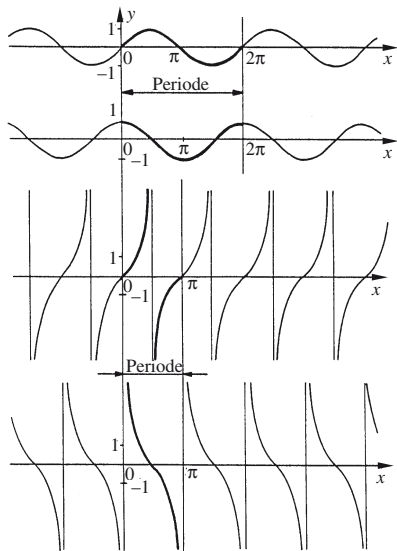


**Bild VI-9** Die Graphen der trigonometrischen Funktionen  $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$  (von oben nach unten)

Wegen der Symmetrie der trigonometrischen Funktionen gilt für negative Winkel:

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(-\alpha) &= -\cot \alpha \end{aligned}$$

Jeder so reduzierte Winkel kann durch eine der folgenden Beziehungen auf einen Winkel zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  zurückgeführt werden:

| Funktion     | $\beta = 90^\circ \pm \alpha$ | $\beta = 180^\circ \pm \alpha$ | $\beta = 270^\circ \pm \alpha$ | $\beta = 360^\circ - \alpha$ |
|--------------|-------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| $\sin \beta$ | $+\cos \alpha$                | $\mp \sin \alpha$              | $-\cos \alpha$                 | $-\sin \alpha$               |
| $\cos \beta$ | $\mp \sin \alpha$             | $-\cos \alpha$                 | $\pm \sin \alpha$              | $+\cos \alpha$               |
| $\tan \beta$ | $\mp \cot \alpha$             | $\pm \tan \alpha$              | $\mp \cot \alpha$              | $-\tan \alpha$               |
| $\cot \beta$ | $\mp \tan \alpha$             | $\pm \cot \alpha$              | $\mp \tan \alpha$              | $-\cot \alpha$               |

6 Additionstheoreme

Die Additionstheoreme sind Formeln für die trigonometrischen Funktionen von Winkelsummen und Winkeldifferenzen.

Die meisten dieser Gleichungen lassen sich mit Hilfe der Eulerschen Formel  $e^{jz} = \cos z + j \sin z$  für komplexe Zahlen (vgl. Abschnitt I.12.8) zusammen mit den Potenzgesetzen herleiten.

■ **Beispiel:**

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) + j \sin(\alpha + \beta) &= e^{j(\alpha + \beta)} = e^{j\alpha} \cdot e^{j\beta} = (\cos \alpha + j \sin \alpha) \cdot (\cos \beta + j \sin \beta) \\ &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + j(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \end{aligned}$$

Vergleich von Real- und Imaginärteil ergibt

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \text{ und } \sin(\alpha + \beta) \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Trigonometrische Funktionen der Summe und der Differenz zweier Winkel

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ \cot(\alpha + \beta) &= \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \alpha + \cot \beta} \\ \cot(\alpha - \beta) &= \frac{\cot \alpha \cot \beta + 1}{\cot \alpha - \cot \beta} \end{aligned}$$

## Trigonometrische Funktionen für Winkelvielfache

$$\begin{aligned}
 \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \\
 \sin 3\alpha &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \\
 \sin 4\alpha &= 8 \sin \alpha \cos^3 \alpha - 4 \sin \alpha \cos \alpha \\
 \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \\
 \cos 3\alpha &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \\
 \cos 4\alpha &= 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1 \\
 \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2}{\cot \alpha - \tan \alpha} \\
 \tan 3\alpha &= \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha} \\
 \tan 4\alpha &= \frac{4 \tan \alpha - 4 \tan^3 \alpha}{1 - 6 \tan^2 \alpha + \tan^4 \alpha} \\
 \cot 2\alpha &= \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha} = \frac{\cot \alpha - \tan \alpha}{2} = \frac{1}{\tan 2\alpha} \\
 \cot 3\alpha &= \frac{\cot^3 \alpha - 3 \cot \alpha}{3 \cot^2 \alpha - 1} \\
 \cot 4\alpha &= \frac{\cot^4 \alpha - 6 \cot^2 \alpha + 1}{4 \cot^3 \alpha - 4 \cot \alpha}
 \end{aligned}$$

Für allgemeine Winkelvielfache erhält man aus der Entwicklung der Formel von Moivre (vgl. Abschnitt I.12.6) durch Vergleich des Real- und Imaginärteils entsprechende Formeln:

$$\begin{aligned}
 \cos n\alpha + j \sin n\alpha &= (\cos \alpha + j \sin \alpha)^n \\
 &= \sum_{k=0}^n j^k \cdot \binom{n}{k} \cdot \cos^{n-k} \alpha \cdot \sin^k \alpha
 \end{aligned}$$

Summen und Differenzen zweier trigonometrischer Funktionen

$$\begin{aligned}
 \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\
 \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\
 \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\
 \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\
 \tan \alpha + \tan \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \\
 \tan \alpha - \tan \beta &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \\
 \cot \alpha + \cot \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} \\
 \cot \alpha - \cot \beta &= -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}
 \end{aligned}$$

## Produkte trigonometrischer Funktionen

$$\begin{aligned}
 \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \\
 \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \\
 \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \\
 \cos \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)] \\
 \tan \alpha \tan \beta &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\cot \alpha + \cot \beta} = -\frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\cot \alpha - \cot \beta} \\
 \cot \alpha \cot \beta &= \frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} = -\frac{\cot \alpha - \cot \beta}{\tan \alpha - \tan \beta} \\
 \tan \alpha \cot \beta &= \frac{\tan \alpha + \cot \beta}{\cot \alpha + \tan \beta} = -\frac{\tan \alpha - \cot \beta}{\cot \alpha - \tan \beta}
 \end{aligned}$$

## Potenzen trigonometrischer Funktionen

$$\begin{aligned}
 \sin^2 \alpha &= \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha) \\
 \sin^3 \alpha &= \frac{1}{4} (3 \sin \alpha - \sin 3\alpha) \\
 \sin^4 \alpha &= \frac{1}{8} (\cos 4\alpha - 4 \cos 2\alpha + 3) \\
 \cos^2 \alpha &= \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha) \\
 \cos^3 \alpha &= \frac{1}{4} (3 \cos \alpha + \cos 3\alpha) \\
 \cos^4 \alpha &= \frac{1}{8} (\cos 4\alpha + 4 \cos 2\alpha + 3)
 \end{aligned}$$

Die Formeln für  $\sin^n \alpha$  und  $\cos^n \alpha$  erhält man, indem man die Formeln für  $\cos n\alpha$  und  $\sin n\alpha$  nacheinander anwendet.

## 7 Sinussatz und Kosinussatz

## Sinussatz

In einem beliebigen Dreieck verhalten sich die Längen der Seiten wie die Sinuswerte der gegenüberliegenden Winkel.

$$\text{Sinussatz} \quad \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

oder

$$\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = a : b : c$$

Der Sinussatz läßt sich mit Hilfe der Höhen, also durch Zerlegung des Dreiecks in zwei rechtwinklige Dreiecke herleiten:

$$\sin \alpha = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \sin \alpha;$$

$$\sin \beta = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \sin \beta$$

Es folgt  $b \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \beta$  und daraus  $a : b = \sin \alpha : \sin \beta$ .

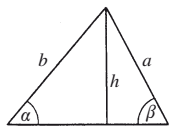


**Bild VI-10**  
Zur Herleitung des Sinussatzes

Die anderen Proportionen lassen sich analog herleiten.

*Kosinussatz*

In einem beliebigen Dreieck ist das Quadrat einer Seitenlänge gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seitenlängen minus dem doppelten Produkt der Längen dieser beiden anderen Seiten und dem Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Kosinussatz

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos \beta &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \cos \gamma &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{aligned}$$

Der Kosinussatz ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras, der für rechtwinklige Dreiecke gilt, auf beliebige Dreiecke. Gilt etwa  $\gamma = 90^\circ$ , dann folgt  $c^2 = a^2 + b^2$  wegen  $\cos \gamma = \cos 90^\circ = 0$ . Der Kosinussatz läßt sich durch Zerlegung des Dreiecks in zwei rechtwinklige Dreiecke und Anwendung des Satzes von Pythagoras herleiten:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{q}{b}, \quad q = c - p \\ \Rightarrow \cos \alpha &= \frac{c - p}{b} \Rightarrow p = c - b \cos \alpha \\ \sin \alpha &= \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \sin \alpha \end{aligned}$$

Arkusfunktionen

| Name           | Schreibweise                  | Definitionsbereich     | Wertebereich                                            | Gleichbedeutende trigonometrische Funktion |
|----------------|-------------------------------|------------------------|---------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| Arkussinus     | $y = \arcsin x$               | $-1 \leq x \leq 1$     | $k\pi - \frac{\pi}{2} \leq y \leq k\pi + \frac{\pi}{2}$ | $x = \sin y$                               |
| Arkuskosinus   | $y = \arccos x$               | $-1 \leq x \leq 1$     | $k\pi \leq y \leq (k + 1)\pi$                           | $x = \cos y$                               |
| Arkustangens   | $y = \arctan x$               | $-\infty < x < \infty$ | $k\pi - \frac{\pi}{2} < y < k\pi + \frac{\pi}{2}$       | $x = \tan y$                               |
| Arkuskotangens | $y = \operatorname{arccot} x$ | $-\infty < x < \infty$ | $k\pi < y < (k + 1)\pi$                                 | $x = \cot y$                               |

Durch Einsetzen der Ausdrücke für  $p$  und für  $h$  ergibt sich:

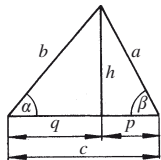
$$\begin{aligned} a^2 &= p^2 + h^2 \Rightarrow a^2 = (c - b \cos \alpha)^2 + (b \sin \alpha)^2 \\ \Rightarrow a^2 &= c^2 - 2bc \cos \alpha + b^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha \\ \Rightarrow a^2 &= c^2 - 2bc \cos \alpha + b^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \\ \Rightarrow a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad (\text{denn } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1) \end{aligned}$$


**Bild VI-11**  
Zur Herleitung des Kosinussatzes

Die anderen Gleichungen lassen sich ganz entsprechend herleiten.

8 Arkusfunktionen

Kennt man den Funktionswert einer trigonometrischen Funktion, etwa  $y = \sin x$ , und will man daraus den zugehörigen Winkel bestimmen, so muß man die Gleichung nach dem Winkel  $x$  auflösen, was mit Hilfe der Arkusfunktionen möglich ist:  $x = \arcsin y$ . Die Arkusfunktionen sind also die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen. Die Arkusfunktionen werden auch zyklometrische Funktionen oder inverse trigonometrische Funktionen genannt. Zu ihrer eindeutigen Definition wird der Definitionsbereich der trigonometrischen Funktionen in Monotonieintervalle zerlegt, so daß für jedes Monotonieintervall eine Umkehrfunktion erhalten wird (vgl. Abschnitt V.2.8: Streng monotone Funktionen besitzen Umkehrfunktionen). Diese wird entsprechend dem zugehörigen Monotonieintervall mit dem Index  $k$  gekennzeichnet. Die Vorgehensweise wird am Beispiel des Arkussinus gezeigt. Der Definitionsbereich von  $y = \sin x$  wird in die Monotonieintervalle  $k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{2}$  mit  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  zerlegt. Durch Spiegelung von  $y = \sin x$  an der Winkelhalbierenden  $y = x$  erhält man

die Umkehrfunktionen  $y = \arcsin_k x$  mit den Definitionsbereichen  $D_k = [-1, 1]$  und den Wertebereichen  $W_k = \left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ , wobei  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Die Schreibweise  $y = \arcsin_k x$  ist gleichbedeutend mit  $x = \sin y$ .

$$y = \arcsin_k x \Leftrightarrow x = \sin y$$

Die übrigen Arkusfunktionen ergeben sich analog. In der Tabelle sind die Definitions- und Wertebereiche aller Arkusfunktionen zusammengestellt, die Bilder VI.12–VI.15 zeigen die Graphen der Arkusfunktionen.

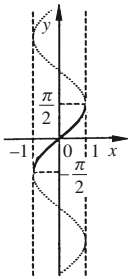


**Bild VI-12**  
Graph der Arkussinusfunktion

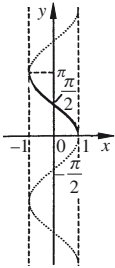


**Bild VI-13**  
Graph der Arkuskosinusfunktion

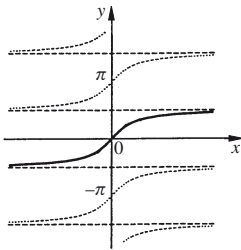


**Bild VI-14**  
Graph der Arkustangensfunktion

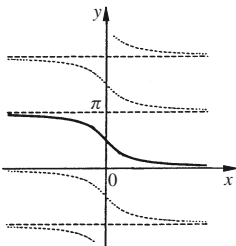


**Bild VI-15**  
Graph der Arkuskotangensfunktion

Setzt man  $k = 0$ , dann erhält man jeweils den sogenannten Hauptwert der Arkusfunktion. Den Hauptwert schreibt man ohne den Index  $k$ , also zum Beispiel  $\arcsin x = \arcsin_0 x$ . Für andere Werte von  $k$  erhält man Nebenwerte der entsprechenden Arkusfunktion. Den Hauptwert der Arkusfunktionen zeigt Bild VI-21.

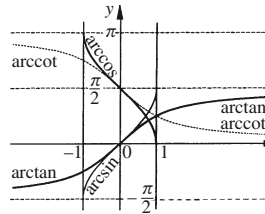


**Bild VI-16**  
Hauptwerte der Arkusfunktionen

Die Zurückführung von Nebenwerten auf die Hauptwerte der Arkusfunktionen erfolgt mit Hilfe der folgenden Formeln:

$$\arcsin_k x = k\pi + (-1)^k \arcsin x$$

$$\arccos_k x = \begin{cases} (k+1)\pi - \arccos x & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ k\pi + \arccos x & \text{falls } k \text{ gerade} \end{cases}$$

$$\arctan_k x = k\pi + \arctan x$$

$$\operatorname{arccot}_k x = k\pi + \operatorname{arccot} x$$

Taschenrechner geben immer die Hauptwerte der Arkusfunktionen an.

Beziehungen zwischen den Hauptwerten

$$\begin{aligned} \arcsin x &= \frac{\pi}{2} - \arccos x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \arccos x &= \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \operatorname{arccot} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \arctan x &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ \operatorname{arccot} x &= \frac{\pi}{2} - \arctan x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

Formeln für negative Argumente

$$\begin{aligned} \arcsin(-x) &= -\arcsin x \\ \arccos(-x) &= \pi - \arccos x \\ \arctan(-x) &= -\arctan x \\ \operatorname{arccot}(-x) &= \pi - \operatorname{arccot} x \end{aligned}$$

#### ■ Beispiele:

1.  $\arcsin 0 = 0$ ;  $\arcsin 0 = k\pi$

2.  $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ ;

$$\arccos_k \frac{1}{2} = \begin{cases} -\frac{\pi}{3} + (k+1)\pi & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ \frac{\pi}{3} + k\pi & \text{falls } k \text{ gerade} \end{cases}$$

3.  $\operatorname{arccot} 1 = \frac{\pi}{4}$ ;  $\operatorname{arccot} 1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$

## VII Analytische Geometrie

Der Grundgedanke der Analytischen Geometrie besteht darin, dass geometrische Untersuchungen mit rechnerischen Mitteln geführt werden. Geometrische Objekte werden dabei durch Gleichungen beschrieben und mit algebraischen Methoden untersucht.

### 1 Koordinatensysteme

Die Verbindung von Geometrie und Algebra wird dadurch erreicht, dass man die geometrischen Objekte als Punktmengen auffasst und jedem Punkt Zahlenwerte zuordnet, durch die er sich von anderen unterscheidet. Eine Kurve oder eine Gerade ist dann eine Menge von Punkten, für deren Zahlenwerte bestimmte Bedingungen gelten, die man Gleichungen dieser Objekte nennt, zum Beispiel Gleichung eines Kreises oder einer Geraden. Das geometrische Bild einer linearen Gleichung in zwei Variablen ist immer eine Gerade, das einer quadratischen Gleichung in zwei Variablen immer ein Kegelschnitt.

Die Grundlage für eine solche analytische Darstellung der Geometrie ist die Zuordnung zwischen Punkt und Zahl, die eindeutig sein muss. Auf einer Geraden oder allgemeiner auf einer Kurve genügt eine Zahl, auf einer Ebene oder einer Fläche ein Zahlenpaar und im Raum ein Zahlentripel (drei Zahlen), um einen Punkt eindeutig festzulegen. Umgekehrt bestimmt ein Punkt auf einer Kurve eindeutig eine Zahl, auf einer Fläche ein Zahlenpaar und im Raum ein Zahlentripel. Diese Zahlen werden Koordinaten des entsprechenden Punktes genannt. Die Koordinaten sind abhängig von dem zugrunde liegenden Koordinatensystem.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten für Koordinatensysteme, von denen hier drei wichtige beschrieben werden. Allgemein kann man ein Koordinatensystem als ein System von geometrischen Objekten, mit deren Hilfe die Lage anderer geometrischer Objekte durch Zahlenwerte (Koordinaten) umkehrbar eindeutig beschrieben werden kann, bezeichnen.

Legt man auf einer Geraden  $g$  einen Anfangspunkt  $O$  (Nullpunkt), eine positive Richtung (Orientierung) und eine Längeneinheit  $l$  (Maßstab) fest, dann entspricht jeder reellen Zahl  $x$  ein bestimmter Punkt dieser Geraden, und umgekehrt entspricht jedem Punkt der Geraden eine reelle Zahl. Die Gerade  $g$  wird Zahlengerade genannt.

#### 1.1 Kartesisches Koordinatensystem der Ebene

Um die Lage eines Punktes in der Ebene eindeutig festzulegen, sind zwei Zahlengeraden notwendig. Man ordnet die Zahlengeraden stets so an, dass ihre Nullpunkte zusammenfallen. Die Zahlengeraden

werden Achsen des Koordinatensystems oder Koordinatenachsen genannt und als  $x$ - oder Abszissenachse und als  $y$ - oder Ordinatenachse bezeichnet. Der gemeinsame Nullpunkt, also der Schnittpunkt der beiden Geraden, heißt Koordinatenursprung oder Nullpunkt. Auf jeder der beiden Geraden wird vom Koordinatenursprung aus eine positive und eine negative Orientierung sowie ein Maßstab festgelegt.

In einem kartesischen (rechtwinkligen) Koordinatensystem stehen die Koordinatenachsen senkrecht aufeinander, die Achsen haben den gleichen Maßstab und bilden ein sogenanntes Rechtssystem: Die  $x$ -Achse geht durch Drehung um einen rechten Winkel im mathematisch positiven Sinne (linksdrehend, entgegen dem Uhrzeigersinn) in die  $y$ -Achse über.

Ein beliebiger Punkt  $P$  der Ebene kann dann durch seine kartesischen Koordinaten beschrieben werden:  $P(x|y)$  mit  $x$  als Abszisse und  $y$  als Ordinate.

Dieses Koordinatensystem ist benannt nach dem französischen Mathematiker René Descartes, genannt Cartesius (1596–1650).

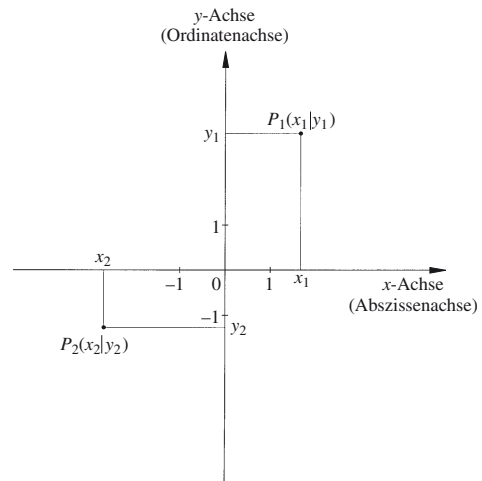


Bild VII-1 Kartesisches Koordinatensystem der Ebene

#### 1.2 Polarkoordinatensystem der Ebene

Ein Polarkoordinatensystem der Ebene ist bestimmt durch einen festen Punkt, den Pol  $O$ , und einer von ihm ausgehenden fest gewählten Achse, der Polarachse, auf der wie bei einem Zahlenstrahl eine Orientierung und ein Maßstab festgelegt sind.

Ein beliebiger Punkt  $P$  der Ebene lässt sich dann durch seine Polarkoordinaten beschreiben:  $P(r|\varphi)$ , wobei  $r$  der Abstand des Punktes  $P$  vom Pol  $O$  ist und  $\varphi$  der Winkel, den der Strahl vom Pol  $O$  durch den Punkt  $P$  mit der Polarachse bildet.

Dabei wird der Winkel  $\varphi$  in mathematisch positiver Richtung (linksdrehend, entgegen dem Uhrzeigersinn) gemessen. Dieser Winkel  $\varphi$  ist nur bis auf ganzzahlige Vielfache von  $2\pi$  bestimmt. Man nennt  $\varphi$  auch Polarwinkel des Punktes  $P$ .

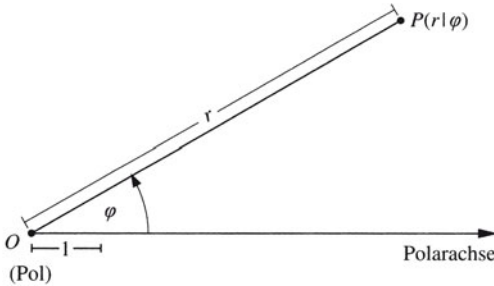


Bild VII-2 Polarkoordinatensystem der Ebene

### 1.3 Zusammenhang zwischen kartesischen und Polarkoordinaten

Ein beliebiges geometrisches Objekt kann in verschiedenen Koordinatensystemen beschrieben werden, zum Beispiel in einem kartesischen und in einem Polarkoordinatensystem. Für dieselben geometrischen Eigenschaften findet man dann zwei Gleichungen  $f_1(x, y) = 0$  und  $f_2(r, \varphi) = 0$ . Durch Transformation (Überführung) des einen Koordinatensystems in das andere geht die eine Gleichung des geometrischen Objekts in die andere über.

Die Transformationsgleichungen für den Übergang von Polarkoordinaten zu kartesischen Koordinaten und umgekehrt ergeben sich mit Hilfe der trigonometrischen und Arkusfunktionen. Zur Vereinfachung wird dabei vorausgesetzt, dass der Pol des Polarkoordinatensystems mit dem Koordinatenursprung des kartesischen Koordinatensystems und die Polarachse mit der  $x$ -Achse (Abszisse) zusammenfallen.

Transformationsgleichungen

|                      |                                                                                        |
|----------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| $x = r \cos \varphi$ | $r = \sqrt{x^2 + y^2}$                                                                 |
| $y = r \sin \varphi$ | $\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ |

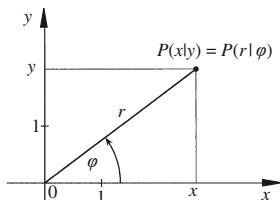


Bild VII-3 Kartesische Koordinaten und Polarkoordinaten

#### ■ Beispiele:

1. Eine rechteckige Metallplatte soll zwei Bohrungen erhalten. Für die Mitten der Bohrungen soll gelten: Die erste Bohrung ist von einer Ecke der Platte 120 mm entfernt. Die Verbindungsstrecke zwischen dieser Ecke und der Bohrung soll mit der längeren Seite der Platte einen Winkel von  $30^\circ$  bilden. Die zweite Bohrung soll dreiviertel so weit von derselben Ecke entfernt sein: Die Verbindungsstrecke zwischen dieser Ecke und der zweiten Bohrung soll mit der ersten Verbindungsstrecke einen Winkel von  $45^\circ$  einschließen. Die Bohrungsmitten sind anzureißen.

Mathematisch umgesetzt bedeutet die Aufgabe:

Die Polarkoordinaten  $r_1 = 120$  mm,  $\varphi_1 = 30^\circ$  und  $r_2 = 90$  mm,  $\varphi_2 = 75^\circ$  zweier Punkte  $P_1(r_1 | \varphi_1)$  und  $P_2(r_2 | \varphi_2)$  sind in kartesische Koordinaten umzurechnen ( $\varphi_2 = \varphi_1 - 45^\circ$  kommt nicht in Frage, da  $P_2$  dann außerhalb der Platte läge).

Man berechnet:

$$x_1 = r_1 \cos \varphi_1 = 120 \text{ mm} \cdot \cos 30^\circ \approx 103,92 \text{ mm}$$

$$y_1 = r_1 \sin \varphi_1 = 120 \text{ mm} \cdot \sin 30^\circ = 60,00 \text{ mm}$$

$$x_2 = r_2 \cos \varphi_2 = 90 \text{ mm} \cdot \cos 75^\circ \approx 23,29 \text{ mm}$$

$$y_2 = r_2 \sin \varphi_2 = 90 \text{ mm} \cdot \sin 75^\circ \approx 86,93 \text{ mm}$$

Ergebnis:

$$x_1 \approx 103,92 \text{ mm}, y_1 = 60,00 \text{ mm}, x_2 \approx 23,29 \text{ mm},$$

$$y_2 \approx 86,93 \text{ mm}$$

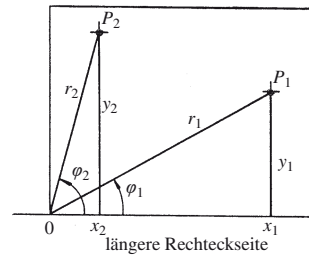


Bild VII-4 Zu Beispiel 1

2. Welche Polarkoordinaten haben die Ecken  $A, B, C$  des Dreiecks  $A(2,9 | 2,3)$ ,  $B(-3,0 | -0,7)$ ,  $C(1,8 | -2,7)$ ?

Man berechnet:

$$r_A = \sqrt{(2,9)^2 + (2,3)^2} \approx 3,7$$

$$\cos \varphi_A = \frac{2,9}{\sqrt{(2,9)^2 + (2,3)^2}} \approx 0,7835 \Rightarrow \varphi_A \approx 38,4^\circ$$

$$r_B = \sqrt{(-3,0)^2 + (-0,7)^2} \approx 3,1$$

$$\cos \varphi_B < 0 \text{ und } \sin \varphi_B < 0 \Rightarrow 180^\circ < \varphi_B < 270^\circ$$

(vgl. Vorzeichentabelle in Abschnitt VI.2)

$$\cos \alpha = \frac{-3,0}{\sqrt{(-3,0)^2 + (-0,7)^2}} \approx -0,9738;$$

$$\cos \beta = 0,9738 \Rightarrow \beta \approx 13,1^\circ$$

Wegen  $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$  (vgl. Abschnitt VI.5) folgt

$$\varphi_B \approx 180^\circ + 13,1^\circ = 193,1^\circ$$

$$r_C = \sqrt{(1,8)^2 + (-2,7)^2} \approx 3,2$$

$$\cos \varphi_C > 0 \text{ und } \sin \varphi_C < 0 \Rightarrow 270^\circ < \varphi_C < 360^\circ$$

(vgl. Vorzeichentabelle in Abschnitt VI.2)

$$\cos \alpha = \frac{1,8}{\sqrt{(1,8)^2 + (-2,7)^2}} \approx 0,5547 \Rightarrow \alpha \approx 56,3^\circ$$

Wegen  $\cos(360^\circ - \alpha) = \cos \alpha$  (vgl. Abschnitt VI.5) folgt

$$\varphi_C \approx 360^\circ - 56,3^\circ = 303,7^\circ$$

Ergebnis:  $A(3,7 | 38,4^\circ)$ ,  $B(3,1 | 193,1^\circ)$ ,  $C(3,2 | 303,7^\circ)$  sind die drei Punkte in Polarkoordinaten.

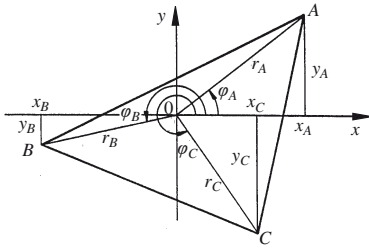


Bild VII-5 Zu Beispiel 2

## 1.4 Kartesisches Koordinatensystem des Raums

Ein kartesisches Koordinatensystem des Raums besteht aus drei paarweise aufeinander senkrecht stehenden Geraden (Koordinatenachsen), die sich in einem Punkt, dem Koordinatenursprung, schneiden. Die drei Koordinatenachsen bilden ein Rechtssystem: Winkelt man Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand so ab, dass sie aufeinander senkrecht stehen, dann können diese Finger als positive Richtungen eines Rechtssystems aufgefaßt werden. Man bezeichnet die Achsen in dieser Reihenfolge meist als  $x$ -Achse,  $y$ -Achse und  $z$ -Achse. Auf allen drei Achsen sind die Maßstäbe gleich.

Ein beliebiger Punkt  $P$  des Raums kann dann durch seine kartesischen Koordinaten beschrieben werden:  $P(x|y|z)$ , wobei  $x$ ,  $y$  und  $z$  die senkrechten Projektionen des Punktes auf die drei Koordinatenachsen sind.

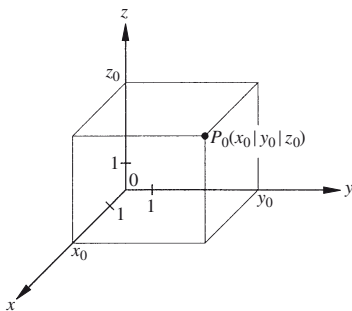


Bild VII-6 Kartesisches Koordinatensystem des Raums

## 2 Geraden

### 2.1 Geradengleichungen

Eine Gerade ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte. Eine Gerade ist durch zwei beliebige auf ihr liegende Punkte eindeutig bestimmt (vgl. Abschnitt III.1).

Für eine Gerade gibt es verschiedene Gleichungsformen.

1. Die Gleichung  $ax + by + c = 0$  ist die allgemeine Geradengleichung, wobei die Koeffizienten  $a$  und  $b$  nicht gleichzeitig Null sein dürfen.

Allgemeine Geradengleichung

$$ax + by + c = 0$$

Die Variablen  $x$  und  $y$  sind die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Geraden. Ein Punkt  $P_0 = P(x_0|y_0)$  der Ebene liegt also genau dann auf der Geraden, wenn seine Koordinaten  $x_0$  und  $y_0$  die Gleichung erfüllen, wenn also  $ax_0 + by_0 + c = 0$  gilt.

Die Koeffizienten  $a, b, c$  legen die Gerade eindeutig fest. Für  $a = 0$  ist die Gerade eine Parallele zur  $x$ -Achse, für  $b = 0$  eine Parallele zur  $y$ -Achse, und für  $c = 0$  verläuft die Gerade durch den Koordinatenursprung (Nullpunkt).

2. Dividiert man die allgemeine Geradengleichung durch  $b \neq 0$  (die Gerade ist also nicht parallel zur  $y$ -Achse), dann ergibt sich mit  $m = -\frac{a}{b}$  und  $n = -\frac{c}{b}$  die Hauptform oder Normalform der Geradengleichung.

Hauptform oder Normalform

$$y = mx + n$$

Geraden, die Parallelen zur  $y$ -Achse sind, besitzen also keine Hauptform (Normalform).

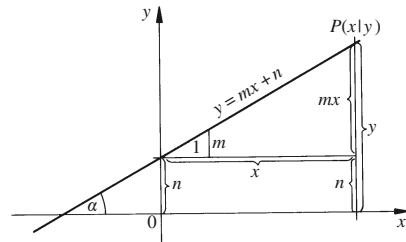


Bild VII-7 Hauptform der Geradengleichung

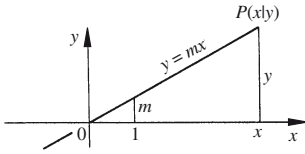
Die Größe  $m$  wird Richtungskoeffizient oder Steigung der Geraden genannt. Die Steigung ist gleich dem Tangens des Winkels, den die Gerade mit der positiven Richtung der  $x$ -Achse einschließt. Die Strecke  $n$  wird von der Geraden auf der  $y$ -Achse abgeschnitten, deshalb heißt  $n$  auch Achsenabschnitt oder genauer  $y$ -Achsenabschnitt. Er kann ebenso wie der Tangens je nach Lage unterschiedliches Vorzeichen besitzen.

Sonderfälle:

- 2.1  $n = 0$ : Die Gerade verläuft durch den Nullpunkt.

Gerade durch Nullpunkt

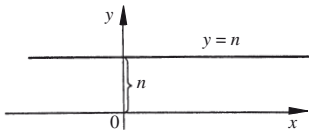
$$y = mx$$

Bild VII-8 Gerade mit der Gleichung  $y = mx$ 

2.2  $m = 0$ : Die Gerade ist eine Parallele zur  $x$ -Achse im Abstand  $n$ .

Parallele zur  $x$ -Achse

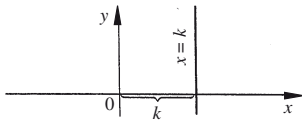
$$y = n$$

Bild VII-9 Gerade mit der Gleichung  $y = n$ 

2.3 Entsprechend ist  $x = k$  die Gleichung einer Parallele zur  $y$ -Achse im Abstand  $k$ .

Parallele zur  $y$ -Achse

$$x = k$$

Bild VII-10 Gerade mit der Gleichung  $x = k$ 

3. Sind von einer Geraden ein Punkt  $P_1 = P(x_1|y_1)$  und die Steigung  $m$  bekannt, dann lautet die Gleichung der Geraden  $y = m(x - x_1) + y_1$ . Dies ist die Punktsteigungsform der Geradengleichung.

Punktsteigungsform

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

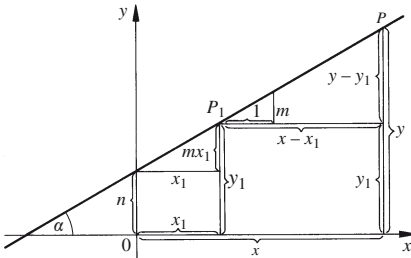


Bild VII-11 Punktsteigungsform der Geradengleichung

Wegen der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke mit den Katheten  $y - y_1$ ,  $x - x_1$  und mit

den Katheten  $m$ , 1 gilt die Proportion

$$(y - y_1) : (x - x_1) = m : 1 \quad \text{oder} \quad \frac{y - y_1}{x - x_1} = m.$$

Auflösung nach  $y$  ergibt die Punktsteigungsform.

4. Die Gleichung einer Geraden durch zwei Punkte  $P_1 = P(x_1|y_1)$  und  $P_2 = P(x_2|y_2)$  mit  $x_1 \neq x_2$  ergibt die Zweipunkteform der Geradengleichung.

Zweipunkteform

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1$$

oder

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

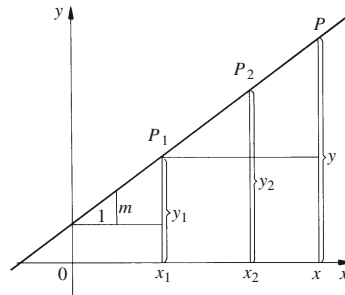


Bild VII-12 Zweipunkteform der Geradengleichung

Die Proportion ergibt sich aus der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke mit den Hypotenusen  $P_1P$  und  $P_1P_2$ .

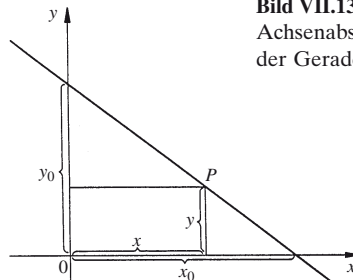
5. Hat eine Gerade den Achsenabschnitt  $x_0$  auf der  $x$ -Achse und den Achsenabschnitt  $y_0$  auf der  $y$ -Achse, das heißt, die Gerade geht durch die Punkte  $P_1(x_0|0)$  und  $P_2(0|y_0)$ , und gilt  $x_0 \neq 0$  und  $y_0 \neq 0$ , dann lautet die Gleichung der Gerade  $\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 1$ . Dies ist die Achsenabschnittsform der Geradengleichung.

Achsenabschnittsform

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 1$$

Bild VII.13

Achsenabschnittsform der Geradengleichung





Aus der allgemeinen Geradengleichung  $ax + by + c = 0$  ergibt sich die Achsenabschnittsform durch Division durch  $-c \neq 0$ .

6. Die Hesse-Form oder Hessesche Normalform der Geradengleichung (nach dem deutschen Mathematiker Ludwig Otto Hesse, 1811–1874) lautet  $x \cos \varphi + y \sin \varphi - d = 0$ . Dabei ist  $d \geq 0$  der Abstand des Koordinatenursprungs  $O$  von der Geraden  $g$ , also die Länge des Lotes von  $O$  auf die Gerade  $g$  (Fußpunkt  $F$ ), und  $\varphi$  mit  $0 \leq \varphi < 2\pi$  der Winkel zwischen der positiven  $x$ -Achse und dem Lot  $\overline{OF}$ .

Hessesche Normalform

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - d = 0$$

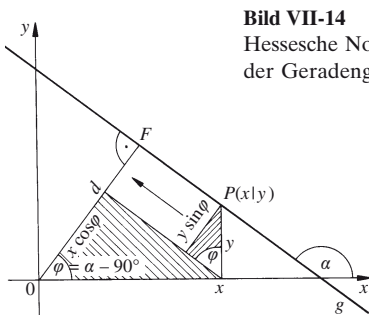


**Bild VII-14**  
Hessesche Normalform  
der Geradengleichung

Man kann die Hessesche Normalform aus der allgemeinen Geradengleichung  $ax + by + c = 0$  durch Multiplikation mit dem Normierungsfaktor  $\pm \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  herleiten. Das Vorzeichen des Normierungsfaktors muss entgegengesetzt zu dem von  $c$  gewählt werden.

■ **Beispiel:**

Gesucht ist die Gerade durch die Punkte  $P_1(-5|3,5)$  und  $P_2(2|-7)$ .

Zweipunkteform:

$$\frac{y - 3,5}{x + 5} = \frac{-7 - 3,5}{2 + 5}$$

Punktsteigungsform:

Da die rechte Seite der Zweipunkteform die Steigung  $m$  angibt, also  $m = \frac{-7 - 3,5}{2 + 5} = -1,5$  folgt

$$y = -1,5(x + 5) + 3,5$$

Hauptform:

Aus der Punktsteigungsform ergibt sich  $y = -1,5x - 7,5 + 3,5$  und somit

$$y = -1,5x - 4$$

Achsenabschnittsform:

Aus der Hauptform folgt  $y = -4$  für  $x = 0$ , der  $y$ -Achsenabschnitt ist also  $y_0 = -4$ . Setzt man in die Hauptform  $y = 0$  ein, so ergibt sich  $1,5x = -4$ , also  $x = -\frac{8}{3}$ , der  $x$ -Achsenabschnitt ist somit  $x_0 = -\frac{8}{3}$ . Die Achsenabschnittsform lautet daher

$$\frac{x}{-\frac{8}{3}} + \frac{y}{-4} = 1$$

Man findet die Achsenabschnittsform auch direkt, indem man in der Hauptform durch Division durch  $-4$  das Absolutglied zu 1 macht.

Hessesche Normalform:

Durch Umstellung der Hauptform ergibt sich  $-1,5x - y - 4 = 0$ . Durch Vergleich mit der allgemeinen Geradengleichung  $ax + by + c = 0$  erhält man  $a = -1,5$ ,  $b = -1$ ,  $c = -4$ . Man erhält die Hessesche Normalform, indem man die Gleichung  $-1,5x - y - 4 = 0$  durch  $+\sqrt{a^2 + b^2} = +\sqrt{(-1,5)^2 + (-1)^2} = +\sqrt{3,25}$  dividiert:

$$-\frac{1,5}{\sqrt{3,25}}x - \frac{1}{\sqrt{3,25}}y - \frac{4}{\sqrt{3,25}} = 0$$

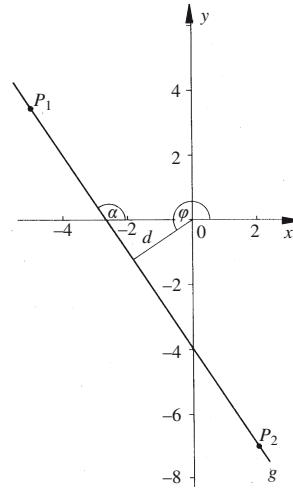


**Bild VII-15** Gerade durch die Punkte  
 $P_1(-5|3,5)$  und  $P_2(2|-7)$

## 2.2 Abstände

Mit Hilfe der Hesseschen Normalform der Geradengleichung lässt sich der Abstand zwischen einem Punkt und einer Geraden oder zwischen zwei parallelen Geraden berechnen. Zunächst werden jedoch Formeln zur Berechnung des Abstandes zwischen zwei Punkten hergeleitet.

### 1. Punkt – Punkt

Der Abstand zweier Punkte  $P_1$  und  $P_2$  ist die Länge  $|\overline{P_1P_2}|$  der Verbindungsstrecke  $\overline{P_1P_2}$ .

Sind die Punkte im kartesischen Koordinatensystem dargestellt, also  $P_1 = P_1(x_1 | y_1)$ ,  $P_2 = P_2(x_2 | y_2)$ , dann gilt für den Abstand  $d(P_1, P_2)$  von  $P_1$  und  $P_2$  nach dem Satz des Pythagoras

$$d(P_1, P_2) = |\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Sind die Punkte in Polarkoordinaten dargestellt, also  $P_1 = P_1(r_1 | \varphi_1)$ ,  $P_2 = P_2(r_2 | \varphi_2)$ , dann folgt aus dem Kosinussatz

$$d(P_1, P_2) = |\overline{P_1P_2}| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

### 2. Gerade – Gerade

Sind  $g_1: y = mx + n_1$  und  $g_2: y = mx + n_2$  zwei parallele Geraden (parallele Geraden haben glei-

che Steigung), so ermittelt man die Hessesche Normalform der Geraden:

$$g_1: x \cos \varphi + y \sin \varphi - d_1 = 0,$$

$$g_2: x \cos \varphi + y \sin \varphi - d_2 = 0$$

Für den Abstand  $l$  der parallelen Geraden  $g_1$  und  $g_2$  voneinander gilt dann

$l = |d_1 - d_2|$ , wenn die Geraden auf der gleichen Seite des Koordinatenursprungs liegen,

$l = d_1 + d_2$ , wenn die Geraden auf verschiedenen Seiten des Koordinatenursprungs liegen.

### 3. Punkt – Gerade

Ist  $P_1(x_1 | y_1)$  ein Punkt und  $g_1: y = mx + n$  eine Gerade, dann ermittelt man zunächst die Hessesche Normalform von  $g_1$ :

$$g_1: x \cos \varphi + y \sin \varphi - d_1 = 0$$

Durch den Punkt  $P_1$  legt man eine zu  $g_1$  parallele Gerade  $g_2$ :

$$g_2: x \cos \varphi + y \sin \varphi - d_2 = 0$$

Ist  $l$  der Abstand zwischen  $P_1$  und  $g_1$ , so ist  $l$  auch der Abstand zwischen den Geraden  $g_1$  und  $g_2$ , und es gilt

$$g_2: x \cos \varphi + y \sin \varphi - (d_1 \mp l) = 0$$

Da  $P_1$  auf  $g_2$  liegt, erfüllen seine Koordinaten die Geradengleichung

$$x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi - (d_1 \mp l) = 0,$$

woraus sich für den Abstand  $l$  ergibt

$$l = |x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi - d_1|$$

### ■ Beispiele:

- Gegeben: Die Punkte  $P_1(3|4)$  und  $P_2(-2|6)$   
Gesucht: Der Abstand  $d(P_1, P_2)$  von  $P_1$  und  $P_2$

Es gilt

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-2 - 3)^2 + (6 - 4)^2} \\ &= \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} = 5,3851 \dots \end{aligned}$$

- Gegeben: Die beiden parallelen Geraden

$$g_1: 2x - 4y + 7 = 0, \quad g_2: -3x + 6y + 30 = 0$$

Gesucht: Der Abstand  $l$  der beiden Geraden

$$\begin{aligned} \text{Hessesche Normalform von } g_1: & -\frac{2}{\sqrt{20}}x + \frac{4}{\sqrt{20}}y - \frac{7}{\sqrt{20}} = 0 \\ \left( \text{durch Multiplikation der allgemeinen Geradengleichung} \right. \\ \text{mit dem Normierungsfaktor } & -\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2^2 + (-4)^2}} \\ & \left. = -\frac{1}{\sqrt{20}} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Hessesche Normalform von } g_2: \frac{2}{\sqrt{20}}x - \frac{4}{\sqrt{20}}y - \frac{20}{\sqrt{20}} = 0$$

Entgegengesetzte Vorzeichen der  $x$ - und  $y$ -Glieder  $\Rightarrow$  die Geraden liegen auf verschiedenen Seiten des Koordinatenursprungs

Somit gilt für den Abstand  $l$  von  $g_1$  und  $g_2$ :

$$l = d_1 + d_2 = \frac{7}{\sqrt{20}} + \frac{20}{\sqrt{20}} = \frac{27}{\sqrt{20}} = \frac{27}{2\sqrt{5}} = \frac{27 \cdot \sqrt{5}}{10}$$

- Gegeben: Punkt  $P_1(5|10)$  und Gerade  $g_1: 3x - 4y + 10 = 0$   
Gesucht: Der Abstand  $l$  des Punktes  $P_1$  von der Geraden  $g_1$

$$\text{Hessesche Normalform von } g_1: -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 = 0$$

$$\left( \text{durch Multiplikation der allgemeinen Geradengleichung mit} \right. \\ \text{dem Normierungsfaktor } -\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{1}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = -\frac{1}{5} \left. \right)$$

Durch Einsetzen der Koordinaten von  $P_1$  erhält man den gesuchten Abstand:

$$l = \left| -\frac{3}{5} \cdot 5 + \frac{4}{5} \cdot 10 - 2 \right| = |-3 + 8 - 2| = 3$$

## 3 Kreise

### 3.1 Kreisgleichungen

Der Kreis ist der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, die von einem festen Punkt  $M$  (Mittelpunkt des Kreises) einen konstanten Abstand  $r$  (Radius des Kreises) haben (vgl. Abschnitt III.9).

Für einen Kreis gibt es verschiedene Gleichungsformen.

- Liegt der Mittelpunkt eines Kreises mit dem Radius  $r$  im Koordinatenursprung, dann lautet die Gleichung des Kreises in kartesischen Koordinaten  $x^2 + y^2 = r^2$ . Dabei sind  $x$  und  $y$  die Koordinaten eines beliebigen Punktes  $P(x|y)$  des Kreises. Die Gleichung ergibt sich nach dem Satz des Pythagoras.

Mittelpunkt im Ursprung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

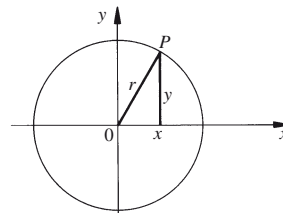


Bild VII-16 Kreisgleichung  $x^2 + y^2 = r^2$

- Hat der Mittelpunkt allgemeiner die Koordinaten  $x_m$  und  $y_m$ , also  $M = M(x_m | y_m)$ , dann ergibt sich die Mittelpunktsform oder Hauptform der Kreisgleichung.

Mittelpunktsform oder Hauptform

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$

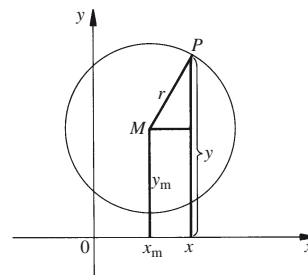


Bild VII-17 Kreisgleichung

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$

3. Löst man in der Mittelpunktsform die Klammern auf, dann ergibt sich die allgemeine Form der Kreisgleichung.

Allgemeine Form

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

Hierin bedeuten  $a = -x_m$ ,  $b = -y_m$ ,  $c = x_m^2 + y_m^2 - r^2$ . Aus der letzten Gleichung folgt  $a^2 + b^2 - c = r^2 > 0$  als Bedingung dafür, dass es sich bei einer Gleichung der allgemeinen Form wirklich um eine Kreisgleichung handelt (für  $c > a^2 + b^2$  liefert die Gleichung keine reelle Kurve, für  $c = a^2 + b^2$  ergibt sich ein einziger Punkt  $M(x_m | y_m)$ ).

4. Werden die beiden Koordinaten  $x$  und  $y$  jeweils als Funktion einer Hilfsvariablen  $t$  angegeben, so erhält man die Parameterdarstellung des Kreises mit dem Radius  $r$  und dem Mittelpunkt  $M(x_m | y_m)$  (vgl. Abschnitt V.1.2).

Parameterdarstellung

$$x = x_m + r \cos t, \quad y = y_m + r \sin t, \quad 0 \leq t < 2\pi$$

#### ■ Beispiele:

1. Welches geometrische Objekt beschreibt die Gleichung  $1,5x^2 + 1,5y^2 + 3x - 6y + 4,5 = 0$ ?
- Lösung:  
Division durch 1,5 ergibt  $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$ , eine Kreisgleichung in allgemeiner Form.  
Dabei ist  $a = -x_m = 1$ ,  $b = -y_m = -2$ ,  $c = 3$ . Die Bedingung  $a^2 + b^2 - c > 0$  ist erfüllt, denn  $1 + 4 - 3 = 2 > 0$ .  
Die Koordinaten des Kreismittelpunktes sind  $x_m = -1$ ,  $y_m = 2$ , der Radius ist  $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c} = \sqrt{2}$ . Die Mittelpunktsform (Hauptform) dieses Kreises lautet somit  $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$ .

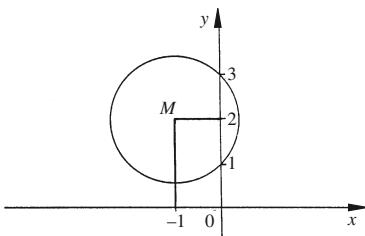


Bild VII-18 Kreis mit der Gleichung

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$$

Die aus der gegebenen Gleichung abgeleitete Gleichung  $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$  lässt sich auch ohne Benutzung der Formeln für die Mittelpunktskoordinaten und den Radius auf die Mittelpunktsform bringen, und zwar mit Hilfe von quadratischen Ergänzungen:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 &= 0 \\ (x^2 + 2x) + (y^2 - 4y) &= -3 \\ (x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) &= 1 + 4 - 3 \\ (x + 1)^2 + (y - 2)^2 &= 2 \end{aligned}$$

2. Welches geometrische Objekt beschreibt die Gleichung  $1,5x^2 + 1,5y^2 + 3x - 6y + 9 = 0$ ?

Lösung:

Die entsprechenden Rechnungen wie bei Beispiel 1 ergeben  $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = -1$ .

Dies ist eine unerfüllbare Gleichung, denn der Term auf der linken Seite des Gleichheitszeichens ist als Summe zweier Quadrate nicht negativ (ein Quadrat ist nicht negativ, also ist auch eine Summe von Quadraten nicht negativ), während die rechte Seite gleich  $-1$ , also negativ ist. Man bestätigt, dass die Bedingung  $a^2 + b^2 - c > 0$  nicht erfüllt ist.

3. Welches geometrische Objekt beschreibt die Gleichung  $1,5x^2 + 1,5y^2 + 3x - 6y + 7,5 = 0$ ?

Lösung:

Man berechnet  $a^2 + b^2 - c = 1 + 4 - 5 = 0$  in der durch 1,5 dividierten Gleichung und somit  $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$ .

Dies ist die Gleichung eines entarteten Kreises, also eines Kreises mit dem Radius  $r = 0$ . Die Gleichung wird nur von einem Koordinatenpaar, den Koordinaten des Mittelpunktes  $M(-1 | 2)$ , erfüllt.

## 3.2 Berechnung von Kreisen

Ein Kreis ist festgelegt durch den Mittelpunkt und einen weiteren Punkt oder durch drei Punkte (die nicht alle auf einer Geraden liegen).

Die Gleichung eines Kreises kann also berechnet werden, wenn drei Punkte der Kreisperipherie gegeben sind oder der Mittelpunkt und ein Punkt der Peripherie.

Berechnung von Kreisen:

1. Gegeben: Mittelpunkt  $M(x_m | y_m)$ ,

Punkt  $P_1(x_1 | y_1)$

Gesucht: Kreis mit dem Mittelpunkt  $M$  durch den Punkt  $P_1$

Der Radius  $r$  des gesuchten Kreises ergibt sich durch Einsetzen der Koordinaten des Punktes  $P_1$  in die Mittelpunktsform der Kreisgleichung:

$$r = \sqrt{(x_1 - x_m)^2 + (y_1 - y_m)^2}$$

Kreisgleichung somit:

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = (x_1 - x_m)^2 + (y_1 - y_m)^2$$

2. Gegeben: Punkte  $P_1(x_1 | y_1)$ ,  $P_2(x_2 | y_2)$ ,

$P_3(x_3 | y_3)$

Gesucht: Kreis durch die Punkte  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$

Bestimmung der Koordinaten  $x_m$ ,  $y_m$  des Mittelpunktes:

Einsetzen der Koordinaten der Punkte in die Mittelpunktsform der Kreisgleichung:

$$\begin{aligned} (x_1 - x_m)^2 + (y_1 - y_m)^2 &= (x_2 - x_m)^2 + (y_2 - y_m)^2 \\ &= (x_3 - x_m)^2 + (y_3 - y_m)^2 = r^2 \end{aligned}$$

Daraus erhält man ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von  $x_m$  und  $y_m$ :

$$\begin{aligned} 2(x_2 - x_1) \cdot x_m + 2(y_2 - y_1) \cdot y_m &= x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 \\ 2(x_3 - x_1) \cdot x_m + 2(y_3 - y_1) \cdot y_m &= x_3^2 - x_1^2 + y_3^2 - y_1^2 \end{aligned}$$

Bestimmung des Radius  $r$ :

Einsetzen von  $x_m$ ,  $y_m$  und der Koordinaten eines Punktes in die Mittelpunktsform der Kreisgleichung:

$$r = \sqrt{(x_1 - x_m)^2 + (y_1 - y_m)^2}$$

Einsetzen von  $x_m$ ,  $y_m$  und  $r$  in die Mittelpunktsform der Kreisgleichung ergibt die Gleichung des gesuchten Kreises.

■ **Beispiele:**

- Gegeben: Mittelpunkt  $M(-2|-1)$ , Punkt  $P_1(4|3)$   
Gesucht: Kreis mit dem Mittelpunkt  $M$  durch den Punkt  $P_1$   
Berechnung des Radius:  
$$r = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (3 - (-1))^2} = \sqrt{52}$$
  
Der gesuchte Kreis hat die Gleichung  
 $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 52$ .
- Gegeben: Punkte  $P_1(6|7)$ ,  $P_2(2|9)$ ,  $P_3(-1|0)$   
Gesucht: Kreis durch die Punkte  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$   
Bestimmung der Koordinaten  $x_m, y_m$  des Mittelpunktes:  
$$\begin{aligned} 2(2 - 6)x_m + 2(9 - 7)y_m &= 2^2 - 6^2 + 9^2 - 7^2 \\ 2(-1 - 6)x_m + 2(0 - 7)y_m &= (-1)^2 - 6^2 + 0^2 - 7^2 \end{aligned}$$
  
$$\Rightarrow \begin{cases} -8x_m + 4y_m = 0 \\ -14x_m - 14y_m = -84 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x_m + y_m = 0 \\ 2x_m + 2y_m = 12 \end{cases}$$
  
$$\Rightarrow y_m = 4 \Rightarrow x_m = 2$$
  
Bestimmung des Radius  $r$ :  
$$r = \sqrt{(6 - 2)^2 + (7 - 4)^2} = \sqrt{25} = 5$$
  
Der gesuchte Kreis hat somit die Gleichung  
 $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 5^2$ .

## 4 Kugeln

Eine Kugel ist der geometrische Ort aller Punkte des Raumes, die von einem festen Punkt  $M$  (Mittelpunkt der Kugel) einen konstanten Abstand  $r$  (Radius der Kugel) haben (vgl. Abschnitt IV.6). Für eine Kugel gibt es verschiedene Gleichungsformen.

Liegt der Mittelpunkt einer Kugel mit dem Radius  $r$  im Ursprung eines (dreidimensionalen) kartesischen Koordinatensystems, dann lautet die Gleichung der Kugel  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ . Dabei sind  $x$ ,  $y$  und  $z$  die Koordinaten eines beliebigen Punktes  $P(x|y|z)$  der Kugel (Kugeloberfläche).

Mittelpunkt im Ursprung

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

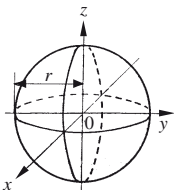


**Bild VII-19**  
Kugel mit der Gleichung  
 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

Hat der Mittelpunkt allgemeiner die Koordinaten  $x_m, y_m$  und  $z_m$ , also  $M = (x_m|y_m|z_m)$ , dann ergibt sich die Mittelpunktsform oder Hauptform der Kugelgleichung.

Mittelpunktsform oder Hauptform

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 + (z - z_m)^2 = r^2$$

Eine Kugel ist festgelegt durch den Mittelpunkt und einen weiteren Punkt oder durch vier Punkte (die nicht alle in einer Ebene liegen).

■ **Beispiele:**

- Gegeben: Mittelpunkt im Koordinatenursprung, also  $M = (0|0|0)$ , Punkt  $P_1(4|3|1)$   
Gesucht: Kugel mit dem Mittelpunkt  $M$  durch den Punkt  $P_1$

Berechnung des Radius:  $r = \sqrt{4^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

Die gesuchte Kugel hat die Gleichung  $x^2 + y^2 + z^2 = 26$ .

- Gegeben: Mittelpunkt  $M(2|-1|1)$ , Punkt  $P_1(0|4|-3)$   
Gesucht: Kugel mit dem Mittelpunkt  $M$  durch den Punkt  $P_1$   
Berechnung des Radius:

$$r = \sqrt{(0 - 2)^2 + (4 - (-1))^2 + (-3 - 1)^2} = \sqrt{45}$$

Die gesuchte Kugel hat die Gleichung

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 45$$

## 5 Kegelschnitte

Ein Kegelschnitt ist die Schnittfigur einer Ebene und des Mantels eines geraden Doppelkreiskegels.

Ein gerader Kreiskegel entsteht durch Rotation einer Geraden (die Erzeugende oder Mantellinie) in einem festen Punkt (der Spitze) um eine vertikale Achse, wobei sich die rotierende Gerade entlang eines Kreises bewegt (also mit einem Kreis als Leitkurve), der in einer Ebene senkrecht zur Rotationsachse liegt (vgl. Abschnitt IV.4).

Ein gerader Doppelkreiskegel besteht aus zwei geraden Kreiskegeln, die Spitze auf Spitze stehen und die gleiche Rotationsachse haben. Schneidet man einen geraden Doppelkreiskegel mit einer nicht durch die (gemeinsame) Spitze  $S$  gehenden Ebene  $E$ , dann entsteht als Kurve ein Kegelschnitt. Abhängig von der Lage der Ebene  $E$  zum Doppelkegel erhält man verschiedene Kurven.

### Kreis

Liegt die Ebene senkrecht zur Kegelachse (Rotationsachse), so schneidet sie aus der Mantelfläche des Kegels einen Kreis heraus.

### Ellipse

Ist die Neigung der Ebene so, dass sie nur eine Hälfte des Doppelkegels schneidet und dass sie nicht parallel zu einer Mantellinie verläuft, so wird eine Ellipse ausgeschnitten.

### Parabel

Verläuft die Ebene parallel zu einer Mantellinie, so schneidet sie aus der Mantelfläche eine Parabel heraus.

### Hyperbel

Trifft die Ebene beide Hälften des Doppelkegels (zum Beispiel wenn sie parallel zur Kegelachse steht), dann ist die Schnittfigur eine Hyperbel (es werden zwei Kurven ausgeschnitten, die beiden Äste einer Hyperbel).

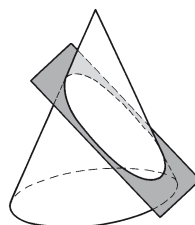


**Bild VII-20**  
Kegelschnitt Ellipse

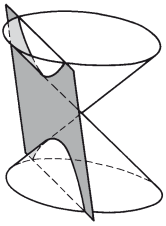


**Bild VII-21** Kegel-schnitt Hyperbel

Die Kegelschnitte lassen sich bezüglich der Lage der Ebene  $E$  zu den Mantellinien des Doppelkegels charakterisieren:

Beim Kreis und bei der Ellipse ist die Ebene zu keiner der Mantellinien parallel, bei der Parabel ist die Ebene zu einer Mantellinie parallel, und bei der Hyperbel ist die Ebene zu zwei Mantellinien des Doppelkegels parallel.

Die Kegelschnitte lassen sich auch durch die Beziehung des Öffnungswinkels  $\alpha$  des Kegels zum Neigungswinkel  $\beta$  der Schnittebene  $E$  zur Rotationsachse beschreiben:

Kreis:  $\beta = 90^\circ$

Ellipse:  $\frac{\alpha}{2} < \beta < 90^\circ$

Parabel:  $\beta = \frac{\alpha}{2}$

Hyperbel:  $0 \leq \beta < \frac{\alpha}{2}$

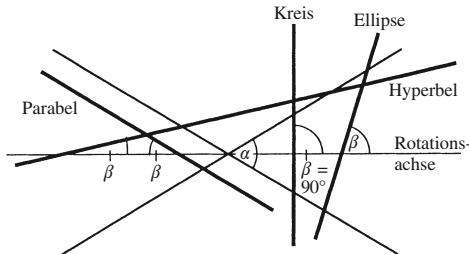


**Bild VII-22** Beziehung des Öffnungswinkels  $\alpha$  des Kegels zum Neigungswinkel  $\beta$  der Schnittebene zur Rotationsachse

Der Kreis ist bezüglich der verschiedenen Lagen von Ebene und Doppelkegel ein Spezialfall der Ellipse.

Kreis und Ellipse sind beschränkt, nicht jedoch Parabel und Hyperbel. Die Parabel besteht aus einem einzigen Ast (sie ist also zusammenhängend), während die Hyperbel zwei getrennte symmetrische Äste besitzt.

Falls die Ebene  $E$  durch die Kegelspitze  $S$  geht, dann besteht die Schnittmenge entweder nur aus einem Punkt (dem Punkt  $S$ ) oder aus einer oder zwei durch  $S$  gehende Geraden (Mantellinien). Solche Schnittmengen heißen entartete Kegelschnitte.

Die nahe Verwandtschaft der Kegelschnitte zeigt sich auch in ihren Gleichungen. Jeder Kegelschnitt ist der Graph einer Funktion, die als Funktionsgleichung

eine Gleichung zweiten Grades in  $x$  und  $y$  hat. In einer solchen Gleichung kommen  $x$  und  $y$  nur linear und quadratisch vor. Die allgemeine Gleichung eines Kegelschnitts lautet

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Diese Gleichung enthält als Sonderfälle auch Gleichungen von Punkten, Geraden, Geradenpaaren und imaginären Kurven.

#### ■ Beispiele:

1.  $A = -1, B = C = D = 0, E = 1, F = 0 \Rightarrow y = x^2$

Gleichung der Normalparabel

2.  $A = 1, B = 0, C = 1, D = E = 0, F = -r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$

Mittelpunktsform der Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung

3.  $A = \frac{1}{a^2}, B = 0, C = \frac{1}{b^2}, D = E = 0, F = -1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Mittelpunktsform der Gleichung einer Ellipse mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung

4.  $A = \frac{1}{a^2}, B = 0, C = -\frac{1}{b^2}, D = E = 0, F = -1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Mittelpunktsform der Gleichung einer Hyperbel mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung

5.  $A = B = C = 0, D = -1, E = 1, F = 0 \Rightarrow y = x$

Gleichung der Winkelhalbierenden (Gerade)

## 5.1 Ellipsen

Eine Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte einer Ebene, für die die Summe der Abstände von zwei festen Punkten  $F_1$  und  $F_2$  konstant ist. Die Punkte  $F_1$  und  $F_2$  heißen Brennpunkte der Ellipse. Bezeichnet man den Abstand eines beliebigen Punktes  $P_1$  der Ellipse zu  $F_1$  mit  $r_1$  und den Abstand von  $P_1$  zu  $F_2$  mit  $r_2$ , also  $|P_1F_1| = r_1$ ,  $|P_1F_2| = r_2$ , dann gilt  $r_1 + r_2 = 2a$  mit einer Konstanten  $a$ .

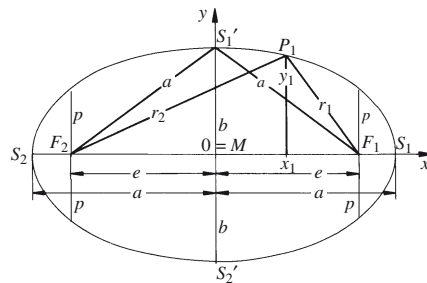


**Bild VII-23** Bezeichnungen für die Ellipse

#### Bezeichnungen

$M(0|0)$

$F_1(e|0), F_2(-e|0)$

$S_1(a|0), S_2(-a|0)$

$S'_1(0|b), S'_2(0|-b)$

$\overline{S_1S_2}$

$\overline{S'_1S'_2}$

$|\overline{S_1S_2}| = 2a$

$|\overline{S'_1S'_2}| = 2b$

Mittelpunkt

Brennpunkte

Hauptscheitelpunkte

Nebenscheitelpunkte

Hauptachse

Nebenachse

Länge der Hauptachse

Länge der Nebenachse  
( $b < a$ )

|                                                        |                                                                                                      |
|--------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $ \overline{MF_1}  =  \overline{MF_2}  = e$            | Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkt                                                              |
| $p = \frac{b^2}{a}$                                    | Halbparameter (die halbe Länge einer parallel zur Nebenachse gezogenen Sehne durch einen Brennpunkt) |
| $P_1(x_1   y_1)$                                       | beliebiger Punkt der Ellipse                                                                         |
| $ \overline{P_1F_1}  = r_1,  \overline{P_1F_2}  = r_2$ | Abstand von $P_1$ zu den Brennpunkten                                                                |

**Eigenschaften**

|                                 |                                            |
|---------------------------------|--------------------------------------------|
| $r_1 + r_2 = 2a$                | Summe der Abstände ist konstant            |
| $e^2 + b^2 = a^2$               | gilt nach dem Satz des Pythagoras          |
| $e = \sqrt{a^2 - b^2} > 0$      | heißt lineare Exzentrizität der Ellipse    |
| $\varepsilon = \frac{e}{a} < 1$ | heißt numerische Exzentrizität der Ellipse |

**Bemerkungen**

Eine der drei Größen  $a, b, e$  kann wegen  $e^2 + b^2 = a^2$  aus den beiden anderen berechnet werden.

Im Falle  $a = b$  entartet die Ellipse zu einem Kreis. Die beiden Brennpunkte  $F_1, F_2$  fallen dann mit dem Kreismittelpunkt zusammen.

**Ellipsengleichungen**

- Fallen die Koordinatenachsen mit den Ellipsenachsen zusammen und ist der Koordinatenursprung der Mittelpunkt der Ellipse, dann lautet die Gleichung der Ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Dies ist die Normalform der Ellipsengleichung.

Normalform  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

- Ist  $M(x_m | y_m)$  der Mittelpunkt der Ellipse, und sind die Ellipsenachsen parallel zu den Koordinatenachsen, dann erhält man die Mittelpunktsform der Ellipsengleichung.

Mittelpunktsform  $\frac{(x - x_m)^2}{a^2} + \frac{(y - y_m)^2}{b^2} = 1$

- Werden die beiden Koordinaten  $x$  und  $y$  jeweils als Funktion einer Hilfsvariablen  $t$  angegeben, so erhält man die Parameterdarstellung einer Ellipse, deren Achsen mit den Koordinatenachsen zusammenfallen (vgl. Abschnitt V.1.2).

**Parameterdarstellung**

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t < 2\pi$$

Für die Fläche  $A$  und den Umfang  $u$  einer Ellipse gilt

|                |                                       |
|----------------|---------------------------------------|
| Ellipsenfläche | $A = \pi ab$                          |
| Ellipsenumfang | $u \approx \pi[1,5(a+b) - \sqrt{ab}]$ |

Der Wert für den Umfang ist nur eine Näherung, eine exakte Formel gibt es nicht.

**Beispiele:**

- Gegeben: Ellipsengleichung  $\frac{x^2}{6,25} + \frac{y^2}{4} = 1$   
 Gesucht: Länge der Achsen, Brennpunkte, numerische Exzentrizität  
 Länge der Hauptachse  $= 2a = 2 \cdot 2,5 = 5$   
 (denn  $a = \sqrt{6,25} = 2,5$ )  
 Länge der Nebenachse  $= 2b = 2 \cdot 2 = 4$  (denn  $b = \sqrt{4} = 2$ )  
 Berechnung der Brennpunkte:  
 $e^2 = a^2 - b^2 = 6,25 - 4 = 2,25 = 1,5^2$   
 $\Rightarrow F_1(1,5 | 0), F_2(-1,5 | 0)$   
 Numerische Exzentrizität:  $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{1,5}{2,5} = 0,6$
- Gegeben: Brennpunkte  $F_1(4 | 0), F_2(-4 | 0)$ , halbe Länge der Hauptachse  $a = 5$   
 Gesucht: Ellipsengleichung, numerische Exzentrizität  
 Berechnung der halben Länge der Nebenachse:  
 $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow b = 3$   
 Ellipsengleichung:  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$   
 Numerische Exzentrizität:  $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{4}{5} = 0,8$

Es gibt etliche Konstruktionsmöglichkeiten für eine Ellipse. Eine davon ist die sogenannte Faden- oder Gärtnerkonstruktion:

Die Endpunkte eines Fadens der Länge  $2a$  werden mit Hilfe zweier Pfähle an zwei Punkten  $F_1$  und  $F_2$  fest verankert, und zwar so, dass der Faden nicht straff ist. Ein dritter Pfahl, der den Faden spannt und ringsum geführt wird, bewegt sich dann auf einer Ellipse.

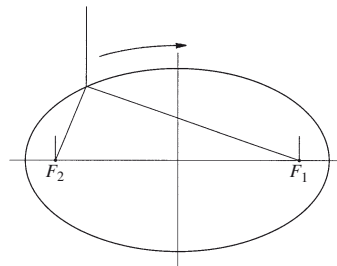


**Bild VII-24** Gärtnerkonstruktion einer Ellipse

## 5.2 Hyperbeln

Eine Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte einer Ebene, für die der Betrag der Differenz der Abstände von zwei festen Punkten  $F_1$  und  $F_2$  konstant ist. Die Punkte  $F_1$  und  $F_2$  heißen Brennpunkte der Hyperbel.

Bezeichnet man den Abstand eines beliebigen Punktes  $P_1$  der Hyperbel zu  $F_1$  mit  $r_1$  und den Abstand von  $P_1$  zu  $F_2$  mit  $r_2$ , also  $|\overline{P_1F_1}| = r_1, |\overline{P_1F_2}| = r_2$ , dann gilt  $|r_1 - r_2| = 2a$  mit einer Konstanten  $a$ .

Die Hyperbel ist nicht zusammenhängend, sie besteht aus zwei getrennten symmetrischen Ästen (die

Hyperbel hat also auch keinen endlichen Flächeninhalt). Sie besitzt zwei Asymptoten.

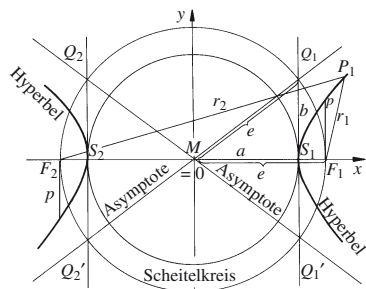


**Bild VII-25** Bezeichnungen für die Hyperbel

#### Bezeichnungen

|                                                                                                  |                                                                                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $M(0 0)$                                                                                         | Mittelpunkt                                                                                           |
| $F_1(e 0), F_2(-e 0)$                                                                            | Brennpunkte                                                                                           |
| $S_1(a 0), S_2(-a 0)$                                                                            | Scheitelpunkte                                                                                        |
| $\overline{S_1S_2}$                                                                              | Hauptachse (Hyperbelachse)                                                                            |
| $ \overline{S_1S_2}  = 2a$                                                                       | Länge der Hauptachse                                                                                  |
| $ \overline{MF_1}  =  \overline{MF_2}  = e$                                                      | Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkt                                                               |
| $Q_1, Q_1', Q_2, Q_2'$                                                                           | Schnittpunkte der Asymptoten mit den Senkrechten zur Hauptachse durch die Scheitelpunkte              |
| $ \overline{S_1Q_1}  =  \overline{S_1Q_1'} $<br>$ \overline{S_2Q_2}  =  \overline{S_2Q_2'}  = b$ | Abstand der Schnittpunkte zu den Scheitelpunkten                                                      |
| $p = \frac{b^2}{a}$                                                                              | Halbparameter (die halbe Länge einer senkrecht zur Hauptachse gezogenen Sehne durch einen Brennpunkt) |
| $P_1(x_1 y_1)$                                                                                   | beliebiger Punkt der Hyperbel                                                                         |
| $ \overline{P_1F_1}  = r_1,  \overline{P_1F_2}  = r_2$                                           | Abstand von $P_1$ zu den Brennpunkten                                                                 |

#### Eigenschaften

|                                 |                                             |
|---------------------------------|---------------------------------------------|
| $ r_1 - r_2  = 2a$              | Betragsdifferenz der Abstände ist konstant  |
| $a^2 + b^2 = e^2$               | gilt nach dem Satz des Pythagoras           |
| $e = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$      | heißt lineare Exzentrizität der Hyperbel    |
| $\varepsilon = \frac{e}{a} > 1$ | heißt numerische Exzentrizität der Hyperbel |

#### Bemerkung

Eine der drei Größen  $a, b, e$  kann wegen  $a^2 + b^2 = e^2$  aus den beiden anderen berechnet werden.

#### Hyperbelgleichungen

1. Scheitelpunkte auf der  $x$ -Achse, Mittelpunkt im Koordinatenursprung:

Normalform  $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$

Beide Koordinatenachsen sind Symmetrieachsen der Hyperbel. Die Hyperbel ist nach rechts und nach links geöffnet. Diese Gleichung nennt man auch die Normalform der Hyperbelgleichung.

Gleichungen der Asymptoten  $y = \pm \frac{b}{a} x$

Nur im Falle  $a = b$  stehen die Asymptoten senkrecht aufeinander. Solche Hyperbeln heißen gleichseitige Hyperbeln.

2. Hauptachse parallel zur  $x$ -Achse, Mittelpunkt  $M(x_m|y_m)$ :

Mittelpunktsform  $\boxed{\frac{(x - x_m)^2}{a^2} - \frac{(y - y_m)^2}{b^2} = 1}$

Die Hyperbel ist nach rechts und nach links geöffnet. Diese Gleichung heißt auch Mittelpunktsform der Hyperbelgleichung.

Gleichungen der Asymptoten

$$y = \pm \frac{b}{a} (x - x_m) + y_m$$

3. Koordinatenachsen als Asymptoten, Mittelpunkt im Koordinatenursprung:

$$\boxed{x \cdot y = c \quad \text{oder} \quad y = \frac{c}{x} \quad (c \neq 0)}$$

Für  $c > 0$  ist die Winkelhalbierende  $y = x$  die Hauptachse, die Hyperbeläste liegen im ersten und im dritten Quadranten. Im Falle  $c < 0$  ist die Winkelhalbierende  $y = -x$  die Hauptachse, die Hyperbeläste liegen im zweiten und im vierten Quadranten.

Gleichungen der Asymptoten  $x = 0, y = 0$

#### Beispiele:

1. Gegeben: Hyperbelgleichung  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$   
Gesucht: Brennpunkte, numerische Exzentrizität  
Berechnung der Brennpunkte:  
 $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 20 = 36 = 6^2 \Rightarrow F_1(6|0), F_2(-6|0)$   
Numerische Exzentrizität:  $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{6}{4} = 1,5$
2. Gegeben: Punkte  $P_1(2|1), P_2(3|2)$  einer Hyperbel  
Gesucht: Normalform der Hyperbelgleichung durch  $P_1$  und  $P_2$   
Berechnung von  $a$  und  $b$ :  
Koordinaten von  $P_1$  in die Normalform  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  der Hyperbelgleichung einsetzen:  
 $\frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow 4b^2 - a^2 = a^2 b^2$   
Koordinaten von  $P_2$  in die Normalform einsetzen:  
 $\frac{9}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1 \Rightarrow 9b^2 - 4a^2 = a^2 b^2$   
Gleichsetzen der Gleichungen ergibt  
 $4b^2 - a^2 = 9b^2 - 4a^2 \Rightarrow 3a^2 = 5b^2 \Rightarrow a^2 = \frac{5}{3} b^2$   
Durch Einsetzen errechnet man  
 $4b^2 - \frac{5}{3} b^2 = \frac{5}{3} b^4 \Rightarrow \frac{7}{3} b^2 = \frac{5}{3} b^4 \Rightarrow b^2 = \frac{7}{5}$   
Daraus ergibt sich schließlich  $a^2 = \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{7}{3}$   
Die Hyperbelgleichung lautet  $\frac{x^2}{\frac{7}{3}} - \frac{y^2}{\frac{7}{5}} = 1$



Es gibt verschiedene Konstruktionsmöglichkeiten für eine Hyperbel. Eine davon ist die sogenannte Fadenkonstruktion:

In einem der beiden Brennpunkte wird ein Stab der Länge  $l > 2a$  drehbar befestigt. Die Enden eines Fadens der Länge  $l - 2a$  werden am freien Stabende und am anderen Brennpunkt befestigt. Mit einem Stift wird der Faden am Stab gestrafft. Wird der Stab um den Brennpunkt gedreht, dann beschreibt der Stift einen Teil eines Hyperbelastes.

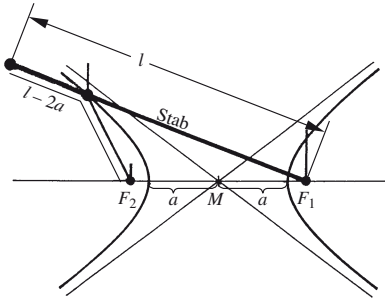


Bild VII-26 Fadenkonstruktion einer Hyperbel

### 5.3 Parabeln

Eine Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte einer Ebene, die von einem festen Punkt  $F$  (Brennpunkt) und einer festen Geraden  $l$  (Leitlinie) den gleichen Abstand besitzen.

Der Punkt, der in der Mitte zwischen dem Brennpunkt  $F$  und der Leitlinie  $l$  liegt, ist der Scheitelpunkt  $S$ . Die Gerade durch die Punkte  $F$  und  $S$  heißt Parabelachse. Sie ist Symmetrieachse für die Parabel und steht senkrecht auf der Leitlinie  $l$ . Der Abstand  $p$  des Brennpunkts  $F$  von der Leitlinie  $l$  heißt Parameter der Parabel.

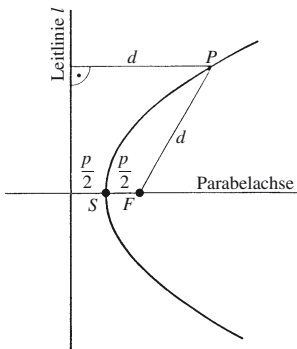


Bild VII-27 Parabel mit Brennpunkt  $F$  und Scheitelpunkt  $S$

Der Brennpunkt hat die Eigenschaft, alle innen an der Parabel reflektierten achsenparallelen Strahlen in sich zu vereinigen (Anwendung: Parabolspiegel).

#### Parabelgleichungen

1.  $x$ -Achse ist Parabelachse, Scheitelpunkt im Koordinatenursprung, Parabel nach rechts geöffnet:

$$\text{Normalform} \quad y^2 = 2px, \quad p > 0$$

Der Brennpunkt ist  $F\left(\frac{p}{2} \mid 0\right)$ , die Gleichung der Leitlinie ist  $x = -\frac{p}{2}$ . Diese Gleichung nennt man auch die Normalform der Parabelgleichung.

2. Parabelachse parallel zur  $x$ -Achse, Scheitelpunkt  $S(x_s \mid y_s)$ , Parabel nach rechts geöffnet:

Scheitelpunktsform

$$(y - y_s)^2 = 2p(x - x_s), \quad p > 0$$

Der Brennpunkt ist  $F\left(\frac{p}{2} + x_s \mid y_s\right)$ , die Gleichung der Leitlinie ist  $x = x_s - \frac{p}{2}$ . Diese Gleichung heißt auch Scheitelpunktsform der Parabelgleichung.

3.  $y$ -Achse ist Parabelachse, Scheitelpunkt im Koordinatenursprung, Parabel nach oben geöffnet:

$$x^2 = 2py \quad \text{oder} \quad y = \frac{1}{2p} x^2 \quad (p > 0)$$

Der Brennpunkt ist  $F\left(0 \mid \frac{p}{2}\right)$ , die Gleichung der Leitlinie ist  $y = -\frac{p}{2}$ . Eine Parabel in dieser

Lage ist der Graph einer quadratischen Funktion (vgl. Abschnitt V.4.3).

#### ■ Beispiele:

1. Gegeben: Parabelgleichung  $y^2 = 6x$

Gesucht: Brennpunkt, Gleichung der Leitlinie

Parameter:  $p = 3$

$$\text{Brennpunkt: } F\left(\frac{p}{2} \mid 0\right) = F\left(\frac{3}{2} \mid 0\right)$$

$$\text{Gleichung der Leitlinie: } x = -\frac{p}{2} = -\frac{3}{2}$$

2. Eine nach rechts offene Parabel hat die Gerade  $x = -2$  als Tangente im Scheitelpunkt, geht durch den Punkt  $P_1(2 \mid 7)$  und hat in diesem Punkt die Tangentensteigung  $m_1 = \frac{1}{2}$ . Wie lautet die Gleichung der Parabel?

Lösung:

Berechnung der Tangentengleichung durch Einsetzen in die Punktsteigungsform und Umrechnung auf Normalform:

$$\frac{y-7}{x-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 6$$

Eine nach rechts geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt  $S(x_s \mid y_s)$  erfüllt die Gleichung  $(y - y_s)^2 = 2p(x - x_s)$  und eine Tangente an diese Parabel auch die Gleichung  $(y_1 - y_s)(y - y_s) = p(x + x_1 - 2x_s)$ . Setzt man die Koordinaten des Punktes  $P_1$  ein und bringt auch diese Tangentengleichung auf Normalform, so ergibt sich

$$(7 - y_s)(y - y_s) = p(x + 2 - 2 \cdot (-2))$$

$$\Rightarrow y = \frac{p}{7 - y_s}x + \frac{6p}{7 - y_s} + y_s$$



Vergleich dieser Gleichung mit der obigen Normalform der Gleichung für dieselbe Tangente ergibt mit der Methode des Koeffizientenvergleichs die folgenden Bedingungen für die Koeffizienten:

$$m_1 = \frac{p}{7-y_s} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad n = \frac{6p}{7-y_s} + y_s = 6$$

Dies ist ein System aus zwei Gleichungen zur Bestimmung der beiden Unbekannten  $p$  und  $y_s$ .

Setzt man zur Lösung des Systems zum Beispiel die Bedingung

$$\frac{p}{7-y_s} = \frac{1}{2} \quad \text{in die Gleichung für } n \text{ ein, so folgt}$$

$$6 \cdot \frac{1}{2} + y_s = 6 \Rightarrow y_s = 3$$

Durch Einsetzen von  $y_s = 3$  in die Gleichung für  $m_1$  folgt

$$\frac{p}{7-3} = \frac{1}{2} \Rightarrow p = 2$$

Die gesuchte Parabelgleichung lautet  $(y-3)^2 = 4(x+2)$ .

Es gibt einige Konstruktionsmöglichkeiten für eine Parabel. Eine davon ist die sogenannte Fadenkonstruktion:

Ein rechtwinkliges Dreieck wird entlang der Leitlinie verschoben. Ein Faden mit der Länge der Kathete  $AC$  wird mit den Enden in  $A$  und dem Brennpunkt  $F$  befestigt. Mit einem Stift wird der Faden an der Kathete  $AC$  gestrafft. Gleitet das Dreieck entlang der Leitlinie, dann beschreibt der Stift ein Parabelstück.

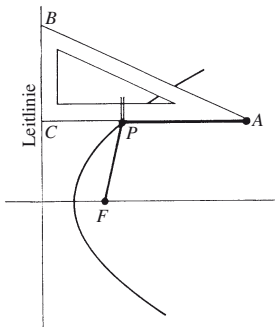


Bild VII-28 Fadenkonstruktion einer Parabel

## 5.4 Anwendungen

In diesem Abschnitt werden in einigen Beispielen verschiedene Anwendungen der Kegelschnitte aus Technik und Mathematik angegeben.

### ■ Beispiel 1:

Ein parabelförmiger Brückenbogen (Achse vertikal und Parabel nach unten geöffnet) hat zwischen den in gleicher Höhe liegenden Lagern (Enden) des Bogens  $L$  und  $L'$  die Spannweite  $2a = |LL'| = 32$  m. Die Scheithöhe (Höhe des Scheitelpunktes  $S$  über  $LL'$ ) beträgt  $b = 10$  m. Die horizontal verlaufende Straße liegt  $h = 4$  m über  $LL'$  und schneidet den Brückenbogen in  $P_1$  und  $P'_1$ , den Befestigungspunkten des Straßenkörpers. Der Straßenkörper wird außer von einem Vertikalstab im Scheitelpunkt  $S$  (Länge  $b-h = 6$  m) noch von zwei weiteren Vertikalstäben gehalten, die in der Mitte des horizontalen Abstandes von  $S$  und  $P_1$  sowie von  $S$  und  $P'_1$  in den Punkten  $P_2$  und  $P'_2$  am Brückenbogen angebracht sind.

Wie groß ist die Länge  $l$  dieser Vertikalstäbe? Wie groß sind  $|P_1P'_1|$  und  $|P_2P'_2|$ ?

Die Skizze veranschaulicht nur eine Hälfte der symmetrischen Straßenbrücke.

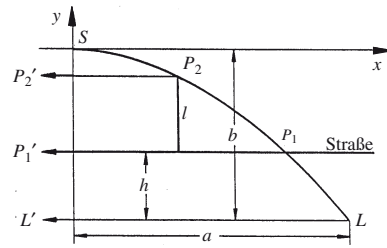


Bild VII-29 Zu Beispiel 1

Zur Lösung der Aufgabe denkt man sich ein Koordinatenkreuz gelegt, so dass die Parabel des Brückenbogens die Gleichung  $y = -px^2$  hat.

Setzt man die Koordinaten des Lagerpunktes  $L$  ein, so ergibt sich  $-b = -pa^2 \Rightarrow p = \frac{b}{a^2}$ .

Der Befestigungspunkt  $P_1$  hat nach Aufgabenstellung die Ordinate  $y_1 = -(b-h)$ . Mit Hilfe der Parabelgleichung  $y_1 = -px_1^2$  erhält man seine Abszisse  $x_1$  durch Auflösen nach  $x_1$  und Einsetzen von  $y_1$  und  $p$ :

$$x_1 = \sqrt{\frac{y_1}{p}} = \sqrt{\frac{-(b-h)}{\frac{b}{a^2}}} = a \sqrt{\frac{b-h}{b}}$$

Der Befestigungspunkt  $P_2$  soll die Abszisse  $x_2 = \frac{1}{2} x_1 =$

$$\frac{a}{2} \sqrt{\frac{b-h}{b}} \quad \text{haben, also ist seine Ordinate } y_2 = -px_2^2 = -\frac{b}{a^2} \left( \frac{a}{2} \sqrt{\frac{b-h}{b}} \right)^2 = -\frac{b-h}{4}.$$

Die gesuchte Vertikalstablänge  $l$  ist  $y_2 - y_1 = \frac{3}{4} (b-h)$ .

Die Strecken  $|P_1P'_1|$  und  $|P_2P'_2|$  haben die Längen

$$2x_1 = 2a \sqrt{\frac{b-h}{b}} \quad \text{und} \quad 2x_2 = a \sqrt{\frac{b-h}{b}}.$$

Mit den gegebenen Abmessungen ergibt sich für die gesuchten Längen

$$l = \frac{3}{4} (10 - 4) = 4,50 \text{ m,}$$

$$2x_1 = 2 \cdot 16 \sqrt{\frac{10-4}{10}} = 24,78 \dots \text{ m,}$$

$$2x_2 = 16 \sqrt{\frac{10-4}{10}} = 12,39 \dots \text{ m.}$$

### ■ Beispiel 2:

Ein Stab mit den Drehlagern  $O$  und  $M$  und der Länge  $|\overline{OM}| = r$  ist um  $O$  drehbar. Um  $M$  dreht sich ein zweiter Stab der Länge  $|\overline{MP}| = s$ . In der Ausgangsstellung liegen  $M$  und  $P$  als  $M_0$  und rechts davon  $P_0$  auf der Grundrichtungssache  $OP_0$ . Während sich nun  $\overline{OM}$  um den Winkel  $\varphi$  nach links dreht, dreht sich  $\overline{MP}$  relativ zu  $\overline{OM}$  um  $2\varphi$  nach rechts.

Auf welcher Kurve bewegt sich  $P$  bei fortgesetzter Drehung?

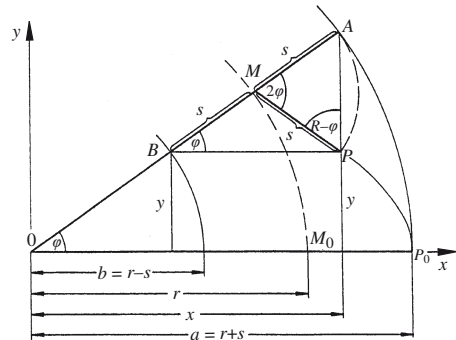


Bild VII-30 Zu Beispiel 2

Die Lösung der Aufgabe erfolgt mit Hilfe der Parameterdarstellung der Ellipse:  $x = a \cos \varphi$ ,  $y = b \sin \varphi$

Man bestätigt: Aus  $\cos \varphi = \frac{x}{a}$  und  $\sin \varphi = \frac{y}{b}$  folgt durch Quadrieren und Addieren wegen  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$  die Normalform  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  der Ellipsengleichung.

In der vorliegenden Aufgabe ist  $a = r + s$  (halbe Länge der Hauptachse) und  $b = r - s$  (halbe Länge der Nebenachse). Der Punkt  $P$  bildet mit  $A$  und  $B$ , den Schnittpunkten der Geraden  $OM$  mit dem Haupt- und dem Nebenseitenkreis (Kreise um  $O$  mit den Radien  $a$  und  $b$ ), ein rechtwinkliges Dreieck. Deshalb folgt  $x = (r + s) \cos \varphi$ ,  $y = (r - s) \sin \varphi$ , die Parameterdarstellung der Ellipse, die als Bahnkurve von  $P$  gesucht ist. Ihre Normalform lautet  $\frac{x^2}{(r + s)^2} + \frac{y^2}{(r - s)^2} = 1$ .

## 6 Vektoren

### 6.1 Definitionen

Eine gerichtete und orientierte Strecke bezeichnet man als Vektor. Ein Vektor ist durch drei Größen bestimmt: Richtung, Orientierung und Länge. Vektoren, die in diesen drei Größen übereinstimmen, sind gleich, unabhängig von ihrer Lage in der Ebene oder im Raum (vgl. Bild VII-31).

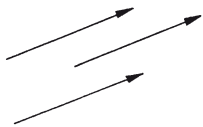


**Bild VII-31**  
Gleiche Vektoren

Eine Größe, die durch einen einzigen reellen Zahlenwert charakterisiert wird, heißt Skalar. Beispiele für Skalare sind Temperatur, Arbeit, Masse, Energie.

Vektoren dagegen sind Größen, zu deren vollständiger Beschreibung neben einem Zahlenwert, ihrem Betrag (Länge des Vektors), noch die Angabe ihrer Richtung und Orientierung erforderlich sind. Beispiele für Vektoren sind Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung, magnetische Feldstärke.

Vektoren werden meist mit kleinen lateinischen Buchstaben, die mit einem Pfeil versehen sind, bezeichnet:  $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$  (gesprochen: Vektor  $a$ , Vektor  $PQ$ ). Der Punkt  $P$  ist der Anfangspunkt und der Punkt  $Q$  der Endpunkt des Vektors. Der Betrag  $|\vec{a}| = |\overrightarrow{PQ}|$  eines Vektors ist die Länge des Vektors, also die Länge der Verbindungsstrecke  $PQ$ . Der Betrag ist eine nichtnegative reelle Zahl.

Zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sind gleich, in Zeichen  $\vec{a} = \vec{b}$ , wenn sie den gleichen Betrag und gleiche Richtung und gleiche Orientierung haben. Vektoren dürfen daher parallel verschoben werden. Gleiche Vektoren gehen durch Parallelverschiebung ineinander über.

Im Unterschied zu diesen sogenannten freien Vektoren haben Ortsvektoren  $\overrightarrow{OP}$  einen festen Anfangspunkt  $O$ . Ortsvektoren können also nicht verschoben werden.

### Spezielle Vektoren

Der Nullvektor  $\vec{0}$  hat den Betrag 0 und unbestimmte Richtung.

Ein Vektor  $\vec{e}$  mit dem Betrag  $|\vec{e}| = 1$  heißt Einheitsvektor. Man bezeichnet Einheitsvektoren auch als normierte Vektoren.

### 6.2 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

Multipliziert man einen Vektor  $\vec{a}$  mit einem Skalar (also einer reellen Zahl)  $\lambda \in \mathbb{R}$ , dann erhält man einen Vektor  $\lambda \vec{a}$  mit dem Betrag  $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$  ( $|\lambda|$ -facher Betrag des Vektors  $\vec{a}$ ). Für  $\lambda > 0$  haben  $\lambda \vec{a}$  und  $\vec{a}$  gleiche Richtung und Orientierung, für  $\lambda < 0$  haben  $\lambda \vec{a}$  und  $\vec{a}$  gleiche Richtung und entgegengesetzte Orientierung.

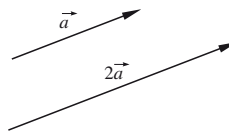


**Bild VII-32**  
Vektoren  $\vec{a}$  und  $2\vec{a}$

Multiplikation mit  $\lambda = -1$  ergibt den Vektor  $-\vec{a}$ . Dieser Vektor hat den gleichen Betrag und die gleiche Richtung wie der Vektor  $\vec{a}$ , jedoch die entgegengesetzte Orientierung.

### 6.3 Addition und Subtraktion zweier Vektoren

Sollen zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  addiert werden, so bringt man durch Parallelverschiebung den Anfangspunkt des Vektors  $\vec{b}$  in den Endpunkt des Vektors  $\vec{a}$ . Die Summe  $\vec{a} + \vec{b}$  ist dann derjenige Vektor, der vom Anfangspunkt von  $\vec{a}$  zum Endpunkt von  $\vec{b}$  führt (siehe Bild VII-33).

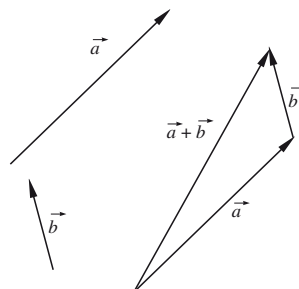


**Bild VII-33**  
Vektoraddition

Die Subtraktion zweier Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ist definiert als Addition von  $\vec{a}$  und  $-\vec{b}$ .

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Legt man die Anfangspunkte von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  übereinander, dann ist der Vektor  $\vec{a} - \vec{b}$  der Vektor vom Endpunkt von  $\vec{b}$  zum Endpunkt von  $\vec{a}$ .

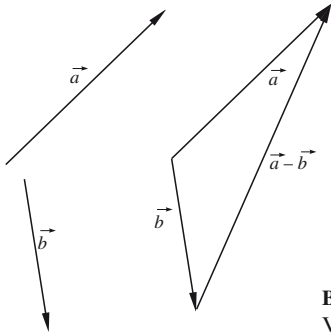


**Bild VII-34**  
Vektorsubtraktion

Zeichnet man ein Parallelogramm mit den Seiten  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ , so kann man die Diagonale als  $\vec{a} + \vec{b}$  oder als  $\vec{b} + \vec{a}$  auffassen. Die Addition von Vektoren ist also kommutativ.

Kommutativgesetz

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Auch das Assoziativgesetz und das Distributivgesetz sind erfüllt.

Assoziativgesetz

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

Distributivgesetz

$$\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

## 6.4 Komponentendarstellung von Vektoren in der Ebene

Wählt man in einem kartesischen Koordinatensystem der Ebene einen Einheitsvektor  $\vec{e}_1$  mit Richtung und Orientierung wie die positive  $x$ -Achse und einen Einheitsvektor  $\vec{e}_2$  mit Richtung und Orientierung wie die positive  $y$ -Achse, dann lässt sich jeder Vektor  $\vec{a}$  in der Ebene in eindeutiger Weise als Linearkombination der beiden sogenannten Basisvek-

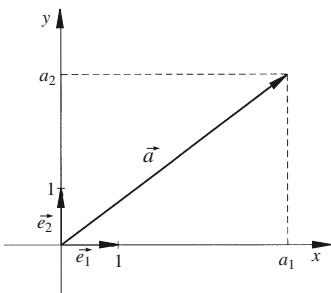


**Bild VII-35** Komponentendarstellung eines Vektors in der Ebene

toren  $\vec{e}_1$  und  $\vec{e}_2$  darstellen (siehe Bild VII-35).

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

Die beiden Vektoren  $a_1 \vec{e}_1$  und  $a_2 \vec{e}_2$  werden durch Parallelen zu den Basisvektoren  $\vec{e}_1$  und  $\vec{e}_2$  konstruiert.

Der Vektor  $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2$  wird identifiziert mit dem sogenannten Spaltenvektor

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Dabei heißen  $a_1$  und  $a_2$  die beiden Komponenten oder die kartesischen Koordinaten des Vektors  $\vec{a}$ . Mit Hilfe der Komponenten lassen sich Addition und Subtraktion von Vektoren sowie die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar folgendermaßen darstellen:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$$

Der Betrag  $|\vec{a}| = |\vec{PQ}|$ , also die Länge des Vektors  $\vec{a} = \vec{PQ}$ , ist die Entfernung zwischen den Punkten  $P$  und  $Q$ . Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

## 6.5 Komponentendarstellung von Vektoren im Raum

Ganz analog wählt man in einem kartesischen Koordinatensystem des Raums drei Einheitsvektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  mit Richtung und Orientierung wie die positive  $x$ -Achse, die positive  $y$ -Achse und die positive  $z$ -Achse. Dann lässt sich jeder Vektor  $\vec{a}$  im Raum in eindeutiger Weise als Linearkombination der drei Basisvektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  und  $\vec{e}_3$  darstellen (siehe Bild VII-36).

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3, \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$$

Die drei Vektoren  $a_1 \vec{e}_1, a_2 \vec{e}_2$  und  $a_3 \vec{e}_3$  werden durch Parallelen zu den Basisvektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  und  $\vec{e}_3$  konstruiert.

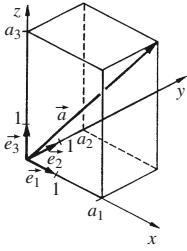


**Bild VII-36** Komponentendarstellung eines Vektors im Raum

Der Vektor  $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$  wird identifiziert mit dem Spaltenvektor

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Dabei heißen  $a_1, a_2, a_3$  die Komponenten oder die kartesischen Koordinaten des Vektors  $\vec{a}$ .

Mit Hilfe der Komponenten lassen sich auch im Raum Addition und Subtraktion von Vektoren sowie die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar darstellen:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}$$

Der Betrag  $|\vec{a}| = |\vec{PQ}|$ , also die Länge des Vektors  $\vec{a} = \vec{PQ}$ , ist die Entfernung zwischen den Punkten  $P$  und  $Q$ . Durch zweimalige Anwendung des Satzes von Pythagoras errechnet man:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

## 6.6 Skalarprodukt

Für die beiden Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$  heißt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Skalarprodukt oder inneres Produkt. Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist kein Vektor, sondern eine reelle Zahl, also ein Skalar. Geometrisch ist das Skalarprodukt das Produkt der Länge des Vektors  $\vec{a}$  und der Länge der senkrechten Projektion des Vektors  $\vec{b}$  auf  $\vec{a}$ , also, falls  $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$  den Winkel zwischen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  bezeichnet,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

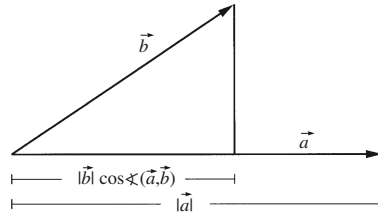


**Bild VII-37** Skalarprodukt:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$

Für den Winkel  $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$  gilt somit:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Die folgenden Rechenregeln lassen sich aus der Definition ableiten:

1.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2.  $(\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$
3.  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
4.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$  ( $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  stehen senkrecht aufeinander)
5.  $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

So folgt zum Beispiel aus 4., nämlich dass  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  genau für zwei senkrecht aufeinanderstehende (man sagt auch orthogonale) Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  gilt, dass genau dann der Winkel  $\varphi$  gleich  $90^\circ$  ist ( $\Rightarrow \cos \varphi = 0$ ).

Das Skalarprodukt lässt sich entsprechend auch in der Ebene, also für Vektoren mit zwei Komponenten, definieren.

### ■ Beispiele:

1. Das Skalarprodukt der Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$  ist

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-5) + (-1) \cdot 2 \\ &= 8 - 15 - 2 = -9. \end{aligned}$$

2. Gesucht ist der Winkel  $\varphi$ , den die beiden Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ miteinander einschließen.}$$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } \vec{a} \cdot \vec{b} &= 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1 \text{ und } |\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{1+1} \\ &= \sqrt{2}. \text{ Somit folgt } \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ. \end{aligned}$$

3. Für welchen Wert von  $c$  sind die beiden Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ c \end{pmatrix} \text{ orthogonal?}$$

Für das Skalarprodukt gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ c \end{pmatrix} = 2 + 6 - 4c = 8 - 4c = 0 \Rightarrow c = 2.$$

Für  $c = 2$  stehen die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  also senkrecht aufeinander.

## 6.7 Vektorprodukt

Sind  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$  zwei Vektoren im Raum, so heißt der Vektor

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Vektorprodukt oder Kreuzprodukt oder äußeres Produkt der Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ . Das Vektorprodukt ist im Unterschied zum Skalarprodukt nur im Raum definiert.

Das Vektorprodukt besitzt folgende Eigenschaften:

- $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$
- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ , falls  $\vec{a} = \vec{0}$  oder  $\vec{b} = \vec{0}$  oder  $\vec{a}$  parallel zu  $\vec{b}$
- $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
- $\vec{a} \times \vec{b}$  steht senkrecht auf den Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$
- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$
- $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{a} \times \vec{b}$  bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem

Der Vektor  $\vec{a} \times \vec{b}$  steht also senkrecht auf  $\vec{a}$  und auf  $\vec{b}$ . Sein Betrag (seine Länge) ist gleich dem Flächeninhalt des von den beiden Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Parallelogramms. Falls  $\vec{a}$  auf dem kürzesten Weg nach  $\vec{b}$  gedreht wird, zeigt  $\vec{a} \times \vec{b}$  in Richtung der Bewegung einer Schraube mit Rechtsgewinde.

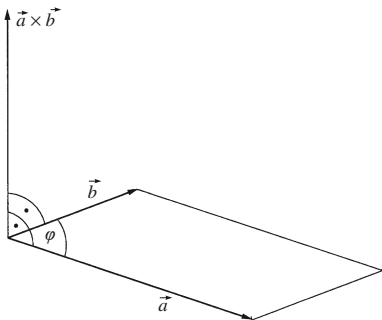


**Bild VII-38** Vektorprodukt  $\vec{a} \times \vec{b}$  der Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$

### ■ Beispiel:

Für die Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  ergibt sich für

$$\text{das Vektorprodukt } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Zur Probe kann man etwa Eigenschaft 5. benutzen: Es muss  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$  (und auch  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$ ) gelten:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 1 - 16 + 15 = 0.$$

## 6.8 Spatprodukt

Sind  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  drei Vektoren im Raum, so heißt der Skalar

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Spatprodukt. Aus der geometrischen Interpretation des Skalarprodukts folgt, dass  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$  gleich dem Produkt aus der Länge von  $\vec{a} \times \vec{b}$  und der Länge der Projektion von  $\vec{c}$  auf  $\vec{a} \times \vec{b}$  ist. Da  $|\vec{a} \times \vec{b}|$  gleich dem Flächeninhalt des von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Parallelogramms ist, stellt  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$  das Volumen des von den Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  aufgespannten Spates dar, falls die Vektoren eine Lage wie in Bild VII-39 haben. Spat ist ein anderer Name für Parallelepipiped oder Parallelepiped. Zeigt  $\vec{c}$  nach unten, so ist das Spatprodukt negativ, und es ist dem Betrage nach das Volumen des Spates.

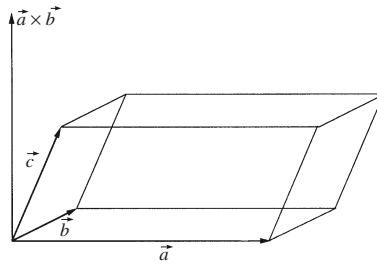


**Bild VII-39** Geometrische Veranschaulichung des Spatprodukts

Mit der abkürzenden Schreibweise

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

für das Spatprodukt können einige Eigenschaften des Spatprodukts formuliert werden:

- $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) - c_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + c_3(a_1 b_2 - a_2 b_1)$
- Eine zyklische (kreisförmige) Vertauschung der Vektoren ändert das Spatprodukt nicht:  
 $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$

3. Das Spatprodukt ändert das Vorzeichen (bei gleichem Betrag), falls zwei Vektoren miteinander vertauscht werden:

$$[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}] = [\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}] = -[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

4.  $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  liegen in einer Ebene (man sagt dann:  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  sind linear abhängig)

5.  $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] > 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  bilden ein Rechtssystem

6. Das Volumen  $V$  des von den Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  gebildeten Tetraeders ist

$$V = \frac{1}{6} |\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}|$$

■ **Beispiel:**

Das Volumen  $V$  des von den Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  aufgespannten Tetraeders beträgt

$$V = \frac{1}{6} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} |-6| = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1.$$

## VIII Differential- und Integralrechnung

### 1 Folgen

#### 1.1 Grundbegriffe

Eine Folge besteht aus Zahlen einer Menge, die in einer bestimmten Reihenfolge angeordnet sind:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Sind alle diese Zahlen reelle Zahlen, dann nennt man die Folge auch reelle Zahlenfolge. Die Zahlen der Folge heißen Glieder der Folge.

Handelt es sich um endlich viele Zahlen, so heißt die Folge endlich, andernfalls unendliche Folge.

Eine unendliche Folge lässt sich auch als Funktion (Abbildung) definieren:

$$f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad n \mapsto f(n) = a_n$$

Unter den Gliedern einer Folge können auch gleiche Zahlen auftreten.

Eine Folge kann durch direkte Angabe ihrer Glieder oder auch durch einen arithmetischen Ausdruck gegeben sein. Ein solcher arithmetischer Ausdruck kann entweder eine explizite Formel für das Folgenglied  $a_n$  oder eine rekursive Definition sein. Bei einer Rekursion wird  $a_n$  durch Folgenglieder mit kleineren Indizes definiert.

Schreibweise von Folgen:

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots)$$

Eine konstante Folge  $(a_n)$  ist eine Folge mit  $(a_n) = (a, a, a, \dots)$ .

■ **Beispiele:**

1.  $(a_n) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$
2.  $(a_n) = (n) = (1, 2, 3, 4, \dots)$
3.  $(a_n) = \left(3 - \frac{1}{2^{n-2}}\right) = \left(1, 2, \frac{5}{2}, \frac{11}{4}, \frac{23}{8}, \dots\right)$

$$4. (a_n) = (4 + 3(n-1)) = (4, 7, 10, 13, \dots)$$

$$5. (a_n) = ((-1)^{n+1}) = (1, -1, 1, -1, 1, \dots)$$

$$6. (a_n) = \left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$$

$$7. (a_n) \text{ mit } a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + a_n) \text{ für } n \in \mathbb{N}^*, \text{ also } (a_n) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots\right)$$

Die erste Folge ist endlich, alle anderen sind unendlich. Die erste Folge ist durch Angabe ihrer Glieder definiert, die letzte Folge ist rekursiv definiert und alle anderen durch eine explizite Formel.

#### Monotone Folgen

Eine Folge  $(a_n)$  heißt

monoton wachsend, wenn

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \text{ gilt,}$$

streng monoton wachsend, wenn

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < \dots \text{ gilt,}$$

monoton fallend, wenn

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq \dots \text{ gilt,}$$

streng monoton fallend, wenn

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots \text{ gilt.}$$

Die Folgen der Beispiele 1 bis 4 und 7 sind streng monoton wachsend, die Folge aus Beispiel 6 ist streng monoton fallend.

#### Alternierende Folgen

Eine alternierende Folge ist eine Folge, deren Glieder abwechselnd unterschiedliche Vorzeichen haben. Von zwei aufeinander folgenden Gliedern  $a_k$  und  $a_{k+1}$  einer solchen Folge  $(a_n)$  ist also genau ein Glied positiv und eins negativ.

Die Folge aus Beispiel 5 ist alternierend.

#### Beschränkte Folgen

Eine Folge  $(a_n)$  heißt

nach oben beschränkt, wenn es eine konstante Zahl  $K_o$  gibt, so dass für alle Glieder  $a_n \leq K_o$  gilt,

nach unten beschränkt, wenn es eine konstante Zahl  $K_u$  gibt, so dass für alle Glieder  $a_n \geq K_u$  gilt, beschränkt, wenn die Folge sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist, wenn es also zwei Zahlen  $K_u, K_o$  gibt mit  $K_u \leq a_n \leq K_o$  für alle  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Gleichwertig damit ist, dass es eine Konstante  $K > 0$  mit  $|a_n| \leq K$  für alle  $n$  gibt.

Monoton wachsende und streng monoton wachsende Folgen sind nach unten beschränkt, monoton fallende und streng monoton fallende Folgen sind nach oben beschränkt.

Die Folgen der Beispiele 1, 3, 5, 6 und 7 sind beschränkt, die Folgen der Beispiele 2 und 4 sind nach unten beschränkt.

## 1.2 Arithmetische Folgen

Bei einer arithmetischen Folge ist die Differenz je zweier aufeinanderfolgender Glieder konstant. Durch das Anfangsglied  $a_1 = a$  und diese Differenz  $d$  ist die Folge dann eindeutig bestimmt.

$$(a_n) = (a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots, a + (n-1)d, \dots)$$

Das  $n$ -te Glied einer arithmetischen Folge lautet  $a_n = a + (n-1)d$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Das Glied  $a_1 = a$  nennt man Anfangsglied der Folge und  $d = a_{n+1} - a_n$  (für  $n = 1, 2, 3, \dots$ ) die (konstante) Differenz der Folge. In einer arithmetischen Folge ist jedes Folgenglied  $a_n$  ( $n \geq 2$ ) das arithmetische Mittel seiner Nachbarglieder.

### ■ Beispiele:

1.  $(a_n) = (n) = (1, 2, 3, 4, \dots)$  (arithmetische Folge mit  $a = 1$  und  $d = 1$ )
2.  $(a_n) = (4 + 3(n-1)) = (4, 7, 10, 13, \dots)$  (arithmetische Folge mit  $a = 4$  und  $d = 3$ )

## 1.3 Geometrische Folgen

Bei einer geometrischen Folge ist der Quotient je zweier aufeinanderfolgender Glieder konstant. Durch das Anfangsglied  $a_1 = a$  und diesen Quotienten  $q$  ist die Folge dann eindeutig bestimmt.

$$(a_n) = (a, aq, aq^2, aq^3, \dots, aq^{n-1}, \dots)$$

Das  $n$ -te Glied einer geometrischen Folge lautet  $a_n = aq^{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Das Glied  $a_1 = a$  nennt man Anfangsglied der Folge und  $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$  (für  $n = 1, 2, 3, \dots$ ) den (konstanten) Quotienten der Folge. In einer geometrischen Folge ist jedes Folgenglied  $a_n$  ( $n \geq 2$ ) das geometrische Mittel seiner Nachbarglieder (bis eventuell auf das Vorzeichen).

### ■ Beispiele:

1.  $(a_n) = (3 \cdot 2^{n-1}) = (3, 6, 12, 24, \dots)$  (geometrische Folge mit  $a = 3$  und  $q = 2$ )
2.  $(a_n) = (2^{-n}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right)$   
(geometrische Folge mit  $a = \frac{1}{2}$  und  $q = \frac{1}{2}$ )

## 1.4 Grenzwert einer Folge

Man sagt, die Folge  $(a_n)$  besitzt den Grenzwert (oder auch Limes genannt)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  oder  $(a_n) \rightarrow a$  (gesprochen: Limes  $a_n$  gleich  $a$ ), wenn die Abweichung  $|a - a_n|$  der Folgenglieder  $a_n$  von diesem Wert  $a$  für genügend große  $n$  beliebig klein wird.

Grenzwert (Limes)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad (a_n) \rightarrow a$$

Exakte Definition:

Die Folge  $(a_n)$  besitzt den Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , wenn sich nach Vorgabe einer beliebig kleinen positiven Zahl  $\varepsilon$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  so finden lässt, dass für alle  $n \geq n_0$  gilt

$$|a - a_n| < \varepsilon$$

Das  $n_0$  hängt offensichtlich von der Wahl von  $\varepsilon$  ab, also  $n_0 = n_0(\varepsilon)$ .

Besitzt  $(a_n)$  den Grenzwert  $a$ , so sagt man, dass  $(a_n)$  gegen  $a$  konvergiert. Eine Folge, die einen Grenzwert besitzt, heißt konvergent. Eine Folge, die keinen Grenzwert besitzt, heißt dagegen divergent.

Eine Folge besitzt höchstens einen Grenzwert.

Eine Nullfolge ist eine Folge, die den Grenzwert 0 besitzt.

### ■ Beispiel:

1. Die Folge  $(a_n)$  mit  $a_n = \frac{1}{10^n}$  hat den Grenzwert  $a = 0$ , denn die Differenz  $|a - a_n| = \left|0 - \frac{1}{10^n}\right| = \frac{1}{10^n}$  wird für große  $n$  beliebig klein. Wählt man etwa  $\varepsilon = \frac{1}{10^{10}}$ , so gilt  $|a - a_n| < \varepsilon$  für  $n \geq 11$ . Es gilt also  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{10^n} = 0$ . Die Folge  $(a_n)$  ist somit eine Nullfolge.

Konvergente Folgen sind beschränkt. Eine beliebige Folge kann also nur konvergent sein, wenn sie beschränkt ist.

Es gilt folgendes Konvergenzkriterium:

Eine monotone und beschränkte Folge ist stets konvergent.

Für konvergente Folgen gelten verschiedene Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, \\ &\text{falls } b_n \neq 0 \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0 \end{aligned}$$

### ■ Beispiele:

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$

4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{2^{n-2}}\right) = 3$   
 5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Die Folge aus Beispiel 5 ist eine geometrische Folge. Es gilt:

Jede geometrische Folge mit  $a_n = aq^{n-1}$  konvergiert gegen Null, wenn  $|q|$ , der Betrag von  $q$ , kleiner als 1 ist.

## 1.5 Tabelle einiger Grenzwerte

Für einige wichtige konvergente Zahlenfolgen sind in der folgenden Tabelle ihre Grenzwerte angegeben.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{q} = 1 \quad (q > 0)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_r n^r + c_{r-1} n^{r-1} + \dots + c_1 n + c_0}{d_s n^s + d_{s-1} n^{s-1} + \dots + d_1 n + d_0} = \begin{cases} \frac{c_r}{d_r} & \text{für } r = s \\ 0 & \text{für } r < s \end{cases}$$

$$(c_0, c_1, \dots, c_r, d_0, d_1, \dots, d_s \in \mathbb{R}, c_r \neq 0, d_s \neq 0)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0 \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad (|q| < 1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0 \quad (|q| < 1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,7182818284\dots$$

## 1.6 Divergente Folgen

Eine Folge, die keinen Grenzwert besitzt, heißt divergent. Bei divergenten Folgen unterscheidet man zwischen bestimmter und unbestimmter Divergenz.

Eine Folge  $(a_n)$  heißt bestimmt divergent gegen  $+\infty$ , wenn zu jeder beliebig großen vorgegebenen Zahl  $K$  ein Index  $n_0$  existiert, so dass  $a_n > K$  für alle Indizes  $n \geq n_0$  gilt. Eine solche bestimmt divergente Folge wächst für  $n \rightarrow \infty$  über alle Grenzen. Man schreibt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

Eine Folge  $(a_n)$  heißt dagegen bestimmt divergent gegen  $-\infty$ , wenn zu jeder noch so kleinen vorgegebenen Zahl  $-K$  ( $K > 0$ ) ein Index  $n_0$  existiert, so dass  $a_n < -K$  für alle Indizes  $n \geq n_0$  gilt. Eine solche bestimmt divergente Folge fällt für  $n \rightarrow \infty$  unter alle Grenzen. Man schreibt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

Eine Folge, die nicht konvergent und nicht bestimmt divergent ist, heißt unbestimmt divergent.

Monoton (streng monoton) wachsende und nicht beschränkte Folgen  $(a_n)$  sind bestimmt divergent mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

Monoton (streng monoton) fallende und nicht beschränkte Folgen  $(a_n)$  sind bestimmt divergent mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ .

### ■ Beispiele:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$   
(denn  $(a_n) = (n)$  ist streng monoton wachsend und nicht beschränkt)
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^3) = -\infty$   
(denn  $(a_n) = (-n^3)$  ist streng monoton fallend und nicht beschränkt)
- $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n+2} = \infty$   
(denn  $(a_n) = (2^{n+2})$  ist streng monoton wachsend und nicht beschränkt)
- $(a_n) = ((-3)^n) = ((-1)^n \cdot 3^n)$  ist unbestimmt divergent

Die Folge aus Beispiel 1 ist eine arithmetische Folge. Es gilt:  
Jede arithmetische Folge ist divergent, denn die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder ist stets  $d$ .

Für positive Werte von  $d$  werden die Glieder  $a_n$  der Folge ab einer Stelle größer als jede beliebig große Zahl. Für negative Werte von  $d$  werden die Glieder  $a_n$  dagegen ab einer Stelle kleiner als jede vorgegebene beliebig kleine Zahl. Jede arithmetische Folge ist also bestimmt divergent.

Die Folgen aus den Beispielen 3 und 4 sind geometrische Folgen. Es gilt:

Jede geometrische Folge mit  $a_n = aq^{n-1}$  ist divergent, wenn der Betrag  $|q|$  größer als 1 ist, und zwar für  $q > 1$  bestimmt divergent und für  $q < -1$  unbestimmt divergent.

## 2 Reihen

### 2.1 Definitionen

Eine Reihe ist die Summe der Glieder einer Folge (Zahlenfolge)  $(a_n)$ .

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Ist die Folge endlich, so nennt man auch die Reihe endlich. Für unendliche Folgen ergeben sich unendliche Reihen.

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Das Zeichen  $\infty$  bedeutet dabei, dass die Reihe nicht abbricht. Sie besteht aus unendlich vielen Summanden. Die Zahlen  $a_n$ , also die Summanden, heißen auch Glieder der Reihe.



■ **Beispiele:**

- $\sum_{k=1}^{10} 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10} = 2 + 4 + 8 + \dots + 1024$   
(endliche Reihe)
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k} = 3 + \frac{3^2}{2} + \frac{3^3}{3} + \dots + \frac{3^n}{n} + \dots$  (unendliche Reihe)

Folgende Summen heißen Teilsummen oder Partialsummen der Reihe:

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \dots,$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k, \dots$$

Man spricht von einer konvergenten unendlichen Reihe, wenn die Folge  $(s_n)$  der Partialsummen konvergiert, also einen Grenzwert  $s$  besitzt.

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Dieser Grenzwert  $s$  heißt die Summe der Reihe. Eine unendliche Reihe ist also genau dann konvergent, wenn die Folge der Partialsummen konvergiert.

Besitzt die Folge der Partialsummen keinen Grenzwert, dann heißt die unendliche Reihe divergent. In diesem Fall können die Partialsummen unbegrenzt wachsen oder oszillieren (die Folge der Partialsummen ist alternierend).

Die unendliche Reihe heißt bestimmt divergent, wenn die Folge  $(s_n)$  der Partialsummen bestimmt divergent ist. Ist die Folge der Partialsummen unbestimmt divergent, so heißt auch die unendliche Reihe unbestimmt divergent.

Die Frage nach der Konvergenz einer unendlichen Reihe wird somit auf die Frage nach der Existenz eines Grenzwertes der Folge  $(s_n)$  der Partialsummen zurückgeführt.

Die Folge der Glieder  $(a_n)$  einer konvergenten Reihe muss gegen Null konvergieren, also eine Nullfolge sein. Diese Bedingung ist notwendig, sie reicht jedoch für die Konvergenz einer unendlichen Reihe nicht aus (vgl. Abschnitt VIII.2.4).

Für konvergente Reihen gelten verschiedene Rechenregeln:

Konvergieren die Reihen  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ , so konvergieren auch die Reihen  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k, c \in \mathbb{R}$ , und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

■ **Beispiele:**

- $\sum_{k=1}^5 k \cdot 2^k = 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + 5 \cdot 2^5 + 6 \cdot 2^6$   
 $= 2 + 8 + 24 + 64 + 160 + 384 = 642$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$

Daß diese unendliche Reihe die Summe 1 hat, kann man sich dadurch klarmachen, dass man ein Quadrat mit der Fläche 1 fortgesetzt halbiert (s. Bild VIII-1). Die entstehenden Rechtecke haben die Flächeninhalte  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$ , und ihre Summe ist offensichtlich 1, der Flächeninhalt des Quadrats (vgl. auch Abschnitt VIII.2.3).

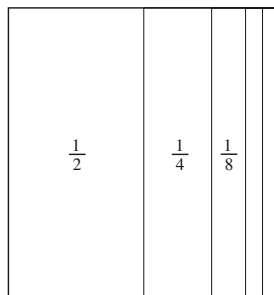


**Bild VIII-1** Zur Konvergenz der Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

- $\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$

Diese unendliche Reihe ist bestimmt divergent, denn die Folge  $(a_n) = (n)$  ist bestimmt divergent (vgl. Abschnitt VIII.1.6).

- $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$

Für die Partialsummen gilt

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade ist} \\ -1 & \text{falls } n \text{ ungerade ist} \end{cases}$$

Die unendliche Reihe ist unbestimmt divergent.

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots$

Aus  $a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$  folgt

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 1$  ist die gegebene Reihe konvergent mit dem Grenzwert 1:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{3k+2}$  ist nicht konvergent, denn die Glieder  $a_k = \frac{k+1}{3k+2}$  bilden wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n+2} = \frac{1}{3}$  keine Nullfolge.

## 2.2 Arithmetische Reihen

Eine arithmetische Reihe entsteht aus den Gliedern einer arithmetischen Folge. Da schon jede unendliche arithmetische Folge divergiert, ist auch jede unendliche arithmetische Reihe divergent. Da unendliche arithmetische Folgen bestimmt divergent sind (vgl. Abschnitt VIII.1.6), sind auch unendliche arithmetische Reihen bestimmt divergent.

Die Summe  $s_n$  einer endlichen arithmetischen Reihe  $\sum_{k=1}^n (a + (k-1)d)$  lässt sich jedoch allgemein be-

rechnen. Wegen  $a_1 = a$  folgt  $s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-1)d)$ . Dreht man die Reihenfolge der Summanden um und beachtet, dass die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder gleich  $d$  ist, so folgt andererseits  $s_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + (a_n - (n-1)d)$ . Schreibt man diese beiden Ausdrücke für  $s_n$  untereinander und addiert jeweils die beiden übereinanderstehenden Terme, so folgt

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-1)d)$$

$$s_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + (a_n - (n-1)d)$$

und daraus  $2s_n = n(a_1 + a_n)$ , denn jede dieser Summen ist  $a_1 + a_n$ , und es gibt insgesamt  $n$  solcher Summen. Es folgt:

$$s_n = \sum_{k=1}^n (a + (k-1)d) = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

Die Summe einer endlichen arithmetischen Reihe mit  $n$  Summanden ist also die Summe des ersten und des letzten Glieds multipliziert mit der halben Anzahl der Summanden.

#### ■ Beispiele:

- $\sum_{k=1}^{10} (3 + (k-1)5) = \frac{10}{2} (3 + 48) = 255$
- $\sum_{k=1}^{100} k = 50(1 + 100) = 5050$
- $\sum_{k=1}^{100} (3 + 4k) = \frac{100}{2} (7 + 403) = 50 \cdot 410 = 20500$

Die Summe der ersten  $n$  natürlichen Zahlen zum Beispiel lässt sich hiermit für beliebiges (beliebig großes)  $n$  sehr einfach ausrechnen (vgl. Beispiel 2).

### 2.3 Geometrische Reihen

Eine geometrische Reihe entsteht aus den Gliedern einer geometrischen Folge. Die Summe  $s_n$  einer endlichen geometrischen Reihe  $\sum_{k=1}^n aq^{k-1}$  ergibt sich für  $q \neq 1$  aus folgender Rechnung:

$$s_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}$$

$$qs_n = aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n$$

Zieht man die zweite Gleichung von der ersten ab, so folgt  $s_n - qs_n = a - aq^n$  und somit für die Summe  $s_n$  einer endlichen geometrischen Reihe mit  $q \neq 1$ :

$$s_n = \sum_{k=1}^n aq^{k-1} = a \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

Für  $q = 1$  gilt  $s_n = n \cdot a$ .

#### ■ Beispiele:

- $\sum_{k=1}^5 2^{k-1} = \frac{1 - 2^5}{1 - 2} = 31$
- $\sum_{k=1}^{10} 3 \cdot 5^{k-1} = 3 \frac{1 - 5^{10}}{1 - 5} = 3 \frac{9765624}{4} = 7324218$
- $\sum_{k=1}^{100} 3^k = 3 \frac{1 - 3^{100}}{1 - 3} = \frac{3}{2} (3^{100} - 1)$

Die Summe  $s_n = a \frac{1 - q^n}{1 - q}$  ist für  $q \neq 1$  das  $n$ -te Glied der Folge der Partialsummen. Die Größen  $a$

und  $q$  sind Konstanten, die Konvergenz der Folge hängt nur von der Größe  $1 - q^n$  ab. Für  $q > 1$  und  $q \leq -1$  divergiert die Folge  $(q^n)$ , die geometrische Reihe ist dann also ebenfalls divergent. Für  $q \geq 1$  ist die unendliche geometrische Reihe bestimmt divergent, für  $q \leq -1$  ist sie unbestimmt divergent.

Für  $|q| < 1$  wird  $|q|^n = |q^n|$  beliebig klein, wenn  $n$  nur groß genug gewählt wird, das heißt, es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ . Für  $|q| < 1$  konvergiert deshalb die Folge  $(q^n)$ , es gilt dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q^n) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 1$ . In diesem Fall konvergiert die unendliche geometrische Reihe und hat den Grenzwert

$$\begin{aligned} s &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{a}{1 - q} \quad (|q| < 1) \end{aligned}$$

#### ■ Beispiele:

- $\sum_{k=1}^{\infty} 5 \cdot \left(-\frac{11}{12}\right)^{k-1} = \frac{5}{1 + \frac{11}{12}} = \frac{60}{23} \quad \left(a = 5, q = -\frac{11}{12}\right)$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \quad \left(a = q = \frac{1}{2}\right)$
- $\sum_{k=1}^{\infty} 3 \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} = \frac{3}{1 - \frac{4}{5}} = 15 \quad \left(a = 3, q = \frac{4}{5}\right)$

### 2.4 Harmonische Reihen

Ist  $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ , so nennt man  $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  endliche harmonische Reihe und  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  unendliche harmonische Reihe.

Ist  $(a_n) = \left((-1)^{n+1} \frac{1}{n}\right)$ , dann heißt die Reihe alternierende harmonische Reihe.

Die unendliche harmonische Reihe ist bestimmt divergent, wie folgende Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \\ &\quad + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \dots \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) \\ &\quad + \frac{1}{17} + \dots \\ &> \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{32} + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \end{aligned}$$

Die unendliche Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}$  ist eine arithmetische Reihe (mit  $d=0$ ) und deshalb bestimmt divergent. Somit folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

Die harmonische Reihe ist bestimmt divergent, obwohl die Glieder der Reihe eine Nullfolge bilden. Die unendliche alternierende harmonische Reihe ist dagegen konvergent.

#### ■ Beispiele:

- $\sum_{k=1}^6 \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$   
(endliche harmonische Reihe)
- $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$   
 $= \ln 2$   
(unendliche alternierende harmonische Reihe)

## 2.5 Alternierende Reihen

Ist  $(a_n)$  eine alternierende Folge, also eine Folge, deren Glieder abwechselnd unterschiedliches Vorzeichen haben, dann nennt man  $\sum_{k=1}^n a_k$  eine endliche alternierende Reihe und  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  eine unendliche alternierende Reihe.

#### ■ Beispiele:

- $\sum_{k=1}^{10} (-1)^k k = -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 - 9 + 10$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$
- $\sum_{k=1}^n (-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{für gerades } n \\ -1 & \text{für ungerades } n \end{cases}$

Für alternierende Reihen gibt es ein einfaches Kriterium, mit dem sich die Konvergenz der Reihe untersuchen lässt:

Eine alternierende Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , bei der  $(|a_n|)$ , also die Folge der Beträge der Glieder, eine monoton fallende Nullfolge bildet, ist stets konvergent (Leibnizsches Konvergenzkriterium).

#### ■ Beispiel:

- $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$

Die alternierende harmonische Reihe ist konvergent nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium, denn die Folge der Beträge der Glieder, also  $\left|(-1)^{n+1} \frac{1}{n}\right| = \left(\frac{1}{n}\right)$ , ist monoton fallend und eine Nullfolge.

## 3 Grenzwerte von Funktionen

### 3.1 Grenzwert an einer endlichen Stelle

Die Funktion  $y=f(x)$  besitzt an der Stelle  $x=a$  den Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  oder  $f(x) \rightarrow A$  für  $x \rightarrow a$  (gesprochen: Limes  $f(x)$  gleich  $A$  für  $x$  gegen  $a$ ), wenn sich die Funktion  $f(x)$  bei unbegrenzter

Annäherung von  $x$  an  $a$  unbegrenzt an  $A$  nähert. Die Variable  $x$  nähert sich  $a$  unbegrenzt an, es gilt jedoch stets  $x \neq a$ . Die Funktion  $f(x)$  muss an der Stelle  $x=a$  den Wert  $A$  nicht annehmen und braucht an dieser Stelle auch nicht definiert zu sein.

Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \text{oder} \quad f(x) \rightarrow A \quad \text{für } x \rightarrow a$$

Exakte Definition: Die Funktion  $y=f(x)$  besitzt an der Stelle  $x=a$  den Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , wenn sich nach Vorgabe einer beliebig kleinen positiven Zahl  $\varepsilon$  eine zweite positive Zahl  $\delta = \delta(\varepsilon)$  so finden lässt, dass für alle  $x$  mit  $|x-a| < \delta(\varepsilon)$  gilt  $|f(x)-A| < \varepsilon$  eventuell mit Ausnahme der Stelle  $a$ . Der Unterschied  $|f(x)-A|$  zwischen den Funktionswerten und dem Grenzwert wird kleiner als jede beliebig vorgegebene positive Zahl  $\varepsilon$ , wenn die  $x$ -Werte sich um weniger als eine passend gewählte, von  $\varepsilon$  abhängige Zahl  $\delta = \delta(\varepsilon)$  vom Wert  $a$  unterscheiden, wenn also  $0 < |x-a| < \delta(\varepsilon)$  gilt.

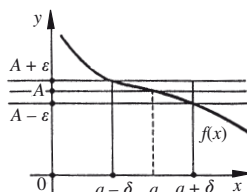


Bild VIII-2 Veranschaulichung des Grenzwertbegriffes

Besitzt die Funktion  $y=f(x)$  an der Stelle  $x=a$  den Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , so sagt man auch, der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existiert und ist gleich  $A$ .

#### ■ Beispiele:

- Die Funktion  $y=f(x)=x^3$  hat für  $x \rightarrow 0$  den Grenzwert  $A=0$ :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$ . Soll etwa  $|x^3-0|$ , der Unterschied zwischen  $y=x^3$  und  $A=0$ , kleiner als  $\varepsilon=0,000001$  sein, so ist dies erfüllt, wenn man für  $\delta=\delta(\varepsilon)<0,01$  wählt, denn  $(10^{-2})^3=10^{-6}$ . Für ein beliebiges positives  $\varepsilon$  erfüllt  $\delta(\varepsilon) < \sqrt[3]{\varepsilon}$  die geforderte Bedingung.
- Die Funktion  $y=f(x)=\frac{2x^2+5x}{3x}$  ist an der Stelle  $x=0$  nicht definiert, da für  $x=0$  der Nenner Null ist. Es gilt  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2+5x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+5}{3} = \frac{5}{3}$  (Kürzen durch  $x \neq 0$  und weiter wegen der Rechenregeln für Grenzwerte (siehe Abschnitt VIII.3.4))  
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} x + \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$ .  
Die Funktion  $y=f(x)$  besitzt an der Stelle  $x=0$  den Grenzwert  $\frac{5}{3}$ .

### 3.2 Einseitige Grenzwerte

Die Funktion  $y=f(x)$  besitzt an der Stelle  $x=a$  den linksseitigen Grenzwert  $A$ , wenn sich die Funktion  $f(x)$  bei unbegrenzter Annäherung von  $x$  von links an  $a$  unbegrenzt an  $A$  nähert.

## Linksseitiger Grenzwert

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$$

Die Funktion  $y = f(x)$  besitzt an der Stelle  $x = a$  den rechtsseitigen Grenzwert  $A$ , wenn sich die Funktion  $f(x)$  bei unbegrenzter Annäherung von  $x$  von rechts an  $a$  unbegrenzt an  $A$  nähert.

## Rechtsseitiger Grenzwert

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$$

Die Variable  $x$  nähert sich  $a$  unbegrenzt an, es gilt jedoch stets  $x \neq a$ . Die Funktion  $f(x)$  muss an der Stelle  $x = a$  den Wert  $A$  nicht annehmen und braucht an dieser Stelle auch nicht definiert zu sein. Die Funktion  $y = f(x)$  besitzt an der Stelle  $x = a$  den Grenzwert  $A$ , wenn an dieser Stelle sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert existieren und gleich sind.

## Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

## ■ Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Linksseitiger Grenzwert: } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = 0$$

$$\text{Rechtsseitiger Grenzwert: } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = 1$$

Die Funktion  $y = f(x)$  besitzt an der Stelle  $x = 0$  sowohl den linksseitigen als auch den rechtsseitigen Grenzwert. Da diese jedoch verschieden sind, existiert der Grenzwert an der Stelle  $x = 0$  nicht.

## 3.3 Grenzwert im Unendlichen

Die Funktion  $y = f(x)$  besitzt für  $x \rightarrow \infty$  den Grenzwert  $A$ , wenn es zu jedem beliebigen  $\varepsilon > 0$  ein hinreichend großes  $\omega = \omega(\varepsilon)$  gibt, so dass  $|f(x) - A| < \varepsilon$  für alle  $x > \omega(\varepsilon)$  gilt. Man schreibt dafür

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

Analog besitzt die Funktion  $y = f(x)$  für  $x \rightarrow -\infty$  den Grenzwert  $A$ , wenn es zu jedem beliebigen  $\varepsilon > 0$  ein hinreichend großes  $\omega = \omega(\varepsilon)$  gibt, so dass  $|f(x) - A| < \varepsilon$  für alle  $x < -\omega(\varepsilon)$  gilt. Man schreibt dann

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$$

Die Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  der Funktion  $y = f(x)$  beschreiben, falls sie existieren, den Verlauf der Funktion im Unendlichen, das heißt, das Verhalten der Funktion für sehr großes positives und für sehr kleines negatives Argument  $x$ .

## ■ Beispiele:

$$1. \text{ Es ist } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ denn es gilt } \left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon \text{ für alle } x,$$

die der Bedingung  $x > \omega(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$  genügen. Ebenso gilt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$2. \text{ Die Funktion } y = f(x) = \frac{5x+3}{2x+7} \text{ hat für } x \rightarrow \pm\infty \text{ den Grenzwert } \frac{5}{2}, \text{ also } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+3}{2x+7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x+3}{2x+7} = \frac{5}{2}, \text{ wie folgende}$$

Rechnung unter Anwendung der Rechenregeln für Grenzwerte (siehe Abschnitt VIII.3.4) zeigt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+3}{2x+7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{3}{x}}{2 + \frac{7}{x}} = \frac{5 + 3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}}{2 + 7 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = \frac{5}{2}$$

Die Rechnung für  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x+3}{2x+7} = \frac{5}{2}$  verläuft ganz analog.

$$3. \text{ Der Grenzwert } \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \text{ existiert nicht. Wie groß man } x \text{ auch wählt, es lassen sich wegen der Periodizität der Sinusfunktion unendlich viele größere } x\text{-Werte angeben, für die die Funktion einen vorgegebenen Wert zwischen } -1 \text{ und } 1 \text{ hat.}$$

## 3.4 Rechenregeln für Grenzwerte

Die für Folgen aufgestellten Regeln für das Rechnen mit Grenzwerten (vgl. Abschnitt VIII.1.4) lassen sich auf das Rechnen mit Grenzwerten von Funktionen übertragen.

Gilt  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = F$  und  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$  für zwei Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$ , so existieren auch die folgenden Grenzwerte:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = F + G \\ \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = F - G \\ \lim_{x \rightarrow a} [c \cdot f(x)] &= c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \cdot F \quad (c \in \mathbb{R}) \\ \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = F \cdot G \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{F}{G} \\ &\quad (g(x) \neq 0, G \neq 0) \end{aligned}$$

Diese Regeln sagen aus, dass man die Operation der Grenzwertbildung mit der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (falls  $G \neq 0$ ) vertauschen darf.

Die Regeln wurden schon bei den Beispielen der vorangegangenen Abschnitte angewandt.

## 3.5 Unbestimmte Ausdrücke

Unbestimmte Ausdrücke sind symbolische Ausdrücke der Form

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty \cdot 0, \infty - \infty, -\infty + \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

Solche Ausdrücke ergeben sich bei bestimmten Grenzwertaufgaben. Sind zum Beispiel  $f(x)$  und  $g(x)$  zwei Funktionen mit  $f(a) = g(a) = 0$ , so ist ihr Quotient  $\frac{f(x)}{g(x)}$  an der Stelle  $x = a$  nicht definiert. Formales Einsetzen von  $x = a$  führt auf den unbe-

stimmten Ausdruck „ $\frac{0}{0}$ “. Damit soll ausgedrückt werden, dass der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  zu ermitteln ist, der das Verhalten des Quotienten in der Nähe der kritischen Stelle  $a$  beschreibt, falls er existiert.

#### ■ Beispiele:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x - 1}{4x^2 + 3} = ?$$

Unbestimmter Ausdruck der Form „ $\frac{\infty}{\infty}$ “.

Durch Kürzen des Bruches durch  $x^2$  ( $x \neq 0$ ) ergibt sich

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x - 1}{4x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{4 + \frac{3}{x^2}} = \frac{3}{4}$$

Der Grenzwert existiert also und ist gleich  $\frac{3}{4}$ .

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x) = ?$$

Unbestimmter Ausdruck der Form „ $\infty - \infty$ “.

Durch Umformen ergibt sich

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x(x - 1) = \infty \cdot \infty = \infty$$

Es existiert kein Grenzwert.

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2}{x^3} = ?$$

Unbestimmter Ausdruck der Form „ $\frac{\infty}{\infty}$ “.

Durch Kürzen des Bruches durch  $x^3$  ( $x \neq 0$ ) erhält man

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}}{1} = \frac{0 - 0}{1} = 0$$

Der Grenzwert existiert und ist gleich 0.

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 - 2} = ?$$

Unbestimmter Ausdruck der Form „ $\frac{\infty}{\infty}$ “.

Durch Kürzen des Bruches durch  $x^2$  ( $x \neq 0$ ) ergibt sich

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1 - \frac{2}{x^2}} = \frac{\infty}{1 - 0} = \infty$$

Es existiert kein Grenzwert.

## 3.6 Stetigkeit einer Funktion

Die Stetigkeit einer Funktion  $y = f(x)$  an einer Stelle  $x = a$  wird mit Hilfe des Grenzwertes der Funktion an dieser Stelle definiert.

Eine Funktion  $y = f(x)$  heißt an der Stelle  $x = a$  stetig, wenn  $f(x)$  an der Stelle  $a$  definiert ist und der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existiert und gleich  $f(a)$  ist.

Das ist genau dann der Fall, wenn es zu jedem vorgegebenen  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  gibt, so dass  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  für alle  $x$  mit  $|x - a| < \delta$  gilt.

Ist eine Funktion  $y = f(x)$  stetig, dann ändert sich bei kleinen Änderungen der Variablen  $x$  auch der Funktionswert  $f(x)$  nur geringfügig. Die meisten Funktionen, die in den Anwendungen vorkommen, sind stetig.

Der Graph einer stetigen Funktion ist eine zusammenhängende Kurve. Ist dagegen die Kurve an verschiedenen Stellen (mindestens an einer) unterbrochen, dann heißt die zugehörige Funktion unstetig, und die Werte der unabhängigen Variablen  $x$ , an denen die Unterbrechung auftritt, heißen Unstetigkeitsstellen.

Eine an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs stetige Funktion  $y = f(x)$  heißt stetig.

Sind  $f(x)$  und  $g(x)$  zwei Funktionen mit dem Definitionsbereich  $D$  und dem Wertebereich  $W = \mathbb{R}$ , und ist  $c$  eine reelle Zahl, so gilt:

Sind  $f(x)$  und  $g(x)$  stetig an der Stelle  $x = a$  des Definitionsbereichs  $D$ , so sind auch  $f(x) + g(x)$ ,  $c \cdot f(x)$ ,  $f(x) \cdot g(x)$ ,  $\frac{f(x)}{g(x)}$  (falls  $g(x) \neq 0$  für  $x \in D$ ) und  $|f(x)|$  stetig an der Stelle  $x = a$ . Da die Sinusfunktion  $y = \sin x$  eine stetige Funktion ist, folgt hieraus zum Beispiel, dass eine so kompliziert gebaute Funktion wie etwa  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x \cdot \sin(x^2 + 1)}{1 + |\sin x|}$  ebenfalls stetig ist.

#### ■ Beispiele:

- Die Funktion  $f(x) = 5x + 2$  ist an jeder Stelle  $x = a$  des Definitionsbereichs stetig, denn es gilt  $\lim_{x \rightarrow a} (5x + 2) = 5a + 2 = f(a)$ . Die Funktion ist also eine stetige Funktion.
- Die Funktion  $f(x) = 3x^2$  ist für jedes reelle  $x$  stetig, die Funktion ist eine stetige Funktion.
- Die Funktion  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$  besitzt für  $x = 0$  eine Unstetigkeitsstelle, also ist  $y = f(x)$  eine unstetige Funktion.

## 3.7 Unstetigkeitsstellen

Eine Unstetigkeitsstelle ist eine Stelle  $x = a$  einer Funktion  $y = f(x)$ , an der die Funktion nicht stetig ist.

Die Kurve einer Funktion ist an einer Unstetigkeitsstelle unterbrochen. Eine Funktion, die mindestens eine Unstetigkeitsstelle besitzt, heißt unstetig.

Die häufigsten Unstetigkeitsstellen sind Sprungstellen und Pole.

An einer Sprungstelle  $x = a$  sind der rechtsseitige Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$  und der linksseitige Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$  voneinander verschieden. Die Funktion  $f(x)$  springt beim Durchlaufen des Punktes  $x = a$  von einem auf einen anderen endlichen Wert. Die Funktion  $f(x)$  braucht für  $x = a$  nicht definiert zu sein.

Ein Pol oder eine Unendlichkeitsstelle  $x = a$  einer Funktion  $y = f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$  ist eine Stelle, für die der

Nenner von  $f(x)$  den Wert 0 hat und der Zähler von 0 verschieden ist, also  $h(a) = 0$  und  $g(a) \neq 0$  (vgl. Abschnitt V.5). An einer solchen Stelle ist die Funktion also nicht definiert. Die Funktion strebt bei Annäherung an einen Pol nach (plus oder minus) Unendlich. Die Kurve der Funktion läuft an einer solchen Stelle ins Unendliche.

#### ■ Beispiele:

$$1. f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Linksseitiger Grenzwert: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0$$

$$\text{Rechtsseitiger Grenzwert: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

Der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert der Funktion  $y = f(x)$  sind verschieden, also besitzt die Funktion bei  $x = 0$  eine Sprungstelle. Die Funktion springt beim Durchlaufen des Punktes  $x = 0$  von 0 auf 1.

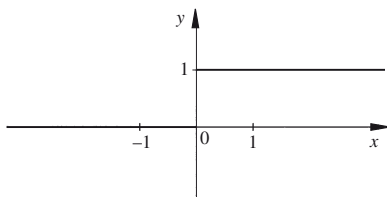


Bild VIII-3 Graph der Funktion von Beispiel 1

2.  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $D = \mathbb{R}$ ,  $x \neq 0$   
 Einseitige Grenzwerte:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Die Funktion  $y = \frac{1}{x}$  besitzt bei  $x = 0$  einen Pol. Bei Annäherung von links an den Pol strebt die Funktion nach minus Unendlich, bei Annäherung von rechts nach plus Unendlich.

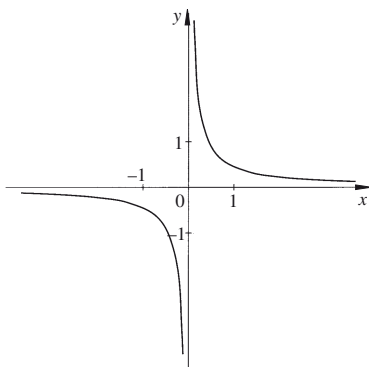


Bild VIII-4 Graph der Funktion von Beispiel 2

## 4 Ableitung einer Funktion

### 4.1 Definitionen

Existiert für eine Funktion  $y = f(x)$  mit dem Definitionsbereich  $D$  der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (x_0 \in D)$$

dann nennt man  $f'(x_0)$  die Ableitung der Funktion  $f(x)$  an der Stelle  $x = x_0$  (gesprochen:  $f$  Strich von  $x_0$ ). Die Funktion  $f(x)$  heißt dann differenzierbar in  $x_0$ .

Statt  $f'(x_0)$  schreibt man auch  $y'(x_0)$  oder  $\frac{dy}{dx}(x_0)$  oder  $\frac{df}{dx}(x_0)$  (gesprochen:  $y$  Strich von  $x_0$  bzw.  $dy$  nach  $dx$  an der Stelle  $x_0$  bzw.  $df$  nach  $dx$  an der Stelle  $x_0$ ).

Der Bruch  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  heißt auch Differenzenquotient, da im Zähler die Differenz zweier Funktionswerte und im Nenner die Differenz zweier  $x$ -Werte steht. Deshalb nennt man den Grenzwert  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  statt Ableitung auch Differentialquotient.

Geometrische Deutung: Ist die Funktion  $y = f(x)$  als Kurve in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt, dann ist der Differenzenquotient gleich

der Steigung (also dem Tangens des Steigungswinkels  $\beta$ ) der Sekante durch die Punkte  $P_0(x_0 | f(x_0))$  und  $P(x | f(x))$ . Der Grenzwert  $f'(x_0)$  ist die Steigung der Tangente in  $x_0$  an den Graphen von  $f(x)$ , also  $f'(x_0) = \tan \alpha$ . Dabei ist  $\alpha$  der Winkel zwischen der  $x$ -Achse und der Tangente an den Graphen in  $x_0$ , wobei der Winkel von der positiven  $x$ -Achse zur Tangente im entgegengesetzten Drehsinn des Uhrzeigers gemessen wird.

Anschaulich bedeutet die Existenz der Ableitung an der Stelle  $x = x_0$ , dass der Kurvenverlauf in  $x_0$  glatt ist (keine „Knickstelle“ hat).

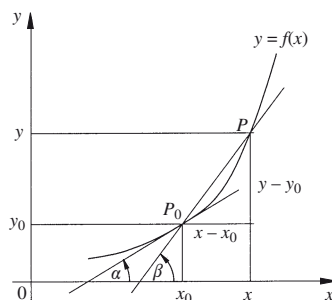


Bild VIII-5 Geometrische Deutungen des Differenzen- und des Differentialquotienten

Eine Funktion  $y = f(x)$  heißt (generell) differenzierbar, wenn sie an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs differenzierbar ist. Dann heißt die durch  $g(x) = f'(x)$  definierte Funktion  $y' = f'(x)$  die Ableitung oder die Ableitungsfunktion von  $f(x)$ .

Eine an der Stelle  $x_0$  differenzierbare Funktion  $y = f(x)$  ist dort auch stetig. Falls  $f(x)$  an der Stelle  $x_0$  nicht stetig ist, kann  $f(x)$  dort auch nicht differenzierbar sein. Aus der Stetigkeit an der Stelle  $x_0$  folgt jedoch noch nicht die Differenzierbarkeit an dieser Stelle.

Eine Funktion  $y = f(x)$  heißt stetig differenzierbar, wenn  $f(x)$  differenzierbar ist und die Ableitung  $f'(x)$  eine stetige Funktion ist.

#### ■ Beispiele:

1. Für die konstante Funktion  $f(x) = c$  ( $c \in \mathbb{R}$ ) gilt

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 0 = 0$$

Die Ableitungsfunktion einer konstanten Funktion ist somit  $f'(x) = 0$ .

2. Für die Funktion  $f(x) = ax + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $D = \mathbb{R}$  gilt

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{ax + b - (ax_0 + b)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} a = a$$

Die Funktion  $f(x) = ax + b$  ist ebenfalls eine (überall) differenzierbare Funktion, und es gilt  $f'(x) = a$ .

3. Die Funktion  $f(x) = x^2$  mit  $D = \mathbb{R}$  ist in jedem Punkt  $x_0 \in D$  differenzierbar. Es ist

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = x + x_0$$

und somit

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

Die Funktion  $f(x) = x^2$  ist eine (überall) differenzierbare Funktion, und es gilt  $f'(x) = 2x$ .

4. Die Funktion  $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$  ist (überall) stetig.

Für  $x_0 > 0$  ist  $f'(x_0) = 1$ , für  $x_0 < 0$  ist dagegen  $f'(x_0) = -1$ .  
Für  $x_0 = 0$  gilt wegen  $f(0) = 0$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} |x| = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x-0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

und

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} |x| = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{-x-0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (-1) = -1$$

Der Differentialquotient existiert nicht, da der rechtsseitige Grenzwert und der linksseitige Grenzwert nicht gleich sind.  
Die Funktion  $f(x) = |x|$  ist an der Stelle  $x_0 = 0$  stetig, aber nicht differenzierbar.

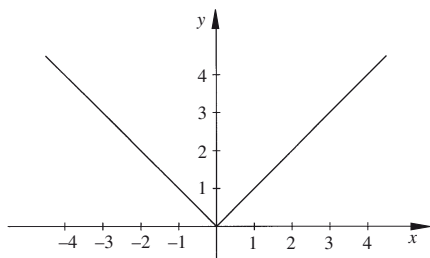


Bild VIII-6 Graph der Funktion von Beispiel 4

## 4.2 Differentiationsregeln

Die folgenden Regeln gelten sowohl für die Ableitungen einer Funktion  $y = f(x)$  an einer bestimmten Stelle  $x = x_0$  als auch für die Ableitungsfunktionen  $y' = f'(x)$ .

### 1. Konstante Funktion

Die Ableitung einer konstanten Funktion ist Null (vgl. Beispiel 1 im Abschnitt VIII.4.1).

$$y = f(x) = c \ (c \in \mathbb{R}, \text{ konstant}) \Rightarrow y' = 0$$

■ **Beispiel:**

$$y = 3 \Rightarrow y' = 0$$

### 2. Faktorregel

Die Ableitung einer Funktion mal konstantem Faktor ist gleich konstanter Faktor mal abgeleitete Funktion.

$$y = c \cdot f(x) \ (c \in \mathbb{R}, \text{ konstant}) \Rightarrow y' = c \cdot f'(x)$$

Herleitung:

$$\begin{aligned} (c \cdot f)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c \cdot f(x) - c \cdot f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= c \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c f'(x_0) \end{aligned}$$

■ **Beispiel:**

$$y = 3x^2 \Rightarrow y' = 3 \cdot 2x = 6x, \text{ denn } \frac{d}{dx} x^2 = 2x$$

### 3. Summenregel

Die Ableitung der Summe (Differenz) zweier Funktionen ist gleich der Summe (Differenz) der Ableitungen der Funktionen.

$$\begin{aligned} y &= f(x) + g(x) \Rightarrow y' = f'(x) + g'(x) \\ y &= f(x) - g(x) \Rightarrow y' = f'(x) - g'(x) \end{aligned}$$

Herleitung:

$$\begin{aligned} (f+g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0) + g'(x_0) \end{aligned}$$

Die Herleitung für die Ableitung der Differenz zweier Funktionen verläuft ganz analog.

■ **Beispiel:**

$$y = x^2 + 3x \Rightarrow y' = 2x + 3, \text{ denn } \frac{d}{dx} x^2 = 2x \text{ und } \frac{d}{dx} 3x = 3$$

### 4. Produktregel

Die Ableitung des Produkts zweier Funktionen ist gleich der Summe aus der ersten Funktion multipliziert mit der Ableitung der zweiten Funktion und der zweiten Funktion multipliziert mit der Ableitung der ersten Funktion.

$$y = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Herleitung:

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \\ &= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \end{aligned}$$

Für die Ableitung des Produkts von drei Funktionen gilt

$$\begin{aligned} y &= f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) \Rightarrow y' = f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x) \\ &\quad + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) \\ &\quad + f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) \end{aligned}$$

Mehrfache Anwendung der Produktregel ergibt die Ableitung der Potenzfunktion.

Potenzregel  $y = x^n \ (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow y' = nx^{n-1}$



Mit Hilfe von Polynomdivision lässt sich dieses Ergebnis auch direkt herleiten:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} x^n(x_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + x_0^2 x^{n-3} + \dots + x_0^{n-1}) \\ &= n x_0^{n-1} \end{aligned}$$

Durch Anwendung von Quotienten- und Kettenregel (siehe unten) kann man dieses Ergebnis auf reelle Exponenten ausweiten.

$$y = x^r \quad (r \in \mathbb{R}) \Rightarrow y' = r x^{r-1}$$

Summen- und Potenzregel zusammen ergeben die Ableitung eines Polynoms.

$$\begin{aligned} y &= \sum_{k=0}^n c_k x^k = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n \Rightarrow \\ y' &= \sum_{k=1}^n k \cdot c_k x^{k-1} = c_1 + 2c_2 x + \dots + n c_n x^{n-1} \end{aligned}$$

■ **Beispiele:**

1.  $y = 3x^2 \cdot \sin x \Rightarrow y' = 3x^2 \cdot \cos x + 6x \cdot \sin x$
2.  $y = x^7 \Rightarrow y' = 7x^6$
3.  $y = x^{\frac{7}{3}} \Rightarrow y' = \frac{7}{3} x^{\frac{4}{3}}$
4.  $y = 3x^7 - 5x^4 + x^2 + 3 \Rightarrow y' = 21x^6 - 20x^3 + 2x$

### 5. Quotientenregel

Die Ableitung des Quotienten zweier Funktionen ist gleich der Differenz der Ableitung der Zählerfunktion multipliziert mit der Nennerfunktion und der Zählerfunktion multipliziert mit der Ableitung der Nennerfunktion dividiert durch das Quadrat der Nennerfunktion.

$$\begin{aligned} y &= \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0) \\ \Rightarrow y' &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \end{aligned}$$

Der Zähler von  $y'$  beginnt also mit der Ableitung der Zählerfunktion  $f(x)$ .

*Herleitung:*

$$\begin{aligned} & \left( \frac{f}{g} \right)'(x_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \\ &= \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)} \end{aligned}$$

Im Spezialfall, dass  $f(x)$  eine konstante Funktion mit  $f(x) = 1$  ist, gilt

$$y = \frac{1}{g(x)} \Rightarrow y' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

■ **Beispiele:**

1.  $y = \frac{5x-1}{2x+3} \Rightarrow y' = \frac{(2x+3) \cdot 5 - (5x-1) \cdot 2}{(2x+3)^2} = \frac{17}{(2x+3)^2}$
2.  $y = \frac{x^3}{x^2-1} \Rightarrow y' = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x \cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$
3.  $y = \frac{1}{x^2+3x} \Rightarrow y' = -\frac{2x+3}{(x^2+3x)^2}$

### 6. Kettenregel

Die Kettenregel ist eine Regel zur Differentiation zusammengesetzter Funktionen.

Ist  $y = F(x)$  eine zusammengesetzte Funktion, also  $F(x) = f(h(x))$ , und setzt man  $z = h(x)$ , dann ist  $y = F(x)$  differenzierbar, wenn die Funktionen  $y = f(z)$  und  $z = h(x)$  differenzierbar sind, und es gilt

$$\begin{aligned} y' = F'(x) &= \frac{df}{dz} \cdot \frac{dh}{dx} = f'(z) \cdot h'(x) \\ &= f'(h(x)) \cdot h'(x) \end{aligned}$$

Man nennt  $f'(h(x))$  die äußere Ableitung und  $h'(x)$  die innere Ableitung der Funktion  $y = f(h(x))$ .

■ **Beispiele:**

1.  $y = F(x) = (x^3 - 2x + 1)^3$ , also  $z = h(x) = x^3 - 2x + 1$   
und  $y = f(z) = z^3$   
 $\Rightarrow y' = F'(x) = f'(z) \cdot h'(x) = 3z^2 \cdot (3x^2 - 2)$   
 $= 3(x^3 - 2x + 1)^2 \cdot (3x^2 - 2)$
2.  $y = F(x) = \sqrt{5x^2 - 7x + 8}$ , also  $z = h(x) = 5x^2 - 7x + 8$   
und  $y = f(z) = \sqrt{z}$   
 $\Rightarrow y' = F'(x) = f'(z) \cdot h'(x) = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} \cdot (10x - 7)$   
 $= \frac{10x - 7}{2\sqrt{5x^2 - 7x + 8}}$
3.  $y = F(x) = \sin(4x^2 + 1)$ , also  $z = h(x) = 4x^2 + 1$  und  
 $y = f(z) = \sin z$   
 $\Rightarrow y' = F'(x) = f'(z) \cdot h'(x) = \cos z \cdot 8x$   
 $= 8x \cdot \cos(4x^2 + 1)$   
Die Ableitung von  $y = \sin x$  ist  $y' = \cos x$  (vgl. Abschnitt VIII.4.5.1).

### 7. Ableitung der Umkehrfunktion

Ist  $y = f(x)$  eine differenzierbare Funktion mit  $f'(x) \neq 0$ , die eine Umkehrfunktion  $y = f^{-1}(x)$  besitzt, so ist auch die Umkehrfunktion differenzierbar, und es gilt

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

*Herleitung:*

Aus  $f(f^{-1}(x)) = x$  (vgl. Abschnitt V.2.8) folgt durch Differentiation mit Anwendung der Kettenregel  $f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$  und daraus wegen  $f'(x) \neq 0$  durch Auflösen nach  $(f^{-1})'(x)$  die



behauptete Gleichung für die Ableitung der Umkehrfunktion.

### 4.3 Höhere Ableitungen

Ist die Funktion  $y = f(x)$  differenzierbar oder zumindest in einem ganzen Intervall ihres Definitionsbereichs differenzierbar, so kann dort also an jeder Stelle die Ableitung  $f'(x)$  gebildet werden. Dann ist  $y = f'(x)$  wieder eine Funktion von  $x$ . Ist diese Funktion wieder differenzierbar, so nennt man diese Ableitung der (ersten) Ableitung die zweite Ableitung der Ausgangsfunktion  $y = f(x)$ , geschrieben  $f''(x)$  oder  $y''(x)$  oder  $\frac{d^2 y}{dx^2}(x)$  oder  $\frac{d^2 f}{dx^2}(x)$  (gesprochen:  $f$  zwei Strich von  $x$  bzw.  $y$  zwei Strich von  $x$  bzw.  $d$  zwei  $y$  nach  $dx$  Quadrat an der Stelle  $x$  bzw.  $d$  zwei  $f$  nach  $dx$  Quadrat an der Stelle  $x$ ). Entsprechend kann es auch eine dritte, vierte, ... Ableitung von  $f(x)$  geben. Die  $n$ -te Ableitung von  $f(x)$  schreibt man

$$f^{(n)}(x) = y^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x)$$

#### ■ Beispiele:

1. Die Funktion  $f(x) = x^5$  hat als (erste) Ableitung  $f'(x) = 5x^4$ , als zweite Ableitung  $f''(x) = 20x^3$ , als dritte Ableitung  $f'''(x) = 60x^2$ , als vierte Ableitung  $f^{(4)}(x) = 120x$  und als fünfte Ableitung  $f^{(5)}(x) = 120$ . Alle höheren Ableitungen sind Null, also  $f^{(k)}(x) = 0$  für  $k = 6, 7, \dots$
2.  $f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 5x - 2 \Rightarrow f'(x) = 16x^3 - 36x^2 + 5$ ,  
 $f''(x) = 48x^2 - 72x$ ,  $f'''(x) = 96x - 72$ ,  $f^{(4)}(x) = 96$ ,  
 $f^{(5)}(x) = f^{(6)}(x) = \dots = 0$
3.  $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2x}{(x-1)^3}$ ,  $f''(x) = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}$ ,  
 $f'''(x) = -\frac{12(x+1)}{(x-1)^5}, \dots$

### 4.4 Ableitungen einiger algebraischer Funktionen

Mit den Differentiationsregeln aus Abschnitt VIII.4.2 lassen sich die Ableitungen von algebraischen Funktionen berechnen.

#### Rationale Funktionen

$$y = c \text{ (c konstant)} \Rightarrow y' = 0$$

$$y = x \Rightarrow y' = 1$$

$$y = x^n \Rightarrow y' = nx^{n-1}$$

$$y = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

$$\Rightarrow y' = nc_n x^{n-1} + (n-1)c_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2c_2 x + c_1$$

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2}$$

$$y = \frac{1}{x^n} \Rightarrow y' = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

$$y = \frac{x^m}{x^n} \Rightarrow y' = \frac{(m-n)x^{m-1}}{x^{n+1}}$$

#### Irrationale Funktionen

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y = \sqrt[n]{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$y = \frac{\sqrt[m]{x}}{\sqrt[n]{x}} \Rightarrow y' = \frac{n-m}{mn} \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x^{n+1}}}$$

## 4.5 Ableitungen einiger transzendenter Funktionen

### 4.5.1 Trigonometrische Funktionen

Zur Herleitung der Ableitung der Sinusfunktion wird der Grenzwert von  $\frac{\sin x}{x}$  für  $x \rightarrow 0$  benötigt. Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

*Beweis:*

Zeichnet man einen Einheitskreis in einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung  $O$ , so ist die Länge des Lotes eines Kreispunktes  $P$  auf die Abszisse  $\sin x$ , wenn die Strecke  $\overline{OP}$  mit der Abszisse den Winkel  $x$  (im Bogenmaß) bildet. Der zum Winkel gehörige Bogen hat die Länge  $x$ , da der Radius des Kreises 1 ist (vgl. Abschnitt VI.2). Die Projektion von  $\overline{OP}$  auf die Abszisse hat die Länge  $\cos x$ . Der Teil der zur Abszisse senkrechten Tangente an den Einheitskreis, der zwischen der Abszisse und der Verlängerung der Strecke  $\overline{OP}$  liegt, hat die Länge  $\tan x$ .

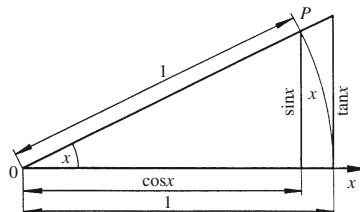


Bild VIII-7 Zur Herleitung von  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Die Fläche  $A_1$  des rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen  $\sin x$  und  $\cos x$  ist  $A_1 = \frac{\sin x \cdot \cos x}{2}$ , die Fläche  $A_2$  des Einheitskreissektors mit dem Winkel  $x$  ist  $A_2 = \frac{x}{2}$ , und die Fläche  $A_3$  des rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen 1 und  $\tan x$  ist  $A_3 = \frac{1 \cdot \tan x}{2}$ . Wegen  $A_1 < A_2 < A_3$  folgt  $\frac{\sin x \cdot \cos x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{1 \cdot \tan x}{2}$ .

Durch Multiplikation mit  $\frac{2}{\sin x}$  folgt

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

Die Grenzwerte der beiden äußeren Funktionen an der Stelle  $x = 0$  sind 1, also muss auch der Grenzwert der mittleren Funktion an der Stelle  $x = 0$  gleich 1 sein:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Die Ableitung der Funktion  $y = f(x) = \sin x$  ist die Funktion  $y' = f'(x) = \cos x$ .

$$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$$

*Beweis:*

Für die Differenz  $\sin \alpha - \sin \beta$  zweier trigonometrischer Funktionen gilt  $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ . Damit folgt

$$\begin{aligned} (\sin x)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \cos \frac{x + x_0}{2} \sin \frac{x - x_0}{2}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \cos \frac{x + x_0}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} = \cos x_0, \end{aligned}$$

denn  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} = 1$ , wie oben bewiesen wurde.

$$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$$

*Beweis:*

Aus  $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$  (vgl. Abschnitt VI.1) folgt  $y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ . Anwendung der Kettenregel mit  $z = h(x) = \frac{\pi}{2} - x$  und  $y = f(z) = \sin z$  ergibt  $y' = f'(z) \cdot h'(x) = \cos z \cdot (-1) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ . Wegen  $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$  (vgl. Abschnitt VI.1) folgt die Behauptung  $y' = -\sin x$ .

$$y = \tan x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

*Beweis:*

Wegen  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  folgt mit der Quotientenregel und den Ableitungen von  $\sin x$  und  $\cos x$ :

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$$y = \cot x \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

*Beweis:*

Wegen  $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$  folgt

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\sin x \cdot (-\sin x) - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} \\ &= -\frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

## 4.5.2 Logarithmusfunktionen

Der Grenzwert der Zahlenfolge  $(a_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  heißt Eulersche Zahl (Name nach dem schweizerischen Mathematiker Leonhard Euler, 1707–1783) und wird mit dem Buchstaben  $e$  bezeichnet.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718\,281\,8284\dots$$

Die Eulersche Zahl ist eine irrationale Zahl; sie ist Basis der natürlichen Logarithmen (vgl. Abschnitt I.8.2).

Mit Hilfe dieses Grenzwertes lassen sich die Ableitungen der Logarithmusfunktionen  $y = \log_a x$  berechnen. Es ergibt sich mit den Regeln der Logarithmenrechnung (siehe Abschnitt I.8.3)

$$\begin{aligned} (\log_a x)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\log_a x - \log_a x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x - x_0} \log_a \frac{x}{x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x_0} \frac{x_0}{x - x_0} \log_a \left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x_0} \log_a \left(1 + \frac{1}{\frac{x_0}{x - x_0}}\right)^{\frac{x_0}{x - x_0}} \\ &= \frac{1}{x_0} \log_a \lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + \frac{1}{\frac{x_0}{x - x_0}}\right)^{\frac{x_0}{x - x_0}} = \frac{1}{x_0} \log_a e \end{aligned}$$

Bei der vorletzten Umformung wurde (der hier nicht hergeleitete) Satz benutzt, dass der Grenzwert des Logarithmus gleich dem Logarithmus des Grenzwertes ist. Wegen  $\log_a e = \frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}$  (vgl. Abschnitt I.8.4) ergibt sich

$$y = \log_a x \Rightarrow y' = \log_a e \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

Für die natürliche Logarithmusfunktion mit der Basis  $a = e$  folgt

$$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

## 4.5.3 Exponentialfunktionen

Die  $e$ -Funktion ist die Umkehrfunktion der natürlichen Logarithmusfunktion. Nach der Regel zur Berechnung der Ableitung der Umkehrfunktion

(siehe Abschnitt VIII.4.2) folgt  $\frac{d}{dx} e^x = \frac{1}{\frac{d}{dx} \ln x} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$  wegen  $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$ .

$$y = e^x \Rightarrow y' = e^x$$

Daraus folgt unmittelbar  $f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = \dots = e^x$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Die  $e$ -Funktion hat also die bemerkenswerte Eigenschaft, dass sie mit allen ihren Ableitungen übereinstimmt.

Für die allgemeine Exponentialfunktion gilt

$$y = a^x \Rightarrow y' = a^x \cdot \ln a$$

*Beweis:*

Wegen  $a^x = e^{x \cdot \ln a}$  (vgl. Abschnitt V.7.1) ergibt sich aus der Ableitung der  $e$ -Funktion zusammen mit der Kettenregel  $y' = (a^x)' = (e^{x \cdot \ln a})' = e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$ .

#### 4.5.4 Zusammenfassende Übersicht

##### Trigonometrische Funktionen

$$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$$

$$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$$

$$y = \tan x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \left(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$y = \cot x \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

##### Exponentialfunktionen

$$y = e^x \Rightarrow y' = e^x = y$$

$$y = a^x \Rightarrow y' = a^x \ln a \quad (a \in \mathbb{R}, a > 0 \text{ konstant})$$

##### Logarithmusfunktionen

$$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

$$y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

$$(a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1 \text{ konstant}, x > 0)$$

#### 4.6 Sekanten und Tangenten

Eine Sekante ist eine Gerade, die eine Kurve, also den Graph einer Funktion  $y = f(x)$ , in (mindestens) zwei Punkten schneidet (Sekante = Schneidende). Der Teil zwischen den Schnittpunkten heißt Sehne. Die Gleichung der Sekante durch die Punkte  $P_1(x_1 | f(x_1))$  und  $P_2(x_2 | f(x_2))$  lautet

$$y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1) + f(x_1)$$

##### ■ Beispiele:

$$1. f(x) = x^2, P_1(0 | 0), P_2(1 | 1)$$

Die Gleichung der Sekante durch die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  lautet

$$y = \frac{1-0}{1-0} (x-0) + 0, \text{ also } y = x.$$

$$2. f(x) = x^3 - 2x + 1, P_1(-1 | 2), P_2(2 | 5)$$

Die Gleichung der Sekante durch die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  lautet

$$y = \frac{5-2}{2-(-1)} (x - (-1)) + 2 = x + 3.$$

Eine Tangente ist eine Gerade, die den Graph einer Funktion  $y = f(x)$  in einem Punkt berührt, aber nicht schneidet (Tangente = Berührende).

Die Funktion  $f(x)$  hat in dem Punkt  $P(a | f(a))$  genau dann eine Tangente, wenn die Funktion in  $a$  differenzierbar ist. Die Ableitung der Funktion an der Stelle, also  $f'(a)$ , ist die Steigung der Tangente. Die Gleichung der Tangente an die Kurve im Punkt  $P(a | f(a))$  lautet

$$y = f'(a) (x - a) + f(a)$$

##### ■ Beispiele:

$$1. f(x) = x^2, P(1 | 1)$$

$$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2$$

Die Gleichung der Tangente an die Kurve im Punkt  $P(1 | 1)$  lautet somit  $y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$ .

$$2. f(x) = x^3 - 2x + 1, P(1 | 0)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \Rightarrow f'(1) = 1$$

Die Gleichung der Tangente an die Kurve im Punkt  $P(1 | 0)$  lautet somit  $y = 1 \cdot (x - 1) + 0 = x - 1$ .

#### 4.7 Extremwerte von Funktionen

Eine Funktion  $y = f(x)$  besitzt an der Stelle  $x = a$  ein relatives Maximum, wenn es eine Umgebung von  $a$  gibt, in der alle Funktionswerte kleiner als an der Stelle  $x = a$  sind. Dieser Funktionswert  $f(a)$  heißt relatives Maximum. Es gilt dann  $f(x) < f(a)$  für alle  $x \neq a$  aus einer passenden Umgebung von  $a$ . Alle benachbarten Funktionswerte sind also kleiner als  $f(a)$ .

Relatives Maximum  $f(a)$

$$f(x) < f(a) \quad \text{für } x \neq a$$

Entsprechend besitzt eine Funktion  $y = f(x)$  an der Stelle  $x = a$  ein relatives Minimum, wenn es eine Umgebung von  $a$  gibt, in der alle Funktionswerte größer als an der Stelle  $x = a$  sind. Der Funktionswert  $f(a)$  heißt dann relatives Minimum. Für ein relatives Minimum gilt analog  $f(x) > f(a)$  für alle  $x \neq a$  aus einer geeigneten Umgebung von  $a$ . Alle benachbarten Funktionswerte sind also größer als  $f(a)$ .

Relatives Minimum  $f(a)$

$$f(x) > f(a) \quad \text{für } x \neq a$$

Es handelt sich bei einem relativen Maximum oder einem relativen Minimum um eine lokale Eigenschaft, denn es wird nur eine Umgebung von  $x = a$  betrachtet.

Das absolute oder globale Maximum einer Funktion  $y = f(x)$ , die in einem abgeschlossenen Intervall  $[c, d]$  differenzierbar ist, ist entweder ein relatives Maximum, oder es wird am Rand, also für  $x = c$  oder  $x = d$ , angenommen. Entsprechend ist das absolute oder globale Minimum ein relatives Minimum, oder es wird an einem der Intervallränder  $x = c$  oder  $x = d$  angenommen.

Ein Extremwert einer Funktion ist ein Funktionswert  $f(a)$ , der ein relatives Minimum oder ein relatives Maximum ist. Statt Extremwert sagt man auch Extremum oder relatives Extremum.

Eine notwendige Bedingung dafür, dass die Funktion  $y = f(x)$  an der Stelle  $x = a$  ein relatives Extremum besitzt, ist das Verschwinden der Ableitung an dieser Stelle, also  $f'(a) = 0$  (falls sie existiert). Zur Bestimmung der relativen Extrema müssen alle  $x$  berechnet werden, die die Gleichung  $f'(x) = 0$  erfüllen.

Eine hinreichende Bedingung für ein relatives Extremum (das heißt, ist die Bedingung erfüllt, dann liegt ein relatives Extremum vor) ist, dass die zweite Ableitung von Null verschieden ist, also  $f''(a) \neq 0$ . Gilt jedoch auch  $f''(a) = 0$ , so ist  $f(a)$  ein relatives Extremum, wenn es ein gerades  $n$  gibt, so dass  $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$ ,  $f^{(n)}(a) \neq 0$  ( $n$  gerade). Ein Extremum liegt vor, wenn die erste an der Stelle  $a$  nicht verschwindende Ableitung von gerader Ordnung ist.

Dieses relative Extremum ist ein relatives Minimum, wenn im ersten Fall  $f''(a) > 0$  und im zweiten Fall  $f^{(n)}(a) > 0$  gilt. Das relative Extremum ist ein relatives

ves Maximum, wenn im ersten Fall  $f''(a) < 0$  und im zweiten Fall  $f^{(n)}(a) < 0$  gilt.

Geometrisch bedeutet  $f'(a) = 0$ , dass die Tangente an die Kurve der Funktion im Punkt  $P(a|f(a))$  waagerecht, also parallel zur  $x$ -Achse, verläuft.

#### ■ Beispiele:

- $f(x) = x^2$   
 $f'(x) = 2x$ ,  $f''(x) = 2$   
 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$   
 $f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow f(0) = 0$  ist ein relatives Minimum von  $y = f(x)$
- $f(x) = -x^4 + 1$   
 $f'(x) = -4x^3$ ,  $f''(x) = -12x^2$ ,  $f'''(x) = -24x$ ,  $f^{(4)}(x) = -24$   
 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$   
 $f''(0) = f'''(0) = 0$ ,  $f^{(4)}(0) = -24 < 0 \Rightarrow f(0) = 0$  ist ein relatives Maximum von  $y = f(x)$
- $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x(x-2)^2$   
 $f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$ ,  $f''(x) = 6x - 8$   
 $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = \frac{2}{3}$   
 $f''(2) = 4 > 0$ ,  $f''(\frac{2}{3}) = -4 < 0 \Rightarrow f(x_1) = f(2) = 0$  ist ein relatives Minimum und  $f(x_2) = f(\frac{2}{3}) = \frac{32}{27}$  ist ein relatives Maximum von  $y = f(x)$
- $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$   
 $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$ ,  $f''(x) = 6x - 6$ ,  $f'''(x) = 6$   
 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$   
 $f''(1) = 0$ ,  $f'''(1) = 6 \Rightarrow f(x)$  besitzt kein relatives Extremum, bei  $x = 1$  liegt der Sattelpunkt  $P = (1|1)$ , also ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente (vgl. Abschnitt VIII.4.8).

### 4.8 Krümmungsverhalten von Funktionen

Das Krümmungsverhalten einer Funktion ist die Verteilung von konvexen und konkaven Bereichen der Kurve der Funktion.

Eine Funktion  $y = f(x)$  heißt an der Stelle  $x = a$  von unten konvex, wenn alle Punkte der Kurve der Funktion in einer Umgebung von  $a$  oberhalb der Tangente im Punkt  $P(a|f(a))$  liegen.

In einem von unten konvexen Bereich ist die Ableitungsfunktion  $y' = f'(x)$  monoton wachsend. Die Funktion  $y = f(x)$  hat dort eine Linkskrümmung (der Graph macht in  $x$ -Richtung eine Linkskurve). Existiert in dem Bereich auch die zweite Ableitung  $f''(x)$ , so ist die Kurve konvex, wenn  $f''(x) \geq 0$  gilt.

Entsprechend heißt die Funktion an der Stelle  $x = a$  von unten konkav (oder von oben konvex), wenn alle Punkte der Kurve der Funktion in einer Umgebung von  $a$  unterhalb der Tangente im Punkt  $P(a|f(a))$  liegen.

In einem von unten konkaven Bereich ist die Ableitungsfunktion  $y' = f'(x)$  monoton fallend. Die Funktion  $y = f(x)$  hat dort eine Rechtskrümmung (der Graph macht in  $x$ -Richtung eine Rechtskurve). Existiert in dem Bereich auch die zweite Ableitung  $f''(x)$ , so ist die Kurve konkav, wenn  $f''(x) \leq 0$  gilt.

Die Krümmung einer Funktion ist die Abweichung der Kurve der Funktion von der Geraden.

Die Krümmung der Kurve der Funktion  $y = f(x)$  im Punkt  $P(x|y)$  ist definiert als der Grenzwert  $\kappa$  des Quotienten aus der Differenz der Steigungswinkel  $\alpha_1, \alpha$  der Tangenten durch einen Punkt  $P_1$  und durch

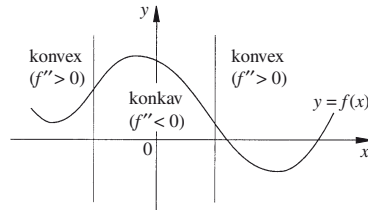


Bild VIII-8 Konkave und konvexe Bereiche der Funktion  $y = f(x)$

$P$  an die Kurve und der Länge  $\Delta s$  des Kurvenbogens zwischen den Punkten (falls der Grenzwert existiert):

$$\kappa = \lim_{P_1 \rightarrow P} \frac{\alpha_1 - \alpha}{\Delta s} = \lim_{P_1 \rightarrow P} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}$$

Die Krümmung einer Funktion ist in einem konvexen Bereich (Linkskurve) positiv, in einem konkaven Bereich (Rechtskurve) negativ. Für eine Gerade gilt  $\kappa = 0$ .

Mit Hilfe der Kettenregel berechnet man für die Krümmung in einen Punkt  $P(x|y)$  der Funktion  $y = f(x)$ :

$$\kappa = \frac{f''(x)}{[1 + f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{f''(x)}{[\sqrt{1 + f'^2(x)}]^3}$$

Für  $\kappa \neq 0$  heißt  $\varrho = \frac{1}{|\kappa|}$  Krümmungsradius und der Kreis mit diesem Radius Krümmungskreis der Kurve im Punkt  $P(x|y)$ .

#### ■ Beispiel:

$$f(x) = 3x^3 - 1$$

$$f'(x) = 9x^2, f''(x) = 18x$$

$$\text{Es folgt: } \kappa = \frac{18x}{(1 + 81x^4)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{Krümmung im Punkt } P(1|2) \text{ zum Beispiel: } \kappa = \frac{18}{82^{\frac{3}{2}}} \approx 0,0242$$

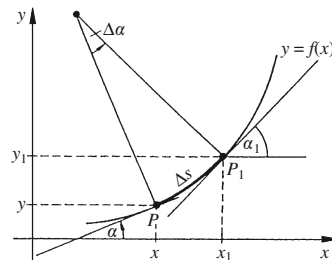


Bild VIII-9: Zur Definition der Krümmung einer Kurve

### 4.9 Wendepunkte von Funktionen

Ein Wendepunkt einer Funktion  $y = f(x)$  ist ein Punkt  $P(a|f(a))$ , in dem sich das Krümmungsverhalten der Kurve ändert. In einem Wendepunkt findet der Übergang von einem konvexen zu einem

konkaven Bereich oder umgekehrt statt. Die Kurve liegt in der unmittelbaren Nähe eines Wendepunktes nicht auf einer Seite der Tangente, sondern wird von dieser durchsetzt.

Eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Wendepunktes  $P(a|f(a))$  einer Funktion  $y = f(x)$  ist das Verschwinden der zweiten Ableitung im Wendepunkt, also  $f''(a) = 0$  (falls sie existiert). Zur Bestimmung der Wendepunkte müssen alle  $x$  berechnet werden, die die Gleichung  $f''(x) = 0$  erfüllen.

Eine hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt ist, dass die dritte Ableitung von Null verschieden ist, also  $f'''(a) \neq 0$ . Gilt jedoch auch  $f'''(a) = 0$ , so hat  $f(x)$  an der Stelle  $a$  einen Wendepunkt, wenn es ein ungerades  $n$  gibt, so dass  $f''(a) = f'''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$ ,  $f^{(n)}(a) \neq 0$  ( $n$  ungerade). Ein Wendepunkt liegt vor, wenn die erste an der Stelle  $a$  nicht verschwindende Ableitung von ungerader Ordnung ist.

Falls in einem Wendepunkt  $P(a|f(a))$  auch noch die erste Ableitung verschwindet, wenn also zusätzlich  $f'(a) = 0$  gilt, dann ist dort die Tangente waagerecht. Ein solcher Wendepunkt heißt Sattelpunkt.

#### ■ Beispiele:

- $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x(x-2)^2$   
 $f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$ ,  $f''(x) = 6x - 8$ ,  $f'''(x) = 6$   
 $f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$   
 $f'''(\frac{4}{3}) = 6 \neq 0 \Rightarrow$  bei  $x = \frac{4}{3}$  liegt der Wendepunkt  
 $P = \left(\frac{4}{3} \mid f\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \left(\frac{4}{3} \mid \frac{16}{27}\right)$
- $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$   
 $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$ ,  $f''(x) = 6x - 6$ ,  $f'''(x) = 6$   
 $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1$   
 $f'''(1) = 6 \neq 0 \Rightarrow f(x)$  besitzt bei  $x = 1$  einen Wendepunkt  
 Da auch  $f'(1) = 0$  gilt, ist dort die Tangente waagerecht, und somit ist  $P = (1|1)$  ein Sattelpunkt.
- $f(x) = -x^5$   
 $f'(x) = -5x^4$ ,  $f''(x) = -20x^3$ ,  $f'''(x) = -60x^2$ ,  
 $f^{(4)}(x) = -120x$ ,  $f^{(5)}(x) = -120$   
 $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$   
 $f'''(0) = f^{(4)}(0) = 0$ ,  $f^{(5)}(0) = -120 \neq 0$   
 $\Rightarrow f(x)$  besitzt bei  $x = 0$  einen Wendepunkt  
 Da auch  $f'(0) = 0$  gilt, ist dort die Tangente waagerecht, und somit ist  $P = (0|0)$  ein Sattelpunkt.

## 4.10 Kurvendiskussion

Eine Kurvendiskussion ist die Untersuchung einer Funktion  $y = f(x)$  bzw. des Graphen der Funktion auf typische Eigenschaften. Dazu gehören die Untersuchung auf Symmetrie und Monotonie sowie die Bestimmung von Definitionsbereich, Nullstellen, relativen Extrema, Wendepunkten, Unstetigkeitsstellen und Asymptoten.

#### ■ Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{2}x(x-2)^3$$

Ableitungen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}(x-2)^3 + \frac{3}{2}x(x-2)^2 \\ &= \frac{1}{2}(x-2)^2(x-2+3x) = (x-2)^2(2x-1) \\ f''(x) &= 2(x-2)(2x-1) + 2(x-2)^2 \\ &= (x-2)(4x-2+2x-4) = 6(x-1)(x-2) \\ f'''(x) &= 6(x-1) + 6(x-2) = 6(2x-3) \end{aligned}$$

Definitionsbereich:

$$D = \mathbb{R}$$

Nullstellen:

$$f(x) = \frac{1}{2}x(x-2)^3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$$

Relative Extremwerte:

$$f'(x) = (x-2)^2(2x-1) = 0 \Rightarrow x_3 = 2, x_4 = \frac{1}{2}$$

$f''(x_3) = f''(2) = 0$ ,  $f''(x_4) = f''(\frac{1}{2}) = 6 > 0$  ( $n$  ungerade)  $\Rightarrow$  bei  $x_3 = 2$  Wendepunkt; wegen  $f'(2) = 0$  ist  $P(2|0)$  ein Sattelpunkt

$$f''(x_4) = f''\left(\frac{1}{2}\right) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} > 0$$

$\Rightarrow$  Minimum bei  $x_4 = \frac{1}{2}$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 6(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x_5 = 1, x_6 = x_3 = 2$$

$$f'''(x_5) = f'''(1) \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_5 = 1$$

Sattelpunkt bei  $x_6 = x_3 = 2$  (siehe oben)

Zusammenfassung:

Die Funktion  $f(x) = \frac{1}{2}x(x-2)^3$  hat die Nullstellen  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 2$ , das relative Minimum  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{32}$ , den Wendepunkt  $P\left(1 \mid -\frac{1}{2}\right)$  (denn  $f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (-1)^3 = -\frac{1}{2}$ ) und den Sattelpunkt  $P(2|0)$ . Die Funktion besitzt keine Unstetigkeitsstellen und Asymptoten, sie ist weder zur  $y$ -Achse noch zum Koordinatenursprung symmetrisch. Die Funktion ist streng monoton fallend im Intervall  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$  und streng monoton wachsend im Intervall  $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ .

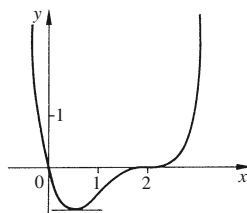


Bild VIII-10 Graph der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}x(x-2)^3$$

## 4.11 Anwendungsbeispiele

- Ein halbrunder Balken soll so besäumt werden, dass ein rechteckiger Balken mit maximalem Widerstandsmoment  $W$  entsteht.

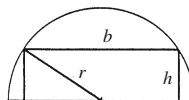


Bild VIII-11 Zu Anwendungsbeispiel 1

Die Gleichung für das Widerstandsmoment lautet:

$$(1) \quad W = \frac{hb^2}{6}$$

Nach dem Satz des Pythagoras gilt für die Beziehung zwischen  $b$  und  $h$ :

$$(2) \quad \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2 = r^2$$

Auflösen von Gleichung (2) nach  $b^2$ :

$$b^2 = 4(r^2 - h^2)$$

Einsetzen in (1):

$$W = \frac{h}{6} \cdot 4(r^2 - h^2) = \frac{2}{3} (r^2 h - h^3)$$

Da  $r$  eine feste Größe ist, hängt  $W$  nur von  $h$  ab, das heißt,  $W$  ist eine Funktion von  $h$ :  $W = W(h)$ . Notwendige Voraussetzung für ein Maximum von  $W$  ist das Verschwinden der Ableitung:  $W' = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Berechnung der Ableitung: } W'(h) &= \frac{2}{3} (r^2 - 3h^2) \\ W'(h) = 0 &\Rightarrow \frac{2}{3} (r^2 - 3h^2) = 0 \Rightarrow r^2 - 3h^2 = 0 \\ &\Rightarrow h = \frac{1}{3} r \sqrt{3} \end{aligned}$$

(Da die Höhe  $h$  nicht negativ sein kann, kommt für das Maximum nur das positive Vorzeichen in Frage.) Wegen  $W''(h) = -4h$  ist für  $h = \frac{1}{3} r \sqrt{3}$  die zweite Ableitung negativ, es liegt also ein Maximum vor.

Ergebnis:

$$h = \frac{1}{3} r \sqrt{3} \text{ und } b = \frac{2}{3} r \sqrt{6} \text{ sind die Abmessungen für das maximale Widerstandsmoment, es beträgt } W = \frac{2}{9} r \sqrt{3} \left(r^2 - \frac{1}{3} r^2\right) = \frac{4}{27} r^3 \sqrt{3}.$$

2. Aus einem keiskegelförmigen Stück Holz soll ein Zylinder größtmöglichen Rauminhalts (Gewichts) gedreht werden. Welchen Radius  $x$  und welche Höhe  $y$  hat dieser Zylinder, wenn  $r$  der Radius und  $h$  die Höhe des Kegels sind?

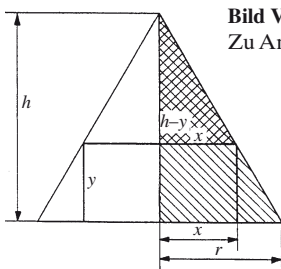


**Bild VIII-12**  
Zu Anwendungsbeispiel 2

- (1)  $V = \pi x^2 y$  Zylindervolumen  
(2)  $\frac{h-y}{x} = \frac{h}{r}$  Beziehung zwischen  $x$  und  $y$

Die Beziehung zwischen  $x$  und  $y$  folgt aus der Ähnlichkeit der schraffierten Dreiecke.

$$\text{Auflösen von (2) nach } y: y = h \left(1 - \frac{x}{r}\right)$$

Einsetzen in (1):

$$V = \pi x^2 h \left(1 - \frac{x}{r}\right) = \pi h \left(x^2 - \frac{1}{r} x^3\right)$$

$h$  ist eine feste Größe,  $V$  ist also eine Funktion der Variablen  $x$ :  $V = V(x)$ .

Berechnung der Ableitung:

$$V'(x) = \pi h \left(2x - \frac{3}{r} x^2\right)$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow \pi h \left(2x - \frac{3}{r} x^2\right) = \pi h x \left(2 - \frac{3}{r} x\right) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \text{ und } x_2 = \frac{2}{3} r$$

Wegen  $V''(x) = \pi h \left(2 - \frac{6}{r} x\right)$  gilt  $V''(x_1) > 0$  und  $V''(x_2) < 0$ , das heißt, bei  $x_1$  liegt ein Minimum und bei  $x_2$  ein Maximum vor.

Ergebnis:

$x = \frac{2}{3} r$  und  $y = \frac{1}{3} h$  sind Radius und Höhe des gesuchten Zylinders, das maximale Zylindervolumen beträgt  $V = \frac{4}{27} \pi r^2 h$ .

## 4.12 Näherungsverfahren zur Nullstellenbestimmung

In vielen Fällen ist es nicht möglich oder nicht notwendig, die Nullstellen von Funktionen exakt zu berechnen. Gerade in vielen praktischen Anwendungen genügen oftmals angenäherte Werte. Zur Bestimmung solcher sogenannten Näherungslösungen gibt es eine Reihe von Näherungsverfahren.

### 4.12.1 Regula falsi

Regula falsi ist ein Verfahren zur näherungsweise Bestimmung einer Nullstelle einer stetigen Funktion. Für eine stetige Funktion  $y = f(x)$  wird eine Nullstelle, also eine Stelle  $x_0$  mit  $f(x_0) = 0$ , gesucht. Sind  $x_1$  und  $x_2$  zwei Stellen in der Nähe der Nullstelle  $x_0$ , deren Funktionswerte unterschiedliche Vorzeichen haben (also  $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$ ), dann erhält man eine bessere Näherung, indem man durch die Punkte  $P_1(x_1 | f(x_1))$  und  $P_2(x_2 | f(x_2))$  die Verbindungsgerade (Sekante) legt. Der Schnittpunkt  $x_3$  der Verbindungsgeraden mit der  $x$ -Achse liefert einen verbesserten Näherungswert für die Nullstelle  $x_0$ .

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} f(x_2)$$

Das folgt aus  $\frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)}$ , was sich mit dem zweiten Strahlensatz ergibt.

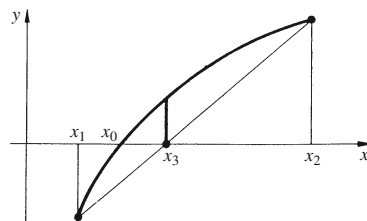


**Bild VIII-13** Regula falsi

Dieses Verfahren lässt sich zur Bestimmung immer besserer Näherungslösungen für die Nullstelle  $x_0$  beliebig oft wiederholen. Im nächsten Schritt wendet man das Verfahren auf  $x_3$  und den Wert  $x_1$  oder  $x_2$  an, dessen Funktionswert ein von  $f(x_3)$  verschiedenes Vorzeichen hat.

Diese Methode zur Bestimmung von Näherungswerten einer Nullstelle einer stetigen Funktion heißt auch Sekantenverfahren.

■ **Beispiel:**

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$$

Für  $x_1 = 1$  und  $x_2 = 1,5$  gilt  $f(x_1) = f(1) = -7$  und  $f(x_2) = f(1,5) = 2,875$ . Eine bessere Näherungslösung für die Nullstelle von  $f(x)$ , die zwischen 1 und 1,5 liegt, erhält man mit Regula falsi:

$$\begin{aligned} x_3 &= 1,5 - \frac{1,5 - 1}{2,875 - (-7)} \cdot 2,875 \\ &= 1,5 - \frac{0,5}{9,875} \cdot 2,875 = 1,3544 \dots \end{aligned}$$

Wegen  $f(x_3) = -0,3020 \dots < 0$  lässt sich im nächsten Schritt das Verfahren auf  $x_3$  und  $x_2$  anwenden:

$$\begin{aligned} x_4 &= x_3 - \frac{x_3 - x_2}{f(x_3) - f(x_2)} f(x_3) \\ &= 1,3544 \dots - \frac{1,3544 \dots - 1,5}{-0,3020 \dots - 2,875} (-0,3020 \dots) \\ &= 1,3682 \dots \end{aligned}$$

Es gilt  $f(x_4) = -0,0113 \dots$ , das heißt,  $x_4$  ist schon eine gute Näherung für die Nullstelle  $x_0$ .

Will man die Näherung weiter verbessern, so wendet man Regula falsi im nächsten Schritt auf  $x_4$  und  $x_2$  an ( $f(x_4)$  und  $f(x_3)$  haben dasselbe Vorzeichen, deshalb kann das Verfahren nicht auf  $x_4$  und  $x_3$  angewandt werden).

## 4.12.2 Newtonsches Verfahren

Das Newtonsche Verfahren ist eine Methode zur näherungsweise Bestimmung einer Nullstelle einer stetig differenzierbaren Funktion.

Bei diesem Verfahren wird die Funktion in der Nähe einer Nullstelle nicht durch eine Sekante wie bei Regula falsi, sondern durch eine Tangente ersetzt.

Für eine stetig differenzierbare Funktion  $y = f(x)$  wird eine Nullstelle, also eine Stelle  $x_0$  mit  $f(x_0) = 0$  gesucht. Ist  $x_1$  eine Stelle in der Nähe der Nullstelle  $x_0$ , dann ersetzt man die Funktion durch die Tangente in dem Punkt  $P(x_1 | f(x_1))$ . Der Schnittpunkt  $x_2$  dieser Tangente mit der  $x$ -Achse ergibt einen neuen Näherungswert für die Nullstelle  $x_0$ .

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Damit  $x_2$  tatsächlich ein besserer Näherungswert als  $x_1$  für die Nullstelle  $x_0$  ist, muss in der Umgebung

von  $x_0$  die Bedingung  $\left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| < 1$  erfüllt sein.

Dasselbe Verfahren lässt sich auch auf  $x_2$  anwenden. Man erhält als weitere Verbesserung den Wert  $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$ . Allgemein findet man durch folgen-

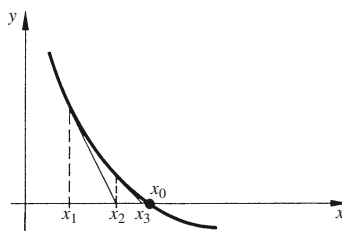


Bild VIII-14 Newtonsches Verfahren

de Iterationsvorschrift aus  $x_1$  eine Folge von verbesserten Näherungswerten  $x_2, x_3, x_4, \dots$  für die Nullstelle  $x_0$ .

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Diese Methode zur Bestimmung von Näherungswerten einer Nullstelle einer stetig differenzierbaren Funktion heißt Newtonsches Verfahren (nach dem englischen Mathematiker Isaac Newton, 1642–1727) oder auch Tangentenverfahren.

■ **Beispiel:**

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$$

Wegen  $f'(x) = 3x^2 + 4x + 10$  erhält man die Iterationsvorschrift

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 + 2x_k^2 + 10x_k - 20}{3x_k^2 + 4x_k + 10}$$

Für die Anfangsnäherung  $x_1 = 1$  gilt  $f(x_1) = f(1) = -7$ , und man berechnet

$$x_2 = 1,4117 \dots \text{ mit } f(x_2) = 0,9175 \dots,$$

$$x_3 = 1,3693 \dots \text{ mit } f(x_3) = 0,0111 \dots,$$

$$x_4 = 1,3688 \dots \text{ mit } f(x_4) = 0,000001 \dots$$

Die Zahl  $x_4$  ist also schon eine sehr gute Näherung für die Nullstelle  $x_0$ .

## 5 Integralrechnung

### 5.1 Unbestimmtes Integral

Ist  $y = f(x)$  eine Funktion mit einem Intervall  $I$  als Definitionsbereich, dann heißt eine differenzierbare Funktion  $F(x)$  mit demselben Intervall  $I$  als Definitionsbereich eine Stammfunktion von  $f(x)$ , wenn für alle  $x \in I$  gilt

$$F'(x) = f(x)$$

Die Funktion  $f(x)$  heißt dann integrierbar.

Ist  $F(x)$  eine Stammfunktion von  $f(x)$ , so ist auch  $F(x) + c$  für eine beliebige Konstante  $c$  eine Stammfunktion, denn eine additive Konstante verschwindet bei der Differentiation. Somit ist  $\{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$  die Menge aller Stammfunktionen von  $f(x)$ . Stammfunktionen sind also bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.

■ **Beispiele:**

$$1. \text{ Funktion: } f(x) = x^2 - 2x - 3$$

$$\text{Stammfunktion: } F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x, \text{ aber zum Beispiel}$$

$$\text{auch } F_1(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$$



- Funktion:  $f(x) = \sin x$   
Stammfunktion:  $F(x) = -\cos x$  oder etwa  $F_1(x) = -\cos x + 3$
- Funktionen:  $f(x) = x^k \quad (k \in \mathbb{R}, k \neq -1)$   
Stammfunktionen:  $F(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C \quad (C \in \mathbb{R})$
- Funktion:  $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$   
Stammfunktionen:  $F(x) = \ln x + C \quad (C \in \mathbb{R})$
- Funktion:  $f(x) = e^x$   
Stammfunktionen:  $f(x) = e^x + C \quad (k \in \mathbb{R})$

Die Gesamtheit aller Stammfunktionen  $F(x) + C$  heißt unbestimmtes Integral der Funktion  $y = f(x)$ , gesprochen: Integral über  $f(x) dx$  und geschrieben

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Das Zeichen  $\int$  heißt Integralzeichen, und  $f(x)$  heißt Integrand. Die Variable  $x$  nennt man Integrationsvariable und  $C$  Integrationskonstante.

Die Konstante  $C$  soll andeuten, dass  $F(x)$  durch die Funktion  $f(x)$  bis auf eine additive Konstante bestimmt ist.

■ **Beispiele:**

- $\int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 + C$
- $\int \cos x dx = \sin x + C$
- $\int (x^4 - 3x^2 + 1) dx = \frac{1}{5} x^5 - 3 \cdot \frac{1}{3} x^3 + x + C = \frac{1}{5} x^5 - x^3 + x + C$

## 5.2 Integrationsregeln

Die folgenden Integrationsregeln zur Berechnung der unbestimmten Integrale von Funktionen lassen sich durch Differentiation der entsprechenden Gleichung beweisen.

### 1. Faktorregel

Ein konstanter Faktor im Integranden kann vor das Integralzeichen gezogen werden.

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx \quad (c \in \mathbb{R})$$

■ **Beispiel:**

- $\int 3x dx = 3 \int x dx = 3 \cdot \frac{1}{2} x^2 + C = \frac{3}{2} x^2 + C$

### 2. Potenzregel

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

*Beweis:*

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \right) = x^n$$

■ **Beispiel:**

- $\int x^5 dx = \frac{1}{6} x^6 + C$

### 3. Summenregel

Das unbestimmte Integral einer Summe ist gleich

der Summe der unbestimmten Integrale (falls Stammfunktionen existieren).

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

■ **Beispiel:**

$$\begin{aligned} 3. \quad \int (4x^3 - 3x^2 + 5) dx &= \int 4x^3 dx - \int 3x^2 dx + \int 5 dx \\ &= 4 \int x^3 dx - 3 \int x^2 dx + \int 5 dx \\ &= 4 \cdot \frac{1}{4} x^4 - 3 \cdot \frac{1}{3} x^3 + 5x + C \\ &= x^4 - x^3 + 5x + C \end{aligned}$$

- Ist der Integrand ein Bruch, in dem der Zähler die Ableitung des Nenners ist, dann ist das unbestimmte Integral gleich dem natürlichen Logarithmus des Absolutbetrages der Nennerfunktion.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$

*Beweis:*

Nach der Kettenregel zur Differentiation zusammengesetzter Funktionen gilt:

$$\frac{d}{dx} (\ln f(x) + C) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

■ **Beispiel:**

$$4. \quad \int \frac{2x+3}{x^2+3x-5} dx = \ln |x^2+3x-5| + C$$

### 5. Partielle Integration

Lässt sich die Funktion  $f(x)$  als Produkt zweier Funktionen  $g(x) = u(x)$  und  $h(x) = v'(x)$  darstellen, also  $f(x) = g(x) \cdot h(x) = u(x) \cdot v'(x)$ , dann gilt

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x) dx$$

*Beweis:*

Mit der Produktregel der Differentialrechnung ergibt sich

$$\frac{d}{dx} (u(x) \cdot v(x)) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x),$$

woraus mit der Summenregel der Integralrechnung die Behauptung folgt.

Mit dieser Methode wird ein Integral der Form  $\int u(x) v'(x) dx$  auf das oft leichter berechenbare Integral  $\int u'(x) v(x) dx$  zurückgeführt.

■ **Beispiele:**

- $\int \ln x dx$   
Setzt man  $u(x) = \ln x$  und  $v'(x) = 1$ , dann ist  $u'(x) = \frac{1}{x}$  und  $v(x) = x$ , und es ergibt sich  
$$\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln x - \int dx = x \cdot \ln x - x + C$$
- $\int xe^x dx$   
Setzt man  $u(x) = x$  und  $v'(x) = e^x$ , dann ist  $u'(x) = 1$  und  $v(x) = e^x$ , und es folgt  
$$\int xe^x dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$$



7.  $\int x \cdot \cos x \, dx$

Setzt man  $u(x) = x$  und  $v'(x) = \cos x$ , dann ist  $u'(x) = 1$  und  $v(x) = \sin x$ , und es ergibt sich

$$\int x \cdot \cos x \, dx = x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x \, dx = x \cdot \sin x + \cos x + C$$

8.  $\int x^n \cdot \ln x \, dx \quad (n \in \mathbb{N})$

Setzt man  $u(x) = \ln x$  und  $v'(x) = x^n$ , dann ist  $u'(x) = \frac{1}{x}$  und  $v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ , und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \int x^n \cdot \ln x \, dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \, dx \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n \, dx \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \ln x - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} + C \end{aligned}$$

## 6. Substitutionsmethode

Durch Substitution  $x = \varphi(t)$  der unabhängigen Variablen einer Funktion  $y = f(x)$ , also Einführung einer neuen Variablen  $t$ , ergibt sich für das unbestimmte Integral

$$\int f(x) \, dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt$$

Durch geeignete Substitution kann das Integral auf der rechten Seite der Gleichung einfacher zu berechnen sein als das Ausgangsintegral  $\int f(x) \, dx$ . Die Substitution muss so gewählt sein, dass  $x = \varphi(t)$  nach  $t$  differenzierbar ist.

### Beispiele:

9.  $\int \frac{dx}{(2+3x)^2}$

Substituiert man  $2+3x = t$ , also  $x = \varphi(t) = \frac{t-2}{3}$ , dann ist  $\varphi'(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}$  oder  $dx = \frac{dt}{3}$ , und es ergibt sich

$$\int \frac{dx}{(2+3x)^2} = \int \frac{1}{t^2} \cdot \frac{dt}{3} = -\frac{1}{3t} + C = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2+3x} + C$$

10.  $\int (1+x)^n \, dx \quad (n \in \mathbb{N})$

Substituiert man  $x = \varphi(t) = t-1$ , dann ist  $\varphi'(t) = \frac{dx}{dt} = 1$ , also  $dx = dt$ , und es ergibt sich

$$\int (1+x)^n \, dx = \int t^n \, dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C = \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} + C$$

11.  $\int (x^2+7)^8 \cdot x \, dx$

Substituiert man  $x^2+7 = t$ , also  $x = \varphi(t) = \sqrt{t-7}$ , dann

ist nach der Kettenregel  $\varphi'(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t-7}} \cdot 1$  oder  $dx = \frac{dt}{2 \cdot \sqrt{t-7}}$ , und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \int (x^2+7)^8 \cdot x \, dx &= \int t^8 \cdot \sqrt{t-7} \cdot \frac{dt}{2 \cdot \sqrt{t-7}} = \frac{1}{2} \int t^8 \, dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \cdot t^9 + C = \frac{1}{18} (x^2+7)^9 + C \end{aligned}$$

Das letzte Integral lässt sich noch einfacher berechnen, wenn man die obige Substitutionsgleichung von rechts nach links liest (mit der Substitution  $u = \varphi(x)$ ).

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx = \int f(u) \, du$$

### Beispiel:

11.  $\int (x^2+7)^8 \cdot x \, dx = \frac{1}{2} \int u^8 \, du = \frac{1}{18} u^9 + C$   
 $= \frac{1}{18} (x^2+7)^9 + C$

mit der Substitution  $u = x^2+7$ , woraus  $du = 2x \, dx$  folgt.

### Spezialfall

$$\int [f(x)]^n \cdot f'(x) \, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

### Beispiel:

12.  $\int \cos^5 x \cdot \sin x \, dx = - \int \cos^5 x \cdot (-\sin x) \, dx$   
 $= -\frac{1}{6} \cos^6 x + C$

## 7. Partialbruchzerlegung

Die Integration gebrochener rationaler Funktionen  $y = f(x)$  mit

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

wird oftmals durch eine Partialbruchzerlegung von  $f(x)$  (siehe Abschnitt V.5.2) einfacher oder überhaupt erst möglich.

### Beispiele:

13.  $\int \frac{6x^2 - x + 1}{x^3 - x} \, dx$

Partialbruchzerlegung der Funktion liefert (vgl. Abschnitt V.5.2, Beispiel 3):

$$\frac{6x^2 - x + 1}{x^3 - x} = \frac{1}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{4}{x+1}$$

Mit der Summenregel folgt:

$$\begin{aligned} \int \frac{6x^2 - x + 1}{x^3 - x} \, dx &= \int \frac{1}{x} \, dx + \int \frac{3}{x-1} \, dx + \int \frac{4}{x+1} \, dx \\ &= \ln|x| + 3 \ln|x-1| + 4 \ln|x+1| + C \end{aligned}$$

14.  $\int \frac{3x^2 - x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} \, dx$

Durch Partialbruchzerlegung erhält man (vgl. Abschnitt V.5.2, Beispiel 2):

$$\frac{3x^2 - x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}$$

Daraus errechnet sich das unbestimmte Integral der Funktion:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 - x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} \, dx &= \int \frac{1}{x} \, dx + \int \frac{2}{x-1} \, dx + \int \frac{3}{(x-1)^2} \, dx \\ &= \ln|x| + 2 \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + C \end{aligned}$$

15.  $\int \frac{12x^3 - 27x^2 - 8x + 37}{3x^2 - 3x - 6} \, dx$

Polynomdivision ergibt für den Integranden:

$$\frac{12x^3 - 27x^2 - 8x + 37}{3x^2 - 3x - 6} = 4x - 5 + \frac{x+7}{3(x^2-x-2)}$$

Nullstellen des Nenners:  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -1$

Zerlegung des Nennerpolynoms:

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

Ansatz zur Zerlegung des Bruches in Partialbrüche:

$$\frac{x+7}{3(x^2-x-2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner:

$$\begin{aligned} x+7 &= 3A(x+1) + 3B(x-2) \\ &= (3A+3B)x + (3A-6B) \end{aligned}$$

Vergleich der Koeffizienten von  $x$  und der Absolutglieder:

$$1 = 3A + 3B, \quad 7 = 3A - 6B$$

Lösung dieses Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und zwei Variablen  $A$  und  $B$ :

$$A = 1, \quad B = -\frac{2}{3}$$

Damit ergibt sich für das unbestimmte Integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{12x^3 - 27x^2 - 8x + 37}{3x^2 - 3x - 6} \, dx &= \int 4x \, dx - \int 5 \, dx + \int \frac{1}{x-2} \, dx \\ &\quad - \int \frac{2}{3(x+1)} \, dx = 2x^2 - 5x + \ln|x-2| - \frac{2}{3} \ln|x+1| + C \end{aligned}$$

### 5.3 Unbestimmte Integrale einiger algebraischer Funktionen

Mit den Integrationsregeln aus Abschnitt VIII.5.2 lassen sich die unbestimmten Integrale von algebraischen Funktionen berechnen.

#### Rationale Funktionen

$$\begin{aligned}\int a \, dx &= ax + C \\ \int x \, dx &= \frac{1}{2} x^2 + C \\ \int x^n \, dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \\ \int (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) \, dx \\ &= \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \dots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + C \\ \int \frac{1}{x} \, dx &= \ln|x| + C \\ \int \frac{1}{x^n} \, dx &= -\frac{1}{n-1} \frac{1}{x^{n-1}} + C \quad (n \neq 1) \\ \int \frac{x^m}{x^n} \, dx &= \frac{1}{m-n+1} \frac{x^{m+1}}{x^n} + C \quad (n \neq m+1)\end{aligned}$$

#### Irrationale Funktionen

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x} \, dx &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C \\ \int \sqrt[n]{x} \, dx &= \frac{n}{n+1} \frac{\sqrt[n]{x^{n+1}}}{\sqrt[n]{x}} + C \\ \int \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x}} \, dx &= \frac{mn}{n-m+mn} \frac{\sqrt[n]{x^{m+1}}}{\sqrt[n]{x}} + C\end{aligned}$$

### 5.4 Unbestimmte Integrale einiger transzendenter Funktionen

Auch für einige transzendente Funktionen lassen sich die unbestimmten Integrale mit den Integrationsregeln aus Abschnitt VIII.5.2 berechnen.

#### Trigonometrische Funktionen

$$\begin{aligned}\int \sin x \, dx &= -\cos x + C \\ \int \cos x \, dx &= \sin x + C \\ \int \tan x \, dx &= -\ln|\cos x| + C \\ \int \cot x \, dx &= \ln|\sin x| + C \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx &= \tan x + C \quad \left(x \neq (2k+1) \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right) \\ \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx &= -\cot x + C \quad (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})\end{aligned}$$

#### Exponentialfunktionen

$$\begin{aligned}\int e^x \, dx &= e^x + C \\ \int a^x \, dx &= \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + C \quad (a \in \mathbb{R}, a > 0 \text{ konstant})\end{aligned}$$

#### Logarithmusfunktionen

$$\begin{aligned}\int \ln x \, dx &= x \cdot (\ln x - 1) + C \quad (x > 0) \\ \int \log_a x \, dx &= \frac{1}{\ln a} \cdot x \cdot (\ln x - 1) + C \\ &\quad (a \in \mathbb{R}, a > 0 \text{ konstant}, x > 0)\end{aligned}$$

### 5.5 Bestimmtes Integral

Ist  $y = f(x)$  eine beschränkte Funktion mit einem abgeschlossenen Intervall als Definitionsbereich, also  $D = [a, b]$ , dann ist das bestimmte Integral von  $f(x)$  definiert durch  $\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$ , falls dieser Grenzwert existiert und unabhängig von der Wahl der Zahlen  $x_k$  und  $\xi_k$  ist (gesprochen: Integral von  $a$  bis  $b$  über  $f(x) \, dx$ ). Dabei ist  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  eine Einteilung (Zerlegung) des Intervalls  $[a, b]$  mit  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$  und  $\xi_k, k = 1, 2, \dots, n$ , ein beliebiger Zwischenpunkt mit  $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ .

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

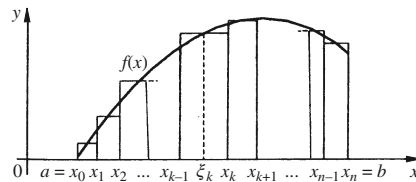


**Bild VIII-15** Zur Definition des bestimmten Integrals

Die Funktion  $f(x)$  heißt dann im Intervall  $[a, b]$  integrierbar. Das Zeichen  $\int$  heißt Integralzeichen. Man nennt  $a$  die untere Integrationsgrenze,  $b$  die obere Integrationsgrenze,  $f(x)$  den Integranden und  $x$  die Integrationsvariable.

Diese Integraldefinition geht auf Bernhard Riemann zurück (deutscher Mathematiker, 1826–1866).

Gilt  $f(x) \geq 0$  für alle  $x \in [a, b]$ , dann ist  $\int_a^b f(x) \, dx$

gleich dem Inhalt des von der Kurve (Graph der Funktion  $y = f(x)$ ) und der  $x$ -Achse zwischen  $x = a$  und  $x = b$  berandeten Fläche. Für  $f(x) \leq 0$  für alle

$x \in [a, b]$  ist  $\int_a^b f(x) \, dx$  der negative Flächeninhalt.

Besitzt  $y = f(x)$  in  $[a, b]$  Nullstellen, so ist  $\int_a^b f(x) \, dx$  die Differenz der Flächeninhalte oberhalb („+“) und unterhalb („–“) der  $x$ -Achse.

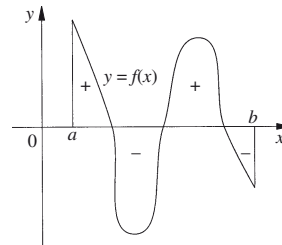


**Bild VIII-16** Bestimmtes Integral

Existenz des bestimmten Integrals:

Jede in einem Intervall  $[a, b]$  stetige Funktion ist dort auch integrierbar. Auch jede im Intervall  $[a, b]$  beschränkte Funktion, die in  $[a, b]$  nur endlich viele Unstetigkeitsstellen besitzt, ist in diesem Intervall integrierbar.

#### ■ Beispiele:

1. Für die Funktion  $f(x) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,  $D = [a, b]$  und eine beliebige Einteilung  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  des Intervalls  $[a, b]$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c \cdot \Delta x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} c \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot (b - a)$$

Also ist die Funktion  $f(x)$  im Intervall  $[a, b]$  integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b c \, dx = c \cdot (b - a)$$

2. Es sei  $f(x) = x$ ,  $D = [a, b]$ . Da  $f(x)$  stetig ist, ist  $f(x)$  in  $[a, b]$  integrierbar. Wählt man für eine Intervalleinteilung  $x_k = a + k\Delta$  mit  $\Delta = \frac{b-a}{n}$ , also  $a = x_0 < x_1 = a + \Delta < x_2 = a + 2\Delta < \dots < x_n = a + n\Delta = b$ , dann folgt  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = a + k\Delta - (a + (k-1)\Delta) = \Delta$ . Wählt man außerdem  $\xi_k = x_k$ , also  $\xi_k = a + k\Delta$ , dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k &= \sum_{k=1}^n x_k \Delta = \sum_{k=1}^n (a + k\Delta) \Delta \\ &= \sum_{k=1}^n a \cdot \Delta + \sum_{k=1}^n k \cdot \Delta^2 = a \cdot \sum_{k=1}^n 1 + \Delta^2 \sum_{k=1}^n k \\ &= a \cdot \frac{b-a}{n} \cdot n + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \cdot \frac{(n+1)n}{2} \\ &= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

denn  $\sum_{k=1}^n 1 = n$  und  $\sum_{k=1}^n k = \frac{(n+1)n}{2}$ . Für das bestimmte Integral ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \int_a^b x \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) \\ &= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}, \end{aligned}$$

denn es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1$ .

## 5.6 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefert den Zusammenhang zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral einer Funktion  $y = f(x)$ .

Ist die Funktion  $y = f(x)$  mit  $D = [a, b]$  im Intervall  $[a, b]$  integrierbar, und besitzt  $f(x)$  eine Stammfunktion  $F(x)$ , so gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

Das bestimmte Integral ist also Funktionswert von  $F$  an der oberen Intervallgrenze minus Funktions-

wert von  $F$  an der unteren Intervallgrenze. Dabei ist  $F(x)$  eine beliebige Stammfunktion von  $f(x)$ .

Statt  $F(b) - F(a)$  schreibt man auch

$$F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = F(x) \Big|_a^b.$$

Mit diesem Satz wird die Berechnung des bestimmten Integrals einer Funktion auf die Berechnung einer Stammfunktion der Funktion zurückgeführt. Der Satz stellt somit den Zusammenhang zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integral einer Funktion  $y = f(x)$  her. Er wurde von Gottfried Wilhelm Leibniz (deutscher Mathematiker, 1646–1716) und Isaac Newton (englischer Mathematiker, 1642–1727) entdeckt.

#### ■ Beispiele:

1.  $\int_a^b x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_a^b = \frac{1}{2} (b^2 - a^2)$
2.  $\int_1^3 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^3 = \ln 3$
3.  $\int_1^5 x^3 \, dx = \frac{1}{4} x^4 \Big|_1^5 = \frac{1}{4} 5^4 - \frac{1}{4} 1^4 = \frac{5^4 - 1}{4} = 156$
4.  $\int_0^\pi \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$
5.  $\int_0^{2\pi} \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^{2\pi} = \sin 2\pi - \sin 0 = 0$

## 5.7 Eigenschaften des bestimmten Integrals

Die folgenden Eigenschaften zur Berechnung des bestimmten Integrals einer Funktion lassen sich mit Hilfe der Definition beweisen.

1. Vertauschung der Integrationsgrenzen

$$\int_b^a f(x) \, dx = - \int_a^b f(x) \, dx$$

#### ■ Beispiel:

$$\begin{aligned} \int_2^6 x \, dx &= \frac{1}{2} x^2 \Big|_2^6 = \frac{1}{2} 6^2 - \frac{1}{2} 2^2 = 18 - 2 = 16 \\ - \int_6^2 x \, dx &= - \frac{1}{2} x^2 \Big|_6^2 = - \left( \frac{1}{2} 2^2 - \frac{1}{2} 6^2 \right) = -(2 - 18) = 16 \end{aligned}$$

2. Zusammenfassen der Integrationsintervalle

$$\int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx$$

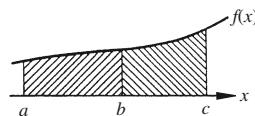


Bild VIII-17 Zusammenfassen der Integrationsintervalle

■ **Beispiel:**

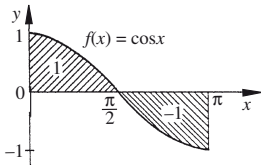
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx$$

Einzelberechnung der Integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx = \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$$

$$\int_0^{\pi} \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^{\pi} = \sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} = 0 - 1 = -1$$

Bild VIII-18  $\int_0^{\pi} \cos x \, dx = 0$ 

## 3. Gleiche untere und obere Integrationsgrenze

$$\int_a^a f(x) \, dx = 0$$

■ **Beispiel:**

$$\int_3^3 x^3 \, dx = \frac{1}{4} x^4 \Big|_3^3 = \frac{1}{4} 3^4 - \frac{1}{4} 3^4 = 0$$

4. Existieren die bestimmten Integrale  $\int_a^b f(x) \, dx$  und  $\int_a^b g(x) \, dx$ , so gilt für beliebige  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ 

$$\begin{aligned} \int_a^b (c_1 \cdot f(x) + c_2 \cdot g(x)) \, dx \\ = c_1 \int_a^b f(x) \, dx + c_2 \int_a^b g(x) \, dx \end{aligned}$$

■ **Beispiel:**

$$\int_1^4 (2x - 4x^3) \, dx = 2 \int_1^4 x \, dx - 4 \int_1^4 x^3 \, dx$$

Einzelberechnung der Integrale:

$$\int_1^4 (2x - 4x^3) \, dx = (x^2 - x^4) \Big|_1^4 = (4^2 - 4^4) - (1^2 - 1^4) \\ = -240 - 0 = -240$$

$$2 \int_1^4 x \, dx = 2 \left( \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^4 \right) = 2 \left( \frac{1}{2} \cdot 4^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \right) = 2 \left( 8 - \frac{1}{2} \right) = 15$$

$$\begin{aligned} -4 \int_1^4 x^3 \, dx &= -4 \left( \frac{1}{4} x^4 \Big|_1^4 \right) = -4 \left( \frac{1}{4} \cdot 4^4 - \frac{1}{4} \cdot 1^4 \right) \\ &= -4 \left( 64 - \frac{1}{4} \right) = -255 \end{aligned}$$

## 5.8 Einige Anwendungen der Integralrechnung

Es gibt sehr viele Anwendungen der Integralrechnung in der Technik und in den Ingenieurwissenschaften. Im Folgenden sind exemplarisch einige davon genannt.

**Bogenlänge**

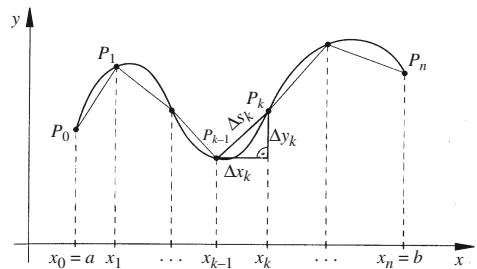
Die Länge eines Kurvenstücks bezeichnet man als Bogenlänge.

Lässt sich der Bogen durch eine stetig differenzierbare Funktion  $y = f(x)$ ,  $f: [a, b] \rightarrow W$  beschreiben, dann gilt für die Bogenlänge  $s$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx$$

**Beweis:**

Ist  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  eine Zerlegung  $Z$  des Intervalls  $[a, b]$  mit  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , dann sind  $P_k = P_k(x_k | y_k)$  mit  $y_k = f(x_k)$  Punkte des Kurvenstücks.

Bild VIII-19 Streckenzug zu einer Zerlegung  $Z$ 

Die geradlinige Verbindung dieser Punkte ergibt einen Streckenzug, dessen Länge  $s_Z$  die Summe der Längen der Teilstrecken  $\Delta s_k$  ist:

$$\begin{aligned} s_Z &= \sum_{k=1}^n \Delta s_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} \\ &= \sum_{k=1}^n \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \left( \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} \right)^2} \Delta x_k \end{aligned}$$

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung sagt aus, dass es für eine stetig differenzierbare Funktion  $y = f(x)$ ,  $f: [a, b] \rightarrow W$  mindestens eine Stelle  $\xi$  mit  $a < \xi < b$  gibt, so dass  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$ . Es folgt,

dass es in allen Intervallen  $(x_{k-1}, x_k)$  Zwischenstellen  $\xi_k$  gibt mit  $\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(\xi_k)$ . Damit folgt für die Länge  $s_Z$  des Streckenzugs  $Z$ :

$$s_Z = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \Delta x_k$$

Mit  $f'$  ist auch  $\sqrt{1 + f'^2}$  in  $[a, b]$  stetig, und somit folgt für die Bogenlänge  $s$  mit der Definition des bestimmten Integrals:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx$$

■ **Beispiel:**

Bogen:  $y = \sqrt{1 - x^2}$ ,  $D = [a, b] = [-1, 1]$  (Halbkreis)  
Bogenlänge:

$$s = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left( \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} \right)^2} \, dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = \arcsin x \Big|_{-1}^1 = \pi$$

### Volumen und Mantelfläche von Rotationskörpern

Ein Rotationskörper ist ein Körper, der entsteht, wenn die Kurve einer Funktion  $y = f(x)$  mit  $f(x) \geq 0$  um die  $x$ -Achse (Rotationsachse) zwischen  $x = a$  und  $x = b$  rotiert (oder die inverse Funktion um die  $y$ -Achse). Rotationskörper sind aus dem Alltag bekannt: Vasen, Gläser oder gedrechselte Figuren zum Beispiel.

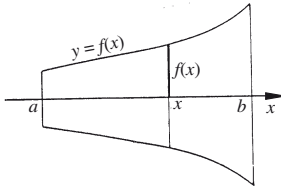


**Bild VIII-20** Rotationskörper

Ein Rotationskörper ist durch zwei Schnitte senkrecht zur Rotationsachse begrenzt. Die von der Kurve, der  $x$ -Achse und den Geraden  $x = a$  und  $x = b$  begrenzte Fläche heißt die erzeugende Fläche des Rotationskörpers.

Die Kugel ist zum Beispiel ein Rotationskörper. Sie entsteht durch Rotation eines Kreises mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung um eine der beiden Achsen. Auch gerade Kreiskegel und gerade Kreiszylinder sind Rotationskörper.

Für das Volumen  $V$  und für den Inhalt  $A_M$  der Mantelfläche eines Rotationskörpers gilt

$$\begin{aligned} \text{Volumen} \quad V &= \pi \int_a^b f^2(x) dx \\ \text{Mantelfläche} \quad A_M &= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \end{aligned}$$

#### ■ Beispiel:

Die Gleichung des oberen Halbkreises mit dem Radius  $r$  lautet (explizite Form in kartesischen Koordinaten)

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad D = [-r, r].$$

Die Ableitung dieser Funktion ist

$$y'(x) = \frac{1}{2} (-2x) \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Somit berechnet man nach den obigen Formeln für das Volumen  $V$  und die Oberfläche  $A_O$  (hier: Mantelfläche = Oberfläche) einer Kugel mit dem Radius  $r$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi \left( r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^r \\ &= 2\pi \cdot \frac{2}{3} r^3 = \frac{4}{3} \pi r^3 \\ A_O &= 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx \\ &= 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx = 4\pi \int_0^r r dx = 4\pi \cdot rx \Big|_0^r = 4\pi r^2 \end{aligned}$$

Volumen und Mantelfläche von Rotationskörpern lassen sich auch mit Hilfe der Guldinschen Regeln berechnen (benannt nach dem Mathematiker Paul Guldin, 1577–1643):

### 1. Guldinsche Regel

Das Volumen eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus dem Inhalt der auf einer Seite der Rotationsachse liegenden erzeugenden Fläche und der Länge des Weges, den der Flächenschwerpunkt bei der Rotation zurücklegt.

### 2. Guldinsche Regel

Der Inhalt der Mantelfläche eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus der Länge des auf einer Seite der Rotationsachse liegenden erzeugenden Kurvenstücks und der Länge des Weges, den der Schwerpunkt des erzeugenden Kurvenstücks bei der Rotation zurücklegt.

### Massenträgheitsmoment von Zylindern

#### 1. Definition des Massenträgheitsmoments

Dreht sich ein Massenpunkt der Masse  $m$  im Abstand  $r$  um eine Rotationsachse, so gilt für die Geschwindigkeit  $v = \omega r$ , wobei  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit ist. Für die kinetische Energie gilt:

$$W = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} (\omega r)^2$$

Betrachtet man ein System von  $n$  Massenpunkten der Massen  $\Delta m_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , die sich mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um eine Achse drehen, so gilt für die kinetische Energie:

$$W = \sum_{k=1}^n \frac{\Delta m_k (\omega r_k)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{k=1}^n r_k^2 \cdot \Delta m_k$$

Der Vergleich mit einer geradlinig bewegten Masse zeigt, dass der Geschwindigkeit  $v$  die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  entspricht und der Masse  $m$  bei der Rotation die Summe  $\sum_{k=1}^n r_k^2 \cdot \Delta m_k$ . Diese Summe wird Massenträgheitsmoment  $J$  genannt:

$$J = \sum_{k=1}^n r_k^2 \cdot \Delta m_k$$

#### 2. Massenträgheitsmoment eines Vollzylinders

Der betrachtete Vollzylinder hat die Höhe  $h$  und ist homogen, das heißt, er hat konstante Dichte  $\varrho$ , und er rotiert um die Zylinderachse.

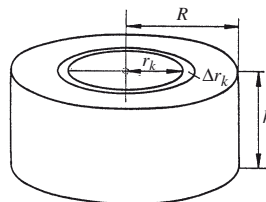


**Bild VIII-21** Zum Massenträgheitsmoment eines Vollzylinders

Denkt man sich den Zylinder in  $n$  Hohlzylinder der Dicke  $\Delta r_k$  zerlegt, dann gilt für deren Volumen  $\Delta V_k \approx 2\pi r_k \cdot \Delta r_k \cdot h$ . Ist  $\Delta r_k$  sehr klein, dann haben alle Massenpunkte eines Hohlzylinders nahezu den gleichen Abstand  $r_k$  von der Drehachse, und es gilt für das Massenträgheitsmoment  $J_V$  des Vollzylinders

$$J_V \approx \sum_{k=1}^n r_k^2 \Delta m_k = \sum_{k=1}^n r_k^2 \cdot \varrho \cdot \Delta V_k \\ \approx \varrho \sum_{k=1}^n r_k^2 \cdot 2\pi r_k \cdot \Delta r_k \cdot h = 2\pi \varrho h \sum_{k=1}^n r_k^3 \Delta r_k$$

Wählt man die Unterteilung immer feiner, also  $\Delta r_k \rightarrow 0$ , so folgt mit der Definition des bestimmten Integrals

$$J_V = 2\pi \varrho h \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n r_k^3 \Delta r_k = 2\pi \varrho h \int_0^R r^3 dr \\ = 2\pi \varrho h \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} \pi \varrho h R^4 = \frac{R^2}{2} \cdot \pi \varrho h R^2 = \frac{R^2}{2} \cdot m_V$$

$m_V = \pi \varrho h R^2$  ist die Masse des Vollzylinders

### 3. Massenträgheitsmoment eines Hohlzylinders

Das Massenträgheitsmoment  $J_H$  eines Hohlzylinders mit dem Außendurchmesser  $R_a$ , dem Innendurchmesser  $R_i$ , der Höhe  $h$  und der konstanten Dichte  $\varrho$  in bezug auf die Zylinderachse erhält man als Differenz der Trägheitsmomente zweier Vollzylinder.

$$J_H = 2\pi \varrho h \int_0^{R_a} r^3 dr - 2\pi \varrho h \int_0^{R_i} r^3 dr = 2\pi \varrho h \int_{R_i}^{R_a} r^3 dr \\ = 2\pi \varrho h \left( \frac{r^4}{4} \Big|_{R_i}^{R_a} \right) = \frac{1}{2} \pi \varrho h (R_a^4 - R_i^4) \\ = \frac{R_a^2 + R_i^2}{2} \cdot \pi \varrho h (R_a^2 - R_i^2) = \frac{R_a^2 + R_i^2}{2} \cdot m_H$$

$m_H = \pi \varrho h (R_a^2 - R_i^2)$  ist die Masse des Hohlzylinders

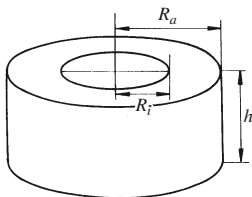


Bild VIII-22 Zum Massenträgheitsmoment eines Hohlzylinders

## 6 Funktionenreihen

Zur Untersuchung von Eigenschaften gegebener Funktionen ist es oftmals sinnvoll, eine Funktion näherungsweise durch eine unendliche Reihe darzustellen. Eine solche Darstellung heißt Entwicklung der Funktion in eine unendliche Reihe. Häufig

wählt man, gerade bei praktischen Anwendungen, als Darstellung eine Potenzreihe oder, besonders bei Funktionen, die periodische Vorgänge beschreiben, Fourier-Reihen.

### 6.1 Definitionen

Für jedes  $n = 1, 2, 3, \dots$  sei  $f_n(x)$  eine Funktion mit dem Definitionsbereich  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Die Folge dieser Funktionen heißt Funktionenfolge.

$$(f_n(x)) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots)$$

Wählt man  $x = x_0 \in D$  fest, so erhält man eine gewöhnliche Zahlenfolge  $(a_n)$  mit  $a_n = f_n(x_0)$  (vgl. Abschnitt VIII.1).

#### ■ Beispiel:

$$f_n(x) = x^n \Rightarrow \text{Funktionenfolge: } (f_n(x)) = (x^n) \\ = (x, x^2, x^3, x^4, \dots) \\ x = x_0 = 2 \Rightarrow \text{Zahlenfolge: } (2^n) = (2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots) \\ = (2, 4, 8, 16, \dots)$$

Die Konvergenz von Funktionenfolgen wird analog zur Konvergenz von Zahlenfolgen definiert:

Die Funktionenfolge  $(f_n(x))$  konvergiert in einem Bereich  $E \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$  gegen die Funktion  $f(x)$ , wenn für jedes  $x \in E$  die Folge  $(f_n(x))$  gegen den Funktionswert  $f(x)$  konvergiert. Das heißt, zu jedem  $x \in E$  lässt sich nach Vorgabe einer positiven Zahl  $\varepsilon$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  (im allgemeinen sowohl von  $x$  als auch von  $\varepsilon$  abhängig, also  $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$ ) so finden, dass für alle  $n \geq n_0$  gilt  $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ . Man nennt dieses punktweise Konvergenz der Funktionenfolge und schreibt dafür

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{für } x \in E$$

Hängt dagegen die Größe von  $n_0$  nur von  $\varepsilon$  ab und nicht auch von  $x$ , also  $n_0 = n_0(\varepsilon)$ , dann heißt die Funktionenfolge gleichmäßig konvergent in  $E$ .

Die Funktion  $f(x)$  heißt Grenzfunktion der Funktionenfolge  $(f_n(x))$ .

#### ■ Beispiel:

$$f_n(x) = x^n, \quad D = \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

Für ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  wählt man  $n_0$  so, dass  $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$  ist. Für alle  $n \geq n_0$  und für alle  $x \in D$  gilt dann:

$$|f_n(x) - 0| = x^n \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon.$$

Die Funktionenfolge ist also gleichmäßig konvergent im Definitionsbereich  $D$  mit der Grenzfunktion  $f(x) = 0$ .

Eine Funktionenreihe ist die Summe der Glieder einer Funktionenfolge  $(f_n(x))$ .

Funktionenreihe

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

Die folgenden Summen heißen Partialsummen der Funktionenreihe.

$$\begin{aligned} F_1(x) &= f_1(x), \quad F_2(x) = f_1(x) + f_2(x), \\ F_3(x) &= f_1(x) + f_2(x) + f_3(x), \dots \\ F_n(x) &= f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots + f_n(x) \\ &= \sum_{k=1}^n f_k(x) \end{aligned}$$

In Analogie zu den gewöhnlichen Reihen heißt eine Funktionenreihe in einem Bereich  $E \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$  konvergent, wenn die Folge der Partialsummen

$F_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$  der Funktionenreihe in  $E$  gegen eine Funktion  $F(x)$  konvergiert. Man schreibt dann

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

Ist die Konvergenz der Folge der Partialsummen in  $E$  punktweise, dann heißt auch die Funktionenreihe in  $E$  punktweise konvergent. Ist dagegen die Konvergenz der Folge der Partialsummen gleichmäßig, so heißt auch die Funktionenreihe gleichmäßig konvergent.

Die Funktion  $F(x)$  heißt Grenzfunktion der Funktionenreihe in  $E$ . Man nennt  $F(x)$  auch die durch die Funktionenreihe dargestellte Funktion (im Konvergenzbereich  $E$ ).

Die Funktionenreihe  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  heißt in  $E$  absolut konvergent, wenn  $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| < \infty$  für jedes  $x \in E$  gilt. Bei absolut konvergenten Funktionenreihen darf die Summationsreihenfolge der Ausgangsreihe beliebig geändert werden, ohne dass sich dadurch der Wert der Reihe ändert.

#### ■ Beispiel:

Funktionenreihe:  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k}, \quad x \in \mathbb{R}$

Für  $x = 0$  gilt  $f_k(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^k} = 0$ .

Für festes  $x \neq 0$  ist  $\frac{1}{1+x^2} < 1$ , die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^2 \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^k$  ist also eine konvergente geometrische Reihe (vgl. Abschnitt VIII.2.3) mit der Grenzfunktion

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} x^2 \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^k = x^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^k \\ &= x^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = x^2 \cdot \frac{1}{\frac{x^2}{1+x^2}} = 1 + x^2. \end{aligned}$$

Die Funktionenreihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k}$  ist für alle  $x \in \mathbb{R}$  konvergent

mit der Grenzfunktion  $F(x) = \begin{cases} 1+x^2 & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

## 6.2 Potenzreihen

Funktionenreihen  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$  mit  $f_k(x) = a_k(x-x_0)^k$ , wobei  $a_k, k = 0, 1, 2, \dots$ , und  $x_0$  reelle Zahlen sind, heißen Potenzreihen.

### Potenzreihe

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 \\ &\quad + a_3(x-x_0)^3 + \dots \end{aligned}$$

Die reellen Zahlen  $a_0, a_1, a_2, \dots$  heißen Koeffizienten der Potenzreihe,  $x_0$  heißt ihr Entwicklungspunkt.

Der Konvergenzbereich einer Potenzreihe ist die Menge aller Zahlen, die man für  $x$  einsetzen kann, so dass die entstehende numerische Reihe konvergiert.

#### ■ Beispiel:

Zum Konvergenzbereich der Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$  gehört die Zahl  $\frac{1}{2}$ , denn die numerische Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$  konvergiert, die Zahl  $-2$  aber nicht, da die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} (-2)^k$  divergiert.

Für den Konvergenzbereich einer Potenzreihe gibt es drei Möglichkeiten:

1. Die Reihe konvergiert nur im Entwicklungspunkt  $x_0$ .
2. Die Reihe konvergiert für alle  $x \in \mathbb{R}$ .
3. Die Reihe konvergiert für alle  $x$  aus einem endlichen offenen Intervall  $(x_0 - r, x_0 + r)$ . In den beiden Randpunkten  $x_0 - r$  und  $x_0 + r$  kann die Reihe konvergent oder divergent sein.

Die Zahl  $r$  heißt Konvergenzradius der Potenzreihe.

Sie wird bestimmt durch  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$  oder  $r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ , falls diese Grenzwerte existieren.

Die erste Möglichkeit für den Konvergenzbereich einer Potenzreihe folgt aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ , es ist dann  $r = 0$ . Die zweite Möglichkeit folgt aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ , es ist dann  $r = \infty$ .

#### ■ Beispiele:

1.  $\sum_{k=1}^{\infty} k^k x^k$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$   
 Somit ist  $r = 0$ , der Konvergenzbereich besteht also nur aus dem Entwicklungspunkt  $x_0$ .
2.  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{k^{k+1}} x^k$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n-1}}{n^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n}} \cdot \frac{2}{n} = 0$ ,  
 denn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .  
 Es ist also  $r = \infty$ , die Reihe konvergiert für alle  $x \in \mathbb{R}$ .
3.  $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 5^k (x-2)^k$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 5 \cdot \sqrt[n]{n^2} = 5 \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^2 = 5$   
 Der Konvergenzradius ist folglich  $r = \frac{1}{5}$ . Um den genauen Konvergenzbereich zu bestimmen, müssen die Randpunkte  $x_1 = 2 - \frac{1}{5} = \frac{9}{5}$  und  $x_2 = 2 + \frac{1}{5} = \frac{11}{5}$  untersucht werden. Für  $x_1$  erhält man die numerische Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 5^k \left(-\frac{1}{5}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k k^2$  und für  $x_2$  die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 5^k \left(\frac{1}{5}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} k^2$ .

Beide numerischen Reihen divergieren, die Potenzreihe konvergiert somit in keinem der Randpunkte. Der Konvergenzbereich der Potenzreihe ist das offene Intervall  $\left(\frac{9}{5}, \frac{11}{5}\right)$ .

Im Konvergenzbereich der Potenzreihe wird die Grenzfunktion  $F(x)$  durch die Potenzreihe dargestellt.

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

Eine durch eine Potenzreihe dargestellte Funktion  $F(x)$  ist im Innern des Konvergenzbereichs stetig. Eine Potenzreihe konvergiert in jedem abgeschlossenen Teilintervall des Konvergenzbereichs gleichmäßig. Jede Potenzreihe darf im Innern des Konvergenzbereichs gliedweise differenziert und integriert werden. Die so entstehenden Potenzreihen haben den gleichen Konvergenzradius  $r$  wie die Ausgangsreihe. Für  $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$  gilt somit

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \\ F'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot a_k (x - x_0)^{k-1} \\ \int F(x) dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1} + C \end{aligned}$$

Die Integrationskonstante ist durch Einsetzen (zum Beispiel  $x = x_0$ ) zu bestimmen.

#### ■ Beispiel:

Potenzreihe:  $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$  (vgl. Abschnitt VIII.2.3)

Konvergenzradius:  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1$

In den Randpunkten  $x_1 = -1$  und  $x_2 = 1$  divergiert die numerische Reihe, der Konvergenzbereich der Potenzreihe ist somit das offene Intervall  $(-1, 1)$ .

Differentiation:  $F'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2}$  für  $x \in (-1, 1)$

Integration:  $\int F(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} x^{k+1} + C = \int \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x)$

Aus  $x = 0$  folgt  $C = 0$ , es gilt daher

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} x^{k+1} = -\ln(1-x) \quad \text{für } x \in (-1, 1)$$

Für zwei Potenzreihen  $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$  und  $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$  mit dem gleichen Entwicklungspunkt  $x_0$  gelten folgende Rechenregeln ( $x$  liegt dabei im Innern des Konvergenzbereichs

beider Reihen):

Summe

$$F(x) + G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) (x - x_0)^k$$

Differenz

$$F(x) - G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - b_k) (x - x_0)^k$$

Produkt

$$\begin{aligned} F(x) \cdot G(x) &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) (x - x_0) \\ &\quad + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) (x - x_0)^2 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0) (x - x_0)^k \end{aligned}$$

Quotient

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$$

Die Produktdarstellung nennt man Cauchy-Produkt (nach dem französischen Mathematiker Augustin Louis Cauchy, 1789–1857). Den Quotienten berechnet man durch Multiplikation mit dem Nenner

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \right)$$

und anschließend Koeffizientenvergleich der Potenzen von  $(x - x_0)^k$  auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens.

### 6.3 Fourier-Reihen

In der Praxis treten häufig periodische Vorgänge auf (zum Beispiel Schwingungen in der Elektrotechnik, Akustik oder Optik), die sich am besten durch periodische Funktionen beschreiben lassen. Oftmals ist es dann notwendig oder vorteilhaft, eine solche periodische Funktion exakt oder angenähert durch eine Funktionenreihe, deren Summanden bestimmte Summen aus trigonometrischen Funktionen sind, darzustellen.

Eine Funktion, deren Funktionsgleichung die Bedingung  $f(x + T) = f(x)$  für alle  $x$  aus dem Definitionsbereich  $D$  erfüllt, wobei  $T \neq 0$  eine Konstante ist, heißt periodische Funktion (vgl. Abschnitt V.2.7). Die kleinste positive Zahl  $T$  mit dieser Eigenschaft heißt Periode der Funktion, man nennt die Funktion  $y = f(x)$  auch  $T$ -periodisch.

Eine  $T$ -periodische Funktion  $y = f(x)$  ist eindeutig bestimmt durch ihr Verhalten auf einem beliebigen Intervall der Länge  $T$ . Diese Tatsache führte zur Einführung von Fourier-Reihen.

Funktionenreihen  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$  mit  $f_k(x) = a_k \cos \frac{\pi k}{p} x + b_k \sin \frac{\pi k}{p} x$  für  $k = 1, 2, 3, \dots$  ( $a_k$  und  $b_k$  sind reelle Zahlen) und  $f_0(x) = \frac{a_0}{2}$  heißen trigonometrische Reihen.

Trigonometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{\pi k}{p} x + b_k \sin \frac{\pi k}{p} x \right)$$



Dabei sind  $(a_k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  und  $(b_k)$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  Zahlenfolgen.

Ist eine trigonometrische Reihe für alle  $x \in \mathbb{R}$  konvergent, so stellt sie in  $\mathbb{R}$  eine Funktion  $F(x)$  dar:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{\pi k}{p} x + b_k \sin \frac{\pi k}{p} x \right)$$

In diesem Fall ist  $F(x)$  eine  $2p$ -periodische Funktion, denn es gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} F(x+2p) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{\pi k}{p} (x+2p) + b_k \sin \frac{\pi k}{p} (x+2p) \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \left( \frac{\pi k}{p} x + 2\pi k \right) + b_k \sin \left( \frac{\pi k}{p} x + 2\pi k \right) \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{\pi k}{p} x + b_k \sin \frac{\pi k}{p} x \right) = F(x) \end{aligned}$$

Sind die numerischen Reihen  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  absolut konvergent (vgl. Abschnitt VIII.6.1), dann gilt:

1. Die trigonometrische Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{\pi k}{p} x + b_k \sin \frac{\pi k}{p} x \right)$$

ist für alle  $x \in \mathbb{R}$  konvergent.

2. Die Funktion  $F(x)$  mit

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{\pi k}{p} x + b_k \sin \frac{\pi k}{p} x \right)$$

ist in  $\mathbb{R}$  stetig.

Es sei  $y = f(x)$  eine  $2p$ -periodische Funktion, die über dem Intervall  $[-p, p]$  integrierbar ist. Dann heißen die Zahlen  $a_k$  und  $b_k$  die Fourier-Koeffizienten der Funktion  $f(x)$ .

Fourier-Koeffizienten von  $f(x)$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cdot \cos \frac{\pi k}{p} x \, dx \quad (k \in \mathbb{N}) \\ b_k &= \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cdot \sin \frac{\pi k}{p} x \, dx \quad (k \in \mathbb{N}^*) \end{aligned}$$

Die mit Hilfe dieser Fourier-Koeffizienten gebildete trigonometrische Reihe

$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{\pi k}{p} x + b_k \sin \frac{\pi k}{p} x \right)$  heißt die zur Funktion  $f(x)$  gehörende oder die durch  $f(x)$  erzeugte oder die  $f(x)$  formal zugeordnete Fourier-Reihe (Name nach dem französischen Mathematiker Jean-Baptiste-Joseph Fourier, 1768–1830). Man schreibt:

$f(x)$  formal zugeordnete Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{\pi k}{p} x + b_k \sin \frac{\pi k}{p} x \right) \quad (*)$$

Das Zeichen  $\sim$  soll andeuten, dass die Zuordnung von  $f(x)$  zu ihrer Fourier-Reihe eine formale Zuordnung ist. Es ist nichts ausgesagt über die Konvergenz dieser Fourier-Reihe und nichts darüber, ob im Falle der Konvergenz die Fourier-Reihe die Funktion  $f(x)$  auch darstellt, das heißt, ob in  $(*)$  die Gleichheit gilt.

Da die Integranden der Fourier-Koeffizienten  $2p$ -periodisch sind, kann dort jedes Intervall der Länge  $2p$  als Integrationsintervall verwendet werden, zum Beispiel  $[0, 2p]$ .

Ist  $f(x)$  eine gerade Funktion, das heißt, gilt  $f(x) = f(-x)$  (vgl. Abschnitt V.2.2), so folgt

$f(x)$  gerade Funktion

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cdot \cos \frac{\pi k}{p} x \, dx \quad (k \in \mathbb{N}) \\ b_k &= 0 \quad (k \in \mathbb{N}^*) \end{aligned}$$

Für eine ungerade Funktion  $f(x)$ , also

$f(x) = -f(-x)$ , folgt

$f(x)$  ungerade Funktion

$$\begin{aligned} a_k &= 0 \quad (k \in \mathbb{N}) \\ b_k &= \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cdot \sin \frac{\pi k}{p} x \, dx \quad (k \in \mathbb{N}^*) \end{aligned}$$

Die Bestimmung der Fourier-Koeffizienten einer Funktion heißt harmonische Analyse.

Der Satz von Dirichlet (nach dem Mathematiker Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805–1859) gibt hinreichende Bedingungen dafür an, dass eine Funktion  $f(x)$  durch ihre (konvergente) Fourier-Reihe dargestellt wird, das heißt dafür, dass in  $(*)$  Gleichheit für alle  $x$  gilt.

Satz von Dirichlet:

- (1) Die Funktion  $f(x)$  mit der Periode  $2p$  ist im Intervall  $[-p, p]$  bis auf endlich viele Sprungstellen (vgl. Abschnitt VIII.3.7) stetig.
- (2) Das Intervall  $[-p, p]$  lässt sich so in endlich viele Teilintervalle zerlegen, dass  $f(x)$  in den einzelnen Teilintervallen monoton (monoton fallend oder monoton wachsend) (vgl. Abschnitt V.2.1) ist.

Gelten (1) und (2) für eine Funktion  $f(x)$ , so konvergiert die Fourier-Reihe von  $f(x)$  und stellt die Funktion auch dar.

An den Sprungstellen der Funktion nimmt die Fourier-Reihe den Mittelwert an, das heißt, für eine Sprungstelle  $x_1$  gilt

$$f(x_1) = \frac{1}{2} \left( \lim_{x \rightarrow x_1 + 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_1 - 0} f(x) \right)$$

(vgl. Abschnitt VIII.3.2).

Häufig kommt es vor, dass die Funktion  $f(x)$  nur in dem Intervall  $[-p, p]$  definiert, nicht aber periodisch ist. In diesem Fall setzt man die Funktion  $f(x)$  einfach nach links und nach rechts periodisch fort und bestimmt dann die Fourier-Reihe zu der fortgesetzten Funktion (siehe Beispiele 2–4).

In den folgenden Beispielen werden die Fourier-Reihen von Funktionen berechnet, die häufig in der Praxis auftreten.

### ■ Beispiele:

#### 1. Rechteckpuls

Es sei  $f(x)$  die  $2\pi$ -periodische Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} A & \text{für } |x| < \frac{\pi}{2} \\ \frac{A}{2} & \text{für } |x| = \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} < |x| \leq \pi \end{cases}$$

(periodisch fortsetzen).

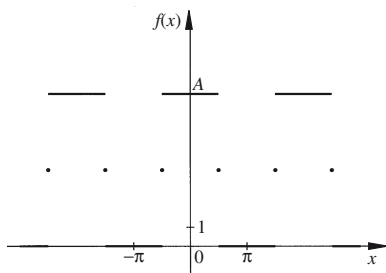


Bild VIII-23 Rechteckpuls

Bestimmung der formalen Fourier-Reihe von  $f(x)$ :

Da  $f(x)$  eine gerade Funktion ist, gilt  $b_k = 0$  für die Fourier-Koeffizienten  $b_k$ .

Berechnung der  $a_k$ :

$k = 0$ :

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} A dx = A$$

$k \in \mathbb{N}^*$ :

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{2A}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos kx dx = \frac{2A}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2}$$

$$= \begin{cases} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2A}{(2n-1)\pi} & \text{für } k \text{ ungerade, } k = 2n-1 \\ 0 & \text{für } k \text{ gerade, } k = 2n \end{cases}$$

Fourier-Reihe von  $f(x)$ :

$$f(x) \sim \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cdot \cos(2n-1)x$$

$$= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left( \cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \dots \right)$$

Darstellbarkeit:

Die Funktion ist in den Teilintervallen  $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$ ,  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  und  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  stetig und monoton. An den Sprungstellen ist der Funktionswert gleich dem arithmetischen Mittel der einseitigen Grenzwerte. Nach dem Satz von Dirichlet wird die Funktion  $f(x)$  somit durch ihre Fourier-Reihe dargestellt:

$$f(x) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cdot \cos(2n-1)x$$

#### 2. Dreieckpuls

Man setze die Funktion  $f(x) = 1 - |x|$ ,  $-1 \leq x \leq 1$  periodisch fort und entwickle sie in eine Fourier-Reihe.

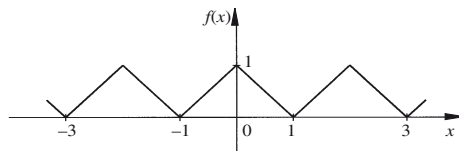


Bild VIII-24 Graph der periodisch fortgesetzten Funktion von Beispiel 2

Die periodisch fortgesetzte Funktion hat die Periode 2, in den Formeln muss deshalb  $2p = 2$ , also  $p = 1$  gesetzt werden. Da  $f(x)$  eine gerade Funktion ist, folgt  $b_k = 0$  für  $k = 1, 2, 3, \dots$

Berechnung der  $a_k$ :

$$k = 0: a_0 = 2 \int_0^1 (1-x) dx = -(1-x)^2 \Big|_0^1 = 1,$$

denn im Intervall  $[0, 1]$  gilt  $1 - |x| = 1 - x$ .

$$k \neq 0: a_k = 2 \int_0^1 (1-x) \cos kx dx$$

$$= 2 \left( \int_0^1 \cos kx dx - \int_0^1 x \cos kx dx \right)$$

$$= 2 \left( \frac{1}{k} \sin kx \Big|_0^1 - \left( \frac{x}{k} \sin kx + \frac{1}{(k)^2} \cos kx \right) \Big|_0^1 \right)$$

$$= 2 \left( -\frac{1}{(k)^2} (\cos k\pi - 1) \right)$$

$$= \frac{2}{(\pi k)^2} (1 - (-1)^k)$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{(\pi k)^2} & \text{für } k \text{ ungerade, } k = 2n-1 \\ 0 & \text{für } k \text{ gerade, } k = 2n \end{cases}$$

Das zweite Integral berechnet man mit zweimaliger partieller Integration.

Fourier-Reihe von  $f(x)$ :

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cos \pi(2n-1)x$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2n-1)^2} \cos(2n-1)\pi x$$

Darstellbarkeit:

- (1) Die Funktion  $f(x) = 1 - |x|$  ist im Intervall  $[-1, 1]$  überall stetig.
- (2) Zerlegt man das Periodenintervall  $[-1, 1]$  in die zwei Teilintervalle  $[-1, 0]$  und  $[0, 1]$ , so ist  $f(x)$  in  $[-1, 0]$  monoton wachsend und in  $[0, 1]$  monoton fallend.

Nach dem Satz von Dirichlet wird die Funktion  $f(x)$  somit durch ihre Fourier-Reihe dargestellt:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2n-1)^2} \cos(2n-1)\pi x$$

3. Man setze die Funktion  $y = \sin x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$  periodisch fort und entwickle sie in eine Fourier-Reihe.

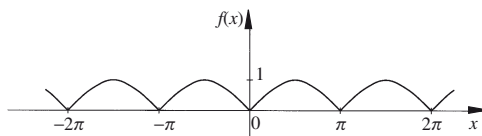


Bild VIII-25 Graph der periodisch fortgesetzten Funktion von Beispiel 3

Die fortgesetzte Funktion ist die Funktion  $f(x) = |\sin x|$ , sie hat die Periode  $\pi$ , es folgt also  $p = \frac{\pi}{2}$ .

Wegen  $|\sin(-x)| = |-\sin x| = |\sin x|$  ist  $f(x)$  gerade, es folgt  $b_k = 0$  für alle  $k$ .

Berechnung der  $a_k$ :

$$k = 0: a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{2}{\pi} (-\cos x) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} (1 + 1) = \frac{4}{\pi},$$

denn im Intervall  $[0, \pi]$  gilt  $|\sin x| = \sin x$ .

$$\begin{aligned} k \neq 0: a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos 2kx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{2k} \sin x \sin 2kx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2k} \int_0^{\pi} \cos x \sin 2kx \, dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{4k^2} \cos x \cos 2kx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{4k^2} \int_0^{\pi} \sin x \cos 2kx \, dx \right) \end{aligned}$$

Bei beiden Umformungen wurde die Methode der partiellen Integration angewandt. Es folgt

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{4k^2}{4k^2 - 1} \left( \frac{1}{4k^2} \cos x \cos 2kx \right) \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi(4k^2 - 1)} (-1 - 1) = -\frac{4}{\pi(4k^2 - 1)} \end{aligned}$$

Fourier-Reihe von  $f(x)$ :

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1}$$

Darstellbarkeit:

- (1) Die Funktion  $f(x) = |\sin x|$  ist im Intervall  $[0, \pi]$  stetig.
- (2) Die Funktion  $f(x)$  ist in  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  monoton steigend und in  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  monoton fallend.

Nach dem Satz von Dirichlet gilt somit Gleichheit:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1}$$

4. Man setze die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{für } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

periodisch fort und berechne die zugehörige Fourier-Reihe.

Die fortgesetzte Funktion hat die Periode 2, es folgt  $p = 1$ .

Die Funktion ist weder gerade noch ungerade, es müssen also sowohl die Fourier-Koeffizienten  $a_k$  als auch  $b_k$  berechnet werden.

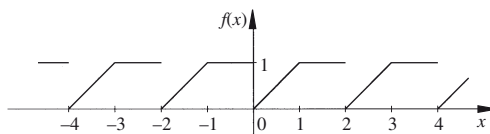


**Bild VIII-26** Graph der periodisch fortgesetzten Funktion von Beispiel 4

Berechnung der  $a_k$ :

$$\begin{aligned} k = 0: a_0 &= \int_0^2 f(x) \, dx = \int_0^1 x \, dx + \int_1^2 1 \, dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 + x \Big|_1^2 = \frac{3}{2} \\ k \neq 0: a_k &= \int_0^2 f(x) \cos \pi kx \, dx = \int_0^1 x \cos \pi kx \, dx + \int_1^2 \cos \pi kx \, dx \\ &= \left( \frac{\cos \pi kx}{k^2 \pi^2} + \frac{x \sin \pi kx}{k\pi} \right) \Big|_0^1 + \frac{\sin \pi kx}{k\pi} \Big|_1^2 = \frac{\cos \pi k}{k^2 \pi^2} - \frac{1}{k^2 \pi^2} \\ &= \frac{1}{k^2 \pi^2} ((-1)^k - 1) = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ gerade} \\ -\frac{2}{k^2 \pi^2} & \text{für } k \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Berechnung der  $b_k$ :

$$\begin{aligned} b_k &= \int_0^2 f(x) \sin \pi kx \, dx = \int_0^1 x \sin \pi kx \, dx + \int_1^2 \sin \pi kx \, dx \\ &= \left( \frac{\sin \pi kx}{k^2 \pi^2} - \frac{x \cos \pi kx}{k\pi} \right) \Big|_0^1 + \frac{(-\cos \pi kx)}{k\pi} \Big|_1^2 \\ &= -\frac{\cos \pi k}{k\pi} - \frac{\cos \pi 2k}{k\pi} + \frac{\cos \pi k}{k\pi} = -\frac{1}{k\pi} \end{aligned}$$

Sowohl bei der Berechnung von  $a_k$  als auch von  $b_k$  wurde zur Lösung des ersten Integrals zweimalige partielle Integration durchgeführt.

Fourier-Reihe von  $f(x)$ :

$$f(x) \sim \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^k - 1}{k^2 \pi^2} \cos \pi kx - \frac{1}{k\pi} \sin \pi kx \right)$$

Darstellbarkeit:

Die Funktion ist im Intervall  $(0, 2)$  stetig und monoton. Mit

der Definition  $f(0) = f(2) = \frac{1}{2} (1 + 0) = \frac{1}{2}$  sind die Bedin-

gungen des Satzes von Dirichlet erfüllt, die Funktion  $f(x)$  wird somit durch ihre Fourier-Reihe dargestellt:

$$f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^k - 1}{k^2 \pi^2} \cos \pi kx - \frac{1}{k\pi} \sin \pi kx \right)$$

# Anhang

## A Symbole und Bezeichnungen

Die folgenden mathematischen Zeichen sind nach DIN 1302 (April 1994) und DIN 5473 (Juli 1992) zusammengestellt.

|                                    |                                                                                                   |
|------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $=$                                | gleich                                                                                            |
| $\neq$                             | ungleich                                                                                          |
| $\approx$                          | ungefähr gleich                                                                                   |
| $<$                                | kleiner als                                                                                       |
| $\leq$                             | kleiner oder gleich                                                                               |
| $>$                                | größer als                                                                                        |
| $\geq$                             | größer oder gleich                                                                                |
| $\ll$                              | sehr viel kleiner als                                                                             |
| $\gg$                              | sehr viel größer als                                                                              |
| $\sim$                             | proportional                                                                                      |
| $\pm$                              | plus oder minus                                                                                   |
| $\mp$                              | minus oder plus                                                                                   |
| $\sum_{k=1}^n a_k$                 | $= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ ;<br>Summe über $a_k$ von $k = 1$ bis $k = n$                   |
| $\prod_{k=1}^n a_k$                | $= a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n$ ;<br>Produkt über $a_k$ von $k = 1$ bis $k = n$ |
| $\{a, b, c\}$                      | Menge aus den Elementen $a, b, c$                                                                 |
| $\{x   E(x)\}$                     | Menge aller $x$ , die die Eigenschaft $E(x)$ haben                                                |
| $\in$                              | Element von                                                                                       |
| $\notin$                           | nicht Element von                                                                                 |
| $\subseteq$                        | Teilmenge                                                                                         |
| $\emptyset$                        | leere Menge                                                                                       |
| $\cup$                             | Vereinigung von Mengen                                                                            |
| $\cap$                             | Durchschnitt von Mengen                                                                           |
| $ M $                              | Mächtigkeit der Menge $M$                                                                         |
| $A \wedge B$                       | $A$ und $B$                                                                                       |
| $A \vee B$                         | $A$ oder $B$                                                                                      |
| $\neg A$                           | nicht $A$ (Negation von $A$ )                                                                     |
| $A \Rightarrow B$                  | aus $A$ folgt $B$                                                                                 |
| $A \Leftrightarrow B$              | $A$ und $B$ sind äquivalent (gleichwertig)                                                        |
| $(a, b)$                           | geordnetes Paar                                                                                   |
| $(a, b, c)$                        | geordnetes Tripel                                                                                 |
| $\parallel$                        | parallel                                                                                          |
| $\overline{AB}$                    | Strecke $AB$                                                                                      |
| $ \overline{AB} $                  | Länge (Betrag) der Strecke $AB$                                                                   |
| $\vec{a}$                          | Vektor $a$                                                                                        |
| $\overrightarrow{PQ}$              | Vektor $PQ$                                                                                       |
| $ \vec{a} ,  \overrightarrow{PQ} $ | Länge des Vektors                                                                                 |
| $\sim$                             | ähnlich                                                                                           |

|                |                                                                                                                                                            |
|----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\cong$        | kongruent                                                                                                                                                  |
| $\mathbb{N}$   | $= \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ;<br>Menge der natürlichen Zahlen                                                                                                |
| $\mathbb{Z}$   | $= \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ ;<br>Menge der ganzen Zahlen                                                                                  |
| $\mathbb{Q}$   | $= \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$ ;<br>Menge der rationalen Zahlen                                                       |
| $\mathbb{R}$   | Menge der reellen Zahlen                                                                                                                                   |
| $\mathbb{C}$   | $= \{z = a + bj \mid a, b \in \mathbb{R}, j = \sqrt{-1}\}$ ;<br>Menge der komplexen Zahlen                                                                 |
| $\mathbb{N}^*$ | $= \{1, 2, 3, \dots\}$ ;<br>Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null                                                                                     |
| $\mathbb{Z}^*$ | $= \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$ ;<br>$= \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \neq 0\}$ ;<br>Menge der ganzen Zahlen ohne die Null                        |
| $\mathbb{Q}^*$ | $= \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}^* \right\} = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x \neq 0\}$ ;<br>Menge der rationalen Zahlen ohne die Null         |
| $\mathbb{R}^*$ | $= \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$ ;<br>Menge der reellen Zahlen ohne die Null                                                                      |
| $\mathbb{Z}^+$ | $= \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\} = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x > 0\}$ ;<br>Menge der positiven ganzen Zahlen                                          |
| $\mathbb{Q}^+$ | $= \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}^* \right\} = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x > 0\}$ ;<br>Menge der positiven rationalen Zahlen                |
| $\mathbb{R}^+$ | $= \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}$ ;<br>Menge der positiven reellen Zahlen                                                                             |
| $\mathbb{P}$   | $= \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \dots\}$ ;<br>Menge der Primzahlen                                                                                |
| $j$            | $= \sqrt{-1}$ ; imaginäre Einheit                                                                                                                          |
| $\infty$       | unendlich (größer als jede reelle Zahl)                                                                                                                    |
| $-\infty$      | minus unendlich (kleiner als jede reelle Zahl)                                                                                                             |
| $n!$           | $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ ; $n$ Fakultät                                                                                                   |
| $\binom{n}{k}$ | $= \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ;<br>$= \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}$ ;<br>Binomialkoeffizient $n$ über $k$ |
| $ a $          | Betrag oder Absolutbetrag einer Zahl $a$                                                                                                                   |
| $a^n$          | $a$ hoch $n$ , $n$ -te Potenz von $a$                                                                                                                      |
| $\sqrt{a}$     | Wurzel aus $a$                                                                                                                                             |
| $\sqrt[n]{a}$  | $n$ -te Wurzel aus $a$                                                                                                                                     |
| $\log_a b$     | Logarithmus $b$ zur Basis $a$                                                                                                                              |

|                |                                                                                                           |                                                                                                                  |
|----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\lg b$        | dekadischer Logarithmus (Zehnerlogarithmus), Logarithmus zur Basis $a = 10$                               | $(-\infty, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}\};$<br>offenes Intervall, nach links und nach rechts unbeschränkt |
| $\ln b$        | natürlicher Logarithmus, Logarithmus zur Basis $a = e = 2,71828182 \dots$                                 | $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots);$ Folge, Zahlenfolge                                                             |
| $\lg b$        | binärer Logarithmus (Zweierlogarithmus), Logarithmus zur Basis $a = 2$                                    | $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ Limes, Grenzwert der Folge $(a_n)$                                             |
| $[a, b]$       | $= \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } a \leq x \leq b\};$<br>abgeschlossenes beschränktes Intervall   | $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ Grenzwert (Limes) der Funktion $f(x)$ für $x$ gegen $a$                            |
| $(a, b)$       | $= \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } a < x < b\};$<br>offenes beschränktes Intervall                 | $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ linksseitiger Grenzwert der Funktion $y = f(x)$ an der Stelle $x = a$            |
| $[a, b)$       | $= \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } a \leq x < b\};$<br>halboffenes beschränktes Intervall          | $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ rechtsseitiger Grenzwert der Funktion $y = f(x)$ an der Stelle $x = a$           |
| $(a, b]$       | $= \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } a < x \leq b\};$<br>halboffenes beschränktes Intervall          | $f'(x_0)$ Ableitung von $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$                                                           |
| $[a, \infty)$  | $= \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x \geq a\};$<br>halboffenes Intervall, nach rechts unbeschränkt | $\frac{df}{dx}(x_0)$ Ableitung von $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$                                                |
| $(a, \infty)$  | $= \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x > a\};$<br>offenes Intervall, nach rechts unbeschränkt        | $f'(x)$ Ableitung der Funktion $f(x)$                                                                            |
| $(-\infty, a]$ | $= \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x \leq a\};$<br>halboffenes Intervall, nach links unbeschränkt  | $f''(x)$ zweite Ableitung der Funktion $f(x)$                                                                    |
| $(-\infty, a)$ | $= \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x < a\};$<br>offenes Intervall, nach links unbeschränkt         | $f'''(x)$ dritte Ableitung der Funktion $f(x)$                                                                   |
|                |                                                                                                           | $f^{(n)}(x)$ $n$ -te Ableitung der Funktion $f(x)$                                                               |
|                |                                                                                                           | $\int f(x) dx$ unbestimmtes Integral der Funktion $y = f(x)$                                                     |
|                |                                                                                                           | $\int_a^b f(x) dx$ bestimmtes Integral der Funktion $y = f(x)$ von $x = a$ bis $x = b$                           |
|                |                                                                                                           | $(f_n(x)) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots);$<br>Funktionsfolge                                                  |

**B Das griechische Alphabet**

|         |            |         |            |         |            |
|---------|------------|---------|------------|---------|------------|
| Alpha   | <i>A α</i> | Jota    | <i>I ι</i> | Rho     | <i>P ρ</i> |
| Beta    | <i>B β</i> | Kappa   | <i>K κ</i> | Sigma   | <i>Σ σ</i> |
| Gamma   | <i>Γ γ</i> | Lambda  | <i>Λ λ</i> | Tau     | <i>T τ</i> |
| Delta   | <i>Δ δ</i> | My      | <i>M μ</i> | Ypsilon | <i>Υ υ</i> |
| Epsilon | <i>E ε</i> | Ny      | <i>N ν</i> | Phi     | <i>Φ φ</i> |
| Zeta    | <i>Z ζ</i> | Xi      | <i>Ξ ξ</i> | Chi     | <i>Χ χ</i> |
| Eta     | <i>H η</i> | Omikron | <i>O ο</i> | Psi     | <i>Ψ ψ</i> |
| Theta   | <i>Θ θ</i> | Pi      | <i>Π π</i> | Omega   | <i>Ω ω</i> |

# Physik

## I Einführung

Die Physik ist ein Teilgebiet der Naturwissenschaften und beschäftigt sich mit der leblosen Umwelt. In der Physik wird versucht, die Gesetzmäßigkeiten der unbelebten Materie durch Beobachtungen und Messungen zu erfassen und in einer mathematischen Gleichung darzustellen. Ist diese bekannt, so kann man die physikalischen Gesetze für technische Zwecke ausnutzen. Die Physik wird in folgende Gebiete unterteilt: Mechanik, Thermodynamik (Wärmelehre), Elektrizität und Magnetismus, Wellenlehre, Akustik, Optik, Atom- und Kernphysik, Festkörperphysik, Relativitätstheorie.

### 1 Physikalische Größen

Eine *physikalische Größe* kennzeichnet Eigenschaften, Zustände oder Größen von messbaren Objekten. Sie ist das Produkt einer *Maßzahl* und einer *Einheit*.

$$\text{Größe} = \text{Maßzahl} \cdot \text{Einheit}$$

Um Größen und ihre Einheiten deutlich zu unterscheiden, werden für sie unterschiedliche Symbole verwendet.

$$\text{Spannung} = 100 \cdot 1 \text{ Volt}; U = 100 \cdot 1 \text{ V}; U = 100 \text{ V}$$

In Gleichungen werden immer physikalische Größen miteinander verbunden, das heißt, dass sowohl die Maßzahlen, aber auch die Einheiten auf beiden Seiten der Gleichung miteinander übereinstimmen müssen.

#### 1.1 Skalare

Viele Größen sind neben ihrer Einheit allein durch ihre Maßzahlen eindeutig bestimmt, dazu gehören z.B. Temperatur, Masse, Energie, Leistung, Widerstand. Solche Größen werden *skalare Größen* oder *Skalare* genannt.

#### 1.2 Vektoren

Bei anderen Größen reichen diese Angaben alleine nicht aus, sondern es muss zur vollständigen Be-

schreibung noch eine Richtung angegeben werden. Zum Beispiel ist es nicht ausreichend zu sagen, ein Auto habe eine Strecke von 100 km zurückgelegt, wenn nicht auch die Richtung der Bewegung mit angegeben wurde.

Solche gerichteten Größen werden *Vektoren* genannt. Zur vollständigen Angabe gehört ein *Betrag* (Maßzahl, Einheit) und eine *Richtung*.

Beispiele für Vektoren: Kraft, Geschwindigkeit, elektrische und magnetische Feldstärke. Wenn die Vektoreigenschaft einer Größe hervorgehoben werden soll, so wird dies entweder durch einen Pfeil über dem Größenzeichen  $\vec{F}$  oder durch Fettdruck  $\mathbf{F}$  des Zeichens kenntlich gemacht. Für die mathematische Behandlung von Gleichungen mit Vektoren wird die *Vektorrechnung* benötigt.

### 2 SI – System

Die Einheiten der physikalischen Größen sind seit 1960 im „*Système International d'Unités*“, kurz *SI-System*, festgelegt und in der Bundesrepublik Deutschland gesetzlich vorgeschrieben. Das System besteht aus *Basisgrößen* und *abgeleiteten Größen*. Die Basisgrößen sind in der folgenden Tabelle angegeben.

#### Definitionen der Basisgrößen

*1 Sekunde* ist das 9 192 631 770 fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids  $^{133}\text{Cs}$  entsprechenden Strahlung. (1967)

*1 Meter* ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während der Dauer von 1/299 792 458 Sekunden durchläuft. (1983)

*1 Kilogramm* ist die Masse des internationalen Kilogrammprototyps. (1889)

**Tabelle I-1** Basisgrößen und Basiseinheiten

| Gebiet         | Basisgröße  | Formelzeichen | Basiseinheit | Einheitenzeichen |
|----------------|-------------|---------------|--------------|------------------|
| Mechanik       | Zeit        | $t$           | Sekunde      | s                |
|                | Länge       | $l$           | Meter        | m                |
|                | Masse       | $m$           | Kilogramm    | kg               |
| Elektrotechnik | Stromstärke | $I$           | Ampere       | A                |
| Thermodynamik  | Temperatur  | $T$           | Kelvin       | K                |
| Optik          | Lichtstärke | $I_L$         | Candela      | cd               |
| Chemie         | Stoffmenge  | $n$           | Mol          | mol              |

*1 Ampere* ist die Stärke eines zeitlich unveränderlichen Stroms, der, durch zwei im Vakuum parallel im Abstand von 1 Meter voneinander angeordnete, geradlinige, unendlich lange Leiter von vernachlässigbar kleinem kreisförmigen Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je 1 Meter Leiterlänge die Kraft  $2 \cdot 10^{-7}$  Newton hervorruft. (1948)

*1 Kelvin* ist der 273.16te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes des Wassers. (1967)

*1 Candela* ist die Lichtstärke in einer bestimmten Richtung, einer Strahlungsquelle, die monochromatische Strahlung der Frequenz 540 THz aussendet und

deren Strahlstärke in dieser Richtung  $\frac{1}{683} \frac{W}{sr}$  beträgt.

*1 Mol* ist die Stoffmenge eines Systems bestimmter Zusammensetzung, das aus ebenso vielen Teilchen besteht, wie Atome in (12/1000) kg des Nuklids  $^{12}C$  enthalten sind. (1971)

*Abgeleitete Größen:* Aus den Basisgrößen lassen sich die SI-Einheiten aller anderen Größen ableiten. Eine

Zusammenfassung der wichtigsten Größen finden Sie im Abschnitt VIII.

Durch Vorsätze können dezimale Vielfache oder Teile der Maßeinheiten gebildet und damit umständlicher zu benutzende Zehnerpotenzen vermieden werden. In Tabelle I.2 sind die Vorsilben und Kurzzeichen für die Vorsätze zusammengestellt. Doppelvorsätze, wie z.B. nmm sind nicht zulässig.

**Tabelle I-2** Vorsätze für dezimale Vielfache

| Wert      | Vorsatz | Zeichen | Wert       | Vorsatz | Zeichen |
|-----------|---------|---------|------------|---------|---------|
| $10^{18}$ | Exa     | E       | $10^{-1}$  | Dezi    | d       |
| $10^{15}$ | Peta    | P       | $10^{-2}$  | Zenti   | c       |
| $10^{12}$ | Tera    | T       | $10^{-3}$  | Milli   | m       |
| $10^9$    | Giga    | G       | $10^{-6}$  | Mikro   | $\mu$   |
| $10^6$    | Mega    | M       | $10^{-9}$  | Nano    | n       |
| $10^3$    | Kilo    | k       | $10^{-12}$ | Piko    | p       |
| $10^2$    | Hekto   | h       | $10^{-15}$ | Femto   | f       |
| $10^1$    | Deka    | da      | $10^{-18}$ | Atto    | a       |

## II Mechanik

### 1 Kinematik des Massenpunktes

Die Kinematik beschreibt die Bewegung von Körpern im Raum. Ein Punkt im Raum wird durch seine *Ortskoordinaten* festgelegt. Diese ändern sich während der Bewegung des Körpers mit der Zeit. Bei größeren Systemen können einzelne Teile des Systems völlig unterschiedliche Bewegungen durchführen, so bewegt sich bei einem fahrenden Auto ein Punkt auf der Karosserie anders als ein Punkt auf dem Reifen. Da sich aber jeder Körper aus einzelnen Massenpunkten zusammensetzt, ist die Beschreibung der Bewegung eines einzelnen Massenpunktes von grundlegender Bedeutung.

#### 1.1 Eindimensionale Bewegungen

Eine Bewegung wird dann eindimensional genannt, wenn sie nur auf einer vorgeschriebenen Bahn erfolgen kann, wie es z.B. bei Schienenfahrzeugen oder auch Werkzeugschlitten der Fall ist. Zu ihrer Beschreibung ist dann neben der Zeitabhängigkeit nur eine *Ortskoordinate* ausreichend.

##### 1.1.1 Geschwindigkeit

Eine wichtige Grundgröße der Kinematik ist die *Geschwindigkeit*. Sie gibt an, welcher Weg  $\Delta s$  in der Zeit  $\Delta t$  zurückgelegt wird. Die Geschwindigkeit ist ein Vektor, denn der Endzustand einer Bewegung hängt von der Richtung der Geschwindigkeit ab.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad \frac{v}{m/s} \mid \frac{\Delta s}{m} \mid \frac{\Delta t}{s} \qquad (II.1)$$

$\Delta s = s_2 - s_1$ , Differenz der Ortskoordinaten.

$\Delta t = t_2 - t_1$ , Differenz der entsprechenden Zeiten.

Ist der Betrag der Geschwindigkeit überall gleich, so spricht man von einer *gleichförmigen Bewegung*. Die Geschwindigkeit ist dann unabhängig von der Größe des Zeitabschnittes. Ändert sich dagegen die Geschwindigkeit während der Beobachtungszeit (Beispiel: anfahrendes Auto), so kann man die *Momentangeschwindigkeit* oder *Augenblicksgeschwindigkeit* nur bestimmen, wenn der Zeitabschnitt  $\Delta t$ , in dem der zurückgelegte Weg  $\Delta s$  gemessen wird, beliebig klein gemacht wird, im Grenzfall gegen 0. Ist dies nicht möglich, erhält man die *Durchschnittsgeschwindigkeit* oder auch *mittlere Geschwindigkeit*. Die Geschwindigkeit, mit der sich ein Körper geradlinig bewegt, nennt man auch *Translationsgeschwindigkeit*.

Eine Masse  $m$  befindet sich zum Zeitpunkt  $t = 0$  an einem Ort mit der Ortskoordinate  $s_0$ . Sie hat eine konstante Geschwindigkeit  $v_0$ . Der nach Ablauf einer Zeit  $t$  zurückgelegte Weg  $s$  errechnet sich nach:

$$s = s_0 + v_0 \cdot t \qquad (II.2)$$

mit  $s_0$  und  $v_0$  als Anfangswerte der Ortskoordinate und der Geschwindigkeit.



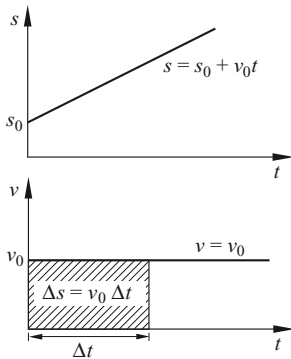


**Bild II-1**  $s(t)$  und  $v(t)$ -Diagramm einer gleichförmigen Bewegung

■ **Beispiel:** Ein Auto fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von 50 km/h. Um 9 Uhr ist es 30 km von seinem Startpunkt entfernt.

- Welche Zeit braucht es für einen Weg von 20 km?
- Wo befindet es sich um 11 Uhr?

**Lösung:**

- $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{20 \text{ km}}{50 \text{ km h}^{-1}} = 0,4 \text{ h} = 24 \text{ min}$
- $s = 30 \text{ km} + 2 \text{ h} \cdot 50 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 130 \text{ km}$

### 1.1.2 Beschleunigung

Wenn sich die Geschwindigkeit im Lauf der Zeit ändert, liegt eine *beschleunigte Bewegung* vor. Die Beschleunigung  $a$  ist der Quotient aus der Änderung der Geschwindigkeit  $\Delta v$  in der Zeit  $\Delta t$ . Wie bei der Geschwindigkeit sind auch hier *Momentanbeschleunigung* und *Durchschnittsbeschleunigung* zu unterscheiden.

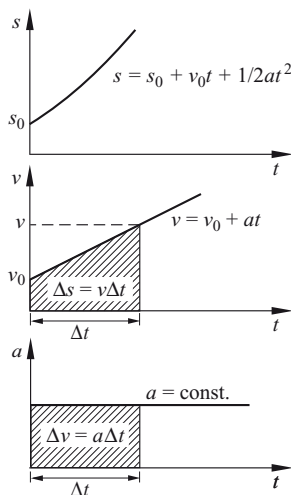


**Bild II-2**  $s(t)$ -,  $v(t)$ - und  $a(t)$ -Diagramm einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \frac{a}{\text{m/s}^2} \quad \left| \frac{\Delta v}{\text{m/s}} \right| \quad \left| \frac{\Delta t}{\text{s}} \right| \quad (\text{II.3})$$

$\Delta v = v_2 - v_1$ , Differenz der Geschwindigkeiten.

$\Delta t = t_2 - t_1$ , Differenz der entsprechenden Zeiten.

Ist die Beschleunigung konstant, so liegt eine *gleichmäßig beschleunigte Bewegung* vor. Hat ein Körper zum Zeitpunkt  $t = 0$  die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  und befindet er sich am Ort  $s_0$ , so ändern sich seine Geschwindigkeit  $v$  und die Ortskoordinate  $s$  mit der Zeit entsprechend der folgenden Gleichungen:

$$v = v_0 + at \quad (\text{II.4})$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (\text{II.5})$$

Ist  $a = 0$ , so liegt eine gleichförmige Bewegung vor. Mit diesen Gleichungen können auch verzögerte Bewegungen berechnet werden;  $a$  ist dann negativ einzusetzen, der Körper wird langsamer und somit abgebremst.

■ **Beispiel:** Ein Eisenbahnzug, der sich 20 km von seinem Startbahnhof befindet, fährt 30 min lang mit konstanter Geschwindigkeit  $v_0 = 60 \text{ km/h}$ . Dann wird er mit einer Beschleunigung  $a = -0,222 \text{ m/s}^2$  abgebremst. Wie lang ist sein Bremsweg, und wie weit ist er dann von seinem Startbahnhof entfernt?

**Lösung:** Um die Bremszeit zu berechnen, wird in (II.4) die Endgeschwindigkeit  $v = 0$  eingesetzt:

Bremszeit ( $v = 0$ ):

$$t_B = -\frac{v_0}{a} = \frac{60000 \text{ m}}{3600 \text{ s} \cdot 0,222 \text{ m/s}^2} = 75 \text{ s}$$

Entfernung von Bahnhof zu Beginn des Bremsvorganges nach (II.2):

$$s_0 = 20 \text{ km} + 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 0,5 \text{ h} = 50 \text{ km}$$

Entfernung von Bahnhof zu Ende des Bremsvorganges nach (II.5):

$$s = 50 \text{ km} + \frac{60 \text{ km} \cdot 75 \text{ s}}{3600 \text{ s}} - \frac{0,222 \text{ m} \cdot 75^2 \text{ s}^2}{2 \text{ s}^2}$$

$$s = 50,626 \text{ km}$$

Trägt man in einer Grafik den zurückgelegten Weg als Funktion der Zeit auf, so erhält man das  $s(t)$ -Diagramm. Bei Auftragung der momentanen Geschwindigkeit als Funktion der Zeit das  $v(t)$ -Diagramm. Im  $s(t)$ -Diagramm ist die Momentangeschwindigkeit anschaulich als Steigung der Weg-Zeit-Kurve abzulesen, während der in einer Zeit  $\Delta t$  zurückgelegte Weg  $\Delta s$  aus dem  $v(t)$ -Diagramm als Fläche unter der Kurve bestimmt werden kann. ( $\Delta s = v \cdot \Delta t$ ).

### 1.1.3 Freier Fall

Ein Beispiel für eine Bewegung unter dem Einfluss einer konstanten Beschleunigung ist die Bewegung an der Erdoberfläche allein unter dem Einfluss der Erdanziehungskraft, d.h. ohne Luftreibung und andere Kräfte. Die *Erdbeschleunigung* hat für alle Körper

den mittleren Wert von  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ . Startet ein Körper aus der Ruhe, so gelten die Gleichungen (II.4) und (II.5) mit  $v_0 = 0$  und  $a = -g$ . Die Höhe  $h$  wird von der Erdoberfläche aus in positiver Richtung nach oben gemessen und entspricht der Anfangskoordinate  $s_0$ . Die Fallzeit bestimmt sich aus der Bedingung  $s(t_F) = 0$ .

Fallzeit:

$$0 = h - \frac{1}{2} g t_F^2 \quad (\text{II.6})$$

$$t_F = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (\text{II.7})$$

Die Fallgeschwindigkeit zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  berechnet sich nach

$$v_F(t) = g \cdot t \quad (\text{II.8})$$

daraus folgt für die Aufprallgeschwindigkeit oder Endgeschwindigkeit  $v_e$ , die ja nach der Fallzeit  $t_F$  erreicht ist:

$$v_e = g \cdot t_F \quad (\text{II.9})$$

$$v_e = g \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2hg} \quad (\text{II.10})$$

■ **Beispiel:** Ein Körper fällt von einem Turm der Höhe  $h = 20 \text{ m}$  im freien Fall.

a) Wann kommt er unten an?

b) Wie groß ist dann seine Geschwindigkeit?

**Lösung:**

$$\text{a) } t_F = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \text{ m}}{9,81 \text{ m/s}^2}}$$

$$t_F = \sqrt{\frac{40 \text{ m}}{9,81 \text{ m/s}^2}} = 2,02 \text{ s}$$

$$\text{b) } v_e = \sqrt{2hg} = \sqrt{2 \cdot 20 \text{ m} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$v_e = 19,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

### 1.1.4 Senkrechter Wurf

Beim Wurf nach oben ist  $v_0$  positiv, beim Wurf nach unten negativ einzusetzen. Hierbei kann ebenfalls eine Anfangshöhe  $s_0 = h$  angenommen werden. Die maximale Steighöhe und die Steigzeit beim Wurf nach oben folgen aus der Bedingung, dass am Um-

kehrpunkt die momentane Geschwindigkeit  $v = 0$  und am Ende des Fluges die Höhe  $h = 0$  sein muss. Aus diesen Bedingungen folgen aus den Gleichungen (II.4) und (II.5) die nachfolgenden Formeln. Bei negativen Werten der Geschwindigkeit ist die Bewegung abwärts gerichtet.

$$\text{momentane Geschwindigkeit } v(t) = v_0 - g t \quad (\text{II.11})$$

$$\text{momentane Höhe } h(t) = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (\text{II.12})$$

$$\text{Flugzeit } (h(t) = 0) \quad t_F = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2s_0 g}}{g} \quad (\text{II.13})$$

$$\text{Endgeschwindigkeit } v_e = -\sqrt{v_0^2 + 2s_0 g} \quad (\text{II.14})$$

$$\text{Steigzeit } (v(t) = 0) \quad t_s = \frac{v_0}{g} \quad (\text{II.15})$$

$$\text{maximale Höhe } (t = t_s) \quad h_s = s_0 + \frac{v_0^2}{2g} \quad (\text{II.16})$$

Die Formeln (II.11)–(II.15) gelten auch für den senkrechten Fall nach unten, während die Formel (II.16) hier dann keinen Sinn ergibt.

■ **Beispiel:** Von einem 10 m hohen Turm wird ein Stein mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 20 m/s senkrecht nach oben geworfen. Wie groß sind die maximale Höhe und die gesamte Flugzeit?

**Lösung:**

$$h_s = 10 \text{ m} + \frac{(20 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} = 30,39 \text{ m}$$

$$t_f = \frac{20 \text{ m/s} + \sqrt{(20 \text{ m/s})^2 + 2 \cdot 10 \text{ m} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}}{9,81 \text{ m/s}^2} = 4,528 \text{ s}$$

## 1.2 Zusammengesetzte Bewegungen

Im Gegensatz zu eindimensionalen Bewegungen sind hier bei allen vektoriellen Größen zwei Angaben notwendig. Als Richtungen sollen  $x$ - und  $y$ -Richtung festgelegt sein, die entsprechenden Größen werden durch die Indizes  $x$  und  $y$  unterschieden.

Führt ein Körper gleichzeitig Bewegungen in  $x$ - und  $y$ -Richtung aus, sogenannte *zusammengesetzte Bewegungen*, so überlagern sich diese Bewegungen unabhängig voneinander und der Endzustand ist derselbe, als wenn die einzelnen Bewegungen nacheinander ausgeführt worden wären.

Als Beispiel soll eine Bewegung in einem strömenden Fluss der Breite  $b$  betrachtet werden. Der Fluss fließt in  $x$ -Richtung mit einer Geschwindigkeit  $v_F$ . Der Geschwindigkeitsvektor kann dann in eine Komponente parallel zum Ufer und eine senkrecht zum Ufer aufgeteilt werden, dies sollen die  $x$ - und  $y$ -Richtung sein. Eine Schreibweise hierfür ist die *Komponentenschreibweise* vektorieller Größen:

$$\vec{v} = (v_x, v_y) \quad (\text{II.17})$$

und somit

$$\vec{v}_F = (v_{Fx}, 0).$$

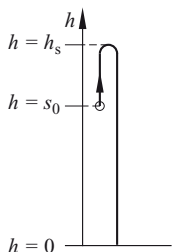


**Bild II-3**  
Senkrechter Wurf

In dem Wasser bewegt sich ein Boot mit einer Eigengeschwindigkeit  $\vec{v}_B$  relativ zum Wasser. Ist das Wasser in Ruhe, so ist dies auch die Geschwindigkeit relativ zum Grund  $\vec{v}_G$ .

$$\vec{v}_B = (0, v_{By})$$

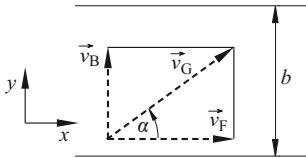


**Bild II-4** Geschwindigkeiten im Fluss

In einem strömenden Fluss ist nun  $\vec{v}_B$  unterschiedlich von  $\vec{v}_G$ .

Die Geschwindigkeit des Bootes kann nun entweder *relativ* zum Grund oder *relativ* zum Wasser angegeben werden. Der Zusammenhang ist:

$$\vec{v}_G = \vec{v}_B + \vec{v}_F = (v_{Fx}, v_{By}) \quad (\text{II.18})$$

Es gilt also, dass sich die einzelnen Komponenten unabhängig addieren.

Hieraus lassen sich die folgenden Größen berechnen:

$$\text{Zeit zum Überqueren } t = \frac{b}{v_{By}} \quad (\text{II.19})$$

$$\text{Weg in x-Richtung } s_{Gx} = v_{Fx} \cdot t \quad (\text{II.20})$$

$$\text{Weg in y-Richtung } s_{Gy} = v_{By} \cdot t \quad (\text{II.21})$$

$$\text{Gesamter Weg } s_G = \sqrt{s_{Gx}^2 + s_{Gy}^2} \quad (\text{II.22})$$

$$\text{Geschwindigkeit } v_G = \sqrt{v_{Fx}^2 + v_{By}^2} \quad (\text{II.23})$$

$$\text{Richtung } \alpha = \arctan\left(\frac{v_{By}}{v_{Fx}}\right) \quad (\text{II.24})$$

■ **Beispiel:** In einem Fluss der Breite 500 m fließt Wasser mit einer Strömungsgeschwindigkeit von 2 m/s. Senkrecht zum Ufer startet ein Boot mit einer Eigengeschwindigkeit von 10 m/s. Wie lange braucht das Boot für die Überquerung, und wie groß ist die seitliche Abdrift?

**Lösung:**

$$\text{Zeit } t = \frac{500 \text{ m}}{10 \text{ m/s}} = 50 \text{ s}$$

$$\text{Abdrift } d = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 50 \text{ s} = 100 \text{ m}$$

### 1.2.1 Schiefer Wurf

Ein weiteres Beispiel für eine *zusammengesetzte Bewegung* ist die Bewegung eines Steines, der unter einem bestimmten Winkel  $\alpha$  mit einer Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  geworfen wird (*schiefer Wurf*). In diesem Fall handelt es sich um die Überlagerung einer gleichmäßigen Bewegung in x-Richtung mit einer gleichförmig beschleunigten Bewegung (freier Fall) in y-Richtung. Die Flugbahn unter dem Einfluss

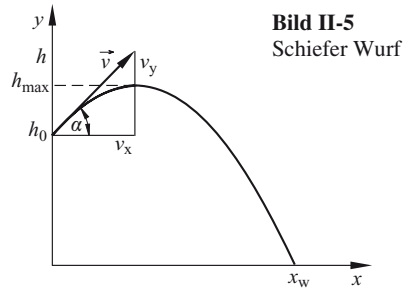


**Bild II-5**  
Schiefer Wurf

einer konstanten Kraft (Erdbeschleunigung) ist in diesem Fall eine Parabel (*Wurfparabel*).

Es soll auch zugelassen werden, dass der Stein in einer Höhe  $h_0$  abgeworfen wird. Aus den Bedingungen, dass am Ende der Bewegung der Wert für  $y = 0$  sein muss und am höchsten Punkt der Wert für  $v_y = 0$  sein muss, folgen die Gleichungen für den *Schiefen Wurf* aus einer Anfangshöhe  $h_0$  und mit einer Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ :

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha \quad (\text{II.25})$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin \alpha \quad (\text{II.26})$$

$$v_x(t) = v_0 \cdot \cos \alpha = \text{const} \quad (\text{II.27})$$

$$v_y(t) = v_0 \cdot \sin \alpha - g t \quad (\text{II.28})$$

$$y(t) = h_0 + v_0 \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \quad (\text{II.29})$$

$$x(t) = v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha \quad (\text{II.30})$$

$$\text{Flugzeit } t_F = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha + \sqrt{(v_0 \cdot \sin \alpha)^2 + 2 g h_0}}{g} \quad (\text{II.31})$$

$$\text{Flughöhe } h_{\max} = h_0 + \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 g} \quad (\text{II.32})$$

$$\text{Flugweite } x_w = v_0 \cdot t_F \cdot \cos \alpha \quad (\text{II.33})$$

Wenn in den Gleichungen (II.29) bis (II.32) der Wert für  $h_0$  auf 0 gesetzt wird, so ergeben sich die Gleichungen für den Fall eines *Schiefen Wurfs* mit Anfangshöhe 0.

$$\text{Flugzeit } t_F = \frac{2 v_0 \cdot \sin \alpha}{g} \quad (\text{II.34})$$

$$\text{Flughöhe } h_{\max} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 g} \quad (\text{II.35})$$

$$\text{Flugweite } x_w = v_0 \cdot t_F \cdot \cos \alpha = \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g} \quad (\text{II.36})$$

■ **Beispiel:** Ein Stein wird unter einem Winkel von  $30^\circ$  mit einer Anfangsgeschwindigkeit von  $20 \text{ m s}^{-1}$  geworfen. Wie weit fliegt er, und wann trifft er auf den Boden?

**Lösung:**

$$\text{Flugweite } x_w = \frac{(20 \text{ m s}^{-1})^2 \cdot \sin 60^\circ}{9,81 \text{ m s}^{-2}} = 35,31 \text{ m}$$

$$\text{Flugzeit } t_F = \frac{2 \cdot 20 \text{ m s}^{-1} \cdot \sin 30^\circ}{9,81 \text{ m s}^{-2}} = 2,04 \text{ s}$$

### 1.3 Kreisbewegung

Bei einer Kreisbewegung bewegt sich eine punktförmige Masse auf einer Kreisbahn mit dem Radius  $r$ . Wenn in gleichen Zeiten  $\Delta t$  gleiche Strecken  $\Delta s$  auf dem Umfang zurückgelegt werden, so überstreicht auch die Verbindungslinie zum Zentrum des Kreises in gleichen Zeiten  $\Delta t$  gleiche Winkel  $\Delta\varphi$ .

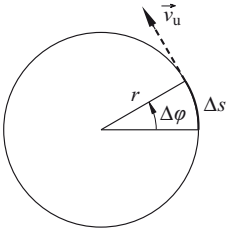


**Bild II-6**  
Kreisbewegung

#### 1.3.1 Bahngeschwindigkeit

Unter *Bahngeschwindigkeit* oder auch *Umfangsgeschwindigkeit* versteht man die Geschwindigkeit, mit der sich eine Masse  $m$  auf dem Umfang eines Kreises mit dem Radius  $r$  bewegt. Wenn sich die Masse in der Zeit  $\Delta t$  um die Strecke  $\Delta s$  weiterbewegt hat, wird von der Verbindungslinie zwischen der Masse und dem Zentrum des Kreises der Winkel  $\Delta\varphi$  überstrichen. Zwischen den Größen  $r$ ,  $\Delta s$  und  $\Delta\varphi$  gilt die Gleichung:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{r} \quad \frac{\varphi}{\text{rad}} \left| \frac{s}{\text{m}} \right| \frac{r}{\text{m}} \quad (\text{II.37})$$

$$\Delta s = r \cdot \Delta\varphi \quad (\text{II.38})$$

$$\text{Umfangsgeschwindigkeit } v_u = \frac{\Delta s}{\Delta t} = r \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad (\text{II.39})$$

$$\text{oder Bahngeschwindigkeit } v_u = r\omega \quad (\text{II.40})$$

mit der Abkürzung  $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ .

Die Größe  $\omega$  wird *Winkelgeschwindigkeit* genannt.

#### 1.3.2 Winkelgeschwindigkeit

Die *Winkelgeschwindigkeit*  $\omega$  ist durch

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \frac{\omega}{1/\text{s}} \left| \frac{\Delta\varphi}{\text{rad}} \right| \frac{\Delta t}{\text{s}} \quad (\text{II.41})$$

definiert, wobei  $\Delta\varphi$  der in der Zeiteinheit  $\Delta t$  überstrichene Winkel ist.

Bei einer Kreisbewegung mit konstanter *Winkelgeschwindigkeit*  $\omega$  (*gleichförmige Kreisbewegung*) ist die Umfangsgeschwindigkeit vom Betrag her konstant, allerdings ändert sie laufend die Richtung.

#### 1.3.3 Kreisfrequenz

Oft werden die *Drehzahl*  $n$  oder auch die *Frequenz*  $f$  einer kreisförmigen Bewegung angegeben. Im Gegensatz zur Frequenz  $f$  wird die Größe  $\omega$  auch *Kreisfrequenz* genannt.

$$\omega = 2\pi f \quad \frac{\omega}{1/\text{s}} \left| \frac{f}{\text{Hz}} \right| \frac{n}{1/\text{min}} \quad (\text{II.42})$$

$$\omega = \frac{2\pi n}{60}$$

#### 1.3.4 Winkelbeschleunigung

Werden in gleichen Zeiten ungleiche Wegstrecken auf dem Umfang zurückgelegt, ändert sich also die Umfangsgeschwindigkeit, muss der Körper eine *Tangentialbeschleunigung* erfahren. Jetzt werden in gleichen Zeiten ungleiche Winkel überstrichen, daher ändert sich die Winkelgeschwindigkeit ebenfalls. In diesem Fall liegt eine *Winkelbeschleunigung* vor. Analog zur linearen Beschleunigung wird die Winkelbeschleunigung definiert:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad \frac{\alpha}{1/\text{s}^2} \left| \frac{\Delta\omega}{1/\text{s}} \right| \frac{\Delta t}{\text{s}} \quad (\text{II.43})$$

In diesem Fall gelten analoge Gleichungen zu (II.4) und (II.5).

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad (\text{II.44})$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (\text{II.45})$$

Hierbei sind  $\omega_0$  und  $\varphi_0$  die Anfangswerte zur Zeit  $t = 0$  der Winkelgeschwindigkeit und des Winkels.

■ **Beispiel:** Ein Elektromotor läuft mit einer Drehzahl  $n = 600 \text{ min}^{-1}$ . Nach dem Abschalten wird er mit konstanter Winkelbeschleunigung  $a$  abgebremst, bis er nach 50 Umdrehungen zum Stillstand kommt.

- Wie groß ist die Winkelbeschleunigung?
- Wie lange ist die Bremszeit  $t_B$ ?

**Lösung:**

a) Anfangswerte:

$$\varphi_0 = 0, \quad \omega_0 = 2\pi \frac{n}{60} \text{ s}^{-1} = 62,83 \text{ s}^{-1}$$

50 Umdrehungen ergeben:

$$\varphi = 50 \cdot 2\pi = 314,16 \text{ rad}$$

aus (II.44) folgt:

$$\alpha = -\frac{\omega_0}{t_B}$$

Winkelbeschleunigung:

$$\alpha = -\frac{62,83 \text{ s}^{-1}}{10 \text{ s}} = -6,28 \text{ s}^{-2}$$

b) In (II.45) eingesetzt:

$$\varphi = \omega_0 t_B - \frac{\omega_0^2 t_B^2}{2} = \frac{1}{2} \omega_0 t_B$$

Bremszeit:

$$t_B = \frac{2\varphi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 314,16 \text{ rad}}{62,83 \text{ s}^{-1}} = 10 \text{ s}$$

## 2 Dynamik

In der *Kinematik* wird die Bewegung von Massen durch geeignete Formeln beschrieben, ohne dass nach der Ursache für eine Bewegung oder eine Änderung eines Bewegungszustandes gefragt wird. In der *Dynamik* werden diese Ursachen untersucht.

### 2.1 Newtonsche Axiome

*I. Newton* (1643 bis 1727) hat drei grundlegende Axiome formuliert, die das Verhalten von Körpern unter dem Einfluss äußerer Kräfte und das Zusammenspiel von Kräften untereinander beschreiben. Diese *Newtonschen Axiome* sind die Grundlagen der klassischen Mechanik und werden in der Tabelle II-1 aufgeführt:

Die Einheit der Kraft im SI-System ist  $1 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$ , hierfür wird die Abkürzung 1 N (1 Newton) verwendet.

$$1 \text{ N} = 1 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \quad (\text{II.49})$$

An der Erdoberfläche wirkt auf alle Körper die *Gewichtskraft* oder *Schwerkraft*

$$F_G = m \cdot g \quad (\text{II.50})$$

mit der Erdbeschleunigung  $g$

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (\text{II.51})$$

Eine nicht mehr zulässige Einheit der Kraft ist 1 kp (1 Kilopond). Dies ist die Gewichtskraft auf die Masse von 1 kg. Somit gilt:

**Tabelle II-1** Newtonsche Axiome

| Newtonsche Axiome                                                  | Formulierung                                                                                                                                                         | Gleichung                                   |
|--------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| 1. Axiom:<br><i>Trägheitsgesetz</i>                                | Jeder Körper beharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung, solange er nicht durch äußere Kräfte gezwungen wird, diesen Zustand zu ändern. |                                             |
| 2. Axiom<br><i>Aktionsgesetz</i>                                   | Die zeitliche Änderung der Bewegungsgröße (Impuls) $\vec{p} = m\vec{v}$ ist gleich der resultierenden Kraft $\vec{F}$ .                                              | $\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$ |
| 3. Axiom<br><i>Wechselwirkungsgesetz</i><br><i>actio = reactio</i> | Wirkt ein Körper 1 auf einen Körper 2 mit der Kraft $F_{12}$ , so wirkt der Körper 2 auf den Körper 1 mit einer gleich großen, entgegengesetzten Kraft $F_{21}$ .    | $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$              |

Das Aktionsgesetz lässt eine zeitliche Änderung sowohl der Masse als auch der Geschwindigkeit zu. In der allgemeinen Form gilt:

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{\Delta(m \cdot \vec{v})}{\Delta t} = m \cdot \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} + \vec{v} \cdot \frac{\Delta m}{\Delta t} \quad (\text{II.46})$$

Ist die Masse konstant, so ist  $\Delta m = 0$ , und es gilt mit  $\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \vec{a}$ :

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (\text{II.47})$$

Dieses Gesetz wird auch als *Newtonsches Grundgesetz* bezeichnet, gilt in dieser Form aber nur für konstante Massen.

### 2.2 Kraft

Nach dem *Newtonschen Grundgesetz* ist die Kraft  $\vec{F}$  bei konstanter Masse proportional zur Beschleunigung  $\vec{a}$ . Die Kraft ist eine vektorielle Größe. Kraft und Beschleunigung haben dieselbe Richtung.

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad \begin{array}{c|c|c} F & m & a \\ \hline \text{kg m/s}^2 & \text{kg} & \text{m/s}^2 \end{array} \quad (\text{II.48})$$

$$1 \text{ kp} = 9,81 \text{ N} \quad (\text{II.52})$$

Hängt eine Masse  $m$  an einer Feder, so wird die Feder um eine Strecke  $x$  gedehnt und zwar solange, bis die Rückstellkraft der Feder und die Gewichtskraft auf die Masse  $m$  entgegengesetzt gleich groß sind. Die Rückstellkraft der Feder wird durch die Federeigenschaften beeinflusst und in der Federkonstanten  $c$  festgelegt. Da die Rückstellkraft entgegengesetzt zur Auslenkung gerichtet ist, gilt

$$F_{\text{Rück}} = -cx \quad (\text{II.53})$$

$$c = - \frac{F_{\text{Rück}}}{x} \quad \begin{array}{c|c|c} c & F & x \\ \hline \text{N/m} & \text{N} & \text{m} \end{array} \quad (\text{II.54})$$

#### 2.2.1 Zerlegung und Zusammensetzung von Kräften

Kräfte sind Vektoren und müssen somit vektoriell addiert werden. Die grafische Lösung für die Addition zweier Kräfte und die sich daraus ergebende *resultierende Kraft* erfolgt so, dass der Anfangspunkt des zweiten Vektors in den Endpunkt des ersten Vektors verschoben wird. Es entsteht ein Parallelogramm, das *Kräfteparallelogramm*.

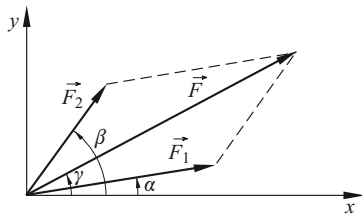


**Bild II-7** Kräfteparallelogramm

Mit Hilfe der trigonometrischen Gleichungen lassen sich die folgenden Beziehungen für die Addition von Kräften ableiten:

$$x\text{-Komponente} \quad F_x = F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta \quad (\text{II.55})$$

$$y\text{-Komponente} \quad F_y = F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta \quad (\text{II.56})$$

daraus folgt für die *Resultierende Kraft*:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (\text{II.57})$$

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 F_1 F_2 \cos(\alpha - \beta)} \quad (\text{II.58})$$

Nach Umkehrung dieser Gleichungen lassen sich die Teilkräfte aus der Resultierenden und den Winkeln berechnen:

$$F_1 = F \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin(\beta - \alpha)} \quad (\text{II.59})$$

$$F_2 = F \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)} \quad (\text{II.60})$$

Oft ist es notwendig, eine Kraft  $\vec{F}$  in zwei senkrecht zueinanderstehende Komponenten zu zerlegen. In den Gleichungen (II.59) und (II.60) ist dann  $\alpha = 0^\circ$  und  $\beta = 90^\circ$  zu setzen

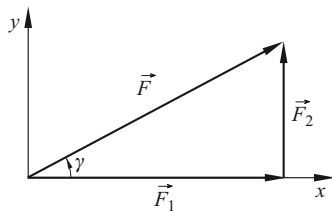


**Bild II-8** Zerlegung von Kräften

$$F_1 = F \cos \gamma \quad (\text{II.61})$$

$$F_2 = F \sin \gamma \quad (\text{II.62})$$

Der Winkel der Resultierenden mit der Kraft  $F_1$  errechnet sich zu:

$$\gamma = \arctan \left( \frac{F_2}{F_1} \right) \quad (\text{II.63})$$

### 2.2.2 Schiefe Ebene

Befindet sich ein Körper auf einer *Schiefen Ebene*, so wirkt auf ihn die Schwerkraft in der in Bild II-9 angezeigten Richtung. Diese Schwerkraft kann in

eine Komponente senkrecht zur Unterlage, der *Normalkraft*  $F_N$ , und eine Komponente parallel zur Unterlage, der *Hangabtriebskraft*  $F_H$ , zerlegt werden.

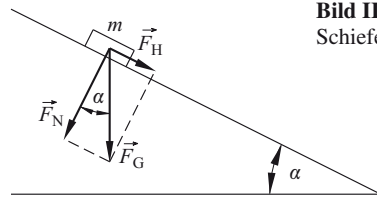


**Bild II-9**  
Schiefe Ebene

Die Beträge dieser Kräfte sind:

$$F_H = mg \sin \alpha \quad (\text{II.64})$$

$$F_N = mg \cos \alpha \quad (\text{II.65})$$

Die Hangabtriebskraft beschleunigt den Körper, während die Normalkraft den Druck auf die Unterlage bewirkt. Durch die Normalkraft wird wegen der immer vorhandenen Reibung eine der Hangabtriebskraft entgegengesetzte Reibungskraft  $F_R$  verursacht.

$$F_R = \mu F_N = \mu mg \quad (\text{II.66})$$

Die Größe  $\mu$  wird als Reibungszahl bezeichnet und hängt von der Beschaffenheit der Oberfläche der beiden an der Reibung beteiligten Körper ab und von der Art der Bewegung. Sie ist eine dimensionslose Zahl. Bei der Bewegung eines Fahrzeuges ist die *Rollreibung* zu berücksichtigen. Einige typische Werte für die Reibungszahl sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Hierbei ist zwischen *Haftreibung* und *Gleitreibung* zu unterscheiden.

**Tabelle II-2** Werte für die Reibungszahl  $\mu$

| Stoffpaar     | Haftreibung | Gleitreibung |
|---------------|-------------|--------------|
| Stahl/Stahl   | 0,15        | 0,12         |
| Stahl/Holz    | 0,5–0,6     | 0,2–0,5      |
| Stahl/Eis     | 0,027       | 0,014        |
| Holz/Holz     | 0,65        | 0,2–0,4      |
| Gummi/Asphalt | 0,9         | 0,85         |
| Gummi/Beton   | 0,65        | 0,5          |
| Gummi/Eis     | 0,2         | 0,15         |

■ **Beispiel:** Ein Fahrzeug der Masse  $m = 1000 \text{ kg}$  befindet sich auf einer Schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel  $\alpha = 10^\circ$ . Die Reibungszahl sei  $\mu = 0,1$ . Wie groß ist die Beschleunigung des Wagens?

**Lösung:**

*Normalkraft:*

$$F_N = mg \cos \alpha = 1000 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,984 = 9660 \text{ N}$$

$$\text{Reibungskraft: } F_R = \mu F_N = 0,1 \cdot 9660 \text{ N} = 966 \text{ N}$$

*Hangabtriebskraft:*

$$F_H = mg \sin \alpha = 1000 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \sin 10^\circ = 1703 \text{ N}$$

$$\text{Resultierende Kraft: } F = F_H - F_R = 1703 \text{ N} - 966 \text{ N} = 737 \text{ N}$$

$$\text{Beschleunigung: } a = F/m = 737 \text{ N}/1000 \text{ kg} = 0,737 \text{ m/s}^2$$

### 2.2.3 Kräfte bei Kreisbewegungen

Soll sich eine Masse  $m$  auf einer Kreisbahn mit konstanter Winkelgeschwindigkeit bewegen, so bleibt zwar der Betrag der Umfangsgeschwindigkeit konstant, nicht aber die Richtung (siehe Bild II-10). Die Masse  $m$  hat sich in der Zeit  $\Delta t$  vom Punkt  $P_1$  nach  $P_2$  bewegt. Dabei hat sich der Vektor der Geschwindigkeit von  $\vec{v}_1$  nach  $\vec{v}_2$  verändert, der Betrag ist aber geblieben. Da sich die Richtung geändert hat, gilt

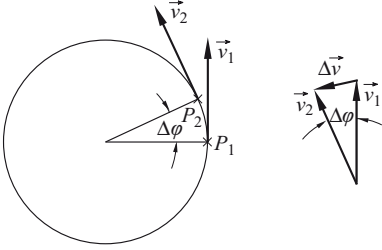


**Bild II-10** Zentripetal-Beschleunigung

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \quad (\text{II.67})$$

Die Geschwindigkeitsänderung lässt sich auch durch die Winkeländerung ausdrücken:

$$\Delta v = v \cdot \Delta \varphi \quad (\text{II.68})$$

Die Richtung von  $\Delta \vec{v}$  ist zum Zentrum der Kreisbahn gerichtet, die Geschwindigkeit hat sich daher in Richtung auf das Zentrum geändert, somit muss auch eine Beschleunigung in Richtung auf das Zentrum der Kreisbahn erfolgen

$$a_{zp} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v \cdot \Delta \varphi}{\Delta t} = v \omega \quad (\text{II.69})$$

und mit (II.40)

$$a_{zp} = \omega^2 r \quad (\text{II.70})$$

$$a_{zp} = \omega^2 r \quad \frac{\alpha_{zp}}{\text{m/s}^2} \left| \frac{\omega}{1/\text{s}^2} \right| \left| \frac{r}{\text{m}} \right| \quad (\text{II.71})$$

Diese Beschleunigung ist die *Zentripetalbeschleunigung*.

Wegen des 2. Newtonschen Axioms wirkt daher eine Kraft, die *Zentripetalkraft*

$$F_{zp} = m \omega^2 r \quad (\text{II.72})$$

Sie muss aufgewendet werden, um eine Masse  $m$  auf einer Kreisbahn zu halten. Die entgegengesetzt gerichtete gleich große Kraft ist die *Zentrifugalkraft*. Die dazugehörige Beschleunigung heißt *Zentrifugalbeschleunigung*. Diese Kraft tritt bei allen Rotationsbewegungen auf, dabei ist mit dem Radius  $r$  in Gleichung (II.72) der Abstand von der Drehachse gemeint. Als Beispiel soll die Abhängigkeit der Fallbeschleunigung auf der Erdoberfläche von der ge-

ographischen Breite untersucht werden. Dabei wird angenommen, dass die Erde eine homogene Kugel sei mit dem Radius  $r_E = 6378$  km. Die Fallbeschleunigung ist die Resultierende aus Erdbeschleunigung und Zentrifugalbeschleunigung. Am Pol ist der Abstand von der Drehachse  $= 0$ , somit tritt hier keine Zentrifugalbeschleunigung auf, und für die Fallbeschleunigung gilt  $a_F = g$ . Am Äquator ist die Zentrifugalbeschleunigung maximal, nämlich  $a_{zp} = \omega^2 r_E$ . Da sich die Erde in 24 Stunden einmal um sich selbst dreht, gilt am Äquator:

$$a_{zp} = \left( \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}} \right)^2 \cdot 6378 \cdot 10^3 \text{ m}$$

$$a_{zp} = 0,034 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Fallbeschleunigung

$$\vec{a}_F = \vec{g} + \vec{a}_{zp} \quad (\text{II.73})$$

und, da Zentrifugalbeschleunigung und Erdbeschleunigung entgegengesetzt wirken

$$a_F = (9,81 - 0,034) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9,776 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

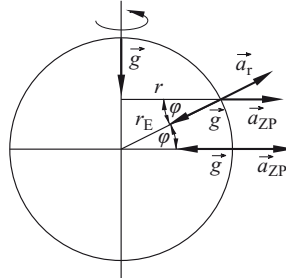


**Bild II-11** Fallbeschleunigung und geographische Breite

Für andere geographische Breiten muss entsprechend Bild II-11 der Abstand von der Drehachse  $r$  und die Komponente der Zentrifugalbeschleunigung  $a_r$  in Richtung auf den Erdmittelpunkt bestimmt werden, denn nur diese Komponente wirkt der Erdbeschleunigung, die ja zum Erdmittelpunkt gerichtet ist, entgegen. Es gelten die folgenden Gleichungen:

$$r = r_E \cdot \cos \varphi \quad (\text{II.74})$$

$$a_{zp}^{\varphi} = \omega^2 \cdot r = \omega^2 \cdot r_E \cdot \cos \varphi \quad (\text{II.75})$$

$$a_r = a_{zp}^{\varphi} \cdot \cos \varphi \quad (\text{II.76})$$

$$a_r = \omega^2 \cdot r_E \cdot \cos^2 \varphi \quad (\text{II.77})$$

und damit

$$a_F = g - \omega^2 \cdot r_E \cdot \cos^2 \varphi \quad (\text{II.78})$$



## 2.3 Impuls

Im 2. Newtonschen Axiom wird die zeitliche Änderung der Bewegungsgröße  $p$  gleich der resultierenden Kraft gesetzt. Die Bewegungsgröße ist der *Impuls*. Bei konstanter Kraft  $F$  gilt:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \begin{array}{c|c|c} p & m & v \\ \hline \text{N s} & \text{kg} & \text{m/s} \end{array} \quad (\text{II.79})$$

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta \vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t \quad (\text{II.80})$$

Die Kraft ist also gleich der zeitlichen Änderung des Impulses. Die Größe

$$\int_{t_1}^{t_2} F \, dt = p_2 - p_1 = \Delta p \quad (\text{II.81})$$

wird als Kraftstoß bezeichnet. Ist die Kraft zeitlich konstant, so vereinfacht sich Gleichung (II.81) zu

$$\Delta \vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t = \vec{F} (t_2 - t_1) \quad (\text{II.82})$$

Die Impulsänderung  $\Delta \vec{p}$ , die ja auch ein Vektor ist, hat die Richtung der angreifenden resultierenden Kraft.

■ **Beispiel:** Eine konstante Kraft von 2 kN wirkt 10 s lang auf ein ruhendes Fahrzeug der Masse  $m = 800$  kg. Wie groß sind

- der Kraftstoß,
- der Impuls,
- die Geschwindigkeit nach 10 s?

**Lösung:**

- $F \cdot \Delta t = 2000 \, \text{N} \cdot 10 \, \text{s} = 20\,000 \, \text{Ns}$
- $\Delta p = p_2 - p_1 = F \cdot \Delta t \Rightarrow p = 20\,000 \, \text{Ns}$
- $v = \frac{\Delta p}{m} = \frac{20\,000 \, \text{Ns}}{800 \, \text{kg}} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

### 2.3.1 Impulserhaltungssatz

Wirkt nun auf ein System keine äußere resultierende Kraft, so ist entsprechend (II.82) die Änderung des Impulses  $\Delta \vec{p} = 0$ . Daraus folgt, dass in diesem Fall der Impuls konstant sein muss. Dieses gilt für den *Gesamtimpuls* des betrachteten Systems. Besteht das System aus mehreren Massen mit *Einzelimpulsen*  $\vec{p}_i$ , so gilt der *Impulserhaltungssatz* für den *Gesamtimpuls*

$$\vec{p}_{\text{ges}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots + \vec{p}_n = \text{const.} \quad (\text{II.83})$$

Dabei können sich die Einzelimpulse durchaus ändern, wenn nur der Gesamtimpuls konstant bleibt. Eine weitergehende Betrachtung wird im Kapitel Stoßprozesse durchgeführt.

■ **Beispiel:** Aus einem Boot der Masse 200 kg, welches sich in ruhendem Wasser (äußere Kräfte = 0) mit einer Geschwindigkeit von 2 m/s bewegt, springt in Fahrtrichtung ein 80 kg schwerer Mann. Dabei stößt er sich 0,2 s lang mit einer Kraft von 300 N ab.

Wie groß sind die Geschwindigkeiten des Bootes und des Mannes direkt nach dem Sprung?

**Lösung:**

Gesamtimpuls zu Beginn:

$$p_g = (200 \, \text{kg} + 80 \, \text{kg}) \cdot 2 \, \text{m/s} = 560 \, \text{Ns}$$

Impulsänderung durch den Sprung:

$$\Delta p = F \Delta t = 300 \, \text{N} \cdot 0,2 \, \text{s} = 60 \, \text{Ns}$$

Impuls des Bootes nach dem Sprung:

$$p'_B = 200 \, \text{kg} \cdot 2 \, \text{m/s} - 60 \, \text{Ns} = 340 \, \text{Ns}$$

Geschwindigkeit des Bootes:

$$v'_B = 340 \, \text{Ns} / 200 \, \text{kg} = 1,7 \, \text{m/s}$$

Impuls des Mannes nach dem Sprung:

$$p'_M = 80 \, \text{kg} \cdot 2 \, \text{m/s} + 60 \, \text{Ns} = 220 \, \text{Ns}$$

Geschwindigkeit des Mannes:

$$v'_M = 220 \, \text{Ns} / 80 \, \text{kg} = 2,75 \, \text{m/s}$$

Gesamtimpuls am Ende:

$$p'_g = (340 + 220) \, \text{Ns} = 560 \, \text{Ns}$$

Die positiven Vorzeichen bei beiden Geschwindigkeiten zeigen an, dass sich sowohl der Mann wie auch das Boot weiter in der ursprünglichen Fahrtrichtung des Bootes bewegen, der Gesamtimpuls hat sich nicht verändert. Da der Impuls ein Vektor ist, muss die Impulserhaltung auch für jede Komponente gelten.

■ **Beispiel:** Der Mann aus dem voranstehenden Beispiel vorher springt nicht in Fahrtrichtung, sondern senkrecht zur Fahrtrichtung in positiver y-Richtung vom Boot. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Bootes und des Mannes direkt nach dem Sprung?

**Lösung:** Die Geschwindigkeit des Bootes und des Mannes in Fahrtrichtung bleiben unverändert.

$$\Delta p_x = F_y \cdot \Delta t = 300 \, \text{N} \cdot 0,2 \, \text{s} = 60 \, \text{Ns}$$

$$v_{B,y} = \frac{-60 \, \text{Ns}}{200 \, \text{kg}} = -0,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{M,y} = \frac{60 \, \text{Ns}}{80 \, \text{kg}} = 0,75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Das Boot bewegt sich also in entgegengesetzter Richtung zum Mann.

## 2.4 Arbeit, Leistung, Wirkungsgrad und Energie

### 2.4.1 Arbeit

Wirkt eine Kraft auf eine Masse  $m$  und verschiebt sie dabei die Masse  $m$  um den Weg  $\Delta s$ , so hat die Kraft den Zustand des Körpers verändert, es wurde *Arbeit* verrichtet. Schließt die Kraft einen Winkel  $\alpha$  mit der Richtung von  $\Delta s$  ein, so gilt für die *Teilarbeit*  $\Delta W$  auf dieser Wegstrecke:

$$\Delta W = F \cdot \Delta s \cdot \cos \alpha \quad (\text{II.84})$$

Es wirkt nur die Projektion der Kraft in Richtung des Weges. Die für den gesamten Weg aufzubringende Arbeit ist dann aus der Summe der Teilarbeiten zu berechnen.

$$W = \sum \Delta W \quad (\text{II.85})$$

Ist die Kraft während des gesamten Vorganges konstant und parallel zum Weg, so folgt aus Gleichung (II.84) und (II.85) für die gesamte Arbeit

$$W = F \cdot s \quad \begin{array}{c|c|c} W & F & s \\ \hline \text{Nm} & \text{N} & \text{m} \end{array} \quad (\text{II.86})$$

Die Einheit der Arbeit ist 1 Nm, dafür wird die Abkürzung 1 J (Joule) verwendet.



$$1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} = 1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} \quad (\text{II.87})$$

Immer dann, wenn eine Masse  $m$  gegen eine Kraft  $F$  bewegt wird, muss Arbeit verrichtet werden. Wird die Masse in Richtung der Kraft bewegt, wird Arbeit gewonnen. Wird z.B. eine Masse  $m$  gegen die Gewichtskraft um eine Höhe  $\Delta s = h$  angehoben, so ist dafür die *Hubarbeit*

$$W_{\text{hub}} = F_G \cdot h = mgh \quad (\text{II.88})$$

gegen die konstante Gewichtskraft zu verrichten. Die Fläche im  $F$ - $s$ -Diagramm ist somit gleich der Arbeit.

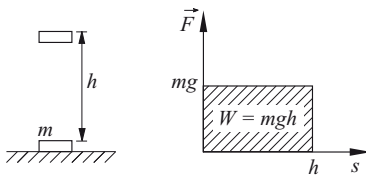


**Bild II-12** Hubarbeit

Wird ein Körper beschleunigt, so ist *Beschleunigungsarbeit* zu verrichten. Nach Gleichung (II.5) gilt, dass für den zusätzlich während der Beschleunigungszeit  $\Delta t$  zurückgelegten Weg  $\Delta s$  gilt:

$$\Delta s = \frac{1}{2} a (\Delta t)^2.$$

Aus Gleichung (II.3) folgt

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{a}$$

und somit

$$\Delta s = \frac{1}{2} a \left( \frac{\Delta v}{a} \right)^2 = \frac{(\Delta v)^2}{2a} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a}.$$

Damit gilt für die *Beschleunigungsarbeit*

$$W_{\text{beschl}} = ma \cdot \Delta s$$

und somit

$$W_{\text{beschl}} = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) \quad (\text{II.89})$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass keine weiteren Arbeiten, wie z.B. Reibungsarbeit, zu verrichten sind. Wird ein Körper bei vorhandener *Reibungskraft* auf horizontalem Weg bewegt, so ist jetzt *Reibungsarbeit* gegen die Reibungskraft zu verrichten:

*Reibungsarbeit*

$$W_R = F_R \cdot (s_2 - s_1) = F_N \cdot \mu \cdot g \cdot (s_2 - s_1) \quad (\text{II.90})$$

Um eine Feder zusammenzudrücken, muss ebenfalls Arbeit gegen die Rückstellkraft der Feder geleistet werden. Wird eine Feder um die Strecke  $x$  zusammengedrückt, so ist die Rückstellkraft nicht konstant, sondern gemäß Bild II-13 von der Auslenkung abhängig. Auch hier ist die Spannarbeit gleich der gestrichelten Fläche in Bild II-13. Es gilt

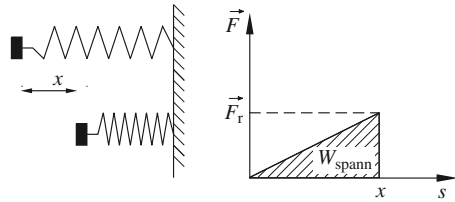


**Bild II-13** Spannarbeit

$$W_{\text{spann}} = \frac{1}{2} F_r x \quad (\text{II.91})$$

$$W_{\text{spann}} = \frac{1}{2} cx^2 \quad (\text{II.92})$$

### 2.4.2 Leistung, Wirkungsgrad

Die *Leistung*  $P$  gibt an, wieviel Zeit  $\Delta t$  zur Verrichtung einer Arbeit  $\Delta W$  benötigt wird.

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad \begin{array}{c|c|c} P & \Delta W & \Delta t \\ \hline \text{Nm/s} & \text{Nm} & \text{s} \end{array} \quad (\text{II.93})$$

Hieraus folgt:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{F \cdot \Delta s}{\Delta t} \quad (\text{II.94})$$

$$P = F \cdot v \quad (\text{II.95})$$

Die SI-Einheit der Leistung ist das *Watt*.

$$1 \text{ W} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{s}} \quad (\text{II.96})$$

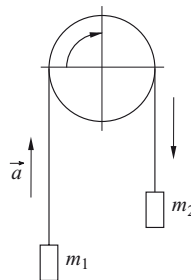


**Bild II-14**  
Antriebsleistung

Bei allen Maschinen und Antrieben gibt es immer Verluste durch Reibung, Wärme etc. Die von der Maschine geleistete Arbeit ist immer kleiner als die zugeführte Arbeit. Das Verhältnis von abgegebener Arbeit zu zugeführter Arbeit wird *Wirkungsgrad*  $\eta$  genannt.

$$\eta = \frac{W_{\text{ab}}}{W_{\text{zu}}} \leq 1 \quad (\text{II.97})$$

Der Wirkungsgrad ist eine dimensionslose Größe.

■ **Beispiel:** Ein beladener Förderkorb mit der zulässigen Gesamtmasse  $m_1 = 1000 \text{ kg}$  ist über eine Rolle mit dem Gegengewicht  $m_2 = 400 \text{ kg}$  verbunden. Der Korb wird zu Beginn mit der Be-

schleunigung  $a = 1 \text{ m/s}^2$  aufwärts beschleunigt, bis er dann mit einer konstanten Geschwindigkeit von  $5 \text{ m/s}^{-1}$  nach oben fährt. Die Reibungskraft  $F_R$  wird als konstant mit  $500 \text{ N}$  angenommen. Welche Dauerleistung und welche maximale Leistung muss die Antriebsmaschine bei einem Wirkungsgrad von  $0,8$  leisten?

**Lösung:**

Während der Phase der beschleunigten Bewegung ist die Kraft:

$$F_a = m_1(g + a) - m_2(g - a) + F_R = 7786 \text{ N}$$

$$P_a = \frac{F_a v_2}{\eta} = 48,67 \text{ kW}$$

während der Phase der gleichförmigen Bewegung gilt:

$$F_v = (m_1 - m_2)g + F_R = 6386 \text{ N}$$

$$P_v = \frac{F_v v_2}{\eta} = 39,91 \text{ kW}$$

### 2.4.3 Energie

Wird einem Körper Arbeit zugeführt, so erhöht sich seine *Energie*  $E$ . Energie und Arbeit werden in der gleichen Einheit gemessen (II.87).

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \Delta W \quad (\text{II.98})$$

Wird einem Körper *Hubarbeit* zugeführt, so erhöht sich seine *Lageenergie* oder auch *potentielle Energie*  $E_{\text{pot}}$ . Durch Beschleunigungsarbeit wird die *kinetische Energie*  $E_{\text{kin}}$  erhöht. Es gilt für die

*potentielle Energie*

$$E_{\text{pot}} = m g h \quad (\text{II.99})$$

Und für die *kinetische Energie*

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 \quad (\text{II.100})$$

Die unterschiedlichen Energieformen können während des Ablaufes eines Vorganges in andere Energieformen umgewandelt werden. Es gilt jedoch der grundlegende Satz von der *Erhaltung der Energie* in einem abgeschlossenen System.

**Energieerhaltungssatz:**

In einem abgeschlossenen System ist die Summe aller Energien, die Gesamtenergie, zu jedem Zeitpunkt konstant. Energie kann sich in verschiedene Formen umwandeln und zwischen verschiedenen Teilen des Systems austauschen.

$$E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_n = \text{const} \quad (\text{II.101})$$

■ **Beispiel:** Eine Stahlkugel ( $m = 1 \text{ kg}$ ) fällt aus einer Höhe von  $2 \text{ m}$  auf eine Stahlplatte.

Wie groß ist ihre Geschwindigkeit kurz vor dem Aufprall?

**Lösung:**

Energien in Höhe  $h$ :  $E_{\text{pot}} = m g h$ ,  $E_{\text{kin}} = 0$

vor dem Aufprall:  $E_{\text{pot}} = 0$ ,  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$

$$m g h = \frac{1}{2} m v^2$$

Aufprallgeschwindigkeit  $v_e = \sqrt{2 g h}$  siehe auch (II.10)

$$v_e = \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2 \text{ m}} = 6,26 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

■ **Beispiel:** Eine Stahlkugel ( $m = 1 \text{ kg}$ ) fällt aus einer Höhe von  $h_0 = 2 \text{ m}$  auf eine Stahlplatte und springt dann bis zu einer Höhe von  $h_1 = 1,90 \text{ m}$  zurück. Welche Energie geht durch Verformungsarbeit während des Aufpralles verloren?

**Lösung:**

Umwandlungsenergie = Differenz der potentiellen Energien.

$$\Delta E = m g (h_0 - h_1) \quad (\text{II.102})$$

$$\Delta E = 0,981 \text{ J}$$

## 2.5 Stoßprozesse

Stoßen zwei Körper zusammen, so berühren sie sich kurzzeitig und ändern ihren Bewegungszustand. Je nach Art der Energieübertragung unterteilt man mechanische Stöße in *elastische* und *inelastische Stöße*, nach den geometrischen Verhältnissen in *gerade* und *schiefe Stöße*, *zentrale* und *exzentrische Stöße*. Im Rahmen dieses Buches werden nur gerade, zentrale Stöße behandelt. Die Stoßpartner bewegen sich also auf einer Geraden und treffen sich auf der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte.

### 2.5.1 Elastischer Stoß

Beim elastischen Stoß ist die Bewegungsenergie  $E$  vor dem Stoß gleich der Bewegungsenergie  $E'$  nach dem Stoß. (Größen nach dem Stoß werden durch ' gekennzeichnet.) Weiterhin gilt der Impulserhaltungssatz (II.83)  $\vec{p} = \vec{p}'$ .

**Energieerhaltung**

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1' v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2' v_2'^2 \quad (\text{II.103})$$

**Impulserhaltung**

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' \quad (\text{II.104})$$

**Geschwindigkeiten nach dem Stoß**

$$\vec{v}_1' = \frac{(m_1 - m_2) \vec{v}_1 + 2 m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (\text{II.105})$$

$$\vec{v}_2' = \frac{(m_2 - m_1) \vec{v}_2 + 2 m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2} \quad (\text{II.106})$$

■ **Beispiel:** Eine Kugel der Masse  $m_1 = 2 \text{ kg}$ ,  $v_1 = 3 \text{ m/s}$  stößt elastisch mit einer ruhenden Kugel  $m_2 = 1 \text{ kg}$ ,  $v_2 = 0 \text{ m/s}$  zusammen. Wie groß sind die Geschwindigkeiten nach dem Stoß?

$$\text{Lösung: } v_1' = \frac{(2-1) \text{ kg} \cdot 3 \text{ m/s} + 2 \cdot 1 \text{ kg} \cdot 0 \text{ m/s}}{2 \text{ kg} + 1 \text{ kg}} = 1 \text{ m/s}$$

$$v_2' = \frac{(1-2) \text{ kg} \cdot 0 \text{ m/s} + 2 \cdot 2 \text{ kg} \cdot 3 \text{ m/s}}{2 \text{ kg} + 1 \text{ kg}} = 4 \text{ m/s}$$

Haben beide Kugeln gleiche Massen, so ergibt sich:  $\vec{v}_1' = \vec{v}_2$  und  $\vec{v}_2' = \vec{v}_1$ .

### 2.5.2 Inelastischer Stoß

Beim inelastischen Stoß wird ein Teil der Bewegungsenergie in andere Energiearten, z.B. Verformungsenergie oder Wärmeenergie  $\Delta E$ , umgewandelt.

$$E_1 + E_2 + \dots + E_n = E_1' + E_2' + \dots + E_n' + \Delta E \quad (\text{II.107})$$

Um  $\Delta E$  berechnen zu können, sind weitere Angaben notwendig. Haben nach dem Stoß beide Körper dieselbe Geschwindigkeit, so liegt ein *vollkommen inelastischer* oder auch *unelastischer Stoß* vor.

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}'_2 = \vec{v}' \quad (\text{II.108})$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}' \quad (\text{II.109})$$

$$\vec{v}' = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (\text{II.110})$$

■ **Beispiel:** Ein Auto ( $m_1 = 1000 \text{ kg}$ ,  $\vec{v}_1 = 100 \text{ km/h}$ ) stößt frontal vollkommen inelastisch mit einem zweiten entgegenkommenden Wagen ( $m_2 = 1500 \text{ kg}$ ,  $\vec{v}_2 = -120 \text{ km/h}$ ) zusammen. Die Dauer des Stoßes sei  $0,5 \text{ s}$ , beide Fahrer wiegen  $100 \text{ kg}$ . Das Minuszeichen bei  $\vec{v}_2$  bedeutet, dass  $\vec{v}_2$  entgegengesetzt zu  $\vec{v}_1$  gerichtet ist.

- a) Wie groß ist die Geschwindigkeit beider Fahrzeuge nach dem Aufprall?  
b) Welche Kräfte haben beide Fahrer auszuhalten?

**Lösung:**

a) nach (II.110)

$$\vec{v}' = \frac{1100 \text{ kg} \cdot 100 \text{ km/h} - 1600 \text{ kg} \cdot 120 \text{ km/h}}{1100 + 1600 \text{ kg}}$$

$$\vec{v}' = -30,37 \text{ km/h}$$

b) nach (II.82)

$$\vec{F}_1 = \frac{\Delta p_1}{\Delta t} = \frac{100 \text{ kg} \cdot (-30,37 - 100) \text{ km/h}}{0,5 \text{ s}} = -2747 \text{ N}$$

$$\vec{F}_2 = \frac{\Delta p_2}{\Delta t} = \frac{100 \text{ kg} \cdot (-30,37 + 120) \text{ km/h}}{0,5 \text{ s}} = 1792,6 \text{ N}$$

## 2.6 Rotation

### 2.6.1 Drehmoment

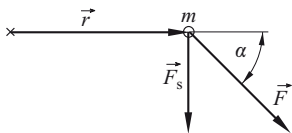


**Bild II-15**  
Drehmoment

Um einen Körper in Drehbewegung oder *Rotation* zu versetzen, muss auf diesen Körper eine resultierende Kraft  $\vec{F}$  wirken, die in einem Abstand  $\vec{r}$  von der Drehachse angreifen muss. Die Richtung der Kraft darf aber nicht auf der Verbindungslinie vom Zentrum der Drehbewegung zum Angriffspunkt der Kraft liegen. Der Winkel  $\alpha$  darf also nicht  $0^\circ$  sein. Ist dies der Fall, so bewirkt nur die Komponente der Kraft  $F_s$  senkrecht zur Verbindungslinie Angriffspunkt–Drehachse eine Rotation.

Aus  $\vec{r}$  und  $\vec{F}$  wird durch Gleichung

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \left| \frac{\text{M}}{\text{Nm}} \right| \left| \frac{r}{\text{m}} \right| \left| \frac{F}{\text{N}} \right| \quad (\text{II.111})$$

eine Vektor  $\vec{M}$  definiert. Dieser heißt *Drehmoment*. Der Betrag von  $\vec{M}$  ist durch

$$M = r \cdot F_s = r \cdot F \cdot \sin \alpha \quad (\text{II.111})$$

gegeben.

Mit dieser Formel wird allerdings nur der Betrag des Drehmomentes berechnet, die Richtung ergibt sich aus der *Rechte Hand Regel*:

Der Daumen der rechten Hand wird in die Richtung von  $\vec{r}$  gehalten, der Zeigefinger in Richtung  $\vec{F}_s$ , der Mittelfinger zeigt die Richtung von  $\vec{M}$  an.

### 2.6.2 Massenmittelpunkt, Schwerpunkt

Greifen an einem *starrten Körper*, also einem System von fest miteinander verbundenen Massenpunkten, beliebige äußere Kräfte an, so wird das System eine Translation und eine Rotation durchführen. Das System ist nur dann im *statischen Gleichgewicht*, wenn die Summe aller äußeren Kräfte und die Summe aller äußeren Drehmomente  $= 0$  ist.

$$\sum \vec{F}_a = 0 \quad (\text{II.112})$$

$$\sum \vec{M}_a = 0 \quad (\text{II.113})$$

Dieses Gleichgewicht stellt sich dann ein, wenn der Körper in einem ganz bestimmten Punkt durch eine Stützkraft  $\vec{F}_s$  unterstützt wird. Diese muss entgegengesetzt gleich der Gewichtskraft aller Massenpunkte sein.

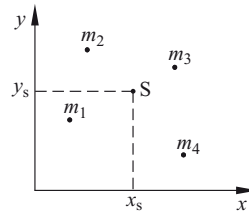


**Bild II-16**  
Schwerpunkt

$$\vec{F}_s + \sum_{i=1}^N m_i \vec{g} = 0 \quad (\text{II.114})$$

Dadurch ist (II.112) erfüllt. Weiterhin muss bezüglich einer beliebigen Drehachse das Gesamtdrehmoment gleich der Summe der Einzeldrehmomente sein.

$$\vec{M}_{\text{ges}} + \sum_{i=1}^N \vec{M}_i = 0 \quad (\text{II.115})$$

Aus diesen Gleichungen kann die Koordinate dieses Punktes bestimmt werden. Dieser Punkt ist der *Schwerpunkt* oder *Massenmittelpunkt* des starren Körpers. Die Lage hängt von der Massenverteilung ab. Gezeichnet sind vier willkürlich angeordnete Massen und ein noch zu bestimmender Schwerpunkt S. Die Schwerpunkt-Koordinaten berechnen sich bei einer räumlichen Anordnung zu

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad y_s = \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad z_s = \frac{\sum_{i=1}^N m_i z_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad (\text{II.116})$$

■ **Beispiel:** Berechnung der Schwerpunktkoordinaten folgender Anordnung:  $m_1 = 200 \text{ g}$ ,  $m_2 = 300 \text{ g}$ ,  $m_3 = 100 \text{ g}$ . Die Massen sitzen auf den Endpunkten eines gleichseitigen Dreiecks. Die Punktkoordinaten sind:  $P_1 = (20/20)$ ,  $P_2 = (20/80)$ ,  $P_3 = (71,962/50)$ .

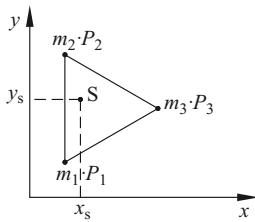


**Bild II-17**  
Beispiel Schwerpunkt

**Lösung:**  $x_s = \frac{200 \text{ g} \cdot 20 + 300 \text{ g} \cdot 20 + 100 \text{ g} \cdot 71,9652}{200 \text{ g} + 300 \text{ g} + 100 \text{ g}} = 28,66$

$$y_s = \frac{200 \text{ g} \cdot 20 + 300 \text{ g} \cdot 80 + 100 \text{ g} \cdot 50}{200 \text{ g} + 300 \text{ g} + 100 \text{ g}} = 55$$

Dieser Punkt ist eingezeichnet.

### 2.6.3 Drehimpuls

Bei Bewegungen auf einer Kreisbahn kann in Analogie zur Berechnung des Drehmomentes auch das Produkt  $rp$ , mit dem Impuls  $p$ , gebildet werden. Die hier vereinfachte wiedergegebene Ableitung gilt allerdings nur für Kreisbewegungen in einer Ebene, damit kann mit den Beträgen der Vektoren gerechnet werden. Mit den Gleichungen für Kreisbewegungen gilt:

$$r p = r m v \quad (\text{II.117})$$

$$r p = r m \omega r \quad (\text{II.118})$$

$$r p = m r^2 \omega \quad (\text{II.119})$$

Die Größe  $m r^2$  ist das *Trägheitsmoment*  $J$  eines Massenpunktes.

$$J = m r^2 \quad \begin{array}{c|c|c} J & m & r^2 \\ \hline \text{kg m}^2 & \text{kg} & \text{m}^2 \end{array} \quad (\text{II.120})$$

Das Produkt  $rp$  wird Drehimpuls  $L$  genannt.

$$L = r p \quad (\text{II.121})$$

$$L = J \omega \quad (\text{II.122})$$

$$L = r p \quad \begin{array}{c|c|c} L & r & p \\ \hline \text{kg m}^2/\text{s} & \text{m} & \text{kg m/s} \end{array} \quad (\text{II.123})$$

Weiterhin gilt für das *Drehmoment*

$$M = r F = r \frac{\Delta p}{\Delta t} \quad (\text{II.124})$$

$$M = \frac{\Delta L}{\Delta t} \quad (\text{II.125})$$

Wirken keine äußeren Drehmomente, so ist  $\Delta L = 0$  und somit  $L = \text{const}$ , der Gesamtdrehimpuls bleibt also konstant. Dies gilt allgemein, so dass hier die vektorielle Schreibweise verwendet werden kann.

$$\vec{L}_{\text{ges}} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \dots + \vec{L}_n = \text{const} \quad (\text{II.126})$$

■ **Beispiel:** Zwei gleiche Massen,  $m = 100 \text{ g}$ , rotieren im Abstand  $r = 30 \text{ cm}$  von der Drehachse mit einer Winkelgeschwindigkeit  $\omega = 2/\text{s}$ .

a) Wie groß ist der Drehimpuls?

b) Wie ändert sich die Winkelgeschwindigkeit, wenn der Abstand der Massen halbiert wird?

**Lösung:**

a)  $L_1 = 2 m r_1^2 \omega_1$

$$L_1 = 2 \cdot 0,1 \text{ kg} \cdot (0,3 \text{ m})^2 \cdot 2 \text{ s} = 0,036 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$$

b) Da der Drehimpuls konstant bleibt, gilt:

$$2 \cdot m r_1^2 \cdot \omega_1 = 2 \cdot m r_2^2 \cdot \omega_2$$

$$r_2 = \frac{r_1}{2}$$

$$\omega_2 = \frac{2 m r_1^2 \omega_1}{\frac{2 m r_1^2}{4}} = 4 \omega_1$$

$$\omega_2 = 8/\text{s}$$

### 2.6.4 Trägheitsmoment

Wird eine Punktmasse  $m$ , die sich auf einer Kreisbahn bewegt, durch die Kraft  $F$  beschleunigt, so gilt nach (II.3), (II.47) und (II.112):

$$M = r m a = r m \frac{\Delta v}{\Delta t} = r m r \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \quad \text{und mit der Winkelbeschleunigung } \alpha \text{ (II.43).}$$

$$M = m r^2 \alpha \quad (\text{II.127})$$

oder auch

$$M = J \alpha \quad (\text{II.128})$$

$J$  ist das bereits oben eingeführte *Massenträgheitsmoment* einer punktförmigen Masse  $m$  im Abstand  $r$  von der Drehachse.

Sind zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$  in unterschiedlichen Abständen  $r_1$  und  $r_2$  auf einer masselosen Stange gelagert, und greift an der Masse  $m_1$  die Kraft  $F$  an, so werden beide Massen wegen des angreifenden Drehmomentes in Rotation versetzt. Das Gesamtträgheitsmoment beider Massen kann durch folgende Überlegung bestimmt werden: Die Drehmomenten Gleichung lautet:

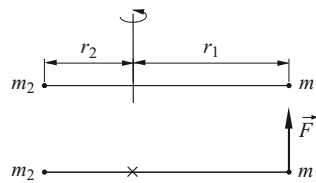


**Bild II-18** Rotation zweier Punktmassen

$$M = r_1 F = r_1 m_1 a_1 + r_2 m_2 a_2 \quad (\text{II.129})$$

Da die Winkelbeschleunigung  $\alpha$  überall gleich ist, gilt

$$\alpha = \frac{a_2}{r_2} = \frac{a_1}{r_1} \quad (\text{II.130})$$

$$M = r_1^2 m_1 \alpha + r_2^2 m_2 \alpha \quad (\text{II.131})$$

$$M = (r_1^2 m_1 + r_2^2 m_2) \alpha \quad (\text{II.132})$$

$$M = J_{\text{ges}} \alpha \quad (\text{II.133})$$

mit

$$J_{\text{ges}} = r_1^2 m_1 + r_2^2 m_2 \quad (\text{II.134})$$

$$J_{\text{ges}} = J_1 + J_2 \quad (\text{II.135})$$

Für  $n$  einzelne Massenpunkte gilt

$$J_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n J_i \quad (\text{II.136})$$

$$J_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n r_i^2 m_i \quad (\text{II.137})$$

Bei homogenen Körpern wird diese Summe zum Integral. Das Trägheitsmoment nicht punktförmiger Massen hängt von der Geometrie des Körpers und von der Lage der Drehachse ab

$$J_{\text{ges}} = \int r^2 dm = \int_{\text{Vol}} r^2 \rho dV \quad (\text{II.138})$$

mit der Dichte

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (\text{II.139})$$

In der folgenden Tabelle sind einige Beispiele für unterschiedliche Geometrien gegeben, wobei die Drehachse immer parallel zu einer Symmetrieachse liegt und durch den Schwerpunkt des Körpers führt.

**Tabelle II-3** Trägheitsmomente spezieller Körper

|                                                      |                                    |
|------------------------------------------------------|------------------------------------|
| Punktmasse                                           | $J = mr^2$                         |
| Stab<br>Achse durch Stabende,<br>senkrecht zum Stab  | $J = \frac{1}{3} ml^2$             |
| Stab<br>Achse durch Stabmitte,<br>senkrecht zum Stab | $J = \frac{1}{12} ml^2$            |
| Vollzylinder<br>Drehachse = Längsachse               | $J = \frac{1}{2} mr^2$             |
| dünne Scheibe<br>Drehachse senkrecht zur<br>Scheibe  | $J = \frac{1}{2} mr^2$             |
| Hohlzylinder<br>Drehachse = Längsachse               | $J = \frac{1}{2} m(r_a^2 + r_i^2)$ |
| dünner Ring<br>Drehachse senkrecht zum<br>Ring       | $J = mr^2$                         |
| Kugel                                                | $J = \frac{2}{5} mr^2$             |

### 2.6.5 Rotationsenergie

Rotiert ein Körper um eine beliebige Drehachse  $A$ , so hat jeder Massenpunkt *kinetische Energie* nach (II.100). Für einen Massenpunkt gilt mit (II.40) und (II.89):

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 \quad (\text{II.140})$$

und mit dem *Trägheitsmoment*  $J = mr^2$  eines Massenpunktes:

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J_A \omega^2 \quad (\text{II.141})$$

Diese Rotationsenergie ist ein weitere mögliche Bewegungsenergie. Somit gibt es zwei Bewegungsenergien: *Translations-* und *Rotationsenergie*, die unter den Oberbegriff *kinetische Energie* fallen.

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J_A \omega^2 \quad \left| \begin{array}{c|c|c} E_{\text{rot}} & J & \omega^2 \\ \hline \text{J} & \text{kg m}^2 & 1/\text{s}^{-2} \end{array} \right| \quad (\text{II.142})$$

■ **Beispiel:** Eine Kugel mit dem Radius  $r = 5$  cm rollt ohne Reibung auf einer schiefen Ebene (Neigungswinkel  $\alpha = 20^\circ$ ) aus einer Höhe  $h = 2$  m. Wie groß ist ihre Translationsgeschwindigkeit am Ende der schiefen Ebene?

**Lösung:**

$$\text{Energien in Höhe } h: E_{\text{pot}} = m g h$$

$$E_{\text{kin}} = 0 \quad (\text{II.143})$$

$$\text{am Ende der Ebene: } E_{\text{pot}} = 0$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (\text{II.144})$$

Aus dem Energieerhaltungssatz folgt, dass die Gesamtenergie in Höhe  $h$  gleich der Gesamtenergie am Ende der schiefen Ebene sein muss, daher gilt:

$$m g h = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m r^2 \frac{v^2}{r^2} \quad (\text{II.145})$$

$$g h = \frac{v^2}{2} + \frac{v^2}{5} = \frac{7}{10} v^2 \quad (\text{II.146})$$

$$v = \sqrt{\frac{10}{7} g h} \quad (\text{II.147})$$

$$v = \sqrt{\frac{10}{7} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2 \text{ m}} = 5,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die im vorigen Kapitel angegebenen Massenträgheitsmomente beziehen sich auf die Rotation um eine Achse durch den Schwerpunkt. Liegt die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt, ist aber das Trägheitsmoment  $J_s$  bezüglich der Schwerpunktsachse bekannt, so lässt sich das Trägheitsmoment  $J_A$  bezüglich der beliebigen Achse durch folgende Überlegung bestimmen:

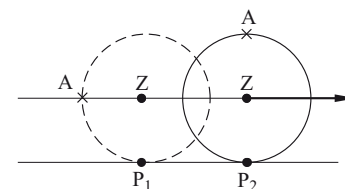


**Bild II-19** Steinerscher Satz

Eine Rotation um eine beliebige Achse kann ersetzt werden durch eine Rotation um die Schwerpunktsachse und eine Translation des Schwerpunktes. Die Kugel in Bild II-19 soll um eine Vierteldrehung von links nach rechts rollen. Der momentane Dreh-

punkt ist der Auflagepunkt  $P$ . Während dieser Drehung hat sich der Punkt  $A$  auf dem Umfang des Kreises bewegt. Das Zentrum des Kreises  $Z$  (Schwerpunkt der Kugel) hat sich linear um die Strecke  $P_1P_2$  weiterbewegt. Den Endzustand kann man auch erreichen, indem die Kugel zunächst in der Stellung 1 eine Viertelumdrehung macht und dann ohne Drehung um die Strecke  $P_1P_2$  nach rechts verschoben wird. Die Rotationsenergie für die Drehung um  $P$  ist:

$$E_{\text{kin}}^{\text{rot}} = \frac{1}{2} J_P \omega^2 \quad (\text{II.148})$$

In der zweiten Betrachtungsweise gilt:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v_s^2 + \frac{1}{2} J_S \omega^2 \quad (\text{II.149})$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} (m r^2 + J_S) \omega^2 \quad (\text{II.150})$$

$$\text{Somit gilt: } J_P = m r^2 + J_S \quad (\text{II.151})$$

Diese letzte Gleichung ist der *Steinersche Satz*. Die Drehachse durch  $P$  hat von der Drehachse durch den Schwerpunkt den Abstand  $r$ .

■ **Beispiel:** Das vorige Beispiel soll mit Hilfe des Steinerschen Satzes gelöst werden:

$$\text{Lösung: } J_P = m r^2 + \frac{2}{5} m r^2 \quad (\text{II.152})$$

$$m g h = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5} m r^2 \omega^2 \quad (\text{II.153})$$

$$m g h = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5} m v^2 \quad (\text{II.154})$$

$$v = \sqrt{\frac{10}{7} g h} \quad (\text{II.155})$$

$$v = \sqrt{\frac{10}{7} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2 \text{ m}} = 5,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

## 2.7 Gravitation

Zwischen zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$  besteht immer eine Anziehungskraft, die *Gravitationskraft*  $F_G$ . Die Richtung dieser Kraft liegt in der Verbindungslinie beider Massen, für den Betrag gilt:

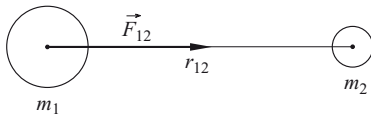


**Bild II-20** Gravitationsgesetz

$$F_G = \frac{\gamma m_1 m_2}{r_{12}^2} \quad (\text{II.156})$$

mit der Gravitationskonstanten

$$\gamma = 6,67259 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \quad (\text{II.157})$$

Der Abstand  $r_{12}$  ist bei einer räumlichen kugelförmigen homogenen Ausdehnung der Massen der Abstand der beiden Kugelzentren.

Die Erdanziehungskraft an der Oberfläche der Erde auf eine Masse  $m$  kann ebenfalls durch (II.156) be-

stimmt werden. Der Abstand  $r_{12}$  ist in diesem Fall gleich dem Erdradius  $r_E = 6378 \text{ km}$ . Die Gewichtskraft auf eine Masse  $m$  lässt sich ausdrücken durch:

$$\frac{\gamma m_E m}{r_E^2} = m g \quad (\text{II.158})$$

Mit der bekannten Erdbeschleunigung  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  kann die Masse der Erde bestimmte werden:

$$m_E = \frac{g r_E^2}{\gamma} \quad (\text{II.159})$$

$$m_E = \frac{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (6370 \cdot 10^3 \text{ m})^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}} \quad (\text{II.160})$$

$$m_E = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg} \quad (\text{II.161})$$

Auch die Bewegung der Planeten lässt sich durch (II.156) deuten. Sie ist von *Johannes Kepler* in den drei Keplerschen Gesetzen beschrieben.

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren gemeinsamen Brennpunkt die Sonne steht.
2. Jeder Strahl von der Sonne zu einem Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen ihrer Bahnen um die Sonne.

## 3 Elastische Verformung fester Körper

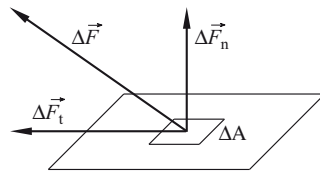


**Bild II-21**  
Spannung

Elastische Verformungen sind *reversible* Vorgänge unter dem Einfluss einer äußeren Kraft, nach Beendigung der Einwirkung geht die Verformung vollständig zurück. Entscheidend für die Größe der Verformung ist, abgesehen von den Materialeigenschaften des untersuchten Festkörpers, die *Spannung*. Diese ist definiert:

$$\text{Spannung } S = \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad \left| \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right| \quad \left| \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right| \quad (\text{II.162})$$

Dabei wird die zur Fläche  $\Delta A$  senkrechte Komponente von  $S$  die *Normalspannung*  $\sigma$  und die zur Fläche parallele Komponente Schubspannung  $\tau$  genannt.

$$\text{Normalspannung } \sigma = \frac{\Delta F_n}{\Delta A} \quad (\text{II.163})$$

$$\text{Schubspannung } \tau = \frac{\Delta F_t}{\Delta A} \quad (\text{II.164})$$

Unter Einwirkung einer Normalspannung wird sich ein Körper dehnen. Die *Dehnung*  $\varepsilon$  ist die relative Längenänderung bezogen auf die Ausgangslänge  $l_0$ .

$$\text{Dehnung } \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \quad (\text{II.165})$$

Zwischen *Normalspannung* und *Dehnung* gilt im Bereich elastischer Verformung das *Hooksche Gesetz*

$$\sigma = \varepsilon \cdot E \quad (\text{II.166})$$

$E$  ist eine materialabhängige Größe und heißt: *Elastizitätsmodul*.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad \frac{\text{Nm}^{-2}}{1} \left| \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right| \frac{\text{m}}{\text{m}} \quad (\text{II.167})$$

In der Technik ist für den *Elastizitätsmodul*  $E$  die Einheit  $\text{N/mm}^2$  geläufig.

Unter dem Einfluss einer Spannung verändert sich normalerweise auch das Volumen eines Körpers. Es gilt für einen Stab der Dicke  $d$  unter einseitiger Belastung:

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon \cdot (1 - 2\mu) \quad (\text{II.168})$$

mit der *Poissonszahl*

$$\mu = - \frac{\frac{\Delta d}{d_0}}{\varepsilon} \quad (\text{II.169})$$

Nur wenn  $\mu = 0,5$  ist, bleibt das Volumen unverändert.

## 4 Mechanik der ruhenden Flüssigkeiten und Gase

Im Gegensatz zu Festkörpern, bei denen die Atome auf festen Plätzen sitzen, können in Flüssigkeiten und Gasen die Atome bzw. Moleküle leicht gegeneinander verschoben werden. Die Atomabstände in Flüssigkeiten und Festkörpern sind ähnlich, in Gasen wesentlich größer. Festkörper und Flüssigkeiten haben ähnliche Dichten, Gase eine viel geringere Dichte. Für die Dichte  $\varrho$  gilt:

$$\varrho = \frac{m}{V} \quad \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \left| \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right| \frac{\text{m}^3}{\text{m}^3} \quad (\text{II.170})$$

### 4.1 Druck

Wird nun an einer Stelle der Flüssigkeit oder des Gases auf die Oberfläche eine Kraft ausgeübt, so überträgt sich diese auf das ganze Volumen. Das Verhältnis Kraft zu Fläche wird *Druck*  $p$  genannt. Wegen der leichten Verschiebbarkeit der Moleküle ist der Druck überall gleich groß und wirkt senkrecht auf die Oberfläche.

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \left| \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right| \frac{\text{m}^2}{\text{m}^2} \quad (\text{II.171})$$

$$\text{Die Einheit ist 1 Pascal: } 1 \text{ Pa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad (\text{II.172})$$

Eine weitere außerhalb des SI-Systems, aber nach DIN 1301 zulässige Bezeichnung ist

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} \quad (\text{II.173})$$

### 4.2 Kompressibilität

Flüssigkeiten und Gase werden durch äußeren Druck komprimiert, ihr Volumen nimmt ab.

$$V = V_a (1 - \chi \Delta p) \quad (\text{II.174})$$

$\chi$  ist die *Kompressibilität*

$$\chi = - \frac{1}{V_a} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta p} \quad (\text{II.175})$$

Da sich das Volumen verkleinert, muss sich die Dichte vergrößern.

$$\varrho = \frac{\varrho_a}{(1 - \chi \Delta p)} \quad (\text{II.176})$$

$\varrho_a$  und  $V_a$  sind die dabei jeweiligen Anfangswerte.

Da  $\chi$  von Flüssigkeiten sehr viel kleiner ist als bei Gasen, werden Flüssigkeiten oft als *inkompressibel* betrachtet. Technische Anwendung: *hydraulische Presse*.

### 4.3 Volumenausdehnung

Durch Temperaturerhöhung wird normalerweise das Volumen vergrößert. (Ausnahme: Anomalie des Wassers zwischen  $0^\circ\text{C}$  und  $4^\circ\text{C}$ , Wasser hat bei  $4^\circ\text{C}$  sein kleinstes Volumen und damit seine größte Dichte)

$$V = V_0 (1 + \gamma \Delta \vartheta) \quad (\text{II.177})$$

$\gamma$  ist der *Volumenausdehnungskoeffizient* oder *kubische Ausdehnungskoeffizient*,  $V_0$  ist das Volumen bei  $0^\circ\text{C}$ ,  $\Delta \vartheta$  wird dann ebenfalls auf  $0^\circ\text{C}$  bezogen. Die Dichte wird bei Temperaturerhöhung kleiner (Ausnahme s.o.)

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{1 + \gamma \Delta \vartheta} \quad (\text{II.178})$$

### 4.4 Hydrostatischer Druck in Flüssigkeiten

Auf jedes Flüssigkeitsmolekül wirkt die Schwerkraft. Auf den Boden eines mit Flüssigkeit gefüllten Gefäßes wirkt dann die Gewichtskraft aller in der Flüssigkeit befindlichen Moleküle unter der Annahme, dass sich die Dichte nicht ändert:

$$F_G = m g = \varrho V g \quad (\text{II.179})$$

$$F_G = \varrho A h g$$

$$\text{Damit wird der Druck } p = \frac{F_G}{A} = \varrho g h \quad (\text{II.180})$$

Dieser durch die Schwerkraft verursachte Druck wird *Schweredruck* genannt. Herrscht über der Flüssigkeit



noch ein weiterer äußerer Druck  $p_a$ , z.B. der Luftdruck, so ist der Gesamtdruck am Boden

$$p_h = p_a + \rho g h \quad (\text{II.181})$$

Dieser Gesamtdruck ist der *hydrostatische Druck*. Er ist neben dem äußeren Druck nur von der Höhe der Flüssigkeitssäule über dem Boden abhängig, nicht aber von der gesamten Masse der Flüssigkeitssäule. Er ist damit unabhängig von der Form des Gefäßes und wirkt auch auf alle Seitenwände.

## 4.5 Schweredruck in Gasen

Der Schweredruck von Gasen errechnet sich ebenfalls durch die Gewichtskraft der über einer Fläche stehenden Gassäule. Im Gegensatz zu Flüssigkeiten ändert sich die Dichte in der Gassäule merklich. Wendet man diese Überlegung auf den Luftdruck an, so lässt sich der Luftdruck in einer bestimmten Höhe über der Erdoberfläche berechnen durch

$$\text{barometrische Höhenformel } p = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}} \quad (\text{II.182})$$

Nach DIN 5450 gilt: Für eine Lufttemperatur von  $0^\circ\text{C}$  ist  $p_0 = 1,013\,25 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  und  $\rho_0 = 1,293 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ .

Bei der Ableitung von (II.182) ist vorausgesetzt, dass die Temperatur konstant bleibt.

■ **Beispiel:** In welcher Höhe ist der Luftdruck auf die Hälfte des Wertes an der Erdoberfläche gesunken?

$$\begin{aligned} \text{Lösung: } \ln \frac{p}{p_0} &= \ln 0,5 = -\frac{\rho_0 g h}{p_0} \\ h &= -\frac{p_0}{\rho_0 g} \ln 0,5 = 5537 \text{ m} \end{aligned}$$

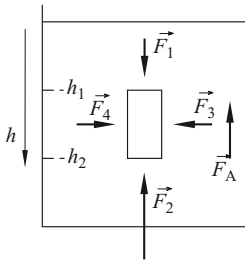


Bild II-22 Auftrieb

## 4.6 Auftrieb

Auf einen Körper wirkt von allen Seiten der hydrostatische Druck nach (II.181).

Da der Druck in größeren Tiefen zunimmt, entsteht dadurch eine resultierende Kraft nach oben, die *Auftriebskraft*  $\vec{F}_A$ .

$$\vec{F}_A = \sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 \quad (\text{II.183})$$

Da sich die Seitenkräfte paarweise aufheben, verbleibt

$$\vec{F}_A = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$F_A = A(p_2 - p_1) = \rho_{Fl} g A(h_2 - h_1)$$

$$F_A = g \rho_{Fl} V_{Fl} = g m_{Fl} \quad (\text{II.184})$$

Die Auftriebskraft ist gleich der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit. Sie ist nach oben gerichtet. Der gleiche Sachverhalt gilt auch in Gasen, nur sind dort wegen der geringeren Dichten der Gase auch die Auftriebskräfte wesentlich kleiner.

## 5 Hydrodynamik

In der Hydrodynamik wird das Verhalten von strömenden Flüssigkeiten unter dem Einfluss äußerer Kräfte untersucht.

### 5.1 Kontinuitätsgleichung

Der *Massenstrom*  $\dot{m}$  gibt an, welche Masse einer Flüssigkeit pro Zeiteinheit durch einen Querschnitt  $A$  strömt.

*Massenstrom*

$$\dot{m} = \rho v A \quad \left| \frac{\text{kg}}{\text{s}} \right| \left| \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right| \left| \frac{\text{m}}{\text{s}} \right| \left| \frac{\text{m}^2}{\text{m}^2} \right| \quad (\text{II.185})$$

Wenn in der betrachteten Flüssigkeit keine Quellen oder Senken vorhanden sind, ist der Massenstrom konstant.

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 = \text{const} \quad (\text{II.186})$$

Ist die Flüssigkeit *inkompressibel*, so ist ihre Dichte  $\rho$  konstant, und es gilt

$$\dot{V} = \frac{\dot{m}}{\rho} = v A = \text{const} \quad (\text{II.187})$$

mit dem Volumenstrom  $\dot{V}$

*Volumenstrom*

$$\dot{V} = A v \quad \left| \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right| \left| \frac{\text{m}^2}{\text{m}^2} \right| \left| \frac{\text{m}}{\text{s}} \right| \quad (\text{II.188})$$

Gleichung (II.186) oder (II.187) ist die *Kontinuitätsgleichung*.

### 5.2 Bernoulli-Gleichung

Muss gegen einen Druck  $p$  ein Flüssigkeitsvolumen  $\Delta V$  am Ort 1 in eine Strömung gebracht werden, so ist hierfür die Arbeit

$$W_1 = F_1 \cdot \Delta s = p_1 A_1 \Delta s = p_1 \Delta V_1 \quad (\text{II.189})$$

aufzubringen. Tritt diese Flüssigkeit am Ort 2 wieder aus, so wird die Arbeit

$$W_2 = p_2 \Delta V_2$$

frei. Da die Flüssigkeiten inkompressibel sein sollen, gilt  $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$ .

Für die Differenz der Arbeiten gilt somit:

$$\Delta W = (p_2 - p_1) \Delta V \quad (\text{II.190})$$

Bei einer strömenden Flüssigkeit haben die Teilvolumina auch kinetische Energie, befinden sie sich auf



unterschiedlicher Höhe über der Erdoberfläche, so kommt noch potentielle Energie hinzu. Der Energieerhaltungssatz gilt dann in der Form:

$$p_1 \Delta V + \frac{1}{2} m v_1^2 + m g h_1 = p_2 \Delta V + \frac{1}{2} m v_2^2 + m g h_2 \quad (\text{II.191})$$

oder mit  $m = \rho \cdot \Delta V$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 \quad (\text{II.192})$$

oder allgemein

$$p_{\text{ges}} = p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{const} \quad (\text{II.193})$$

Gleichung (II.193) ist die *Bernoulli-Gleichung* inkompressibler Flüssigkeiten ohne Reibungsverluste. Der Gesamtdruck setzt sich aus dem *Betriebsdruck*  $p$ , dem *Staudruck* oder *dynamischen Druck*  $\frac{1}{2} \rho v^2$  und dem *Schweredruck*  $\rho g h$  zusammen und ist konstant.

Treten Reibungsverluste auf, wird (II.192) in der Form

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_V \quad (\text{II.194})$$

geschrieben, mit dem Druckverlust  $p_V$ , der in der Praxis durch eine Verlusthöhe

$$h_V = \frac{p_V}{\rho g} \quad (\text{II.195})$$

angegeben wird.

### 5.3 Innere Reibung

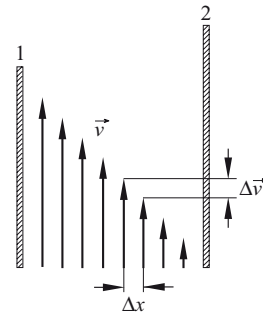


**Bild II-23**  
Innere Reibung

Zwischen den Molekülen einer Flüssigkeit treten Anziehungskräfte auf. Der Einfluss dieser Kräfte auf die Strömung wird *innere Reibung* genannt. Um eine bewegliche Platte 1 der Fläche  $A$  mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  parallel zu einer festen Wand 2 zu verschieben, ist eine Kraft  $F_R$  notwendig. In der Flüssigkeit wird sich im Idealfall ein lineares Geschwindigkeitsgefälle  $\Delta v / \Delta x$  einstellen. Die kennzeichnende Größe dieser Reibung ist die *Viskosität*, die durch (II.197) definiert ist.

$$\text{Reibungskraft } F_R = \eta A \frac{\Delta v}{\Delta x} \quad (\text{II.196})$$

mit der *dynamischen Viskosität*:

$$\eta = \frac{F_R \cdot \Delta x}{A \cdot \Delta v} = \frac{\eta}{\text{Ns/m}^2} \left| \frac{F_R}{\text{N}} \right| \left| \frac{\Delta x}{\text{m}} \right| \left| \frac{A}{\text{m}^2} \right| \left| \frac{\Delta v}{\text{m s}^{-1}} \right| \quad (\text{II.197})$$

## III Thermodynamik

### 1 Grundbegriffe

Die Thermodynamik beschreibt das Verhalten auch komplizierter Vielteilchensysteme mit Hilfe einiger wenigen Größen, den *Zustandsgrößen*. Alle beteiligten Teilchen werden zu einem thermodynamischen *System* zusammengefasst. Dieses wird als *abgeschlossenes System* bezeichnet, wenn weder Energie noch Masse mit der Umgebung ausgetauscht werden.

Die *Zustandsgrößen* werden bei der mathematischen Behandlung des thermodynamischen Systems verwendet. Messbare *Zustandsgrößen* sind Druck (siehe Kapitel II, 4.1), Temperatur und Volumen, davon abgeleitet sind z.B. die *Entropie* und die *Innere Energie*. Als Bezugsmenge wird oft das Mol (siehe Tabelle I-1) benutzt, in diesem Fall spricht man von *molaren Größen*.

### 2 Temperatur

Die Temperatur ist ein Maß für die fühlbare Wärme eines Materials. Beim Kontakt zweier Körper mit verschiedenen Temperaturen kann man beobachten, dass sich die Temperaturen ausgleichen, und dass nach einer bestimmten Zeit beide Körper die gleiche

Temperatur haben. Im thermodynamischen Gleichgewicht haben alle Stoffe gleiche Temperatur.

### 2.1 Einheiten

Es gibt im praktischen Gebrauch verschiedene Temperaturskalen. Diese werden durch *Fixpunkte* festgelegt. Dies sind Temperaturen, bei denen ein wohldefinierter physikalischer Vorgang abläuft. Fixpunkte können Gefrierpunkt und Siedepunkt des Wassers sein. Die Temperatureinheiten zwischen den Fixpunkten sind dann willkürlich festgelegt. Im europäischen Raum ist die *Celsius-Skala* ( $\vartheta$ ), der Abstand zwischen Gefrier- und Siedepunkt des Wassers ist in 100 Teile unterteilt, im angloamerikanischen Raum die *Fahrenheit-Skala* ( $\vartheta_F$ ) gebräuchlich. Die SI-Skala ist die *Kelvin-Skala* ( $T$ ).

| Skala      | Gefrierpunkt | Siedepunkt |
|------------|--------------|------------|
| Celsius    | 0 °C         | 100 °C     |
| Fahrenheit | 32 °F        | 212 °F     |
| Kelvin     | 273,15 K     | 373,15 K   |

Eine Temperaturerhöhung von  $\Delta\vartheta = 1\text{ }^{\circ}\text{C}$  entspricht auch einer Erhöhung von  $\Delta T = 1\text{ K}$ . Die Umrechnungsformel lautet:

$$T = (\vartheta + 273,15)\text{ K} \qquad \left. \frac{T}{\text{K}} \right| \frac{\vartheta}{^{\circ}\text{C}} \qquad (\text{III.1})$$

Sollen Werte der Celsius-Skala in Fahrenheit umgerechnet werden, so gilt die Beziehung

$$\vartheta = \frac{5}{9}(\vartheta_F - 32)\text{ }^{\circ}\text{C} \qquad \left. \frac{\vartheta}{^{\circ}\text{C}} \right| \frac{\vartheta_F}{^{\circ}\text{F}} \qquad (\text{III.2})$$

■ **Beispiel:** Ein Körper hat eine Temperatur von 300 K. Welche Celsius- und Fahrenheit-Werte ergeben dies?

**Lösung:**

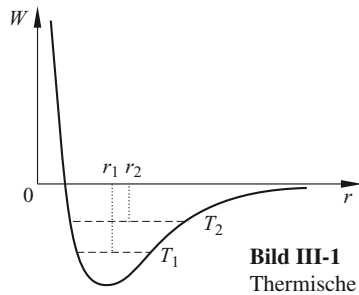
$$\vartheta = T - 273,15\text{ K} = 300\text{ K} - 273,15\text{ K} = 26,85\text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$\vartheta_F = \left(\frac{9}{5}\vartheta + 32\right)\text{ }^{\circ}\text{F} = \left(\frac{9}{5} \cdot 26,85 + 32\right)\text{ }^{\circ}\text{F} = 80,33\text{ }^{\circ}\text{F}$$

## 2.2 Temperaturmessung

Die Temperaturmessung ist eine indirekte Messung, es werden physikalische Größen gemessen, die temperaturabhängig sind. Aus der gemessenen Größe wird dann die gesuchte Temperatur berechnet. Zu diesen temperaturabhängigen Effekten gehören z.B.: Ausdehnung fester, flüssiger und gasförmiger Körper, Änderung des elektrischen Widerstandes von Metallen und Halbleitern, Thermospannung und Thermoelemente, optische Strahlung.

## 3 Thermische Ausdehnung



Fast alle Stoffe dehnen sich bei Erwärmung aus. Wenn ein Stoff erwärmt wird, so führen die Atome bzw. Moleküle Schwingungen mit größerer Amplitude aus, die Schwingungsmittelpunkte zweier benachbarter Atome rücken auseinander, makroskopisch hat dies eine Ausdehnung des Körpers zur Folge.

Aufgetragen ist die potentielle Energie zwischen zwei Atomen als Funktion des Abstandes. Ein Atom ist am Ort  $r = 0$ , das andere Atom hat hiervon den Abstand  $r$ . Bei der Temperatur  $T_1$  ist der mittlere Abstand zwischen beiden Atomen gleich  $r_1$ , bei der Temperatur  $T_2 > T_1$  ist dieser Abstand  $r_2$ . Um die Strecke  $\Delta r = r_2 - r_1$  hat sich der mittlere Abstand also vergrößert.

## 3.1 Feste Stoffe

Betrachtet wird ein Stab der Länge  $l_1$  bei der Temperatur  $T_1$ . Wird dieser Stab auf die Temperatur  $T_2$  erwärmt, so dehnt er sich um die Strecke  $\Delta l = l_2 - l_1$  aus. Für die meisten Festkörper gilt:

$$l_2 = l_1 \cdot (1 + \alpha_l (T_2 - T_1)) \qquad (\text{III.3})$$

oder

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha_l \cdot \Delta T \qquad (\text{III.4})$$

Die Größe  $\alpha_l$  heißt *linearer Ausdehnungskoeffizient* oder *Längenausdehnungskoeffizient*. Diese Größe ist materialabhängig und kann in bestimmten Temperaturgrenzen als konstant betrachtet werden. Einige typische Zahlenwerte sind in Tabelle III-1 dargestellt. Bei Temperaturerhöhung findet nicht nur eine Verlängerung, sondern auch eine Volumenvergrößerung statt. Für den *Volumenausdehnungskoeffizienten*  $\alpha_v$  gilt:

**Tabelle III-1** Linearer Ausdehnungskoeffizient

| Material               | $\alpha_l \cdot 10^6$ in $\text{K}^{-1}$ |
|------------------------|------------------------------------------|
| Aluminium              | 23,8                                     |
| Messing                | 19                                       |
| Kupfer                 | 16,4                                     |
| V <sub>2</sub> A-Stahl | 16                                       |
| Glas                   | 9                                        |

$$\alpha_v = 3\alpha_l \qquad (\text{III.5})$$

und für die Volumenänderung:

$$\frac{\Delta V}{V} = \alpha_v \cdot \Delta T \qquad (\text{III.6})$$

Da die Masse unverändert bleibt, muss sich bei Volumenvergrößerung die Dichte verkleinern.

$$\varrho_2 = \frac{\varrho_1}{1 + \alpha_v \Delta T} \qquad (\text{III.7})$$

## 3.2 Flüssigkeiten

Bei Flüssigkeiten kann eine Ausdehnung nur in allen Richtungen erfolgen, daher ist hier nur der *Volumenausdehnungskoeffizient*  $\alpha_v$  sinnvoll. Im allgemeinen gilt auch hier, dass sich bei Temperaturerhöhung das Volumen vergrößert und somit die Dichte verkleinert. Eine Ausnahme bildet das Wasser, dessen Dichte bei Erwärmung ab  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  zunächst zunimmt und bei  $4\text{ }^{\circ}\text{C}$  seinen größten Wert hat. Anschließend nimmt die Dichte ab (*Anomalie des Wassers*). Aufgrund dieses Effektes frieren Seen im Winter von oben her zu, und das Wasser bleibt am Boden flüssig. Einige typische Zahlenwerte sind in Tabelle III-2 angegeben.

**Tabelle III-2** Volumen-Ausdehnungskoeffizient bei 20 °C

| Material               | $\alpha_v \cdot 10^3/\text{K}^{-1}$ |
|------------------------|-------------------------------------|
| Wasser                 | 0,208                               |
| Quecksilber            | 0,182                               |
| Dieseldieselkraftstoff | 1,0                                 |

### 3.3 Gase

Bei den tatsächlich vorhandenen realen Gasen haben die Moleküle ein Eigenvolumen und üben untereinander Anziehungskräfte aus. Der Einfluss dieser Größen ist schwer zu erfassen, deshalb geht man zunächst von einer Vereinfachung oder auch Idealisierung aus. Unter solchen idealen Gasen versteht man solche Gase, bei denen gilt:

Die Gasmoleküle besitzen kein Eigenvolumen. Anziehungskräfte zwischen den Gasmolekülen sind nicht vorhanden. Es finden nur elastische Stöße statt.

Solche Gase können z.B. nicht verflüssigt werden. Für diese idealen Gase gilt bei Erwärmung unter konstantem Druck folgendes Gesetz, welches von *Gay-Lussac* zu Beginn des 19. Jahrhunderts durch Experimente festgestellt wurde:

$$V_v = V_0(1 + \alpha_v \vartheta)_{p=\text{const}} \quad (\text{III.8})$$

Hierbei ist  $\vartheta$  die Temperatur in °C und  $V_0$  das betrachtete Gasvolumen bei  $\vartheta = 0$  °C. Gleichung (III.8) ergibt eine Gerade, deren Schnittpunkt mit der Temperaturachse bei  $-273,15$  °C ( $= 0$  K) liegt. Daraus folgt für den Ausdehnungskoeffizienten idealer Gase:

$$\alpha_v = \frac{1}{273,15 \text{ K}} = 0,003661 \text{ K}^{-1} \quad (\text{III.9})$$

Aus (III.8) folgt weiter:

$$V_T = V_0 \left( 1 + \frac{1}{273,15} (T - 273,15) \right)$$

Mit  $T_0 = 273,15 \text{ K}$  ergibt dies  $V_T = T \frac{V_0}{T_0}$

$$\frac{V}{T} = \text{const}_{p=\text{const}} \quad (\text{III.10})$$

Wird das Volumen jedoch konstant gehalten und die Temperatur erhöht, so steigt auch der Druck des Gases. Hierfür gilt:

$$p_\vartheta = p_0(1 + \alpha_v \vartheta)_{V=\text{const}} \quad (\text{III.11})$$

und analog zu (III.10):

$$\frac{p}{T} = \text{const}_{V=\text{const}} \quad (\text{III.12})$$

Bei konstanter Temperatur folgt aus (III.10) und (III.12) das Gesetz von *Boyle-Mariotte*

$$pV = \text{const}_{T=\text{const}} \quad (\text{III.13})$$

## 4 Ideale Gase

### 4.1 Allgemeine Zustandsgleichung idealer Gase

Die Gleichungen (III.10), (III.12) und (III.13) lassen sich zu einer einzigen Gleichung zusammenfassen, sofern die Stoffmenge des betrachteten Gases in der Einheit mol angegeben wird. Für eine Stoffmenge von  $n$  Mol kann man diese Gleichungen in der Form

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0} n \quad (\text{III.14})$$

zusammenfassen, wobei die Größen, die mit 0 indiziert sind, die Normgrößen eines idealen Gases bei der Temperatur 0 °C sind:

$$p_0 = 101325 \text{ Pa}$$

$$V_0 = 22,41383 \text{ dm}^3/\text{mol} \quad (\text{III.15})$$

$$T_0 = 273,15 \text{ K}$$

mit der Abkürzung

$$R = \frac{p_0 V_0}{T_0} \quad (\text{III.16})$$

folgt

$$pV = nRT \quad (\text{III.17})$$

Die Größe  $R$  ist die *universelle Gaskonstante* und hat den Zahlenwert:

$$R = \frac{101325 \text{ Pa} \cdot 22,41383 \text{ dm}^3}{273,15 \text{ K} \cdot \text{mol}} = 8,31441 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \quad (\text{III.18})$$

Da in einem Mol eines Gases stets die gleiche Anzahl von Molekülen vorhanden ist, nämlich die

*Avogadro-Konstante*

$$N_A = 6,022045 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}, \quad (\text{III.19})$$

kann die universelle Gaskonstante  $R$  auch durch molekulare Größen bestimmt werden:

$$R = k \cdot N_A \quad (\text{III.20})$$

mit der Boltzmann-Konstante

$$k = 1,38066 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \quad (\text{III.21})$$

Wird die Menge des zu betrachtenden Gases nicht in der Einheit mol, sondern in kg angegeben, so muss für jede Gassorte eine *spezielle Gaskonstante*  $R_s$  angegeben werden. Zur Umrechnung muss die Dichte

$\varrho_0$  des Gases bei 0 °C und die betrachtete Gasmasse  $m$  in kg bekannt sein. Es gilt:

$$R_s = \frac{P_0}{\varrho_0 T_0} \quad (\text{III.22})$$

und

$$pV = m R_s T \quad (\text{III.23})$$

## 4.2 Kinetische Gastheorie

Die makroskopischen Zustandsgrößen  $p$  und  $T$  eines Gases hängen mit der Teilchenbewegung, den Stößen der Moleküle mit der Wand und der kinetischen Energie der Moleküle zusammen. Die Moleküle und ihre Bewegung werden durch ihre Masse  $m_M$ , die Dichte  $\varrho$  und ihre mittlere Geschwindigkeit  $v_m$  definiert. Die Zusammenhänge zwischen diesen Größen werden in der *kinetischen Gastheorie* abgeleitet. Die Geschwindigkeitsverteilung wird durch die *Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung* beschrieben. Diese Verteilungsfunktion gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass eine Geschwindigkeit im Intervall zwischen  $v$  und  $v + \Delta v$  liegt.

$$f(v) \cdot \Delta v = 4\pi v^2 \left( \frac{m_M}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{m_M v^2}{2kT}} \cdot \Delta v \quad (\text{III.24})$$

In Bild III-2 mit willkürlichen Einheiten ist  $T_2 = 3 \cdot T_1$ .

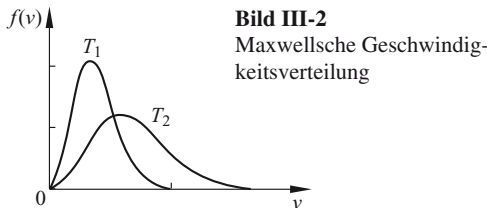


**Bild III-2**  
Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung

Die Verteilungskurve hat das Maximum bei der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit  $v_w$ , die mittlere Geschwindigkeit  $v_m$  liegt bei

$$v_m = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} v_w \quad (\text{III.25})$$

$v_m$  ist von der Temperatur  $T$  abhängig

$$v_M = \sqrt{\frac{3kT}{m_M}} \quad (\text{III.26})$$

Für den Druck gilt:

$$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{N}{V} m_M \overline{v^2} \quad (\text{III.27})$$

oder

$$p = \frac{1}{3} \varrho \overline{v^2} \quad (\text{III.28})$$

und für die mittlere kinetische Energie:

$$\overline{E_{\text{kin}}} = \frac{1}{2} m_M \overline{v^2} \quad (\text{III.29})$$

oder

$$\overline{E_{\text{kin}}} = \frac{3}{2} kT \quad (\text{III.30})$$

## 4.3 Wärmeenergie

Die Temperatur eines Gases hängt nach (III.30) mit der Bewegungsenergie der Moleküle zusammen. Erhöht man diese Energie z.B. durch Zuführung von Wärmeenergie  $\Delta Q$ , so muss sich die Temperatur um  $\Delta T$  erhöhen, solange keine Phasenänderungen ablaufen.

$$\Delta Q = C \cdot \Delta T \quad \frac{\Delta Q}{J} \left| \frac{C}{J/K} \right| \frac{\Delta T}{K} \quad (\text{III.31})$$

Der Faktor  $C$  ist die *Wärmekapazität*.

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \quad (\text{III.32})$$

Je nach Bezugsmenge wird die spezifische (bezogen auf 1 kg) oder molare (bezogen auf 1 Mol) Wärmekapazität benutzt.

$$\text{spezifische Wärmekapazität } c = \frac{C}{m} \quad (\text{III.33})$$

$$\text{molare Wärmekapazität } C_m = \frac{C}{n} \quad (\text{III.34})$$

Die spezifische Wärmekapazität von Wasser beträgt z.B.  $4,182 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$ .

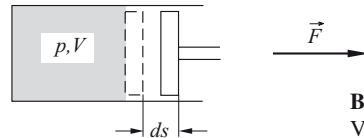


**Bild III-3**  
Volumenarbeit

Wird einem System von außen Wärmeenergie  $\Delta Q$  zugeführt, so wird nicht die gesamte Energie zur Erhöhung der Temperatur aufgebraucht, ein Teil kann in der Regel in Arbeit  $\Delta W$  umgewandelt und nach außen abgegeben werden. Wird die abgegebene Arbeit negativ gezählt, so gilt

$$\Delta Q = \Delta U - \Delta W \quad (\text{III.35})$$

Die Größe  $\Delta U$  ist die *innere Energie* des Systems und wird durch die innere Bewegung der Teilchen bestimmt. Im folgenden soll als abgegebene Arbeit nur mechanische Arbeit betrachtet werden, die durch Volumenänderung, d.h. Bewegung eines Kolbens, verrichtet werden kann. Dehnt sich ein Gas aus und bewegt dabei einen Kolben um die Strecke  $\Delta s$ , so wird dabei die Arbeit  $\Delta W$  verrichtet.

$$\Delta W = -F \cdot \Delta s = -\frac{F \cdot A \cdot \Delta s}{A} \quad (\text{III.36})$$

oder

$$\Delta W = -p \cdot \Delta V \quad (\text{III.37})$$

#### 4.4 Zustandsänderungen idealer Gase

Bei der Diskussion von Zustandsänderungen wird eine Zustandsgröße konstant gehalten und dann die Variation der anderen untersucht. Hier sollen nur die Zustandsgrößen  $T$ ,  $V$  und  $p$  und deren Variation in den folgenden Prozessen untersucht werden. Die betrachtete Stoffmenge ist 1 Mol. Die Ausgangsgleichung ist das allgemeine Gasgesetz (III.17).

##### Isotherme Zustandsänderungen

Isotherme Zustandsänderungen sind solche bei konstanter Temperatur  $T$ . Gleichung (III.17) wird dann zu

$$pV = \text{const} \quad (\text{III.38})$$

Zur grafischen Darstellung wird das  $p$ - $V$ -Diagramm benutzt. In dieser Darstellung sind die *Isotherme* idealer Gase Hyperbeln.

Dargestellt sind zwei Isotherme  $T_2$  und  $T_1$ , mit  $T_2 > T_1$ .

Ändert ein Gas seinen Zustand von 1 nach 2, so folgt für die Volumenarbeit durch Integration von (III.37)

$$W_{12} = -RT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (\text{III.39})$$

Ist  $V_2 > V_1$ , expandiert das Gas also, so ist  $W_{12}$  negativ und wird vom Gas geleistet. Anschaulich entspricht die Volumenarbeit der schraffierten Fläche im  $p$ - $V$ -Diagramm.

##### Isochore Zustandsänderungen

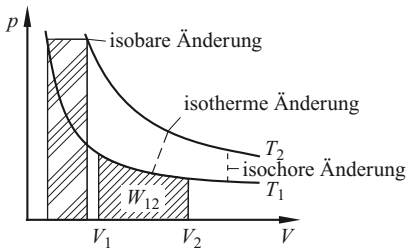


**Bild III-4**  $p$ - $V$ -Diagramm

Bei isochoren Zustandsänderungen wird das Volumen konstant gehalten. Diese Änderung wird im  $p$ - $V$ -Diagramm durch eine senkrechte Strecke zwischen Ausgangs- und Endpunkt dargestellt (gestrichelte Linie in Bild III-4). Bei einer isochoren Änderung muss dem System Wärme zugeführt werden, da sich die Temperatur erhöht. Wegen des konstanten Volumens wird keine Volumenarbeit abgegeben.

$$W_{12} = 0 \quad (\text{III.40})$$

Führt man von außen Wärmeenergie zu, wird nach Gleichung (III.35) die Temperatur erhöht, und die gesamte zugeführte Wärmeenergie steht zur Vergrö-

ßerung der inneren Energie  $\Delta U$  und somit zur Temperaturerhöhung zur Verfügung. Für 1 Mol gilt:

$$\Delta Q = C_{mv} \Delta T \quad (\text{III.41})$$

und somit

$$\Delta U = C_{mv} \Delta T \quad (\text{III.42})$$

##### Isobare Zustandsänderungen

Bei isobaren Zustandsänderungen wird der Druck konstant gehalten. Diese Änderung wird im  $p$ - $V$ -Diagramm durch eine waagerechte Strecke zwischen Ausgangs- und Endpunkt dargestellt (Bild III-4). Bei einer isobaren Änderung muss dem System Wärme zugeführt werden, da sich die Temperatur erhöht und außerdem Volumenarbeit, deren Größe dem schraffierten Rechteck entspricht, abgegeben wird.

$$W_{12} = -p \cdot (V_2 - V_1) \quad (\text{III.43})$$

Da die Volumenarbeit  $\neq 0$  ist, wird die Temperaturerhöhung bei zugeführter Wärmeenergie anders sein als bei isochoren Prozessen. Auch hier werde 1 Mol betrachtet:

$$\Delta Q = C_{mp} \Delta T \quad (\text{III.44})$$

mit (III.35) und (III.37) gilt:

$$\Delta Q = C_{mv} \Delta T + p \Delta V \quad (\text{III.45})$$

$$p \Delta V = R \Delta T \quad (\text{III.46})$$

$$C_{mp} \Delta T = C_{mv} \Delta T + R \Delta T \quad (\text{III.47})$$

$$C_{mp} - C_{mv} = R \quad (\text{III.48})$$

##### Isentrope Zustandsänderung

Isentrope oder auch adiabatische Zustandsänderungen laufen ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung ab. Für diese Zustandsänderungen gelten die *Poisson'schen Gleichungen*:

$$pV^\chi = \text{const} \quad (\text{III.49})$$

$$TV^{\chi-1} = \text{const} \quad (\text{III.50})$$

$$\frac{T^\chi}{p^{\chi-1}} = \text{const} \quad (\text{III.51})$$

**Tabelle III-3** Isentropenexponenten

| Gas          | $\chi$ |
|--------------|--------|
| Helium       | 1,67   |
| Argon        | 1,67   |
| Wasserstoff  | 1,41   |
| Sauerstoff   | 1,40   |
| Luft         | 1,40   |
| Kohlendioxid | 1,30   |
| Methan       | 1,32   |
| Ammoniak     | 1,31   |

Die Größe  $\chi$  heißt *Isentropenexponent*, hängt von der Gasart ab, und ist immer  $>1$

$$\chi = \frac{C_{mp}}{C_{mv}}$$

(III.52)

In der Tabelle III-3 ist für einige Gase der Isentropenexponent aufgeführt.  
Im  $p$ - $V$ -Diagramm verlaufen Isentrope steiler als Isotherme und schneiden daher die Isotherme (siehe Bild III-5).

4.5 Kreisprozesse

Unter Kreisprozessen wird eine Abfolge von Zustandsänderungen verstanden, die nach beliebigen Zwischenzuständen wieder zum Ausgangszustand zurückkehrt. Als Beispiel soll hier der Carnot-Prozess vorgestellt werden.

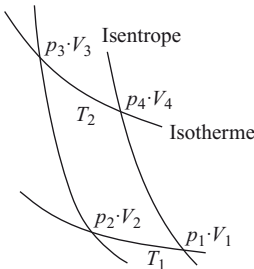


**Bild III-5**  
Carnot-Prozess

*Carnotscher Kreisprozess*

Beim Carnot-Prozess wird Wärme in mechanische Arbeit umgewandelt.  
Der Beginn sei im Punkt 1 auf der Isothermen  $T_1$  bei  $V_1$  und  $p_1$ . Es werden nacheinander die folgenden Schritte durchgeführt:

1. Schritt
- isotherme Kompression auf  $p_2, V_2$
2. Schritt
- isentropische Kompression auf  $T_2, p_3, V_3$
3. Schritt
- isotherme Expansion auf  $p_4, V_4$
4. Schritt
- isentropische Expansion auf  $T_1, p_1, V_1$ , also zum Ausgangspunkt.

Bei den einzelnen Schritten werden in unterschiedlicher Weise Wärme zu- oder abgeführt und Arbeit geleistet oder ins System gesteckt. Hier soll nur die gesamte Bilanz angegeben werden:

**Tabelle III-4** Wärmeleitfähigkeit

| Material<br>(feste Stoffe) | $\lambda$ in $\frac{W}{mK}$ | Material<br>(Flüssigkeiten) | $\lambda$ in $\frac{W}{mK}$ | Material<br>(Gase) | $\lambda$ in $\frac{W}{mK}$ |
|----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|--------------------|-----------------------------|
| Aluminium                  | 221                         | Wasser                      | 0,6                         | Luft               | 0,026                       |
| Eisen                      | 67                          | Benzin                      | 0,14                        | Kohlendioxid       | 0,015                       |
| Kupfer                     | 393                         | Transformatoröl             | 0,13                        | Wasserdampf        | 0,031                       |
| Normalbeton                | 2,1                         | Xylol                       | 0,13                        | Argon              | 0,016                       |
| Eis                        | 2,2                         | Glyzerin                    | 0,28                        |                    |                             |
| Glas                       | 0,8                         | Quecksilber                 | 9,2                         |                    |                             |
| Mineralfaser               | 0,04                        | Aceton                      | 0,17                        |                    |                             |

Die Nutzarbeit des Kreisprozesses für einen Umlauf entspricht der im  $p$ - $V$ -Diagramm eingeschlossenen Fläche. Um unterschiedliche Kreisprozesse vergleichen zu können, wird der *thermische Wirkungsgrad*  $\eta$  verwendet. Dieser ist definiert durch

$$\eta = \frac{W}{Q_{zu}}$$

(III.53)

Für den Carnot-Prozess gilt:

$$\eta_C = \frac{T_2 - T_1}{T_2}$$

(III.54)

Es lässt sich zeigen, dass der Carnot-Prozess den theoretisch höchsten thermischen Wirkungsgrad aller denkbaren Kreisprozesse besitzt. Er ist immer kleiner als 1 und nur abhängig von den Temperaturen  $T_2$  und  $T_1$ .

■ **Beispiel:** Welchen Wirkungsgrad besitzt eine Maschine, die einen Carnot-Prozess zwischen den Temperaturen 100 °C und 0 °C durchführt?

**Lösung:**

obere Temperatur

$T_2 = (100 + 273,15) \text{ K} = 373,15 \text{ K}$

untere Temperatur

$T_1 = (0 + 273,15) \text{ K} = 273,15 \text{ K}$

Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{373,15 - 273,15}{373,15} \cdot 100\% = 26,8\%$$

5 Wärmeübertragung

Wärme kann grundsätzlich nur vom System höherer Temperatur zum System mit niedrigerer Temperatur übertragen werden. Wärme kann durch Wärmeleitung, Wärmeströmung oder Wärmestrahlung transportiert werden.

5.1 Wärmeleitung

Wärmeleitung findet durch Energieübertragung ohne Materietransport statt. Damit dieser Energietransport geschehen kann, muss eine Koppelung zwischen benachbarten Atomen vorhanden sein. Beispiel: Wärmetransport durch eine feste Wand. Hier können benachbarte Atome durch Schwingung Energie weitergeben. Als Maß dient die *Wärme­stromdichte*  $q_{th}$

$$q_{th} = \frac{\Delta Q}{A \Delta t}$$

$$\frac{q_{th}}{W/m^2} \left| \frac{\Delta Q}{Ws} \right| \frac{A}{m^2} \left| \frac{\Delta t}{s} \right|$$

(III.55)

Wenn angenommen wird, daß der Wärmetransport nur in einer Richtung, die als  $x$ -Richtung bezeichnet wird, stattfinden kann, so gilt für die *Wärmestromdichte*:

$$q_{th} = -\lambda \frac{\Delta\vartheta}{\Delta x} \quad (\text{III.56})$$

Die Größe  $\lambda$  ist die *Wärmeleitfähigkeit* des Kontaktes in der Einheit  $\frac{\text{W}}{\text{mK}}$ ,  $\Delta\vartheta$  die Temperaturdifferenz. Die Wärmeleitfähigkeit ist temperaturabhängig. In der Tabelle III-4 sind einige Werte bei 20 °C angegeben.

## 5.2 Wärmeströmung

Wärmeströmung oder auch *Konvektion* ist stets mit einem Materietransport verbunden und findet in Flüssigkeiten oder Gasen statt. Beispiel: Zentralheizung. Die mathematische Behandlung ist sehr kompliziert und kann hier nicht behandelt werden.

# IV Schwingungen

Schwingungen sind *periodische* Vorgänge sowohl mechanischer (z.B. Masse an einer Feder) als auch elektromagnetischer Systeme (z.B. Schwingkreis). Kennzeichnend ist, daß Energie periodisch umgewandelt wird. Die Zeit für eine Periode wird durch die *Schwingungszeit*  $T$  angegeben. Die Anzahl der Perioden pro Zeiteinheit wird *Frequenz*  $f$  genannt:

$$f = \frac{1}{T} \quad (\text{IV.1})$$

Oft wird auch die *Kreisfrequenz*  $\omega$  verwendet.

$$\text{Kreisfrequenz} \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{IV.2})$$

Wird die Auslenkung eines schwingenden Systems mit  $y$  bezeichnet, so gilt, daß sich nach einer Periode ein bestimmter Schwingungszustand wiederholt. Bei einer ungedämpften Schwingung gilt:

$$y(t) = y(t+T) \quad (\text{IV.3})$$

## 1 Freie ungedämpfte harmonische Schwingungen

Es gibt eine Vielzahl von möglichen Schwingungen, deren Auslenkung sich durch eine Sinus-Funktion beschreiben läßt. Diese Schwingungen werden *harmonische Schwingungen* genannt. Da eine Sinus-Funktion sich als Projektion einer gleichmäßigen Kreisbewegung darstellen läßt (siehe Abschnitt Geometrie), kann der Winkel  $\varphi$  durch  $\omega_0 \cdot t$  ersetzt werden:

$$y(t) = \hat{y} \sin(\omega_0 t) \quad (\text{IV.4})$$

$y(t)$  ist die *momentane Auslenkung* oder *Augenblickswert*,  $\hat{y}$  die *Amplitude* oder *maximale Auslenkung*,  $\omega_0$

## 5.3 Wärmestrahlung

Unter Wärmestrahlung wird die Wärmeübertragung durch elektromagnetische Strahlung verstanden. Jeder Körper sendet und empfängt Wärme durch Strahlung, wobei die Absorption und Emission vom Material und der Oberflächenbeschaffenheit abhängt. Dies wird durch den Emissionsgrad  $\varepsilon$  angegeben.  $\varepsilon$  ist eine Zahl  $<1$ . Die gesamte Leistungsbilanz eines Körpers der ebenen Fläche  $A$  und der Temperatur  $T_1$  in einer Umgebung der Temperatur  $T_2$  wird durch das *Stefan-Boltzmann-Gesetz* beschrieben:

$$S = A\varepsilon\sigma(T_2^4 - T_1^4) \quad (\text{III.57})$$

$$\text{mit der Konstanten } \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \quad (\text{III.58})$$

(siehe auch Abschnitt VII.4).

ist die *Kreisfrequenz* der ungedämpften Schwingung. Diese wird auch *Eigenfrequenz* genannt. Bei (IV.4) ist die Auslenkung  $y$  zur Zeit  $t = 0$  ebenfalls = 0

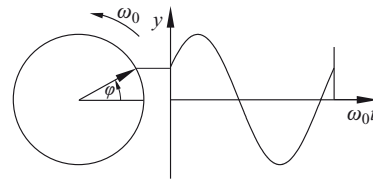


**Bild IV-1** Harmonische Schwingung

$$y(0) = 0$$

Ist jedoch der Nulldurchgang der Schwingung nicht zur Zeit  $t = 0$ , so liegt eine Phasenverschiebung um einen Phasenwinkel  $\varphi$  vor, und die Schwingung läßt sich durch

$$y(t) = \hat{y} \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (\text{IV.5})$$

darstellen. Der Phasenwinkel kann positiv oder negativ sein. Bei positivem Phasenwinkel wird die Sinuskurve nach links verschoben.

Die Schwingungszeit  $T$  bzw. die Frequenz  $f$  hängt je nach schwingungsfähigem System von den unterschiedlichsten Systemgrößen ab. Wird z.B. eine Masse  $m$  an einer Feder mit der Federkonstanten  $c$  angehängt, so gilt bei diesem *Federpendel* für die Schwingungszeit:

$$\text{Federpendel} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} \quad \frac{T}{\text{s}} \left| \frac{m}{\text{kg}} \right| \left| \frac{c}{\text{N/m}} \right| \quad (\text{IV.6})$$

Wird eine Masse  $m$  an einem Faden der Länge  $l$  angehängt und zu Schwingungen mit kleiner Auslen-



kung angeregt, so gilt für dieses *Fadenpendel* oder auch *mathematisches Pendel*:

$$\text{Fadenpendel} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \frac{T}{s} \left| \frac{l}{m} \right| \frac{g}{m s^{-2}} \quad (\text{IV.7})$$

$g$  ist dabei die *Erdbeschleunigung*, die Schwingungszeit ist bei diesem Pendel unabhängig von der Masse  $m$ .

- **Beispiel:** Eine Pendeluhr geht in 24 Stunden um 1 Stunde nach. Die Pendellänge ist  $l_1 = 50$  cm. Welche Länge  $l_2$  muß das Pendel haben, damit die Uhr richtig geht? Das Pendel wird als mathematisches Pendel angenommen.

**Lösung:** 
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{l_1}}{2\pi\sqrt{l_2}} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}$$

$$l_2 = l_1 \frac{T_2^2}{T_1^2} = 50 \text{ cm} \cdot \left(\frac{23 \text{ h}}{24 \text{ h}}\right)^2 = 45,9 \text{ cm}$$

Frequenzen elektromagnetischer Schwingungen werden durch  $L$  und  $C$  festgelegt. So gilt für einen Schwingkreis:

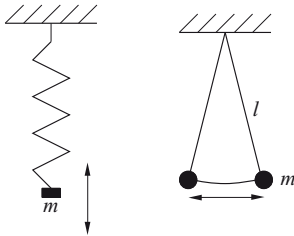


**Bild IV-2**  
Feder- und  
Fadenpendel

elektrischer Schwingkreis  $T = 2\pi\sqrt{LC}$  (IV.8)

Allen diesen Beispielen gemeinsam ist aber, daß die mathematische Beschreibung der Schwingung durch (IV.5) gegeben ist. Kennzeichnung jeder ungedämpften Schwingung ist, daß die Amplitude  $\hat{y}$  zeitlich konstant bleibt, dem System wird keine Energie entzogen.

- **Beispiel:** Eine Masse  $m = 500$  g hängt an einem Faden der Länge  $l = 2$  m. Mit welcher Frequenz  $f$  schwingt die Masse?

**Lösung:** 
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2 \text{ m}}{9,81 \text{ m s}^{-2}}} = 2,84 \text{ s}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2,84 \text{ s}} = 0,35 \text{ Hz}$$

## 2 Gedämpfte Schwingungen

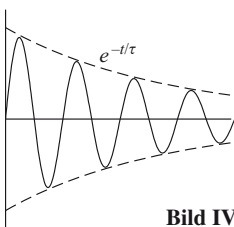


**Bild IV-3** Gedämpfte Schwingung

Wird einem schwingungsfähigen System während der Schwingung Energie entzogen, so verringert sich die Amplitude im Lauf der Zeit. Dieser Energieverlust kann in der Mechanik z.B. durch Reibung, bei elektromagnetischen Schwingungen durch ohmsche Verluste oder Ummagnetisierungsverluste verursacht werden. Wegen dieser Verluste nimmt die Amplitude ab und die Ausschläge werden immer kleiner. Sind die Verluste proportional zur Geschwindigkeit (oder zum elektrischen Strom), so lässt sich die Schwingung durch folgende Gleichung wiedergeben:

$$y = \hat{y} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{IV.9})$$

oder

$$y = \hat{y} e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{IV.10})$$

mit

$$\delta = \frac{1}{\tau} \quad (\text{IV.11})$$

Die für die Abnahme der Amplitude maßgebende e-Funktion enthält eine für die Dämpfung charakteristische Größe  $\tau$ , die auch als *Zeitkonstante* des Systems bezeichnet wird und angibt, zu welchem Zeitpunkt die Amplitude auf den Wert  $\frac{1}{e} = 0,3678 \approx 37\%$

der Ausgangsamplitude gefallen ist.

Die Frequenz  $\omega$  der gedämpften Schwingung ist kleiner als die Frequenz  $\omega_0$  der freien Schwingung.

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (\text{IV.12})$$

Diese Abweichungen sind aber für kleine Dämpfungen vernachlässigbar.

- **Beispiel:** Ein Federpendel mit einer Federkonstanten  $c = 30$  N/m, an dem eine Masse  $m$  von 2 kg hängt, führt gedämpfte Schwingungen mit einer Anfangsamplitude  $\hat{y} = 10$  cm aus. Die Zeitkonstante  $\tau$  ist 2 s, der Phasenwinkel  $\varphi$  ist  $0^\circ$ . Welche Auslenkung liegt nach einer Zeit von  $t = 5$  s vor?

**Lösung:**

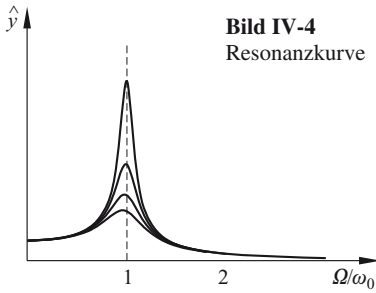
Kreisfrequenz 
$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{30 \text{ N/m}}{2 \text{ kg}}} = 3,87 \text{ s}^{-1} \quad (\text{IV.13})$$

Auslenkung 
$$y = 5 \text{ cm} \cdot e^{-5/2} \cdot \sin(3,87 \cdot 5) = 0,169 \text{ cm} \quad (\text{IV.14})$$

## 3 Erzwungene Schwingungen

Bei einer erzwungenen Schwingung greift von außen über eine Koppelung eine periodische Kraft mit einer Frequenz  $\Omega$  an. Das schwingungsfähige System, welches aufgrund seiner Bauart im ungedämpften Fall mit der Eigenfrequenz  $\omega_0$  schwingen würde, wird dann zu erzwungenen Schwingungen mit der Frequenz der angreifenden Kraft angeregt. Dabei ist auch mit einer Phasenverschiebung zwischen angreifender Kraft und System zu rechnen. Für das System gilt dann:



Bild IV-4  
Resonanzkurve

$$y = \hat{y} \sin(\Omega t + \varphi) \quad (\text{IV.15})$$

Die Amplitude  $\hat{y}$  und die Phasenverschiebung hängen von der Frequenz der angreifenden Kraft ab. Für ein Federpendel der Masse  $m$ , an der eine Kraft  $F$  angreift, gilt für die Amplitude:

$$\hat{y} = \frac{\frac{F}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} \quad (\text{IV.16})$$

und den Phasenwinkel

$$\tan \varphi = \frac{2\delta\omega_0}{(\omega_0^2 - \Omega^2)} \quad (\text{IV.17})$$

Die Amplitudenfunktion hat bei kleiner Dämpfung dann ein Maximum, wenn die Erregerfrequenz und die Eigenfrequenz übereinstimmen ( $\Omega/\omega_0 = 1$ ). Dieses Verhalten wird als *Resonanz* bezeichnet. Der Kurvenverlauf für verschiedene Dämpfungen ist in Bild IV-4 gezeigt. Aufgetragen ist die Amplitude als Funktion von  $\Omega/\omega_0$ . Allerdings verschiebt sich bei größeren Dämpfungen die Lage des Maximums zu kleineren Erregerfrequenzen.

## 4 Überlagerung harmonischer Schwingungen

Werden Schwingungen überlagert, so müssen verschiedene Möglichkeiten betrachtet werden: Die Schwingungen können gleiche oder unterschiedliche Frequenz und gleiche oder senkrecht zueinander liegende Schwingungsrichtungen haben. Diese Fälle sollen für sinusförmige (harmonische) Schwingungen untersucht werden.

### 4.1 Schwingungsrichtung parallel zueinander

#### Gleiche Frequenz

Betrachtet werden zwei Schwingungen, die unterschiedliche Phasenwinkel haben können, aber mit gleicher Frequenz und gleicher Schwingungsrichtung schwingen. Die Schwingungen werden durch die Formeln

$$y_1(t) = \hat{y}_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \quad (\text{IV.18})$$

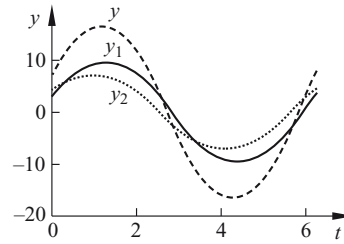


Bild IV-5 Addition von Sinusschwingungen

$$y_2(t) = \hat{y}_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \quad (\text{IV.19})$$

beschrieben.

Die grafische Darstellung kann entweder im  $y(t)$ -Diagramm oder im *Zeigerdiagramm* erfolgen. Letztere wird in der Elektrotechnik oft verwendet. Unter einem *Zeiger* wird ein zweidimensionaler Pfeil verstanden, dessen Länge der Amplitude und dessen Winkel dem Phasenwinkel entspricht. Dieser Zeiger rotiert mit der Frequenz  $\omega$  um den Koordinatenursprung. Durch die Überlagerung (Addition) zweier Schwingungen entsteht wieder eine harmonische Schwingung gleicher Frequenz.

Die Berechnung der Amplitude und der Phasenlage erfolgt anhand des Zeigerdiagramms.

Mit dem Kosinussatz (siehe Mathematik) gilt für die Amplitude:

$$\hat{y} = \sqrt{\hat{y}_1^2 + 2\hat{y}_1\hat{y}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \hat{y}_2^2} \quad (\text{IV.20})$$

und für den Phasenwinkel:

$$\tan \varphi = \frac{\hat{y}_1 \sin \varphi_1 + \hat{y}_2 \sin \varphi_2}{\hat{y}_1 \cos \varphi_1 + \hat{y}_2 \cos \varphi_2} \quad (\text{IV.21})$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich einige Spezialfälle ableiten:

- 1) gleiche Amplitude, Phasendifferenz  $= \pi, 3\pi$

$$\hat{y} = \sqrt{\hat{y}_1^2 - 2\hat{y}_1\hat{y}_2 + \hat{y}_2^2} \quad (\text{IV.22})$$

$$\hat{y} = \sqrt{(\hat{y}_1 - \hat{y}_2)^2} = 0 \quad (\text{IV.23})$$

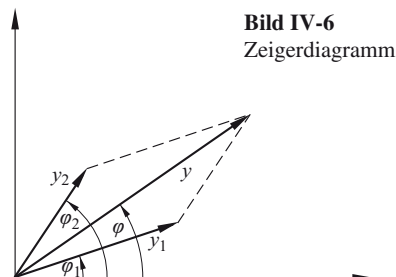
also Auslöschung der resultierenden Schwingung.

- 2) Phasendifferenz  $= 0$ :

$$\hat{y} = \sqrt{\hat{y}_1^2 + 2\hat{y}_1\hat{y}_2 + \hat{y}_2^2} \quad (\text{IV.24})$$

$$\hat{y} = \sqrt{(\hat{y}_1 + \hat{y}_2)^2} = \hat{y}_1 + \hat{y}_2 \quad (\text{IV.25})$$

also Addition der Amplituden.

Bild IV-6  
Zeigerdiagramm

### Geringer Frequenzunterschied

Sind die Frequenzen zweier sich überlagernder Schwingungen fast gleich, treten *Schwebungen* auf. Hierbei verändert sich die Amplitude der resultierenden Schwingung periodisch. Im folgenden wird angenommen, daß beide Ausgangsamplituden gleich sind.

$$y_1(t) = \hat{y} \sin(\omega_1 t) \quad (\text{IV.26})$$

$$y_2(t) = \hat{y} \sin(\omega_2 t) \quad (\text{IV.27})$$

$$y_{\text{res}}(t) = y_1(t) + y_2(t) \quad (\text{IV.28})$$

$$y_{\text{res}} = \hat{y} [\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)] \quad (\text{IV.29})$$

Mit

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (\text{IV.30})$$

folgt aus Gleichung (IV.29)

$$y_{\text{res}}(t) = 2\hat{y} \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \quad (\text{IV.31})$$

Bei geringen Frequenzdifferenzen können die Argumente der trigonometrischen Funktionen mit  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$  umgeschrieben werden:

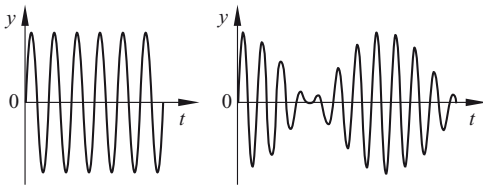


**Bild IV-7** Schwebung

$$y_{\text{res}} = 2\hat{y} \sin \omega_{\text{res}} t \cdot \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) \quad (\text{IV.32})$$

Die resultierende Schwingung ist ebenfalls eine harmonische Schwingung mit der Frequenz

$$\omega_{\text{res}} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad (\text{IV.33})$$

aber die Amplitude ändert sich periodisch zwischen 0 und  $2\hat{y}$ . Während einer Periode der Kosinus-Funktion ändert sich die Amplitude zweimal von 0 auf  $2\hat{y}$ , somit ist die *Schwebungsfrequenz*

$$\omega_S = 2 \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \Delta\omega \quad (\text{IV.34})$$

Dieses Verhalten ist in Bild IV-7 wiedergegeben, hierbei sind zwei Schwingungen überlagert, deren Frequenzen sich um 15% unterscheiden.

## 4.2 Schwingungsrichtung senkrecht zueinander

Werden zwei Schwingungen mit ganzzahligem Frequenzverhältnis, die senkrecht zueinander schwingen, überlagert, so entstehen geschlossene Figuren:

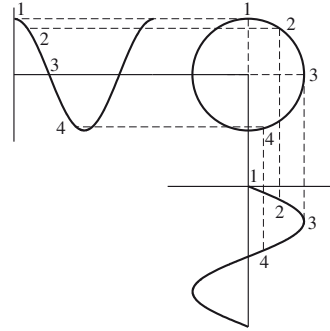


**Bild IV-8** Verfahren zur punktwweisen Konstruktion von Lissajous-Figuren ( $\varphi = 90^\circ$ )

*Lissajous-Figuren.* Die beiden Schwingungsrichtungen seien  $x$ - und  $y$ -Richtung. Die Schwingungen sind durch

$$x(t) = \hat{x} \cdot \sin(\omega_x t)$$

und

$$y(t) = \hat{y} \cdot \sin(\omega_y t + \varphi) \quad (\text{IV.35})$$

gegeben. Die Lissajous-Figuren können im Prinzip punktwweise konstruiert werden. Für den Fall gleicher Frequenzen und Phasendifferenz  $\varphi = 90^\circ$  ist das Verfahren in Bild IV-8 dargestellt.

Auf der  $x$ - und auf der  $y$ -Kurve werden die Auslenkungen zu gleichen Zeitpunkten, hier mit 1 ... 4 bezeichnet, abgemessen und in einem rechtwinkligen Koordinatensystem aufgetragen. Für die vorgegebene Phasendifferenz ergibt sich als Lissajous-Figur ein Kreis. Sind die Amplituden nicht gleich, ist aber die Phasendifferenz  $90^\circ$ , so ergeben sich Ellipsen, deren Hauptachsen parallel zu den Koordinatenachsen liegen. Ist die Phasendifferenz nicht  $90^\circ$ , so ergeben sich ebenfalls Ellipsen, allerdings liegen deren Hauptachsen nicht mehr parallel zu den Koordinatenachsen. Diese Lissajous-Figuren lassen sich in der Elektrotechnik mit Hilfe eines Oszilloskops darstellen; sie dienen zur Messung des Phasenwinkels zwischen zwei Spannungen. Werden bei einer gemessenen Ellipse nach Bild IV-9 die beiden Werte  $y_1$  und  $y_2$ , also einmal das Maximum in  $y$ -Richtung, zum anderen der Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse, gemessen, so lässt sich hieraus der Phasenwinkel  $\varphi$  bestimmen zu:

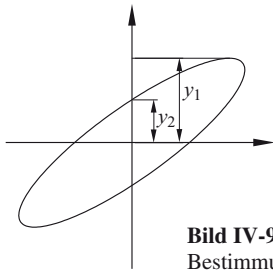


**Bild IV-9**  
Bestimmung des Phasenwinkels

$$\varphi = \arcsin \frac{y_2}{y_1} \quad (\text{IV.36})$$

In Bild IV-10 sind für die Frequenzverhältnisse 1:1, 1:2 und 1:3 für verschiedene Phasenwinkel die *Lissajous-Figuren* angegeben.

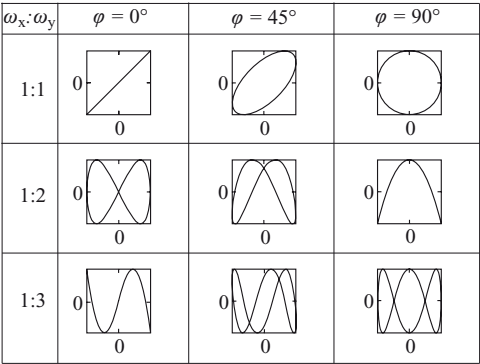


**Bild IV-10** Lissajous-Figuren

## V Wellen

Wenn schwingungsfähige Systeme miteinander so verbunden sind, dass sich die Schwingung von einem System zum nächsten System übertragen kann, so setzt sich eine an einem System angeregte Schwingung im Raum fort, und man spricht von einer *Welle*. Dies soll im Bild V-1 veranschaulicht werden. Dabei ist es zur Ausbreitung von Wellen notwendig, dass die einzelnen Systeme durch gegenseitige Rückstellkräfte gekoppelt sind.

Dargestellt sind zwei Momentaufnahmen einer Reihe von Massen, die durch Federn verbunden sind. Die Masse  $m_1$  wird angestoßen und schwingt mit der Frequenz  $f$  um ihre Ruhelage. Wegen der Koppelung durch die Federn setzt sich diese Schwingung fort, und es entsteht eine Welle, die sich hier nach rechts ausbreitet. Die einzelnen Massen schwingen um ihre Ruhelage, bewegen sich also nicht in Ausbreitungsrichtung der Welle. Es findet kein Materietransport, sondern nur Energietransport statt. Wenn die Schwingungsrichtung der Massen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle ist, so wird dieser Wellentyp *Transversalwelle* genannt. Im Bild V-1 ist mit der Größe  $\lambda$  der Abstand zwischen zwei gleichen Schwingungszuständen eingetragen. Dieser Abstand ist die *Wellenlänge*  $\lambda$ . Ist dagegen die Schwingungsrichtung der einzelnen Massen parallel zur Ausbreitungsrichtung der Welle, so liegt eine *Longitudinalwelle* vor. Bei einer Longitudinalwelle ändert sich in Ausbreitungsrichtung der Welle die Dichte

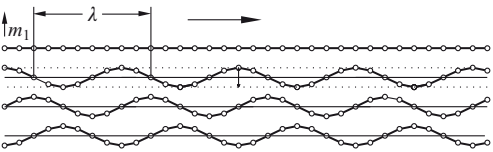


**Bild V-1** Wellenausbreitung in einer linearen Kette

der schwingungsfähigen Systeme. In Bild V-1 ist nur eine einzige Reihe von schwingungsfähigen Massen gezeichnet. Werden allerdings viele Reihen gleichzeitig angeregt, liegt eine räumliche Wellenausbreitung vor.

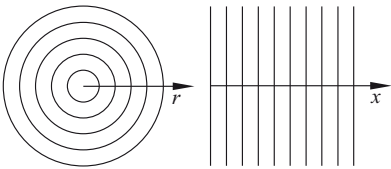


**Bild V-2** Wellentypen

Werden gleiche Schwingungszustände in benachbarten Ketten miteinander verbunden, so erhält man eine zusammenhängende Fläche, die *Wellenfront* genannt wird. Die Form der Wellenfront hängt von der Form des Wellenerregers ab. In Bild V-2 sind zwei verschiedene Wellenfronten gezeichnet, links die Fronten einer *Kugelwelle*, rechts die Fronten einer *ebenen Welle*. Da die Wassermoleküle in beiden Typen nur vertikal schwingen, liegt hier in beiden Fällen eine Transversalwelle vor.

## 1 Harmonische Wellen

### 1.1 Ausbreitung

Wie bei den harmonischen Schwingungen werden die Wellen *harmonisch* genannt, deren mathematische Beschreibung durch eine Sinus-Funktion möglich ist. Im Gegensatz zu den Schwingungen, bei denen ja nur eine zeitliche Änderung der Auslenkung  $y$  zu betrachten war, ist bei Wellen auch eine räumliche Abhängigkeit der Auslenkung zu berücksichtigen.

Die Welle in Bild V-1 hat sich nach der Schwingungszeit  $T = \frac{1}{f}$  der einzelnen Systeme um die

Wellenlänge  $\lambda$  nach rechts fortbewegt. Hiermit lässt sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  definieren:

$$\text{Ausbreitungsgeschwindigkeit } c = \frac{\lambda}{T} \quad (\text{V.1})$$

$$c = \lambda \cdot f \quad (\text{V.2})$$

Wird die Masse  $m_1$  zu einer Sinusschwingung  $y = \hat{y} \cdot \sin(\omega t)$  angeregt, so werden auch alle anderen Massen sinusförmig schwingen, allerdings zeitversetzt gegen  $m_1$ . Eine Masse, die um  $x$  von  $m_1$  entfernt ist, wird um die Zeit  $t_1 = \frac{x}{c}$  später denselben Schwingungszustand erreichen. Es gilt:

$$y = \hat{y} \cdot \sin\left[\omega(t - t_1)\right] \quad (\text{V.3})$$

$$y = \hat{y} \cdot \sin\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \quad (\text{V.4})$$

$$y = \hat{y} \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right] \quad (\text{V.5})$$

Gleichung (V.5) beschreibt die zeitliche und räumliche Ausbreitung einer ebenen harmonischen Welle. Die Amplitude  $\hat{y}$  bleibt konstant. Die Schwingungsgleichung kann durch Einführung der *Wellenzahl*  $k$  umgeschrieben werden:

$$\text{Wellenzahl } k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{V.6})$$

$$y = \hat{y} \cdot \sin(\omega t - kx) \quad (\text{V.7})$$

In Gleichung (V.5) und (V.7) bedeutet ein negatives Zeichen in der Klammer eine Ausbreitung der Welle in positiver  $x$ -Richtung.

Bei einer *Kugelwelle* ändert sich die Amplitude mit dem Abstand vom Erregerort. Dieser Wellentyp wird durch folgende Gleichungen beschrieben.

$$y = \frac{\hat{y}_1}{r} \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right] \quad (\text{V.8})$$

$$y = \frac{\hat{y}_1}{r} \cdot \sin(\omega t - kx) \quad (\text{V.9})$$

$\hat{y}_1$  ist die Amplitude für den Abstand  $r = 1$ .

■ **Beispiel:** Eine harmonische Welle habe eine Phasengeschwindigkeit  $c = 300 \text{ m/s}$  und eine Frequenz von  $100 \text{ Hz}$ . Zur Zeit  $t = 0$  wird sie mit einer Amplitude  $\hat{y} = 10 \text{ cm}$  angeregt.

- Wie groß ist die Wellenlänge  $\lambda$ ?
- Wie groß ist die Auslenkung am Ort  $x = 9 \text{ m}$  nach einer Zeit von  $0,15 \text{ s}$ ?

**Lösung:**

$$\text{a) nach (V.1) } \lambda = \frac{c}{f} = \frac{300 \text{ m/s}}{100 \text{ s}} = 3 \text{ m} \quad (\text{V.10})$$

$$\begin{aligned} \text{b) } y &= 10 \text{ cm} \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{0,15 \text{ s}}{0,01 \text{ s}} - \frac{9 \text{ m}}{3 \text{ m}}\right)\right] \\ y &= 10 \text{ cm} \cdot \sin[2\pi(15 - 3)] = 10 \text{ cm} \cdot \sin(24\pi) = 0 \text{ cm} \end{aligned}$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$ , besser als *Phasengeschwindigkeit* bezeichnet, da zur Bildung der Wellenfronten Orte gleicher Phase miteinander verbunden werden, hängt vom Wellentyp und vom Medium, in dem sich die Welle bewegt, ab. In der folgenden Tabelle sind einige Beispiele angegeben.

**Tabelle V-1** Phasengeschwindigkeit

| Wellentyp                                          | Phasengeschwindigkeit                                                              |
|----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Longitudinalwellen in Gasen, Schallwellen in Gasen | $c = \sqrt{\frac{\chi p}{\varrho}} \quad (\text{V.11})$                            |
| Longitudinalwellen in Flüssigkeiten                | $c = \sqrt{\frac{K}{\varrho}} \quad (\text{V.12})$                                 |
| Longitudinalwellen in Festkörpern                  | $c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} \quad (\text{V.13})$                                 |
| Elektromagnetische Wellen in Materie               | $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0}} \quad (\text{V.14})$ |

$\chi$  Isentropenexponent,  $p$  Druck,  $\varrho$  Massendichte,  $K$  Kompressionsmodul,  $E$  Elastizitätsmodul,  $\varepsilon_0$  Elektrische Feldkonstante,  $\varepsilon_r$  Permittivitätszahl,  $\mu_0$  Permeabilität,  $\mu_r$  relative Permeabilität

## 1.2 Interferenz

Unter Interferenz wird die Überlagerung von Wellen verstanden. Dabei gilt, daß bei nicht zu großen Amplituden der beteiligten Wellen sich jede Welle ungestört ausbreiten kann und die momentanen Auslenkungen addiert werden können. Dies wird das Verfahren der ungestörten *Superposition* genannt.

### Interferenz von Wellen gleicher Frequenz

Zwei Wellen gleicher Frequenz, die sich in gleicher Richtung ausbreiten, können sich im allgemeinen durch ihre Amplitude und durch eine Verschiebung gleicher Schwingungszustände unterscheiden. Diese räumliche Verschiebung ist der *Gangunterschied*  $\Delta$ . Die beiden Wellen sind nach Gleichung (V.7) durch

$$y_1 = \hat{y}_1 \cdot \sin(\omega t - kx) \quad (\text{V.15})$$

und

$$y_2 = \hat{y}_2 \cdot \sin\left(\omega t - kx + \frac{2\pi\Delta}{\lambda}\right) \quad (\text{V.16})$$

gegeben. Die resultierende Welle läßt sich durch Addition der Teilwellen bestimmen. Sie hat dieselbe Frequenz und dieselbe Wellenlänge, damit auch dieselbe Phasengeschwindigkeit wie die beiden Ursprungswellen, aber eine andere Amplitude. Haben beide Wellen die gleiche Amplitude  $\hat{y}_1 = \hat{y}_2 = \hat{y}_0$ , so gilt:

### resultierende Welle

$$y_{\text{res}} = 2\hat{y}_0 \cos\left(\frac{\pi\Delta}{\lambda}\right) \sin\left(\omega t - kx + \frac{\pi\Delta}{\lambda}\right) \quad (\text{V.17})$$

$$y_{\text{res}} = \hat{y}_{\text{res}} \sin \left( \omega t - kx + \frac{\pi \Delta}{\lambda} \right) \quad (\text{V.18})$$

Amplitude

$$\hat{y}_{\text{res}} = 2\hat{y}_0 \cos \left( \frac{\pi \Delta}{\lambda} \right) \quad (\text{V.19})$$

Sonderfälle:

$$\text{a) } \Delta = n\lambda, \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{V.20})$$

Die Phasenlage der resultierenden Welle ist gegenüber den Ausgangswellen unverändert, die Amplitude ist doppelt so groß wie die Ausgangsamplituden. Für gerade Werte von  $n$  hat die Kosinusfunktion den Wert 1, für ungerade Werte den Wert  $-1$ . In diesem Fall wird aber die Welle wegen des Summanden  $\frac{\pi \Delta}{\lambda}$  in der Sinusfunktion um  $\lambda/2$  verschoben, sodass die ursprüngliche Phasenlage beibehalten wird (*konstruktive Interferenz*).

$$\text{b) } \Delta = (2n+1) \frac{\lambda}{2}, \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{V.21})$$

In diesen Fällen wird  $\hat{y}_{\text{res}} = 0$ , die Wellen löschen sich aus (*destruktive Interferenz*).

Stehende Wellen

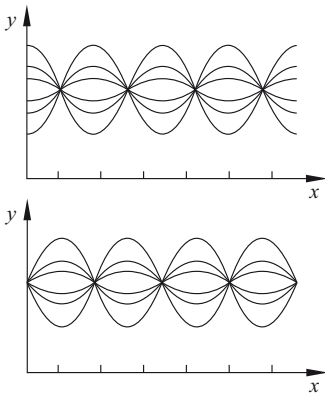


**Bild V-3** Stehende Wellen

Laufen die Wellen, die zur Interferenz gelangen, nicht in gleicher Richtung, sondern einander entgegen, so entstehen *stehende Wellen*. Dies kann z.B. durch Reflexion an einem Spiegel geschehen. Die beiden Wellen können bei gleicher Amplitude nach Gleichung (V.7) durch

$$y_1 = \hat{y} \cdot \sin(\omega t - kx) \quad (\text{V.22})$$

und

$$y_2 = \hat{y} \cdot \sin(\omega t + kx) \quad (\text{V.23})$$

beschrieben werden. Auch hier ergibt sich die resultierende Welle durch Addition der Teilwellen. Unter Anwendung des Additionstheorems folgt:

$$y_{\text{res}} = 2\hat{y} \sin(\omega t) \cos(kx) \quad (\text{V.24})$$

An den Stellen, an denen der Kosinusterm in (V.24) verschwindet, hat auch die resultierende Welle zu allen Zeiten keine Auslenkung. Dies ist der Fall für solche Orte, die um  $\lambda/2$  voneinander entfernt sind. Der erste Nullpunkt hängt von der Art der Reflexion ab, an einem dichteren Medium liegt er in der Grenzfläche, sonst um  $\lambda/4$  vor der Grenzfläche.

In den Punkten dazwischen ergibt sich je nach Laufzeit eine Auslenkung, die maximal den doppelten Wert der Ursprungsamplitude haben kann. In Bild V-3 ist oben die Reflexion an einem dichteren Medium, unten an einem dünneren Medium dargestellt. Dabei muß noch berücksichtigt werden, daß bei Reflexion an einem dichteren Medium ein Phasensprung von  $\lambda/2$  eintritt.

## 2 Huygensches Prinzip

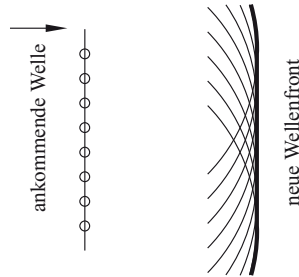


**Bild V-4** Huygensches Prinzip

Die Wellenausbreitung kann nach dem *Huygensschen Prinzip* (nach *Christian Huygens*) dadurch erklärt werden, dass jeder Punkt, der von einer Wellenfront getroffen wird, wiederum Ausgangspunkt einer sogenannten *Elementarwelle* wird. Diese ist, da es sich um punktförmige Erreger handelt, eine Kugelwelle (siehe Kap. V.1). Die neue Wellenfront entsteht als Einhüllende aller dieser Teilwellen. Dieses Prinzip gilt nicht nur für eine Wellenausbreitung in Medien, sondern ganz allgemein, auch für elektromagnetische Wellen, wie z.B. Licht. Mit Hilfe dieses Prinzips lassen sich Vorgänge wie Reflexion, Brechung und Beugung erklären.

### 2.1 Reflexion

Eine ebene Wellenfront  $W$ , die sich mit der Geschwindigkeit  $c$  bewegt, erreicht zu einem bestimmten Zeitpunkt den Punkt  $A$  eines Spiegels. Für die Strecke  $DB$  braucht die Wellenfront die Zeit  $t_1$ . Vom Punkt  $A$  geht eine Elementarwelle aus, die dann, wenn der Punkt  $B$  erreicht ist, den Radius

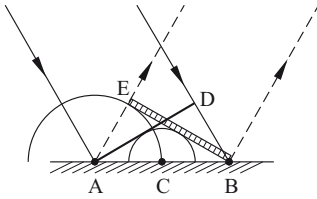


Bild V-5 Reflexion

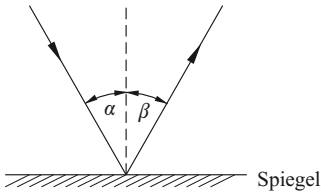


Bild V-6 Reflexionsgesetz

$\overline{AE} = c \cdot t_1$  hat. In der Zeit  $t_1/2$  ist der Punkt C in der Mitte zwischen A und B erreicht. Die Elementarwelle, die in C angeregt wird, hat den Radius  $\overline{AE}/2$ , wenn die Wellenfront nach der Zeit  $t_1$  den Punkt B erreicht hat. Die Einhüllende dieser Elementarwellen ist mit  $W'$  bezeichnet. Da die Dreiecke  $AEB$  und  $ADB$  kongruent sind, folgt, daß beide Wellenfronten mit dem Spiegel denselben Winkel bilden. Üblicherweise werden nicht die Wellenfronten, sondern die darauf senkrecht stehenden *Wellennormalen* gezeichnet, um die Richtung einer Welle darzustellen. Auch werden die Winkel nicht zur Spiegelfläche, sondern zur Senkrechten auf der Spiegelfläche gemessen, wie in Bild V-6 zu ersehen ist. Es gilt das *Reflexionsgesetz*: *Einfallswinkel = Ausfallswinkel*

$$\alpha = \beta \quad (\text{V.25})$$

## 2.2 Brechung

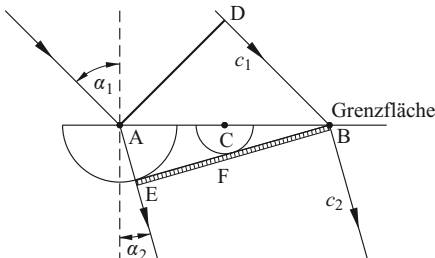


Bild V-7 Brechung

Wenn sich die Welle in Gebieten mit unterschiedlichen Phasengeschwindigkeiten ausbreitet, so ändert sich beim Durchgang durch die Grenzfläche die Richtung der Wellenfronten. Im Medium 1 habe die

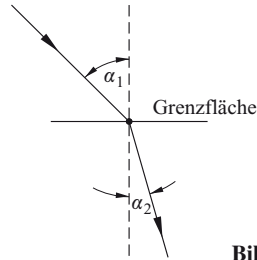


Bild V-8 Brechungsgesetz

Welle die Geschwindigkeit  $c_1$  und laufe unter einem Winkel  $\alpha_1$  ein, im Medium 2 sei die Geschwindigkeit  $c_2$  und der Winkel  $\alpha_2$ . Beim Erreichen des Punktes A wird hier eine Elementarwelle ausgesendet, die dann, wenn die Welle im Medium 1 nach der Zeit  $t_1$  den Punkt B erreicht hat, den Radius  $\overline{AE}$  hat. Die Einhüllende im Medium 2 ist  $\overline{BD}$ . Im Dreieck  $ABD$  gilt:

$$\sin \alpha_1 = \frac{\overline{DB}}{\overline{AB}}$$

und im Dreieck  $AEB$ :

$$\sin \alpha_2 = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}.$$

Weiter gilt

$$\overline{DB} = c_1 \cdot t_1, \quad \overline{AE} = c_2 \cdot t_2.$$

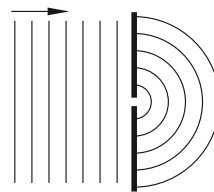
Hieraus folgt

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\overline{DB}}{\overline{AE}} = \frac{c_1 \cdot t_1}{c_2 \cdot t_1}$$

das *Brechungsgesetz*

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad (\text{V.26})$$

Dies Gesetz ist ebenfalls für alle Wellenarten gültig.

Bild V-9  
Beugung an einer Öffnung

## 2.3 Beugung

Trifft eine Welle auf eine Wand, in der sich eine kleine Öffnung befindet, so breitet sich die Welle hinter der Öffnung nicht geradlinig aus, sondern auch in dem Teil des Raumes, der durch die Wand abgedeckt ist, ist die Welle bemerkbar. Dieses Phänomen wird als *Beugung* bezeichnet. Die Beugung lässt sich mit Hilfe des Huygensschen Prinzips so verstehen, daß von der Öffnung Elementarwellen ausgehen. Sind mehrere Öffnungen vorhanden, so entsteht das

Beugungsfeld durch Interferenz der einzelnen Elementarwellen. Dies ist in Bild V-10 für den Fall eines Doppelspaltes aufgezeigt. Die Kreise stellen die Maxima der Elementarwellen dar. An den Punkten, an denen sich die Elementarwellen schneiden, erfolgt Verstärkung. Die Verbindungslinien dieser Schnittpunkte liegen auf Hyperbeln, deren Asymptoten zur Ausbreitungsrichtung unter den Winkeln  $\alpha$  verlaufen. Für diese Winkel gilt mit ganzen Zahlen  $n$  die Bedingung

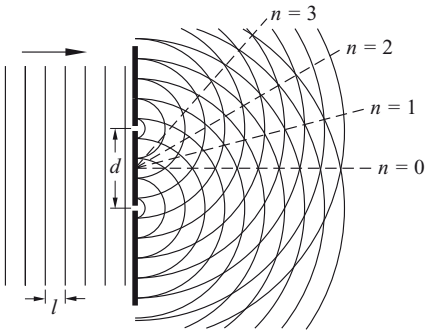


**Bild V-10** Beugung am Doppelspalt

$$\sin \alpha_n = n \frac{\lambda}{d}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{V.27})$$

erfüllt ist.

### 3 Dopplereffekt

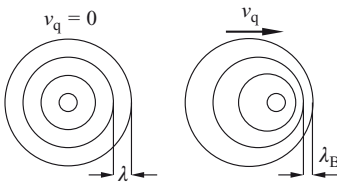


**Bild V-11** Dopplereffekt

Wenn sich der Erreger einer Welle, die Quelle, und der Beobachter relativ zum Medium, in dem die Welle übertragen wird, bewegen, so treten Frequenzverschiebungen auf, die *Dopplereffekt* genannt werden. Dabei ist es für die Berechnung wichtig, ob sich die Quelle oder der Beobachter bewegen. Beobachten kann man den Dopplereffekt beim Herannahen eines hupenden Autos: Bei Annäherung erhöht sich zunächst die Frequenz, der Ton wird höher, beim Entfernen erniedrigt sich die Frequenz und der Ton wird niedriger. Zunächst soll der Fall des ruhenden Beobachters und der sich auf den Beobachter zu bewegendes Quelle untersucht werden. Von einer punktförmigen Quelle werden Kugelwellen ausgesendet. Da sich die Quelle bewegt, liegen die Zentren der zu verschiedenen Zeiten nacheinander ausgesendeten

Kugelwellen nicht mehr in einem Punkt. Der Beobachter im Punkt  $B$  erkennt eine kürzere Wellenlänge. Im Bild V-11 ist links eine ruhende Quelle, die eine Welle der Wellenlänge  $\lambda$  aussendet, rechts eine bewegte Quelle dargestellt. Die Quelle bewegt sich nach rechts mit der Geschwindigkeit  $v_q$ . Der Beobachter sieht nun eine kleinere Wellenlänge  $\lambda_B$ . In der Zeit  $T_q = \frac{1}{f_q}$  hat sich die Quelle um die Strecke  $v_q T_q$  nach rechts bewegt, somit ist die Wellenlänge  $\lambda_B = \lambda - v_q T_q$  verkleinert, die Frequenz hat sich jedoch vergrößert:  $\lambda_B = \lambda - v_q T_q$ . Mit  $\lambda = \frac{c}{f}$  wird daraus:

$$\frac{c}{f_b} = \frac{c}{f_q} - \frac{v_q}{f_q} \quad (\text{V.28})$$

$$\frac{c}{f_b} = \frac{c}{f_q} \left( 1 - \frac{v_q}{c} \right) \quad (\text{V.29})$$

$$f_b = \frac{f_q}{1 - \frac{v_q}{c}} = f_Q \frac{c}{c - v_Q} \quad (\text{V.30})$$

| Quelle | Beobachter | Formel                                                  |
|--------|------------|---------------------------------------------------------|
| →      | →          | $f_b = f_Q \frac{c - v_B}{c - v_Q} \quad (\text{V.31})$ |
| →      | ←          | $f_b = f_Q \frac{c + v_B}{c - v_Q} \quad (\text{V.32})$ |
| ←      | →          | $f_b = f_Q \frac{c - v_B}{c + v_Q} \quad (\text{V.33})$ |
| ←      | ←          | $f_b = f_Q \frac{c + v_B}{c + v_Q} \quad (\text{V.34})$ |

Zu unterscheiden ist, ob und wie sich Quelle und Beobachter relativ zueinander bewegen. In den Gleichungen V.31 bis V.34 sind die möglichen Fälle angegeben.

Wenn Quelle oder Beobachter ruhen, so ist in der entsprechenden Gleichung diese Geschwindigkeit = 0 zu setzen.

■ **Beispiel:** Eine Schallquelle sendet einen Ton von 440 Hz aus. Die Quelle bewegt sich mit 100 km/h an einem ruhenden Beobachter vorbei.

Frage: Welche Frequenz nimmt der Beobachter

- a) bei Annäherung
- b) bei Entfernung der Quelle wahr?

Die Schallgeschwindigkeit beträgt 330 m/s.

**Lösung:** Da die Geschwindigkeit  $v_B = 0$  ist, folgt:

$$\text{a) } v_Q = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{100 \text{ m}}{3,6 \text{ s}} = 27,78 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



$$f_B = f_Q \frac{c}{c - v_Q} = \frac{440 \cdot 330}{330 - 27,78} = 480,44 \text{ Hz}$$

b)  $f_B = f_Q \frac{c}{c + v_Q} = \frac{440 \cdot 330}{330 + 27,78} = 405,8 \text{ Hz}$

Ein Sonderfall tritt dann ein, wenn sich die Quelle mit derselben Geschwindigkeit bewegt wie die ausgesendete Welle, z.B. eine Schallwelle. Es entsteht das Wellenbild nach Bild V-12 links. Alle Kugelwellen addieren sich im Punkt  $P$ , es entsteht die sogenannte *Schallmauer*, die mit der Quelle mitläuft. Wird die Geschwindigkeit der Quelle größer als die Schallgeschwindigkeit, so sind die Verhältnisse entsprechend Bild V-1 rechts. Für den *Öffnungswinkel* des entstehenden *Machschen Kegels* gilt:

Öffnungswinkel  $\sin \alpha = \frac{c}{v_Q}$  (V.35)

Auf dem Kegelmantel bildet sich eine einheitliche Wellenfront, die von einem Beobachter als Knall wahrgenommen wird. Diese Wellenfront bewegt sich mit der Quelle. In Vorwärtsrichtung ist die Quelle nicht zu hören.

Die Gleichungen (V.31) bis (V.34) gelten nur für den Fall, daß sich die Welle in einem Medium als Träger

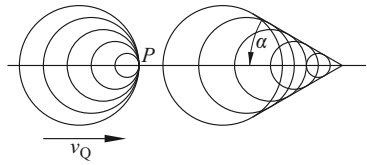


**Bild V-12** Schallmauer und Machscher Kegel

der Welle ausbreitet. Eine Sonderstellung nehmen hier die elektromagnetischen Wellen ein (z.B. Licht), denn diese benötigen kein Medium, um sich auszubreiten. In diesem Fall gibt es bei bewegten Quellen und Beobachtern auch eine Frequenzverschiebung, diese ist aber nur von der Relativgeschwindigkeit zwischen Quelle und Beobachter abhängig. Bei Annäherung von Quelle und Beobachter gilt:

$$f_B = f_Q \sqrt{\frac{c + v}{c - v}} \quad (\text{V.36})$$

Entfernen sich Quelle und Beobachter, so muss  $v$  durch  $-v$  ersetzt werden.

$$f_B = f_Q \sqrt{\frac{c - v}{c + v}} \quad (\text{V.37})$$

## VI Akustik

In der Akustik wird die Ausbreitung von Schallwellen in festen, flüssigen und gasförmigen Medien untersucht. In festen Stoffen können diese Wellen Longitudinalwellen und Transversalwellen sein, in Flüssigkeiten und Gasen gibt es nur Longitudinalwellen, weil dort die zur Ausbreitung von Transversalwellen notwendigen rückstellenden Querkräfte fehlen. Im folgenden werden vorzugsweise Schallwellen in Gasen behandelt, weil diese im täglichen Leben eine übergeordnete Rolle spielen.

### 1 Schallausbreitung

Schall breitet sich in Gasen und Flüssigkeiten durch Druckänderungen als Longitudinalwelle aus. Hiermit verbunden ist eine Dichteschwankung, eine Druckschwankung und eine Schwankung der Geschwindigkeit der einzelnen Moleküle um die jeweiligen konstanten Mittelwerte (Index 0), die auch ohne Schall vorhanden sind.

Dichte  $\varrho = \varrho_0 + \varrho_w$  (VI.1)

Druck  $p = p_0 + p_w$  (VI.2)

Geschwindigkeit  $v = v_0 + v_w$  (VI.3)

mit den Bezeichnungen:

$\varrho_w$ : Wechseldichte,  $p_w$ : Schallwechseldruck oder Schalldruck,  $v_w$ : Schallschnelle

Die Lösungsfunktion als Funktion von Ort und Zeit hängt unter anderem vom Erregertyp ab. Für den einfachsten Fall einer eindimensionalen sinusförmigen Erregung lautet sie für den *Schalldruck*:

$$p(x, t) = p_0 + \hat{p} \sin(\omega t - kx) \quad (\text{VI.4})$$

und für die *Schallschnelle*:

$$v_w(x, t) = \hat{v} \sin(\omega t - kx) \quad (\text{VI.5})$$

mit

$$\hat{v} = \frac{\hat{p}}{\varrho_0 c} \quad (\text{VI.6})$$

**Tabelle VI-1** Schallgeschwindigkeit und Schallkennimpedanz

|                                  | Dichte<br>$\varrho/\text{kg m}^{-3}$ | $c/\text{ms}^{-1}$ | $Z/\text{Ns m}^{-3}$ |
|----------------------------------|--------------------------------------|--------------------|----------------------|
| Luft $-20\text{ }^\circ\text{C}$ | 1,396                                | 319                | 445                  |
| Luft $0\text{ }^\circ\text{C}$   | 1,293                                | 331                | 427                  |
| Luft $20\text{ }^\circ\text{C}$  | 1,21                                 | 344                | 416                  |
| Eis                              | 920                                  | 3200               | $2,94 \cdot 10^6$    |
| Holz                             | 600                                  | 4500               | $2,7 \cdot 10^6$     |
| Glas                             | 2500                                 | 5300               | $13 \cdot 10^6$      |
| Beton                            | 2100                                 | 4000               | $8,4 \cdot 10^6$     |
| Stahl                            | 7700                                 | 5050               | $39 \cdot 10^6$      |



Hierbei ist  $c$  die Schallgeschwindigkeit. Die Größe  $\varrho_0 \cdot c$  wird als *Schallkennimpedanz*  $Z$ , früher auch als Schallwellenwiderstand, bezeichnet.

$$Z = \varrho_0 \cdot c \quad \frac{Z}{\text{Nm}^{-1}} \mid \frac{\varrho_0}{\text{kg/m}^3} \mid \frac{c}{\text{m/s}} \quad (\text{VI.7})$$

Die Schallkennimpedanz ist eine charakteristische Größe für das jeweilige Ausbreitungsmedium und ist bei ebenen Wellen konstant.

Für die Schallgeschwindigkeit in Gasen gilt (siehe Abschnitt 1):

$$c = \sqrt{\frac{\chi P}{\varrho}} \quad (\text{VI.8})$$

oder

$$c = \sqrt{\chi R_i T} \quad (\text{VI.9})$$

In Festkörpern gilt:

$$\text{Schallgeschwindigkeit} \quad c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} \quad (\text{VI.10})$$

## 2 Reflexion, Transmission, Absorption

Jedes Medium wird durch seine Schallkennimpedanz beschrieben. Treffen nun Schallwellen auf eine Grenzfläche zwischen zwei Medien mit unterschiedlicher Schallkennimpedanz, so wird ein Teil reflektiert, ein Teil tritt ins Medium ein. Der *Reflexionsfaktor*  $r$  ist definiert als das Verhältnis des Schalldruckes  $p_r$  der reflektierten Welle zu dem Schalldruck  $p_e$  der einfallenden Welle.

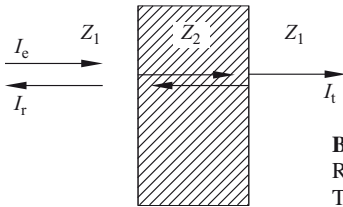


**Bild VI-1**  
Reflexion und  
Transmission

$$\text{Reflexionsfaktor} \quad r = \frac{p_r}{p_e} \quad (\text{VI.11})$$

Werden die Intensitäten  $I_r$  und  $I_e$  ins Verhältnis gesetzt, so erhält man den

$$\text{Reflexionsgrad} \quad \varrho_s = \frac{I_r}{I_e} = \frac{p_r^2}{p_e^2} = r^2 \quad (\text{VI.12})$$

Werden die Schallkennimpedanzen für senkrechten Einfall mit  $Z_1$  bzw.  $Z_2$  bezeichnet, so gilt für senkrechten Einfall:

$$\varrho_s = \left( \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2 \quad (\text{VI.13})$$

Ein großer Reflexionsgrad  $\varrho$  tritt immer dann auf, wenn die Schallkennimpedanzen der beteiligten Medien sehr unterschiedlich sind. Dabei ist es gleichgültig, welches der beiden Medien die größere Schallkennimpedanz besitzt.

Wird die Schallwelle im Medium 2 gedämpft, so wird die Welle bei genügend dickem Medium 2 vollständig absorbiert. Der *Schallabsorptionsgrad*  $\alpha_s$  wird definiert durch:

$$\text{Schallabsorptionsgrad} \quad \alpha_s = \frac{I_e - I_r}{I_e} = 1 - \frac{I_r}{I_e} \quad (\text{VI.14})$$

$$\alpha_s = 1 - \varrho_s = 1 - r^2 \quad (\text{VI.15})$$

Wird nun der Schall im Medium 2 nicht vollständig absorbiert, weil z.B. die Wand zu dünn ist, so tritt ein Teil  $I_t$  der einfallenden Schallintensität  $I_e$  durch das Medium 2 durch. Dieser Anteil wird als *Schalltransmissionsgrad*  $\tau_s$  bezeichnet. Auch an der zweiten Grenzfläche wird dann ein Teil der dort ankommenden Intensität reflektiert.

$$\text{Schalltransmissionsgrad} \quad \tau_s = \frac{I_t}{I_e} \quad (\text{VI.16})$$

Der Absorptionsgrad gibt an, welcher Teil der einfallenden Welle nicht reflektiert wurde, der Transmissionsgrad gibt den Anteil an, der durch eine Wand hindurch gelangt ist. Die in der Wand tatsächlich verlorengegangene Schallintensität wird durch den *Schalldissipationsgrad*  $\delta_s$  angegeben. Somit gilt der Zusammenhang:

$$\varrho_s + \tau_s + \delta_s = 1 \quad (\text{VI.17})$$

$$\varrho_s + \alpha_s = 1 \quad (\text{VI.18})$$

## 3 Ultraschall

Unter Ultraschall wird der Schall verstanden, dessen Frequenz jenseits (= ultra) der menschlichen Hörschwelle von ca. 20 kHz liegt. Die obere Grenze liegt bei etwa 1 GHz. Die zugehörigen Wellenlängen liegen in Luft zwischen etwa 2 cm und 0,34  $\mu\text{m}$ . Für den Ultraschall gibt es in der Praxis eine Vielfalt von Einsatzmöglichkeiten. Dazu nachfolgend einige Beispiele: Ultraschall-Echolot, Ultraschall-Blindenleitgerät, Ultraschall-Alarmanlagen, Werkstoffprüfung, Materialprüfverfahren, Medizin.

## VII Optik

Die Optik ist die Lehre vom Licht, seiner Ausbreitung, dem Aufbau optischer Instrumente und allen den Erscheinungen, die mit dem Auge wahrgenommen werden können. Heute wird zwischen der *klassischen Optik* und der *Quantenoptik* unterschieden. In der klassischen Optik wird das Licht als Welle verstanden. Seit Beginn dieses Jahrhunderts sind allerdings viele Experimente durchgeführt worden, deren Deutung nicht im Rahmen der Wellentheorie möglich ist. Zur Erklärung muß angenommen werden, dass das Licht sich wie ein Teilchen, als *Korpuskel*, dem sogenannten *Lichtquant*, verhält. Dieses Bild ist immer dann anzuwenden, wenn Licht mit Materie in Wechselwirkung tritt, also zum Beispiel bei der Absorption und Emission, aber auch bei der Streuung von Licht.

### 1 Eigenschaften des Lichtes

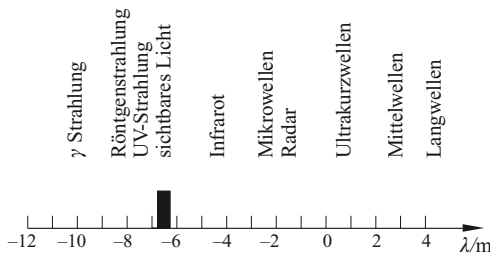


Bild VII-1 Spektrum der elektromagnetischen Wellen

Die Ansichten über die Natur des Lichtes haben sich im Laufe der Jahrhunderte grundlegend gewandelt. *Newton* stellte im 17. Jahrhundert eine Korpuskulartheorie auf, eine Lichtquelle sendet kleine Korpuskeln aus, die sich geradlinig mit großer Geschwindigkeit fortbewegen, bis sie im menschlichen Auge durch Nervenregung wahrgenommen werden. Reflexion und Brechung von Licht konnten hiermit erklärt werden, Beugung und Interferenz jedoch nicht. Dies gelang *Huygens* im Jahr 1678 mit der von ihm entwickelten *Wellentheorie*, die von *Young* (1802) durch Experimente untermauert wurde. Nach der Entdeckung der *Polarisation* durch *Malus* (1808) hat *Fresnel* (1815) das Licht als transversale Welle beschrieben, und daß das Licht eine *elektromagnetische Transversalwelle* ist, wurde von *Maxwell* (1865) entdeckt. Die physikalischen Größen, die sich bei elektromagnetischen Wellen zeitlich und räumlich periodisch ändern, sind die elektrische Feldstärke und damit verbunden auch die magnetische Feldstärke. Beide stehen senkrecht aufeinander und senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Das Licht breitet sich mit der Naturkonstanten *Lichtgeschwindigkeit* aus. Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum hängt mit der

elektrischen Feldkonstante  $\epsilon_0$  und der magnetischen Feldkonstante  $\mu_0$  durch die Gleichung

$$\text{Lichtgeschwindigkeit } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (\text{VII.1})$$

zusammen.

Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum hat den Wert

$$c = 2,997\,924\,58 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\text{VII.2})$$

Auch hier gilt, wie bei allen Wellen, der Zusammenhang  $c = \lambda \cdot f$  zwischen der Wellenlänge  $\lambda$  und der Frequenz  $f$ . Das sichtbare Licht nimmt nur einen kleinen Teil des Spektrums der elektromagnetischen Wellen ein (siehe Bild VII-1). Alle die dort aufgeführten Wellen sind elektromagnetische Wellen und breiten sich im Vakuum mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$  aus. Die Frequenzen erstrecken sich von  $10^4$  bis  $10^{20} \text{ s}^{-1}$ .

### 2 Geometrische Optik

Wird nun die Ausbreitung des Lichtes durch Öffnungen, durch Blenden oder an Gegenständen vorbei betrachtet, und sind diese Gegenstände groß gegenüber der Wellenlänge des Lichtes, so kann die Ausbreitung des Lichtes nach den Gesetzen der geometrischen Optik bestimmt werden, im anderen Fall muß die Wellenoptik herangezogen werden. Die Lichtwellen werden in ihren Ausbreitungsrichtungen durch die Strahlen gekennzeichnet, die senkrecht auf den Wellenfronten stehen (siehe Kapitel V). Bei ebenen Wellen sind die Strahlen parallel. Kreuzen sich zwei Lichtstrahlen, so beeinflussen sie sich gegenseitig nicht.

#### 2.1 Reflexion des Lichtes

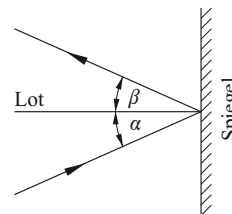


Bild VII-2  
Reflexionsgesetz

Wird ein einfallender Lichtstrahl an einer ebenen Fläche reflektiert, so gilt das *Reflexionsgesetz*:

*Einfallender Strahl, reflektierter Strahl und Einfallslot liegen in einer Ebene.*

*Der Einfallswinkel  $\alpha$  und der Reflexionswinkel  $\beta$  sind gleich.*

Das Einfallslot ist hier das Lot auf der Spiegelfläche. Dies Gesetz wurde bereits in Kapitel V mit der Wellentheorie abgeleitet.

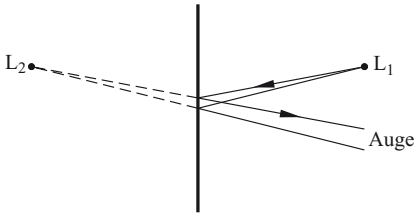


**Bild VII-3** Bildentstehung

Ein Beobachter, der vor einem ebenen Spiegel steht, sieht sein Bild hinter dem Spiegel. Das menschliche Auge in Zusammenarbeit mit dem Gehirn kann keine Richtungsumkehrung oder Abweichungen von der geradlinigen Ausbreitung des Lichtstrahles wahrnehmen. Eine Lichtquelle  $L_1$ , die vor einem Spiegel steht und deren Licht in das Auge fällt, erscheint dem Beobachter hinter dem Spiegel, dabei wird der tatsächlich vorhandene Strahlenverlauf durch das menschliche Gehirn in den nicht vorhandenen, gestrichelt gezeichneten Verlauf umgedacht. Das Bild  $L_2$  der Lichtquelle erscheint dort, wo sich die gedachten Strahlen kreuzen. Bilder, die durch einen nicht wirklich vorhandenen Schnittpunkt, sondern einen gedachten Schnittpunkt entstehen, heißen *virtuelle* Bilder. Schneiden sich zwei Lichtstrahlen tatsächlich, so entsteht ein *reelles* Bild.

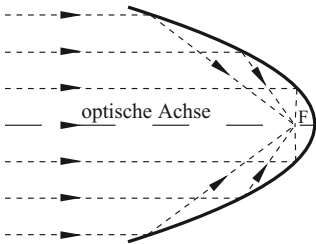


**Bild VII-4**  
Parabolspiegel

Im folgenden soll die Reflexion an nicht ebenen Spiegeln untersucht werden. Dabei hat der Spiegel im Querschnitt eine Parabelform; das räumliche Gebilde wird *Paraboloid* genannt. Diese *Parabolspiegel* haben die Eigenschaft, alle Strahlen, die parallel zur Symmetrielinie, der *optischen Achse*, einfallen, so zu reflektieren, daß sie sich in einem Punkt, dem Brennpunkt  $F$ , schneiden. Da Parabolspiegel schwer her-

zustellen sind, werden für einfache Anwendungen Spiegel genommen, deren Oberfläche aus einer Kugel geschnitten wurde. Diese haben zwar Abbildungsfehler, beschränkt man sich jedoch auf Strahlen, die nahe der optischen Achse einfallen, so können diese Fehler vernachlässigt werden. Der Brennpunkt hat im Rahmen dieser Näherung den Abstand

$$f = \frac{r}{2} \quad (\text{VII.3})$$

Diese Größe  $f$  ist die *Brennweite*. Zur Bildkonstruktion werden mindestens zwei Strahlen benötigt. Es werden die Strahlen verwendet, deren Verlauf sich einfach konstruieren lässt, nämlich ein achsenparalleler Strahl 1 und ein Brennpunktstrahl 2. Strahl 1 verläuft nach der Reflexion durch den Brennpunkt, Strahl 2 wird achsenparallel reflektiert. Hier können je nach Lage des Gegenstandes  $G$  virtuelle oder reelle Bilder entstehen (siehe Bild VII-5).

Wird der Abstand des Gegenstandes vom Spiegel mit der *Gegenstandsweite*  $g$ , der Abstand des Bildes mit der *Bildweite*  $b$  bezeichnet, so gilt die

*Abbildungsgleichung*

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad (\text{VII.4})$$

Die Gegenstandsgröße  $G$  und die Bildgröße  $B$  lassen sich aus einfachen geometrischen Überlegungen bestimmen, und es gilt:

*Abbildungsmaßstab*

$$\beta = \frac{B}{G} = -\frac{b}{g} \quad (\text{VII.5})$$

In diesem System sind die einzelnen Größen mit Vorzeichen behaftet, die positiven Richtungen weisen nach oben und vom Spiegel zum Brennpunkt, in diesem Fall nach links.

Ob das Bild reell oder virtuell, verkleinert oder vergrößert wird, hängt von der Gegenstandsweite ab. Es gilt:

|              |          |               |             |
|--------------|----------|---------------|-------------|
| $g < f$      | virtuell | aufrecht      | vergrößert  |
| $f < g < 2f$ | reell    | höhenverkehrt | vergrößert  |
| $g > 2f$     | reell    | höhenverkehrt | verkleinert |

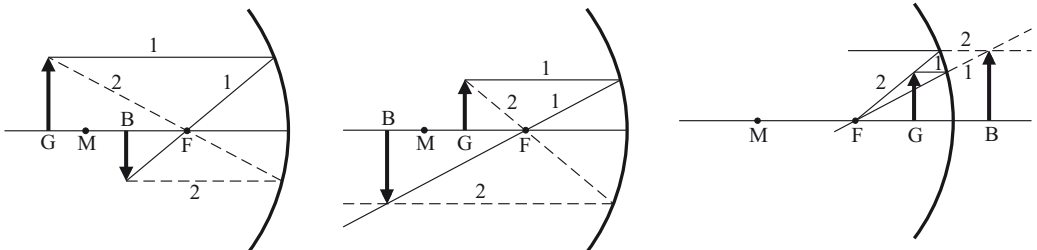


**Bild VII-5** Bildkonstruktion am Hohlspiegel

M: Mittelpunkt des Hohlspiegels; F: Brennpunkt; G: Gegenstand; B: Bild

■ **Beispiel:** Vor einem Hohlspiegel mit dem Krümmungsradius  $r = 10\text{ cm}$  steht in  $3\text{ cm}$  Abstand ein  $2\text{ cm}$  großer Gegenstand. Wie groß sind Bildweite und Bildgröße?

**Lösung:**  $f = \frac{r}{2} = 5\text{ cm}$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3}$$

$$b = -7,5\text{ cm}$$

$$B = -G \frac{b}{g} = -2\text{ cm} \cdot \frac{-7,5\text{ cm}}{3\text{ cm}} = 5\text{ cm}$$

Da  $b$  negativ ist, ist das Bild ein virtuelles Bild,  $B$  ist positiv, somit ist das Bild aufrecht, was dem Bild VII-5 c entspricht.

2.2 Brechungsgesetz

Trifft ein Lichtstrahl schräg auf die Grenzfläche zwischen zwei nicht absorbierenden Stoffen, in denen das Licht unterschiedliche Lichtgeschwindigkeit hat, so wird ein Teil des einfallenden Lichtes reflektiert, ein anderer Teil tritt in das zweite Medium ein. Dabei ändert sich die Ausbreitungsrichtung an der Grenzfläche. Dies wird als *Brechung* bezeichnet.

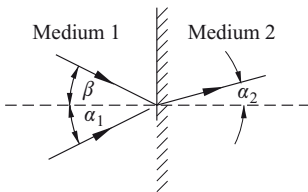


Bild VII-6  
Brechungsgesetz

Es gelten folgende Beziehungen zwischen den Winkeln in der Abbildung VII-6:

Reflexionsgesetz  $\alpha_1 = \beta$  (VII.6)

Brechungsgesetz  $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}$  (VII.7)

Jedem Medium wird eine Zahl zugeordnet, die durch das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit im Medium zu der im Vakuum definiert ist.

Brechungsindex  $n = \frac{c_{\text{Vac}}}{c}$  (VII.8)

Der *Brechungsindex* des betreffenden Materials hängt allerdings von der Wellenlänge des Lichtes ab. Die Tatsache, daß der Brechungsindex von der Wellenlänge des Lichtes abhängt, heißt *Dispersion*. Im optischen Bereich ist die Abhängigkeit normalerweise so, dass mit steigender Wellenlänge der Brechungsindex kleiner wird. Mit Hilfe der Brechungsindizes läßt sich das Brechungsgesetz auch schreiben:

Brechungsgesetz  $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$  (VII.9)

Stoffe mit kleinerem Brechungsindex sind *optisch dünner*, solche mit größerem Index *optisch dichter*.

Tabelle VII-1 Brechungsindizes für  $\lambda = 589\text{ nm}$ ,  $20\text{ }^\circ\text{C}$  und  $1013\text{ hPa}$

| Feste Stoffe    | $n$           | Flüssigkeiten und Gase | $n$       |
|-----------------|---------------|------------------------|-----------|
| Eis             | 1,31          | Wasser                 | 1,333     |
| Flußspat        | 1,4338        | Äthylalkohol           | 1,3618    |
| Steinsalz       | 1,5443        | Leinöl                 | 1,486     |
| Optische Gläser |               | Benzol                 | 1,5012    |
| Borkron BK1     | 1,51          |                        |           |
| Flint F3        | 1,6128        | Luft                   | 1,000 292 |
| Schwerflint SF4 | 1,7550        | Sauerstoff             | 1,000 271 |
| Quarzglas       | 1,4588        | Stickstoff             | 1,000 298 |
| Plexiglas       | 1,50 ... 1,52 | Kohlendioxid           | 1,000 449 |
| Diamant         | 2,4173        |                        |           |

Tabelle VII-2 Dispersion einiger Stoffe

| Farbe und Wellenlänge $\lambda$<br>Brechungsindex |                     |                  |                      |                |                |                 |                       |
|---------------------------------------------------|---------------------|------------------|----------------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------------|
| Stoff                                             | violett<br>396,8 nm | blau<br>430,7 nm | blaugrün<br>486,1 nm | grün<br>527 nm | gelb<br>589 nm | rot<br>656,2 nm | dunkelrot<br>760,8 nm |
| Wasser                                            | 1,3435              | 1,3406           | 1,3371               | 1,3352         | 1,333          | 1,3312          | 1,3289                |
| Flint F3                                          | 1,6542              | 1,6355           | 1,6246               | 1,6190         | 1,6128         | 1,6081          | 1,6029                |

### Totalreflexion

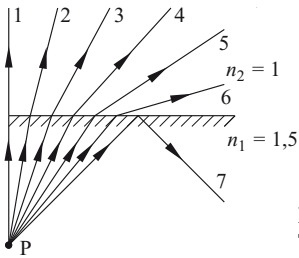


**Bild VII-7**  
Totalreflexion

Das Brechungsgesetz (VII.9) gilt unabhängig davon, ob das Licht aus einem optisch dichteren oder optisch dünnerem Medium austritt. Tritt das Licht aus einem optisch dichteren Medium in ein optisch dünneres Medium, so verläuft der Strahl wie in Bild VII-7 dargestellt, er wird vom Einfallslot weggebrochen. Wenn der Lichtstrahl aus einem optisch dichteren Medium in z.B. Luft tritt, so ist  $n_2 < n_1$ , und es folgt für den Ausfallswinkel nach (VII.9)

$$\sin \alpha_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \sin \alpha_1 \quad (\text{VII.10})$$

Da  $n_1 > n_2$ , kann der Fall eintreten, dass bei einem bestimmten Einfallswinkel  $\alpha_1$  der Wert für  $\sin \alpha_2 > 1$  wird. Ab diesem Grenzwinkel kann dann der Lichtstrahl nicht mehr ins Medium 2 eintreten, er wird vollständig reflektiert. Dies Phänomen heißt *Totalreflexion*. In Bild VII-7 sind einige Strahlenverläufe, ausgehend vom Punkt P, gezeichnet. Der Grenzwinkel ergibt sich in diesem Beispiel zu

$$\sin \alpha_1 = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{1,5}$$

$$\alpha_1 = 41,81^\circ$$

und liegt zwischen den Strahlen 6 und 7.

Technische Anwendung findet dieses Phänomen bei der Nachrichtenübertragung in *Lichtleitern*. Ein Lichtleiter ist im Prinzip so aufgebaut, dass ein optisch dichteres Material, der Kern, von einem optisch dünneren Material, dem Mantel, umgeben ist. Auf die Stirnfläche eintretendes Licht wird an der Grenzfläche Kern–Mantel totalreflektiert.

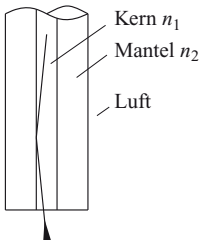


**Bild VII-8**  
Lichtleiter

### Prisma

Ein *Prisma* ist ein von geraden, gegeneinander geneigten Flächen begrenzter Körper aus einem durch-

sichtigen Material, normalerweise aus Glas. Die Kante  $\overline{CF}$  ist die *brechende Kante K* und der Winkel  $\varepsilon$  der *brechende Winkel*. Die Fläche  $ABDE$  heißt die Basis des Prismas. Im Bild VII-9 ist ein symmetrischer Strahlengang gezeichnet, die Winkelhalbierende von  $\varepsilon$  steht senkrecht auf dem Lichtstrahl. In diesem Fall des *symmetrischen Strahlengangs* gilt für den *Ablenkwinkel*  $\delta$ , dass dieser minimal wird. Ist das Prisma von Luft umgeben und hat den Brechungsindex  $n$ , so gilt die Gleichung:

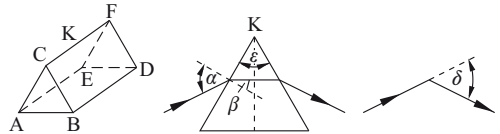


**Bild VII-9** Prisma

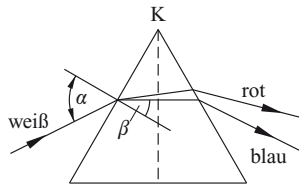


**Bild VII-10** Spektrale Zerlegung

$$\sin \frac{\delta + \varepsilon}{2} = n \cdot \sin \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{VII.11})$$

Aus einer Messung des Ablenkungswinkels  $\delta$  kann, bei bekanntem brechenden Winkel  $\varepsilon$ , der Brechungsindex des Prismas bestimmt werden.

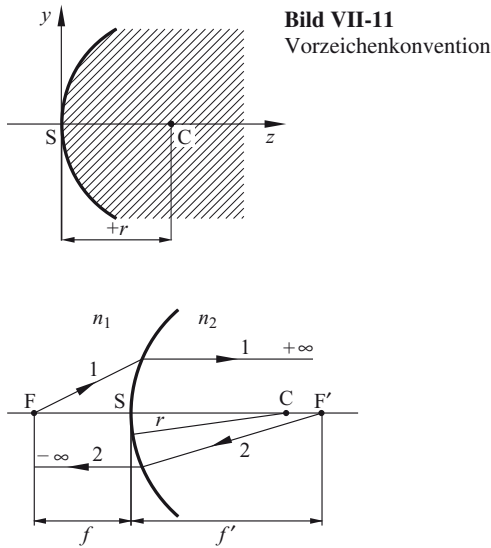
$$n = \frac{\sin \frac{\delta + \varepsilon}{2}}{\sin \frac{\varepsilon}{2}} \quad (\text{VII.12})$$

Dies Verfahren kann auch bei Flüssigkeiten angewendet werden. Die zu untersuchende Flüssigkeit wird dann in ein Hohlprisma gefüllt und der Ablenkungswinkel bestimmt.

Da der Brechungsindex von der Wellenlänge abhängt, kann mit einem Prisma Licht spektral zerlegt werden. Einfallendes weißes Licht, in dem alle Wellenlängen bzw. Farben vertreten sind, wird durch ein Prisma nach Farben zerlegt. Für rotes Licht ist der Brechungsindex kleiner als für blaues Licht, daher ist der Ablenkungswinkel für rotes Licht kleiner als für blaues Licht (siehe Tabelle VII-2).

### Linsen

In allen optischen Systemen und Geräten werden Linsen verwendet. Diese sind Glaskörper, die durch zwei Kugelflächen begrenzt sind. In der technischen Optik (nach DIN 1335) werden für die Brechung an einer Kugelfläche Vorzeichen festgelegt. Es gilt: Die

**Bild VII-12** Brennpunkte einer konvexen Kugelfläche

Achse durch den Kugelmittelpunkt ist die optische Achse, zugleich  $z$ -Achse des Koordinatensystems. Die positive  $z$ -Richtung wird durch die Laufrichtung des Lichtes festgelegt. Die  $y$ -Achse steht senkrecht auf der  $z$ -Achse und weist von unten nach oben. Der Radius der Kugel ist positiv, wenn das Zentrum  $C$  der Kugel in positiver  $z$ -Richtung vom Scheitelpunkt  $S$  liegt, hier also nach rechts. Sämtliche Strecken, die von  $S$  in negativer  $z$ -Richtung gemessen werden, erhalten ein negatives Vorzeichen. Da durch eine Kugelfläche Medien mit unterschiedlichen Brechungsindizes  $n_1$  und  $n_2$  getrennt werden, ist der Strahlenverlauf auf beiden Seiten der Fläche unterschiedlich. Die Brennpunkte  $F$  und  $F'$  sind so definiert, daß Strahlen, die von ihnen ausgehen, so gebrochen werden, daß sie achsenparallel weiter verlaufen. Für die Brennweiten  $f$  und  $f'$  gilt:

$$\text{Brennweite } f = \frac{n_1 r}{n_2 - n_1} \quad (\text{VII.13})$$

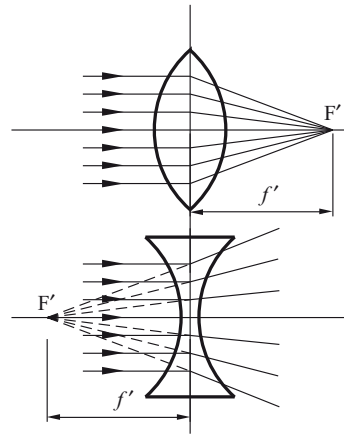
$$f' = \frac{n_2 r}{n_2 - n_1} \quad (\text{VII.14})$$

Kommen die Strahlen nicht aus dem Brennpunkt, sondern aus einem weiter entfernten Punkt im Abstand  $g$ , so schneiden sich alle Strahlen im Abstand  $b$ . Für diese Abstände gilt die

$$\text{Abbildungsgleichung } \frac{f'}{b} - \frac{f}{g} = 1 \quad (\text{VII.15})$$

Dabei ist  $g$  gemäß der Definition negativ einzusetzen.

Der Einfachheit halber soll angenommen werden, dass die Linsendicke vernachlässigbar klein ist, es sich also um *dünne Linsen* handelt. An beiden Grenz-

**Bild VII-13** Sammell- und Zerstreuungslinse

flächen zwischen der Linse und dem umgebenden Medium, im allgemeinen Luft, werden die Lichtstrahlen gebrochen. Bei dünnen Linsen kann man den Strahlengang konstruieren, indem beide Brechungen durch eine Brechung an der Mittellinie ersetzt werden. Es gibt *Sammellinsen*, oder *konvexe Linsen*, und *Zerstreuungslinsen*, oder *konkave Linsen*. Der Strahlenverlauf ist in Bild VII-13 dargestellt. Die tatsächlichen Strahlen sind durchgezogen gezeichnet, bei der Zerstreuungslinse wird der Brennpunkt durch die gestrichelt gezeichnete gedachte rückwärtige Verlängerung konstruiert. Da der Brennpunkt auf der linken Seite liegt, hat die Zerstreuungslinse eine negative Brennweite. Die Linse sei nun in Luft und besitze den Brechungsindex  $n_L$ . Es gilt für die Brennweite  $f'$ :

$$\frac{1}{f'} = (n_L - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (\text{VII.16})$$

$r_1$  Radius der linken Kugelfläche,  $r_2$  Radius der rechten Fläche. Sind beide Brennweiten gleich, so wird (VII.15) zur

$$\text{Linsenformel } \frac{1}{f} = \frac{1}{b} - \frac{1}{g} \quad (\text{VII.17})$$

Den Kehrwert der Brennweite  $f$  nennt man die Brechkraft oder *Dioptrie D*.

$$D = \frac{1}{f} \quad \frac{D}{\text{m}^{-1}} \left| \frac{f}{\text{m}} \right. \quad (\text{VII.18})$$

Der *Abbildungsmaßstab* ist:

$$\beta' = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} \quad (\text{VII.19})$$

Zur Konstruktion der Abbildung durch Linsen verwendet man zweckmäßigerweise folgende Strahlen:

1. Strahl parallel zur optischen Achse: durch den Brennpunkt,
2. Strahl durch die Linsenmitte: keine Ablenkung,
3. Strahl durch den Brennpunkt: parallel zur optischen Achse.

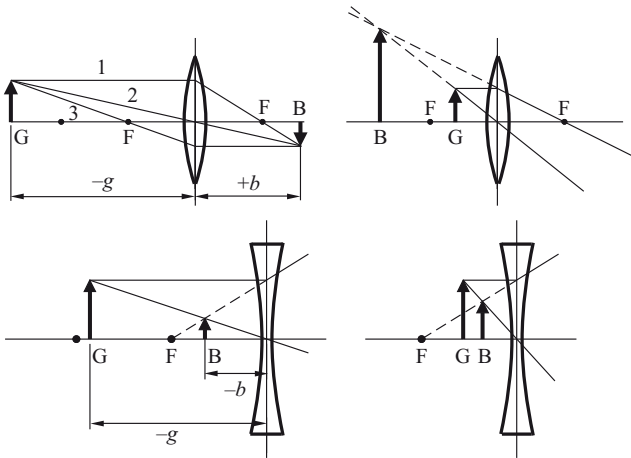


**Bild VII-14**  
Abbildung durch eine Sammellinse

**Bild VII-15**  
Abbildung durch Zerstreuungslinsen

In Bild VII-14 sind für zwei Fälle die Bildkonstruktionen durchgeführt. Links: Gegenstand außerhalb der doppelten Brennweite: Es ergibt sich ein reelles, höhenverkehrtes und verkleinertes Bild. Rechts: Gegenstand innerhalb der Brennweite: Es ergibt sich ein virtuelles, aufrechtes und vergrößertes Bild.

■ **Beispiel:** Ein Gegenstand der Größe 4 cm steht 25 cm entfernt von einer Sammellinse der Brennweite  $f = 5$  cm. Wie groß sind a) Bildweite, b) Abbildungsmaßstab und c) Bildgröße?

**Lösung:**

- a) Bildweite  $\frac{1}{b} = \frac{1}{f} + \frac{1}{g} = \frac{1}{5 \text{ cm}} + \frac{1}{-25 \text{ cm}}$   
 $b = 6,25 \text{ cm}$
- b) Abbildungsmaßstab  $\beta = \frac{b}{g} = \frac{6,25 \text{ cm}}{-25 \text{ cm}} = -0,25$
- c) Bildgröße  $B = \beta \cdot G = -0,25 \cdot 4 \text{ cm} = -1 \text{ cm}$

Da  $b$  positiv ist, liegt das Bild rechts von der Linse,  $B$  ist negativ, somit ist das Bild höhenverkehrt, dies entspricht dem Bild VII-14 a.

■ **Beispiel:** Ein Gegenstand der Größe 4 cm steht 3 cm entfernt von einer Sammellinse der Brennweite  $f = 5$  cm. Wie groß sind a) Bildweite, b) Abbildungsmaßstab und c) Bildgröße?

**Lösung:**

- a) Bildweite  $\frac{1}{b} = \frac{1}{f} + \frac{1}{g} = \frac{1}{5 \text{ cm}} + \frac{1}{-3 \text{ cm}}$   
 $b = -7,5 \text{ cm}$
- b) Abbildungsmaßstab  $\beta = \frac{b}{g} = \frac{-7,5 \text{ cm}}{-3 \text{ cm}} = 2,5$

c) Bildgröße  $B = \beta \cdot G = 2,5 \cdot 4 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$   
 $b$  ist jetzt  $< 0$ ,  $B > 0$ , somit liegt ein virtuelles, vergrößertes Bild vor.

Bei der Abbildung durch Zerstreuungslinsen werden im Prinzip die gleichen Strahlen verwendet wie bei Sammellinsen, nur entstehen hier grundsätzlich virtuelle Bilder, da sich die Strahlen ja nie schneiden können. Werden zwei Linsen kombiniert, und zwar so, dass sie in einem Abstand  $e$  voneinander stehen, so ergibt sich für das System eine Gesamtbrennweite nach folgender Formel:

**Brennweite einer Linsenkombination**

$$\frac{1}{f_{\text{ges}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{e}{f_1 \cdot f_2} \quad (\text{VII.20})$$

■ **Beispiel:** Ein Linsensystem besteht aus einer Sammellinse der Brennweite  $f_1 = 10$  cm und einer Zerstreuungslinse der Brennweite  $f_2 = -6$  cm. Beide haben einen Abstand von  $e = 5$  cm. Wie groß ist die Brennweite des Systems?

**Lösung:**

$$\frac{1}{f_{\text{ges}}} = \frac{1}{10 \text{ cm}} + \frac{1}{-6 \text{ cm}} - \frac{5 \text{ cm}}{-6 \cdot 10 \text{ cm}^2} = 0,0167 \text{ cm}^{-1}$$
$$f_{\text{ges}} = 60 \text{ cm}$$

In Linsensystemen werden die verschiedensten Formen verwendet, die gängigsten Bauformen von Linsen sind in Tabelle VII-3 aufgeführt.

**Tabelle VII-3** Bauformen von Linsen

|            |  |  |  |  |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|            | bi-konvex                                                                           | plan-konvex                                                                         | bi-konkav                                                                           | plan-konkav                                                                         |
| Radien     | $r_1 > 0$<br>$r_2 < 0$                                                              | $r_1 = \infty$<br>$r_2 < 0$                                                         | $r_1 < 0$<br>$r_2 > 0$                                                              | $r_1 = \infty$<br>$r_2 > 0$                                                         |
| Brennweite | $f > 0$                                                                             | $f > 0$                                                                             | $f < 0$                                                                             | $f < 0$                                                                             |



### 2.3 Optische Geräte

In optischen Geräten werden je nach Anwendung Linsen unterschiedlichster Bauformen zu Linsensystemen zusammengesetzt. Sie dienen dazu, den *Sehwinkel* zu vergrößern.

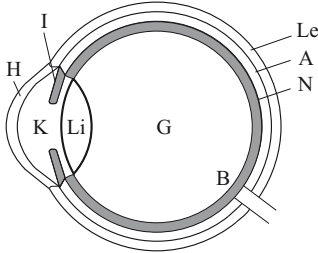


**Bild VII-16** Das menschliche Auge

#### Das menschliche Auge

Da jede optische Erscheinung mit dem Auge wahrgenommen wird, soll hier kurz die Wirkungsweise des menschlichen Auges dargestellt werden. Das Prinzip ist in Bild VII-16 dargestellt. Das Auge wird von der *Lederhaut* *Le* eingehüllt, darunter liegt die *Aderhaut* *A* und die lichtempfindliche *Netzhaut* *N*. Das Licht fällt durch die *Hornhaut* *H* und die *Augenkammer* *K*, tritt durch die *Linse* *Li* und dann auf die *Netzhaut* *N*. Der Augennerv tritt am *Blinden Fleck* *B* durch das Auge. Durch die variable Krümmung und damit variable Brennweite der Linse kann das Auge Gegenstände in verschiedenen Entfernungen scharf auf die Netzhaut abbilden. Die *Iris* *I* regelt als *Blende* die eintretende Lichtmenge. Der Abstand, in dem man noch eben scharf sehen kann, ist der *Nahpunkt*, er liegt beim jungen Menschen bei ca. 10 cm, beim älteren Menschen weiter entfernt. Als *deutliche Sehweite* ist ein Abstand von  $s_0 = 25$  cm definiert.

Der *Fernpunkt* liegt beim normalsichtigen Menschen im Unendlichen. Fehlsichtigkeit tritt dann auf, wenn parallel einfallende Strahlen nicht auf der Netzhaut (Bild VII-17 a), sondern beim *kurzsichtigen* Auge vor der Netzhaut (Bild VII-17 b), beim *weitsichtigen* Auge hinter der Netzhaut (Bild VII-17 c) fokussiert werden. Die lichtempfindlichen Sinneszellen sind die in der Netzhaut eingebetteten *Stäbchen* und *Zäpfchen*. Die Zäpfchen sind farbempfindlich, während die Stäbchen nur Grautöne unterscheiden können, dafür sind sie aber wesentlich lichtempfindlicher. Von einem realen Gegenstand wird durch das optische System des Auges ein umgedrehtes, reelles Bild auf der Netzhaut erzeugt. Das menschliche Gehirn dreht auf Grund seiner Erfahrung dieses Bild um, sodass wir von einem aufrechten Gegenstand auch ein aufrechtes Bild „sehen“. Der Gegenstand erscheint dem Auge unter dem *Sehwinkel*  $\sigma$ . Soll der Sehwinkel vergrößert betrachtet werden, so muß der Sehwinkel vergrößert werden, man muss näher an den Gegenstand herangehen. Dies geht aber nur bis zum

Nahpunkt. Eine weitere Vergrößerung ist nur mit Hilfe optischer Instrumente erreichbar. Wird der Sehwinkel mit Instrument als  $\sigma'$  bezeichnet, so ist die *Vergrößerung*  $\Gamma$  definiert zu

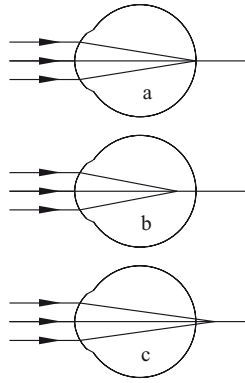


**Bild VII-17**  
Augenfehler

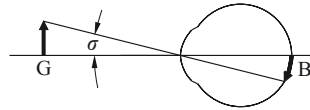


**Bild VII-18**  
Sehwinkel

$$\text{Vergrößerung} \quad \Gamma = \frac{\tan \sigma'}{\tan \sigma} \quad (\text{VII.21})$$

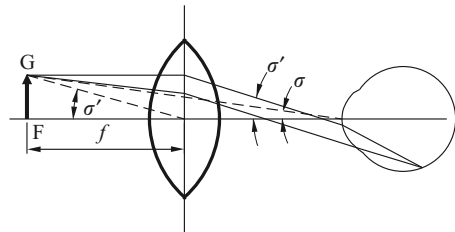


**Bild VII-19** Lupe

#### Lupe

Eine Lupe als einfachstes optisches Instrument ist eine Sammellinse hoher Brechkraft. Die Vergrößerung hängt von der Brennweite der Linse, aber auch vom Abstand des Gegenstandes von der Linse ab. Um eine vergleichbare Angabe zu erzielen, wird festgelegt, dass sich der Gegenstand in der Brennebene der Lupe befindet und sich das Auge auf unendlich eingestellt, *akkomodiert*, hat. Diese Vergrößerung bezeichnet man als *Normalvergrößerung*. Verglichen wird der sich dann ergebende Sehwinkel mit dem, bei dem sich der Gegenstand ohne Lupe in der deutlichen Sehweite  $s_0$  befindet.

$$\text{Mit } \tan \sigma' = \frac{G}{f} \text{ und } \tan \sigma = \frac{G}{-s_0} \text{ folgt für die}$$

$$\text{Vergrößerung einer Lupe} \quad \Gamma = -\frac{s_0}{f} \quad (\text{VII.22})$$



Wird der Gegenstand näher an die Lupe herangebracht, so entsteht ein virtuelles, aufrechtes vergrößertes Bild.

### Mikroskop

Noch bessere Vergrößerungen erzielt man mit einem *Mikroskop*. Dies ist im Prinzip eine Kombination aus zwei Sammellinsen, dem Objektiv *Obj* mit den Brennpunkten  $F_1$  und dem Okular *Ok* mit den Brennpunkten  $F_2$ . Das Objektiv entwirft vom Gegenstand *G* ein reelles *Zwischenbild* *ZB* fast im Brennpunkt  $F_2$ . Dieses Zwischenbild wird mit dem Okular, das wie eine Lupe wirkt, betrachtet. Die nahezu parallel austretenden Strahlen werden durch die Augenlinse auf der Netzhaut gebündelt. Eingezeichnet ist die sogenannte *Tubuslänge*  $t$ , der Abstand zwischen beiden Brennpunkten der Linsen. Die Gesamtvergrößerung ergibt sich zu:

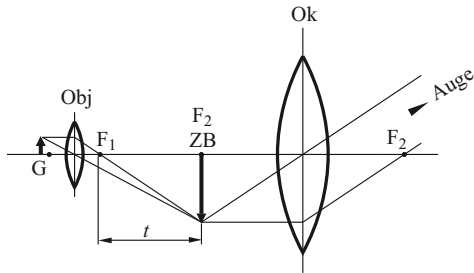


**Bild VII-20** Mikroskop

### Vergrößerung eines Mikroskops

$$\Gamma_M = \frac{t \cdot s_0}{f_1 \cdot f_2} \quad (\text{VII.23})$$

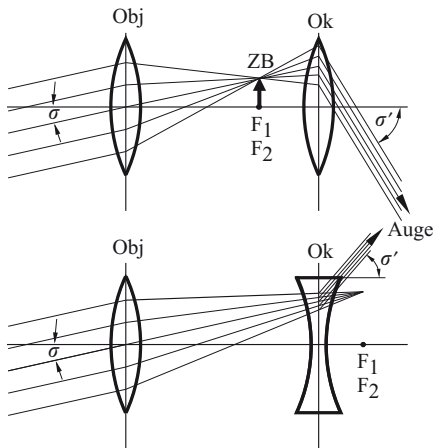


**Bild VII-21** Fernglas

### Fernglas

Beim Fernrohr liegt der zu betrachtende Gegenstand sehr weit entfernt, es treten parallele Strahlen in das Linsensystem. Es gibt verschiedene Anordnungen,

solche, bei denen das Bild höhenverkehrt erscheint, diese werden in der Astronomie verwendet (Keplersches Fernrohr), und solche mit aufrechten Bildern (Galileisches Fernrohr). Der grundsätzliche Strahlenverlauf ist in Bild VII-21 gezeichnet. Die Brennpunkte von Objektiv  $F_1$  und Okular  $F_2$  fallen zusammen. Die parallel austretenden Strahlen werden auch hier im Auge auf der Netzhaut fokussiert. Die Gesamtvergrößerung berechnet sich zu

$$\text{Vergrößerung eines Fernrohrs} \quad \Gamma_F = -\frac{f_1}{f_2} \quad (\text{VII.24})$$

Werden die Brennweiten mit richtigem Vorzeichen eingesetzt, so ergibt sich beim Keplerschen Fernrohr eine negative Vergrößerung, also eine Bildumkehr, beim Galileischen Fernrohr eine positive Vergrößerung, also ein aufrechtes Bild. Durch den Einbau einer weiteren Linse kann allerdings auch im Keplerschen Fernrohr ein aufrechtes Bild erzielt werden; das Fernrohr wird dadurch nur länger. Eine Verlängerung des Fernrohrs kann vermieden werden, indem der Strahl durch geeignete Prismen umgelenkt wird. Technische Angaben eines Fernglases sind die Vergrößerung und der Durchmesser  $D_E$  der Eintrittsöffnung, normalerweise des Objektivs. Die Angabe  $7 \times 50$  besagt, dass die Vergrößerung  $\Gamma_F = 7$  ist und die Eintrittsöffnung einen Durchmesser von 50 mm hat. Für den Durchmesser  $D_A$  der Austrittsöffnung gilt:

$$|\Gamma_F| = \frac{D_E}{D_A} \quad (\text{VII.25})$$

Die Leistungsfähigkeit bei Dämmerung wird nach DIN 58386 durch die *Dämmerungszahl*  $Z$  gekennzeichnet.

$$Z = \sqrt{\Gamma_F \cdot D_E} \quad (\text{VII.26})$$

Bei dem Fernglas  $7 \times 50$  ist

$$D_A = \frac{50 \text{ mm}}{7} = 7,14 \text{ mm}$$

und

$$Z = \sqrt{7 \cdot 50} = 18,7$$

hingegen bei  $8 \times 30$  gilt:

$$D_A = \frac{30 \text{ mm}}{8} = 3,75 \text{ mm}$$

$$Z = \sqrt{8 \cdot 30} = 15,5$$

somit ist das Glas  $7 \times 50$  in der Dämmerung besser geeignet.

Die Augenpupille ist maximal 8 mm im Durchmesser, es hat also keinen Sinn, ein Fernrohr zu benutzen, bei dem  $D_A > 8$  mm ist.

### Photoapparat

Ein Photoapparat bildet – wie das Auge – den Gegenstand auf einer lichtempfindlichen Schicht, dem Film, ab. Das Objektiv besteht, um Linsenfehler zu

vermeiden, aus Vielfach-Linsensystemen. Im Gegensatz zum Auge muss für unterschiedliche Entfernungen des Gegenstandes vom Objektiv der Abstand Film–Objektiv variiert werden, um eine scharfe Abbildung zu erreichen. Wie beim Auge kann die einfallende Lichtmenge durch eine variable Blende geregelt werden. Als technische Angabe für Objektive dient nach DIN 4521 das Verhältnis vom Durchmesser der Eintrittsöffnung zur Brennweite

$$\text{relative Öffnung} = \frac{D_E}{f} \quad (\text{VII.27})$$

Steht z.B. auf einem Objektiv 1:2,8,  $f = 50$  mm, so bedeutet dies bei einer Brennweite von 50 mm eine maximale Eintrittsöffnung von 17,85 mm. Der Kehrwert der relativen Öffnung ist die *Blendenzahl*  $k$  oder kurz *Blende*.

$$\text{Blende } k = \frac{f}{D_E} \quad (\text{VII.28})$$

Die nach DIN 4522 genormten Blendenzahlen sind: 1; 1,4; 2; 2,8; 4; 5,6; 8; 11; 16; 22. Sie sind so gewählt, daß sich bei Vergrößerung der Blendenzahl um einen Wert die Lichtintensität halbiert, daher ist der Faktor zwischen benachbarten Blendenwerten  $\sqrt{2}$ .

### 3 Wellenoptik

Die Eigenschaften der Wellen sind bereits im Abschnitt V besprochen worden, hier sollen spezielle Eigenschaften der Lichtwellen dargestellt werden.

#### 3.1 Interferenz

Bei Überlagerung von Wellen gleicher Frequenz können sich die Wellen je nach Gangunterschied auslöschen oder verstärken. Da Licht eine sehr kleine Wellenlänge hat, ist dieser Effekt nicht so leicht zu sehen. Außerdem braucht man zur Interferenz Licht gleicher Wellenlänge und fester Phasenbeziehung  $\varphi$ . Normale Temperaturstrahler senden Licht nicht kontinuierlich aus, sondern in räumlich begrenzten Wellenpaketen. Zwei Wellenpakete, die von unterschiedlichen Orten einer Lichtquelle emittiert wurden, können nur dann interferieren, wenn sie zu gleicher Zeit am Interferenzort eintreffen. Entscheidend für die Interferenzfähigkeit ist, dass die Wegdif-

ferenz nicht länger als die Wellenzüge ist. Der größte Gangunterschied, bei dem noch Interferenz möglich ist, ist die *Kohärenzlänge*  $l$ . In Tabelle VII-4 sind Kohärenzlängen einiger typischer Lichtquellen aufgelistet.

**Tabelle VII-4** Kohärenzlängen

| Lichtquelle      | Kohärenzlänge     |
|------------------|-------------------|
| weißes Licht     | 1–2 $\mu\text{m}$ |
| Spektrallampe    | 20 cm             |
| Halbleiter-Laser | 150 m             |
| He-Ne-Laser      | 2 km              |

Da aber bei normaler Lichtemission einzelne Bereiche von Lichtquellen das Licht ohne feste Phasenbeziehung abstrahlen, müssen bei Interferenzversuchen einige experimentelle Tricks angewendet werden. Licht gleicher Frequenz und fester Phasenbeziehung wird *kohärentes Licht* genannt. Sehr gut geeignete Lichtquellen für Interferenzversuche stehen heutzutage durch die *Laser* zur Verfügung. Diese liefern besonders scharf gebündelte Lichtstrahlen mit sehr guter Kohärenz. Interferenzerscheinungen können in speziellen Fällen auch im normalen Tageslicht beobachtet werden, z.B. rühren die schillernden Oberflächen von mit Öl bedecktem Wasser von Interferenz her. Dies soll an einer dünnen Schicht erläutert werden. In einer solch dünnen Schicht wird einfallendes Licht an den Grenzflächen vielfach reflektiert, ein Teil auch immer transmittiert. Die vom Beobachter aufgenommenen Lichtstrahlen haben dann unterschiedliche Wegstrecken zurückgelegt. Da weißes Licht einfällt, sind alle Wellenlängen vorhanden. Die Interferenzbedingung für Auslöschung kann unter einem festen Winkel nur für eine Wellenlänge erfüllt sein, daher wird, wenn diese Farbe ausgelöscht wird, aus dem weißen Licht farbiges Licht. Der Strahlen-gang ist in Bild VII-22 dargestellt. Der von der Lichtquelle  $L$  ausgehende Lichtstrahl wird im Punkt  $A$  teil-reflektiert und trifft als Strahl 1 im Punkt  $G$  auf. Ein Teil wird zum Punkt  $D$  gebrochen, dort teilreflektiert und vom Punkt  $B$  als Strahl 2 ebenfalls nach  $G$  gelenkt. Im Punkt  $G$  interferieren die Strahlen 1, 2, 3 ... Der geometrische Gangunterschied zwischen Strahl 1 und 2 beträgt  $\overline{AD} + \overline{DB} - \overline{AF}$ , der optische  $n(\overline{AD} + \overline{DB}) - \overline{AF}$ . Mit Hilfe des Brechungsgesetzes und der Tatsache, dass bei Reflexion an einem dichteren Medium ein Phasensprung von  $\lambda/2$  auftritt, kann für den Gangunterschied  $\Delta$  zwischen den Strahlen 1 und 2 abgeleitet werden:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda}{2} \quad (\text{VII.29})$$

Auslöschung tritt dann ein, wenn die Bedingung

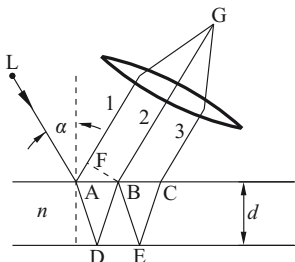


**Bild VII-22**  
Interferenz

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = (m+1)\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{VII.30})$$

erfüllt ist.

### 3.2 Beugung

Fällt auf eine Öffnung ein Bündel aus parallelem monochromatischem Licht, so ist hinter der Öffnung auch in den Bereichen, die im geometrischen Schattenbereich liegen, Lichtintensität zu beobachten. Diese Lichtbeugung lässt sich ebenfalls nur mit Hilfe der Wellennatur des Lichtes erklären. Bei Lichtwellen ist in der Regel die Öffnung größer als die Wellenlänge des eingestrahnten Lichtes.

*Spalt*

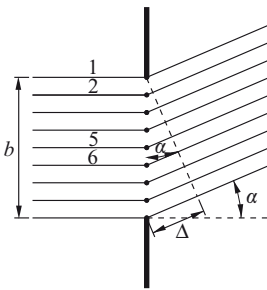


**Bild VII-23**  
Beugung am Spalt

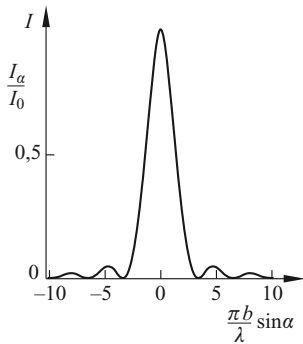


**Bild VII-24** Intensitätsverteilung hinter einem Spalt

Als Öffnung wird ein Spalt der Breite  $b$  betrachtet. Jeder Punkt des Spaltes, der von dem einfallenden Licht getroffen wird, ist nach dem *Huygensschen Prinzip* (siehe Abschnitt 1) Ausgangspunkt einer *Elementarwelle*. Die von den einzelnen Punkten ausgehenden Strahlen haben gegeneinander unterschiedliche Gangunterschiede. Wenn der Gangunterschied zwischen den beiden Randstrahlen genau  $\lambda$  beträgt, ist der Gangunterschied zwischen einem Randstrahl und dem Mittenstrahl, also z.B. Strahl 1 und Strahl 5,  $\lambda/2$ , und diese beiden Strahlen löschen sich aus. Aber auch zwischen 2 und 6 besteht dann der Gangunterschied  $\lambda/2$ , und diese beiden Strahlen löschen sich ebenfalls aus. So lässt sich in diesem Fall zu jedem Strahl immer ein anderer mit dem Gangunterschied  $\lambda/2$  finden, somit löschen sich alle Strahlen aus

und in dieser bestimmten Richtung herrscht Dunkelheit. Auslöschung tritt immer dann auf, wenn die Bedingung

$$\sin \alpha_{\min} = \frac{m\lambda}{b}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{VII.31})$$

erfüllt ist. Es kann gezeigt werden, dass die Intensität in einer bestimmten Richtung hinter einem Spalt nach der Formel

$$I_{\alpha \text{ Spalt}} = I_0 \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha \right)}{\left( \frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha \right)^2} \quad (\text{VII.32})$$

berechnet werden kann. Im Bild VII-24 ist diese Intensitätsverteilung aufgetragen.

Die Maxima liegen näherungsweise in der Mitte zwischen zwei Nullstellen, für sie gilt

*Maxima Beugungsbild*

$$\sin \alpha_{\max} \approx \left( m + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{b}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{VII.33})$$

Die Beugung am Spalt liefert keine sehr scharfen Intensitätsmaxima.

*Gitter*

Ein optisches Gitter ist eine Anordnung von vielen gleichen Spalten. Zur Interferenz gelangen jetzt einmal die Strahlen aus einem Spalt, aber auch Strahlen aus benachbarten Spalten (s. Bild VII-25). Das Beugungsbild hat jetzt ebenfalls Maxima und Minima, die Schärfe hängt von den Größen  $b$  und  $g$  ab, aber auch davon, wieviele Strahlen  $p$  zur Interferenz gelangen, d.h., wieviele Spalte beleuchtet werden. Die *Hauptmaxima*, das sind die Maxima, die durch Interferenz aus benachbarten Spalten entstehen, liegen so, dass die Bedingung

$$\sin \alpha_{\max} = \frac{m \lambda}{g}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{VII.34})$$

erfüllt ist. Die gesamte Intensitätsverteilung ist eine Funktion, die aus Überlagerung von Interferenz am einzelnen Spalt und aus benachbarten Spalten entsteht. Sie lautet:

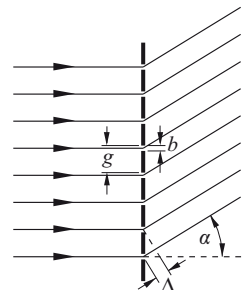


**Bild VII-25**  
Beugung am Gitter

$$I_{\alpha \text{ Gitter}} = I_{\alpha \text{ Spalt}} \cdot \frac{\sin^2 \left( \frac{pg\pi}{\lambda} \sin \alpha \right)}{\sin^2 \left( \frac{g\pi}{\lambda} \sin \alpha \right)} \quad (\text{VII.35})$$

Die Lage der Maxima ist von der Wellenlänge abhängig, somit können Gitter zur Trennung von verschiedenen Wellenlängen bzw. Farben verwendet werden, indem hinter dem Gitter durch geeignet angebrachte Blenden bis auf einen Wellenlängenbereich  $\Delta\lambda$  das Licht ausgeblendet wird. Dies wird in *Gittermonochromatoren* angewendet.

### Polarisation

Da Licht eine *elektromagnetische Transversalwelle* ist, ist es möglich, die Schwingungsrichtung so zu beeinflussen, dass der elektromagnetische Feldvektor  $\vec{E}$  nur in einer Ebene schwingt. Da der magnetische Feldvektor  $\vec{H}$  immer senkrecht zum  $\vec{E}$ -Vektor steht, schwingt auch dieser in einer Ebene. Solch ein Licht wird *linear polarisiertes Licht* genannt. Erzeugen kann man linear polarisiertes Licht u.a. durch *Polarisationsfilter*. Dies sind Filter, in denen lange organische Molekülketten liegen. In Richtung der Ketten kann dem einfallenden natürlichen Licht durch Energieübertragung an die Elektronen in den Molekülketten Energie entzogen werden, diese Schwingungsrichtung fehlt dann im Licht hinter dem Filter. Da jede Schwingungsrichtung als vektorielle Summe von zwei ausgezeichneten senkrecht zueinander stehenden Richtungen zusammengesetzt werden kann, liegt bei Fehlen einer dieser beiden Richtungen nur noch eine Schwingungsrichtung in einer Ebene vor. Trifft Licht der Intensität  $I_0$  auf einen solchen Polarisator  $P$ , so wird die Intensität nach dem Polarisator  $I_p$  halbiert, da ja eine Schwingungsrichtung fehlt.

$$I_p = \frac{I_0}{2} \quad (\text{VII.36})$$

Wird dieses linear polarisierte Licht durch ein zweites Polarisationsfilter  $A$  (*Analysator*) geschickt, so ist die Intensität hinter dem Analysator abhängig von der Verdrehung des Analysators gegen den Polarisator.

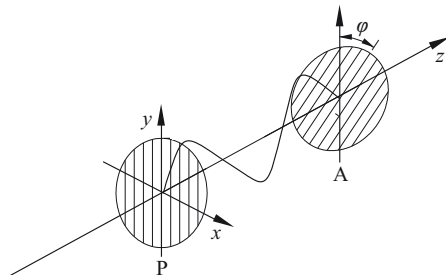


**Bild VII-26** Linear polarisiertes Licht

Intensität hinter dem Analysator

$$I_A = I_p \cdot \cos^2 \varphi \quad (\text{VII.37})$$

Ist die Ausbreitungsrichtung des Lichtes die  $z$ -Richtung, die Schwingungsrichtung des  $\vec{E}$ -Vektors die  $x$ -Richtung, dann schwingt der  $\vec{H}$ -Vektor in  $y$ -Richtung. Die in Bild VII-26 eingezeichneten Linien im Polarisator geben die Durchlaßrichtung an; diese steht senkrecht auf den Molekülketten.

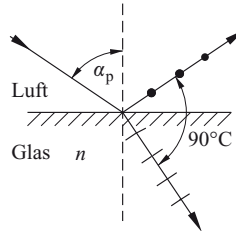


**Bild VII-27**  
Polarisation  
durch Reflexion

Auch durch Reflexion an einer Glasplatte kann Licht linear polarisiert werden. Durch den einfallenden und reflektierten Strahl wird eine Ebene festgelegt, die *Einfallebene*. Fällt natürliches Licht unter einem bestimmten Winkel, dem *Brewsterscher Winkel* oder auch *Polarisationswinkel*  $\alpha_p$ , auf die Glasplatte, so fehlt dann im reflektierten Strahl eine Schwingungsebene, und zwar die Ebene parallel zur Einfallsebene. Dies ist dann der Fall, wenn reflektierter und gebrochener Strahl senkrecht zueinander stehen. Für den Polarisationswinkel gilt:

$$\sin \alpha_p = n \cdot \sin(90^\circ - \alpha_p) \quad (\text{VII.38})$$

$$\sin \alpha_p = n \cdot \cos \alpha_p \quad (\text{VII.39})$$

$$\text{Polarisationswinkel} \quad n = \tan \alpha_p \quad (\text{VII.40})$$

Das reflektierte Licht ist dann senkrecht zur Einfallsebene linear polarisiert. Dieser Effekt wird z.B. in der Fotografie benutzt, um störende Reflexionen zu unterdrücken: Durch ein Polarisationsfilter vor dem Kameraobjektiv (Analysator) kann die linear polarisierte reflektierte Intensität durch richtige Drehung des Analysators beeinflusst werden.

## 4 Photometrie

In der geometrischen Optik wird allein die Frage nach Abbildungen und Strahlengängen untersucht, nicht aber Größen wie Lichtintensität, Helligkeit oder Strahlleistung. Diese Begriffe werden in der Photometrie definiert und angewendet. Dabei interessiert die gesamte Strahlungsleistung sowie deren räumliche und spektrale Verteilung. In der *objektiven Photometrie* wird die Strahlungsleistung mit einem Meßinstrument gemessen, die Größen erhalten den Index „e“ (energetisch). Wird die Strahlungsleistung mit dem Auge bewertet, spricht man von *subjektiver Photometrie*, und die Größen erhalten den Index „v“ (visuell).

## 4.1 Strahlungsphysikalische Größen

Unter Licht wird die elektromagnetische Strahlung im Wellenlängenbereich von 380 nm bis 780 nm verstanden. Die Begriffe sind in der DIN 5031 festgelegt. Es gibt verschiedene Effekte, Strahlungsenergie in andere Energieformen umzuwandeln und so der Messung zugänglich zu machen, z.B. Erwärmung, Änderung des Widerstandes von Halbleitern oder Entstehung eines *Photostromes* in *Photodioden*. Die auf einen Detektor treffende *Strahlungsleistung*  $Q_e$ , auch *Strahlungsfluß* oder *Lichtstrom* genannt, ist die pro Zeiteinheit  $\Delta t$  auftreffende *Strahlungsenergie*  $\Delta Q_e$

*Strahlungsleistung*

$$\Phi_e = \frac{\Delta Q_e}{\Delta t} \quad \left| \frac{\Phi_e}{W} \right| \left| \frac{\Delta Q_e}{J} \right| \left| \frac{\Delta t}{s} \right| \quad (\text{VII.41})$$

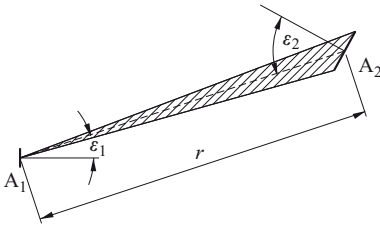


**Bild VII-28** Raumwinkel

Die Strahlungsleistung, die auf einen Empfänger trifft, hängt bei konstantem Sender von der Fläche des Empfängers, von der Richtung der Empfängerfläche und vom Abstand vom Sender ab. Da die Strahlung sich räumlich ausbreitet, ist der *Raumwinkel* ein Maß für den erfassten Bereich. Zur Definition des Raumwinkels kann man sich eine punktförmige Lichtquelle im Zentrum einer Kugel vorstellen. Die gesamte Strahlungsleistung verteilt sich auf die gesamte Kugeloberfläche. Wird eine Teilfläche  $A$  bestrahlt, so ist der zugehörige *Raumwinkel*  $\Omega$  nach der Gleichung

$$\text{Raumwinkel } \Omega = \frac{A}{r^2} \quad \left| \frac{\Omega}{sr} \right| \left| \frac{A}{m^2} \right| \left| \frac{r^2}{m^2} \right| \quad (\text{VII.42})$$

definiert.

Der Raumwinkel ist dimensionslos, aber der Deutlichkeit halber wird er in der Einheit 1 sr, 1 *Steradian*, angegeben.

$$\Omega = \frac{A}{r^2} \cdot \Omega_0 \quad (\text{VII.43})$$

mit  $\Omega_0 = 1 \text{ sr}$ . Da die Kugeloberfläche  $O = 4\pi r^2$  ist, gilt für den gesamten Raumwinkel:

$$\text{gesamter Raumwinkel } \Omega_{\max} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \text{ sr} \quad (\text{VII.44})$$

Streng genommen gilt diese Definition für eine kugelförmige Empfängerfläche. Ist jedoch der Abstand

Sender–Empfänger groß und ist die Empfängerfläche klein, so kann der Empfänger als ebene Fläche aufgefaßt werden. Die in den folgenden Formeln benötigten Winkel sind die zwischen der Flächennormalen und der Strahlrichtung. Der Sender hat die Fläche  $A_1$ , der Empfänger  $A_2$ . Der schraffiert eingetragene Raumwinkel ist

$$\Omega = \frac{A_2 \cdot \cos \varepsilon_2}{r^2} \cdot \Omega_0 \quad (\text{VII.45})$$

Der Faktor  $A_2 \cdot \cos \varepsilon_2$  gibt die wirksame senkrecht zur Strahlrichtung stehende Fläche an. Ein Sender strahlt die *Strahlstärke*  $I_e$  ab. Die Einheit der Strahlstärke  $I_e$  ist  $1 \frac{W}{sr}$ . Für die gesamte vom Empfänger aufgenommene Strahlungsleistung gilt dann:

*Strahlungsleistung*

$$\Phi_e = I_e \cdot \Omega \quad \left| \frac{\Phi_e}{W} \right| \left| \frac{I_e}{W/sr} \right| \left| \frac{\Omega}{sr} \right| \quad (\text{VII.46})$$

Die gesamte vom Sender in einen bestimmten Raumwinkel ausgesendete Strahlstärke und somit der Strahlungsfluß hängt von der wirksamen Fläche von  $A_1$  und von der pro Flächeneinheit ausgesendeten Strahlleistung, der *Strahldichte*  $L_e$ , ab.

*Strahldichte*

$$L_e = \frac{\Phi_e}{A \Omega} \quad \left| \frac{L_e}{W/(m^2 \text{ sr})} \right| \left| \frac{\Phi_e}{W} \right| \left| \frac{A}{m^2} \right| \left| \frac{\Omega}{sr} \right| \quad (\text{VII.47})$$

*Strahlstärke*

$$I_e(\varepsilon_1) = L_e A_1 \cos \varepsilon_1 \quad \left| \frac{I_e}{W/sr} \right| \left| \frac{L_e}{W/(m^2 \text{ sr})} \right| \left| \frac{A}{m^2} \right| \quad (\text{VII.48})$$

Die Strahlstärke als Funktion des Abstrahlungswinkels wird oft in Datenblättern angegeben. In Bild VII-29 sind im Polardiagramm für zwei unterschiedliche Strahlertypen die Strahlcharakteristik dargestellt, Kurve  $b$  ist die einer Leuchtdiode mit starker Vorwärtsstrahlung, Kurve  $a$  gehört zu einem Strahler mit konstanter Strahldichte  $L_e$ , einem sogenannten *Lambert-Strahler*. Für diesen gilt

*Lambertsches Gesetz*

$$I_e(\varepsilon_1) = I_e(\varepsilon_0) \cdot \cos \varepsilon_1 \quad (\text{VII.49})$$

Zu diesem Strahlertyp gehören alle Körper mit rauen, diffus reflektierenden Flächen. Sie erscheinen aus allen Richtungen gleich hell.

Für die auf den Empfänger treffende Strahlungsleistung gilt dann unter Zusammenfassung aller bisherigen Gleichungen:

$$\Phi_e = L_e \frac{A_1 \cos \varepsilon_1 A_2 \cos \varepsilon_2}{r^2} \Omega_0 \quad (\text{VII.50})$$

Unter der spezifischen Ausstrahlung wird die pro Flächeneinheit emittierte Strahlungsleistung definiert:

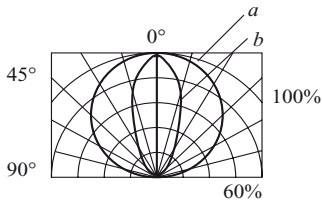


Bild VII-29 Strahlcharakteristik

$$M_e = \frac{\Phi_e}{A_1} = L_e \cos \varepsilon_1 \Omega \quad (\text{VII.51})$$

Auf der Empfängerseite ist die Bestrahlungsstärke  $E_e$ , der auf die Empfängerfläche bezogene Strahlungsfluss, wichtig.

$$E_e = \frac{\Phi_e}{A_2} \quad (\text{VII.52})$$

Ist die Strahlung über einem größeren Wellenlängenbereich vorhanden, so werden spektrale Größen zur Beschreibung nötig sein. Dies wird durch den Index  $\lambda$  gekennzeichnet, so ist z.B. die spektrale Strahlungsdichte durch  $L_{e,\lambda}$  gekennzeichnet und definiert durch

$$L_{e,\lambda} = \frac{\Delta L_e}{\Delta \lambda} = \frac{L_e}{W(\text{m}^2 \text{ sr nm})} \quad (\text{VII.53})$$

$L_{e,\lambda}$  ist also die im Wellenlängenintervall  $\Delta \lambda$  emittierte Strahldichte  $\Delta L_e$ . Besonderes Interesse hat die spektrale Verteilung der Wärmestrahlung von Körpern. Jeder Körper sendet Wärmestrahlung aus, deren spektrale Verteilung (also deren Farbe) von der Temperatur abhängt. Für einen idealisierten Körper, nämlich einen solchen, der alle auftreffende Strahlung vollständig absorbiert, kann die spektrale Strahldichte berechnet werden. Diese Körper werden *schwarze Körper* genannt. Für diese Körper gilt die *Plancksche Strahlungsformel* für die Temperaturabhängigkeit der Strahldichte:

*Plancksche Strahlungsformel*

$$L_{e,\lambda}(\lambda, T) = \frac{c_1}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{c_2/\lambda T} - 1} \cdot \frac{1}{\Omega_0} \quad (\text{VII.54})$$

Die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  hängen mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$  und einer weiteren Naturkonstanten, dem *Planckschen Wirkungsquant*  $h$  und der *Boltzmann-Konstante*  $k$  zusammen:

$$c_1 = 2hc^2 = 1,191 \cdot 10^{-16} \text{ Wm}^2 \quad (\text{VII.55})$$

$$c_2 = \frac{hc}{k} = 1,439 \cdot 10^{-2} \text{ mK} \quad (\text{VII.56})$$

*Plancksches Wirkungsquant*

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \quad (\text{VII.57})$$

*Boltzmann-Konstante*

$$k = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \quad (\text{VII.58})$$

Ein typischer Verlauf ist in Bild VII-30 dargestellt. Es sind hier die prinzipiellen Kurvenverläufe für drei Temperaturen dargestellt, wobei  $T_1 > T_2 > T_3$  ist. Das Maximum der spektralen Strahldichte  $\lambda_{\text{max}}$  verschiebt sich mit höheren Temperaturen zu kleineren Wellenlängen entlang der gestrichelt gezeichneten Hyperbel. Es gilt das

*Wiensche Verschiebungsgesetz:*

$$\lambda_{\text{max}} \cdot T = \text{const} = 2898 \text{ } \mu\text{mK} \quad (\text{VII.59})$$

Betrachtet man nicht die spektrale Strahldichte, sondern die insgesamt von einem schwarzen Strahler ausgesendete Leistung, so gilt das *Stefan-Boltzmann-Gesetz*:

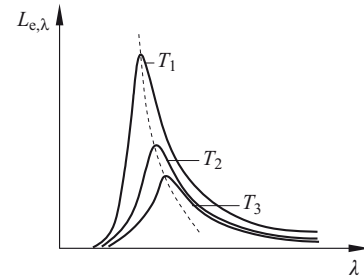


Bild VII-30 Schwarzer Strahler

$$M_e(T) = \sigma \cdot T^4 \quad (\text{VII.60})$$

mit der Konstanten

$$\sigma = 5,670 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}^4} \quad (\text{VII.61})$$

## 4.2 Lichttechnische Größen

Werden Strahlungen nicht mit objektiven Instrumenten, sondern mit dem Auge beurteilt, so muss die spektrale Lichtempfindlichkeit des Auges berücksichtigt werden. Strahlen z.B. eine rote und eine grüne Lichtquelle mit gleicher Strahlungsleistung, so empfindet das Auge die grüne Quelle ca. 16mal heller. Das Auge hat sich im Lauf der Entwicklung dem Sonnenlicht angepaßt, und somit für Grün die größte Empfindlichkeit entwickelt. Die Augenempfindlichkeit ist bei Tageslicht eine andere als bei Nacht, hier ist sie zu kleineren Wellenlängen, also zu Blau hin, verschoben. Die Augenempfindlichkeit für Tageslicht wird mit dem *Hellemptfindlichkeitsgrad*  $V(\lambda)$  und die für Nachtlicht mit  $V'(\lambda)$  bezeichnet. Bei Tageslicht sind die Zäpfchen (*photopische Anpassung*), bei Nachtsehen die Stäbchen (*skotopische Anpassung*) angesprochen. Wird mit dem Lichtstrom  $\Phi_v$  der Helligkeitseindruck bezeichnet, so gilt bei einfarbigen Lichtquellen:



$$\Phi_v = K_m \cdot \Phi_e \cdot V(\lambda) \tag{VII.62}$$

Die Konstante  $K_m$  wird als Maximalwert des *photometrischen Strahlungsäquivalents* bezeichnet. Sie ist in einer noch zu definierenden Einheit:

$$K_m = 683 \frac{\text{lm}}{\text{W}} \quad (1 \text{ lm} = 1 \text{ Lumen}) \tag{VII.63}$$

Diese Größe ist mit der SI-Einheit Candela (s. Abschnitt I) verknüpft. Licht mit der Frequenz  $f = 540 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$  hat eine Wellenlänge von 555 nm. Der Hellempfindlichkeitsgrad  $V(555) = 1$ , somit gilt für die Lichtstärke 1 Candela:

$$I_v = 1 \text{ cd} = K_m \cdot I_e = K_m \cdot \frac{1}{683} \frac{\text{W}}{\text{sr}} \tag{VII.64}$$

und damit der o.a. Wert für  $K_m$ . Als abgeleitete Einheiten sind für den *Lichtstrom* das *Lumen*  $1 \text{ lm} = 1 \text{ cd sr}$  und für die *Beleuchtungsstärke*  $E_v$  das *Lux*  $1 \text{ lx} = 1 \text{ lm/m}^2$  erlaubt.

■ **Beispiel:** Welchen Lichtstrom empfängt eine  $20 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$  große Fläche, auf die das Licht einer  $2,40 \text{ m}$  entfernten punktförmigen Lichtquelle von  $80 \text{ cd}$  senkrecht auftrifft?

**Lösung:**

Raumwinkel  $\Omega = \frac{A}{r^2} = \frac{0,2 \text{ m} \cdot 0,3 \text{ m}}{(2,4 \text{ m})^2} = 0,0104 \text{ sr}$   
 $\Phi_v = I_e \cdot \Omega = 80 \text{ cd} \cdot 0,0104 \text{ sr} = 0,833 \text{ lm}$

■ **Beispiel:** Welche Lichtstärke  $I_v$  muss eine Lichtquelle haben, damit an einem  $r = 1,5 \text{ m}$  entfernten Arbeitsplatz die Beleuchtungsstärke  $E_v = 500 \text{ lx}$  beträgt?

**Lösung:**  $I_v = \frac{E_v \cdot r^2}{\Omega_0} = \frac{500 \text{ lx} \cdot (1,5 \text{ m})^2}{1 \text{ sr}} = 1125 \text{ cd}$

schaften des Lichtes verstanden waren. Nach der Wellentheorie ist es zwar ebenfalls möglich, dass eine Lichtwelle aus einem Metall Elektronen ausschlagen kann, nur muss dann die Bewegungsenergie der Elektronen im Vakuum von der Intensität des eingestrahlten Lichtes abhängen. Gemessen wurde aber, daß die Energie der Elektronen von der Frequenz des Lichtes abhängt. Die Aussage der *Quantenphysik* ist, daß jedem Materie-Teilchen eine Welle und jeder Welle ein Materie-Teilchen zugeordnet werden kann. Diese *Lichtquanten* heißen *Photonen*. Die Photonen haben die Eigenschaft, dass sie sich im Vakuum mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, eine Bewegungsenergie und eine Bewegungsgröße oder auch Impuls haben. Der Zusammenhang zwischen beiden Betrachtungsweisen erfolgt über die Grundgleichungen

Energie  $W = h \cdot f \tag{VII.65}$

$W = \frac{hc}{\lambda} \tag{VII.66}$

Impuls  $p = \frac{h}{\lambda} \tag{VII.67}$

$h$  ist das *Plancksche Wirkungsquant*,  $W$  und  $p$  sind Energie und Impuls, die Teilchengrößen  $f$  und  $\lambda$  sind Frequenz und Wellenlänge des Lichtes, also die Wellengrößen. Trifft nun eine Lichtwelle der Frequenz  $f$  auf eine geladene Metallplatte, so kann das entsprechende Photon die Energie  $W$  an die Elektronen des Metalls abgeben. Ist die Energie groß genug, um ein Metallelektron aus der Metalloberfläche herauszuschlagen, so wird das Metall entladen. Dazu

Tabelle VII-5 Photometrische Größen

| Strahlungsphysikalische Größen |          |                       | Lichttechnische Größen  |          |                        |
|--------------------------------|----------|-----------------------|-------------------------|----------|------------------------|
| Größe                          | Zeichen  | Einheit               | Größe                   | Zeichen  | Einheit                |
| Strahlungsenergie              | $Q_e$    | Ws                    | Lichtmenge              | $Q_v$    | lm s                   |
| Strahlungsleistung             | $\Phi_e$ | W                     | Lichtstrom              | $\Phi_v$ | lm                     |
| spez. Ausstrahlung             | $M_e$    | W/m <sup>2</sup>      | spez. Lichtausstrahlung | $M_v$    | lm/m <sup>2</sup>      |
| Strahlstärke                   | $I_e$    | W/sr                  | Lichtstärke             | $I_v$    | cd = lm/sr             |
| Strahldichte                   | $L_e$    | W/(m <sup>2</sup> sr) | Leuchtdichte            | $L_v$    | cd/m <sup>2</sup>      |
| Bestrahlungsstärke             | $E_e$    | W/m <sup>2</sup>      | Beleuchtungsstärke      | $E_v$    | lx = lm/m <sup>2</sup> |
| Bestrahlung                    | $H_e$    | Ws/m <sup>2</sup>     | Belichtung              | $H_v$    | lx s                   |

5 Licht als Korpuskel

Trifft Licht auf eine negativ geladene Metallplatte, so können unter geeigneten Bedingungen Elektronen ausgelöst werden. Dieser Effekt ist der *Photoeffekt* oder auch *lichtelektrische Effekt*. Entdeckt wurde dieser Effekt bereits 1887, richtig erklärt konnte er aber erst werden, nachdem die Korpuskel-Eigen-

ist es notwendig, daß das Photon eine Mindestenergie hat, nämlich die Energie, die benötigt wird, um ein Elektron aus dem betreffenden Material austreten zu lassen. Diese Energie heißt *Austrittsenergie* oder *Austrittsarbeit*. Die Bewegungsenergie des Elektrons im Vakuum ist dann gleich der Energie des eingestrahlten Lichtes, vermindert um die Austrittsarbeit.

$W_{\text{kin}} = h \cdot f - W_A$  (VII.68)

Der Photoeffekt ist erst dann bemerkbar, wenn das Licht eine Grenzenergie oder Grenzfrequenz  $f_{\text{Gr}}$  bzw. Grenzwellenlänge  $\lambda_{\text{Gr}}$  hat. Die hier gebräuchliche Einheit der Energie ist das *Elektronenvolt*.

Aus der Definition der Energie in der Elektrotechnik  
*elektrische Energie*  $W_{el} = Q \cdot U$  (VII.69)

ist die Energie einer Ladung abhängig von der Spannung, mit der sie beschleunigt wurde. Die Ladung eines Elektrons ist die *Elementarladung*:

$e_0 = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As}$  (VII.70)

Wird dieses Elektron mit der Spannung 1 V beschleunigt, so hat es die Energie:

$W_{\text{kin}} = e_0 \cdot U$  (VII.71)

$W_{\text{kin}} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Js}$  (VII.72)

$1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Js}$  (VII.73)

Die Austrittsarbeit hängt vom Material und von der kristallographischen Orientierung der Oberfläche ab. Typische angenäherte Werte sind in Tabelle VII-6 angegeben.

Die Grenzwellenlänge errechnet sich nach (VII.66) zu

*Grenzwellenlänge*

$\lambda_{\text{Gr}} = \frac{hc}{W_A}$  (VII.74)

$\lambda_{\text{Gr}} = \frac{6,627 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}} \cdot \frac{1}{W_A}$  (VII.75)

$\lambda_{\text{Gr}} = 1241 \cdot \frac{1}{W_A} \quad (\lambda_{\text{Gr}} \text{ in nm}, W_A \text{ in eV})$  (VII.76)

**Tabelle VII-6** Austrittsarbeit

| Metall   | $W_A$ in eV | $\lambda_{\text{Gr}}$ in nm |
|----------|-------------|-----------------------------|
| W        | 5,0         | 248                         |
| Ni       | 4,6         | 270                         |
| Ag       | 4,5         | 275                         |
| Au       | 5,4         | 229                         |
| Cu       | 4,6         | 270                         |
| Cs       | 2,0         | 620                         |
| Cs auf W | 1,35        | 920                         |

Dabei ist die Austrittsarbeit in eV anzugeben, die Wellenlänge wird in nm berechnet. Da die Ladungsträger ins Vakuum austreten, nennt man diesen Effekt auch den *äußeren Photoeffekt*. Daneben gibt es noch den *inneren Photoeffekt*. Hierbei wird ebenfalls die Energie der einfallenden Photonen an Elektronen abgegeben, nur treten diese z.B. bei Phototransistoren, Photodioden oder Photowiderständen nicht ins Vakuum, sondern werden im Festkörper auf andere Energiezustände gehoben und verändern somit die Leitfähigkeit des Bauteils.

**Literaturhinweise**

[1] *Hering, E.; Martin, R.; Stohrer, M.*: Physik für Ingenieure: Springer, 2007  
[2] *Meschede, D. (Hrsg.)*: Gerthsen Physik: Springer, 2006  
[3] *Böge, A.; Eichler, J.*: Physik: Vieweg, 2005  
[4] *Lindner, H.*: Physik für Ingenieure: Fachbuchverlag Leipzig im Carl-Hanser-Verlag, 2006  
[5] *Dobrinski, P.; Krakau, G.; Vogel, A.*: Physik für Ingenieure: Teubner, 2007



VIII Anhang

A Physikalische Größen und Einheiten

Tabelle VIII-1 Abgeleitete Größen

| Bezeichnung              | Symbol    | Einheit                                                                        |
|--------------------------|-----------|--------------------------------------------------------------------------------|
| Arbeit, Energie          | $W$       | $1\text{ J} = 1\text{ Nm} = 1\text{ Ws} = 1\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$   |
| Beleuchtungsstärke       | $E$       | $1\text{ Lux} = 1\text{ lx}$                                                   |
| Beschleunigung           | $a$       | $1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$                                                 |
| Bewegungsgröße<br>Impuls | $p$       | $1\frac{\text{kg m}}{\text{s}}$                                                |
| Massendichte             | $\varrho$ | $1\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$                                                |
| Drehimpuls               | $L$       | $1\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$                                              |
| Drehmoment               | $M$       | $1\text{ Nm} = 1\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$                              |
| Druck                    | $p$       | $1\text{ Pa} = 1\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1\frac{\text{kg}}{\text{m s}^2}$ |
| Elastizitätsmodul        | $E$       | $1\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1\frac{\text{kg}}{\text{m s}^2}$               |
| Frequenz                 | $f$       | $\frac{1}{\text{s}} = 1\text{ Hz}$                                             |
| Geschwindigkeit          | $v$       | $1\frac{\text{m}}{\text{s}}$                                                   |
| Kraft                    | $F$       | $1\text{ N} = 1\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$                                 |
| Leistung                 | $P$       | $1\text{ W} = 1\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3}$                               |
| Lichtstrom               | $\Phi$    | $1\text{ Lumen} = 1\text{ lm} = 1\text{ cd sr}$                                |
| Raumwinkel               | $\Omega$  | $1\text{ Steradian} = 1\text{ sr}$                                             |
| spez. Wärmekapazität     | $c$       | $1\frac{\text{J}}{\text{kg K}} = 1\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2 \text{ K}}$     |
| Trägheitsmoment          | $J$       | $1\text{ kg m}^2$                                                              |
| Winkelgeschwindigkeit    | $\omega$  | $\frac{1}{\text{s}}$                                                           |

B Zahlenwerte physikalischer Größen

Tabelle VIII-2 Naturkonstanten

|                                |              |                                                       |
|--------------------------------|--------------|-------------------------------------------------------|
| Avogadro-Konstante             | $N_A$        | $6,022\,1367 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$          |
| Boltzmann-Konstante            | $k$          | $1,380\,658 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$               |
| elektrische Feldkonstante      | $\epsilon_0$ | $8,854\,1878 \cdot 10^{-12} \text{ As/(Vm)}$          |
| Elementarladung                | $e$          | $1,602\,18 \cdot 10^{-19} \text{ As}$                 |
| Gravitationskonstante          | $\gamma$     | $6,672\,59 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$   |
| Lichtgeschwindigkeit im Vakuum | $c$          | $2,997\,924\,58 \cdot 10^8 \text{ m/s}$               |
| magnetische Feldkonstante      | $\mu_0$      | $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ (Vs)/(Am)}$                |
| Plancksches Wirkungsquantum    | $h$          | $6,626\,07 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$                 |
| Ruhemasse des Elektrons        | $m_{0e}$     | $9,109\,3897 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$               |
| Ruhemasse des Protons          | $m_{0p}$     | $1,672\,6231 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$               |
| Stefan-Boltzmann-Konstante     | $\sigma$     | $5,670\,51 \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2 \text{ K}^4)$ |
| universelle Gaskonstante       | $R$          | $8,314\,41 \text{ J/(mol K)}$                         |

Nach dem von *K. von Klitzing* 1980 entdeckten quantisierten Halleffekt (Nobelpreis 1985) lässt sich auch für den elektrischen Widerstand  $R$  aus Naturkonstanten eine exakte Basisgröße bestimmen.

$$R = \frac{h}{ie^2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

(VIII.1)

$$R = 25\,812,8 \, \Omega$$

(VIII.2)

Tabelle VIII-3 Zahlenwerte

|                           |                                                               |
|---------------------------|---------------------------------------------------------------|
| Molvolumen idealer Gase   | $22,413\,83 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$      |
| Radius der Erde, Äquators | $r_E = 6378 \text{ km}$                                       |
| Radius der Erde, Pole     | $r_P = 6356 \text{ km}$                                       |
| Masse der Erde            | $m_E = 5,977 \cdot 10^{24} \text{ kg}$                        |
| Masse des Mondes          | $m_M = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$                         |
| Entfernung Erde–Mond      | $384,4 \cdot 10^3 \text{ km}$                                 |
| Entfernung Erde–Sonne     | $149,6 \cdot 10^6 \text{ km}$                                 |
| Erdbeschleunigung         | $g = 9,806\,65 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$                   |
| Tripelpunkt des Wassers   | $T_{\text{Tr}} = 273,16 \text{ K}$                            |
| Dichte der Luft           | $\varrho_{\text{Luft}} = 1,2928 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ |
| Absolute Temperatur       | $-273,15 \text{ }^\circ\text{C}$                              |
| Normaldruck               | $p_0 = 1,013\,25 \cdot 10^5 \text{ Pa}$                       |

# Werkstoffkunde

## I Stoffe

### 1 Eigenschaften der Stoffe

Der Begriff des Stoffes entstammt der Chemie, ist aber für den technischen Gebrauch als *Werkstoff* auf die praktisch nutzbaren Stoffe begrenzt. Die Anforderungen an die Eigenschaften eines Werkstoffes und ihre praktische Erfüllung bestimmen dann seine Nutzbar-

keit. In der Elektrotechnik erscheint die Antwort hierzu recht einfach: Da „nur“ elektrische und magnetische Felder auftreten können, müssten elektrische und magnetische Eigenschaften ausreichen. Elektrische und besonders auch magnetische Vorgänge führen aber dazu, dass ein zusätzliches Anforderungsprofil entsteht wie es in der Mechanik üblich ist (Tabelle I-1).

**Tabelle I-1** Beanspruchung von Werkstoffen (prinzipielle Übersicht)

| Bereich  | Beanspruchungen                             |                                                                                                                                                                                      |
|----------|---------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Mechanik | Kräfte<br>Korrosion<br>Temperatur           | z.B. Zug, Druck, Torsion<br>z.B. Feuchtigkeit, (elektro-)chemische Prozesse<br>z.B. Hoch- und Tieftemperatur-Prozesse                                                                |
| Elektrik | Felder<br>Kräfte<br>Korrosion<br>Temperatur | z.B. Stromfluss, Magnetisierung, dielektrische Verschiebung<br>z.B. Zug, Druck, Torsion<br>z.B. Feuchtigkeit, (elektro-)chemische Prozesse<br>z.B. Hoch- und Tieftemperatur-Prozesse |

Dem Anforderungskatalog stehen die Eigenschaften der, vorzugsweise festen, Werkstoffe gegenüber (Tabelle I-2). Für die Praxis müssen diese Eigenschaften durch messbare Größen charakterisiert werden, um die richtige Auswahl treffen zu können. Wegen ihrer Grundeigenschaften *elektrische Leitfähigkeit* und hohe *Festigkeit* bei guter *Verformbarkeit* nehmen die Metalle eine Sonderstellung unter den

Werkstoffen ein. Darüber hinaus sind von den z.Z. bekannten 111 Elementen die meisten Metalle. Nur 15 Elemente zählen zu den *Nichtmetallen*, und ungefähr 8 Elemente fallen unter die heute besonders interessanten *Halbmetalle* oder *Übergangselemente*. Andererseits soll nicht verkannt werden, dass die Chemie eine Vielzahl von „maßgeschneiderten“ Sonderwerkstoffen geschaffen hat.

**Tabelle I-2** Eigenschaftsanforderungen an Materialien bei verschiedenen Einsatzgebieten (Auswahl)

| Gebiet                                                  | Eigenschaften                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|---------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Physik<br>Chemie<br>Mechanik<br>Elektrik<br>Technologie | Dichte, Schmelzpunkt, Siedepunkt, Wärmedehnzahl, Wärmeleitfähigkeit usw.<br>Atomgewicht, Wertigkeit, Affinität, Korrosionsbeständigkeit usw.<br>Härte-, Zug-, Druck-, Biege-, Torsions-, Dauerfestigkeit usw.<br>Elektrische und magnetische Leitfähigkeit, Permittivität, Permeabilität, Remanenz usw.<br>Biege-, Härte-, Schweiß-, Löt-, Gieß-, Platifizier-, Tiefziehbarkeit usw. |

### 2 Atombau und Periodensystem

Stoffe, die sich auf chemischem Wege nicht weiter in andere Stoffe zerlegen lassen, nennt man *Elemente*. Die kleinsten, noch mit den charakteristischen Eigenschaften eines Elementes ausgestatteten Teilchen heißen *Atome*. Sie bestehen aus dem Atomkern mit Protonen und (Ausnahme Wasserstoff) Neutronen und der Atomhülle mit Elektronen, daher auch Elektronenhülle. Die Massen der Atome liegen im Bereich von  $10^{-22} \dots 10^{-24}$  g die Durchmesser bei  $10^{-9} \dots 10^{-10}$  m (Lichtwellenlänge ungefähr  $500 \cdot 10^{-9}$  m). Protonen und Neutronen haben fast die gleiche Masse von

$1,67 \cdot 10^{-24}$  g. Das Neutron hat keine elektrische Ladung. Das Proton hat mit  $1,6 \cdot 10^{-19}$  As (Ampere-sekunden) die gleiche Ladung wie das negative Elektron, jedoch mit positivem Vorzeichen. Die Ruhemasse des Elektrons ist mit  $9,1 \cdot 10^{-28}$  g verschwindend gegenüber der Protonen- oder Neutronenmasse.

Die Anordnung dieser Materieteilchen wird im *Bohr-schen Atommodell* als kugelförmiger Kern mit Protonen, Neutronen und Kugelschalen für die Elektronen beschrieben. Nach dem genaueren *Orbitalmodell* bewegen sich die Elektronen auf komplizierten Bahnen, wie sie durch räumliche Schwingungen vorge-

geben werden (dreidimensionaler Oszillator). Daraus resultieren Aufenthaltsräume mit hoher Besetzungswahrscheinlichkeit und bestimmter Orientierung (Bild I-1a ... d). Die *Orbitale* entstehen bei der räumlichen Schwingung durch Knotenflächen in Form konzentrischer Kugeln (Bild I-1a und b) und räumlicher Knotenflächen, die durch (gedachte) Schnittflächen (Bild I-1c) die Schwingungsbereiche in räumliche Bezirke, Orbitale (engl.: orbit = Planetenbahn) aufteilen. In jedem Orbital können dann wieder 2 Elektronen schwingen, die sich nach *Pauli* durch ihre Eigenrotation (*Spin*) voneinander unterscheiden.

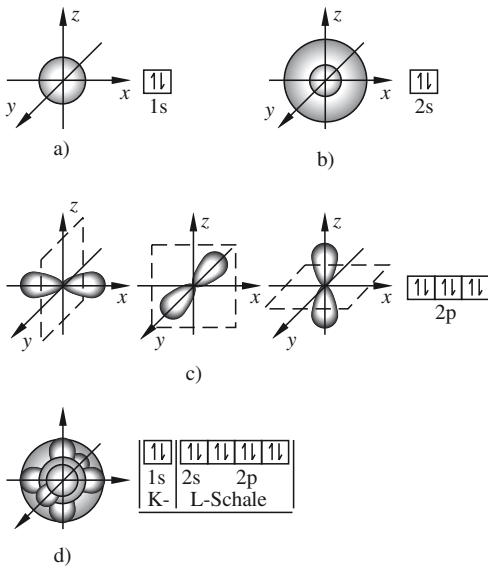


**Bild I-1** Orbitalmodell

- 1s-Zelle (K-Schale). Besetzung mit 2 Elektronen möglich
- 2s-Zelle (L-Schale, teilw.). Die Kugel ist innen von einer Knotenfläche begrenzt (Hohlkugel), 2 Elektronen möglich
- 2p-Zelle (L-Schale, forts.) mit den möglichen 3×2 Elektronen und jeweils einer (gedachten) Trennwand in den 3 Ebenen
- Neon als Beispiel 1s, 2s und 2p, d.h. K- und L-Schale sind voll besetzt

Das dynamische Verhalten des gesamten Systems rechtfertigt dann wieder die einfachere Betrachtung als kugelförmige Atomhüllen (Bild I-1d) mit der klassischen Bezeichnung der 7 möglichen „Schalen“ von K bis Q oder mit den sogenannten *Hauptquantenzahlen* 1 bis 7. Ihnen werden auch die *Hauptenergieniveaus* zugeordnet. Die weitere Unterteilung in *Unteregieniveaus* oder „Zellengruppen“ erfolgt durch die *Nebenquantenzahlen*, die mit den Buchstaben s, p, d und f bezeichnet werden.

Den *Spin*, d.h. den Eigendrehimpuls der Elektronen, kann man sich mechanisch als entgegengesetzte Rotation, magnetisch als entgegengesetzte magnetische Momente vorstellen. Für die bildhafte Darstellung, wie z.B. in Bild I-1, benutzt man dazu gegeneinander gerichtete *Halbpfeile* (↑↓). Ordnet man die Elemente, repräsentiert durch die in der Chemie üblichen Kurzzeichen, nach der Zahl der Protonen im Kern und damit auch nach der Zahl der Elektronen in der *Außenhülle an*, so gelangt man zum *Periodensystem der Elemente* (PSE Bild I-2). Die Anordnung ist so getroffen, dass nicht nur die Ordnungszahl (unterhalb der Symbole) von oben nach unten zunimmt, sondern auch die Energie. Ungefähr gleiche Energiestufen sind auf gleiche Höhe gesetzt. Durch Energiezufuhr können Elektronen auf höhere *Ergieniveaus* gebracht werden, die sie dann unter Energieabgabe, z.B. Lichtemission, wieder verlassen. Werden ein oder mehrere Elektronen durch Energiezufuhr vollständig vom Atom entfernt, entstehen *ionisierte Atome* oder *Atomionen*. Die *Ionisierungsenergie* (gemessen in Elektronenvolt = eV mit  $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Js}$ ), nimmt durch die Abschirmwirkung der Schalen mit der Annäherung an den Atomkern zu.

Durch den Austausch von Hüllenelektronen sind die Atome – von den Edelgasen abgesehen – zu chemischen Reaktionen fähig. Die hieran beteiligten Elektronen heißen *Valenzelektronen*. Aus einer Hülle können bis zu 8 Elektronen abgegeben werden, das verbleibende positive Atomion heißt *Kation*. Es können aber auch bis zu 4 Valenzelektronen aufgenommen werden; das so entstandene Atomion heißt *Anion*.

Die Ladung der Atomionen wird rechts oben am Elementsymbol gekennzeichnet, z.B.  $\text{H}^+$ ,  $\text{Al}^{3+}$ ,  $\text{Cl}^-$ ,  $\text{S}^{2-}$  oder  $\text{S}^-$ . Die Metalle bilden nur positive Atomionen, die Nichtmetalle vorzugsweise negative Atomionen.

Unten rechts am Elementsymbol erscheint die Anzahl der Atome (oder Ionen), z.B.  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{H}_2\text{SO}_4$ . In der Isotopentechnik erscheinen auf der linken Seite der Elementsymbole noch unten die Ordnungszahl (= Protonenzahl) und oben die Massenzahl (= Nukleonenzahl). So hat z.B. das Kohlenstoff(bezugs)isotop für die Massenbestimmung mit der Ordnungszahl 6 und der Massenzahl 12 die Schreibweise  $^{12}_6\text{C}$ .

Das Periodensystem (Bild I-2) wird in *Perioden* 1 ... 7 entsprechend den 7 Schalen K ... Q senkrecht und 8 *Hauptgruppen*, welche der Auffüllung der jeweils äußersten Elektronenschale entsprechen, waagerecht aufgeteilt (xa in der untersten Zeile von Bild I-2) In den *Nebengruppen* werden jeweils die zweit- und drittäußerste Schale aufgefüllt (xb in der untersten Zeile von Bild I-2). Die Metalle, als Mehrzahl der Elemente, sind links und unten im PSE und die Nichtmetalle rechts oben zu finden. Die Halbmetalle wie etwa B, Si, As, Te usw., auch Übergangselemente genannt, bilden die „Grenze“ (Bild I-3).

| Periode-Nr. | Schalen-Bez. | Schalen-Nr.n | s-Zelle  |          |              |        |          |                   |          |          |          |                |  |  |  |    |  |  |  |       |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|-------------|--------------|--------------|----------|----------|--------------|--------|----------|-------------------|----------|----------|----------|----------------|--|--|--|----|--|--|--|-------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| I           | K            | 1            | H<br>1   | He<br>2  |              |        |          |                   |          |          |          |                |  |  |  |    |  |  |  |       |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| II          | L            | 2            | Li<br>3  | Be<br>4  | p-Zellen (3) |        |          |                   |          |          |          |                |  |  |  |    |  |  |  |       |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|             |              |              |          |          | B<br>5       | C<br>6 | N<br>7   | O<br>8            | F<br>9   | Ne<br>10 |          |                |  |  |  |    |  |  |  |       |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| II          | M            | 3            | Na<br>11 | Mg<br>12 |              |        |          |                   |          |          |          |                |  |  |  |    |  |  |  |       |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|             |              |              |          |          |              |        | Al<br>13 | Si<br>14          | P<br>15  | S<br>16  | Cl<br>17 | Ar<br>18       |  |  |  |    |  |  |  |       |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| IV          | N            | 4            | K<br>19  | Ca<br>20 |              |        |          |                   |          |          |          |                |  |  |  |    |  |  |  |       |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|             |              |              |          |          |              |        | Ga<br>31 | Ge<br>32          | As<br>33 | Se<br>34 | Br<br>35 | Kr<br>36       |  |  |  |    |  |  |  |       |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| V           | O            | 5            | Rb<br>37 | Sr<br>38 |              |        |          |                   |          |          |          |                |  |  |  |    |  |  |  |       |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|             |              |              |          |          |              |        | In<br>49 | Sn<br>50          | Sb<br>51 | Te<br>52 | J<br>53  | Xe<br>54       |  |  |  |    |  |  |  |       |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| VI          | P            | 6            | Cs<br>55 | Ba<br>56 |              |        |          |                   |          |          |          |                |  |  |  |    |  |  |  |       |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|             |              |              |          |          |              |        |          |                   |          |          |          |                |  |  |  |    |  |  |  |       |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| VII         | Q            | 7            | Fr<br>87 | Ra<br>88 |              |        |          |                   |          |          |          |                |  |  |  |    |  |  |  |       |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|             |              |              |          |          |              |        |          |                   |          |          |          |                |  |  |  |    |  |  |  |       |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|             |              |              |          | 1a 2a    |              |        |          | 3a 4a 5a 6a 7a 8a |          |          |          | 3b 4b 5b 6b 7b |  |  |  | 8b |  |  |  | 1b 2b |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|             |              |              |          |          |              |        |          |                   |          |          |          |                |  |  |  |    |  |  |  |       |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Bild I-2** Periodensystem der Elemente (PSE) mit Perioden Nr. I ... VII, Schalenbezeichnungen K ... Q, Schalen Nr. n = 1 ...7, Hauptgruppen Nr. 1a ... 8a und Nebengruppen Nr. 1b ... 8b sowie den Lanthaniden und Actiniden

|              |     |                        |                         |                         |                         |                        |                        |                         |                  |
|--------------|-----|------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|------------------------|------------------------|-------------------------|------------------|
| PERIODEN     | I   |                        |                         |                         |                         |                        |                        | 1 H<br>Wasser-<br>stoff | 2 He<br>Helium   |
|              | II  | 3 Li<br>Lithium        | 4 Be<br>Beryl-<br>lium  | 5 B<br>Bor              | 6 C<br>Kohlen-<br>stoff | 7 N<br>Stick-<br>stoff | 8 O<br>Sauer-<br>stoff | 9 F<br>Fluor            | 10 Ne<br>Neon    |
|              | III | 11 Na<br>Natrium       | 12 Mg<br>Magne-<br>sium | 13 Al<br>Alumini-<br>um | 14 Si<br>Silizium       | 15 P<br>Phosphor       | 16 S<br>Schwefel       | 17 Cl<br>Chlor          | 18 Ar<br>Argon   |
|              | IV  | 19 K<br>Kalium         | 20 Ca<br>Calcium        | 31 Ga<br>Gallium        | 32 Ge<br>Germa-<br>nium | 33 As<br>Arsen         | 34 Se<br>Selen         | 35 Br<br>Brom           | 36 Kr<br>Krypton |
|              | V   | 37 Rb<br>Rubi-<br>dium | 38 Sr<br>Stronti-<br>um | 49 In<br>Indium         | 50 Sn<br>Zinn           | 51 Sb<br>Antimon       | 52 Te<br>Tellur        | 53 I<br>Iod             | 54 X<br>Xenon    |
|              | VI  | 55 Cs<br>Caesium       | 58 Ba<br>Barium         | 81 Tl<br>Thallium       | 82 Pb<br>Blei           | 83 Bi<br>Wismut        | 84 Po<br>Polo-<br>nium | 85 At<br>Astatin        | 86 Rn<br>Radon   |
|              |     | 1a                     | 2a                      | 3a                      | 4a                      | 5a                     | 6a                     | 7a                      | 8a               |
| HAUPTGRUPPEN |     |                        |                         |                         |                         |                        |                        |                         |                  |

**Bild I-3** Kurzform des Periodensystems der Elemente (nur Hauptgruppen)

- 

Metalle
- 

Übergangselemente
- 

Nichtmetalle
- 

Edelgase

In der Richtung von unten links nach oben rechts, d.h. Metalle – Nichtmetalle steigt auch die *Elektronegativität*. Es ist dies die (relative) Fähigkeit der Atome, bei der Bindung Elektronen aufzunehmen.

### 3 Aufbau der festen Körper

Die in der Praxis besonders wichtigen festen Stoffe basieren auf den Bindungskräften der Atomhüllen. Die *Ionenbindung*, auch *heteropolare Bindung* genannt (Bild I-4a), kommt durch Ladungsaustausch (Elektronen) zustande. Die Atomionen aus chemischen Reaktionen führen zu starken Anziehungskräften und stabilen Konfigurationen. Typische Vertreter sind demnach die anorganischen Verbindungen. Bei der *Atombindung*, auch *homöopolare oder kovalente Bindung* (Bild I-4b) genannt, haben benachbarte Atome gemeinsame Elektronen(paare). Diese Bindungsart ist typisch für nichtmetallische Elemente und organische Verbindungen. Liegt eine *metallische Bindung* vor (Bild I-4c), haben die Atome ein Elektron abgegeben und stellen positive (Atom-)Ionen dar. Die abgegebenen Elektronen sind als bewegliche *Leitungselektronen (Elektronengas)* allen Atomrümpfen gemeinsam zugeordnet. Diese Bindungsart ist die Grundlage der elektrischen Leitfähigkeit und typisch für alle Metalle. Die *Van der Waals- oder zwischenmolekulare Bindung* wird durch die Dipolbildung benachbarter Teilchen (Atome oder Moleküle) bewirkt. Es ergeben sich daraus schwache anziehende Kräfte (Bild I-4d). Im allgemeinen überwiegt zwar die eine oder andere Bindungsart, in der Praxis liegt jedoch immer eine Kombination vor. Im Regelfall

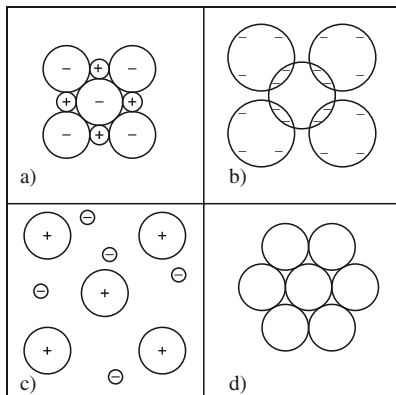


**Bild I-4** Bindungsarten

- Ionenbindung oder heteropolare Bindung, z.B.  $\text{Na}^+\text{Cl}^-$
- Atombindung, homöopolare oder kovalente Bindung, z.B. Ge
- metallische Bindung, z.B. Cu
- Van der Waals- oder Molekülbindung, z.B. Ar (kristallisiert)

führen die Bindungskräfte zu regelmäßigen, räumlich periodischen Strukturen der kleinsten Teile (Atome, Ionen oder Moleküle), den *Kristallen*. Stoffe, die nicht regelmäßig, also nicht kristallin, aufgebaut sind, bezeichnet man als *amorph*, das heißt gestaltlos.

Ein Kristall kann sehr klein, z.B. nur mikroskopisch sichtbar, sein, dann spricht man von *Kristallit* oder *Korn*. Die Zusammenlagerung vieler Kristallite liefert dann erst ein größeres Gebilde, den *Polykristall*. Kann ein Kristallit in den makroskopischen Bereich wachsen, entsteht ein *Einkristall*. Die kleinste Einheit, die bereits die Kristallstruktur aufweist und im Kristall periodisch wiederkehrt, ist die *Elementarzelle*. Die räumlich regelmäßige Anordnung einer großen Anzahl von Elementarzellen führt zum *Raum- oder Kristallgitter*.

Mit der Kugelform der Atome wird der Aufbau der Kristallgitter aus Elementarzellen eine Frage der Anordnung von Kugeln im Raum. Die einfachste Form ist die *kubisch-primitive (kp)* Elementarzelle, ein Würfel, dessen Ecken mit sich berührenden „Kugeln“ besetzt ist (Bild I-5). Der Abstand längs einer Würfelkante ist die *Gitterkonstante a*. Die vereinfachte Darstellung zeigt Bild I-6a. Ein zusätzliches Atom in der Raummitte (Bild I-6b) führt zum *kubisch-raumzentrierten Gitter (krz)*. Wird auf jeder Flächenmitte ein Atom eingefügt, entsteht das *kubisch-flächenzentrierte Gitter (kfz)* (Bild I-6c). Die beiden letztgenannten sind die häufigsten metallografischen Gittertypen. Als hexagonale Struktur ist noch die Elementarzelle mit der *hexagonal dichtesten Packung (hdp)* (Bild I-6d) bedeutsam. Die Halbleiterwerkstoffe Germanium und Silizium kristallisieren in Form eines *Diamantgitters (dia)* (Bild I-7). Die Elementarzelle des Diamantgitters ist kubischflächenzentriert mit einer tetraedrischen Unterstruktur.

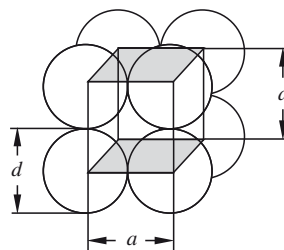


**Bild I-5** Kubisch primitive Elementarzelle (kp) als Anordnung von Kugeln im Raum,  $a$  = Gitterkonstante,  $d$  = Atom(kugel)durchmesser

Die idealisiert dargestellten Gitter sind in Wirklichkeit durch *Gitterfehler* und *Fremdatome* verzerrt. Die in reinen Stoffen möglichen Gitterfehler sind in der Tabelle I-3 zusammengestellt. Die von einzelnen Atomen herrührenden *nulldimensionalen Fehler* werden auch *Punktdefekte* genannt. Die möglichen Fehler zeigt Bild I-8. Eine Leerstelle oder ein Zwischen-

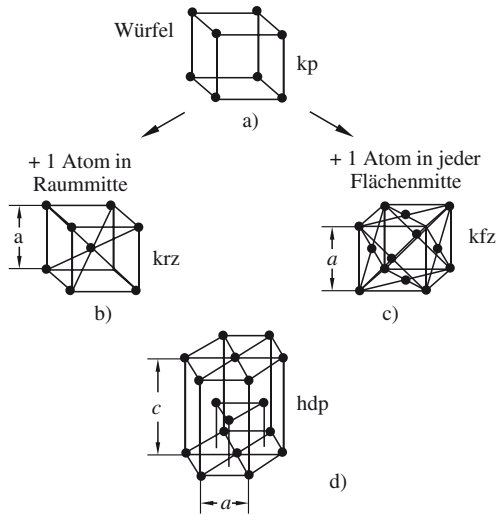


**Bild I-6** Elementarzellen

- a) kp = kubisch-primitiv  
 b) krz = kubisch-raumzentriert  
 c) kfz = kubisch-flächenzentriert  
 d) hdp = hexagonal dichteste Packung  
 a, b, c = Gitterkonstanten

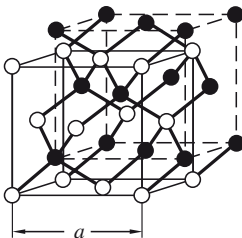


**Bild I-7** Diamantgitter

Entstehung des Diamantgitters aus zwei ineinander gestellten kfz-Gittern. Der Versatz der kfz-Gitter beträgt  $1/4$  Raumdiagonale

gitteratom haben jeweils einen Fehler zur Folge. Aus der Kombination von beiden, dem *Frenkel-Defekt*, folgen zwei Fehler.

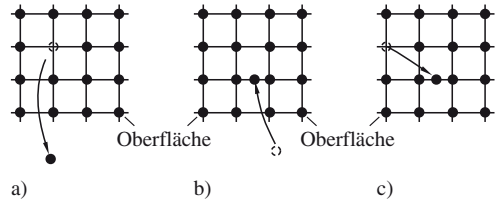


**Bild I-8** Nulldimensionale Fehlstellen

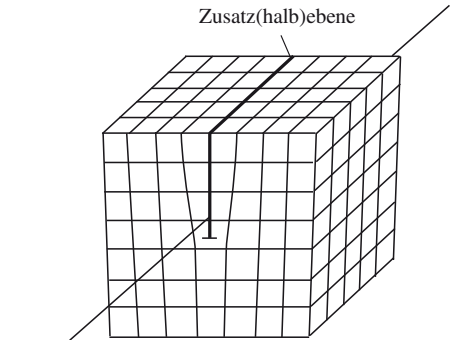
- a) Leerstelle  
 b) Zwischengitteratom (Atom falsch eingebaut)  
 c) Frenkel-Defekt, Atom wandert im Gitter und erzeugt zwei Fehler

Bei *eindimensionalen Fehlern*, auch *Versetzungen* genannt, haben die Fehler eine linienförmige Ausdehnung. Bild I-9a zeigt eine *Stufenversetzung*, die das Ende einer zusätzlichen (Halb-)Ebene darstellt. In Bild I-9b sind Teilbereiche gegeneinander gegliedert und haben eine *Schraubenversetzung* bewirkt. Als Maßzahl wird die Anzahl der „Durchstoßpunkte pro Flächeneinheit“ in  $1/\text{cm}^2$  angegeben. Bei normalen Fertigungswerkstoffen liegen die Zahlenwerte für Versetzungen im Bereich von  $10^6 \dots 10^{12} \text{ cm}^{-2}$ , wohingegen Halbleiter-Einkristalle Werte von weniger als  $10 \text{ cm}^{-2}$  aufweisen.

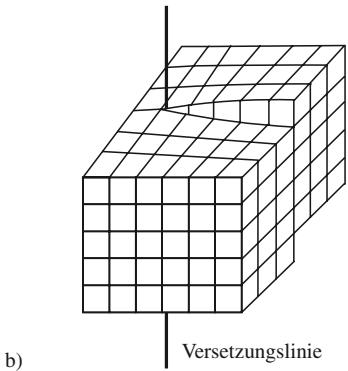
Treffen Kristallgitter verschiedener Orientierung aufeinander, so können sie (Bild I-10) gegeneinander gekippt, gedreht oder beides zusammen sein. Als Folge davon müssen sich Übergänge bilden, die zu sog. *Korngrenzen* führen. Die Kristalle bilden dabei regellose *Korngrenzflächen* gegeneinander aus. Mechanische Beanspruchungen können dazu führen, dass eine gewisse Ordnung in die Orientierung hineinkommt. Es ergeben sich *Kornorientierungen*, *Vorzugsrichtungen* oder *Textures*. So liegen z.B. die Kanten der Elementarzellen nach dem Walzen von Blechen weitgehend in der Walzrichtung.

**Tabelle I-3** Gitterfehler

| Ausdehnung (atomar)         | Nulldimensional                                                                                                   | Eindimensional                                                                                         | Zweidimensional                                                                |
|-----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| Bezeichnung                 | 1. Leerstelle<br>2. Zwischengitteratom (Schottky-Fehlordnung)<br>3. Frenkel-Fehlordnung (Kombination von 1 und 2) | Versetzungen                                                                                           | Korngrenzen                                                                    |
| Konzentration (in Metallen) | Leerstellenkonzentration $= f(\text{Temp.}) \approx 10^{-7} \dots 10^{-11}$                                       | Versetzungsdichte $= f(\text{Verformung, Wärmebehandlung}) \approx 10^6 \dots 10^{12} \text{ cm/cm}^3$ | Korngrenzflächen $= f(\text{Korngröße}) \approx 10^2 \text{ cm}^2/\text{cm}^3$ |



Versetzungslinie  
a)



b) Schraubenversetzung

Werden in einem Kristall Fremdatome eingelagert, ist er nicht mehr rein. Man spricht von *Mischkristallen*, *festen Lösungen* oder *Legierungen*. Die Einlagerung kann auf Gitterplätzen der Wirtsatome erfolgen, dann entsteht ein *Substitutions-Mischkristall* (Bild I-11). Werden Fremdatome auf Zwischengitterplätzen eingelagert, ergeben sich *Einlagerungs-* oder *interstitielle Mischkristalle*.

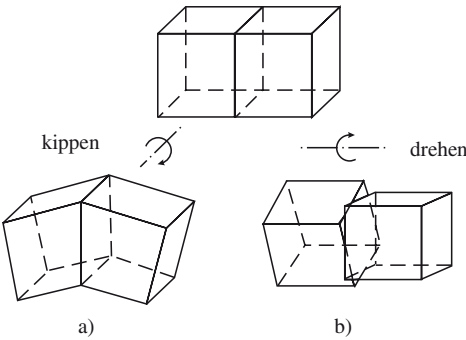


**Bild I-10** Zweidimensionale Fehler  
a) Kippung  
b) Drehung

### 4 Chemische Grundzusammenhänge

Wie bei den Bindungsarten kurz angedeutet, vermögen die Atome – über ihre Valenzelektronen – miteinander zu reagieren. Es entstehen dann neue Stoffe, die dem Bereich *anorganische Chemie* zugeordnet werden, wenn es sich beim Stoffaufbau weitgehend um Ionenbindungen handelt. Bei der *organischen Chemie* steht das Kohlenstoffatom mit überwiegend kovalenten Bindungen im Mittelpunkt. Das, wie das Kohlenstoffatom, gleichfalls vierwertige Silicium ist Basis einer eigenständigen Reihe von Kunststoffen, den *Siliconen*.

Für den Aufbau von Stoffen benutzt die Chemie die *Synthese*, während die Untersuchung des Aufbaues mit Hilfe der *Analyse* erfolgt. Zur Beschreibung dieser Vorgänge dienen *Formelsprache* und *Reaktionsgleichung* unter Benutzung der Elementsymbole.

So ist mit  $\text{H}_2\text{SO}_4$  Schwefelsäure gemeint, und  $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$  kennzeichnet eindeutig Alkohol als *Ethylalkohol* (Ethanol). Reagieren Stoffe miteinander, so beschreibt die Reaktionsgleichung die Ausgangsstoffe und Endprodukte nach Art und relativer Menge. Die Darstellung entspricht einer mathematischen (Additions-)Gleichung, bei der an die Stelle des Gleichheitszeichens ein Pfeil die Reaktionsrichtung kennzeichnet. Ist der Reaktionsablauf nicht umkehrbar (*irreversibel*), zeigt dies ein einfacher Pfeil an.

| Ort des Fremdatoms                                                                   | Gitterplatz                                          | Zwischengitterplatz                               |
|--------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| Art des Mischkristalls                                                               | Substitutions-Mischkristall (substitutioneller Mkr.) | Einlagerungs-Mischkristall (interstitieller Mkr.) |
| Durchmesser                                                                          | Fremdatom $\approx$ Wirtsatom                        | Fremdatom $<$ Wirtsatom                           |
| Mischkristallbildung bei ebenem Gitter (schematisch)<br>○ Wirtsatome<br>● Fremdatome |                                                      |                                                   |

**Bild I-11**  
Mischkristalle in ebener Darstellung (schematisch)

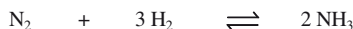


■ **Beispiel:** Die Verbrennung von Ethanol



*Mol* steht hierbei für die Stoffmenge, die aus genau sovielen Teilchen besteht wie 12 g des Kohlenstoffisotops  $^{12}\text{C}$ , nämlich  $6,023 \cdot 10^{23}$  Teilchen/mol (Avogadro'sche Konstante  $N_A$  oder Loschmidtzahl  $N_L$ ).

Bei umkehrbaren (*reversiblen*) Reaktionen kennzeichnet ein Doppelpfeil die beiden möglichen Reaktionsrichtungen, z.B.



Die Verbindungen des Sauerstoffs mit anderen Elementen, die *Oxide*, sind von besonderer Bedeutung, die Schwermetalloxide als Erze zur Gewinnung von Metallen, die Leichtmetalloxide wegen ihrer hohen Schmelzpunkte als (oxid)keramische Werkstoffe.

Die zur Oxidbildung gehörige chemische Reaktion ist die *Oxidation*, allgemeiner als Elektronenabgabe eines Moleküls oder Ions definiert. Die damit verbundene Aufnahme eines Elektrons durch ein anderes Molekül oder Ion ist die *Reduktion*. Die zwangsweise miteinander verkoppelten Oxidations- und Reduktions-Prozesse führen die Bezeichnung *Redox-Reaktionen*.

Metalloxide können ihrerseits wieder mit Wasser reagieren und bilden *Hydroxide*, sie enthalten die einwertige OH-Gruppe (Hydroxyl-Gruppe) und bilden bei den Metallen der 1. und 2. Hauptgruppe (Alkali- und Erdalkalimetalle) *Basen* oder *Laugen*. Sie sind in Metall- und OH-Ionen gespalten und stellen sich als seifige, die Haut ätzende Flüssigkeiten dar.

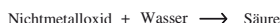
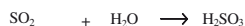
■ **Beispiel:**



Die Oxide dreiwertiger Metalle sind amphoter, d.h. sie können sowohl schwache Basen als auch schwache Säuren bilden. Oxide von Nebengruppenelementen in höheren Wertigkeiten bilden – mit Wasser – Säuren.

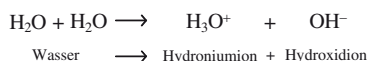
Nichtmetalloxide bilden mit Wasser Säuren.

■ **Beispiel:**



Ihre Moleküle bauen sich aus dem Säurewasserstoff und dem Säurerest auf. Der Säurerest ist eine nicht selbständig existenzfähige Atomgruppe aus Nichtmetall und Sauerstoff. Da allein nicht beständig, sind es auch keine Moleküle. Derartige Atomgruppen werden Radikale genannt, im Beispiel  $\text{SO}_2$ . Die Säuren sind gegenüber den meisten Metallen aggressiv, da in vielen Fällen die Wasserstoffatome gegen Metallatome, die dann als Ionen in Lösung gehen, ausgetauscht werden können. Säuren schmecken – verdünnt (!) – sauer, ätzen die Haut und verfärben, ähnlich wie Basen, Farbstoffe. Dieser Effekt wird für Indikatoren benutzt.

Nach „Brönsted“<sup>1)</sup> lautet die umfassendere Definition: *Säuren* sind *Protonenspender* (Moleküle oder Ionen), *Basen* sind *Protonenfänger* (Moleküle oder Ionen). Die Protonenübergangsreaktion nennt man *Protolyse*. Dieser Vorgang findet auch in geringem Umfang im Wasser statt und wird dann *Autoprotolyse* genannt. Nach „Brönsted“ liegt dem folgende Reaktion zugrunde



In dieser Gleichgewichtsreaktion ist die Konzentration der beiden Ionenarten vom Prinzip her gleich groß, aber mit  $10^{-7}$  Mol pro Liter sehr gering. Andererseits muss das Produkt dieser beiden Ionenkonzentrationen als *Ionenprodukt des Wassers* mit  $K_w = 10^{-14} \text{ mol}^2/\text{l}^2$  als Gleichgewichtsbedingung bei Zugabe von Säuren oder Basen konstant bleiben. Es verschieben sich lediglich die Konzentrationverhältnisse von  $\text{H}_3\text{O}^+$  zu  $\text{OH}^-$ . „Drehpunkt“ dieses Geschehens ist der Zahlenwert  $10^{-7}$  der *Hydroniumionenkonzentration*. Der negative Exponent dieser Konzentrationsangabe (lt. Definition der negative dekadische Logarithmus der Hydroniumionenkonzentration) ist der *pH-Wert*. Er hat große Bedeutung, da mit diesem Zahlenwert die Angaben „sauer“,  $\text{pH} < 7$ , „neutral“,  $\text{pH} = 7$  und „basisch“,  $\text{pH} > 7$  präzise beurteilt werden können. Zwangsweise liegen die Grenzen für sehr starke Säuren dann bei  $\text{pH} = 0$  und für sehr starke Basen bei  $\text{pH} = 14$  (s. Tabelle I-4). Die Bestimmung ist elektrisch oder mit Indikatoren sehr genau möglich.

<sup>1)</sup> Brönsted, Johannes Nicolaus, Dänischer Chemiker, lebte von 1879 bis 1947.

**Tabelle I-4** pH-Skala

| ← Zunahme der Säurewirkung |   |   |   |   |   |   |   | Zunahme der Basenwirkung → |   |    |    |    |    |    |
|----------------------------|---|---|---|---|---|---|---|----------------------------|---|----|----|----|----|----|
| 0                          | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8                          | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |

**Tabelle I-5** Elektronegativitätsskala nach „Pauling“ (Zahlenwert relativ mit Maximum 4 bei Fluor)

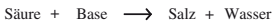
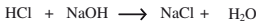
|     |        |        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|--------|--------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| K   | Na, Ba | Li, Ca | Mg  | Al  | Zn  | Si  | H   | P   | C   | S   | N   | Cl  | O   | F   |
| 0,8 | 0,9    | 1,0    | 1,2 | 1,5 | 1,7 | 1,8 | 2,1 | 2,1 | 2,5 | 2,5 | 3,0 | 3,0 | 3,5 | 4,0 |

← elektropositiver

elektronegativer →

Treffen Säuren und Basen in solchen Konzentrationen zusammen, dass  $\text{pH} = 7$  erreicht wird, so spricht man von *Neutralisation*. Das Ergebnis ist Wasser und ein Salz.

■ **Beispiel:**



Salze im klassischen Sinne bestehen aus positiven Metallionen und negativen Säurerestionen. Nach „Brönsted“ sind alle Stoffe Salze, die im *festen Zustand Ionengitter* bilden.

Bei der Namensbildung steht an erster Stelle das elektropositivere Element (Metall siehe auch Tabelle I-5) meist unverändert. Dann folgt der Name des elektronegativeren Bestandteiles mit einer entsprechenden Endung (z.B.  $\text{NaCl}$  = Natriumchlorid). Die Endung **-id** weist darauf hin, dass es sich um ein Salz mit einem Säurerest ( $\text{Cl}^-$ ) aus einer *sauerstofffreien* Säure handelt. Bei Säureresten aus stabilen Säuren mit *normalem* Sauerstoffgehalt lautet die Endung **-at** (z.B.  $\text{Na}_2\text{SO}_4$  = Natriumsulfat). Entammt der Säurerest einer sauerstoffärmeren Säure, ist die Endung **-it** (z.B.  $\text{Na}_2\text{SO}_3$  = Natriumsulfit). Rührt der Säurerest von einer besonders sauerstoffarmen Säure her, kommen der Zusatz **-hypo-** und die Endung **-it** dazu (z.B.  $\text{NaClO}$  = Natriumhypochlorit). Bei Säureresten von besonders sauerstoffreichen Säuren lautet der Zusatz **-per-** und die Endung **-at** (z.B.  $\text{NaClO}_4$  = Natriumperchlorat). Wurden die Säure-Wasserstoffatome nicht vollständig durch Metallatome ersetzt, ergeben sich *saure* oder *hydrogene* Salze (z.B.  $\text{NaHCO}_3$  = Natriumhydrogencarbonat, früher Natriumbicarbonat oder – trivial – Natron).

**5 Elektrochemie**

Innerhalb eines Moleküles ziehen sich die Kationen und Anionen an. In wässriger Lösung gehen diese Kräfte durch die *Permittivität* des Wassers ( $\epsilon_r = 80$ ) auf 1/80 zurück. Die Moleküle sind in Ionen dissoziiert, die eine elektrische Stromleitung als *Leiter 2. Ordnung* ermöglichen. Die Lösung wird zum *Elektrolyten*, in dem unter der Einwirkung einer elektrischen Spannung ein Materietransport erfolgt. Die positiven Kationen wandern zur Katode, die negativen Anionen zur Anode. Nach Ladungsausgleich, Elektronenabgabe bzw. -aufnahme, ist der zum Ion gehörige Stoff elementar verfügbar. Der Vorgang heißt *Elektrolyse* und ermöglicht die Zerlegung eines Stoffes durch den elektrischen Strom. Wasserfrei ist der gleiche Vorgang im Schmelzen von Ionenkristallen als *Schmelzfluss-Elektrolyse* möglich.

**Tabelle I-6** Elektrochemische Spannungsreihe nach „Pauling“

- a) Metalle (Normalpotentiale bezogen auf die Normal-Wasserstoffelektrode)  
b) einige Nichtmetalle

|     | Met.               | Ox.                                 | + e <sup>-</sup>  | Volt  |
|-----|--------------------|-------------------------------------|-------------------|-------|
| 1.  | Cs                 | = Cs <sup>+</sup>                   | + e <sup>-</sup>  | -3,02 |
| 2.  | Li                 | = Li <sup>+</sup>                   | + e <sup>-</sup>  | -3,02 |
| 3.  | Rb                 | = Rb <sup>+</sup>                   | + e <sup>-</sup>  | -2,99 |
| 4.  | K                  | = K <sup>+</sup>                    | + e <sup>-</sup>  | -2,92 |
| 5.  | Ba                 | = Ba <sup>++</sup>                  | + 2e <sup>-</sup> | -2,90 |
| 6.  | Sr                 | = Sr <sup>++</sup>                  | + 2e <sup>-</sup> | -2,89 |
| 7.  | Ca                 | = Ca <sup>++</sup>                  | + 2e <sup>-</sup> | -2,87 |
| 8.  | Na                 | = Na <sup>+</sup>                   | + e <sup>-</sup>  | -2,71 |
| 9.  | La                 | = La <sup>+++</sup>                 | + 3e <sup>-</sup> | -2,37 |
| 10. | Mg                 | = Mg <sup>++</sup>                  | + 2e <sup>-</sup> | -2,34 |
| 11. | Be                 | = Be <sup>++</sup>                  | + 2e <sup>-</sup> | -1,70 |
| 12. | Al                 | = Al <sup>+++</sup>                 | + 3e <sup>-</sup> | -1,67 |
| 13. | Mn                 | = Mn <sup>++</sup>                  | + 2e <sup>-</sup> | -1,05 |
| 14. | Zn                 | = Zn <sup>++</sup>                  | + 2e <sup>-</sup> | -0,76 |
| 15. | Cr                 | = Cr <sup>+++</sup>                 | + 3e <sup>-</sup> | -0,71 |
| 16. | Fe                 | = Fe <sup>++</sup>                  | + 2e <sup>-</sup> | -0,44 |
| 17. | Cd                 | = Cd <sup>++</sup>                  | + 2e <sup>-</sup> | -0,40 |
| 18. | Co                 | = Co <sup>++</sup>                  | + 2e <sup>-</sup> | -0,28 |
| 19. | Ni                 | = Ni <sup>++</sup>                  | + 2e <sup>-</sup> | -0,25 |
| 20. | Sn                 | = Sn <sup>++</sup>                  | + 2e <sup>-</sup> | -0,14 |
| 21. | Pb                 | = Pb <sup>++</sup>                  | + 2e <sup>-</sup> | -0,13 |
| 22. | H <sub>2</sub>     | = 2 H <sup>+</sup>                  | + 2e <sup>-</sup> | 0,00  |
| 23. | Cu                 | = Cu <sup>++</sup>                  | + 2e <sup>-</sup> | +0,34 |
| 24. | 2 J <sup>-</sup>   | = J <sub>2</sub>                    | + 2e <sup>-</sup> | +0,53 |
| 25. | Ag                 | = Ag <sup>+</sup>                   | + e <sup>-</sup>  | +0,80 |
| 26. | Pd                 | = Pd <sup>++</sup>                  | + 2e <sup>-</sup> | +0,83 |
| 27. | Hg                 | = Hg <sup>++</sup>                  | + 2e <sup>-</sup> | +0,85 |
| 28. | 2 Br <sup>-</sup>  | = Br <sub>2</sub> (fl)              | + 2e <sup>-</sup> | +1,06 |
| 29. | Pt                 | = Pt <sup>++</sup>                  | + 2e <sup>-</sup> | +1,2  |
| 30. | 2 H <sub>2</sub> O | = O <sub>2</sub> + 4 H <sup>+</sup> | + 4e <sup>-</sup> | +1,23 |
| 31. | 2 Cl <sup>-</sup>  | = Cl <sub>2</sub>                   | + 2e <sup>-</sup> | +1,36 |
| 32. | Au                 | = Au <sup>+</sup>                   | + e <sup>-</sup>  | +1,68 |
| 33. | 2 F <sup>-</sup>   | = F <sub>2</sub>                    | + 2e <sup>-</sup> | +2,85 |

a)

| Red. ⇌ Ox.                          | + e <sup>-</sup>  | Volt  |
|-------------------------------------|-------------------|-------|
| Te <sup>-</sup> ⇌ Te                | + 2e <sup>-</sup> | -0,92 |
| Se <sup>-</sup> ⇌ Se                | + 2e <sup>-</sup> | -0,78 |
| S <sup>-</sup> ⇌ S                  | + 2e <sup>-</sup> | -0,51 |
| 2 J <sup>-</sup> ⇌ J <sub>2</sub>   | + 2e <sup>-</sup> | +0,53 |
| 2 Br <sup>-</sup> ⇌ Br <sub>2</sub> | + 2e <sup>-</sup> | +1,07 |
| 2 Cl <sup>-</sup> ⇌ Cl <sub>2</sub> | + 2e <sup>-</sup> | +1,36 |
| 2 F <sup>-</sup> ⇌ F <sub>2</sub>   | + 2e <sup>-</sup> | +2,85 |

b)

Die Neigung der Metalle zur Abgabe von Elektronen (Oxidation) ist verschieden stark und durch die unterschiedliche Bindung der Valenzelektronen an den Atomkern bedingt. Das Bestreben eines Metalles, Elektronen abzugeben und als Ion in Lösung zu gehen, nennt man *Lösungsdruck*. Er kann als elektrische Spannung in Volt gemessen werden und liefert die *elektrochemische Spannungsreihe* (Tabelle I-6). Der Nullpunkt ist dabei (willkürlich) für Wasserstoff angesetzt. Die *unedlen*, leicht reagierenden Elemente haben ein zunehmend negatives Potential gegenüber Wasserstoff; umgekehrt werden die Elemente mit wachsendem positivem Potential *edler* und reaktions-träger. Die negativeren, d.h. weiter oben stehenden (Tabelle I-6) Metalle haben den größeren Lösungsdruck gegenüber den positiveren, also weiter unten

stehenden Metallen. Als Folge davon reduzieren die „oberen“ die „unteren“ Metalle und gehen selbst in Lösung.

Nutzt man den Lösungsdruck zwischen unterschiedlichen Elementen durch Einbringen in einen Elektrolyten aus, so entstehen *Galvanische Elemente* oder *Primärelemente*.

Der Stoffumsatz bei der Elektrolyse transportiert je Ladung  $1,6 \cdot 10^{-19}$  As, d.h. bei einem Mol mit  $6 \cdot 10^{23}$  Teilchen = 96500 As =  $F$  = *Faraday-Konstante*. Bezieht man die transportierte und abgeschiedene Masse auf 1 As, so ergibt sich das für jeden Stoff charakteristische *elektrochemische Äquivalent* (c). Diese Größe mit 1,118 mg/As bei Silber diente früher zur Festlegung von 1 A.

## II Elektrische Leitfähigkeit

### 1 Leitungsmechanismus

Metallische Leiter sind Leiter *1. Ordnung*, denn mit dem Stromfluss ist kein Materietransport verbunden. Die elektrische Leitfähigkeit ist dabei an die Existenz freier Elektronen, dem sogenannten Elektronengas, gebunden. Für die Leitfähigkeit eines Stoffes ist die Anzahl der verfügbaren Teilchen ( $n$ ), ihre Beweglichkeit ( $\mu$ ) und die Teilchenladung ( $e$ ) maßgebend. Da der Leitungsmechanismus sowohl auf negative (Index  $n$ ) als auch positive (Index  $p$ ) Ladungsträger zurückgehen kann, gilt für die Leitfähigkeit  $\gamma$ :

$$\gamma = e(n_n \cdot \mu_n + n_p \cdot \mu_p) \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \gamma & e & n & \mu \\ \hline \text{S/cm} & \text{As} & \text{cm}^{-3} & \text{cm}^2/\text{Vs} \\ \hline \end{array} \quad (\text{II.1})$$

Für den normalen elektrischen Leiter liegen nur die negativen Elektronen als Ladungsträger vor; damit entfällt der Term mit den  $p$ -Indizes. Die *Beweglichkeit*  $\mu$  der Ladungsträger ist die pro Einheit der elektrischen Feldstärke  $E$  (meist in V/cm) bewirkte *Driftgeschwindigkeit*, d.h. die der allgemeinen Teilchenbewegung in einer bestimmten Richtung überlagerte Geschwindigkeit. Die in der Praxis auftretenden Werte von Leitfähigkeit, Teilchenzahl und Beweglichkeit sind für einige charakteristische Materialien in der Tabelle II-1 zusammengestellt.

Im Festkörper mit seinem Kristallgitter haben die Atome eine periodische Anordnung mit definierten Abständen. Zwischen den Atomen machen sich *Austauschkraft* bemerkbar, die die Besetzung der einzelnen Energieniveaus beeinflussen. Gemäß dem Pauli-Prinzip, nach dem in einem Atom keine zwei Elektronen in bezug auf ihren Zustand völlig übereinstimmen können, dürfen in einem gegebenen System die Energieniveaus und Spinorientierungen nur ein-

**Tabelle II-1** Elektrische Leitfähigkeit  $\gamma$ , Elektronenkonzentration  $n_n$  und Elektronenbeweglichkeit  $\mu_n$  einiger Werkstoffe bei Raumtemperatur

| Material | $\frac{\gamma}{\text{S/cm}}$ | $\frac{n_n}{\text{cm}^{-3}}$ | $\frac{\mu_n}{\text{cm}^2/\text{Vs}}$ |
|----------|------------------------------|------------------------------|---------------------------------------|
| Cu       | $58 \cdot 10^4$              | $8,45 \cdot 10^{22}$         | 43                                    |
| Al       | $34,5 \cdot 10^4$            | $6,0 \cdot 10^{22}$          | 36                                    |
| Ag       | $61,4 \cdot 10^4$            | $5,87 \cdot 10^{22}$         | 65                                    |
| Ge       | $2,3 \cdot 10^{-2}$          | $2,4 \cdot 10^{13}$          | 3600                                  |
| Si       | $4,35 \cdot 10^{-6}$         | $1,5 \cdot 10^{10}$          | 1400                                  |
| InSb     | $3,5 \cdot 10^2$             | $2,8 \cdot 10^{16}$          | 78000                                 |

mal belegt sein. Da die Beeinflussung über den ganzen Kristall reicht, gilt das Pauli-Prinzip entsprechend weiträumig. Die bei Einzelatomen diskreten Energieniveaus der Elektronen spreizen sich zu *Energiebändern* auf (Bild II-1). Neben den mit Ladungsträgern besetzten Bändern treten energetisch unbesetzte oder *verbotene Zonen* auf. Für den Leitungsmechanismus sind das letzte noch mit Elektronen besetzte Band, das *Valenzband*, und das nächste für eine Besetzung mögliche Band, das *Leitungsband*, bedeutsam. Nur im letzteren verfügen Elektronen über die für einen Stromtransport nötige Beweglichkeit. Aus der Ähnlichkeit der statistischen Energieverteilung im Valenzband mit der bei Gasen rührt auch die Bezeichnung Elektronengas her.

Wegen der statistischen Energieverteilung können Teilchen die verbotene Zone überwinden und aus dem Valenzband in das Leitungsband gelangen und dort Leitfähigkeit bewirken. Die Wahrscheinlichkeit, mit der die Energie eines Elektrons einen gewissen vorgegebenen Wert über- oder unterschreitet, wird

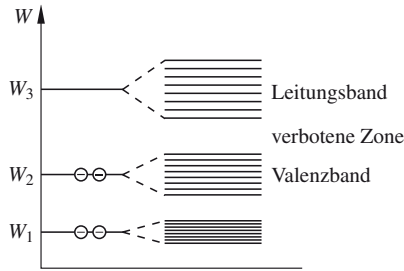


**Bild II-1** Energiebänder durch Aufspaltung der Energieniveaus

⊖ ⊖ durch Elektronen besetzte Niveaus

durch den Verlauf der *Fermi-Funktion*  $F(W)$  beschrieben. In Bild II-2 ist sie für die 3 Temperaturen 0, 100 und 300 K dargestellt. Das *Fermi-Niveau*  $W_F$  ist dabei willkürlich auf den (Bezugs-)Wert 0 gelegt, und die Energie ist als Differenz  $\Delta W$  gegenüber diesem Wert in eV aufgetragen. Der tatsächliche Wert des Fermi-Niveaus gibt die Energie an, über welche die Teilchen auch noch beim absoluten Nullpunkt verfügen. Es ist offensichtlich, dass die Lage des Fermi-Niveaus in der verbotenen Zone entscheidenden Einfluss auf die Leitfähigkeit eines Stoffes hat.

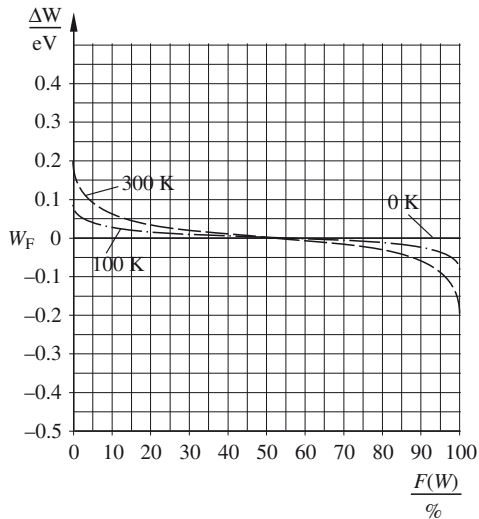


**Bild II-2** Fermi-Funktion  $F(W)$  für die Temperaturen 0 K (—), 300 K (---) und 100 K (-.-.-)

## 2 Isolator

Bild II-3a zeigt ein Bandschema mit einer breiten verbotenen Zone von  $\Delta W_B = 2$  eV und daneben die Energieverteilung bei 300 bzw. 600 K für ein mittig liegendes Fermi-Niveau. Offensichtlich verfügt kein Teilchen über eine ausreichende Energie, um in das

Leitungsband zu gelangen. Im vollbesetzten Valenzband ist auch keine Beweglichkeit der Teilchen und damit keine Leitfähigkeit vorhanden. Es liegt das typische Bandschema eines Isolators vor.

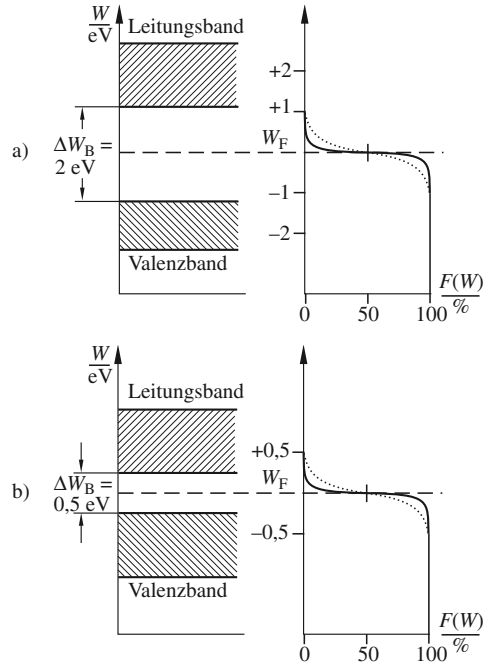


**Bild II-3** Bandschemata (Prinzip-Beispiele)

a) Isolator, Bandlücke  $\Delta W_B = 2$  eV

b) Halbleiter, Bandlücke  $\Delta W_B = 0,5$  eV

$W_F$  = Fermi-Niveau, —  $\cong$  300 K und .....  $\cong$  600 K

Die punktierte Linie für 600 K zeigt aber auch eine andere Tendenz auf. Mit steigender Temperatur wächst die Wahrscheinlichkeit, dass Ladungsträger im Leitungsband verfügbar werden. Der Isolator wird leitend, d.h. er schlägt durch!

## 3 Halbleiter

Wird der Bandabstand oder die Energielücke vom englischen „energy gap“ (Formelzeichen  $E_g$ ) merklich kleiner als 1 eV, so tritt eine ausreichende Anzahl von Teilchen auf, die in das Leitungsband gelangen können (Bild II-3b). Es ist dies der typische Fall des Halbleiters, bei dem im reinen Zustand das Fermi-Niveau genau mittig liegt. Leitfähigkeit ist jetzt sowohl über das Leitungsband mit seinen thermisch gewonnenen Elektronen ( $n$ ) als auch im teilweise leer gewordenen Valenzband über *Defektelektronen* oder *Löcher* ( $p$ ) möglich. Es ist sofort ersichtlich, dass die Leitfähigkeit einerseits durch Temperaturerhöhung (z.B. beim Stromdurchgang) oder durch Verschiebung des Fermi-Niveaus zum Leitungs- bzw. Valenzband (durch Dotierung) erhöht werden kann. Trotz

zunehmender Beweglichkeit der Teilchen mit sinkender Temperatur verschwindet beim absoluten Nullpunkt die Leitfähigkeit von Halbleitern.

#### 4 Normalleiter

Sind andererseits Bänder unvollständig besetzt oder überlappen Valenz- und Leitungsband (die verbotene Zone ist dann negativ), so liegt der Fall des metallischen Leiters vor. Das Fermi-Niveau liegt jetzt innerhalb des Leitungsbandes. In Bild II-4 sind die beiden Fälle dargestellt, einmal für Natrium mit einem unvollständig besetzten 3s-Band (Bild II-4a) und für Kupfer mit überlappendem 3d- und 4s-Band (Bild II-4c). (Siehe auch I.2 Atombau und Periodensystem.)

Mit sinkender Temperatur und damit steigender Beweglichkeit der Teilchen nimmt die Leitfähigkeit der metallischen Leiter bis zum absoluten Nullpunkt um etwa 4 Zehnerpotenzen zu.

#### 5 Supraleiter

Eine größere Zahl von Metallen und Legierungen zeigt bei sehr tiefen Temperaturen ein schlagartiges Ansteigen der Leitfähigkeit um mehr als 20 Zehnerpotenzen. Der Effekt heißt *Supraleitung* und die Temperatur, bei der er eintritt, *Sprungtemperatur*  $T_c$ . Die Höhe der Sprungtemperatur ist materialabhängig

und liegt für reine Metalle unter 10 K (Heliumkühlung), während Legierungen Werte um 20 K erreichen und damit bereits in den Bereich der Wasserstoffkühlung (Siedepunkt von Wasserstoff: 20 K bzw.  $-253\text{ }^\circ\text{C}$ ) gelangen. Ein entscheidender Schritt gelang in den letzten Jahren mit Mischoxiden auf der Basis Seltene-Erden-Barium-Kupfer (SE-Ba-Cu-O), mit denen Sprungtemperaturen bei Stickstoffkühlung (Siedepunkt Stickstoff: 77 K bzw.  $-196\text{ }^\circ\text{C}$  möglich sind (Tabelle II-2).

Da die Supraleitung durch magnetische Felder – auch durch das eigene Feld eines im Supraleiter fließenden Stromes – aufgehoben werden kann, unterscheidet man *weiche Supraleiter* oder *Supraleiter 1. Art*, die gegen magnetische Felder bis zu einer kritischen Feldstärke  $H_c = 0,1\text{ MA/m}$  beständig sind, und *harte Supraleiter* oder *Supraleiter 2. Art*, die noch sehr starke magnetische Felder ( $H_c > 10\text{ MA/m}$ ) vertragen. Für den praktischen Gebrauch ist die Angabe der *kritischen Stromdichte*  $S_c$  bei der die Supraleitfähigkeit durch das eigene Magnetfeld des fließenden Stromes aufgehoben wird, geeigneter.

Nach dem derzeitigen Kenntnisstand wird die Supraleitung von paarweise *spinkompensierten* Elektronen, die nicht mehr dem Pauli-Prinzip gehorchen, den sog. *Cooper-Paaren*, mit einer sehr hohen Beweglichkeit bewirkt. Die Cooper-Paare verursachen durch Ringströme an der Leiteroberfläche ein magnetisches Kompensationsfeld für das Leiterinnere,

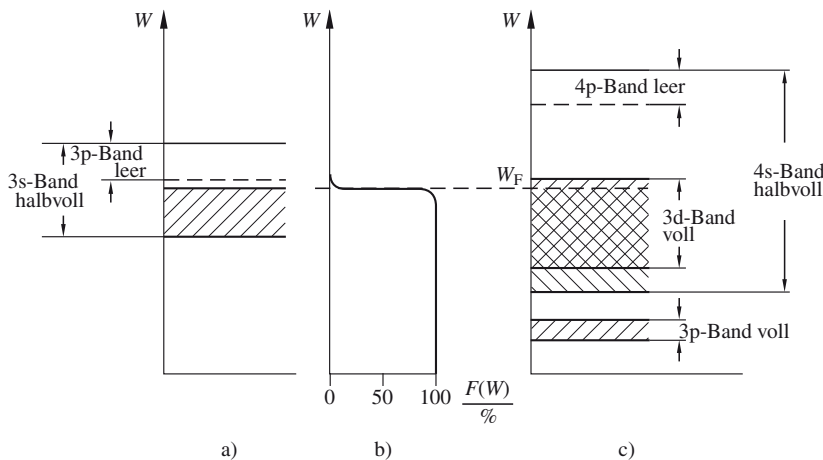


**Bild II-4** Bandschemata von Leitern

- a) Unvollständig besetztes Band, als Beispiel Natrium. Das 3s-Band ist nur zur Hälfte besetzt
- b) Fermi-Funktion für 300 K mit Lage zu a) und c)
- c) Überlappende Bänder, als Beispiel Kupfer. Das voll besetzte 3d-Band liegt innerhalb des nur zur Hälfte besetzten 4s-Bandes

**Tabelle II-2** Sprungtemperaturen einiger Basismaterialien für Supraleiter

| Material | Ga  | Al  | Sn  | Pb  | Nb  | NbTi | Nb <sub>3</sub> Sn | Nb <sub>3</sub> Ga | Nb–Al–Ge | Y–Ba–Cu–O | Ti–Ba–Ca–Cu–O | Hg–Ba–Ca–Cu–O |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|------|--------------------|--------------------|----------|-----------|---------------|---------------|
| $T_c/K$  | 1,1 | 1,1 | 3,7 | 7,3 | 9,2 | 10   | 18                 | 20,3               | 21       | 93        | 125           | 133           |

was zu einem magnetfeldfreien Raum, d.h.  $\mu_r = 0$  (!) führt.

In den harten Supraleitern bestehen bei Stromfluss im Inneren normal- und supraleitende Bereiche in Form sogenannter *Flussschläuche* nebeneinander, die allerdings durch den fließenden Strom in Bewegung geraten und damit Instabilitäten bewirken. Durch Inhomogenitäten (Gitterfehler) im Aufbau des Supraleiters lassen sich sogenannte *Pinning-Zentren* schaffen, die eine Stabilisierung herbeiführen. Derart stabilisierte Systeme führen die Bezeichnung *Hochfeld-Supraleiter* oder *Supraleiter 3. Art*.

Die Leitfähigkeit eines Supraleiters ist gegenüber Kupfer ungefähr um soviel größer wie die Leitfähigkeit von Kupfer gegenüber einem Isolator (etwa 20 Zehnerpotenzen)!

6 Halleffekt

Die Driftgeschwindigkeit bewegter Ladungsträger führt zu deren Ablenkung in einem Magnetfeld (Bild II-5). Die quer zum Stromfluss auftretende *Hallspannung*  $U_H$  ist

$$U_H = R_H \frac{B}{d} I$$

|               |               |                |               |                       |
|---------------|---------------|----------------|---------------|-----------------------|
| $\frac{U}{V}$ | $\frac{B}{T}$ | $\frac{d}{mm}$ | $\frac{I}{A}$ | $\frac{R_H}{cm^3/As}$ |
|---------------|---------------|----------------|---------------|-----------------------|

(II.2)

mit  $B$  = Flußdichte,  $I$  = Strom,  $d$  = Leiterdicke (Bild II-5) und  $R_H$  = Hallkonstante  $= Ale \cdot n = A \cdot \mu/\gamma$ . Die Hallkonstante ist damit von der Beweglichkeit  $\mu$  und der Leitfähigkeit  $\gamma$  bzw. Teilchenkonzentration  $n$  und Elementarladung  $e$  abhängig. Bei normalen Leitern ist die Konstante  $A = 1$ , bei Halbleitern  $A = 3\pi/8$ .

Die Ablenkung der Strombahnen durch das Magnetfeld führt zu einem Winkel gegenüber der ursprünglichen (Längs-)Richtung, dem Hallwinkel  $\Theta_H$

$$\tan \Theta_H = \mu \cdot B$$

|                         |                       |               |
|-------------------------|-----------------------|---------------|
| $\frac{\Theta}{^\circ}$ | $\frac{\mu}{cm^2/Vs}$ | $\frac{B}{T}$ |
|-------------------------|-----------------------|---------------|

(II.3)

d.h. der Hallwinkel ist nur von der Beweglichkeit der Ladungsträger ( $\mu_n$  oder  $\mu_p$ ) und der magnetischen Flussdichte abhängig.

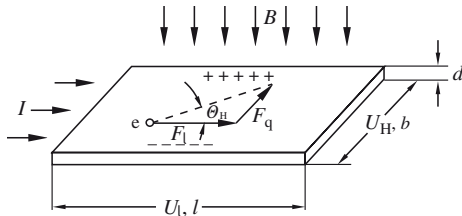


Bild II-5 Halleffekt (Prinzip)

Stromdurchflossener Leiter (Länge  $l$ , Breite  $b$  und Dicke  $d$ ) im Magnetfeld.  $I$  = Strom (Betriebsstrom),  $B$  = Magnetfeld,  $F_r$ ,  $F_q$  = Längs- bzw. Querkraft,  $U_l$  = Längsspannung (Betriebsspannung),  $U_H$  = Hallspannung und  $\Theta_H$  = Hallwinkel

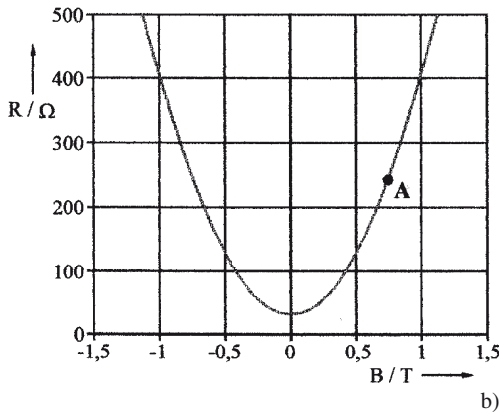
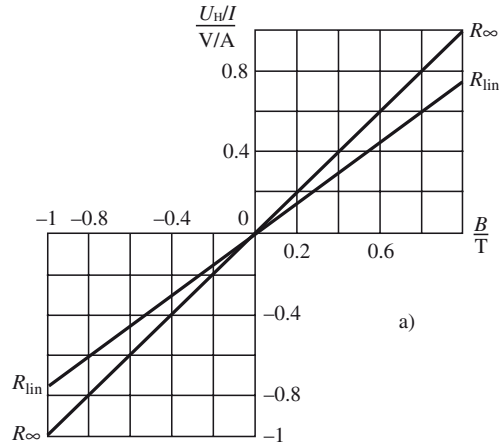


Bild II-6

- a) Normierte Hallspannung in Abhängigkeit vom anliegenden Magnetfeld. Im Leerlauf ( $R_\infty$ ) und mit Abschlusswiderstand  $R_{lin}$  für optimal lineare Kennlinie.
- b) Widerstand in Abhängigkeit vom anliegenden Magnetfeld für eine InSb-Feldplatte. Der Widerstand ist von der Polarität des Magnetfeldes unabhängig und verläuft nichtlinear. Eine magnetische „Vorspannung“ (Punkt A) liefert eine bessere lineare Kennlinie und eine Feldpolaritätserkennung.

Weil bei vorgegebenen Abmessungen die Hallspannung außer von einem eingepprägten Strom  $I$  nur noch vom einwirkenden Magnetfeld  $B$  abhängt, steht damit als *Hallgenerator* ein einfacher Messsensor für magnetische Felder zur Verfügung.

In Bild II-6a ist die auf den Ruhestrom normierte Ausgangsspannung eines Hallgenerators über der magnetischen Flussdichte  $B$  leerlaufend ( $R_\infty$ ) und mit einem für beste Linearisierung der Kennlinie ( $R_{lin}$ ) ermittelten Abschlusswiderstand dargestellt. Wie sofort ersichtlich und wie es auch dem Prinzip der



Entstehung der Hallspannung entspricht, ist ihr Vorzeichen von der Polarität des Magnetfeldes abhängig. Magnetische Wechselfelder erzeugen dementsprechend eine – vorzeichenrichtige – Wechselspannung.

Die Ruhestrome für Hallgeneratoren liegen zwischen einigen und einigen hundert mA. Bei Flussdichten von 1 T erreichen die Hallspannungen im Leerlauf Werte von 0,1 bis 1 V.

Der Hallwinkel hat eine Verlängerung der Strombahnen im Leiter zur Folge, woraus ein erhöhter Widerstand resultiert. Dieser Effekt wird in der *Feldplatte* ausgenutzt. Im Prinzip wechseln dazu ein Material mit großer Hallkonstante (z.B. InSb oder InAs) mit einem guten Leiter, d.h. Material mit verschwindender Hallkonstante, ab (Bild II-7a und b). Die Pfeile symbolisieren in den Abbildungen die Strombahnen. Unter dem Einfluss eines Magnetfeldes weisen sie einen längeren Weg auf. Die entstehenden Hallspannungen werden durch die quer-

liegenden – Äquipotentialflächen erzwingenden – Leiter kurzgeschlossen. Damit liegt ein *magnetfeldabhängiger Widerstand* vor. Wie aus dem Diagramm der relativen Widerstandsänderungen in Bild II-6b hervorgeht, sind die Zusammenhänge nur stark nichtlinear. Auch ist die Polarität des Magnetfeldes nicht erkennbar, da nur die Stärke des Feldes in die Widerstandsänderung eingeht. Wenn nicht mit einer Vormagnetisierung gearbeitet wird, bewirkt ein magnetisches Wechselfeld eine Ausgangsspannung doppelter Frequenz am „Arbeitswiderstand“ Feldplatte.

In der Praxis werden diese Elemente im mm-Bereich als Hall- bzw. Magnetoresistive-Sensoren (MRS) in Rund- bzw. Flachstäben oder IC-Gehäusen mit Stromversorgung und (Temperatur-)Stabilisierung beschaltet ausgeliefert. Einfacher Anschluss an eine Betriebsspannung von etwa 3–12 V ergibt dann an den Ausgangsklemmen die gewünschte Information über das zu messende Magnetfeld.

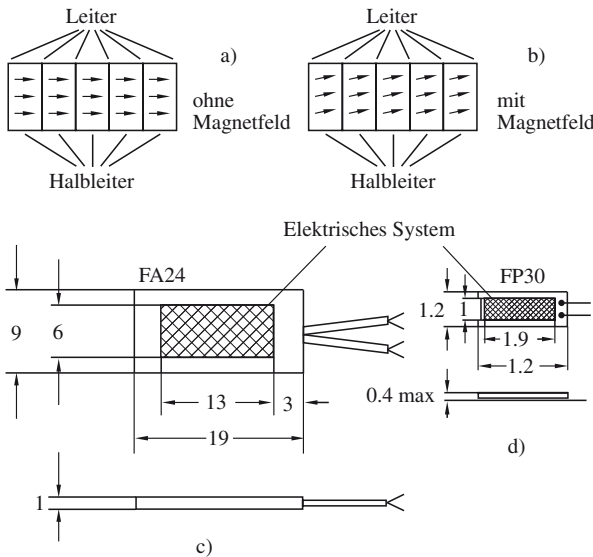


**Bild II-7** Feldplatte

- a) und b) prinzipieller Aufbau (Er-läuterungen im Text)
- c) Abmessungen eines Hallgenerators (Siemens FA 24)
- d) Abmessungen einer Feldplatte (Siemens FP 30)

### III Elektrische Leiter

#### 1 Normalleiter

Die Daten der wichtigsten Leitermaterialien sind in der Tabelle III-1 zusammengestellt. Für Leitkupfer ist der Mindestwert der elektrischen Leitfähigkeit (DIN EN 13604:2002)  $58 \cdot 10^6$  S/m bzw. der spezifische Widerstand  $0,01724 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$ . Je nach Vorbehandlung und Reinheit kann die elektrische Leitfähigkeit des Kupfers zwischen  $60 \cdot 10^6$  S/m bei extremer

Reinheit und  $55 \cdot 10^6$  S/m bei geringfügigen Verunreinigungen schwanken. Aus diesem Grunde kommt in der Elektrotechnik ausschließlich *elektrolytisch raffiniertes E-Kupfer* (Nummer CW003A, Kurzzeichen Cu-ETP1) oder das *sauerstofffreie SE-Kupfer* (Nummer CW007A, Kurzzeichen Cu-OF1) in Betracht (EN 13604:2002). Mit zunehmender Temperatur sinkt die Leitfähigkeit bzw. steigt der Widerstand der Leiterwerkstoffe. Generell sind metallische Leiter

**Tabelle III-1** Daten einiger Leiterwerkstoffe  
Der spezifische Widerstand  $\varrho$  in  $10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$  ist zahlenmäßig gleich mit der gebräuchlichen Angabe in  $\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$

| Metall    | Leitfähigkeit gegenüber Silber = 100% | elektrische Leitfähigkeit $\frac{\gamma}{10^6 \text{ S/m}}$ | spezifischer Widerstand $\frac{\varrho}{10^{-6} \Omega\text{m}}$ | Temperaturkoeffizient $\frac{\alpha}{\%/^\circ\text{C}}$ |
|-----------|---------------------------------------|-------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| Silber    | 100                                   | 61                                                          | 0,0163                                                           | 0,41                                                     |
| Kupfer    | 96                                    | 58                                                          | 0,0173                                                           | 0,43                                                     |
| Gold      | 73                                    | 41                                                          | 0,025                                                            | 0,39                                                     |
| Aluminium | 62                                    | 38                                                          | 0,026                                                            | 0,43                                                     |
| Zink      | 31                                    | 17                                                          | 0,059                                                            | 0,42                                                     |
| Nickel    | 25                                    | 15                                                          | 0,067                                                            | 0,69                                                     |
| Eisen     | 18                                    | 10                                                          | 0,098                                                            | 0,56                                                     |
| Zinn      | 15                                    | 9                                                           | 0,115                                                            | 0,46                                                     |
| Blei      | 8                                     | 4,5                                                         | 0,222                                                            | 0,42                                                     |

als *Kaltleiter* oder PTC (engl. positive temperature coefficient) zu klassifizieren. Eine geringe Temperaturabhängigkeit weisen die wegen ihrer guten Langzeitkonstanz zunehmend eingesetzten Metallfilmwiderstände auf. Preiswert galvanisch hergestellt, erreichen sie Temperaturkoeffizienten  $\alpha \cong 0,02 \dots 0,005 \text{ } \%/^\circ\text{C}$  (s.a. Tabelle III-1).

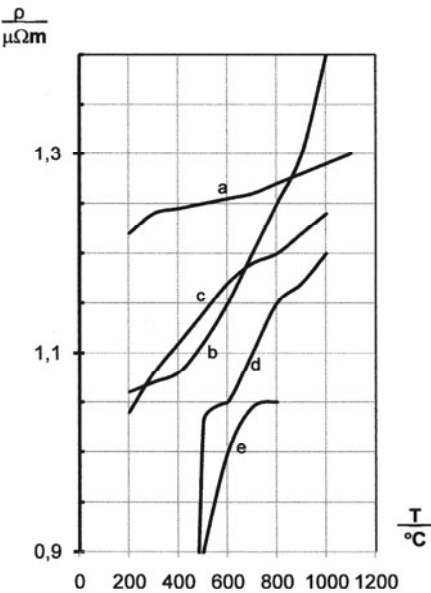


**Bild III-1** Spezifischer Widerstand einiger Heizleitermaterialien in Abhängigkeit von der Temperatur (nach Thyssen–Krupp)

- a) Nicrofer 6023 H (NiCr23Fe)
- b) Nicrofer 7216 (NiCr15Fe)
- c) Nicrofer 3228 NbCe (X6NiCrNbCe 32–27)
- d) Crofer 22 APU (X1CrTiLa22)
- e) Nickleisen (NiFe29Cr1) (Standardlegierung)

Für heiztechnische Zwecke sind die Anforderungen an den Temperaturgang der Heizleiter (DIN 46460, 46463, Ni-Widerstandslegierungen) wesentlich geringer, dafür ist der Temperaturbereich wesentlich größer. Bild III-1 zeigt den spezifischen Widerstand für einige Heizleitermaterialien in Abhängigkeit von der Temperatur. Auffällig ist hierbei das Verhalten der NiFe-Legierung mit zunächst Kaltleitercharakteristik, wie bei Metallen üblich, die beim Erreichen der Curie Temperatur (siehe IV.2 Verhalten von Materie im Magnetfeld) in einen praktisch konstanten Widerstand übergeht.

2 Halbleiter

Beim reinen Halbleiter ist, wegen des mittig in der verbotenen Zone liegenden Fermi-Niveaus, die Anzahl der ins Leitungsband übergebenden Elektronen  $n_n$ , gleich der Anzahl der im Valenzband frei werden den Defektelektronen  $n_p$ . Die so rein thermisch erzeugte Teilchendichte heißt *Intrinsicdichte* oder auch *Intrinsiczahl*  $n_i$ . Allgemein gilt der Zusammenhang

$$n_n \cdot n_p = n_i^2 \quad \left| \frac{n}{\text{cm}^{-3}} \right| \quad \text{(III.1)}$$

Aus der Intrinsiczahl folgt die *Intrinsic-* oder *Eigenleitfähigkeit*

$$\gamma_i = e n_i (\mu_n + \mu_p) \quad \left| \frac{\gamma}{\text{S/cm}} \right| \left| \frac{e}{\text{As}} \right| \left| \frac{n}{\text{cm}^{-3}} \right| \left| \frac{\mu}{\text{cm}^2/\text{Vs}} \right| \quad \text{(III.2)}$$

Die Grunddaten für Germanium (Ge) und Silizium (Si) sind in der Tabelle III-2 zusammengestellt. Daraus ist sofort ersichtlich, dass zum Erreichen der Eigenleitfähigkeit die Konzentration von Fremdteilchen kleiner als ca.  $10^{13} \text{ cm}^{-3}$  bei Ge und kleiner als ca.  $10^{10} \text{ cm}^{-3}$  bei Si sein muss. Bei ca.  $10^{20}$  Teilchen pro  $\text{cm}^3$  für Metalle bedeutet dieses eine Reinheit von besser  $10^{-9}$  ( $= 1 \text{ ppb} = 1 \text{ part per billion} = 1 \text{ Fremd-}$



teilchen auf 1 Milliarde {amerik. billion!} Teilchen) bei Ge und besser  $10^{-12}$  bei Si. Wegen der Abhängigkeit der Leitfähigkeit vom Reinheitsgrad kann umgekehrt über die Messung der Leitfähigkeit eines Halbleitermaterials dessen Reinheit bestimmt werden.

**Tabelle III-2** Intrinsiczahlen und Ladungsträgerbeweglichkeiten von Germanium und Silicium

| Material | $\frac{n_i}{\text{cm}^{-3}}$ | $\frac{\mu_n}{\text{cm}^2/\text{Vs}}$ | $\frac{\mu_p}{\text{cm}^2/\text{Vs}}$ |
|----------|------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| Ge       | $2,4 \cdot 10^{13}$          | 3900                                  | 1900                                  |
| Si       | $1,5 \cdot 10^{10}$          | 1350                                  | 850                                   |

*Dotieren* ist die Änderung der Leitfähigkeit eines hochreinen Halbleiters durch Verschieben des Fermi-Niveaus. Es erfolgt über das Einbringen von Störungen durch fremde Atome mit einem anderen Fermi-Niveau als dem des Halbleiters. Liegt das eingebrachte Fermi-Niveau nahe dem Leitungsband, stehen zusätzliche Elektronen für den Leitungsmechanismus zur Verfügung, sog. *n-Dotierung* (Bild III-2a). Wegen der vom *Donator* im Übermaß vorhandenen Elektronen auch *Überschuss-* oder *n-Leitung* genannt. Liegt andererseits das Fermi-Niveau des störenden Gitters nahe dem Valenzband, sog. *p-Dotierung*, werden durch den *Akzeptor* vermehrt Elektronen aus dem Valenzband abgezogen, und es entsteht die *p-Leitung* oder *Defekt(elektronen)leitung* (Bild III-2b). Die Dotierung erfolgt durch Diffusion oder Ionenimplantation.

Da Gl. III.1 unverändert gültig ist, wird mit der Zunahme einer Ladungsträgerart die andere automatisch vermindert und führt damit zu einem *bipolaren* Leitungsmechanismus. Halbleiter finden sich vorzugs-

weise in der 4. Hauptgruppe (IVa) des Periodensystems. Die Tabelle III-3 zeigt einen Ausschnitt daraus. Darin sind die als Akzeptoren (A) geeigneten Elemente der 3. Hauptgruppe und die Donatoren (D) der 5. Hauptgruppe entsprechend gekennzeichnet. Der Bandabstand (Bandlücke) gibt die Breite der verbotenen Zone in eV an.

*Verbindungshalbleiter* haben neben den Elementhalbleitern eine besondere Bedeutung. Bringt man Elemente der III. und V. Hauptgruppe des Periodensystems im stöchiometrischen Verhältnis zusammen, so ist bei derartigen *III-V-Verbindungen* wieder eine ähnliche Konfiguration der Valenzelektronen wie bei Elementhalbleitern möglich. Bei geeigneten Bandstrukturen kann der Leitungsmechanismus ähnlich wie bei Elementhalbleitern durch Dotieren gesteuert werden. In der Tabelle III-4 sind an einigen ausgewählten Beispielen die wesentlichen Daten verschiedener Verbindungs-Halbleiter aufgezeigt, wobei nicht nur einfache III-V-Verbindungen – *binäre Systeme* – berücksichtigt wurden sondern auch drei – *ternäre Systeme* – und vier Komponenten „Mischungen“ – *quaternäre Systeme*. Ternäre und Quaternäre Systeme spielen eine bedeutende Rolle für LEDs – light emitting diodes – Leuchtdioden bei farbigen aber besonders auch weißen Beleuchtungen. Weiße LEDs – zunehmend auf GaN Basis – arbeiten entweder mit einer Blau leuchtenden LED und einem fluoreszierenden Leuchtstoff oder aber mit mehreren unterschiedlich farbigen LEDs deren Summenfarbe Weiß ergibt.

Vergleichsweise sind auch Germanium und Silizium noch mit aufgeführt.

Im Bereich der Beleuchtung gewinnen organische LEDs – OLEDs – zunehmend an Bedeutung, da sie mit organischen Halbleitern, vorzugsweise Poly

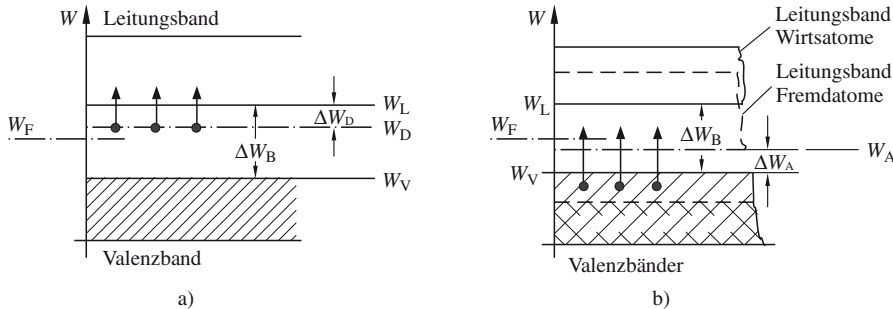


**Bild III-2** Dotierung (schematisch)

a) Bandschema eines Überschussleiters, *n-Leitung*

b) Bandschema eines Defektelektronenleiters, *p-Leitung*

□ Leitungsband, ▨ Valenzband Wirtsatome, ▩ Valenzband Fremdatome, • Elektronen,  $W_L$ ,  $W_V$  Leitungs- bzw. Valenzbandkanten der Wirtsatome,  $W_F$  Fermi-Niveau,  $\Delta W_B$  Bandabstand der Wirtsatome,  $W_D$  Donatorniveau,  $\Delta W_D$  Donatorabstand,  $W_A$  Akzeptorniveau und  $\Delta W_A$  Akzeptorabstand

**Tabelle III-3** Ausschnitt aus dem Periodensystem der Elemente

▨ Halbleiter, (A) Akzeptoren und (D) Donatoren (gegenüber IV),  
a Hauptgruppenelemente und b Nebengruppenelemente

| Gruppe                             | 3 Valenz-<br>elektronen | 4 Valenz-<br>elektronen   | 5 Valenz-<br>elektronen  | 6 Valenz-<br>elektronen   | 7 Valenz-<br>elektronen |
|------------------------------------|-------------------------|---------------------------|--------------------------|---------------------------|-------------------------|
|                                    | III<br>a      b         | IV<br>a      b            | V<br>a      b            | VI<br>a      b            | VII<br>a      b         |
| Symbol<br>Ordn.-Zahl<br>B-abst. eV | ▨ B<br>(A)<br>5<br>1,1  | ▨ C<br>(A)<br>6<br>6      | N<br>7                   | O<br>8                    | F<br>9                  |
| Symbol<br>Ordn.-Zahl<br>B-abst. eV | Al<br>(A)<br>13         | ▨ Si<br>(D)<br>14<br>1,09 | ▨ P<br>(D)<br>15<br>0,33 | S<br>16                   | Cl<br>17                |
| Symbol<br>Ordn.-Zahl<br>B-abst. eV | Ga<br>(A)<br>31         | ▨ Ge<br>(D)<br>32<br>0,67 | ▨ As<br>(D)<br>33<br>1,1 | ▨ Se<br>(D)<br>34<br>2,05 | Br<br>35                |
| Symbol<br>Ordn.-Zahl<br>B-abst. eV | In<br>(A)<br>49         | ▨ Sn<br>(D)<br>50<br>0,09 | Sb<br>(D)<br>51          | ▨ Te<br>(D)<br>52<br>0,34 | ▨ I<br>(D)<br>53<br>1,3 |

**Tabelle III-4** Daten einiger Verbindungshalbleiter.

Zum Vergleich sind die Elementhalbleiter Si und Ge mit aufgeführt.  $E_G$  = Bandlücke (Bandabstand),  $\rho_i$  Intrinsic-  
widerstand,  $Smp$  Schmelzpunkt,  $\mu_n$  Elektronenbeweglichkeit und  $\mu_p$  Löcherbeweglichkeit

| Name                 | Allgem.<br>Formel | Element<br>gruppen | $E_g$<br>eV   | $\frac{\rho_i}{\Omega \cdot cm}$ | $\frac{Smp}{^\circ C}$ | $\frac{\mu_n}{cm^2/Vs}$ | $\frac{\mu_p}{cm^2/Vs}$ | Bemerkungen                  |
|----------------------|-------------------|--------------------|---------------|----------------------------------|------------------------|-------------------------|-------------------------|------------------------------|
| Silizium             | Si                |                    | 1,106         | $2,3 \cdot 10^5$                 | 1420                   | 1350                    | 480                     |                              |
| Germanium            | Ge                |                    | 0,67          | 46                               | 936                    | 3900                    | 1900                    |                              |
| Binäre System        |                   |                    |               |                                  |                        |                         |                         |                              |
| Cd-Tellurid          | CdTe              | II – VI            | 1,56          |                                  | 1041                   | 1050                    | 100                     |                              |
| Zn-Oxid              | ZnO               | II – VI            | 3,35          |                                  |                        | 200                     | 180                     |                              |
| Zn-Sulfid            | ZnS               | II – VI            | 3,68          |                                  | 1185                   | 165                     | 5                       |                              |
| Ga-Arsenid           | GaAs              | III – V            | 1,42          | $5 \cdot 10^7$                   | 1238                   | 8500                    | 400                     | Elektrolumi-<br>neszenz, LED |
| In-Antimonid         | InSb              | III – V            | 0,17          | 0,0045                           | 523                    | 75000                   | 780                     | Hallgenerator,<br>Feldplatte |
| In-Arsenid           | InSb              | III – V            | 0,354         | 0,16                             | 942                    | $< 4 \cdot 10^4$        | $< 5 \cdot 10^2$        |                              |
| Ga-Phosphid          | GaP               | III – V            | 2,26          | –                                | 1475                   | $< 250$                 | $< 150$                 | Grüne LED                    |
| Ga-Antimonid         | GaSb              | III – V            | 0,726         | $10^3$                           | 712                    | $< 3000$                | $< 1000$                |                              |
| Ga-Nitrid            | GaN               | III – V            | 3,2           | 0,1                              | 2500                   | $< 1000$                | $< 350$                 |                              |
| In-Nitrid            | InN               | III – V            | 1,97          | 0,5                              | 1373                   | 250                     | 35                      |                              |
| Al-Nitrid            | AlN               | III – V            | 6,2           | $10^{12}$                        | 3273                   | 300                     | 14                      |                              |
| Bor-Nitrid           | BN                | III – V            | 6,4           | –                                | 2973                   | $< 200$                 | $< 500$                 |                              |
| Si-Karbid            | SiC               | IV – IV            | 2,4           | –                                | –                      | 60                      | 8                       | Blaue LED                    |
| Ternäre Systeme      |                   |                    |               |                                  |                        |                         |                         |                              |
| Aluminium-GaAs       | Al-Ga-As          | III – III – V      | $> 0,45$      | $10^{12}$                        | 1240                   | $10^4$                  | 900                     |                              |
| Indium-GaAs          | Ga-In-As          | III – III – V      | 0,74          | –                                | $\square 1100$         | $< 12 \cdot 10^3$       | $< 300$                 |                              |
| Indium-GaSb          | Ga-In-Sb          | III – III – V      | –             | –                                | –                      | $< 10^4$                | $< 10^3$                |                              |
| IndiumAsSb           | In-As-Sb          | III – III – V      | –             | –                                | –                      | $\square 10^5$          | $< 500$                 |                              |
| Quaternäre Syteme    |                   |                    |               |                                  |                        |                         |                         |                              |
| Indium-Antimon-GaAs  | Ga-In-As-Sb       | III – III – V – V  | 0,36          | –                                | $\square 1100$         | $\square 3000$          | $< 100$                 | Weiße LED                    |
| Indium-Phosphor-GaAs | Ga-In-As-P        | III – III – V – V  | 0,35 ... 2,27 | –                                | –                      | $< 5400$                | $< 200$                 | Weiße LED                    |

Phenylen Vinylen in Verbindung mit Metallen, als metall-organische Halbleiter flexible, leuchtende und steuerbare Anwendungen ermöglichen.

Zur Herstellung der für Halbleiterbauelemente notwendigen Sperrschichten, d.h. Übergänge zwischen p- und n-leitenden Materialien, ist noch die *Umdotierung* wichtig. Durch eine stärkere als die vorher eingebrachte Dotierung kann die p- oder n-Leitung umgekehrt werden. Mit Hilfe dieser Umdotierung können auch Mehrfachfolgen von p- und n-Schichten erzeugt werden. Nur so ist die heute übliche Planartechnologie zur Herstellung integrierter Schaltungen möglich.

### 3 Supraleiter

Das grundsätzlich bereits über eine recht hohe Sprungtemperatur verfügende Niob (9,2 K, siehe Tabelle I-2 Nb) liefert als NbTi bzw. Nb<sub>3</sub>Sn z.Z. die gebräuchlichsten Supraleitermaterialien. NbTi liegt als leicht zu fertigender Legierungswerkstoff vor, wohingegen Nb<sub>3</sub>Sn als Verbindungssupraleiter einen bestimmten Formierungsprozess erfordert. NbTi ermöglicht bei einer Temperatur von 2 K (Heliumkühlung) Flussdichten von 10 T und Nb<sub>3</sub>Sn solche bis 16 T.

Hochtemperatursupraleiter (HTS) auf Metalloxid-Basis haben inzwischen Sprungtemperaturen bis 133 K (Tabelle II-2) erreicht.

Eine völlig andere Art von Supraleitern könnten die Fullerene, eine kugelförmige C<sub>60</sub> Modifikation des Kohlenstoffes, als organische SL liefern. Die aus fünf- und sechseckigen Flächen bestehenden-fußball-ähnlichen-Oberflächenstrukturen haben ihnen den Namen Fußballmoleküle eingebracht. C<sub>60</sub> Fullerene wird mit eingebauten Alkali Atomen bei etwa 10 ... 40 K supraleitend. J. H. Schön, Ch. Kloc und B. Batlogg erreichte durch Einbau von Chloroform- bzw. Bromoform-Moleküle eine Sprungtemperatur von 117 K.

Supraleitendes Material wird zur Stabilisierung in einen normalleitenden Träger (Substrat) auf Cu-Basis (Cu-Sn- oder Cu-Ni-Matrix je nach Herstellprozess) eingebracht. Die dadurch bedingte Aufteilung des Leiters in Normal- und Supraleiter wird durch das *Querschnittsverhältnis*  $\alpha = q_{\text{Cu}}/q_{\text{SL}}$  beschrieben, mit  $q_{\text{Cu}}$  = Kupferquerschnitt und  $q_{\text{SL}}$  = Supraleiterquerschnitt. Selbst wenn die zulässigen Stromdichten für Normalleiter mit 10<sup>3</sup> A/cm<sup>2</sup> angesetzt werden, ist die Stromtragfähigkeit von Supraleitern immer noch um mehr als 10<sup>2</sup> größer als die von Normalleitern. Praktisch brauchbare Formen von Hochtemperatur-Supraleitern (Stickstoffkühlung) haben Fertigungs- und Anwendungsprobleme da sie nicht einfach als Drähte sondern nur als (schmale) Bänder hergestellt werden können, die einen geeigneten Träger benötigen. Der Einsatz von Supraleitern für die Anwendung in Energieübertragungssystemen, Motoren und Generatoren befindet sich daher noch im Versuchsstadium.

## IV Magnetische Leitfähigkeit

### 1 Modellvorstellung

Die zur elektrischen Elementarladung äquivalente magnetische Größe ist das *Bohrsche Magneton*

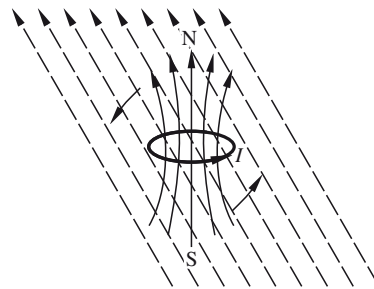
$$\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2 \quad (1 \text{ A} \cdot \text{m}^2 = 1 \text{ J/T})$$

Im Gegensatz zur „einpolygonen“ Elementarladung ist das Bohrsche Magneton zweipolig und damit ein *magnetischer Dipol* mit Nord- und Südpol. Die gleichfalls benutzte Bezeichnung *magnetisches Moment* geht auf die Tatsache zurück, dass die magnetischen Dipole nur verdreht, aber nicht verschoben werden können.

Zur Modellvorstellung des magnetischen Dipols ist in Bild IV-1 die Magnetpolbildung eines *Ringstromes* dargestellt (die unvollständig gezeichneten Feldlinien sollen die Vorstellung erleichtern). Gelangt die Anordnung in ein magnetisches Feld (gestrichelt in Bild IV-1), so wird der Dipol eine Drehbewegung ausführen, ohne den Platz zu verlassen. Die Größe des für die Drehbewegung notwendigen Drehmomentes  $M$  folgt aus

$$M = m_B \cdot B \cdot \sin \alpha \quad \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} M & m_B & B & \sin \alpha \\ \hline \text{J} & \text{J/T} & \text{T} & 1 \end{array} \right| \quad (\text{IV.1})$$

Hierbei ist  $B$  die Flußdichte,  $m_B$ , das *magnetische (Dipol-)Moment* und  $\alpha$  der (kleinste) Winkel zwischen „Magnet“ und Feld. Wichtig ist das magnetische Moment  $m_B$ , des Modells, dessen Betrag sich als Strom multipliziert mit der umrandeten Fläche ergibt. Betrachtet man den Stromring als Elektronenbahn und die Fläche als zum Bahnradius gehörig, so ist das damit verkoppelte magnetische Moment als *Bahn-*



Magnetfeld  
von einem Nordpol kommend

**Bild IV-1** Kreisstrom (stromdurchflossener Ring) als magnetischer Dipol

*moment* zu deuten. Der mechanisch als Eigenrotation gedeutete Spin der Elektronen führt dementsprechend zum *Spinmoment*. Alle magnetischen Erscheinungen der Materie, die für den praktischen Gebrauch bedeutsam sind, gehen damit auf die Überlagerung von Spin- und Bahnmomenten zurück.

## 2 Verhalten von Materie im Magnetfeld

Messzahl für die Reaktion eines Werkstoffes auf ein Magnetfeld, d.h. seine magnetische Leitfähigkeit ist entweder die *Permeabilität*  $\mu$  oder die (*magnetische*) *Suszeptibilität*  $\chi_m$ . Für den freien Raum gilt – unter Verzicht auf die Kennzeichnung des Vektorcharakters von Flussdichte  $B$  und magnetischer Feldstärke  $H$

$$B = \mu_0 \cdot H \quad \left| \begin{array}{c|c|c} B & H & \mu_0 \\ \hline T & A/m & Vs/Am \end{array} \right| \quad (IV.2)$$

mit  $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6}$  Vs/Am (bzw. H/m). Für den materieerfüllten Raum ist eine multiplikative oder additive Beschreibung möglich:

$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H \quad \text{bzw.} \quad B = \mu_0 \cdot H + J \quad (IV.3a \text{ und } b)$$

$B$  ist die erreichte Flussdichte in Vs/m<sup>2</sup> oder  $T$  und  $H$  das erregende magnetische Feld in A/m.  $J$  ist die mit  $B$  dimensionsgleiche *magnetische Polarisation*. Die relative Permeabilitätszahl  $\mu_r$  ist der Multiplikationsfaktor für die Flussdichte im materieerfüllten Raum gegenüber dem Vakuum. Die Polarisation  $J$  gibt den auf die Materie entfallenden Flussdichteanteil an, der zusätzlich zum Anteil  $\mu_0 H$  des Vakuums auftritt. Aus Gl. IV.3 folgt:

$$\mu_r = 1 + \frac{J}{\mu_0 H} = 1 + \frac{M}{H} = 1 + \chi_m$$

$$\left| \begin{array}{c|c|c} J, M & H & \mu_0 \\ \hline T & A/m & Vs/Am \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c|c} \mu_r, \chi_m \\ \hline 1 \end{array} \right| \quad (IV.4)$$

Mit  $\chi_m$  = Suszeptibilität(szahl) und  $M = J/\mu_0$  = *Magnetisierung*.  $M$  ist der Feldstärkeanteil, der für die zusätzliche Flussdichte in der Materie aufzubringen ist. Der für die Praxis wichtige Zusammenhang zwischen  $J$  und  $B$  folgt aus Gl. IV.3 zu

$$J = B - \mu_0 H \quad \left| \begin{array}{c|c|c|c} J & B & H & \mu_0 \\ \hline T & T & A/m & Vs/Am \end{array} \right| \quad (IV.5)$$

**Diamagnetismus:** Trifft ein äußeres Magnetfeld auf die Kreisströme der Elektronenbahnen, so wird – gemäß Lenz'scher Regel (siehe Grundlagen der Elektrotechnik) – ein Feld induziert, das dem erzeugenden entgegen gerichtet ist. Es entsteht ein sog. *induziertes magnetisches Moment*. Dies ist die einfachste Form des Magnetismus, die grundsätzlich in allen Stoffen vorkommt. Das resultierende Feld ist schwächer als das erregende. Materialien, die ausschließlich diesen Effekt zeigen, heißen *diamagnetisch*. Die Suszeptibilität  $\chi_m$  ist negativ, etwa  $-10^{-6}$ . Die Permeabilität  $\mu_r$  ist dann praktisch gleich 1 (Bild IV-2).

Zu den diamagnetischen Stoffen gehören die Edelgase, die nichtmetallischen Elemente – außer O<sub>2</sub> und S<sub>2</sub> – sowie die Metalle Ag, Au, Cd, Cu, Hg, Pb und Zn, ferner die Halbleitermaterialien Ge, Si und Se. Normalerweise ist die Suszeptibilität temperaturunabhängig. Ausnahmen hiervon machen Sb, Bi, Ga, Tl und C (als Graphit).

| Magnetische Momente im kubischen Gitter | vereinfachte Darstellung | Bezeichnung         | $\mu_r$                  | $\chi_m$                 |
|-----------------------------------------|--------------------------|---------------------|--------------------------|--------------------------|
|                                         |                          | diamagnetisch       | $< 1$<br>( $\approx 1$ ) | $< 0$<br>( $\approx 0$ ) |
|                                         |                          | paramagnetisch      | $> 1$<br>( $\approx 1$ ) | $> 0$<br>( $\approx 0$ ) |
|                                         |                          | ferromagnetisch     | $\gg 1$                  | $\gg 0$                  |
|                                         |                          | antiferromagnetisch | $> 1$<br>( $\approx 1$ ) | $> 0$<br>( $\approx 0$ ) |
|                                         |                          | ferri-magnetisch    | $\gg 1$                  | $\gg 0$                  |

**Bild IV-2** Ordnungszustände magnetischer Momente (schematische Übersicht)

↑ magnetisches Moment mit relativer Größe und Richtung

**Paramagnetismus** liegt vor, wenn sich die magnetischen Momente im atomaren Bereich unvollständig kompensieren. Die resultierenden magnetischen Momente mit ihren willkürlichen Orientierungen werden durch ein äußeres Magnetfeld ausgerichtet. Die resultierende Flussdichte ist etwas größer als im Vakuum. Die Suszeptibilität ist positiv mit Werten von etwa  $\chi_m = 10^{-5} \dots 10^{-3}$ . Die Permeabilitätszahl  $\mu_r$  ist damit praktisch nur unwesentlich größer als 1.

Da die Wärmebewegung der Teilchen der ausrichtenden Wirkung des Magnetfeldes entgegenwirkt, ist der Paramagnetismus temperaturabhängig.

**Ferromagnetismus:** Kompensieren sich im atomaren Bereich erst magnetische Momente größerer, gleich ausgerichtetester Gebiete, den sog. *Weiss'schen Bezirken*, *Elementarbereichen* oder *Domänen*, so liegt **Ferromagnetismus** vor. Die Suszeptibilität  $\chi_m$  und

Permeabilität  $\mu_r$  erreichen sehr hohe Werte. Dieser Ausnahmezustand in der Ordnung der Spinnmomente wird durch *Austauschkkräfte* hervorgerufen, denen mit steigender Temperatur die Wärmebewegung der Atome (-rümpfe) entgegenwirkt, so dass ab einer bestimmten Temperatur – der *Curie-Temperatur* – wieder der ungeordnete, d.h. paramagnetische Zustand, vorherrscht.

**Antiferromagnetismus:** Die Austauschkräfte können im Gitter auch zu einer paarweise antiparallelen Ordnung der magnetischen Momente führen. Dieser Ordnungszustand heißt *antiferromagnetisch*. Nach außen hin ist ein solches System durchweg unmagnetisch und verhält sich bei den üblichen Untersuchungen wie ein paramagnetischer Stoff. Auch dieser Ordnungszustand wird thermisch aufgehoben. Die zugehörige Temperatur heißt *Néel-Temperatur*.

**Ferrimagnetismus:** Sind bei antiparalleler Ausrichtung die magnetischen Momente ungleich groß, so verbleibt in einer Richtung ein resultierendes magnetisches Moment, mit ähnlicher Wirkung wie bei ferromagnetischen Materialien. Dieser unvollständig kompensierte Antiferromagnetismus wird *Ferrimagnetismus* genannt.

In Bild IV-2 sind die möglichen Ordnungszustände der magnetischen Momente schematisiert zusammengestellt.

### 3 Magnetisierung

Die Weiss'schen Bezirke sind durch Austauschkopplungen bis zur Sättigung magnetisiert. Diese spontane Magnetisierung erfolgt im Kristallgitter immer nur in den Richtungen der leichten Magnetisierbarkeit, den (*magnetisch*) *leichten Richtungen*. Beim kubischen Gitter des Eisens sind dies z.B. die Würfelkanten. Die Diagonalen dazu sind schwerer zu magnetisieren, d.h. es liegen (*magnetisch*) *schwere Richtungen* vor.

Die Ausrichtung der magnetischen Momente erfolgt wegen der Weiss'schen Bezirke durch *Wandverschiebungen* und *Drehprozesse*. (Bloch-)Wandverschiebungen (Bild IV-3b) sind für Magnetisierungen mit kleinen Feldstärken wichtig. Mit zunehmender Feldstärke müssen auch Bezirke magnetisiert werden, die

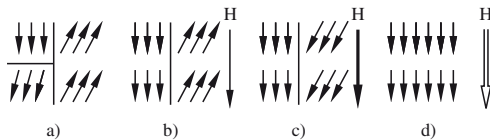


**Bild IV-3** Stufen der Magnetisierung

- a) ungestörter Zustand
- b) (Bloch-)Wandverschiebung
- c) irreversible Drehungen
- d) reversible Drehung

$H$  magnetisierendes Feld zunehmender Stärke

mit dem aufmagnetisierenden Feld Winkel  $>90^\circ$  einschließen. Hierbei treten *irreversible Drehungen* auf, wobei die spontan magnetisierten Bezirke ihre Magnetisierungsrichtung um  $180^\circ$  ändern (Bild IV-3c). Die weitere Ausrichtung bis zur Sättigung erfolgt über einfache *reversible Drehungen* (Bild IV-3d). Die plötzlichen Richtungswechsel der Magnetisierung durch die irreversiblen Drehungen sind auch unter dem Namen *Barkhausensprünge* bekannt.

### 4 Magnetisierungskurve

Der Zusammenhang zwischen der erregenden Feldstärke  $H$  und der daraus im Inneren des Werkstoffes resultierenden Flussdichte  $B$ , d.h. der Addition von  $J$  und  $\mu_0 H$  ist bei Werkstoffen mit hoher Permeabilität im Allgemeinen nicht linear. Der nur experimentell zu ermittelnde Zusammenhang zwischen  $H$  und  $B$  wird durch die *Magnetisierungs-* oder *Hysteresekurve* (-schleife) beschrieben (Bild IV-4). Für einen noch nie magnetisierten (oder einwandfrei entmagnetisierten) Werkstoff beginnt die *Neu-* oder *Kommutierungskurve* im Koordinatenursprung und wird im Anfangsbereich durch Wandverschiebungen (Bild IV-4 a), im Hauptteil durch irreversible Drehungen (Bild IV-4 b) und, im Bereich bis zur Sättigungsflussdichte  $B_s$  (Bild IV-4 c), durch reversible Drehungen bestimmt. Bei gegen Null absinkender Feldstärke sinkt die Flussdichte auf einem höher liegenden Kurvenast (Bild IV-4 d) gegen die *Remanenzflussdichte* (*Remanenzinduktion*)  $B_r$  ab. Dies ist die Auswirkung der irreversiblen Drehungen, die erst durch eine entgegen gerichtete *Koerzitivfeldstärke*  $-H_c$  wieder bis auf  $B = 0$  gebracht werden können. Eine weitere Steigerung von  $H$  in negativer Richtung führt zu einer negativen Sättigungsflussdichte, die ihrerseits erst wieder durch eine positive Koerzitivfeldstärke auf Null gebracht werden kann. Eine Rückkehr zum Koordinatenursprung ist auf diese Weise nicht möglich. Der Werkstoff verfügt über eine Hysterese.

Zur Entmagnetisierung muss von einer Sättigungsflussdichte, Punkt 1 oder 2 in Bild IV-5 mit allmählich

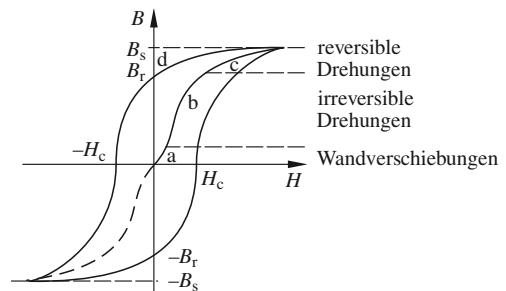


**Bild IV-4** Grundsätzlicher Verlauf und Entstehung einer Magnetisierungskurve oder Hystereseschleife (Erläuterungen im Text)

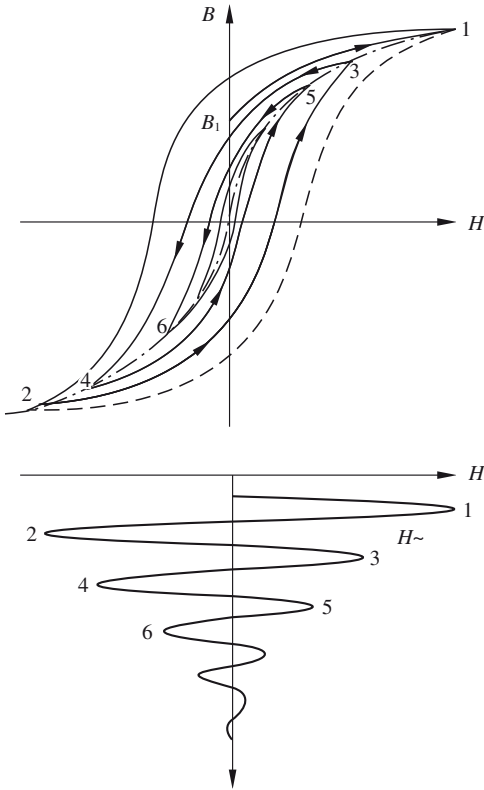


**Bild IV-5** Entmagnetisierung (schematisch)

$B_1$  (Rest-)Vormagnetisierung,  $H_{\sim}$  abklingendes, entmagnetisierendes Wechselfeld, 1, 2, 3, ... Umkehrpunkte auf der Kommutierungskurve, d.h. abklingende Scheitelwerte von  $H_{\sim}$ , - - - - Kommutierungskurve und --- Ergänzung der (äußersten) Hystereseschleife.

absinkenden Feldstärkewerten ständig ummagnetisiert werden. Die gleichfalls mögliche thermische Entmagnetisierung durch Überschreiten der Curie-Temperatur dürfte nur in Sonderfällen anwendbar sein.

**Verluste:** Die Fläche der Hystereseschleife, d.h. das Integral der Funktion  $B$  von  $H$ , stellt eine „Verlustfläche“  $A$  dar. Diese Verluste treten bei jedem Durchlauf der Kurve auf und sind damit der Frequenz  $f$  proportional. Ist die Fläche der Hystereseschleife gleich den Verlusten  $A$  in  $\text{Ws/m}^3$  und das Materialvolumen gleich  $V$ , so ergibt sich die, auf die Masse bezogene, **Hystereseverlustleistung**  $p_h$  zu

$$p_h = \frac{A \cdot f}{\varrho} \quad \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} p_h & A & f & \rho \\ \hline \text{W/kg} & \text{Ws/m}^3 & \text{s}^{-1} & \text{kg/m}^3 \end{array} \right| \quad (\text{IV.6})$$

mit  $\varrho$  = Dichte ( $\text{kg/m}^3$ ). Die elektrische Leitfähigkeit  $\gamma$  der meisten magnetischen Werkstoffe führt zu

**Wirbelstromverlusten**  $p_w$ , die sich, bei der Verwendung von dünnen Blechen der Dicke  $d$  und sinusförmiger Flussdichte  $B$ , nach der klassischen Wirbelstromtheorie ergeben zu:

$$p_w = 1,64 \frac{\gamma}{\rho} (\hat{B} f d)^2$$

|       |          |                   |     |                 |     |
|-------|----------|-------------------|-----|-----------------|-----|
| $p_w$ | $\gamma$ | $\rho$            | $B$ | $f$             | $d$ |
| W/kg  | S/m      | kg/m <sup>3</sup> | T   | s <sup>-1</sup> | m   |

(IV.7)

$\hat{B}$  = Scheitelwert der sinusförmigen Flussdichte und  $\varrho$  = Dichte des Werkstoffes. Damit werden die im Allgemeinen zusammengefassten Verluste  $p$

$$p = p_h + p_w \quad \left| \frac{p}{\text{W/kg}} \right| \quad (\text{IV.8})$$

Bei konstanter Netzfrequenz  $f = 50 \text{ Hz}$  sind die Verluste nur noch von der Blechdicke  $d$  und der Aussteuerung  $B$  abhängig. Da die Blechdicke für den allgemeinen Fall variabel bleiben muss, die Aussteuerung aber bis in den nichtlinearen Bereich durchgeführt wird, ist die Flussdichte mit  $\hat{B} = 1,0 \text{ T}$ ,  $\hat{B} = 1,5 \text{ T}$  und  $\hat{B} = 1,7 \text{ T}$  genormt. Daraus folgen die **Verlustkennziffern**  $p_{1,0}$ ,  $p_{1,5}$  und  $p_{1,7}$ , meist in  $\text{W/kg}$  angegebenen.

## 5 Permeabilität

Eine der wichtigsten Kenngrößen magnetischer Werkstoffe ist die Permeabilität  $\mu$ . Sie gibt den zahlenmäßigen Zusammenhang zwischen Flussdichte  $B$  und Feldstärke  $H$  an:

$$\mu = \frac{\Delta B}{\Delta H} \quad (\text{IV.9})$$

$\Delta$  ist die zur jeweiligen Definition gehörige Differenz. Die Permeabilität  $\mu$  ist in die absolute Permeabilität  $\mu_0$  mit der Einheit  $\text{H/m}$  und eine weiter zu definierende unbenannte Zahl  $\mu_r$  aufzuspalten.

$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r \quad (\text{IV.10})$$

mit

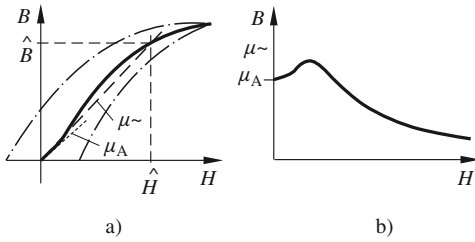
$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am} = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$$

**Anfangspermeabilität** = Steigung im Nullpunkt. Die **Anfangspermeabilität**  $\mu_A$ ,  $\mu_{1A}$  oder  $\mu_i$  (engl.:  $i$  = initial) entspricht der Steigung der Neukurve im Ursprung (Bild IV-6a). Die formale Definition lautet:

$$\mu_A = \mu_i = \frac{1}{\mu_0} \cdot \left. \frac{\hat{B}}{\hat{H}} \right|_{\hat{H} \rightarrow 0} \quad (\text{IV.11})$$

Da mit  $\hat{H} = 0$  keine Messungen mehr durchführbar sind, ist hierfür ein sehr kleiner Wert (einige  $\text{mA/cm}$ ) festgelegt. Ältere Angaben benennen  $p_3$  d.h.  $\hat{H} = 5 \text{ mOe} = 4 \text{ mA/cm}$ . In Anlehnung daran findet man oft auch als Angabe  $\mu_4$ .



**Bild IV-6** Wechselfeldpermeabilität

- a) Definition der Anfangs- ( $\mu_A$ ) und Wechselfeldpermeabilität ( $\mu_-$ ) an der Kommutierungskurve  
 b) Wechselfeldpermeabilität  $\mu_-$  in Abhängigkeit von der magnetischen Feldstärke

*Wechselfeldpermeabilität = Steigung bei großer Aussteuerung. Die Wechselfeldpermeabilität  $\mu_-$  entspricht der üblichen Permeabilitätszahl  $\mu_r$  mit der Definition (Bild IV-6a):*

$$\mu_- = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\hat{B}}{\hat{H}} \bigg|_{\hat{H} \text{ groß}} \quad (\text{IV.12})$$

$\hat{H}$  wird zweckmäßig von  $\hat{H} = 0$  bis zu einem maximalen Wert bei dem  $B_s$  erreicht wird geführt und das Ergebnis als Diagramm über  $H$  aufgetragen (Bild IV-6b). Für  $H = 0$  geht  $\mu_-$  dann in  $\mu_A$  über. Ist zusätzlich zur Wechselfeldaussteuerung noch ein magnetisierendes Gleichfeld  $H_{\pm}$  vorhanden, so ergibt sich die *Überlagerungspermeabilität* (s.a.  $\mu_{\text{rev}}$ ).

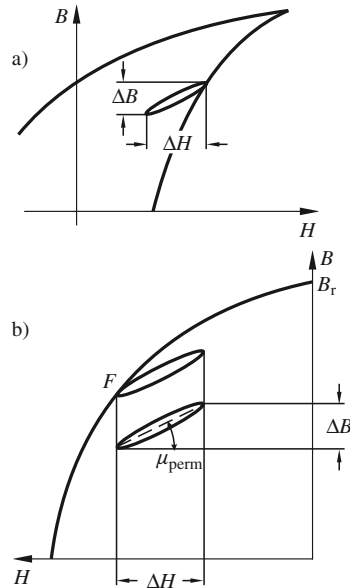
*Reversible Permeabilität = Steigung innerhalb der Hystereseschleife.* Wird ein magnetischer Werkstoff mit einem Gleichfeld  $H_{\pm}$  vormagnetisiert und mit kleinen Wechselfeldstärken angesteuert, so ergeben sich die in Bild IV-7a dargestellten Verhältnisse. Einer inneren Magnetisierungskennlinie folgend, verläuft die Aussteuerung flacher gemäß:

$$\mu_{\text{rev}} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\Delta B}{\Delta H} \bigg|_{\Delta H \rightarrow 0, H_{\pm} \neq 0} \quad (\text{IV.13})$$

$\Delta B$  und  $\Delta H$  liegen dabei immer innerhalb der Hystereseschleife.  $\mu_{\text{rev}}$  sollte meist groß sein, damit trotz Gleichstromvormagnetisierung der magnetische Kreis noch einen genügend großen induktiven Widerstand aufweist.

Ein Sonderfall der reversiblen Permeabilität ist die *permanente Permeabilität*  $\mu_{\text{perm}}$ , die in der Dauermagnetik wichtig ist. Der Arbeitspunkt liegt im 2. (oder 4.) Quadranten (Bild IV-7b). Da bei Dauermagneten die Flussdichte – und deren Konstanz – die entscheidende Größe ist, sollte  $\mu_{\text{perm}} \sim 1$  sein, um bei einem störenden Wechselfeld keine Änderungen des magnetischen Arbeitspunktes zu verursachen.

Die Frequenzabhängigkeit der Permeabilität wird durch die *komplexe Permeabilität*  $\bar{\mu}$  beschrieben. Sie

**Bild IV-7** Permeabilitäten innerhalb der Hystereseschleife

- a) Reversible Permeabilität  
 b) Permanente Permeabilität

ist definiert als

$$\bar{\mu} = \mu' - j\mu'' \quad (\text{IV.14})$$

Mit  $\mu' =$  Permeabilitäts Permeabilität und  $\mu'' =$  Verlust Permeabilität. Der Betrag von  $\bar{\mu}$  liefert die rechnerisch gebräuchliche Permeabilität  $\mu_r$  oder, um auf die Verwendung für die Bestimmung der induktiven Impedanz  $Z$  hinzuweisen,  $\mu_{\text{Z}}$ . Der Quotient aus  $\mu''$  und  $\mu'$  liefert den Verlustfaktor

$$\tan \delta = \frac{\mu''}{\mu'} \quad (\text{IV.15})$$

Die Division durch die Anfangspermeabilität  $\mu_i$  oder  $\mu_A$  liefert den *relativen oder bezogenen Verlustwinkel*

$$\frac{\tan \delta}{\mu_i} \quad (\text{IV.16})$$

Weniger bedeutende Eigenschaften von Werkstoffen im Magnetfeld sind einmal die *Magnetostriktion*, das ist die Änderung der Abmessungen durch ein Magnetfeld, wobei zwischen *Längen-* und *Volumenmagnetostriktion* unterschieden wird, und *multiferroisch* was einer gleichzeitigen ferromagnetischen und ferroelektrischen Eigenschaft des Werkstoffes entspricht. Das Interessante ist dabei die mögliche wechselseitige Steuerung der Effekte „Spannung“ und „Magnetisierung“. Materialien mit diesem Effekt werden unter dem Namen *Multiferroika* geführt.

## V Magnetika

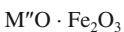
**Tabelle V-1** Übersicht über Magnetika  
(Ohne Anspruch auf Vollständigkeit, Metalloxide ohne  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ )

| Metalle       |      |             |          | Metalloxide (Ferrite) |      |
|---------------|------|-------------|----------|-----------------------|------|
| reine Metalle |      | Legierungen |          |                       |      |
| weich         | hart | weich       | hart     | weich                 | hart |
| Fe            |      | Fe-Si       | Fe-Al-Ni | Mn-Zn-O               | Ba-O |
| Ni            |      | Fe-Ni-Fe    | Al-Ni-Co | Ni-Zn-O               | Sr-O |
| Co            |      | Fe-Co       | Fe-Ni-Cu | Mg-Mn-O               |      |
| (Gd)          |      | Fe-Al       | Fe-Co-V  | Y-O                   |      |
|               |      | Cu-Mn-Al    | Co-Sm    | (Granat)              |      |
|               |      |             | Nd-Fe-B  |                       |      |

Bei den Magnetika werden vom Werkstoff her *Metalle* und deren Legierungen sowie *Metalloxide (Ferrite)* und, nach den Anwendungseigenschaften, *Weich-* und *Hartmagnetika* (Dauermagnete) unterschieden. In Tabelle V-1 ist eine grundsätzliche, aber nicht vollständige, Übersicht der magnetischen Werkstoffe zusammengestellt

### 1 Metalloxide (Ferrite)

*Ferrite* der Elektrotechnik sind chemische Verbindungen des Eisen(III)-oxids  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  mit zweiwertigen Metalloxiden ( $\text{M}''\text{O}$ ) vom allgemeinen Typus



Die Gitterstruktur der am meisten verbreiteten kubischen Ferrite entspricht der des Halbedelsteins *Spinell*. In der normalen kubischen Spinellstruktur mit ihrem flächenzentrierten Sauerstoffionen-Gitter (Bild V-1) befinden sich die zweiwertigen Metallionen

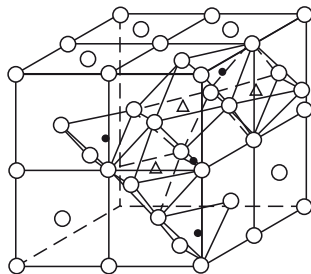


**Bild V-1** Kristallgitter eines Spinells  
○ Sauerstoffion, ● zweiwertiges Metallion und △ dreiwertiges Metallion (zur besseren Übersicht sind die Gitterplätze nur teilweise besetzt)

(Punkte in Bild V-1) auf *Tetraederplätzen* und die dreiwertigen (Dreiecke in Bild V-1) auf *Oktahedern*. Vertauschen die zwei- und dreiwertigen Ionen ihre Plätze, entstehen die *inversen Spinelltypen*. Nur diese und die aus beiden bestehenden Mischtypen liefern magnetische Ferrite. Sie sind vom Prinzip her ferrimagnetisch. Als Metalloxide sind die Ferrite keramische Werkstoffe und daher *elektrische Nichtleiter*.

### 2 Weichmagnetika

Weichmagnetische Werkstoffe sind durch eine Koerzitivfeldstärke von  $H_c < 1 \text{ kA/m}$  gekennzeichnet.

Unter den Elementen kommen nur weichmagnetische Stoffe vor, und zwar die Ferromagnetika Eisen, Nickel, Kobalt sowie das für die Praxis bedeutungslose Gadolinium (Curietemperatur  $16^\circ\text{C}$ ).

**Metalle:** Eisen wird als *Weicheisen* für Relais und als *Karbons-Eisen(pulver)* in geringem Umfang für Hochfrequenzkerne und zur Abbildung von Magnetfeldern (Bittersche Methode) benutzt. Nickel findet rein gelegentlich (im Sättigungsbereich) Anwendung als magnetostriktiver Ultraschallgeber, ansonsten dient es, ähnlich wie Kobalt, als Legierungsbestandteil für verschiedene magnetische Werkstoffe. Von den übrigen Metallen gilt in erster Näherung, dass die Schwermetalle (z.B. Cu, Ag, Bi, Au usw.) diamagnetisch und die Leichtmetalle (z.B. Al, Mg, Na, Ca usw.) paramagnetisch sind.

**Legierungen:** Eisen ist mit verschiedenen Legierungszusätzen wie Si, Ni, Co, Mo u.a. der wichtigste magnetische Werkstoff. Neben den Zusätzen haben auch die Art der Behandlung z.B. warm- oder kaltgewalzt, nachgeglüht usw. erheblichen Einfluss auf



**Tabelle V-2** Bezeichnung von Elektroband

|            |                                                                                                                                                                               |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| M          | M: Europaweit Kennbuchstabe für Elektrobleche                                                                                                                                 |
| mmm        | 100facher höchstzulässiger Magnetisierungsverlust                                                                                                                             |
| dd         | 100fache Blechdicke                                                                                                                                                           |
| Behandlung | A nicht kornorientiert<br>N kornorientiert<br>P kornorientiert, niedrige<br>Ummagnetisierungsverluste<br>D unlegiert, nicht schlussgeglüht<br>E legiert, nicht schlussgeglüht |

die Verluste ( $p_{1,0}$ ,  $p_{1,5}$  bzw.  $p_{1,7}$ ) eines Elektroblechtes. Höherwertige Bleche sind durchweg kornorientiert. Für die Unterscheidung von Elektroblechchen ist gelegentlich noch die veraltete Bezeichnung *Dynamo-blech* mit den Abstufungen *Dyn.-Bl. I ... IV* zu finden. Die heutigen enger tolerierten Anforderungen bedienen sich gemäß DIN 46400 bzw. EN 10027-1:2005 einer Kombination aus Buchstaben und Zahlen nach folgendem Schema: Kennbuchstabe, Verluste, Blechdicke und Behandlung wie in Tabelle V-2 dargestellt.

In der Tabelle V-3 sind für einige nach dem genannten Schema (EN 10027) bezeichnete Werkstoffe, neben der Werkstoffnummer, die Grunddaten zusammengestellt. Bevorzugtes Anwendungsgebiet sind Transformatoren, Motoren und Generatoren. Werkstoffe für Übertrager behandelt DIN IEC 740-2. Der *Kurzname* besteht nach DIN aus einem Buchstaben und Ziffern, wobei, mit im Alphabet fortschreitenden Buchstaben, die Legierungsanteile wachsen. A bedeutet gar nicht oder schwach Si legiert, C definiert mit Si legiert, D sind Ni-Legierungen, E und F sind

**Tabelle V-3** Ektroband, ausgewählte Beispiele nach Thyssen Krupp AG, Vacuumschmelze, Voestalpine

| Kurzname                                   | Werkstoff-<br>nummer | Firmen-<br>bezeichnung | $\frac{d}{\text{mm}}$ | Verluste $p_{\text{max}}$     |                               |                               | Polarisation $J/T$ bei       |                              |                              |                               |
|--------------------------------------------|----------------------|------------------------|-----------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|-------------------------------|
|                                            |                      |                        |                       | $\frac{p_{1,0}}{\text{W/kg}}$ | $\frac{p_{1,5}}{\text{W/kg}}$ | $\frac{p_{1,7}}{\text{W/kg}}$ | $\frac{H_{25}}{\text{A/cm}}$ | $\frac{H_{50}}{\text{A/cm}}$ | $\frac{H_{80}}{\text{A/cm}}$ | $\frac{H_{100}}{\text{A/cm}}$ |
| Nicht kornorientiert, nicht schlussgeglüht |                      |                        |                       |                               |                               |                               |                              |                              |                              |                               |
| M1300-100A                                 | 1.0897               |                        | 1,00                  | 5,80                          | 13,0                          |                               | 1,62                         | 1,70                         |                              | 1,79                          |
| M450-65K                                   | 1.0843               |                        | 0,65                  | 1,92                          | 4,50                          |                               | 1,56                         | 1,64                         |                              | 1,74                          |
| M340-50K                                   | 1.0841               |                        | 0,50                  | 1,42                          | 3,4                           |                               | 1,54                         | 1,62                         |                              | 1,72                          |
| Nicht kornorientiert, schlussgeglüht       |                      |                        |                       |                               |                               |                               |                              |                              |                              |                               |
| M530-65A                                   | 1.0824               |                        | 0,65                  | 2,30                          | 5,30                          |                               | 1,54                         | 1,64                         |                              | 1,74                          |
| M350-50A                                   | 1.0810               |                        | 0,50                  | 1,50                          | 3,50                          |                               | 1,50                         | 1,60                         |                              | 1,70                          |
| M250-35A                                   | 1.0800               |                        | 0,35                  | 0,95                          | 2,50                          |                               | 1,49                         | 1,60                         |                              | 1,70                          |
| Kornorientiert, geglüht                    |                      |                        |                       |                               |                               |                               |                              |                              |                              |                               |
| M150-35S                                   | 1.0861               | PowerCore C150-35      | 0,35                  |                               | 1,05                          | 1,50                          |                              |                              | 1,78                         |                               |
| M140-27S                                   | 1,0865               | PowerCore C 140-27     | 0,27                  |                               | 0,89                          | 1,40                          |                              |                              | 1,75                         |                               |
| M110-23S                                   | 1.0863               | PowerCore C 110-23     | 0,23                  |                               | 0,73                          | 1,10                          |                              |                              | 1,78                         |                               |
| M105-30P                                   | 1.0886               | PowerCore H 105-30     | 0,30                  |                               |                               | 1,05                          |                              |                              | 1,88                         |                               |
| M95-27-P                                   | 1.0839               | PowerCore H 095-27     | 0,27                  |                               |                               | 0,95                          |                              |                              | 1,88                         |                               |
| M85-23-P                                   | 1.0882               | PowerCore H 085-23     | 0,23                  |                               |                               | 0,85                          |                              |                              | 1,88                         |                               |

**Tabelle V-4** Hochpermeabele Legierungen. Typische Beispiele aus Unterlagen von Thyssen Krupp AG und VAC Vakuumschmelze

| Kurzname       | Firmenname    | Chemischer Aufbau                                                     | $\frac{d}{\text{mm}}$ | Verluste<br>$\frac{P_{1,0}}{\text{W/kg}}$ | $\frac{H_c}{\text{A/m}}$ | $\frac{B_s}{\text{T}}$ | $\frac{\rho}{\mu\Omega\text{m}}$ | $\frac{T_c}{^\circ\text{C}}$ | $\mu_4$ | $\mu_{\text{max}}$ |
|----------------|---------------|-----------------------------------------------------------------------|-----------------------|-------------------------------------------|--------------------------|------------------------|----------------------------------|------------------------------|---------|--------------------|
| A12)           | Vacofer S1    | Fe (Reineisen)                                                        | 0,35                  | 1,0                                       | <12                      | 2,03                   |                                  | 770                          | 2000    | 40000              |
| C1–24          | Trafoperm N3  | Si <sub>3</sub> %Fe                                                   | 0,35                  | 0,85                                      | <24                      | 2,03                   | 0,4                              | 750                          | 1000    | 30000              |
| D1a            | Magnifer 36   | Ni <sub>36</sub> %Fe                                                  | 0,35                  | 1,1                                       | <15                      | 1,3                    | 0,75                             | 260                          | 2300    | 20000              |
| E4             | Magnifer 75   | FeNi <sub>36</sub> %Cu <sub>5</sub> %                                 | 0,2                   | 1,1                                       | <2                       | 0,8                    | 0,55                             | 400                          | 40000   | 115000             |
| E11            | Magnifer 7904 | FeNi <sub>80</sub> %Mo <sub>5</sub> %                                 | 0,2                   |                                           | <1                       | 0,8                    | 0,45                             | 410                          | 200000  | 350000             |
| E11–60         | Mumetall      | FeNi <sub>80</sub> %                                                  | 0,2                   | 0,1                                       | 0,04                     | 0,8                    | 0,55                             | 400                          | 60000   | 150000             |
| F11            | Vacoflux 50   | FeCo <sub>50</sub> %                                                  | 0,35                  | 1,0                                       | <0,8                     | 2,1                    | 0,44                             | 950                          | 1000    | 13000              |
| amorph         | Vitrovac 6030 | FeCo <sub>80</sub> %                                                  | 0,02                  | 40 <sub>100 kHz</sub>                     | 0,03                     | 0,8                    | 1,30                             | 365                          | 20000   | 100000             |
| nanokristallin | Vitroperm     | Fe <sub>73</sub> %Si <sub>15</sub> %B <sub>7</sub> %Nb <sub>3</sub> % | 0,02                  | 35 <sub>100 kHz</sub>                     | <3                       | 1,2                    | 1,1                              | 600                          | 10000   | 150000             |

hoch nickelhaltig und noch weiter legiert. Die Tabelle V-4 gibt eine Übersicht über einige Werkstoffe dieser Klasse. IEC benutzt 3 Buchstaben, beginnend mit Y und Ziffern. Zusätzlich zu den DIN-Bezeichnungen haben alle Magnetwerkstoffe noch Eigennamen der Hersteller, z.B. Vacofer für *Werkstoffe der Klasse A*, Mumetall aus Klasse E oder Vacuflux bei Klasse F von der Firma *Vakuumschmelze GmbH*. Nickel ist, wie Tabelle V-4 zeigt, von größtem Einfluss auf die magnetischen Eigenschaften von Eisen. Während ca. 75 % Ni einen hochpermeablen Werkstoff mit  $\mu_A > 10^4$  liefert, sinkt bei ca. 25 ... 30 % Ni die Curie-Temperatur unter die Raumtemperatur, so dass *unmagnetische Stähle* entstehen. Für die Technologie ist die gute Auswalzbarkeit von Fe-Ni-Legierungen bis in den Bereich von  $d \approx 50 \mu\text{m}$  wichtig. Für extrem dünne Schichten im  $\mu\text{m}$ -Bereich der Halbleitertechnologie sind hochpermeable Legierungen mit 78% Ni aufdampfbar.

*Amorphe Metalle:* Unter dieser Bezeichnung oder auch unter dem Namen *Metallgläser* werden weichmagnetische Werkstoffe mit extremen Eigenschaften geliefert. Es handelt sich dabei um Legierungen auf Fe–Ni- bzw. Co–Ni–Fe-Basis, die nicht kristallin sind! Diese Eigenschaft wird durch eine außerordentlich hohe Abkühlgeschwindigkeit von ca.  $10^6 \text{ K/s}$  d.h.  $1000 \text{ K/ms}$ , beim Erstarren aus der Schmelze mit bis zu 25 % kristallisationsverzögernde Zusätze erreicht. So ist z.B. die Co–Ni–Fe-Legierung der Fa. Vakuumschmelze GmbH als  $\text{O}_{50}\text{Ni}_{20}\text{Fe}_6\text{Si}_{12}\text{B}_{12}$  aufgebaut. Die bestechendste Eigenschaft derartiger, in Folienstärke um  $20 \mu\text{m}$  anfallender, Werkstoffe ist die hohe Permeabilität. Im Gegensatz zu anderen Weichmagnetika weisen diese Werkstoffe aber erhebliche Härte- ( $\sim 1000 \text{ HV02}$ ) und Zugfestigkeitswerte ( $R_m \sim 2 \text{ kN/mm}^2$ ) auf. Die thermische Belastbarkeit ist nicht durch die Curie-Temperatur, sondern durch die Kristallisationstemperatur von ca.  $400 \dots 500 \text{ }^\circ\text{C}$

begrenzt. Die bei anderen hochpermeablen Materialien gefürchtete Empfindlichkeit gegen mechanische Beanspruchungen tritt bei amorphen Metallen nicht auf.

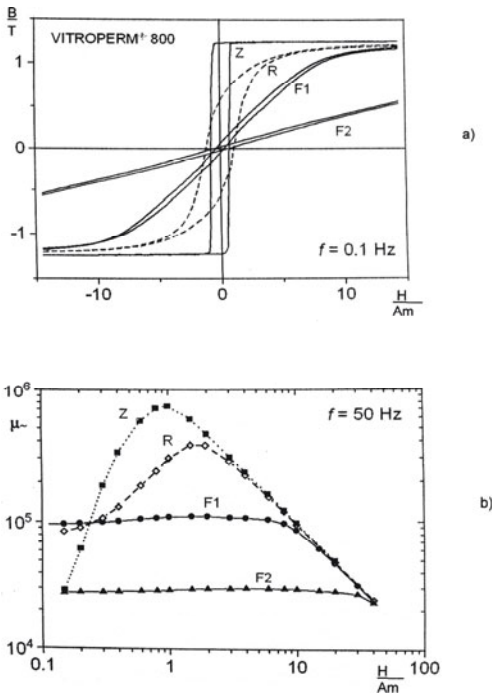


**Bild V-2** Nanokristallines Material  
a) Hysteresekurven unterschiedlich wärmebehandelten nanokristallinen Materials  
b) Wechselfeldpermeabilität der Materialien nach a). (Aus Unterlagen der Vakuumschmelze nach Elsevier „Handbook of Magnetic Materials“ bzw. „Soft Magnetic Alloys“)

Wird die Kristallisationsgeschwindigkeit in den Bereich von etwa 10 K/sec „verlangsamt“ oder ein amorphes Material geeignet wärmebehandelt entsteht *nanokristallines* Material mit Kristallen in der Größenordnung von etwa 10 nm. Die Materialstärke beträgt unverändert etwa 20  $\mu\text{m}$ . Der hochpermeable Zustand ergibt sich erst nach einer Wärmebehandlung die ein starkes Verspröden des Materials bewirkt. Eine mechanische Behandlung ist danach effektiv nicht mehr möglich. Je nach Wärmebehandlung und mit oder ohne Magnetfeldanwendung entstehen unterschiedliche Hysteresekurven mit rechteckigem (Z), rundem (R) oder flachem (F) Verlauf (Bild V-2a). Die daraus bei der Magnetisierung resultierenden

unterschiedlichen Wechselfeldpermeabilitäten zeigt Bild V-2b.

**Kernbleche:** Während für Großtransformatoren die Kernbleche aus Plattenmaterial dem jeweiligen Bedarf entsprechend zugeschnitten werden, ist für Kleintransformatoren die Anwendung vorgefertigter Kerne bzw. Kernbleche zweckmäßiger (EN 60740-1:2005). Material- und fertigungsmäßig sind die abfalllosen *YEI*- (Bild V-3a) bzw. *YUI*-Schnitte (Bild V-3g) besonders günstig. In Varianten zu diesen Schnitten werden die  $I_s''$  durch ein mehr oder weniger vollständiges  $E$  (Bild V-3b) bzw.  $U$  ersetzt. Es entstehen dann *EE*- bzw. *UU*-Formen, bei denen die Luft-

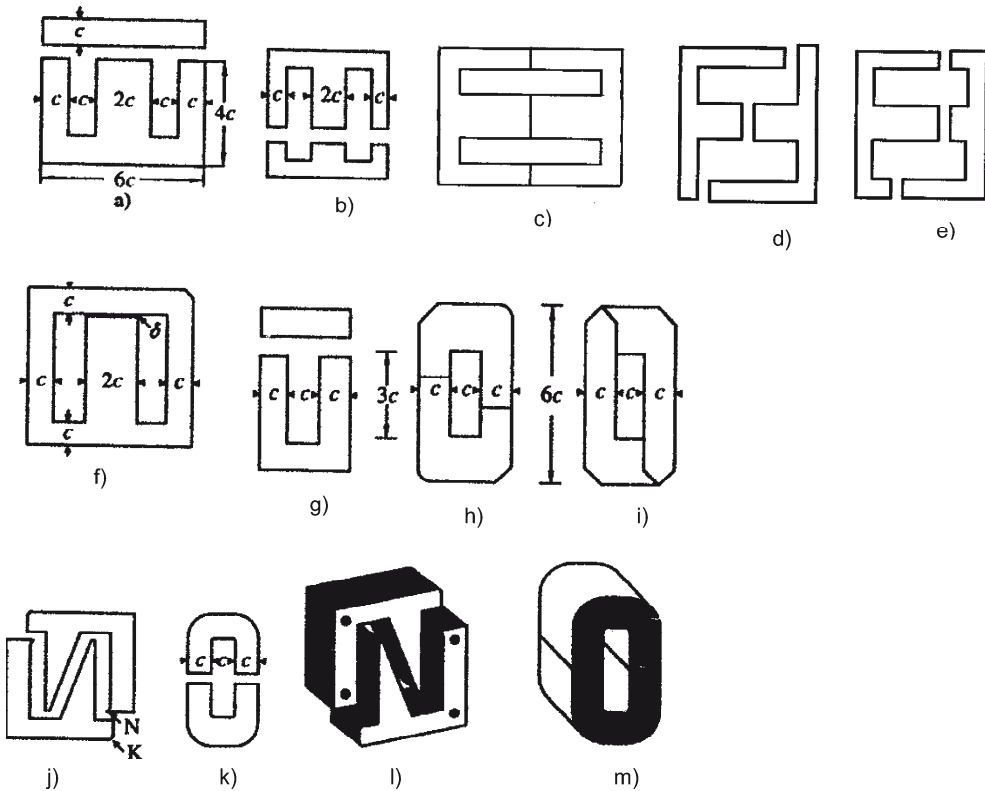


**Bild V-3** Blechschnitte für Kleintransformatoren

- a) YEI EI-Kernblech (abfallarm)
- b) bis e) E-Kernblechvariationen
- c) YEE2, EE-Bleche unterschiedlicher Länge, besonders auch kürzere Formen
- d) YEE2L EE-Kernbleche doppelter Länge
- d) YEF F-Form der Schenkel des E-Blechtes
- e) YEL L-Form der Schenkel eines E-Blechtes
- f) YM M-Kernblech oder Mantelkernblech mit oder (fast) ohne Luftspalt  $\delta$
- g) YUI UI-abfallarme UI-Kernbleche
- h) Philbertkernblech PU
- i) Philbertkernblech PL
- j) und l) Steckkern(blechpaket)
- k) und m) Schnittbandkern

spalte der Kerne innerhalb der Wicklungen liegen. In V-3 sind in d) und e) (nach EN 60740-1:2005) weitere Variationen zu EE-Kernblechen dargestellt. Die Kennzeichnung mit YEF bzw. YEL lehnt an die modifizierte Form des „zweiten“ Es an. Eine spezielle Variante der E-Kernform ist der Drehstrom-E-Kern, mit drei gleich breiten Stegen. Eine verarbeitungsmäßig aufwendige, für geringe Luftspalte aber beste Kernblechform ist der *YM-Schnitt* (Bild V-3f). Der Luftspalt  $\delta$  kann von „klemmender Zunge“, d.h. verschwindendem Luftspalt, bis zu einer Breite von mehreren Millimetern variiert werden. Um die Lage der Bleche auch im fertigen Transformator kontrollieren zu können, sind die Bleche an einer Ecke (oben rechts in Bild V-3f) abgezeichnet. *Philbertschnitte* in PU- (Bild V-3h) oder in PL-Form (Bild V-3i), mit den verbreiterten Querstegen in den magnetisch schweren Richtungen, nutzen bei *Gosstexturen* (leichte Richtungen längs, schwere Richtungen quer und in Dickenrichtung der Bleche) das Material besser aus. Die beste Ausnutzung der Gosstextur liefert der herstellungs- und verarbeitungsmäßig aufwändige *Schnittbandkern* (Bild V-3k und m). Der für das Einbringen in die Wicklungen geteilte Kern ist an den Trennflächen sorgfältig geschliffen und muss in der Fertigung immer wieder mit den einander zugehörigen Flächen zusammengebracht werden.

Für rationelle Fertigungen sind fertig geklebte Blechpakete in EE-Form oder als *Steckkerne*, die über Kerben (K) und Vorsprünge (N) einrastend zusammenhalten (Bild V-3j und l), trotz magnetisch ungünstigerer Eigenschaften (Luftspalt) vorteilhaft.

Um die durch dünne Bleche niedrig gehaltenen Wirbelströme auch in einem Blechpaket klein zu halten, sind die einzelnen Bleche elektrisch voneinander zu isolieren. Diese Maßnahme hat einen Verlust an Eisenquerschnitt zur Folge, der durch den *Eisenfüllfaktor* gekennzeichnet wird. Er gibt den relativen Anteil des Eisens an der gesamten magnetischen Querschnittsfläche an. Mit sinkender Blechdicke sinkt auch der Füllfaktor, da die Isolation nicht beliebig dünn gemacht werden kann. Für die üblichen Blechdicken von 0,25 ... 0,5 mm liegt der Eisenfüllfaktor bei 95 %. Er kann bei sehr dünnen Blechen bis etwa 35 % absinken.

**Weichmagnetische Ferrite:** Wegen der Nichtleiter-eigenschaften der Ferrite, und den damit fehlenden Wirbelstromverlusten, sind sie besonders für hohe Frequenzen und die Nachrichtentechnik interessant. Die praktisch genutzten Werkstoffe sind alle sog. *Mischferrite*. Dementsprechend auch die Bezeichnungen wie Mn-Zn-Ferrit o.ä. Für Ferrite typisch sind die geringen Sättigungsflussdichten von ca. 0,3 ... 0,5 T. Als keramische Werkstoffe sind sie mit  $\rho = 3 \dots 5 \text{ g/cm}^3$  von geringer Dichte, absolut *korrosionsbeständig* und *schlechte Wärmeleiter*. Die bei hohen Aussteuerungen auftretende Verlustwärme ist demgemäß schwierig abzuführen. Wegen der Frequenzabhängigkeit werden die Verluste in Diagram-

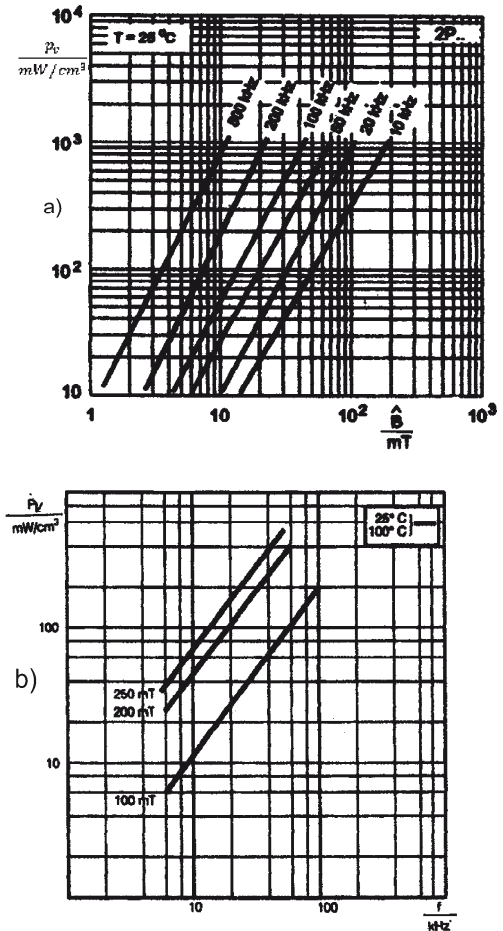


**Bild V-4** Darstellung der Kernverlustleistung  $p_v$  bei Ferriten

- a) Verlustleistung in  $\text{mW/cm}^3$  in Abhängigkeit von der Spitzenflussdichte mit der Frequenz als Parameter (Ferroxcube 2P ... von Philips)
- b) Verlustleistung in  $\text{mW/cm}^3$  in Abhängigkeit von der Frequenz mit der Spitzenflussdichte als Parameter (Ferritmaterial B1 von Neosid)

men über der Aussteuerung (Bild V-4a) mit der Frequenz als Parameter oder über der Frequenz (Bild V-4b) mit der Aussteuerung als Parameter dargestellt. Zu beachten ist noch die bei tiefen Frequenzen oft sehr hohe *Permittivitätszahl* der Ferrite, die bei hohen Frequenzen stark absinkt.

Wegen des möglichen Einsatzes von Ferriten auch bei höheren Frequenzen ist die komplexe Permeabilität bedeutsam. Bild V-5 zeigt hierzu das Beispiel eines Mn-Zn-Ferrites, wobei deutlich wird, dass die Verlustpermeabilität zwischen 4 und 5 MHz die Permeabilitätspermeabilität übersteigt und der Werkstoff mehr Verluste, d.h. Dämpfung verursacht als Induktivitätsanstieg.

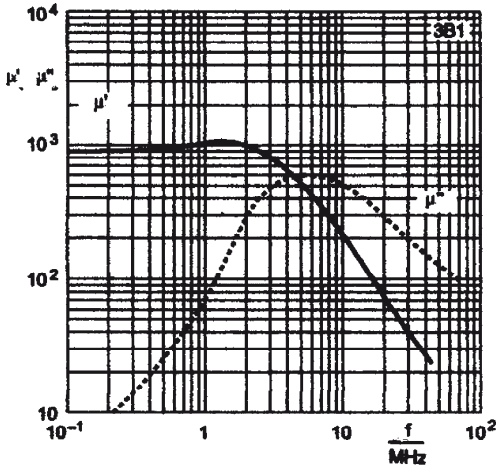


**Bild V-5** Komplexe Permeabilität eines MnZn-Ferrites (Ferroxcube 3B1 von Philips)

*Mn-Zn-Ferrite* sind hochpermeabel mit  $\mu_r$ -Werten von 1000 bis gegen 10000. Ihre elektrische Leitfähigkeit ist mit  $\gamma = 1 \text{ S/m}$  für Ferrite hoch, ebenso die Sättigungsflussdichte mit 0,5 T. Sie sind aus diesen Gründen in geringem Maße auch für Leistungsübertrager geeignet

*Ni-Zn-Ferrite* sind die verbreitetsten Ferrite überhaupt. Die Anfangspermeabilität liegt bei  $\mu_i \approx 100 \dots 1000$ . Der nutzbare Frequenzbereich reicht bis oberhalb 100 MHz. Wegen der geringen elektrischen Leitfähigkeit von  $\gamma \approx 10^{-5} \text{ S/m}$  kann in vielen Fällen die Wicklung direkt ohne Zwischenisolation auf den Ferritkörper aufgebracht werden.

*Ba-Co-Ferrite* können noch, allerdings mit erheblichen Verlusten, bis zu sehr hohen Frequenzen genutzt werden. Sie finden daher bevorzugt für Entstördrosseln Verwendung.

**Kernformen:** Die Bauformen der ferritischen E-Kerne (Bild V-6a) schließen an die entsprechenden Blech-

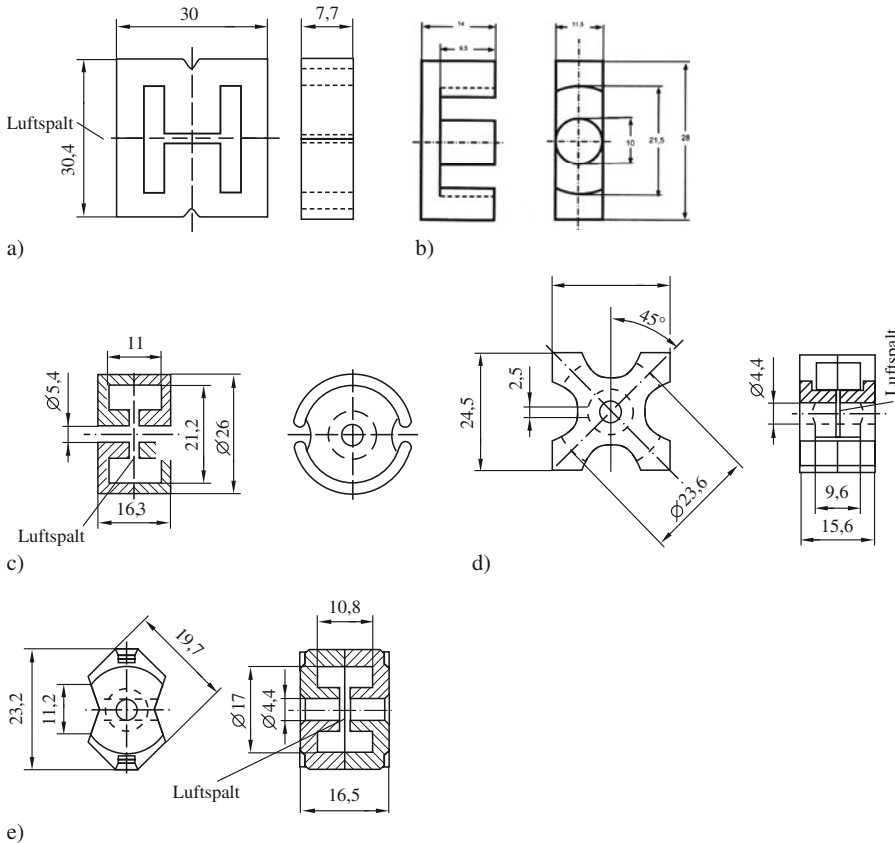


**Bild V-6** Einige Ferritkerne mit ihren Hauptabmessungen

- a) E-Kern: E30
- b) EER Kern EER28 (E-Kern für Rundspulen)
- c) Schalenkern: S26  $\times$  16
- d) X-Kern: X26
- e) RM-Kern: RM8

schnitte an und sind so ausgelegt, dass sie in die Wickelkörper der Blechkörper passen. Für höhere Frequenzen kommen dann die Spulenkörper in Form von *Schalen-, X- und RM-Kernen* in Frage (Bild V-6c, d und e). X- und RM-Kerne sind Bauformen, die dem geringen Platzangebot in gedruckten Schaltungen besser entsprechen als die Rundformen. EER-Kerne ermöglichen eine Rundspule für die Wicklung auf einem quasi EE Kern. Darüber hinaus gibt es noch eine große Anzahl verschiedener Kernformen wie Stäbe, Schraubkerne, Ein- und Mehrlochkerne usw.

### 3 Hartmagnetika (Dauermagnete)

Hartmagnetisch ist ein Werkstoff mit  $H_c \approx 1 \text{ kA/m}$  (10 A/cm). Da die in einem Dauermagneten gespeicherte Energie über die Fläche der Hystereseschleife zum Ausdruck kommt, sollte diese und damit  $B_r$  und  $H_c$  groß sein. Die Energiedichte, das Produkt aus korrespondierenden  $B$ - und  $H$ -Werten, weist ein Maximum, das *Energieprodukt*  $(B \cdot H)_{\max}$  auf (Bild V-7b). Es ist ein für einen Magnetwerkstoff charakteristischer Wert.

*Entmagnetisierungskurve* (Bild V-7a): Sie ist mit dem reversiblen Bereich I, dem Knickbereich II und dem irreversiblen Bereich III in unterschiedliche Nutzungsbereiche aufgeteilt. Im reversiblen Bereich, mit seinem linearen Teil, erfolgen Arbeitspunktänderungen – z.B. durch äußere Felder – auf dieser Kennlinie. Im Knickbereich und auch im irreversiblen Bereich verlagern äußere Felder den Arbeitspunkt auf innere Kennlinien der Entmagnetisierungskurve. Diese ist bei Dauermagnetwerkstoffen häufig als Polarisationskurve, d.h.  $J = f(H)$  dargestellt. Bild V-8 zeigt die Zusammenhänge hierzu, indem von der bekannten  $B = f(H)$ -Kurve (dick ausgezogen) die Vakuumflussdichte,  $\mu_0 H$  abgezogen ist. Während der Remanenzpunkt für beide Kurven gleich bleibt, ist die

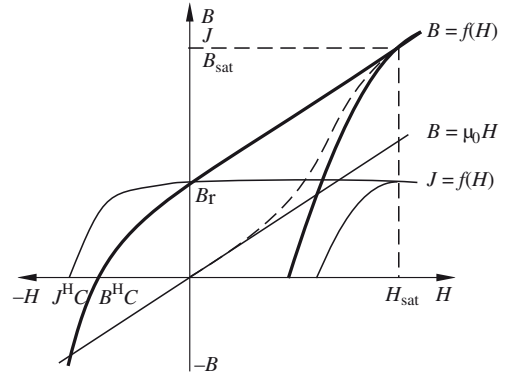


**Bild V-8** Zusammenhang zwischen Flussdichte  $B$  und Polarisation  $J$  (Erläuterungen im Text)

Koerzitivfeldstärke unterschiedlich. Bei der Koerzitivfeldstärke  $B_r H_c$  (oder  $H_{cb}$ ) wird die Flussdichte  $B$ , d.h. die Flussdichte des Systems auf Null gebracht. Bei der Koerzitivfeldstärke  $J_c H_c$  (oder  $H_{cj}$ ) wird die dem Werkstoff zugehörige Polarisation auf Null gebracht. Aus diesem Grunde ist für die Werkstoffcharakterisierung bei Dauermagneten die Kurve  $J = f(H)$  wichtig. Im Idealfall würde  $J_c \rightarrow \infty$  und die Sättigungspolarisation  $J_s$  gleich der Remanenzflussdichte  $B_r$  werden, die einem äußeren Feld  $\mu_0 H$  entgegenwirkt. Die Flussdichte  $B$  des (idealen) Gesamtsystems wird dann

$$B = B_r - \mu_0 H \quad (\text{V.1})$$

Damit fällt die „ideale Entmagnetisierungskennlinie“ linear von  $B_r$  bis  $B_r H_c = B_r / \mu_0 H$  mit der Steigung der idealen permanenten Permeabilität  $\mu_{\text{perm}} = 1$  ab. Die Entmagnetisierungskurve als  $B = f(H)$  stellt die im Allgemeinen nichtlineare *Innenleitwertkennlinie* des Werkstoffes dar. Der jeweilige Innenleitwert  $A_i$  folgt dann zu

$$A_i = \mu_0 \cdot \mu_p \quad (\text{V.2})$$

$\mu_p$  = Permeabilität des Magnetwerkstoffes im Arbeitspunkt. Für ein Dauermagnetfeld in Luft gilt aber  $\mu_r = 1$ , d.h. bei Anpassung eines Dauermagnetwerkstoffes an Luft muss ein Arbeitspunkt gefunden werden, bei dem  $\mu_p = \mu_r = 1$  ist! Ein guter Dauermagnetwerkstoff muss also eine Entmagnetisierungskennlinie aufweisen, die möglichst weit oberhalb und gut parallel zur Geraden  $B = \mu_0 H$  (in Bild V-9 gestrichelt und zum besseren Vergleich aus dem Nullpunkt verschoben) verläuft.

*FeAlNi- und FeAlNiCo-Legierungen* (Bild V-9a und b) mit Energieprodukten von 10 ... 30 kJ/m<sup>3</sup> sind auch heute noch die wichtigsten Magnetwerkstoffe. Es handelt sich hierbei um Ausscheidungslegierungen, die erst durch eine Wärmebehandlung (Tempern), gegebenenfalls unter Einwirkung eines Magnetfeldes

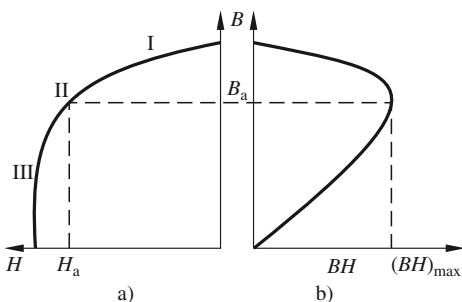


**Bild V-7** Entmagnetisierungskurve und Energiedichte

- Entmagnetisierungskurve im 2. Quadranten, I reversibler Bereich, II Knickbereich, III irreversibler Bereich,  $B_a$  und  $H_a$  Flussdichte bzw. Feldstärke im Arbeitspunkt
- Energiedichte  $B \cdot H$  in Abhängigkeit von der Flussdichte, mit höchster Energiedichte  $(B \cdot H)_{\max}$



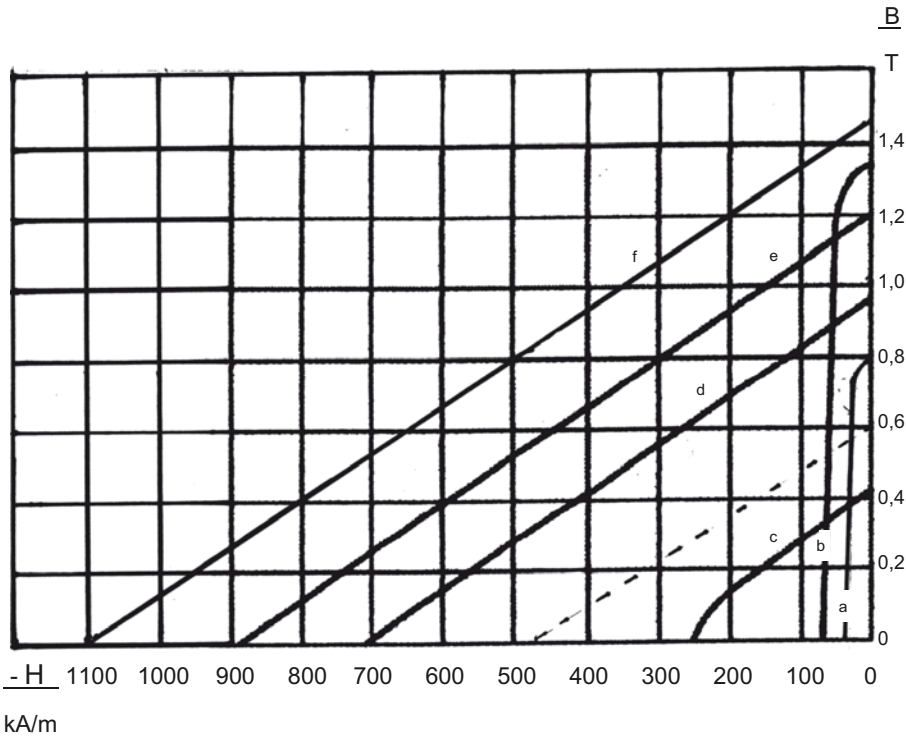


**Bild V-9** Entmagnetisierungskurven einiger Hartmagnetika

- a) AlNi120  
b) AlNiCo700

(Formanisotropie), die gewünschten Eigenschaften erhalten. Diese Legierungen sind sehr hart und nur durch Schleifen zu bearbeiten.

**Selten-Erd-Magnete** oder SECo-Magnete (Bild V-9d), mit Energieprodukten von  $200 \text{ kJ/m}^3$  und mehr, ist eine Kurzbezeichnung für Magnetwerkstoffe auf der Basis Seltene Erdmetalle-Kobalt. Wichtigster Vertreter der Seltenen Erden ist dabei Samarium (Sm). Die permanente Permeabilität erreicht bei diesen Materialien sehr genau den Wert 1.

Aus Seltenerd-Magneten entwickelten sich die Neodym-Eisen Systeme, die als NdFeB noch höhere Energiedichten erreichen und die z.Z. „besten Magnete“ liefern. Die theoretische Grenze dieser Systeme liegt bei  $485 \text{ kJ/m}^3$ . Erreicht sind z.Z. etwa  $400 \text{ kJ/m}^3$  (Bild V-9f).

**Hartmagnetische Metalloxide (Ferrite):** Die hartmagnetischen Ferrite haben, genau wie die weichmagnetischen, eine geringe Dichte, hohe Korrosionsbeständigkeit, geringe Remanenzflussdichte und niedrige Curie-Temperatur. Bild V-9 zeigt in c eine Entmagnetisierungskurve von Ba-Ferrit. Neben der geringen Remanenzflussdichte fallen die hohe Koerzitivfeldstärke und die Steigung mit  $\mu_{\text{perm}} \approx 1$  auf. Als keramische Werkstoffe sind Ferritmagnete nicht nur

mechanisch hart, sondern auch bruchempfindlich. Der spezifische Widerstand aller Ferritmagnete ist mit  $\rho > 10 \Omega\text{m}$  sehr hoch, wodurch sie selbst in hochfrequenten Feldern eingesetzt werden können.

**Ba-Ferrit:** Hier kommt eigentlich nur der hexagonale Ba-Ferrit vom Typus  $\text{BaO} \cdot 6 \text{Fe}_2\text{O}_3$  mit einem Energieprodukt von  $25 \text{ kJ/m}^3$  für die technische Anwendung in Betracht. Er liegt sowohl isotrop als auch anisotrop, meist noch mit geringen Zusätzen von Sr, Pb und/oder Co vor. In der Tabelle V-5 sind die Daten einiger typischer Dauermagnetwerkstoffe zusammengestellt.

Isotrop bedeutet bei magnetischen Werkstoffen, dass sie in allen Richtungen etwa gleiche magnetische Eigenschaften haben. Anisotrope Magnete haben durch ihre Herstellung im Magnetfeld eine Vorzugsrichtung des Magnetfeldes.

Die stark unterschiedlichen Werte von Flussdichte und Feldstärke der Magnetwerkstoffe führt zu „kleinen“ Magnetflächen bei hoher Flussdichte  $B_r$  und „geringer“ Magnetlänge bei hoher Feldstärke  $H_c$ . Bei den grundsätzlichen Werkstoffeigenschaften ist zu beachten, dass AlNiCo-Systeme praktisch „Stahl“ sind, während Ferrite als Metalloxide bruchempfindliche „Keramik“ darstellen. Bei den Seltenerd-Systemen sind SmCo sehr hart und spröde, NdFeB

**Tabelle V-5** Daten einiger typischer Dauermagnetwerkstoffe, nach IBS Magnet, Meder electronic, ThyssenKrupp und VACVacuumschmelze, (gem. DIN IEC 60404-8-1, bzw DIN 17410))

| Name                             | Dichte<br>$\frac{\rho}{\text{g/cm}^3}$ | $\frac{(BH)_{\text{max}}}{\text{kJ/m}^3}$ | $\frac{B_r}{\text{T}}$ | $\frac{H_{cB}}{\text{kA/m}}$ | $\frac{H_{cJ}}{\text{kA/m}}$ | $\mu_{\text{perm}}$ | $\frac{T_{\text{max}}}{^\circ\text{C}}$ | $\frac{T_c}{^\circ\text{C}}$ | Bemerkungen             |
|----------------------------------|----------------------------------------|-------------------------------------------|------------------------|------------------------------|------------------------------|---------------------|-----------------------------------------|------------------------------|-------------------------|
| Legierungen                      |                                        |                                           |                        |                              |                              |                     |                                         |                              |                         |
| Isotrop                          |                                        |                                           |                        |                              |                              |                     |                                         |                              |                         |
| AlNiCo 8/4                       | 7,2                                    | 8                                         | 0,52                   | 42                           | 43                           |                     | 440                                     |                              | Gesintert               |
| AlNiCo 18/8                      | 7,2                                    | 18                                        | 0,65                   | 81                           | 82                           | 5                   | 525                                     | 800                          | Gesintert               |
| AlNiCo 500                       | 7,4                                    | 35                                        | 1,12                   | 47                           | 48                           | 24                  | 450                                     | 860                          | Feinguss                |
| CROVAC 16/160                    | 7,6                                    | 15                                        | 0,85                   | 39                           | 40                           |                     | 480                                     | 640                          | Verformbar              |
| Anisotrop                        |                                        |                                           |                        |                              |                              |                     |                                         |                              |                         |
| AlNiCo 35/5                      | 7,2                                    | 35                                        | 1,12                   | 47                           | 48                           | $\approx 5$         | 550                                     | 800                          | gesintert               |
| AlNiCo 52/6                      | 7,2                                    | 52                                        | 1,3                    | 55                           | 56                           | $\approx 5$         | 525                                     | 800                          | gegossen                |
| LNGT80                           | 7,3                                    | 84                                        | 1,07                   | 122                          | 125                          |                     | 550                                     | 860                          | gegossen                |
| RE <sub>2</sub> Co <sub>17</sub> | 8,3                                    | 200                                       | 10,3                   | 720                          | 1600                         | 1,1                 | 300                                     | 800                          | gesintert               |
| REFeB400/88                      | $\approx 7,5$                          | 400                                       | 1,44                   | 800                          | $>875$                       | 1,1                 | $>80$                                   | 310                          | gesintert               |
| REFeB85/35p                      | 5,9                                    | 85                                        | 0,66                   | 430                          | 830                          |                     |                                         |                              | Kunststoff-<br>gepresst |
| Metalloxide                      |                                        |                                           |                        |                              |                              |                     |                                         |                              |                         |
| Isotrop                          |                                        |                                           |                        |                              |                              |                     |                                         |                              |                         |
| Hartferrit 8/22                  | 4,8                                    | 8,0                                       | 0,21                   | 135                          | 220                          | 1,2                 | 250                                     | 450                          |                         |
| CER5 (Din 24/18)                 | 5,0                                    | 28                                        | 0,4                    | 160                          | 185                          |                     | 250                                     | 450                          |                         |
| Anisotrop                        |                                        |                                           |                        |                              |                              |                     |                                         |                              |                         |
| Hartferrit 28/26                 | 4,85                                   | 28                                        | 0,38                   | 250                          | 265                          | 1,5                 | 250                                     | 450                          |                         |
| Hartferrit 32/26                 | 4,8                                    | 32                                        | 0,41                   | 250                          | 260                          | 1,5                 | 250                                     | 450                          |                         |

Systeme nicht so sehr. Im Gegensatz zu den gegen äußere Einflüsse praktisch unempfindlichen Ferriten oxidieren die Seltenerd Magnete in feuchter Umgebung. NdFeB etwas stärker als SmCo. Eine Oberflächen Behandlung, z.B. Galvanisierung, ist daher in jedem Falle notwendig.

Wegen der doch recht unterschiedlichen Eigenschaften auf den verschiedenen Gebieten zum Abschluss eine kleine Vergleichstabelle als Entscheidungshilfe (Tabelle V-6).

**Tabelle V-6** Werkstoffauswahlübersicht nach Meder Electronic

|                                             | <br>niedrig <span style="float:right">hoch</span> |         |        |         |
|---------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|--------|---------|
| Kosten                                      | Ferrite                                                                                                                              | AlNiCo  | NdFeB  | SmCo    |
| Energieprodukt ( $B \cdot H_{\text{max}}$ ) | Ferrite                                                                                                                              | AlNiCo  | SmCo   | NdFeB   |
| Einsatztemperatur                           | NdFeB                                                                                                                                | Ferrite | SmCo   | AlNiCo  |
| Korrosionsbeständigkeit                     | NdFeB                                                                                                                                | SmCo    | AlNiCo | Ferrite |
| Gegenfeld-Resistenz                         | AlNiCo                                                                                                                               | Ferrite | NdFeB  | SmCo    |
| Mechanische Festigkeit                      | Ferrite                                                                                                                              | SmCo    | NdFeB  | AlNiCo  |
| Temperaturkoeffizient                       | AlNiCo                                                                                                                               | SmCo    | NdFeB  | Ferrite |



# VI Dielektrische Eigenschaften

## 1 Modellvorstellungen zur dielektrischen Polarisation

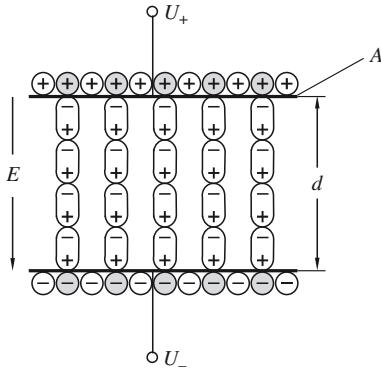


**Bild VI-1** Plattenkondensator

Ladung bei Spannung  $U$  bzw. Feldstärke  $E$  ohne und mit Dielektrikum (schematisch)

○ Ladung ohne Dielektrikum (freie Ladungen)

⊗ zusätzliche Ladungen (durch das Dielektrikum gebundene Ladungen)

⊕ Dipole des Dielektrikums

In einem elektrischen Feld zwischen zwei Platten-elektroden (Bild VI-1) sammeln sich auf jeder Platte (freie) Ladungen an (nicht schraffierte Kreise in Bild VI-1). Wird der Raum zwischen den Platten mit einem *Dielektrikum* gefüllt, so wirken auch darin die Kräfte des elektrischen Feldes. Sie verursachen im atomaren bzw. molekularen Bereich eine *Polarisation*, d.h. eine Verschiebung positiver bzw. negativer Teilchen, die als Beeinflussung vorhandener oder durch Ladungsverschiebungen infolge der Wirkung des elektrischen Feldes gebildeter Dipole verstanden werden kann (Bild VI-1). Die Folge davon sind zusätzliche Ladungen auf den Kondensatorbelägen, sogenannte *gebundene Ladungen* oder auch *influenzierte Ladungen*. Die Ladung  $Q$  auf dem, durch die Elektrodenplatten gebildeten, *Kondensator* mit Dielektrikum ergibt sich zu

$$Q = \epsilon_0 \epsilon_r A E \quad \left| \begin{array}{c|c|c|c} Q & \epsilon_0 & A & E \\ \text{As} & \text{F/m} & \text{m}^2 & \text{V/m} \end{array} \right| \quad (\text{VI.1})$$

$A$  = (Kondensator-)Plattenfläche,  $E$  = Feldstärke,  $\epsilon_0$  = elektrische Feldkonstante oder absolute Dielektrizitätskonstante =  $8,85 \cdot 10^{-12}$  F/m und  $\epsilon_r$  = Permittivitätszahl oder relative Dielektrizitätszahl. Die Größe

$$\kappa_e = \epsilon_r - 1 \quad (\text{VI.2})$$

heißt *elektrische Suszeptibilität*. Sie gibt, ähnlich wie beim Magnetfeld, die durch die Materie zusätzlich mögliche Feld(linien)dichte an.

*Elektronenpolarisation* ist die Verschiebung der Ladungsschwerpunkte von Atomkern und Elektronenhülle. Wegen der geringen Trägheit der Elektronen folgt die Elektronenpolarisation Wechselfeldern bis zu den Frequenzen der UV-Strahlung. In Materialien mit instabilem Charakter der Elektronenverteilung ist die Elektronenpolarisierbarkeit besonders groß.

*Ionenpolarisation* verschiebt die Ionen unter dem Einfluss des elektrischen Feldes und bewirkt eine Deformation des Gitters. Der Stoff ist polar. Ionenpolarisation ist bis zu Frequenzen der IR-Strahlung möglich. Ionen- und Elektronenpolarisation sind von ähnlicher Größenordnung, kaum temperaturabhängig und können unter dem Oberbegriff *Deformationspolarisation* zusammengefasst werden.

*Ordnungspolarisation* setzt Dipolmomente im molekularen Aufbau voraus. Die einzelnen Dipole ordnen sich weitgehend in Feldrichtung (Bild VI-2), daher *Ordnungs-* oder *Orientierungspolarisation*. Der Stoff ist (di)polar. Der ordnenden Kraft des elektrischen Feldes wirken thermische Kräfte entgegen. Die Ordnungspolarisation und Grenzfrequenz (bis etwa  $10^9$  Hz) sind stark temperaturabhängig.

*Grenzflächenpolarisation* tritt bei Dielektrika mit Einschlüssen guter Leitfähigkeit auf. Frei bewegliche Ladungsträger der Einschlüsse können zu den Grenzen wandern und wie gebundene Ladungen wirken. Diese Grenzflächenpolarisation führt zu einer höheren Polarisation als dem homogenen Material entspräche und bewirkt ein  $\epsilon_r$  über dem des eigentlichen Dielektrikums. Der Grenzfall tritt auf, wenn das Dielektrikum eine gewisse Leitfähigkeit zeigt. Eine Unterscheidung zwischen Ladungsbewegung zur

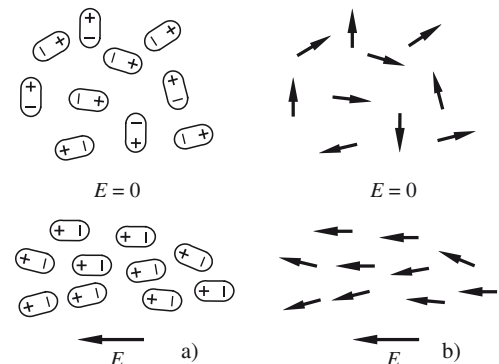


**Bild VI-2** Ordnungspolarisation (schematisch)

Die zunächst regellos orientierten Dipole ordnen sich unter dem Einfluss eines elektrischen Feldes  $E$

a) Dipol-Darstellung

b) Schema-Darstellung

Grenzflächenpolarisation und Leitfähigkeit ist dann nicht mehr möglich.

Bild VI-3 zeigt schematisch den aus den verschiedenen Mechanismen resultierenden Frequenzgang der Polarisation. Die Endbereiche der verschiedenen Polarisationsarten sind durch Steilabfälle der Permittivitäten und wegen der dabei auftretenden Resonanzerscheinungen durch starke Verluste gekennzeichnet (Bild VI-3b).

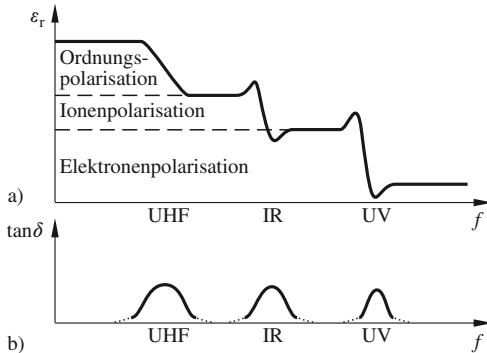


**Bild VI-3** Frequenzabhängigkeit der Polarisation und der Verluste (prinzipieller Verlauf)

a) Beiträge der verschiedenen Polarisationsmechanismen zur Permittivität

b) Bereiche ausgeprägter Verluste durch Resonanzerscheinungen

$\tan \delta$  = Verlustfaktor,  $f$  = Frequenz, UHF = Ultrahochfrequenz, IR = Infrarot(strahlung) und UV = Ultraviolett(strahlung)

## 2 Dielektrische Materialeinteilung

Die Elektronenpolarisation, mit der Verschiebung der Elektronen gegenüber dem Atomkern, ist in allen Stoffen von Null verschieden. Daraus folgt grundsätzlich für alle Dielektrika eine Permittivität  $\epsilon_r > 1$  bzw. eine positive elektrische Suszeptibilität, allgemein *Paraelektrika*.

*Piezoelektrika* reagieren mit einer Polarisation(sänderung) auf eine mechanische Deformation und umgekehrt. Deformationsrichtung und Polarisationsrichtung – meist senkrecht zueinander – sind dabei einander fest zugeordnet.

Bei einer Reihe von Materialien mit in kleinen Bereichen geordneten Dipolen (auch hier Weiss'sche Bezirke genannt) kann eine bei erhöhter Temperatur erfolgte Ausrichtung der Dipolmomente, über einen größeren Bereich durch Abkühlung „eingefrorene“, und starke remanente Polarisation erzeugt werden. Derartige künstliche Piezoelektrika zeigen stärkere Effekte als die natürlichen.

Die bekanntesten natürlichen Piezoelektrika sind der Quarz und der Turmalin. Künstliche Piezoelektrika basieren auf Mischoxiden von Ba, Ti, Pb, Nb u.a.

*Pyroelektrika* sind polare piezoelektrische Materialien mit einer spontanen Polarisation, die ihre Ursache in getrennten Schwerpunkten der positiven und negativen Ladungen in der Kristallstruktur hat. Weil die Polarisation zwar mit der Temperatur veränderlich, aber selbst bis zum Schmelzpunkt des Materials nicht aufhebbar ist, heißt dieser Effekt *pyroelektrisch*.

*Ferroelektrika*. Gewisse Stoffe weisen ein elektrisches Dipolmoment ohne Anlegen eines äußeren elektrischen Feldes auf. Der ferroelektrische Effekt kommt nur in Kristallen vor, in denen die kristalline Symmetrie eine polare Achse zulässt. Ferroelektrika sind deshalb auch immer piezo- und pyroelektrisch. Die Vorsilbe „ferro“ bezieht sich nur auf die Analogie zu „ferromagnetisch“, wegen des Auftretens einer Hystereseschleife  $D = f(E)$  und einer damit verbundenen Koerzitivfeldstärke  $E_c$ . Ursache sind auch hier Domänen (gleichfalls Weiss'sche Bezirke genannt), wobei die Übergänge, Domänenwände, „dünner“ sind als die Übergänge bei Ferromagnetika. In Anlehnung an den Begriff Magnete nennt man derartige Stoffe *Elektrete*. Die spontan vorhandene Polarisation kann bei Ferroelektrika durch eine äußere Spannung um  $180^\circ$  umgepolt werden, was bei reinen Piezoelektrika nicht möglich ist. Bei hohen Temperaturen, auch hier (ferroelektrische) Curie-Temperatur genannt, verschwindet die Polarisation, das Material wird paraelektrisch.

Ferroelektrika sind einerseits Materialien mit großer Permittivität ( $\epsilon_r \approx 10^4$ ) andererseits sind die Deformationen durch elektrische Felder als *Aktuatoren* anwendbar oder umgekehrt durch Deformation – Schlag – als (Funken)Spannungsquelle. Eine andere Anwendungsmöglichkeit sind, wegen der hohen Dielektrizitätskonstanten, ferroelektrische Arbeitsspeicher.

## 3 Elektrische Materialeinteilung

*Isolatoren*: Die wesentlichste Kenngröße eines Isolators ist der Isolationswiderstand mit spezifischen Widerständen von  $\rho = 10^{10} \dots 10^{20} \Omega\text{m}$ . In der technischen Anwendung ist dabei noch zwischen *Durchgangswiderstand* und *Oberflächenwiderstand* zu unterscheiden.

*Durchgangswiderstand* ist eine von den inneren Eigenschaften des Stoffes abhängige und für ihn charakteristische Größe. Er wird aus dem Querstrom  $I$  bestimmt, den eine angelegte Spannung  $U$  (Bild VI-4a) durch den Werkstoff treibt. Wegen einer stets vorhandenen Anzahl freier Ladungsträger wird dieser Querstrom niemals absolut zu Null. Unmittelbar nach dem Anlegen einer Gleichspannung tritt noch ein *Polarisationsstrom* auf, der u.U. durch die Trägheit der Dipolmomente eine merkliche *Abklingzeit* (*Relaxationszeit*) aufweist. Wird der Querstrom durch Ionen verursacht (Materialtransport), so ist über längere Zeit mit einer Zerstörung des Isolators zu rechnen.

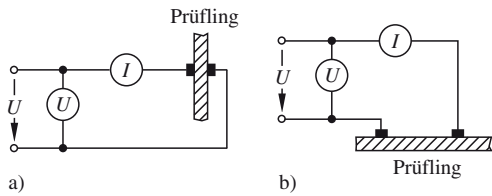


**Bild VI-4** Isolationswiderstand

a) Durchgangswiderstand

b) Oberflächenwiderstand

$U$  = Spannung und  $I$  = Strom

Der Durchgangswiderstand nimmt mit steigender Temperatur ab. Der daraus folgende erhöhte Querstrom trägt seinerseits zu einem Temperaturanstieg bei. Falls sich kein Gleichgewicht durch Ausgleich mit der Umgebungstemperatur einstellt, kommt es zum Wärmedurchschlag.

**Oberflächenwiderstand** (Bild VI-4b) ist im strengen Sinne keine Materialeigenschaft, da Oberflächenbeschaffenheit und -verunreinigungen die entscheidenden Faktoren sind. Verunreinigungen auf der Oberfläche eines Isolators ermöglichen *Kriechströme*. Die dadurch verursachten Kriechspuren können die Oberfläche des Materials angreifen und die Leitfähigkeit weiter erhöhen. Der Widerstand gegen die Kriechspurbildung, die *Kriechstromfestigkeit*, ist in der Praxis meist wichtiger als der Oberflächenwiderstand selbst.

**Durchschlagfestigkeit** ist die beim *Spannungsdurchschlag* eines Isolierstoffes wirksame elektrische Feldstärke  $E_0$  in kV/cm oder kV/mm angegeben. Die Durchschlagfestigkeit ist nur unter gleichen Bedingungen vergleichbar, da sie sowohl von der Elektrodenform als auch Materialdicke abhängt (DIN 53481 bzw. VDE 0303). Im Allgemeinen sinkt die Durchschlagfestigkeit mit zunehmender Materialdicke. Die Durchschlagfeldstärke ist auch noch von der Anstiegsgeschwindigkeit der angelegten Spannung abhängig.

Wegen der Zeitabhängigkeit des thermischen oder Wärmedurchschlages muss die Prüfung über Zeit ( $>40$  s) erfolgen.

Für die Zuverlässigkeit elektrischer Geräte ist die Isolationseigenschaft der Werkstoffe auch bei langzeitiger Temperaturbelastung wichtig. Man unterscheidet daher nach VDE bzw. IEC *Wärmebeständigkeitsklassen*, wie sie in der Tabelle VI-1 aufgeführt sind.

Erfahrungsgemäß genügt für die *Halbierung/Verdoppelung der Lebensdauererwartung* bei einer Isolation nach:

Klasse A eine um  $8^\circ\text{C}$  erhöhte/verminderte Betriebstemperatur

Klasse B eine um  $10^\circ\text{C}$  erhöhte/verminderte Betriebstemperatur

Klasse H eine um  $12^\circ\text{C}$  erhöhte/verminderte Betriebstemperatur

**Kondensatoren:** Mit  $C = Q/U$  folgt für Kondensatoren die Kapazität  $C$  aus Gl. VI.1 zu

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline C & \epsilon_0 & A & d \\ \hline \text{F} & \text{F/m} & \text{m}^2 & \text{m} \\ \hline \end{array} \quad (\text{VI.3})$$

Als Werkstoffgröße ist die Permittivitätszahl  $\epsilon_r$  des Dielektrikums und der damit verbundene Verlustfaktor  $\tan \delta$  für die Beschreibung der Verluste maßgebend. In der Ersatzschaltung (Bild VI-5) liegt der Kapazität  $C$  der Leitwert  $G$  parallel. Definitionsgemäß ist der dielektrische *Verlustfaktor* das Verhältnis von Wirk- zu Blindleistung, daraus folgt

$$\tan \delta = \frac{G}{\omega C} = \frac{1}{\omega RC} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline G & R & C & \omega \\ \hline \text{S} & \Omega & \text{F} & \text{s}^{-1} \\ \hline \end{array} \quad (\text{VI.4})$$

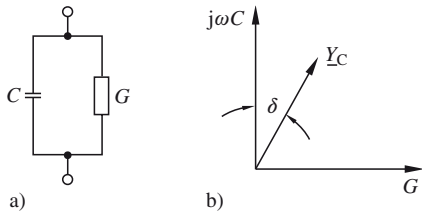


**Bild VI-5** Verlustbehafteter Kondensator

a) (Parallel-)Ersatzschaltung,  $C$  = idealer Kondensator,  $G$  = Verlustleitwert

b) Kapazitiver Leitwert  $Y_C$  in der komplexen Ebene,  $\delta$  = Verlustwinkel

**Tabelle VI-1** Wärmebeständigkeitsklassen nach DIN/IEC

| Klasse | Grenztemperatur $^\circ\text{C}$ | Isolierstoffcharakteristika                                 |
|--------|----------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| Y      | 90                               | Organische Stoffe, ungetränkt                               |
| A      | 105                              | Organische Stoffe mit organischen Bindemitteln              |
| E      | 120                              | Lackdrähte                                                  |
| B      | 130                              | Anorganische Stoffe mit organischen Bindemitteln            |
| F      | 155                              | Anorganische Stoffe mit besonderen organischen Bindemitteln |
| H      | 180                              | Anorganische Stoffe z.B. mit Silikon                        |
| C      | $>180$                           | Anorganische Stoffe ohne Bindemittel                        |

**Tabelle VI-2** Eigenschaften dielektrischer Werkstoffe

| Stoff          | unpolar | polar      | ferroelektrisch        |
|----------------|---------|------------|------------------------|
| $\epsilon_r$   | < 10    | 10 ... 100 | > 100                  |
| Temperaturgang | gering  | gering     | stark                  |
| Verluste       | gering  | gering     | stark frequenzabhängig |

mit  $\omega$  = Kreisfrequenz und  $R = 1/G$ . Das Produkt des Verlustfaktors  $\tan \delta$  mit der Permittivität  $\epsilon_r$  liefert die, besonders in der Kabeltechnik wichtige, (dielektrische) *Verlustzahl* oder *Verlustziffer*

$$\epsilon'' = \epsilon_r \cdot \tan \delta \tag{VI.5}$$

Eine weitere für Gleichstrom und niedrige Frequenzen angewandte Verlustdefinition ist über das Produkt  $R \cdot C$  (Gl. VI.4) als *Isolationszeitkonstante* oder *Isolationsgüte* möglich. Sie wird in  $M\Omega \cdot \mu F$  oder zahlen- und dimensionsgleich in s angegeben.

Aus den verschiedenen Arten der Polarisation folgen für die Dielektrika unterschiedliche Größenordnungen der Permittivität, die in der Tabelle VI-2 einmal prinzipiell zusammengestellt sind.

Bei den keramischen Materialien wird in der Praxis noch zwischen *niederdielektrischer Keramik*, NDK-Materialien, und *hochdielektrischer Keramik*, HDK-Materialien, unterschieden.

NDK-Materialien basieren auf nicht-ferroelektrischen Titanaten. Temperaturgang, Verlustfaktor ( $10^{-4}$  bis  $10^{-5}$ ) und Spannungsabhängigkeit von  $\epsilon_r$  sind gering. Die elektrische Langzeitstabilität ist gut.

HDK-Materialien basieren auf ferroelektrischem Bariumtitanat mit stark temperatur- und spannungsabhängiger Permittivität. Der Verlustfaktor ist mit  $10^{-2} \dots 10^{-3}$  recht hoch.

In der Tabelle VI-3 sind abschließend die Permittivitätszahlen einiger ausgewählter Materialien zusammengestellt.

**Tabelle VI-3** Permittivitätszahlen einiger Werkstoffe

| Material                                                        | $\epsilon_r$ |
|-----------------------------------------------------------------|--------------|
| Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> -Keramik                         | 9,8          |
| TiO <sub>2</sub> -Keramik                                       | 85           |
| Quarzglas                                                       | 3,8          |
| Bor-Silikat-Glas                                                | 4–6          |
| Kalk-Alkali-Glas                                                | 6–8          |
| Porzellan                                                       | 4–8          |
| Glimmer                                                         | 5–6          |
| Diamant (C)                                                     | 5,6          |
| Silizium (Si)                                                   | 11,9         |
| Germanium (Ge)                                                  | 16,2         |
| Steatit (SiO <sub>2</sub> /Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> /MgO) | 6–7          |
| Papier                                                          | 4–5,6        |
| Polyvinylchlorid (PVC)                                          | ≈ 3          |
| Polyäthylen (PE)                                                | 2,3          |
| Polypropylen (PP)                                               | 2,2          |
| Polystyrol (PS)                                                 | 3            |
| Polycarbonat (PC)                                               | 2,8          |
| Polytetrafluoräthylen (PTFE)                                    | 2,1          |

## VII Dielektrika

Die Dielektrika lassen sich nach ihrem Vorkommen in natürliche und künstliche und nach ihrem chemischen Aufbau in anorganische und organische unterteilen.

### 1 Natürliche anorganische Dielektrika

*Glimmer* ist ein leicht spaltbares, schneid- und stanzbares Naturprodukt mit hervorragenden elektrischen Eigenschaften. Glimmerreste werden mit Kunstharzen verpresst (Mikanit) oder nach einem Spezialverfahren zu einem glimmerähnlich nutzbaren Vlies verarbeitet.  $E_0$  bis zu 1000 kV/cm,  $\epsilon_r \approx 6 \dots 8$ ,  $\tan \delta \approx 2 \cdot 10^{-4}$ .

*Quarz* ist reines Siliziumdioxid, hochtemperaturfest, mit geringer Wärmedehnung und guter UV-

Durchlässigkeit bis 185 nm. Abgeleitete Produkte sind Quarzglas, Quarzgut, gezüchtete Quarzkristalle und Quarzmehl (Füllstoff).  $E_0 = 300 \dots 400$  kV/cm,  $\epsilon_r = 3 \dots 4$ ,  $\tan \delta \approx 10^{-2} \dots 10^{-4}$  (stark von der Reinheit abhängig).

Wegen seines Piezoeffektes hat Quarz besondere Bedeutung als *elektromechanischer Wandler* und *Resonator* zur Frequenzstabilisierung in der Nachrichtentechnik. Die durch Umkehrung des Piezoeffektes sehr stabile mechanische Resonanz des Quarzes führt zur Anwendung als „Bandfilter“ mit geringer Bandbreite.

*Glas* ist Siliziumdioxid das durch schmelzpunktniedrigende Zusätze – sog. Flussmittel – aus dem Bereich der Carbonate, Nitrate und Sulfonate der Alkalimetalle von seinem Schmelzpunkt von 1860 °C

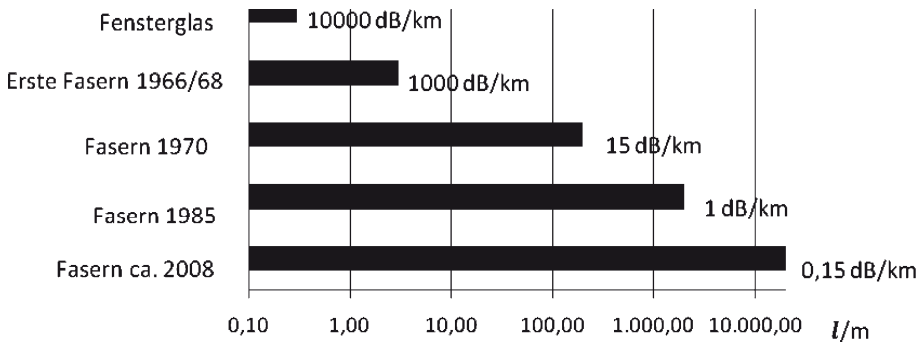


**Bild VI-6** Änderung der Übertragungsdämpfung in dB/km und der daraus folgenden Dämpfungs-„Halbwerts-länge“  $l$  im Laufe der Zeit. Nach ANT und Schott

auf Erweichungstemperaturen oberhalb von 600 °C gebracht wird. Wobei zu beachten ist, dass Glas zunächst bei steigender Temperatur erweicht und erst allmählich in einen flüssigen Zustand etwa oberhalb von 1200 °C übergeht. Die allgemeinen dielektrischen Daten sind:  $\epsilon_r \approx 5 \dots 16$ ,  $E_0 \approx 10 \text{ kV/mm}$  und  $\tan \delta \rightarrow 0$ . Letztere Eigenschaft hat zu *Glaskondensatoren* geführt die, zunächst als Glimmerersatz, inzwischen für die Raumfahrt wichtig sind. Sie sind auch bei langen Raumflügen gut ladungskonstant und gegen Strahlungen praktisch aller Art unempfindlich. Die andere bedeutende Anwendung ist die Lichtleitung in dünnen Fasern, sog. *Lichtwellenleiter*. Wie Bild VI-6 zeigt hat Glas seine „Lichtdurchlässigkeit“ im Laufe der letzten Jahrzehnte durch die Entwicklung geeigneter Glassorten erheblich verbessert. Die Lichtübertragungsstruktur in den verschiedenen Faser-

arten, monomode, multimode usw., ist unter Lichtwellenleiter (LWL) in der Nachrichtenübertragung im Kapitel XII erläutert.

Bei den Fasern der Lichtwellenleiter bilden sich durch Streuung und Absorption unterschiedliche Dämpfungsbereiche für die verschiedenen Wellenlängen aus. Wie Bild VI-7 zeigt, bilden diese optimalen Bereiche sog. *optische Fenster* mit den Nummern 1, 2 und 3 für 850 nm, 1300 nm und 1550 nm. In Bild VI-8 ist noch einmal die wellenlängenmässige Zuordnung der Fenster und auch die Lage der Farblichtstrahlungen, zusammengestellt.

**Gase:** Hierbei ist Luft mit einer Durchschlagfestigkeit von 20 ... 30 kV/cm der am häufigsten angewandte Isolator. Technisch sind außerdem noch Stickstoff (N,  $E_0 \approx 20 \text{ kV/cm}$ ), Kohlendioxid ( $\text{CO}_2$ ,

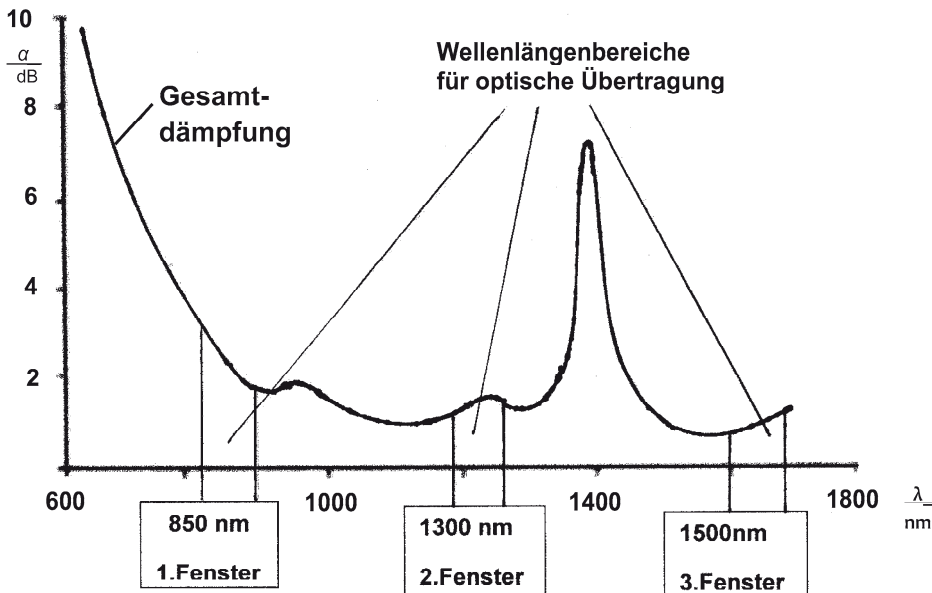


**Bild VI-7** Verlauf der Gesamtdämpfung  $\alpha$  in Lichtwellenleitern und der Definition *optischer Fenster*. Sie liegen bei 850 nm, 1300 nm und 1500 nm

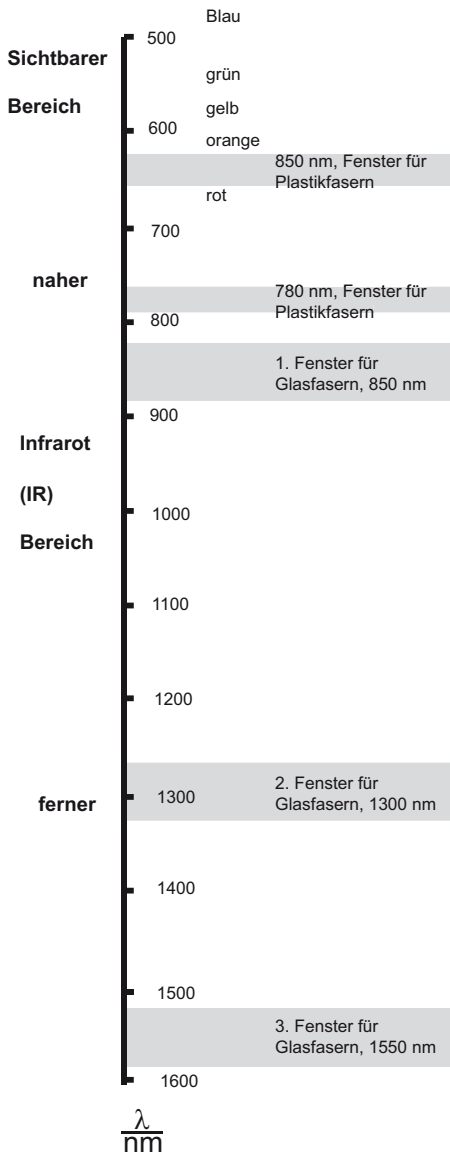


**Bild VI-8** Übersicht über die Wellenlängenbereiche und die Zuordnung der zur Übertragung genutzten optischen Fenster,  $\lambda$  = Wellenlänge ( $1000 \text{ nm} = 1 \mu\text{m} \cong 300 \text{ THz}$ )

$E_0 \approx 24 \text{ kV/cm}$ ) und Schwefelhexafluorid ( $\text{SF}_6$ ,  $E_0 \approx 100 \text{ kV/cm}$ ) bedeutsam. Wegen der durch erhöhten Druck verminderten Teilchenbeweglichkeit steigt die *Ionisierungsfeldstärke* für den Durchbruch und damit auch die Durchschlagfestigkeit mit einer Druckerhöhung. Erschwert ionisierbar sind auch *elektronegative Gase*, die bevorzugt als Halogenverbindungen – z.B.  $\text{CCl}_4$ ,  $\text{CCl}_2\text{F}_2$ ,  $\text{CF}_4$ ,  $\text{SF}_6$ , u.a. – mit großer Ionenmasse und dementsprechend niedriger

Wanderungsgeschwindigkeit genutzt werden. So hat das technisch bedeutsame Schwefelhexafluorid ( $\text{SF}_6$ ) eine um etwa den Faktor 2,5 höhere Durchschlagfestigkeit als Luft.

## 2 Natürliche organische Dielektrika

*Papier* weist als *Isolierpapier* je nach Behandlung und Tränkung sehr unterschiedliche Eigenschaften auf. Durch Tränkung entstehen die Öl-, Öllack, Schellack- und Kunstharzpapiere mit  $E_0$  etwa  $25 \dots 50 \text{ kV/mm}$  gegenüber ca.  $10 \text{ kV/mm}$  bei einfachen Papieren. Vorteilhaft ist die geringe Dicke von Papierisolationen, nachteilig sind die hohen Verluste mit  $\tan \delta = 0,5 \dots 10^{-2}$ .  $\epsilon_r$  liegt bei  $2 \dots 8$ .

*Textilstoffe* werden meist getränkt verarbeitet, wobei besonders Lackseide (Ölseide) wegen der geringen Dicke und der guten elektrischen und mechanischen Eigenschaften wichtig ist. Baumwolle und Seide werden als Fäden und Bänder getränkt und unge-tränkt als Umhüllungen für blanke und lackierte Drähte benutzt.

*Öle* sind als *Isolieröle* (DIN EN 60296, VDE 0370) hochsiedende Destillationsprodukte des Erdöls. Isolationswiderstand und Durchschlagfestigkeit ( $5 \dots 30 \text{ kV/mm}$ ) sind besonders in dünnen Schichten günstig.  $\tan \delta = 10^{-3}$  und  $\epsilon_r = 2 \dots 3$  sind niedrig. Nachteilig sind die starke Wärmedehnung, Temperaturabhängigkeit der Viskosität, Entflammbarkeit, Feuchtigkeitsaufnahme aus der Luft und Alterung durch den Luftsauerstoff. Die Alterungsprodukte (Säuren, Metalleisen, Schlamm u.ä.) erhöhen die Verluste und mindern die Wärmeleitfähigkeit des Öls. Eine Regeneration ist möglich.

## 3 Künstliche anorganische Dielektrika

Vorzugsweise Metalloxide, die als *keramische Massen* teigig geformt, getrocknet und gebrannt ihre endgültigen Eigenschaften erhalten. Nachbearbeitung ist wegen der Härte durchweg nur (nass-)schleifend möglich. Für die praktische Handhabung sind noch verschiedene Oberflächenbehandlungen notwendig:

*Metallisieren* ist für die Kontaktierung bei Dielektrika oder als Basismaterial für Hochfrequenzschaltungen notwendig.

*Glasieren* und *Lackieren* dient zum Schutz der meist rauen oder porösen Oberfläche gegen Verschmutzung und Feuchtigkeitsaufnahme.

*Hydrophobieren* ist eine besondere Art des Feuchtigkeitsschutzes durch Aufbringen dünnster (bis monomolekularer) Silikonschichten, die durch ihre niedrigen Oberflächenspannungen wasserabweisend sind.

*Metalloxide* von Aluminium ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) und Titan ( $\text{TiO}_2$ ) werden hochrein wegen ihrer geringen Verluste besonders bei hohen Frequenzen als Trägermaterial



eingesetzt.  $E_0 \approx 10 \text{ kV/mm}$ , Aluminiumoxid:  $\epsilon_r = 9,8$  und  $\tan \delta = 10^{-4}$  ( $\dots 10^{-3}$ ), Titandioxid:  $\epsilon_r = 85$  und  $\tan \delta = 4 \cdot 10^{-3}$ .

*Porzellan* hat als Ausgangsmaterialien Kaolin (Aluminiumsilikat  $\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{SiO}_2$ ,  $\text{H}_2\text{O}$ , Porzellanerde), Feldspat ( $\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{CaO}_2 \cdot \text{SiO}_2$ ) und Quarz ( $\text{SiO}_2$ ).

Das Endprodukt ist durch die Zusammensetzung und geringe weitere Zusätze in weiten Grenzen beeinflussbar. Porzellane gehören zu den dichten keramischen Massen. Sie sind bei Raumtemperatur beständig gegen Basen und Säuren (Ausnahme: Flusssäure) und hochwiderstandsfähig gegen elektrische Funken. Für das bei Isolatoren wichtige Hartporzellan betragen  $E_0 = 30 \dots 35 \text{ kV/mm}$ ,  $\epsilon_r = 4 \dots 8$  und  $\tan \delta \approx 0,02 \dots 0,1$ .

*Titanate* mit Barium ( $\text{BaTiO}_3$ ), Kalzium ( $\text{CaTiO}_3$ ) und Strontium ( $\text{SrTiO}_3$ ) erreichen als HDK-Materialien sehr hohe Permittivitäten ( $\epsilon_r$  bis  $10^4$  bei Bariumtitanat, das auch piezoelektrisch ist). Für NDK-Materialien auf Titandioxid-Basis (Rutil) kann der Temperaturkoeffizient TK in weiten Grenzen zwischen positiven und negativen Werten eingestellt werden.  $\epsilon_r = 10^2 \dots 10^4$  und  $\tan \delta = 10^{-3} \dots 10^{-5}$ . Eine andere wichtige Anwendung der künstlichen piezoelektrischen Materialien sind Resonanzen zwischen den durch elektrische Spannungen hervorgerufenen mechanischen Verformungen (Resonanzen) und den damit möglichen *keramischen* oder auch *dielektrischen Filtern*. Im einfachsten Fall quasi ein Kondensator mit einem „Resonator-Dielektrikum“ bis hin zu Oberflächenwellenfiltern (OFW) (engl. SAW surface acoustic waves). Weitere Einzelheiten hierzu im Kapitel VI-4.9 Dielektrische Filter.

#### 4 Künstliche organische Dielektrika

*Zellulosekunststoffe* sind durch chemische Behandlung von Zellulose erhaltene Fasern und Folien. Für Isolationen sind die blau eingefärbten Triacetat- ( $T_{\max} = 115^\circ\text{C}$ ) und Azetobutyratfolien ( $T_{\max} = 120^\circ\text{C}$ ) wichtig.  $E_0 = 20 \dots 50 \text{ kV/mm}$ ,  $\epsilon_r = 4$  und  $\tan \delta \approx 0,01 \dots 0,02$ .

*Chlophene* sind thermisch und chemisch gut beständige chlorierte Diphenyle, die jedoch bei Bränden durch die Bildung von polychlorierten Biphenylen (PCB) umweltgefährlich sind. Kunststoffe, z.B. phenolhaltige, können von Chlophenen angegriffen werden! Bei der Entsorgung sind die Sondermüllvorschriften zu beachten.  $E_0 \sim 200 \text{ kV/cm}$ ,  $\epsilon_r = 4,5 \dots 6$  und  $\tan \delta = 10^{-3}$ . Als biologisch ungefährliche synthetische Isolierflüssigkeit kann Pentaerythrit-Tetraester eingesetzt werden.  $E_0 \approx 200 \text{ kV/cm}$ ,  $\epsilon_r = 3,3$  und  $\tan \delta = 10^{-3}$ .

*Polykondensationsprodukte* treten vorwiegend als *Duroplaste* auf, d.h. als Kunststoffe, die beim Erhitzen vorübergehend schmelzen oder erweichen und

dann in einen harten, unlöslichen und unschmelzenden Endzustand übergehen. Es gibt sie rein, modifiziert und plastifiziert. Die wichtigsten sind:

*Phenoplaste (PF)* in selbst- oder nichtselbsthärten der Ausführung. Sie finden Anwendung bei Lacken, Pressmassen und Schichtstoffen (Hartpapiere und -gewebe).  $E_0 = 5 \dots 20 \text{ kV/mm}$ ,  $\epsilon_r = 4 \dots 9$ ,  $\tan \delta = 0,05 \dots 0,3$  und  $T_{\max} \approx 160^\circ\text{C}$ .

*Aminoplaste (HF)* ähneln den Phenoplasten, sind im Gegensatz dazu jedoch farbecht und lichtbeständig. Sie haben glatte Oberflächen mit geringer Haftfähigkeit und werden für Lacke, Schichtstoffe und Pressmassen verwandt.  $E_0 = 10 \dots 20 \text{ kV/mm}$ ,  $\epsilon_r = 5 \dots 7$ ,  $\tan \delta \approx 0,1$  und  $T_{\max} \approx 150^\circ\text{C}$ .

*Polyester(-harze) (PETF)* sind flüssige bis elastische oder auch splitterharte Kunstharze.  $E_0 \approx 30 \text{ kV/mm}$ ,  $\epsilon_r = 3$ ,  $\tan \delta \approx 0,03$  und  $T_{\max} = 110^\circ\text{C}$ .

*Ungesättigte Polyesterharze (UP)* nehmen eine Mittelstellung zwischen Kondensations- und Polymerisationsharzen ein, da die über Katalysatoren erfolgende Aushärtung bereits eine Polymerisation darstellt. Thermisch nicht härtbare Typen von Polyestern dienen zur Herstellung mechanisch und elektrisch hochwertiger Folien und Fasern. Mit Glasfasern als Füllstoff ergeben die Polyesterharze die *glasfaserverstärkten Kunststoffe (GFK)*.

*Epoxidharze (EP)* werden wie Polyesterharze eingesetzt, haben ihnen gegenüber jedoch eine höhere mechanische Festigkeit und ein sehr hohes Haftvermögen auf beinahe allen Untergründen (Klebstoff).  $E_0 = 40 \text{ kV/mm}$ ,  $\epsilon_r = 3 \dots 5$ ,  $\tan \delta \approx 0,02$  und  $T_{\max} = 130^\circ\text{C}$ .

*Polyurethane (PU)* sind lackartig als Lötacke interessant.  $T_{\max} = 120^\circ\text{C}$ . Thermisch höher belastbar ist *Polyesterimidlack*. Die Durchschlagsspannung derartig isolierter Drähte liegt bei etwa  $4 \dots 6 \text{ kV}$ ,  $\tan \delta \approx 0,01$  (stark temperaturabhängig).

##### *Polymerisationsprodukte*

Vorwiegend Thermoplaste, d.h. in der Wärme weich und in der Kälte zähhart bis spröde.

*Polystyrol (PS)* ist glasklar und spröde, hat niedrige Verlustfaktoren noch bis zu sehr hohen Frequenzen und eine geringe Wasseraufnahmefähigkeit. Nachteilig sind die geringe Wärmefestigkeit ( $T_{\max} = 75^\circ\text{C}$ ), schlechte Licht- und Wetterbeständigkeit sowie die Gefahr von Spannungskorrosionen bei Kontakt mit Lösungsmitteln. Anwendung findet Polystyrol für Spritzgußmassen (meist schlagfestes PS), elektrisch hochwertige Formteile und Folien für Kondensatoren und HF-Kabel.  $E_0 \approx 100 \text{ kV/mm}$ ,  $\epsilon_r \approx 3$  und  $\tan \delta = 3 \cdot 10^{-4}$ .

*Polyethylen (PE)* hat Ähnlichkeit mit Paraffinen, eine wachsartige Oberfläche, sehr geringe Wasseraufnah-

mefähigkeit, ist trüb und quillt wenig in polaren, aber stark in unpolaren Lösungsmitteln und in der Hitze. Durch Vernetzung (VPE = Vernetztes PE), d.h. Bildung von Riesenmolekülen aus den durch Polymerisation entstandenen langen PE-Fadenmolekülen, lassen sich die mechanischen und thermischen Eigenschaften weiter verbessern. Der Isolationswiderstand ist mit  $10^{17} \Omega \text{ cm}$  sehr hoch. PE findet Anwendung für Spritzgussmassen, Folien, elastische, sehr korrosionsbeständige Formteile und Hochspannungskabel.  $E_0 \approx 100 \text{ kV/mm}$ ,  $\epsilon_r = 2,3$ ,  $\tan \delta \approx 10^{-4}$  und  $T_{\text{max}} = 70^\circ \text{C}$  (unvernetzt) bzw.  $90^\circ \text{C}$  (vernetzt, erhöhte Kurzschlussbelastbarkeit bei Kabeln).

*Polyvinylchlorid (PVC)* ist ein weitverbreiteter, abriebfester und zäher Kunststoff mit guten Isolationaleigenschaften. Achtung, beim Verbrennen oder Verschwelen wird HCl abgespalten! PVC findet für Formteile, Folien und Isolationen vielfältige Anwendungen.  $E_0 \approx 40 \text{ kV/mm}$ ,  $\epsilon_r = 3$ ,  $\tan \delta = 0,02 \dots 0,1$  und  $T_{\text{max}} = 70^\circ \text{C}$

*Polytetrafluorethylen (PTFE) (Teflon)* ist das gegen Chemikalien beständigste synthetische Material. Es ist außerordentlich korrosions-, feuchtigkeits- und temperaturbeständig (Betriebstemperaturen von  $-200 \dots +260^\circ \text{C}$ ).  $E_0 \approx 30 \text{ kV/mm}$ ,  $\epsilon_r \approx 2$ ,  $\tan \delta = 2 \cdot 10^{-4}$  und  $T_{\text{max}} = 280^\circ \text{C}$ .

## 5 Silikone

Silikone sind Kunststoffe, bei denen die Kettenbildung über das vierwertige Silizium erfolgt. Hervorstechend sind die hohe Temperaturbeständigkeit und die geringen Temperaturbeiwerte der mechanischen und elektrischen Daten. Silikone sind absolut tropfenfest und neigen nicht zu Schimmelansatz. Sie zeigen gutes Kriechstrom- und Lichtbogenverhalten. Durch elektrische Funken entsteht isolierendes Siliziumdioxid und kein leitender Kohlerückstand wie bei organischen Stoffen. Nachteilig ist der grundsätzlich höhere Preis gegenüber anderen Werkstoffen.

*Silikonöle* weisen nur eine geringe Änderung der Viskosität zwischen  $-60 \dots +300^\circ \text{C}$  auf. Anwendung (teuer) als Imprägniermittel und flüssiges Dielektrikum.  $E_0 \approx 10 \text{ kV/mm}$ ,  $\epsilon_r \approx 3$ ,  $\tan \delta \approx 10^{-3}$  und  $T_{\text{max}} \approx 300^\circ \text{C}$ .

*Silikonharze* dienen zur Herstellung von warm- und lichtbogenfesten, unbrennbaren Preßstücken.  $E_0 = 10 \dots 30 \text{ kV/mm}$ ,  $\epsilon_r \approx 3$ ,  $\tan \delta = 2 \dots 5 \cdot 10^{-3}$  und  $T_{\text{max}} = 100 \dots 200 \text{ (u.U. } \dots 300)^\circ \text{C}$ .

*Silikonelastomere (Silikonkautschuke)* sind gummielastische Massen mit Temperaturbeständigkeit und Biegsamkeit zwischen ca.  $-80 \dots +250^\circ \text{C}$ . Sie finden Anwendung als Isolierungen und dauerelastische, hochwärmefeste Verbindungen zwischen praktisch beliebigen Werkstoffen.  $E_0 = 10 \dots 30 \text{ kV/mm}$ ,  $\epsilon_r = 3 \dots 9$ ,  $\tan \delta = 0,01 \dots 0,1$  und  $T_{\text{max}} \approx 180^\circ \text{C}$ .

## Literaturhinweise

- [1] Boll, R.: *Weichmagnetische Werkstoffe*, Vakuumschmelze, Hanau 1977
- [2] Boll, R. u.a.: *Magnettechnik*, expert verlag Grafenau 1980
- [3] Döring, E.: *Werkstoffkunde der Elektrotechnik*, Verlag Vieweg, Wiesbaden 1988
- [4] Domke, W.: *Werkstoffkunde und Werkstoffprüfung*, Verlag Girardet, Essen 1989
- [5] Fasching, G.: *Werkstoffe für die elektrotechnik*, Springer Verlag, Wien 2005
- [6] Fischer, H.: *Werkstoffe der Elektrotechnik*, Hanser Verlag, München 2007
- [7] Guillery, P.; Hezel, R.; Reppich, B.: *Werkstoffkunde für Elektroingenieure*, Verlag Vieweg, Wiesbaden 1985
- [8] Heck, C.: *Magnetische Werkstoffe und ihre technische Anwendung*, Hüthig-Verlag, Heidelberg 1975
- [9] Hofman, Spindler: *Werkstoffe in der Elektrotechnik*, Hanser Fachbuchverlag
- [10] Meinke, H.; Gundlach, F. W.: *Taschenbuch der Hochfrequenztechnik*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1992
- [11] Ivers-Tiffée, E.; Münch, W. v.: *Werkstoffe der Elektrotechnik*, B.G. Teubner Stuttgart 2007
- [12] Müller, K.; Scherf, U. (Hgg): *Organic Light Emitting Devices*, Verlag, Wiley-VCH 2006
- [13] Michalowsky, L. u.a.: *Weichmagnetische Ferrite* Expert Verlag 2006
- [14] Michalowsky, L.; Schneider, J. (Hgg): *Magnettechnik*, Verlag Vulkan 2006
- [15] Münch, W. v.: *Elektrische und magnetische Eigenschaften der Materie* B. G. Teubner, Studienskripten, Stuttgart 1987
- [16] Philippow, E. (Hrsg.): *Bauelemente und Bausteine der Informationstechnik*, Verlag Technik, Berlin 1989
- [17] Seitz, D.; Ross, G.; Cassing, W.; Kuntze, K.: *Dauermagnete*, Expert Verlag 2006
- [18] Spickermann, D.: *Werkstoffe der Elektrotechnik und Elektronik*, Verlag Schönbach 2002
- [19] Zinke, O.; Seither, H.: *Widerstände, Kondensatoren, Spulen und ihre Werkstoffe*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1982

Diagramme und Daten wurden aus Veröffentlichungen folgender Unternehmen übernommen:

EBG Gesellschaft für elektromagnetische Werkstoffe mbH, Bochum  
 EPCOS AG München  
 Meder Electronic AG Singen  
 Murata Manufacturing Co. Ltd. Japan  
 Neosid Pemetzrieder GmbH&Co KG Halver  
 Philips Deutschland GmbH Hamburg  
 RFS Radio Frequency Systems GmbH, Hannover  
 Schott AG Mainz  
 ThyssenKrupp AG, Düsseldorf  
 VAC Vakuumschmelze, Hanau  
 Voestalpine AG Linz, Österreich



# Grundlagen der Elektrotechnik

## I Grundbegriffe

### 1 Aufbau der Atome

Die Eigenschaften aller Elemente lassen sich durch den Aufbau der Atome erklären. Die Atome bestehen aus einem Kern und einer Hülle. Der Atomkern besitzt einen Durchmesser von ca.  $10^{-14}$  m, die Ausdehnung der Atomhülle hängt von der Ordnungszahl im Periodensystem ab und beträgt einige  $10^{-10}$  m. Im positiv geladenen Atomkern befindet sich nahezu die gesamte Masse des Atoms. Er besteht aus Neutronen und Protonen. Die Hülle ist negativ geladen und wird durch Elektronen gebildet. Im neutralen Atom sind die Anzahl der Elektronen in der Hülle und die Protonenanzahl im Kern gleich. Die Elektronen in der Hülle können sich nur in bestimmten Schalen, die durch ihre Energie unterschieden sind, bewegen. In jeder Schale ist nur eine bestimmte Anzahl von Elektronen maximal möglich. Die Elektronen der in der Regel nicht vollständig besetzten äußeren Schalen sind die *Valenzelektronen*. Jedes Elektron besitzt die negative *Elementarladung*

$$e_0 = 1,60218 \cdot 10^{-19} \text{ As} \quad (\text{I.1})$$

Die Masse eines Elektrons ist wesentlich kleiner als die eines Protons oder Neutrons. Das Verhältnis von Elektronenmasse zu Protonenmasse ergibt sich durch

$$\frac{m_{\text{el}}}{m_p} \approx \frac{1}{1836} \quad (\text{I.2})$$

Wird von einem Atom ein Elektron entfernt, ist der Rest positiv geladen. Dieses geladene Atom wird *Ion* genannt. Bei Entfernung eines Elektrons entsteht ein einfach positiv geladenes Ion. Wird ein Elektron hinzugefügt, liegt ein einfach negativ geladenes Ion vor.

### 2 Ladungsträger

Ein Stoff ist nur dann elektrisch leitfähig, wenn er bewegliche Ladungsträger besitzt. Die Ladungsträger können negativ oder positiv sein. In Metallen liegen immer negative Ladungsträger, also Elektronen vor. Hier können sich die Valenzelektronen sehr leicht vom Atom trennen, sie werden dann *freie Elektronen* genannt. Auf den festen Plätzen im Kristallgitter bleiben positive Ionen. Da sie nicht beweglich sind, liefern sie keinen Beitrag zum Ladungstransport. In Halbleitern können aber auch *Defektelektronen* oder *Löcher* als Ladungsträger vorkommen. In Gasen und Flüssigkeiten sind auch die Ionen am Ladungstransport beteiligt. Hier ist dann mit dem Ladungstransport auch ein Massentransport verbunden.

### 3 Spannung

Werden elektrische Ladungen getrennt, muss hierzu Arbeit verrichtet werden. Die Größe der Arbeit ist proportional zur Ladungsmenge und kann durch die Gleichung

$$W = U \cdot Q \quad (\text{I.3})$$

beschrieben werden. Die Größe  $U$  wird als Spannung bezeichnet.

$$\text{Spannung } U = \frac{W}{Q} \quad \frac{U}{V = \frac{J}{As}} \bigg| \frac{W}{J} \bigg| \frac{Q}{As} \quad (\text{I.4})$$

Die Einheit 1 J/As wird als 1 V (Volt) bezeichnet. Durch diese Spannung wird auf eine Ladung eine Kraft ausgeübt. Die Spannung ist somit Ursache für eine Bewegung von Ladungsträgern.

### 4 Strom

#### 4.1 Bewegung von Ladungsträgern

Da man in der Elektrotechnik hauptsächlich metallische Leiter einsetzt, wird die Bewegung der Ladungsträger in Metallen untersucht. Die Ladungsträger führen bei Temperaturen  $> 0 \text{ K}$  ständig statistisch verteilt unregelmäßige Bewegungen durch. Aus dieser Bewegung ergibt sich eine mittlere Geschwindigkeit.

$$\text{mittlere Geschwindigkeit } v_m = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\text{I.5})$$

Wird dieser statistischen Bewegung eine einseitig gerichtete Bewegung überlagert, bewegen sich alle Elektronen zusätzlich mit einer *Strömungsgeschwindigkeit* oder auch *Driftgeschwindigkeit*  $v_d$ .

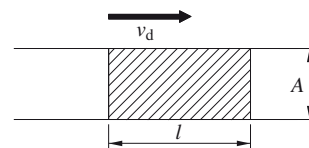


**Bild I-1** Driftgeschwindigkeit

Mit dieser Bewegung ist ein Ladungstransport verbunden. An einer bestimmten Stelle des Leiters können in der Zeiteinheit  $\Delta t$  alle die Elektronen durch den Querschnitt fließen und somit zum Ladungstransport beitragen, deren Abstand kleiner als  $l$  ist. Im Volumen  $lA$  befinden sich  $n_{\text{el}}lA$  Elektronen, wobei  $n_{\text{el}}$  die Dichte der Elektronen (Anzahl pro Volumeneinheit) ist. Da jedes Elektron die Elemen-

tarladung besitzt, ist die in diesem Volumen vorhandene Ladung  $\Delta Q$ .

$$\Delta Q = n_{\text{el}} l A e_0 \quad (\text{I.6})$$

und mit  $l = v_0 \cdot \Delta t$ .

$$\text{Ladung pro Volumeneinheit } \Delta Q = n_{\text{el}} A e_0 v_d \Delta t \quad (\text{I.7})$$

Die Elektronendichte ist eine Materialkonstante und beträgt z.B. für Kupfer  $n_{\text{el}} = 8,47 \cdot 10^{19} \text{ mm}^{-3}$ .

## 4.2 Stromstärke

Die Ladungsmenge  $\Delta Q$ , die pro Zeiteinheit  $\Delta t$  durch einen Leiterquerschnitt tritt, ist die *Stromstärke*  $I$ .

$$\text{Stromstärke } I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad \frac{I}{\text{A}} \left| \frac{\Delta Q}{\text{As}} \right| \frac{\Delta t}{\text{s}} \quad (\text{I.8})$$

$$I = n_{\text{el}} A e_0 v_d \quad (\text{I.9})$$

Im Internationalen Einheitensystem (SI-System) ist die Stromstärke als Basisgröße durch die Kraft zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern definiert:

*1 Ampere ist die Stärke eines zeitlich unveränderlichen Stromes, der, durch zwei im Vakuum parallel im Abstand von 1 Meter voneinander angeordnete, geradlinige, unendlich lange Leiter von vernachlässigbar kleinem kreisförmigen Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je 1 Meter Leiterlänge die Kraft  $2 \cdot 10^{-7}$  Newton hervorruft.*

■ **Beispiel:** Ein Kupferleiter von  $A = 1,5 \text{ mm}^2$  wird von einem Strom  $I = 15 \text{ A}$  durchflossen. Wie groß ist die Driftgeschwindigkeit der Elektronen?

$$v_d = \frac{I}{n_{\text{el}} A e_0} = \frac{15 \text{ A}}{8,47 \cdot 10^{19} \text{ mm}^{-3} \cdot 1,5 \text{ mm}^2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As}} \\ = 0,74 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

Diese Driftgeschwindigkeit ist relativ gering. Dagegen breitet sich ein elektrisches Signal mit Lichtgeschwindigkeit aus.

## 4.3 Stromdichte

In der Technik wichtig für die Belastbarkeit von Leitungen ist die *Stromdichte*  $S$ , also die auf den Querschnitt bezogene Stromstärke.

$$\text{Stromdichte } S = \frac{I}{A} \quad \frac{S}{\frac{\text{A}}{\text{mm}^2}} \left| \frac{I}{\text{A}} \right| \frac{A}{\text{mm}^2} \quad (\text{I.10})$$

Da die Querschnittsfläche in der Regel in  $\text{mm}^2$  angegeben wird, ist die in der Technik gebräuchliche

$$\text{Einheit der Stromdichte } [S] = 1 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}.$$

## 5 Das Ohmsche Gesetz

Wird an einen Leiter in einem geschlossenen Stromkreis eine Spannung  $U$  angelegt, fließt in dem Leiter ein Strom  $I$ . Strom und Spannung sind einander proportional. Die Abhängigkeit lässt sich beschreiben durch:

$$\text{Ohmsches Gesetz } U = R \cdot I \quad (\text{I.11})$$

Die materialabhängige Größe  $R$  bezeichnet man als *elektrischen*

$$\text{Widerstand } R = \frac{U}{I} \quad \frac{R}{\frac{\text{V}}{\text{A}}} \left| \frac{U}{\text{V}} \right| \frac{I}{\text{A}} \quad (\text{I.12})$$

Die Einheit ist  $1 \text{ Ohm} = 1 \Omega$ .

Der Kehrwert des elektrischen Widerstandes ist der Leitwert.

$$\text{Leitwert } G = \frac{1}{R} \quad \frac{G}{\frac{1}{\Omega}} \left| \frac{R}{\Omega} \right| \quad (\text{I.13})$$

Seine Einheit ist  $1 \text{ Siemens} = 1 \text{ S}$ .

## 6 Spezifischer Widerstand, Leitfähigkeit

Der elektrische Widerstand eines metallischen Leiters hängt vom Material, der Länge  $l$  und dem Querschnitt  $A$  ab. Er wird dadurch verursacht, dass die Ladungsträger im Leiter durch Stöße mit den auf festen Plätzen sitzenden Ionen in ihrer Bewegung gehemmt werden.

$$\text{Widerstand eines Drahtes } R = \frac{\rho l}{A} = \frac{l}{\kappa A} \quad (\text{I.14})$$

Die Größe  $\rho$  ist der spezifische Widerstand.

*spezifischer Widerstand*

$$\rho = \frac{RA}{l} \quad \frac{\rho}{\frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}}} \left| \frac{R}{\Omega} \right| \frac{A}{\text{mm}^2} \left| \frac{l}{\text{m}} \right| \quad (\text{I.15})$$

Die Einheit von  $\rho$  kann umgerechnet werden in

$$[\rho] = 1 \frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}} = 10^{-6} \Omega \text{ m} \quad (\text{I.16})$$

Analog zum Leitwert ist der Kehrwert des spezifischen Widerstandes die *Leitfähigkeit*  $\kappa$

$$\text{Leitfähigkeit } \kappa = \frac{1}{\rho} \quad \frac{\kappa}{\frac{1}{\Omega \text{ m}}} \left| \frac{\rho}{\Omega \text{ m}} \right| \quad (\text{I.17})$$

In Tabelle I-1 sind Zahlenwerte des spezifischen Widerstandes und der Leitfähigkeit aufgeführt. Der Wert für Kupfer kann je nach Reinheit schwanken. Der hier angegebene Wert ist der internationale Standardwert.

**Tabelle I-1** Spezifischer Widerstand und Leitfähigkeit

| Leiterwerkstoff | $\rho / \Omega \text{ mm}^2/\text{m}$ | $\kappa / \text{S/m}$ |
|-----------------|---------------------------------------|-----------------------|
| Silber          | 0,0163                                | $61 \cdot 10^6$       |
| Kupfer          | 0,0173                                | $58 \cdot 10^6$       |
| Aluminium       | 0,0263                                | $38 \cdot 10^6$       |
| Messing         | 0,0752                                | $13,3 \cdot 10^6$     |
| Manganin        | 0,435                                 | $2,3 \cdot 10^6$      |

- **Beispiel:** Der Widerstand eines Kupferdrahtes der Länge 160 m bei einem Querschnitt von 1,5 mm<sup>2</sup> soll berechnet werden.

$$R = \frac{\rho l}{A} = \frac{0,0173 \, \Omega \, \text{mm}^2 \cdot 160 \, \text{m}}{\text{m} \cdot 1,5 \, \text{mm}^2} = 1,845 \, \Omega$$

- **Beispiel:** Aus Manganindraht von  $A = 1 \, \text{mm}^2$  soll ein Widerstand von 60  $\Omega$  gewickelt werden. Wie lang muss der Draht sein?

$$l = RA\alpha = 60 \, \Omega \cdot 10^{-6} \, \text{m}^2 \cdot 2,3 \cdot 10^6 \, \frac{\text{S}}{\text{m}} = 138 \, \text{m}$$

## 7 Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes von Metallen

Die elektrische Leitung in Festkörpern ist mit der Bewegung von Ladungsträgern verbunden. Diese stoßen mit den auf festen Plätzen sitzenden Atomen oder Ionen zusammen. Die Schwingung der Atome und Ionen um ihren Platz ist temperaturabhängig. Deshalb ist auch der elektrische Widerstand temperaturabhängig. Bei höheren Temperaturen ist die freie Weglänge und die Beweglichkeit der Ladungsträger kleiner und somit der Widerstand größer. In Metallen ist die Anzahl der freien Ladungsträger temperaturunabhängig, in Halbleitern nicht. Daher haben Metalle und Halbleiter unterschiedliche Temperaturabhängigkeiten.

Der spezifische elektrische Widerstand von Metallen und damit auch der Widerstand steigt mit zunehmender Temperatur. Im Temperaturbereich von ca. 200 K bis 400 K lässt sich diese Abhängigkeit bei Metallen in linearer Näherung durch eine Gerade darstellen.

**Tabelle I-2** Temperaturkoeffizient  $\alpha_{20}$

| Leiterwerkstoff | $\alpha_{20}/\text{K}^{-1}$ |
|-----------------|-----------------------------|
| Silber          | $3,7 \cdot 10^{-3}$         |
| Kupfer          | $3,9 \cdot 10^{-3}$         |
| Aluminium       | $3,7 \cdot 10^{-3}$         |
| Messing         | $1,6 \cdot 10^{-3}$         |
| Manganin        | $0,01 \cdot 10^{-3}$        |

lineare Näherung  $R_\vartheta = R_{\vartheta_0} [1 + \alpha(\vartheta - \vartheta_0)]$  (I.18)

Dabei ist  $R_\vartheta$  der Widerstand bei der Temperatur  $\vartheta$  und  $R_{\vartheta_0}$  der Widerstand bei der Bezugstemperatur  $\vartheta_0$ . Die Größe  $\alpha$  ist der *Temperaturkoeffizient*. Da Gleichung (I.18) eine Näherung ist, hängt der Wert für  $\alpha$  von der Bezugstemperatur ab. Als Bezugstemperatur wird meistens 20 °C genommen.

■ **Beispiel:** Bei 10 °C ist der Widerstand eines Kupferdrahtes 200  $\Omega$ . Wie groß ist er bei 100 °C?

Zunächst muss der Widerstand  $R_{\vartheta_0}$  bestimmt werden.

$$R_{\vartheta_0} = \frac{R_\vartheta}{1 + \alpha(\vartheta - 20^\circ)} = \frac{200 \, \Omega}{1 + 3,9 \cdot 10^{-3} \, \text{K}^{-1} (10 - 20) \, \text{K}} = 208,1 \, \Omega$$

Dann kann hiermit  $R_\vartheta$  berechnet werden.

$$R_\vartheta = R_{\vartheta_0} [1 + \alpha(\vartheta - \vartheta_0)] = 208,1 \, \Omega [1 + 3,9 \cdot 10^{-3} (100 - 20)] = 273 \, \Omega$$

Die lineare Näherung ist recht grob. Genauer kann die Temperaturabhängigkeit durch eine quadratische Näherung angepasst werden.

### Quadratische Näherung

$$R_\vartheta = R_0 (1 + A(\vartheta - \vartheta_0) + B(\vartheta - \vartheta_0)^2) \quad (\text{I.19})$$

$A$  und  $B$  sind Materialkonstanten. Als Bezugstemperatur wird  $\vartheta_0 = 0 \, ^\circ\text{C}$  angenommen.  $R_0$  ist dann der Widerstand bei 0 °C. Ein oft benutzter Metallwiderstand zur Temperaturmessung ist der Platinwiderstand Pt100, der 100  $\Omega$  bei 0 °C hat. Für Pt sind die Konstanten  $A = 3,90802 \cdot 10^{-3} \, \text{K}^{-1}$ ,  $B = -0,5802 \cdot 10^{-6} \, \text{K}^{-2}$ .

Bei Halbleitern fällt der spezifische Widerstand mit steigender Temperatur zunächst, da hier mehr Ladungsträger frei gesetzt werden. Anschließend steigt der Widerstand wie bei Metallen, da die Beweglichkeit verringert wird. Supraleiter zeigen unterhalb einer charakteristischen Temperatur, der Sprungtemperatur  $T_c$ , überhaupt keinen messbaren Widerstand mehr. Werkstoffe, bei denen der Widerstand mit steigender Temperatur zunimmt, haben einen *positiven Temperaturkoeffizienten* (PTC). Nimmt der Widerstand ab, besitzen sie einen *negativen Temperaturkoeffizienten* (NTC).

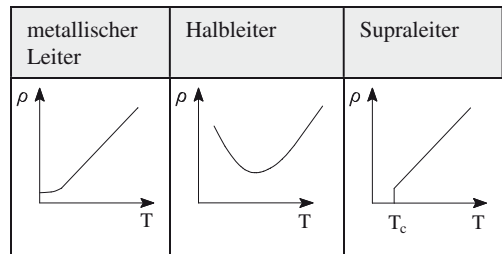


**Bild I-2** Prinzipieller Verlauf des spezifischen Widerstandes

## II Der Gleichstromkreis

### 1 Zählfeilsysteme

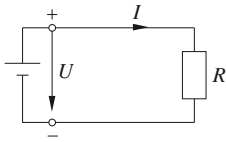


**Bild II-1**  
Zählfeilsystem

Damit in einem Leiter ein elektrischer Strom fließen kann, muss ein geschlossener Stromkreis vorliegen. In elektrischen Schaltungen werden die Spannungs- und Stromrichtungen allgemein durch Pfeile gekennzeichnet. Die Richtung der Spannung wird in Schaltbildern durch einen Pfeil dargestellt, der von + nach – verläuft. Die Stromrichtung wird ebenfalls durch einen Pfeil angegeben, der beim Verbraucher von + nach – gezeichnet wird. Diese Stromrichtung wird als *technische Stromrichtung* bezeichnet; die tatsächliche Bewegung der Elektronen ist dieser Richtung entgegengesetzt. In der linken Seite von Bild II-1 sind Spannungs- und Strompfeil entgegengesetzt, man spricht hier von *Erzeuger-Zählfeilsystem*. Auf der Verbraucherseite sind Spannungs- und Strompfeil gleichgerichtet; hier liegt das *Verbraucher-Zählfeilsystem* vor. In den meisten Fällen wird die Pfeilzuordnung im Verbraucher-Zählfeilsystem vorgenommen.

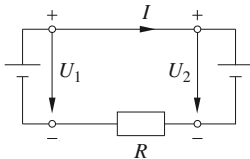


**Bild II-2**  
Schaltung

Liegt nun eine Schaltung nach Bild II-2 vor, so hängt die tatsächliche Stromrichtung von der Höhe der Spannungen  $U_1$  und  $U_2$  ab. In diesem Fall gibt man für den Strom willkürlich eine Richtung vor und bezeichnet diese als Bezugsrichtung oder Zählrichtung. Fließt der technische Strom tatsächlich in der willkürlich gewählten Richtung, wird er positiv gezählt, im anderen Fall negativ.

### 2 Kirchhoffsche Gesetze

Eine elektrische Schaltung besteht in der Regel aus mehreren Spannungsquellen und Widerständen, die sehr unterschiedlich miteinander verbunden sein können. Das gesamte System wird auch als *Netzwerk* bezeichnet. Für die Berechnung von Strömen und Spannungen in einem solchen Netzwerk sind die beiden *Kirchhoffschen Gesetze*, die auch als *Knotenregel* und *Maschenregel* bezeichnet werden, von großer Bedeutung.

#### 2.1 Knotenregel

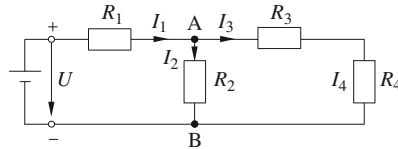


**Bild II-3** Knotenregel

Knotenpunkte sind Punkte, an denen sich der Stromkreis verzweigt. Das 1. *Kirchhoffsche Gesetz* bezieht sich auf diese Punkte, z.B. im Bild II-3 auf die Punkte A und B. In diesen Knotenpunkten muss die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme sein. Im Punkt A gilt

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad (\text{II.1})$$

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad (\text{II.2})$$

Werden alle in einen Knoten hineinfließenden Ströme mit positivem, alle abfließenden Ströme mit negativem Vorzeichen versehen, lässt sich die Knotenregel aufstellen.

$$\text{Knotenregel} \quad \sum_{k=1}^n I_k = 0 \quad (\text{II.3})$$

Diese Regel wird auch das 1. *Kirchhoffsche Gesetz* genannt.

#### 2.2 Maschenregel

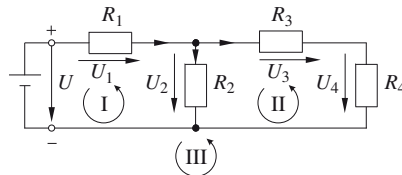


**Bild II-4** Maschenregel

Das 2. *Kirchhoffsche Gesetz* bezieht sich auf *Maschen* von Netzwerken. Maschen sind geschlossene Teile von Netzwerken. In der Schaltung nach Bild II-4 gibt es drei Maschen. Masche I wird durch die Spannungsquelle,  $R_1$  und  $R_2$  gebildet, Masche II durch  $R_3$ ,  $R_4$  und  $R_2$  und Masche III durch die Spannungsquelle,  $R_1$ ,  $R_3$  und  $R_4$ . Die *Maschenregel* ist eine Gleichung für die Spannungen innerhalb einer Masche. Bei einem frei wählbaren Umlaufsinn, hier gegen den Uhrzeigersinn, werden die Spannungen, die dem Umlaufpfeil entgegen gerichtet sind, negativ gezählt. Die Richtungen der Spannungspfeile an den Spannungsquellen ist von + nach –, an den einzelnen Widerständen werden die Spannungspfeile in den entsprechenden Stromrichtungen gezeichnet.

In der dargestellten Schaltung lassen sich z.B. folgende Maschenregeln aufstellen:

$$\text{I) } U - U_2 - U_1 = 0 \quad (\text{II.4})$$

$$\text{II) } U_2 - U_4 - U_3 = 0 \quad (\text{II.5})$$

$$\text{III) } U - U_4 - U_3 - U_1 = 0 \quad (\text{II.6})$$

Innerhalb einer Masche gilt immer – unter Berücksichtigung der Vorzeichen – die Maschenregel.

$$\text{Maschenregel } \sum_{k=1}^n U_k = 0 \quad (\text{II.7})$$

### 3 Schaltung von Widerständen

Für die Kombination von Widerständen gibt es im Prinzip zwei Möglichkeiten, *Reihen-* oder *Serienschaltung* und *Parallelschaltung*.

#### 3.1 Reihenschaltung

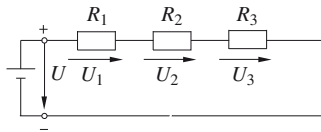


**Bild II-5** Reihenschaltung

In einer Reihenschaltung fließt durch jeden Widerstand derselbe Strom  $I$ . Für die Spannungsfälle an den einzelnen Widerständen gilt nach dem Ohmschen Gesetz  $U_k = I \cdot R_k$ . Mit Gleichung (II.7) gilt somit

$$U - I \cdot R_1 - I \cdot R_2 - I \cdot R_3 = 0 \quad (\text{II.8})$$

$$U = I \cdot (R_1 + R_2 + R_3) = I \cdot R_{\text{ges}} \quad (\text{II.9})$$

$$\text{Reihen-Ersatzwiderstand } R_{\text{ges}} = \sum_{k=1}^n R_k \quad (\text{II.10})$$

Weiterhin folgt für die Spannungsfälle an den einzelnen Widerständen

$$U_1 : U_2 : U_3 = R_1 : R_2 : R_3 \quad (\text{II.11})$$

Hieraus resultiert die *Spannungsteilerregel*. Sie besagt, dass sich die Teilspannungen zur Gesamtspannung verhalten, wie die Teilwiderstände zum Gesamtwiderstand.

$$\text{Spannungsteiler } \frac{U_k}{U} = \frac{R_k}{R_{\text{ges}}} \quad (\text{II.12})$$

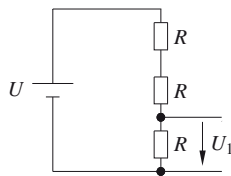


**Bild II-6**  
Beispiel Spannungsteiler

■ **Beispiel:** In der Schaltung nach Bild II-6 soll die Teilspannung  $U_1$  berechnet werden. Die Spannung  $U$  ist 300 V.

$$\frac{U_1}{U} = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3}; \quad U_1 = 100 \text{ V}$$

#### 3.2 Parallelschaltung

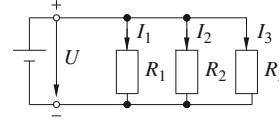


**Bild II-7** Parallelschaltung

In einer Parallelschaltung von Widerständen liegt an jedem Widerstand die gleiche Spannung  $U$ . Somit gilt mit

$$I_k = \frac{U}{R_k} \quad \text{und (II.3);} \quad \frac{U}{R} = \sum_{k=1}^n \frac{U}{R_k}$$

$$\text{Parallel-Ersatzwiderstand } \frac{1}{R} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \quad (\text{II.13})$$

Der gesamte Leitwert errechnet sich als Summe der einzelnen Leitwerte.

$$\text{Leitwert } G = \sum_{k=1}^n G_k \quad (\text{II.14})$$

Oft besteht eine Parallelschaltung nur aus zwei Widerständen. Dann errechnet sich der Ersatzwiderstand aus

$$\text{Parallelwiderstand } R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad (\text{II.15})$$

■ **Beispiel:** Berechnung des Ersatzwiderstandes der Schaltung nach Bild II-8.

Die Widerstände werden zu Gruppen zusammengefasst.

$$R_I = \frac{150 \Omega \cdot 250 \Omega}{150 \Omega + 250 \Omega} = 93,75 \Omega; \quad \frac{1}{R_{II}} = \frac{1}{120 \Omega} + \frac{1}{240 \Omega} + \frac{1}{360 \Omega}$$

$$R_{II} = 65,45 \Omega \quad R = (100 + 93,75 + 65,45) \Omega = 259,2 \Omega$$

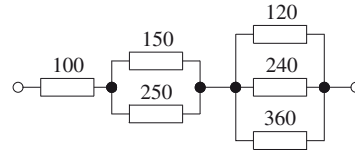


**Bild II-8** Beispiel Ersatzwiderstand

#### 3.3 Stern-Dreieck Umwandlung

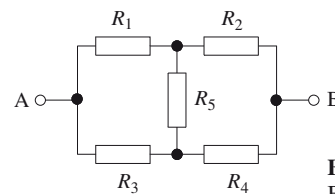


**Bild II-9**  
Brückenschaltung

Nicht immer lassen sich Widerstände zu Gruppen zusammenfassen. Als Beispiel wird die Schaltung nach Bild II-9 betrachtet. Zu einer Lösung gelangt man, wenn eine *Stern-Dreieckumwandlung* oder eine *Dreieck-Sternumwandlung* durchgeführt wird. Hierunter versteht man eine rechnerische Umwandlung einer Schaltung in eine elektrisch gleichwertige Schaltung. Die Schaltungen sind dann gleichwertig, wenn zwischen entsprechenden Punkten in den beiden Schaltungen gleiche Widerstände oder Leitwerte vorhanden sind. Wenn zwischen den Punkten 1 und 2 im Stern und im Dreieck derselbe Widerstand liegen soll, muss gelten:

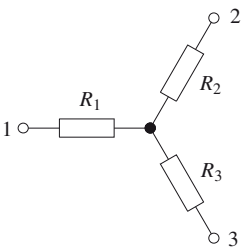
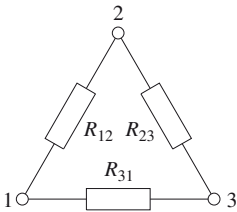
$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (\text{II.16})$$

$$R_2 + R_3 = \frac{R_{23}(R_{31} + R_{12})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (\text{II.17})$$

$$R_3 + R_1 = \frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (\text{II.18})$$

Aus diesen drei Gleichungen lassen sich Bestimmungsgleichungen für die Umwandlungen ableiten. Sie lauten

**Tabelle II-1** Dreieck-Stern- und Stern-Dreieck-Umwandlung

| Dreieck in Stern                                                                                                   | Stern in Dreieck                                                                                                     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (\text{II.19})$                                  | $R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3} \quad (\text{II.22})$                                                |
| $R_2 = \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (\text{II.20})$                                  | $R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1} \quad (\text{II.23})$                                                |
| $R_3 = \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (\text{II.21})$                                  | $R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 \cdot R_1}{R_2} \quad (\text{II.24})$                                                |
|  <p><b>Bild II-10</b> Stern</p> |  <p><b>Bild II-11</b> Dreieck</p> |

■ **Beispiel:** In der Schaltung Bild II-9 soll der Gesamtwiderstand zwischen den Punkten A und B berechnet werden.  $R_1 = 10 \, \Omega$ ,  $R_2 = 15 \, \Omega$ ,  $R_3 = 25 \, \Omega$ ,  $R_4 = 5 \, \Omega$ ,  $R_5 = 15 \, \Omega$ .

Das Dreieck aus  $R_1$ ,  $R_3$  und  $R_5$  wird in einen Stern umgerechnet.

$$R_A = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3 + R_5} = \frac{10 \cdot 25}{10 + 25 + 15} \, \Omega = 5 \, \Omega ;$$

$$R_C = \frac{R_1 R_5}{R_1 + R_3 + R_5} = \frac{10 \cdot 15}{10 + 25 + 15} \, \Omega = 3 \, \Omega$$

$$R_D = \frac{R_3 R_5}{R_1 + R_3 + R_5} = \frac{25 \cdot 15}{10 + 25 + 15} \, \Omega = 7,5 \, \Omega$$

Die Ersatzschaltung ergibt dann die in Bild II-9 dargestellte Schaltung. Der Gesamtwiderstand berechnet sich aus

$$R_{AB} = \left( 5 + \frac{18 \cdot 12,5}{18 + 12,5} \right) \Omega = 12,38 \, \Omega \quad (\text{II.19})$$

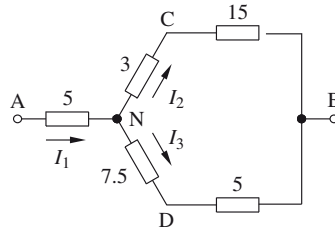


**Bild II-12** Beispiel Stern-Dreieck-Umwandlung

### 3.4 Messbereichserweiterung

Durch geeignet gewählte Widerstände lassen sich die Messbereiche von Strom- und Spannungsgeräten anpassen.  $R_M$  ist jeweils der Innenwiderstand des verwendeten Messgerätes.

#### 3.4.1 Voltmeter

Um den Messbereich eines Voltmeters zu erweitern, ist nach Bild II-13 ein Vorwiderstand zu schalten.

Wenn mit  $U_1$  der neu einzustellende Messbereich und mit  $U_M$  der vorhandene Messbereich des Gerätes bezeichnet wird, kann mit Hilfe der Maschenregel der erforderliche Vorwiderstand berechnet werden.

$$U_1 = U_M + U_V \quad (\text{II.20})$$

$$\frac{U_1}{U_M} = 1 + \frac{U_V}{U_M} = 1 + \frac{R_V}{R_M} \quad (\text{II.21})$$

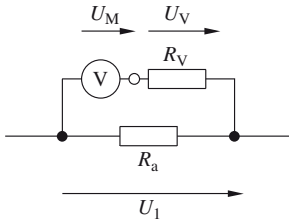


Bild II-13 Erweiterung des Spannungs-Messbereichs

$$\text{Messbereichsverhältnis} \quad n = \frac{U_1}{U_M} \quad (\text{II.22})$$

$$\text{Vorwiderstand} \quad R_V = R_M (n - 1) \quad (\text{II.23})$$

### 3.4.2 Amperemeter

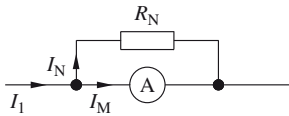


Bild II-14 Erweiterung des Strom-Messbereichs

Für die Messbereichserweiterung eines Strommessgerätes nach Bild II-14 wird ein Widerstand parallel zum Messgerät geschaltet. Um die Größe dieses Nebenwiderstandes zu berechnen, muss man von der Knotenregel ausgehen.

$$I_1 = I_M + I_N \quad (\text{II.24})$$

$$\frac{I_1}{I_M} = 1 + \frac{I_N}{I_M} = 1 + \frac{R_M}{R_N} \quad (\text{II.25})$$

$$\text{Messbereichsverhältnis} \quad n = \frac{I_1}{I_M} \quad (\text{II.26})$$

$$\text{Nebenwiderstand} \quad R_N = \frac{R_M}{n - 1} \quad (\text{II.27})$$

$I_1$  ist der zu messende Strom, also der neue Messbereich,  $I_M$  der vorhandene Messbereich.

■ **Beispiel:** Ein Strommessgerät mit einem Innenwiderstand von  $0,45 \, \Omega$ , welches den Skalendendwert von  $2 \, \text{A}$  hat, soll für einen Verbraucherstrom von  $20 \, \text{A}$  eingesetzt werden.

- Welcher Nebenwiderstand ist zu schalten?
- Welche Stellung nimmt der Zeiger an, wenn statt des unter a) errechneten Nebenwiderstandes ein Widerstand von  $0,025 \, \Omega$  genommen wird.

$$\text{a) } n = \frac{20 \, \text{A}}{2 \, \text{A}} = 10; \quad R_N = \frac{0,45 \, \Omega}{9} = 0,05 \, \Omega$$

$$\text{b) } n = 1 + \frac{R_M}{R_N} = 1 + \frac{0,45 \, \Omega}{0,025 \, \Omega} = 19; \quad I_1 = 19 \cdot 2 \, \text{A} = 38 \, \text{A}$$

$$\frac{20 \, \text{A}}{38 \, \text{A}} \cdot 100\% = 52,6\% \text{ des Skalendendwertes}$$

## 4 Reale Spannungsquelle

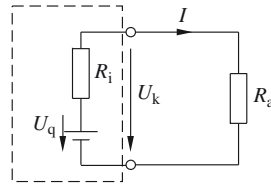


Bild II-15 Reale Spannungsquelle

Wird eine reale Spannungsquelle durch einen Widerstand belastet, sinkt die zwischen den Polen (Klemmen) vorhandene Spannung  $U_K$ , die als *Klemmspannung* bezeichnet wird. Ursache hierfür ist der immer vorhandene *innere Widerstand* einer Spannungsquelle. Die Spannung  $U_q$  wird als *Quellspannung* oder *Leerlaufspannung* bezeichnet. Im Ersatzschaltbild Bild II-15 lässt sich ablesen

$$IR_i + IR_a - U_q = 0 \quad (\text{II.28})$$

$$U_K = IR_a \quad (\text{II.29})$$

$$\text{Klemmspannung} \quad U_K = U_q - IR_i \quad (\text{II.30})$$

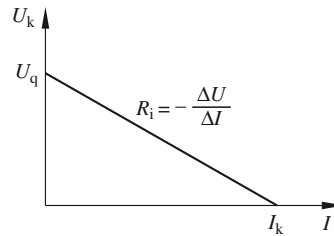


Bild II-16 Kennlinie einer Spannungsquelle

Sind  $R_i$  und  $U_q$  unabhängig vom Belastungsstrom, liegt eine *lineare Quelle* vor, deren Kennlinie in Bild II-16 dargestellt ist. Wenn  $I = 0$  ist, folgt aus Gleichung (II.30)  $U_K = U_q$ . Ist dagegen der Widerstand  $R_a = 0$  (Quelle kurzgeschlossen), nimmt der Strom seinen Maximalwert an.

$$\text{Kurzschlussstrom} \quad I_K = \frac{U_q}{R_i} \quad (\text{II.31})$$

Aus der Kennlinie lässt sich auch der Innenwiderstand  $R_i$  bestimmen.

$$\text{Innenwiderstand} \quad R_i = -\frac{\Delta U}{\Delta I} \quad (\text{II.32})$$

Eine Spannungsquelle mit einem Innenwiderstand  $R_i = 0$  wird als *ideale Spannungsquelle* oder *Konstantspannungsquelle* bezeichnet.

### 4.1 Kombination von Spannungsquellen

Spannungsquellen können in Reihe oder parallel geschaltet werden. Von Interesse ist auch hier der resultierende Innenwiderstand und die Quellspannung der gesamten Anordnung.



### 4.1.1 Reihenschaltung

Die Kombination kann durch eine einzelne Quelle ersetzt werden, die durch *Quellspannung* und *Innenwiderstand* charakterisiert wird. Um diese Größen zu berechnen, nimmt man zunächst an, dass die Quelle nicht belastet ist. Die Klemmspannung ist dann gleich der Quellspannung.

$$\text{Quellspannung } U_q = U_1 + U_2 \quad (\text{II.33})$$

$$\text{Kurzschlussstrom } I_K = \frac{U_1 + U_2}{R_1 + R_2} = \frac{U_q}{R_i} \quad (\text{II.34})$$

$$\text{Innenwiderstand } R_i = R_1 + R_2 \quad (\text{II.35})$$

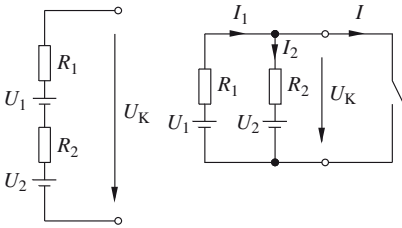


**Bild II-17** Kombination von Spannungsquellen

### 4.1.2 Parallelschaltung

Um die Quellspannung und den Innenwiderstand zu bestimmen, wird zunächst die Quelle nicht belastet. ( $U_K = U_q$ )

$$\text{Ausgleichsstrom } I_1 = I_2 = \frac{U_1 - U_2}{R_1 + R_2} \quad (\text{II.36})$$

$$\text{Quellspannung } U_q = U_2 + I_2 R_2 \quad (\text{II.37})$$

$$U_q = U_2 + R_2 \frac{U_1 - U_2}{R_1 + R_2} \quad (\text{II.38})$$

$$U_q = \frac{U_1 R_2 + U_2 R_1}{R_1 + R_2} \quad (\text{II.39})$$

Aus dem Kurzschlussstrom ( $I = I_K$ ) lässt sich der Innenwiderstand berechnen.

$$\text{Knoten } I_1 = I_2 + I_K \quad (\text{II.40})$$

$$\text{rechte Masche } I_2 R_2 + U_2 = 0 \quad (\text{II.41})$$

$$\text{linke Masche } I_1 R_1 + I_2 R_2 + U_2 - U_1 = 0 \quad (\text{II.42})$$

$$\text{Kurzschlussstrom } I_K = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} \quad (\text{II.43})$$

$$I_K = \frac{U_1 R_2 + U_2 R_1}{R_1 \cdot R_2} \quad (\text{II.44})$$

$$\text{Innenwiderstand } R_i = \frac{U_q}{I_K} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (\text{II.45})$$

$$R_i = R_1 \text{ parallel } R_2 \quad (\text{II.46})$$

## 5 Ersatzstromquelle

Jede Quelle kann auch entsprechend Bild II-18 durch eine Ersatzstromquelle mit einem Quellstrom  $I_q$  und einem parallel dazu liegenden Innenwiderstand betrachtet werden. Es gelten die Beziehungen

$$\text{Kurzschluss } I = I_q \quad (\text{II.47})$$

$$U = 0 \quad (\text{II.48})$$

$$I_i = 0 \quad (\text{II.49})$$

$$\text{Leerlauf } I_i = I_q \quad (\text{II.50})$$

$$I = 0 \quad (\text{II.51})$$

$$U = I_q R_i \quad (\text{II.52})$$

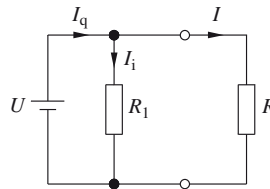


**Bild II-18**  
Ersatzstromquelle

Im folgenden Beispiel Bild II-19 soll der aktive Zweipol einmal durch eine Ersatzspannungsquelle und einmal durch eine Ersatzstromquelle dargestellt werden.

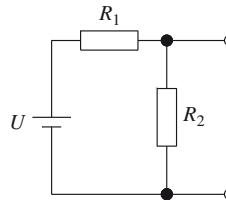


**Bild II-19**  
Beispiel Ersatzquelle

$$\text{Ersatzspannungsquelle } U_q = U \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (\text{II.53})$$

$$R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (\text{II.54})$$

$$I_K = \frac{U}{R_1} \quad (\text{II.55})$$

$$\text{Ersatzstromquelle } I_q = \frac{U}{R_1} = I_K \quad (\text{II.56})$$

$$R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (\text{II.57})$$

## 6 Netzwerkberechnung

Die Berechnung von Strömen, Spannungen oder Leistungen in einer beliebigen elektrischen Schaltung bezeichnet man als *Netzwerkberechnung*. Zur Berechnung der Ströme und Spannungen kann man im Prinzip immer Knoten- und Maschenregeln anwen-



den. Dies kann allerdings in komplizierten Netzwerken zu einer großen Zahl von Unbekannten und damit Gleichungen führen. Hier führen manchmal andere Verfahren schneller zum Ziel.

### 6.1 Gemischte Schaltungen

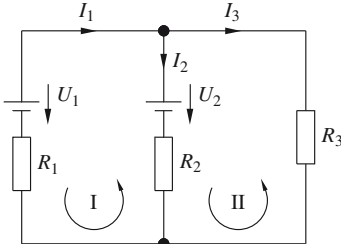


Bild II-20 Beispiel Netzwerk

Zunächst soll an Hand eines Beispiels die Berechnung mit Hilfe der Kirchhoffschen Gesetze erfolgen. Die Spannungspfeile werden von + nach – gezeichnet. Die Strompfeile werden willkürlich angenommen. Sollte für einen der Ströme ein negativer Wert berechnet werden, ist der Pfeil falsch gewählt worden. Die Werte in der Schaltung Bild II-20 sind:  $U_1 = 20 \text{ V}$ ,  $U_2 = 30 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_2 = 100 \Omega$ ,  $R_3 = 50 \Omega$ .

**Knotenregel**  $I_1 - I_2 - I_3 = 0$ ;

**Masche I**  $U_1 - I_1 R_1 - I_2 R_2 - U_2 = 0$ ;

**Masche II**  $U_2 + I_2 R_2 - I_3 R_3 = 0$

Mit Zahlenwerten und nach Umstellung

**Knotenregel**  $I_1 - I_2 - I_3 = 0$ ;

**Masche I**  $100 \Omega \cdot I_1 + 100 \Omega \cdot I_2 = -10 \text{ V}$ ;

**Masche II**  $100 \Omega \cdot I_2 - 50 \Omega \cdot I_3 = -30 \text{ V}$

Durch Einsetzen kann dieses Gleichungssystem gelöst werden.

$$I_1 = 75 \text{ mA}; \quad I_2 = -175 \text{ mA}; \quad I_3 = 250 \text{ mA}$$

Aus dem negativen Wert für  $I_2$  ist zu erkennen, dass die tatsächliche Stromrichtung der eingezeichneten Pfeilrichtung entgegengesetzt ist.

- **Beispiel:** In der Schaltung nach Bild II-9 soll der Strom durch den Widerstand  $R_3$  berechnet werden. Die angelegte Spannung ist  $100 \text{ V}$ .

Ausgehend vom Ergebnis in Gleichung (II.19) ist der Gesamtstrom

$$I_{\text{ges}} = \frac{100 \text{ V}}{12,38 \Omega} = 8,08 \text{ A}; \quad U_{AN} = 8,08 \text{ A} \cdot 5 \Omega = 40,4 \text{ V};$$

$$U_{NB} = 100 \text{ V} - 40,4 \text{ V} = 59,6 \text{ V}$$

$$I_2 = \frac{59,6 \text{ V}}{18 \Omega} = 3,31 \text{ A}; \quad I_3 = \frac{59,6 \text{ V}}{12,5 \Omega} = 4,77 \text{ A}$$

Die Spannung über  $R_3$  ist gleich der Spannung zwischen den Punkten C und D in Bild II-12:

$$U_{CD} = 4,77 \text{ A} \cdot 7,5 \Omega - 3,31 \text{ A} \cdot 3 \Omega = 25,85 \text{ V}.$$

### 6.2 Überlagerungsverfahren

Ein weiteres Verfahren ist die Berechnung mit Hilfe des *Helmholtz'schen Überlagerungsverfahrens*. Bei der Berechnung von Zweigströmen in einem Netzwerk mit mehreren Spannungsquellen werden zunächst alle Spannungsquellen bis auf eine kurzgeschlossen. Für diesen Fall werden die Teilströme berechnet. Dann wird dasselbe Verfahren für eine weitere Spannungsquelle durchgeführt und wieder die Teilströme berechnet. Der gesamte Zweigstrom ergibt sich als Summe der Teilströme.

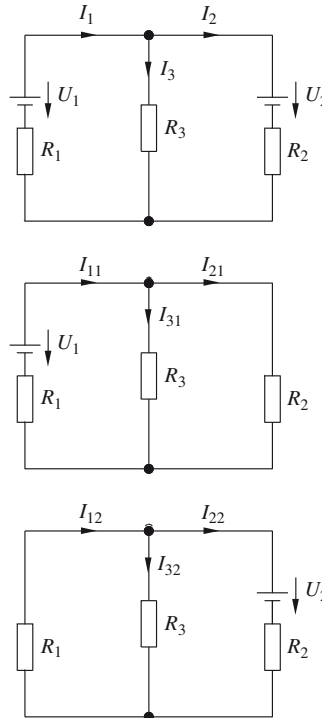


Bild II-21a, b, c Überlagerungsverfahren

Das Verfahren soll an Hand der Schaltung in Bild II-21a dargestellt werden. Zunächst werden alle Spannungen bis auf  $U_1$  kurzgeschlossen. Es entsteht die Ersatzschaltung nach Bild II-21b. Der Teilstrom  $I_{11}$  errechnet sich zu

$$I_{11} = \frac{U_1}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}} = U_1 \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \quad (\text{II.58})$$

Werden im nächsten Schritt alle Spannungen bis auf  $U_2$  kurzgeschlossen, entsteht die Ersatzschaltung Bild II-21c. Jetzt lässt sich der Teilstrom  $I_{22}$  berechnen.

$$I_{22} = U_2 \frac{R_1 + R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \quad (\text{II.59})$$

und daraus weiter:

$$I_{12} = U_2 \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \quad (\text{II.60})$$

$$I_1 = I_{11} + I_{12} \quad (\text{II.61})$$

Haben die Spannungsquellen einen nicht vernachlässigbaren Innenwiderstand, darf dieser nicht kurzgeschlossen werden.

### 6.3 Ersatzspannungsquelle

Oft ist in Netzwerken nur nach einer Teilspannung oder einem Teilstrom gefragt. In diesem Fall lässt sich die Methode der Ersatzspannungsquelle anwenden. Als Beispiel wird die in Bild II-22 dargestellte Brückenschaltung mit einer Last  $R_5$  betrachtet. In der Messtechnik interessiert als Messgröße die Spannung  $U_{AB}$  zwischen den Punkten A und B bei einer Belastung durch ein Messgerät.

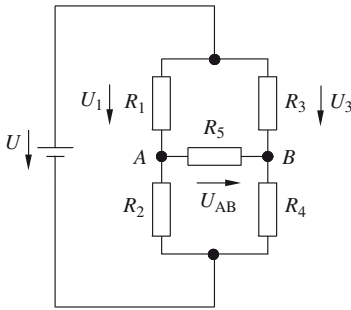


**Bild II-22**  
Brücke

Bei nicht belasteter Brücke besteht zwischen den Punkten A und B die Spannung  $U_{AB0}$ . Diese Spannung wird als Quellspannung einer Ersatzspannungsquelle gesehen.

$$U_{AB0} = U_3 - U_1 \quad (\text{II.62})$$

$$U_{AB0} = U \left( \frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \quad (\text{II.63})$$

Die Spannung  $U_{AB}$  ist dann als Klemmspannung einer Spannungsquelle mit der Quellspannung  $U_{AB0}$  anzusehen. Der Innenwiderstand dieser Ersatzspannungsquelle ist durch die Brückenwiderstände festgelegt. Er wird dadurch bestimmt, dass die äußere Spannungsquelle  $U$  kurzgeschlossen wird.

$$\text{Innenwiderstand } R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \quad (\text{II.64})$$

$$\text{Brückenspannung } U_{AB} = U_{AB0} \frac{R_5}{R_i + R_5} \quad (\text{II.65})$$

■ **Beispiel:** In der Schaltung nach Bild II-22 gelten folgende Werte:

$$R_1, R_3, R_4 = 100 \, \Omega, R_2 = 200 \, \Omega, R_5 = 1 \, \text{k}\Omega, U = 10 \, \text{V}.$$

Wie groß ist die Spannung  $U_{AB}$ ?

$$U_{AB0} = 10 \, \text{V} \left( \frac{100}{200} - \frac{100}{300} \right) = 1,67 \, \text{V};$$

$$R_i = \frac{100 \cdot 200}{100 + 200} \, \Omega + \frac{100 \cdot 100}{100 + 100} \, \Omega = 116,67 \, \Omega$$

$$U_{AB} = 1,67 \, \text{V} \frac{1000}{116,67 + 1000} = 1,49 \, \text{V}$$

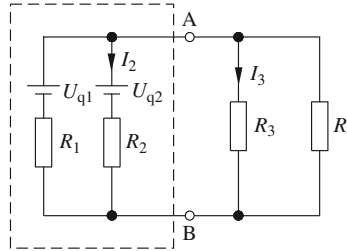


**Bild II-23** Beispiel Methode der Ersatzspannungsquelle

■ **Beispiel:** Berechnung des Stromes  $I_3$  durch den Widerstand  $R_3$  (Bild II-23).

$$U_{q1} = 6 \, \text{V}, \quad U_{q2} = 4 \, \text{V}, \quad R_1 = 0,5 \, \Omega,$$

$$R_2 = 0,8 \, \Omega, \quad R_3 = R_4 = 6 \, \Omega$$

Die im gestrichelten Rechteck liegenden Bauteile werden zu einer Ersatzspannungsquelle zusammengefasst. Die Quellspannung kann aus dem unbelasteten Fall bestimmt werden.

$$I_2 = \frac{U_{q1} - U_{q2}}{R_1 + R_2} = \frac{6 \, \text{V} - 4 \, \text{V}}{0,5 \, \Omega + 0,8 \, \Omega} = 1,54 \, \text{A};$$

$$U_q = U_{q2} + I_2 R_2 = 4 \, \text{V} + 1,54 \, \text{A} \cdot 0,8 \, \Omega = 1,23 \, \text{V}$$

$$R_i = \frac{0,8 \cdot 0,5}{0,8 + 0,5} \, \Omega = 0,307 \, \Omega$$

Die Klemmspannung sinkt bei Belastung mit

$$R_a = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 3 \, \Omega \quad \text{auf}$$

$$U_{AB} = U_q \frac{R_a}{R_a + R_i} = 1,23 \, \text{V} \frac{3 \, \Omega}{3 \, \Omega + 0,307 \, \Omega} = 1,11 \, \text{V};$$

$$I_3 = \frac{1,11 \, \text{V}}{3 \, \Omega} = 0,37 \, \text{A}$$

### 6.4 Nichtlineare Gleichstromkreise

Bisher wurde vorausgesetzt, dass die Widerstände in den Netzwerken nicht stromabhängig sind. Derartige Netzwerke werden als *lineare Netzwerke* bezeichnet. Ist der Widerstand eines Bauteils stromabhängig, wird diese Abhängigkeit normalerweise durch eine Kennlinie dargestellt. Die Bestimmung von Spannungen und Strömen im Kreis erfolgt meistens grafisch. Zur Erläuterung wird die Schaltung nach Bild II-24 betrachtet. In Bild II-25 sind auf der Ordinate der Strom und auf der Abszisse die Spannung  $U_D$  an der Diode aufgetragen. Die Kennlinie der Diode ist als Kurve 1 eingetragen. Weiter ist als Gerade 2 die Kennlinie des Ohmschen Widerstandes eingetragen. Diese Gerade errechnet sich durch

$$I = \frac{U_R}{R} = \frac{U - U_D}{R} \quad (\text{II.66})$$

Da durch Widerstand und Diode der gleiche Strom fließt, stellt sich als *Arbeitspunkt A* der Schnittpunkt beider Kennlinien ein. Es fließt der Strom  $I_A$  und an der Diode liegt die Spannung  $U_{DA}$ .

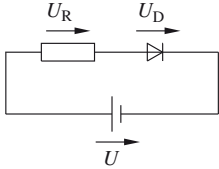


**Bild II-24**  
Nichtlineare Kreise

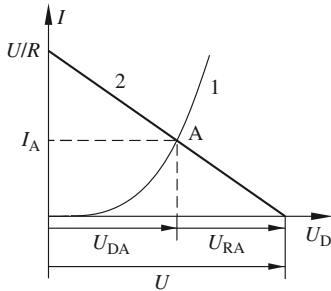


**Bild II-25** Bestimmung des Arbeitspunktes

■ **Beispiel:** Die Diode in der Schaltung nach Bild II-24 hat eine Kennlinie gemäß Bild II-26. Der Widerstand  $R_1$  ist  $6 \Omega$ , die Spannung  $U$  ist  $1,8 \text{ V}$ . Um wieviel Prozent ändert sich die Spannung  $U_R$ , wenn zu  $R_1$  ein Widerstand  $R_2$  von  $4 \Omega$  parallel geschaltet wird?

Die Kennlinie von  $R_1$  ist die Gerade 2. Der Schnittpunkt mit der Spannungsachse liegt bei  $1,8 \text{ V}$ , der mit der Stromachse bei

$$I = \frac{U}{R_1} = \frac{1,8 \text{ V}}{6 \Omega} = 0,3 \text{ A} . \text{ Schnittpunkt mit Kennlinie 1: } U_D = 0,9 \text{ V;}$$

$$U_R = U - U_D = 1,8 \text{ V} - 0,9 \text{ V} = 0,9 \text{ V} .$$

Der Widerstand  $R$  ändert sich durch die Parallelschaltung auf den Wert  $R = \frac{6 \cdot 4}{6 + 4} \Omega = 2,4 \Omega$ . Die zugehörige Kennlinie ist die Ge-

rade 3, die bei  $I = \frac{1,8 \text{ V}}{2,4 \Omega} = 0,75 \text{ A}$  die Ordinate schneidet. Der

Schnittpunkt mit der Kurve 1 liegt bei  $1,0 \text{ V}$ . Die Spannung am Widerstand ist jetzt  $U'_R = 1,8 \text{ V} - 1,0 \text{ V} = 0,8 \text{ V}$ .

$$\frac{U'_R - U_R}{U_R} = \frac{0,8 - 0,9}{0,9} = -0,11 . \text{ Die Spannung hat sich um } 11 \% \text{ verringert.}$$

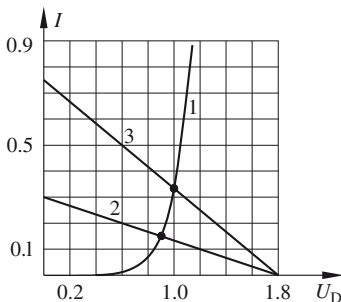


**Bild II-26** Beispiel Nichtlinearer Kreis

## 7 Energie, Leistung, Wirkungsgrad

Fließt durch einen Widerstand  $R$  eine Ladung  $Q$ , wird die Arbeit  $W$  nach Gleichung (I.3) bestimmt.

$$\text{Arbeit } W = U \cdot I \cdot t = \frac{W}{J} = \frac{W}{\text{Vs}} = \frac{U}{\text{V}} \cdot \frac{I}{\text{A}} \cdot \frac{t}{\text{s}} \quad (\text{II.67})$$

Hieraus bestimmt sich die Leistung  $P$ .

$$\text{Leistung } P = \frac{W}{t} = U \cdot I = \frac{P}{\text{W}} = \frac{U}{\text{V}} \cdot \frac{I}{\text{A}} \quad (\text{II.68})$$

Die Einheit der Leistung ist das *Watt*. Die Rückführung auf die SI-Grundeinheiten ergibt

$$1 \text{ W} = 1 \text{ VA} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3} \quad (\text{II.69})$$

Für die Leistung lassen sich mit Hilfe des *Ohmschen Gesetzes* nach Gleichung (I.11) die folgenden Beziehungen ableiten:

$$P = \frac{U^2}{R} \quad (\text{II.70})$$

$$P = R \cdot I^2 \quad (\text{II.71})$$

### 7.1 Leistungsanpassung

Wird in einem Gleichstromkreis ein Ohmscher Verbraucher an eine reale Spannungsquelle angeschlossen, ist die vom Verbraucher aufgenommene Leistung abhängig von dessen Widerstand. Betrachtet wird die Schaltung nach Bild II-15.  $U_q$  und  $R_i$  der Spannungsquelle sind bekannt. Die vom Verbraucher aufgenommene Leistung ist dann

$$P_V = U_K \cdot I = U_q \cdot \frac{R_a}{R_i + R_a} \cdot \frac{U_q}{R_i + R_a} \quad (\text{II.72})$$

$$P_V = U_q^2 \cdot \frac{R_a}{(R_i + R_a)^2} \quad (\text{II.73})$$

Für die Extremfälle  $R_a = 0 \Omega$  und  $R_a = \infty$  verschwindet die aufgenommene Leistung. Dazwischen muss ein Maximum liegen. Die Lage dieses Maximums lässt sich mit Hilfe der Differentialrechnung bestimmen.

$$\frac{dP_V}{dR_a} = \frac{(R_i + R_a)^2 - 2R_a(R_i + R_a)}{(R_i + R_a)^4} \quad (\text{II.74})$$

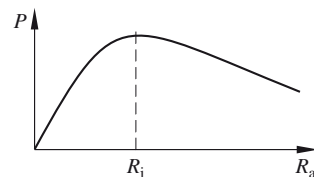


**Bild II-27** Leistungsanpassung

Zur Bestimmung der Lage des Maximums muss dieser Ausdruck  $= 0$  werden. Das ist dann der Fall, wenn der Zähler  $= 0$  wird. Man erhält die Gleichung

$$(R_i + R_a)^2 - 2R_a(R_i + R_a) = 0 \quad (\text{II.75})$$

$$\text{mit der Lösung } R_a = R_i \quad (\text{II.76})$$

In diesem Fall ist der Leistungsverlust am Innenwiderstand gleich der vom Verbraucher aufgenommenen Leistung. Bei großen Leistungen kann man keine Leistungsanpassung vornehmen; verwendet wird sie allerdings häufig in der Nachrichtentechnik.

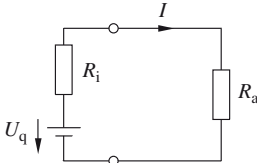


**Bild II-28** Beispiel Leistungsanpassung

■ **Beispiel:** In der Schaltung Bild II-28 sind  $U_q = 10 \text{ V}$  und  $R_i = 0,5 \Omega$ .

- Welchen Wert muss  $R_a$  haben, damit er eine Leistung von 10 W verbraucht?
- Welche Leistung kann  $R_a$  maximal umsetzen?

$$a) P_a = I^2 \cdot R_a = \left( \frac{U_q}{R_i + R_a} \right)^2 \cdot R_a \quad (\text{II.77})$$

$$P_a (R_i + R_a)^2 = U_q^2 \cdot R_a \quad (\text{II.78})$$

$$R_a^2 + \left( 2R_i - \frac{U_q^2}{P_a} \right) R_a + R_i^2 = 0 \quad (\text{II.79})$$

$$R_a^2 - 9 \Omega R_a + 0,25 \Omega^2 = 0;$$

$$R_{a1} = \left( 4,5 + \sqrt{4,5^2 - 0,25} \right) \Omega = 8,97 \Omega;$$

$$R_{a2} = \left( 4,5 - \sqrt{4,5^2 - 0,25} \right) \Omega = 0,28 \Omega$$

$$b) P_{a\max} = \left( \frac{U_q}{R_i + R_i} \right)^2 \cdot R_i = \left( \frac{10}{1} \right)^2 \cdot 0,5 \text{ W} = 50 \text{ W}$$

## 7.2 Leistungsverlust auf Leitungen

Da jede Zuleitung zu einem Verbraucher einen Ohmschen Widerstand  $R_L$  besitzt, wird immer elektrische Energie verbraucht. Der Widerstand der Zuleitung berechnet sich nach Gleichung (I.14). Hierbei ist für  $l$  die gesamte Leiterlänge, also der doppelte Abstand zwischen Verbraucher und Spannungsquelle einzusetzen.

■ **Beispiel:** Ein Verbraucher ist 2,4 km von der Spannungsquelle entfernt. Die Leitung besteht aus Kupfer und hat einen Durchmesser von 8 mm. Wieviel Prozent der am Verbrauchsort zur Verfügung stehenden Leistung von 20 kW gehen verloren, wenn die Spannung

beim Verbraucher 440 V beträgt  $\left( \rho_{\text{Cu}} = 0,0173 \frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}} \right)$ ?

$$\text{Leitungswiderstand } R_L = \frac{\rho \cdot 2l}{A} = \frac{0,0173 \cdot 4800 \cdot 4}{\pi \cdot 8^2} \Omega = 1,65 \Omega;$$

$$\text{Strom } I = \frac{20 \text{ kW}}{440 \text{ V}} = 45,45 \text{ A};$$

$$\text{Verlust auf der Leitung } P_L = R_L \cdot I^2 = 1,65 \cdot 45,45^2 \text{ W} = 3408 \text{ W}$$

$$\text{prozentualer Anteil } \frac{100 \cdot 3408}{20000} \% = 17\%$$

## 7.3 Wirkungsgrad

Der Wirkungsgrad  $\eta$  ist definiert als Verhältnis von zugeführter Energie  $W_{\text{Zu}}$  oder Leistung  $P_{\text{Zu}}$  zur Nutzenergie  $W_N$  oder Nutzleistung  $P_N$ . Da es bei allen Maschinen und Antrieben Verluste gibt, ist der Wirkungsgrad immer kleiner als 1 oder 100 %.

$$\text{Wirkungsgrad } \eta = \frac{W_N}{W_{\text{Zu}}} = \frac{P_N}{P_{\text{Zu}}} \leq 1 \quad (\text{II.80})$$

Die Differenz zwischen zugeführter Leistung und Nutzleistung ist die Verlustleistung.

$$\text{Verlustleistung } P_V = P_{\text{Zu}} - P_N \quad (\text{II.81})$$

## 7.4 Umwandlung elektrischer Energie

Elektrische Energie kann in andere Energieformen umgewandelt werden. Beispiele sind Umwandlung in Wärmeenergie (Kochplatte, Tauchsieder) oder mechanische Energie (Antriebe, Pumpen).

### 7.4.1 Wärme

Die für eine Temperaturerhöhung von  $\Delta T$  oder  $\Delta \vartheta$  notwendige Wärmeenergie  $\Delta Q$  ist gegeben durch

$$\Delta Q = mc \Delta T = mc \Delta \vartheta \quad (\text{II.82})$$

Da die Kelvin-Skala und die Celsius-Skala dieselben Temperaturschritte haben, kann die Temperaturdifferenz sowohl in K als auch in °C angegeben werden.  $m$  ist die Masse und  $c$  die spezifische Wärmekapazität des zu erwärmenden Materials. Sie beträgt für

$$\text{Wasser } c_{\text{Wasser}} = 4,19 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}.$$

■ **Beispiel:** Wieviel Liter Wasser lassen sich mit einer elektrischen Energie von 15 kWh von  $\vartheta_1 = 15^\circ \text{C}$  auf  $\vartheta_2 = 80^\circ \text{C}$  erwärmen (1 Liter Wasser hat die Masse 1 kg)?

$$1 \text{ kWh} = 3600 \text{ kWs}$$

$$m = \frac{\Delta Q}{c \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1)} = \frac{15 \cdot 3600 \text{ kJ}}{4,19 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \cdot (80 - 15) \text{ K}} = 198,3 \text{ kg}$$

■ **Beispiel:** Wie lange dauert es, um 5 l Wasser von  $\vartheta_1 = 15^\circ \text{C}$  mit einer Kochplatte, die eine Leistungsaufnahme von 800 W hat, zum Sieden zu bringen ( $\vartheta_2 = 100^\circ \text{C}$ )? Der Wirkungsgrad beträgt 75 %.

$$P_N = \eta \cdot P_{\text{Zu}}; \quad P_N = \frac{\Delta Q}{t} = \frac{m \cdot c \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1)}{t};$$

$$t = \frac{m \cdot c \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1)}{P_{\text{Zu}} \cdot \eta}$$

$$t = \frac{5 \text{ kg} \cdot 4,19 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \cdot (100 - 15) \text{ K}}{0,8 \frac{\text{kJ}}{\text{s}} \cdot 0,75} = 2986 \text{ s} = 49,5 \text{ min}$$

### 7.4.2 Mechanische Energie

Elektrische Energie kann auch in potentielle oder kinetische Energie umgewandelt werden. Für diese Energieformen gelten die Gleichungen:

$$E_{\text{pot}} = mgh \text{ und } E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 \text{ (siehe Physik II.2.4).}$$

Hierbei gilt natürlich ebenfalls der Energieerhaltungssatz.

- **Beispiel:** Aus einer Grube sollen bei täglich 6 h Arbeitszeit innerhalb von 3 Tagen 12 000 m<sup>3</sup> Wasser über eine Förderhöhe von 10 m gepumpt werden. Welche Leistung muss der Motor aufnehmen, wenn ein Wirkungsgrad  $\eta = 70\%$  vorhanden ist?

$$W_{\text{Pot}} = mgh; P_{\text{Zu}} = \frac{mgh}{t \cdot \eta} = \frac{12 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ m}}{0,7 \cdot (3 \cdot 6 \cdot 3600) \text{ s}} = 25,9 \text{ kW}$$

- **Beispiel:** Eine Güterzuglokomotive soll einen Güterzug von 500 t auf eine Geschwindigkeit von 100 km/h bringen. Die Lokomotive nimmt eine konstante Leistung von 2000 kW bei einem Wirkungsgrad von 40 % auf. Wie lange braucht der Zug bis zum Erreichen der Endgeschwindigkeit?

$$P_{\text{Zu}} \cdot \eta = \frac{W_{\text{kin}}}{t} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{t};$$

$$t = \frac{mv^2}{2 \cdot \eta \cdot P_{\text{Zu}}} = \frac{500 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \left(\frac{100 \text{ m}}{3,6 \text{ s}}\right)^2}{2 \cdot 0,4 \cdot 2000 \cdot 10^3 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^3}} = 241 \text{ s} = 4 \text{ min}$$

- **Beispiel:** Ein Gleichstrommotor wird mit dem Drehmoment  $M = 35 \text{ Nm}$  belastet und hat dabei die Drehzahl  $n = 1500 \frac{1}{\text{min}}$ . Die am Motor liegende Spannung beträgt  $U = 400 \text{ V}$ , der aufgenommene Strom  $I = 17 \text{ A}$ . Wie groß ist der Wirkungsgrad des Motors?

$$P_N = 2\pi nM; P_N = 2\pi \cdot \frac{1500}{60} \frac{1}{\text{s}} \cdot 35 \text{ Nm} = 5497 \text{ W};$$

$$P_{\text{Zu}} = UI = 400 \cdot 17 \text{ W} = 6800 \text{ W}$$

$$\eta = \frac{P_N}{P_{\text{Zu}}} = \frac{5497 \text{ W}}{6800 \text{ W}} = 0,81 \text{ oder } 81\%.$$

## III Das Elektrische Feld

Wenn in jedem Punkt des Raumes eine physikalische oder technische Größe definiert ist, so bezeichnet man dies als *Feld*. So kann man z.B. in jedem Punkt eines Zimmers eine Temperatur messen; es ist ein *Temperaturfeld* definiert. An jedem Punkt über der Erdoberfläche herrscht eine Anziehungskraft, dies ergibt ein *Kraftfeld*, in diesem Fall das *Gravitationsfeld*. Im ersten Fall liegt, da die Temperatur eine skalare Größe ist, ein *Skalarfeld*, im zweiten Fall ein *Vektorfeld* vor.

### 1 Grundgrößen

#### 1.1 Kräfte zwischen Ladungen

Zwischen elektrischen Ladungen bestehen immer Kräfte. Haben zwei Ladungen das gleiche Vorzeichen, stoßen sie sich ab, bei ungleichem Vorzeichen ziehen sie sich an. Die Größe der Kraft hängt von der Größe der Ladungen und von deren Abstand ab und wird durch das *Coulombsche Gesetz* beschrieben.

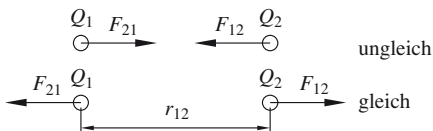


Bild III-1 Coulombsches Gesetz

$$\text{Coulombsches Gesetz } F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \quad (\text{III.1})$$

Die Größe  $\epsilon_0$  heißt *elektrische Feldkonstante*

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \quad (\text{III.2})$$

Der Abstand zwischen den beiden Ladungen ist  $r_{12}$ . Die Richtung der Kraft ist durch die Verbindungslinie zwischen beiden Ladungen gegeben. Die Ladung  $Q_1$  übt auf die Ladung  $Q_2$  die Kraft  $F_{12}$  aus. Im Bild III-1 oben haben die Ladungen unterschiedliches Vorzeichen, die Kraftpfeile sind aufeinander zu gerichtet. Im unteren Teil haben die Ladungen gleiches Vorzeichen. Die Ladung  $Q_2$  übt auf  $Q_1$  eine entgegengesetzt gleich große Kraft aus. Sind mehr als 2 Ladungen vorhanden, werden zunächst die Kräfte zwischen zwei Ladungen berechnet und dann aus allen Kräften die resultierende Kraft bestimmt.

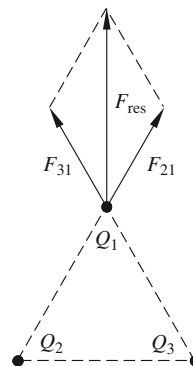


Bild III-2  
Beispiel Kräfte  
zwischen Ladungen

- **Beispiel:** Drei Ladungen ( $Q_1 = -3 \text{ As}$ ,  $Q_2 = Q_3 = 3 \text{ As}$ , Bild III-2) befinden sich an den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks ( $a = 5 \text{ cm}$ ). Wie groß ist die Kraft auf die Ladung  $Q_1$ ?

Da die Ladungen vom Betrag her gleich sind und gleiche Abstände haben, gilt für die Beträge  $F_{21} = F_{31}$ . Die Richtungen sind unterschiedlich und verlaufen in Verlängerung der Dreiecksseiten.

$$F_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3 \cdot 10^{-6} \text{ As} \cdot 3 \cdot 10^{-6} \text{ As}}{(0,05 \text{ m})^2} = 32,35 \text{ N}$$

Die Größe der resultierenden Kraft kann entweder aus der Zeichnung abgelesen werden oder mit Hilfe der Trigonometrie berechnet werden:

$$F_{\text{res}} = 2 \cdot 32,35 \text{ N} \cdot \cos 30^\circ = 56 \text{ N}$$

## 1.2 Feldstärke

Kräfte zwischen Ladungen sind im ganzen Raum vorhanden, deshalb liegt ein *Feld* vor. Werden zwei Ladungen  $Q$  und  $q$  im Abstand  $r$  betrachtet, kann man willkürlich eine der beiden Ladungen als felderzeugende Ladung  $Q$ , die andere als Probeladung  $q$  annehmen. Das Coulombsche Gesetz lautet dann

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Qq}{r^2} \quad (\text{III.3})$$

Wird nun, um eine Definition unabhängig von der Probeladung  $q$  zu erhalten, der Quotient  $\frac{F}{q}$  betrachtet,

erhält man eine Größe, die allein von der felderzeugenden Ladung  $Q$  und dem Abstand  $r$  abhängig ist. Diese Größe nennt man die

*elektrische Feldstärke*

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad \frac{\frac{\text{N}}{\text{As}}}{\frac{\text{V}}{\text{m}}} \left| \frac{\text{F}}{\text{N}} \right| \frac{q}{\text{As}} \quad (\text{III.4})$$

Da die Kraft ein Vektor ist, muss auch die elektrische Feldstärke ein Vektor sein. Die Richtung von  $\vec{E}$  ist gleich der Richtung von  $\vec{F}$  auf eine positive Probeladung. Die Feldstärke ist von der felderzeugenden Ladung und deren geometrischer Anordnung abhängig. Ist  $Q$  eine Punktladung, kann die elektrische Feldstärke nach (III.3) und (III.4) angegeben werden.

$$\text{Feld einer Punktladung} \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \quad (\text{III.5})$$

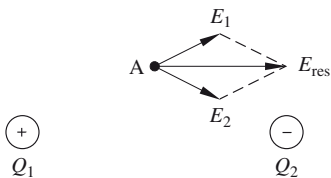


**Bild III-3** Elektrisches Feld

Sind mehrere Ladungen beteiligt, können auch hier wieder die einzelnen Beiträge vektoriell addiert werden. Dies soll am Beispiel eines *Dipols* nach Bild III-3 dargestellt werden. Ein *Dipol* besteht aus zwei gleich großen, entgegengesetzten Ladungen. Die positive Ladung  $Q_1$  erzeugt im Punkt A die Feldstärke  $\vec{E}_1$ . Da  $Q_1$  positiv ist, zeigt  $\vec{E}_1$  von  $Q_1$  weg. Die negative Ladung  $Q_2$  erzeugt die zur Ladung gerichtete

Feldstärke  $\vec{E}_2$ . Hieraus ergibt sich die resultierende Feldstärke  $\vec{E}_{\text{res}}$ .

## 1.3 Feldlinien

Die Konstruktion nach Bild III-3 kann in beliebigen Punkten durchgeführt werden, somit kann in jedem Punkt der Vektorpfeil der resultierenden elektrischen Feldstärke konstruiert werden. Werden die Anfangspunkte der Pfeile durch tangentielle Linien verbunden, erhält man für diesen Dipol Linien wie in Bild III-4. Diese Linien sind die *elektrischen Feldlinien*.

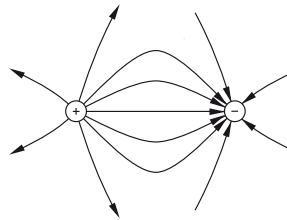


**Bild III-4**  
Dipol

**Eigenschaften elektrischer Feldlinien:** Sie verlaufen von der positiven zur negativen Ladung. Die Tangenten geben die Richtung der Kraft auf eine positive Probeladung an. An den Orten größerer Feldlinien-dichte ist die Kraftwirkung größer. Elektrische Feldlinien schneiden sich nie. Da in elektrischen Leitern die Ladungen frei beweglich sind, werden sie solange verschoben, bis keine tangentielle Kraft mehr vorhanden ist. Daher stehen Feldlinien immer senkrecht auf elektrischen Leitern.

Im Bild III-5 sind einige Feldlinienbilder angegeben. Links für eine positive Punktladung, in der Mitte für zwei entgegengesetzt geladene Platten, rechts für eine positiv geladene Spitze vor einer ebenen Leiterfläche.

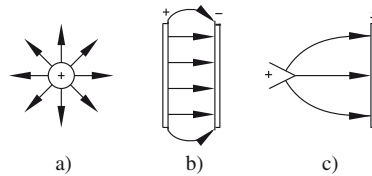


**Bild III-5** Feldlinienbilder

## 1.4 Potential, Spannung

Wenn in einem elektrischen Feld eine positive Ladung von einem Punkt A nach einem Punkt B verschoben wird, muss gegen die herrschende Kraft *Verschiebungsarbeit* verrichtet werden.

*Verschiebungsarbeit*

$$W_{AB} = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B q \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (\text{III.6})$$

Es kann gezeigt werden, dass diese Arbeit unabhängig vom Weg ist. Sie hängt nur von der Lage der

beiden Punkte im elektrischen Feld ab. Das Vorzeichen in Gleichung (III.6) ist so gewählt, dass zu leistende Arbeit positiv gezählt wird.

$$W_{AB} = -q \int_A^B \vec{E} d\vec{s} = qU_{AB} \quad (\text{III.7})$$

$$\text{Spannung } U_{AB} = \frac{W_{AB}}{q} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (\text{III.8})$$

Wird der Ausgangspunkt  $A$  sehr weit (im Grenzfall ins Unendliche) entfernt, ist der Quotient aus der jetzt aufzubringenden Arbeit und der Probeladung  $q$  das

$$\text{Potential } \varphi_B = \frac{W_{\infty B}}{q} = - \int_{\infty}^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (\text{III.9})$$

Die Spannung zwischen zwei Punkten  $A$  und  $B$  ist die Potentialdifferenz zwischen diesen Punkten.

$$\text{Spannung } U_{AB} = \varphi_B - \varphi_A = \Delta\varphi \quad (\text{III.10})$$

$$\Delta W_{AB} = q \cdot \Delta\varphi \quad (\text{III.11})$$

Ist das elektrische Feld nach Betrag und Richtung konstant, spricht man von einem *homogenen Feld*. Wird der Abstand zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  mit  $d$  bezeichnet, folgt aus Gleichung (III.8) im homogenen Feld

$$\text{homogenes Feld: } U = E \cdot d \quad (\text{III.12})$$

## 1.5 Äquipotentiallinien

Werden in einem elektrischen Feld Punkte mit gleichem Potential durch Linien verbunden, entstehen die *Äquipotentiallinien*. Zwischen zwei Punkten auf einer Äquipotentiallinie besteht keine Potentialdifferenz und auch keine Spannung. Hieraus folgt, dass bei Verschiebung einer Ladung auf einer Äquipotentiallinie keine Verschiebungsarbeit zu verrichten ist. Weiterhin folgt aus der Vektorrechnung, dass Äquipotentiallinien und Feldlinien immer senkrecht aufeinander stehen müssen. Da Feldlinien auch immer senkrecht auf Leiteroberflächen stehen, sind alle Leiteroberflächen auch Äquipotentiallinien. Messtechnisch einfacher ist es, Potentiallinien auszumessen. Sind sie bekannt, können die für die Kraftwirkungen wichtigen Feldlinien konstruiert werden. Im Bild III-6 sind für eine metallische Spitze und eine ebene metallische Gegenelektrode die Äquipotentiallinien

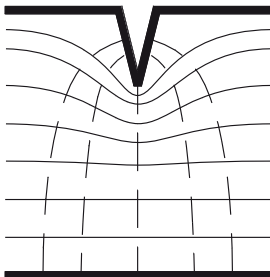


**Bild III-6**  
Äquipotentiallinien

(durchgezogen) und die elektrischen Feldlinien (gestrichelt) dargestellt.

## 1.6 Elektrischer Fluss

Die elektrischen Ladungen sind Ausgangspunkt der elektrischen Feldlinien. Je größer die Ladung, desto mehr Feldlinien gehen von ihr aus. Denkt man sich eine Kugel mit dem Radius  $r$  um eine Ladung, so bezeichnet man alle durch die Kugeloberfläche durchtretenden Feldlinien als den elektrischen Fluss  $\psi$ . Ladung  $Q$  und Fluss  $\psi$  sind *direkt proportional* zueinander. Die Konstante wird zu 1 festgelegt und es gilt

$$\psi = Q \quad (\text{III.13})$$

Für eine Punktladung gilt nach Gleichung (III.5)

$$Q = 4\pi\epsilon_0 r^2 E \quad (\text{III.14})$$

$$\text{Oberfläche einer Kugel } A_{\text{Kugel}} = 4\pi r^2 \quad (\text{III.15})$$

$$\text{elektrischer Fluss } \psi = Q = A_{\text{Kugel}} \cdot \epsilon_0 E \quad (\text{III.16})$$

Der Fluss, dividiert durch die gesamte Oberfläche der Kugel, wird als *Flussdichte*  $D$  bezeichnet.

$$\text{Flussdichte } D = \frac{\psi}{A} \quad \frac{D}{\frac{\text{As}}{\text{m}^2}} \left| \frac{\psi}{\text{As}} \right| \frac{A}{\text{m}^2} \quad (\text{III.17})$$

$$\text{Flussdichte } D = \epsilon_0 E \quad \frac{D}{\frac{\text{As}}{\text{m}^2}} \left| \frac{\epsilon_0}{\frac{\text{As}}{\text{Vm}}} \right| \frac{E}{\text{Vm}} \quad (\text{III.18})$$

Allgemeiner formuliert lautet Gleichung (III.17) in Verbindung mit Gleichung (III.13):

*Der durch eine geschlossene, beliebig geformte Oberfläche  $A$  gehende elektrische Fluss  $\psi$  ist gleich der Summe der von dieser Fläche eingeschlossenen Ladungen.*

$$\psi = \oint \vec{D} d\vec{A} = \sum_{i=1}^n Q_i \quad (\text{III.19})$$

Daraus folgt für die elektrische Feldstärke eine der vier grundlegenden Maxwell'schen Gleichungen

$$\oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \sum_{i=1}^n Q_i \quad (\text{III.20})$$

Steht das elektrische Feld überall senkrecht zu  $A$  und ist es konstant, so ist

$$D = \frac{Q}{A} \quad (\text{III.21})$$

## 1.7 Energie geladener Teilchen im elektrischen Feld

Da auf geladene Teilchen im elektrischen Feld immer eine Kraft wirkt, werden sie nach den Gesetzen der Mechanik immer beschleunigt.

$$F_{\text{el}} = qE = ma \quad (\text{III.22})$$



Ist das elektrische Feld konstant, so ist auch die Beschleunigung konstant. Nach Durchlaufen einer Potentialdifferenz  $\Delta\varphi$  sind die erreichte Bewegungsenergie und die elektrische Energie nach Gleichung (III.11) gleich.

$$\frac{1}{2}mv^2 = q \cdot \Delta\varphi = qU \quad (\text{III.23})$$

Wenn ein Elektron die Potentialdifferenz von 1 V durchläuft, hat es die Energie von  $1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 1 \text{ V} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ . Hieraus leitet sich eine Energieeinheit ab:

$$1 \text{ Elektronenvolt} \quad 1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J} \quad (\text{III.24})$$

## 2 Materie im elektrischen Feld

Befindet sich Materie in einem elektrischen Feld, wirkt auf alle Ladungen in dieser Materie eine elektrische Kraft. Da in Leitern und Nichtleitern unterschiedliche Beweglichkeit der Ladungsträger vorliegt, sind auch die beobachteten Effekte von den Leitereigenschaften der Materialien abhängig.

### 2.1 Leiter

In einem Leiter sind die Ladungsträger (in Metallen sind das die Elektronen) frei beweglich. Bringt man zwei aufeinander liegende Metallplatten in ein elektrisches Feld, werden die Ladungen so verschoben (Bild III-7), dass sich eine gleiche Anzahl von Ladungen auf den entsprechenden Oberflächen gegenüber liegen. Im Leiter wird durch diese Ladungsverschiebung ein Feld  $E_{\text{infl}}$  erzeugt, das denselben Betrag wie das äußere Feld, aber entgegengesetzte Richtung hat. Das resultierende elektrische Feld im Inneren eines Leiters verschwindet daher immer.

$$E_i = E_a - E_{\text{infl}} = 0 \quad (\text{III.25})$$

Diese Ladungsverschiebung heißt *Influenz*. Werden die Platten im elektrischen Feld getrennt und dann aus dem Feld genommen, bleiben die Platten geladen.

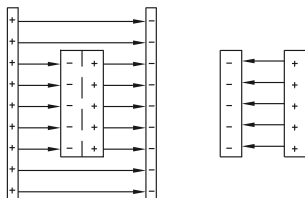


**Bild III-7**  
Influenz

### 2.2 Nichtleiter

In Nichtleitern gibt es keine frei beweglichen Ladungen. Deshalb ist auch das Innere eines Nichtleiters im elektrischen Feld nicht feldfrei. Diese Stoffe werden *Dielektrika* genannt. Hier kann durch das äußere Feld ein inneres Feld erzeugt werden, indem die negative Elektronenhülle eines Atoms sich gegenüber dem

positiven Kern verschieben kann. Es entsteht ein elektrischer Dipol. Auch können eventuell schon vorhandene Dipole im Feld gedreht werden. Es entsteht ein *Polarisationsfeld*  $E_p$ , das dem äußeren Feld  $E_0$  entgegengesetzt gerichtet ist. Im Inneren ist das resultierende Feld

$$E_i = E_0 - E_p \quad (\text{III.26})$$

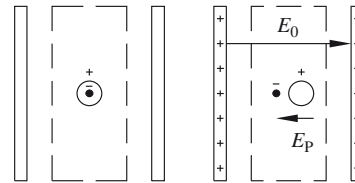


**Bild III-8** Polarisation

Das Feld im Inneren ist gegenüber dem ursprünglichen Feld  $E_0$  geschwächt worden. Zahlenmäßig wird dies durch

$$E_i = \frac{E_0}{\epsilon_r} \quad (\text{III.27})$$

erfasst.  $\epsilon_r$  ist die *Permittivitätszahl* des Materials. Sind die äußeren Platten mit einer konstanten Spannungsquelle verbunden, fließen nach Einbringen eines Dielektrikums so viele Ladungen nach, bis sich das ursprüngliche Feld  $E_0$  wieder eingestellt hat. Damit wird aber nach Gleichung (III.13) der elektrische Fluss  $\psi$  und auch die Flussdichte  $D$  ebenfalls größer und es gilt

$$D = \epsilon_r \epsilon_0 E \quad (\text{III.28})$$

**Tabelle III-1** Permittivitätszahlen bei 20 °C

| Werkstoff       | $\epsilon_r$ |
|-----------------|--------------|
| Glas            | 4 ... 12     |
| Glimmer         | 5 ... 8      |
| Porzellan       | 6            |
| Transformatoröl | 2,3          |
| Wasser          | 81           |
| Luft            | 1,0006       |

## 3 Kondensatoren

Wenn zwischen zwei isolierten Leiteroberflächen eine Spannung liegt, laden sich die Leiteroberflächen auf. Ein solches Bauelement ist ein *Kondensator*. Er dient zur Speicherung elektrischer Ladungen und Energie. Die Ladungsmenge  $Q$ , die bei vorgegebener Spannung  $U$  gespeichert werden kann, hängt von der Geometrie und vom Material zwischen den Kondensatorplatten ab. Der Quotient aus  $Q$  und  $U$  wird als *Kapazität* bezeichnet.



### 3.1 Kapazität

Die Kapazität eines Kondensators ist definiert durch

$$\text{Kapazität } C = \frac{Q}{U} \quad \frac{C}{F} = \frac{\frac{Q}{As}}{\frac{Q}{As} \frac{U}{V}} \quad (III.29)$$

Die Einheit der Kapazität ist 1 F (1 Farad).

#### 3.1.1 Plattenkondensator

Ein Plattenkondensator besteht aus zwei parallelen Platten im Abstand  $d$ . Bis auf den Randbereich ist das elektrische Feld  $E$  homogen. Befindet sich zwischen den Platten Vakuum oder Luft, gilt

$$D = \frac{Q}{A} = \epsilon_0 E = \epsilon_0 \frac{U}{d} \quad (III.30)$$

$$C_{\text{Pl}} = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (III.31)$$

Befindet sich zwischen den Platten ein Material mit der Permittivitätszahl  $\epsilon_r$ , dann gilt

$$C_{\text{Pl}} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} \quad (III.32)$$

#### 3.1.2 Spezielle Kondensatoren

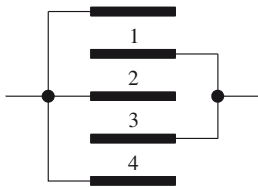


**Bild III-9** Blockkondensator

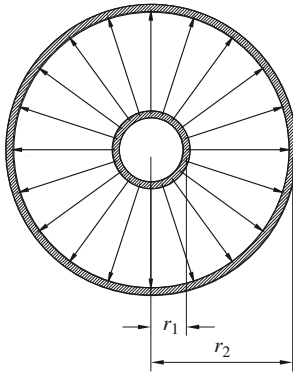


**Bild III-10** Kugelkondensator

Ein *Blockkondensator* besteht aus  $n$  Platten eines Kondensators, die wie in Bild III-9 verbunden sind. Es ist eine Parallelschaltung mit  $(n-1)$  wirksamen Kondensatoren.

$$\text{Blockkondensator } C_{\text{Block}} = (n-1) \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} \quad (III.33)$$

Ein *Kugelkondensator* besteht aus zwei konzentrisch angebrachten Kugeln. Die Vorteile eines Kugelkondensators liegen darin, dass keine Streufelder auftreten, da keine Ecken vorhanden sind. Die elektrischen Feldlinien verlaufen radial-symmetrisch und ändern ihren Abstand von innen nach außen. Das Feld ist also nicht homogen. Für die Kapazität eines Kugelkondensators ergibt sich mit der in Bild III-10 dargestellten Geometrie:

$$\text{Kugelkondensator } C_{\text{Kugel}} = 4 \pi \epsilon_0 \epsilon_r \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \quad (III.34)$$

Der *Zylinderkondensator* besteht aus zwei ineinander liegenden konzentrischen Zylindern. Wird der Radius des äußeren Zylinders mit  $r_2$  und der des inneren Zylinders mit  $r_1$  bezeichnet, gilt bei einer Länge  $L$  des Kondensators für die Kapazität:

$$\text{Zylinderkondensator } C_{\text{Zyl}} = 2 \pi \epsilon_0 \epsilon_r \frac{L}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \quad (III.35)$$

Jedes *Koaxialkabel* ist von seiner Bauform her ein Zylinderkondensator. In der Hochfrequenztechnik ist diese Kapazität daher zu berücksichtigen. Für die Kapazität einer *einzelnen zylindrischen Leitung* mit dem Radius  $r$ , die in einer Höhe  $h$  über der Erde liegt, gilt

*Kapazität einer Leitung*

$$C_L = 2 \pi \epsilon_0 \epsilon_r \frac{L}{\ln\left(\frac{h}{r} + \sqrt{\left(\frac{h}{r}\right)^2 - 1}\right)} \quad (III.36)$$

$$\text{für } h \gg r \quad C_L = 2 \pi \epsilon_0 \epsilon_r \frac{L}{\ln\left(\frac{2h}{r}\right)} \quad (III.37)$$

Auch zwei im Abstand  $d$  verlaufende Leitungen mit dem Radius  $r$  und der Länge  $L$  besitzen eine Kapazität.

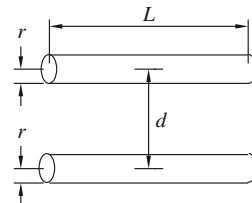
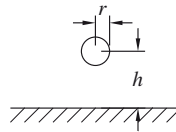


**Bild III-11**  
Kapazität von  
Leitungen

### Kapazität einer Doppelleitung

$$C_{DL} = \pi \epsilon_0 \epsilon_r \frac{L}{\ln \left( \frac{d}{2r} + \sqrt{\left( \frac{d}{2r} \right)^2 - 1} \right)} \quad (\text{III.38})$$

$$\text{für } d \gg r \quad C_{DL} = \pi \epsilon_0 \epsilon_r \frac{L}{\ln \left( \frac{d}{r} \right)} \quad (\text{III.39})$$

■ **Beispiel:** In einem Plattenkondensator nach Bild III-12 sind  $d_1 = 0,3 \text{ mm}$ ,  $d_2 = 0,5 \text{ mm}$  starke Isolierplatten untergebracht. Ihre Permittivitätszahlen sind  $\epsilon_{r1} = 3,8$  und  $\epsilon_{r2} = 4,7$ . Die Fläche  $A$  einer Platte beträgt  $900 \text{ cm}^2$ . Die obere Platte trägt die positive Ladung  $Q = 2,5 \cdot 10^{-6}$ , die untere die negative Ladung  $-Q$ . Wie groß sind die Flussdichten und die elektrischen Feldstärken in den beiden Dielektrika und die Spannungen, mit denen die Isolierplatten beansprucht werden?

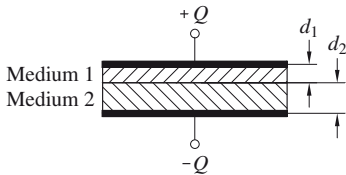


Bild III-12 Beispiel Plattenkondensator

Die Flussdichte muss in beiden Materialien gleich sein, da beide Platten des Kondensators die gleiche Ladung tragen.

$$D_1 = D_2 = \frac{Q}{A} = \frac{2,5 \cdot 10^{-6} \text{ As}}{900 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 27,8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{m}^2}$$

$$E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} = \frac{27,8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{m}^2}}{8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 3,8} = 826 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}} = 826 \frac{\text{V}}{\text{mm}}$$

$$E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}} = \frac{27,8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{m}^2}}{8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 4,7} = 668 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}} = 668 \frac{\text{V}}{\text{mm}}$$

$$U_1 = E_1 \cdot d_1 = 826 \frac{\text{V}}{\text{mm}} \cdot 0,3 \text{ mm} = 248 \text{ V} ;$$

$$U_2 = 668 \frac{\text{V}}{\text{mm}} \cdot 0,5 \text{ mm} = 334 \text{ V}$$

■ **Beispiel:** Ein Koaxialkabel enthält nach Bild III-13 zwei Isolationsschichten mit  $\epsilon_{r1} = 3$  und  $\epsilon_{r2} = 2$ , einen Innenleiter mit dem Radius  $r_1 = 5 \text{ mm}$ , einen Außenleiter mit  $r_3 = 15 \text{ mm}$ . Der Radius  $r_2$  ist  $7,5 \text{ mm}$ . Wie groß ist die Kapazität des Kabels je km Leitungslänge?

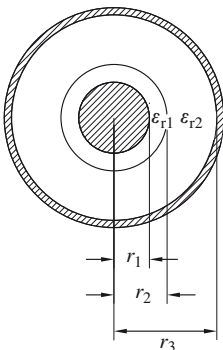


Bild III-13  
Beispiel Koaxialkabel

Mit Gleichung (III.20) wird

$$E_1 = \frac{Q}{2 \pi \epsilon_0 \epsilon_{r1} r l} ; \quad E_2 = \frac{Q}{2 \pi \epsilon_0 \epsilon_{r2} r l} ;$$

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E_1 dr + \int_{r_2}^{r_3} E_2 dr \quad (\text{III.40})$$

$$U = \frac{Q}{2 \pi \epsilon_0 l} \left( \frac{1}{\epsilon_{r1}} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\epsilon_{r2}} \ln \frac{r_3}{r_2} \right) \quad (\text{III.41})$$

$$\text{Die Kapazität pro Länge } l \quad C' = \frac{Q}{Ul} = \frac{2 \pi \epsilon_0}{\frac{1}{\epsilon_{r1}} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\epsilon_{r2}} \ln \frac{r_3}{r_2}} \quad (\text{III.42})$$

$$C' = \frac{2 \pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}}{\frac{1}{3} \ln \frac{7,5}{5} + \frac{1}{2} \ln \frac{15}{7,5}} = 115,5 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} = 115 \frac{\text{nF}}{\text{km}}$$

## 3.2 Schaltungen mit Kondensatoren

### 3.2.1 Reihenschaltung

Werden zwei in Reihe geschaltete ungeladene Kondensatoren aufgeladen, muss auf jeden Kondensator dieselbe Ladungsmenge  $\Delta Q$  geflossen sein.

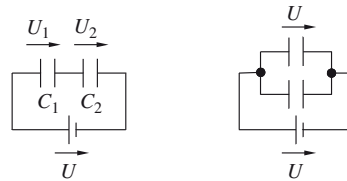


Bild III-14 Kondensatorschaltungen

$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2 = Q \quad (\text{III.43})$$

$$U = U_1 + U_2 \quad (\text{III.44})$$

$$\frac{1}{C_1} = \frac{U_1}{Q}, \quad \frac{1}{C_2} = \frac{U_2}{Q} \quad (\text{III.45})$$

$$\frac{U}{Q} = \frac{U_1 + U_2}{Q} = \frac{U_1}{Q} + \frac{U_2}{Q} \quad (\text{III.46})$$

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (\text{III.47})$$

$$\text{Reihenschaltung} \quad \frac{1}{C_{\text{ges}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (\text{III.48})$$

### 3.2.2 Parallelschaltung

Sind zwei Kondensatoren parallel geschaltet, liegt an beiden die Spannung  $U$ . Für die während des Ladens aus der Spannungsquelle entnommene Ladung  $\Delta Q$  gilt jetzt

$$\Delta Q = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 \quad (\text{III.49})$$

Da die Kondensatoren zu Beginn nicht geladen waren ( $Q_v = 0$ ), gilt

$$\Delta Q_1 = Q_n - Q_v = Q \quad (\text{III.50})$$

$$\frac{Q}{U} = \frac{Q_1 + Q_2}{U} = \frac{Q_1}{U} + \frac{Q_2}{U} \quad (\text{III.51})$$

$$C_{\text{ges}} = C_1 + C_2 \quad (\text{III.52})$$

$$\text{Parallelschaltung } C_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n C_i \quad (\text{III.53})$$

### 3.2.3 Gemischte Schaltungen

■ **Beispiel:** Die Gesamtkapazität der Schaltung nach Bild III-15 mit den Werten  $C_1 = 80 \text{ pF}$ ,  $C_2 = 20 \text{ pF}$ ,  $C_3 = 200 \text{ pF}$ ,  $C_4 = 100 \text{ pF}$  soll berechnet werden.

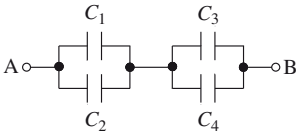


**Bild III-15** Beispiel Berechnung der Gesamtkapazität

Die linke Gruppe ergibt  $100 \text{ pF}$ , die rechte Gruppe  $300 \text{ pF}$ . Die

Gesamtkapazität ist dann  $C_{\text{ges}} = \frac{100 \cdot 300}{100 + 300} \text{ pF} = 75 \text{ pF}$ .

■ **Beispiel:** Die in der Schaltung nach Bild III-16 vorhandenen Kondensatoren sind zunächst nicht aufgeladen. Welche Ladungen und welche Teilspannungen haben die Kondensatoren nach Schließen des Schalters  $S$  ( $C_1 = 300 \text{ nF}$ ,  $C_2 = 200 \text{ nF}$ ,  $C_3 = 400 \text{ nF}$ ,  $U = 120 \text{ V}$ )?

Die Ladungsmenge, die durch  $C_1$  fließt, muss auch durch die Parallelkombination fließen. Es lassen sich folgende Gleichungen aufstellen

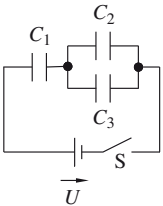


**Bild III-16**  
Beispiel Umladungsvorgänge mit Spannungsquelle

$$U = U_1 + U_{23}; \quad \Delta Q_1 = \Delta Q_2 + \Delta Q_3;$$

$$C_1 U_1 = C_2 U_{23} + C_3 U_{23} = U_{23} (C_2 + C_3);$$

$$U_{23} = U_1 \frac{C_1}{C_2 + C_3}; \quad U = U_1 + U_1 \frac{C_1}{C_2 + C_3} = U_1 \left( 1 + \frac{C_1}{C_2 + C_3} \right);$$

$$U_1 = \frac{U}{1 + \frac{C_1}{C_2 + C_3}} = \frac{120 \text{ V}}{1 + \frac{300}{200 + 400}} = 80 \text{ V}$$

$$U_2 = U - U_1 = 120 \text{ V} - 80 \text{ V} = 40 \text{ V};$$

$$Q_1 = C_1 U_1 = 300 \cdot 10^{-9} \text{ F} \cdot 80 \text{ V} = 24 \cdot 10^{-6} \text{ As};$$

$$Q_2 = C_2 U_2 = 200 \cdot 10^{-9} \text{ F} \cdot 40 \text{ V} = 8 \cdot 10^{-6} \text{ As};$$

$$Q_3 = C_3 U_2 = 400 \cdot 10^{-9} \text{ F} \cdot 40 \text{ V} = 16 \cdot 10^{-6} \text{ As}$$

■ **Beispiel:** Der Kondensator  $C_1 = 8 \text{ nF}$  ist zunächst mit einer Spannungsquelle von  $U = 150 \text{ V}$  verbunden,  $C_2$  ist in gleicher Richtung auf  $50 \text{ V}$  aufgeladen,  $C_3$  ist ungeladen. Anschließend

werden die Kondensatoren in geladenem Zustand von den Spannungsquellen getrennt und der Schalter  $S$  geschlossen ( $C_2 = 3 \text{ nF}$  und  $C_3 = 6 \text{ nF}$ ). Auf welche Spannungen werden die einzelnen Kondensatoren aufgeladen?

Die Spannungen an den einzelnen Kondensatoren vor Schließen des Schalters werden mit  $U^*$  bezeichnet, nach Umladen werden die Spannungen mit  $U$  benannt. Für die einzelnen Spannungen gilt  $\Delta U_i = U_i - U_i^*$ . Die Ladungsmenge, die vom Kondensator  $C_1$  fließt, muss sowohl  $C_2$  als auch  $C_3$  aufladen. Außerdem gilt die Maschenregel.

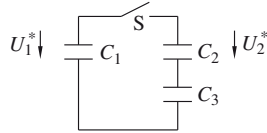


**Bild III-17** Beispiel Umladungsvorgänge ohne Spannungsquelle

$$\Delta U_i = U_i - U_i^*; \quad \Delta Q_1 = \Delta Q_2 = \Delta Q_3;$$

$$-C_1 \cdot \Delta U_1 = C_2 \cdot \Delta U_2; \quad -C_1 \cdot \Delta U_1 = C_3 \cdot \Delta U_3$$

Hieraus lassen sich für die drei gesuchten Spannungen für den allgemeinen Fall, dass die Kondensatoren 2 und 3 vor dem Umladungsprozess schon aufgeladen sind, die drei Gleichungen ableiten:

$$U_1 - U_2 - U_3 = 0; \quad C_1 \cdot U_1 + C_2 \cdot U_2 = C_1 \cdot U_1^* + C_2 \cdot U_2^*;$$

$$C_1 \cdot U_1 + C_3 \cdot U_3 = C_1 \cdot U_1^* + C_3 \cdot U_3^*$$

Zahlenwerte:

$$U_1 - U_2 - U_3 = 0; \quad 8U_1 + 3U_2 = 8 \cdot 150 \text{ V} + 3 \cdot 50 \text{ V};$$

$$8U_1 + 6U_3 = 8 \cdot 150 \text{ V}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösungen

$$U_1 = 130 \text{ V}; \quad U_2 = 103,33 \text{ V}; \quad U_3 = 26,67 \text{ V}.$$

### 3.3 Energie des elektrostatischen Feldes

In einem aufgeladenen Kondensator ist eine bestimmte Energie gespeichert. Die Größe der gespeicherte Energie kann durch die Formel

$$\Delta W = u \Delta q \quad (\text{III.54})$$

bestimmt werden.

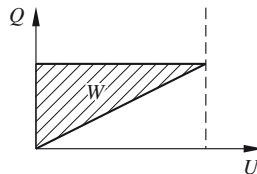


**Bild III-18**  
Energie im elektrischen Feld

Mit  $u$  ist die zeitlich veränderliche Spannung am Kondensator gemeint. Die Ladung  $q$  und die Spannung  $u$  sind aber nicht unabhängig voneinander, sondern über Gleichung (III.29) verbunden.

Energie eines Kondensators

$$W = \int_0^Q u dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C U^2 \quad (\text{III.55})$$

Grafisch ist die Energie, die bei einer Spannung  $U$  und der damit im Kondensator vorhandenen Ladung  $Q$  gespeichert ist, durch die schraffierte Dreiecksfläche in Bild III-18 gegeben.

$$W = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2 \quad (\text{III.56})$$

Die im Kondensator gespeicherte Energie befindet sich nicht auf den Elektroden, sondern ist im elektrischen Feld zwischen den Kondensatorplatten gespeichert. Ein wichtiger Begriff ist die Energie pro Volumen, die *Energiedichte*. Zur Berechnung wird die in einem bestimmten Volumen vorhandene Energie durch das Volumenelement dividiert.

$$\text{Energiedichte } w = \frac{\Delta W}{\Delta V} \quad (\text{III.57})$$

Für einen Plattenkondensator lässt sich diese Größe unter Verwendung oben abgeleiteter Formeln einfach berechnen.

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d} (Ed)^2 \quad (\text{III.58})$$

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 Ad = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 V \quad (\text{III.59})$$

Das Volumen des elektrischen Feldes im Kondensator ist  $V = Ad$ . Mit  $D = \epsilon_0 \epsilon_r E$  gilt

$$\text{Energiedichte } w = \frac{1}{2}ED \quad (\text{III.60})$$

Gleichung (III.60) gilt in dieser Form nicht nur im homogenen Feld, sondern für konstantes  $\epsilon_r$  allgemein.

*Energiedichte*

$$w = \int E dD = \int \epsilon_0 \epsilon_r E dE = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 = \frac{1}{2} ED \quad (\text{III.61})$$

Soll in einem beliebigen inhomogenem Feld die Energiedichte berechnet werden, muss das Integral bestimmt werden.

$$W = \int_V w dV = \frac{1}{2} \int_V ED dV \quad (\text{III.62})$$

### 3.4 Laden und Entladen eines Kondensators

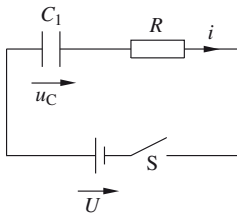


**Bild III-19**  
Laden eines Kondensators

Wenn ein Kondensator nach Bild III-19 über einen Widerstand aufgeladen wird, vergrößert sich die Ladungsmenge auf den Kondensatorplatten und

damit die Kondensatorspannung  $u_C$  als Funktion der Zeit. Aus der

$$\text{Maschenregel } U = u_C + iR \quad (\text{III.63})$$

folgt, dass der Strom dann kleiner werden muss. Wegen

$$i = \frac{dQ}{dt} = C \frac{du_C}{dt} \quad (\text{III.64})$$

wird die zeitliche Änderung von  $u_C$  ebenfalls kleiner.

$$U = u_C + RC \frac{du_C}{dt} \quad (\text{III.65})$$

Wird zum Zeitpunkt  $t = 0$  der Schalter  $S$  geschlossen, hat diese *Differentialgleichung* die Lösungsfunktion

$$\text{Laden eines Kondensators } u_C = U \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad (\text{III.66})$$

Der Kondensator lädt sich auf die Endspannung  $U$  auf. Der Strom nimmt ab.

$$\text{Ladestrom } i = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (\text{III.67})$$

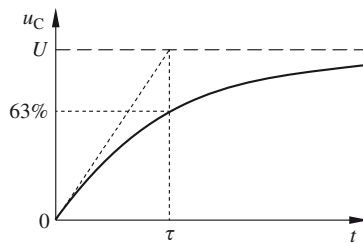


**Bild III-20** Spannung am Kondensator

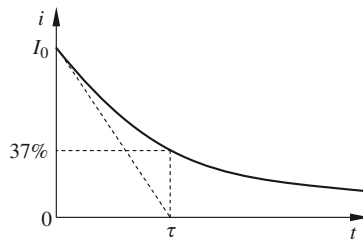


**Bild III-21** Ladestrom

Der Strom  $I_0$  ist der Strom zu Beginn des Ladevorganges, also zur Zeit  $t = 0$ . Er ist bestimmt durch

$$I_0 = \frac{U}{R} \quad (\text{III.68})$$

Das Produkt  $RC$  hat die Dimension einer Zeit und wird *Zeitkonstante* genannt.

*Zeitkonstante*

$$\tau = RC \quad \begin{array}{c|c|c} \tau & R & C \\ \hline \text{s} = \Omega \text{ F} & \Omega = \frac{\text{V}}{\text{A}} & \text{F} = \frac{\text{As}}{\text{V}} \end{array} \quad (\text{III.69})$$

Diese Größe gibt an, nach welcher Zeit die Spannung auf den Wert  $1 - e^{-1} = 63\%$  angestiegen ist, bzw. nach welcher Zeit der Strom auf den Wert  $e^{-1} = 37\%$  gefallen ist. Der Wert für  $\tau$  kann aus der grafischen Darstellung der Kondensatorspannung ermittelt werden. Er ergibt sich als Schnittpunkt der Tangente an die Spannungskurve zur Zeit  $t = 0$  mit der gestrichelt gezeichneten horizontalen Geraden  $U$  (Bild III-20). Beim Entladen eines Kondensators über einen ohmschen Widerstand  $R$  nimmt die Kondensatorspannung im Lauf der Zeit ab; der fließende Strom ebenfalls. Ist der Kondensator zu Beginn auf die Spannung  $U$  aufgeladen, nimmt diese Spannung ab.

#### Entladen eines Kondensators

$$u_C = U e^{\frac{-t}{RC}} = U e^{\frac{-t}{\tau}} \quad (\text{III.70})$$

$$\text{Strom } i = I_0 \cdot e^{\frac{-t}{RC}} \quad (\text{III.71})$$

Die in Bild III-21 dargestellte Kurve gilt in dieser Form für den Strom beim Laden und Entladen und für die Kondensatorspannung beim Entladen eines Kondensators.

■ **Beispiel:** In der Schaltung nach Bild III-22 wird der Kondensator  $C = 100 \mu\text{F}$  über den Widerstand  $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$  aufgeladen ( $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $U_A = 100 \text{ V}$ ).

- Auf welche Endspannung lädt sich der Kondensator auf?
- Wie groß ist die Spannung am Kondensator nach einer Zeit von 30 ms?

Die Spannungsquelle und die beiden Widerstände können als Ersatzspannungsquelle mit Innenwiderstand aufgefasst werden. Die Spannung, die den Kondensator auflädt, ergibt sich aus

$$U = U_A \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (\text{III.72})$$

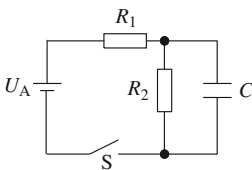


**Bild III-22**  
Beispiel Aufladen  
eines Kondensators

Der Innenwiderstand der Ersatzspannungsquelle ist

$$R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (\text{III.73})$$

Mit Gleichung (III.66) gilt

$$u_C = U_A \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left( 1 - e^{\frac{-t}{\tau}} \right) \quad (\text{III.74})$$

$$\text{mit } \tau = R_i C \quad (\text{III.75})$$

$$\text{a) Endspannung } U = 100 \text{ V} \frac{1 \text{ k}\Omega}{3 \text{ k}\Omega} = 33,33 \text{ V}$$

$$\text{b) } R_i = \frac{1 \cdot 2}{1 + 2} \text{ k}\Omega = \frac{2}{3} \text{ k}\Omega; \quad \tau = \frac{2}{3} \cdot 10^3 \Omega \cdot 100 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 66,7 \text{ ms};$$

$$u_{30\text{ms}} = 33,33 \left( 1 - e^{\frac{-30\text{ms}}{66,7\text{ms}}} \right) = 12,07 \text{ V}$$

### 3.5 RC-Reihenschaltung

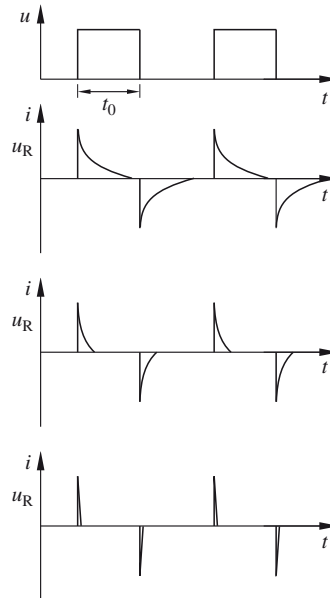


**Bild III-23** Differenzieren

Legt man an eine RC-Reihenschaltung einen Rechteck-Impuls an, wird der Kondensator im gleichen Takt aufgeladen und entladen. Ist die Zeitkonstante  $\tau$  ungefähr so groß wie die Impulsdauer  $t_0$ , kann der Kondensator nicht vollständig aufgeladen werden. Der Ladestrom, und damit auch die Spannung am ohmschen Widerstand, hat einen Verlauf wie in Bild III-23 oben. Die Zeitkonstante nimmt von oben nach unten ab. Je kleiner die Zeitkonstante  $\tau$  gegenüber der Impulsdauer  $t_0$  wird, desto schneller fällt die Spannung  $u_R$  auf 0 ab. Im Grenzfalle entstehen Nadelimpulse. Wird das Rechtecksignal mathematisch differenziert, entsteht das gleiche Funktionsbild. Deshalb spricht man in diesem Fall auch von einem *Differenzierglied*.

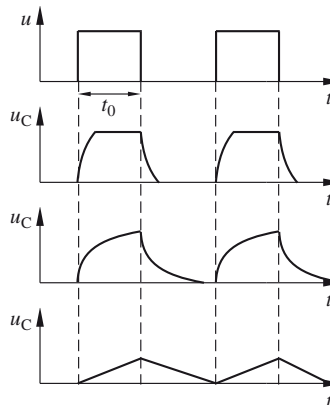


**Bild III-24** Integrieren

Die Spannung  $u_c$  am Kondensator ist im Bild III-24 aufgetragen. Die Zeitkonstante  $\tau$  wird hier von oben nach unten immer größer. Bei sehr großem Wert von  $\tau$

wird der Kondensator nahezu linear aufgeladen. Dies entspricht dem mathematischen Vorgang des Integrierens. Die Schaltung stellt jetzt ein *Integrierglied* dar.

## IV Das Magnetische Feld

Neben den elektrischen Kräften und Feldern gibt es in der Natur auch magnetische Kräfte und Felder.

*Jede sich bewegendelektrische Ladung erzeugt ein magnetisches Feld.*

*Jedes magnetische Feld wird durch bewegte Ladungen erzeugt.*

Diese Aussage gilt für *Elektromagnete* und *Dauermagnete*. Fließt durch Elektromagnete ein Strom, ist damit eine Bewegung von Ladungen verbunden. In Dauermagneten sind die bewegten Ladungen die Elektronen, die immer um die Atomkerne kreisen und somit *Kreisströme* hervorrufen. Außerdem rotieren alle Elektronen um die eigene Achse. Diese Bewegung wird *Spin* genannt und erzeugt ebenfalls magnetische Felder. In vielen Stoffen heben sich die von den einzelnen Elektronen erzeugten Magnetfelder gegenseitig auf; in Dauermagneten nicht.

### 1 Feldlinien

#### 1.1 Dauermagnet

Wie beim elektrischen Feld wird auch das Magnetfeld durch Feldlinien dargestellt. Wenn eine drehbar gelagerte Magnetnadel um einen Dauermagneten herumgeführt wird, stellt sie sich parallel zu den Feldlinien ein. Verbindet man alle Stellungen tangential, erhält man das Feldlinienbild eines Dauermagneten (Bild IV-1).

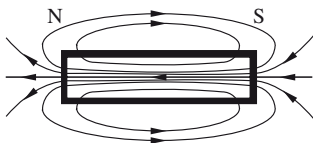


**Bild IV-1**  
Dauermagnet

Wird ein Dauermagnet geteilt, haben beide Teile dieselben magnetischen Eigenschaften wie der Ausgangsmagnet. Es gibt also, im Gegensatz zu den elektrischen Ladungen, keine einzelne magnetische Pole, sondern nur Dipole. Magnetische Feldlinien sind daher grundsätzlich geschlossene Linien. Die magnetischen Pole werden aus historischen Gründen *Nord-* und *Südpol* genannt. Auch die Erde besitzt ein Magnetfeld. Eine Magnetnadel wird sich auch hier parallel zu den Feldlinien einstellen. Der Pol der Nadel, der in die geographische Nordrichtung zeigt, heißt Nordpol.

Sind zwei Magnete vorhanden, ziehen sich ungleiche Pole an. Die magnetischen Feldlinien werden mit Richtungspfeilen versehen. Ihre Richtung ist willkürlich festgelegt. Im Außenraum eines Dauermagneten verlaufen sie vom Nordpol zum Südpol. Da die Feldlinien immer geschlossen sind, verlaufen sie im Inneren eines Dauermagneten vom Südpol zum Nordpol.

#### 1.2 Stromdurchflossene Leiter

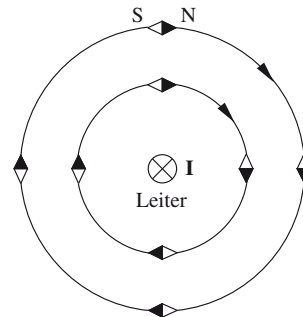


**Bild IV-2**  
Magnetfeld um einen Leiter

Bringt man eine Magnetnadel in die Nähe eines stromdurchflossenen Leiters und führt sie um den Leiter herum, dann ergibt die tangential Verbindung aller Einstellungen Kreise, in deren Zentrum der Leiter liegt. Die technische Stromrichtung ist durch das Kreuz angegeben, sie zeigt in die Zeichenebene hinein. Die Richtung der Feldlinien kann durch die *Rechtsschrauben-Regel* beschrieben werden.

*Dreht man eine rechtsgängige Schraube so, dass sie sich in der technischen Stromrichtung weiterbewegt, ist die Richtung der magnetischen Feldlinien durch die Drehrichtung gegeben.*

Diese Richtung lässt sich auch mit Hilfe der rechten Hand bestimmen.

*Der Daumen der rechten Hand wird in Richtung der technischen Stromrichtung gehalten. Die gekrümmten Finger zeigen dann die Richtung der Magnetfeldlinien an.*

#### 1.3 Stromdurchflossene Spule

Wenn stärkere Magnetfelder erzeugt werden sollen, werden *Spulen* verwendet. Wird ein Leiter auf einen zylindrischen Spulenkörper gewickelt, erhält man eine *Zylinderspule*. Jeder Leiter erzeugt ein Magnetfeld. Zwischen den Leitern heben sich die von den

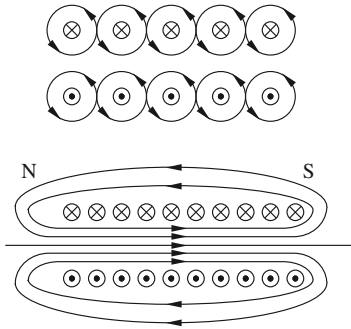
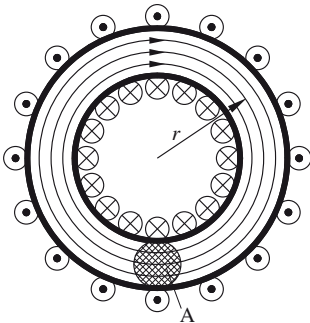


Bild IV-3 Zylinderspule

einzelnen Leitern erzeugten Felder gegenseitig auf. Im Außenraum und im Inneren der Spule addieren sich die einzelnen Beiträge zum Gesamtfeld. Das in der Mitte der Spule entstehende Feld ist dann die Vektorsumme aller einzelnen Felder. In der Mitte der Zylinderspule kann das Feld bei großer Spulenlänge als homogen angesehen werden. Im Außenraum ist das Feldlinienbild gleich dem eines Dauermagneten. Man kann einer Zylinderspule somit auch einen Nordpol und einen Südpol zuordnen.

Bild IV-4  
Ringspule

Wird der zylindrische Spulenkörper zu einem Kreis gebogen, entsteht eine Ringspule. Das hier aus der Überlagerung aller einzelnen Magnetfelder entstehende resultierende Feld hat die Eigenschaft, nur im Inneren des Spulenkerne vorhanden zu sein. Es gibt keine Stelle, an der die Feldlinien, die ja geschlossene Linien darstellen, austreten können.

## 1.4 Magnetfeld der Erde

Die Erde besitzt ein Magnetfeld. Eine Magnetnadel zeigt in die Richtung zum magnetischen Pol. Da der Nordpol der Magnetnadel in die geographische Nordrichtung zeigt, andererseits aber zum magnetischen Südpol weist, liegt der magnetische Südpol auf der Nordhalbkugel. Er befindet sich bei ungefähr 74° nördlicher Breite und 100° westlicher Länge nordwestlich von Nordgrönland. Der magnetische Nordpol auf der Südhalbkugel liegt nicht genau gegenüber. Er liegt bei ungefähr 72° südlicher Breite und 155°

östlicher Länge in der Antarktis (Bild IV-5). Die Abweichung des Erdmagnetfeldes von der geographischen Nord-Süd-Richtung ist die *Deklination*; sie ist abhängig vom Ort auf der Erde. In Deutschland beträgt diese Abweichung etwa 2° in westlicher Richtung. Die Feldlinien verlaufen – bis auf die Äquatorgegend – nicht parallel zur Erdoberfläche. Die Neigung zur Horizontalen wird *Inklination* genannt.

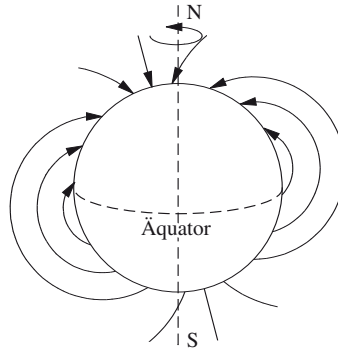


Bild IV-5 Magnetfeld der Erde

Das Magnetfeld der Erde ist nicht so symmetrisch, wie in Bild IV-5 dargestellt. Durch Satellitenmessungen ist bekannt, dass das Magnetfeld durch den Sonnenwind stark deformiert wird. Der Sonnenwind besteht aus Wasserstoff- und Heliumionen sowie aus Elektronen. Diese Teilchen treffen mit einigen 100 km/s die Erde. Dadurch wird das Magnetfeld auf der Tagseite stark zusammengedrückt, auf der Nachtseite der Erde wird das Magnetfeld zu einem langen Schweif deformiert, der bis über die Mondbahn hinaus geht.

Die Ursache für das Erdmagnetfeld ist nicht genau bekannt. Wahrscheinlich rührt es von der Bewegung des ionisierten flüssigen Erdkerns her. Das Erdmagnetfeld ist in seiner Stärke und seiner Richtung nicht konstant. Vor etwa 4 Millionen Jahren war die Polarität entgegengesetzt. Dies kann aus der Richtung der Magnetisierung in alten Gesteinen festgestellt werden.

## 2 Magnetische Grundgrößen

### 2.1 Feldstärke

Bringt man in die Nähe eines stromdurchflossenen Leiters eine Magnetnadel und stellt sie senkrecht zur Richtung der Feldlinien, die wie konzentrische Kreise um den Leiter liegen, so wird die Nadel durch die Wechselwirkung mit dem Magnetfeld in Richtung der Magnetlinien gedreht. Es wird also ein Drehmoment  $M$  ausgeübt. Die Größe von  $M$  ist ein Maß für die Stärke des Magnetfeldes. Dieses wird mit  $H$  bezeichnet

$$M \sim H$$

(IV.1)

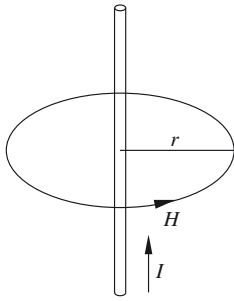


**Bild IV-6**  
Magnetfeld um einen  
Leiter

Erhöht man den Strom  $I$  im Leiter, erhöht sich auch das Drehmoment und somit die Feldstärke

$$H \sim I \quad (\text{IV.2})$$

Werden  $n$  Leiter verwendet, hängt die Stärke des Drehmomentes von allen Strömen ab:

$$H \sim \sum_{i=1}^n I_i \quad (\text{IV.3})$$

Die Summe aller Ströme, die von einer geschlossenen Feldlinie umgeben sind, ist die *Durchflutung*.

$$\text{Durchflutung} \quad \Theta = \sum_{i=1}^n I_i \quad \frac{\Theta}{\text{A}} \left| \frac{I}{\text{A}} \right| \quad (\text{IV.4})$$

Zur Berechnung von Feldstärken kann das *Durchflutungsgesetz* benutzt werden.

Ist die Feldstärke nicht konstant, gilt für die Durchflutung:

$$\Theta = \oint \vec{H} d\vec{s} \quad (\text{IV.5})$$

$$\text{Durchflutungsgesetz} \quad \oint \vec{H} d\vec{s} = \sum_{i=1}^n I_i \quad (\text{IV.6})$$

Für den Sonderfall einer konstanten Feldstärke ist

$$\sum_{i=1}^n I_i = H \cdot l. \quad (\text{IV.7})$$

Der Weg  $l$  muss dabei geschlossen sein.

Zur Berechnung des Feldes in einer Ringspule nach Bild IV-4 wird der mittlere Radius  $r$  gewählt. Der geschlossene Weg ist dann  $l = 2\pi r$  und es gilt:

$$\text{Feld in einer Ringspule} \quad H = \frac{IN}{2\pi r} \quad (\text{IV.8})$$

Dieses Feld ist nicht konstant, sondern fällt nach außen mit  $1/r$  ab. Ist jedoch der mittlere Radius groß gegenüber dem Windungsdurchmesser  $d$ , kann  $H$  innerhalb des Ringquerschnittes als konstant angenommen werden.

Ein weiteres Beispiel für die Anwendung von Gleichung (IV.6) ist die Berechnung des Magnetfeldes um einen geraden stromdurchflossenen Leiter. Das Magnetfeld ist auf Kreisbahnen um den Leiter konstant. Der nach dem Durchflutungsgesetz geforderte geschlossene Weg mit konstanter Feldstärke muss gleich dem Umfang eines Kreises sein. Es fließt nur ein Strom  $I$ . Nach Gleichung (IV.6) gilt

$$H \cdot 2\pi r = I \quad (\text{IV.9})$$

$$\text{Feld um einen Leiter} \quad H = \frac{I}{2\pi r} \quad (\text{IV.10})$$

■ **Beispiel:** Ein massiver Kupferleiter ist nach Bild IV-7 von einem Kupferrohr umschlossen. Diese Anordnung dient als Hin- und Rückleitung. In beiden Leitern fließt der gleiche Strom  $I = 100 \text{ A}$ . Wie groß ist die Feldstärke als Funktion des Abstandes vom Mittelpunkt?

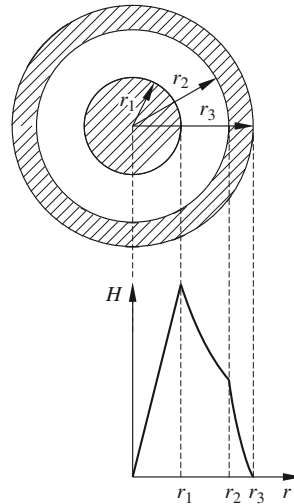


**Bild IV-7** Beispiel Magnetfeld um konzentrische Doppelleiter

Zunächst wird der Bereich  $0 < r < r_1$  betrachtet. Die Stromdichte  $S$  ist überall konstant.

$$\text{Stromdichte} \quad S_1 = \frac{I}{\pi \cdot r_1^2};$$

$$\text{Durchflutung} \quad \Theta = S_1 \cdot \pi r^2$$

Das Feld in einem beliebigen Abstand  $r$  wird mit dem Durchflutungsgesetz berechnet.

$$H = \frac{\Theta}{2\pi r} = \frac{S_1 \cdot \pi r^2}{2\pi r} = \frac{I \cdot \pi r^2}{\pi r_1^2 \cdot 2\pi r} = \frac{Ir}{2\pi r_1^2} \quad (\text{IV.11})$$

$H$  nimmt linear mit  $r$  zu. Für  $r = r_1$  ist die Grenze dieses Bereiches erreicht.

$$H_1 = \frac{I}{2\pi r_1} = \frac{100 \text{ A}}{2\pi \cdot 0,01 \text{ m}} = 1591 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Im Bereich  $r_1 < r < r_2$  kommt kein weiterer Strom hinzu, die Durchflutung bleibt konstant ( $\Theta = I$ ).  $H$  nimmt nach Gleichung (IV.10) mit  $1/r$  ab bis zum Wert

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r_2} = \frac{100 \text{ A}}{2\pi \cdot 0,02 \text{ m}} = 795 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Im Bereich  $r_2 < r < r_3$  nimmt die Durchflutung wieder ab.

$$\Theta = \Theta_1 - I \frac{\pi(r^2 - r_2^2)}{\pi(r_3^2 - r_2^2)} \quad (\text{IV.12})$$

$$H = \frac{1}{2\pi r} \cdot \left( I - I \frac{(r^2 - r_2^2)}{(r_3^2 - r_2^2)} \right) \quad (\text{IV.13})$$



Für Abstände  $r > r_3$  ist die Feldstärke  $H = 0$ . Die Abhängigkeit der Feldstärke vom Abstand ist in Bild IV-7 unten aufgetragen.

Soll das Feld in einer Zylinderspule berechnet werden, ist kein geschlossener Weg zu finden, auf dem die Feldstärke konstant ist. Der für die Berechnung notwendige geschlossene Weg wird in einzelne Stücke aufgeteilt. Auf diesen ist entweder  $H$  konstant, oder Beiträge von verschiedenen Wegelementen kompensieren sich. Wird der Umlaufweg nach Bild IV-8 gelegt, gilt für die einzelnen Wegabschnitte:

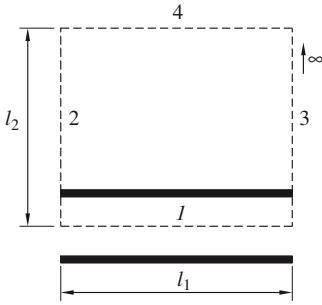


**Bild IV-8** Feld in einer Spule

Auf dem Teilstück 1 ist das Feld konstant und gleich dem gesuchten Feld,  $H = \text{const.}$

Alle Beiträge, die auf dem Teilstück 2 entstehen, werden durch entgegengesetzte Beiträge auf dem Teilstück 3 kompensiert. Das Teilstück 4 ist soweit entfernt gedacht, dass dort  $H = 0$  gilt. Das Wegintegral aus Gleichung (IV.6) ergibt dann

$$H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + H_3 \cdot l_3 + H_4 \cdot l_4 = H_1 \cdot l_1 \quad (\text{IV.14})$$

Wird die Windungszahl mit  $N$  bezeichnet, so ist die Durchflutung

$$\Theta = NI \quad (\text{IV.15})$$

$$\text{Feld in einer Zylinderspule} \quad H = \frac{\Theta}{l} = \frac{NI}{l} \quad (\text{IV.16})$$

In den Randbereichen der Spule ist allerdings das Feld  $H_1$  nicht konstant. Damit Gleichung (IV.16) trotzdem angewendet werden kann, muss die Spulenlänge groß sein gegenüber dem Durchmesser der Spule. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, liegt also eine kurze Spule vor, ist das Feld nicht homogen und muss auf andere Weise ausgerechnet werden. Der Durchmesser der Spulenwicklung ist  $d$ , die Länge  $l$ .

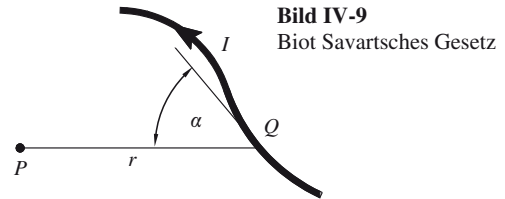
$$\text{kurze Zylinderspule} \quad H_{\text{Mitte}} = \frac{NI}{\sqrt{l^2 + d^2}} \quad (\text{IV.17})$$

$$H_{\text{Rand}} = \frac{NI}{2\sqrt{l^2 + d^2}} \quad (\text{IV.18})$$

Wenn  $l \gg d$  ist, kann  $d$  im Nenner von Gleichung (IV.17) vernachlässigt werden und es folgt Gleichung (IV.16).

Das Gesetz, nach dem Magnetfelder bei beliebiger Leitergeometrie zu berechnen sind, ist das *Biot-Savartsche Gesetz*. Jedes Teilstück  $ds$  eines stromdurchflossenen Leiters, durch den der Strom  $I$  fließt, trägt zum Feld in einem beliebigen Punkt  $P$  bei. Der Beitrag eines Teilstückes  $ds$  im Punkt  $Q$  ist

$$\text{Biot-Savartsche Gesetz} \quad dH = \frac{I \cdot ds}{4\pi r^2} \sin \alpha \quad (\text{IV.19})$$



Um das gesamte Feld im Punkt  $P$  zu bestimmen, müssen alle einzelnen Beiträge zusammengefasst werden. Ist ein Leiter zum Beispiel zu einem Kreis gebogen, lässt sich das Magnetfeld genau im Mittelpunkt mit Gleichung (IV.19) berechnen. Für jedes Leiterelement  $ds$  gilt  $\alpha = 90^\circ$  und  $\sin \alpha = 1$ . Der Abstand zum Punkt  $P$  (Zentrum) ist überall gleich. Die Gesamtlänge der Strombahn ist  $2\pi r$ .

*Zentrum eines Kreisstromes*

$$H = \oint dH = \frac{I \cdot 2\pi r}{4\pi r^2} = \frac{I}{2r} \quad (\text{IV.20})$$

Für einen Punkt  $P$  auf der Mittelpunktsachse ist die Berechnung etwas komplizierter.

$$H = \frac{I}{2R} \sin^3 \beta \quad (\text{IV.21})$$

$$\text{mit} \quad \sin \beta = \frac{R}{r}, r = \sqrt{R^2 + l^2}$$

*Achse eines Kreisstromes*

$$H = \frac{IR^2}{2(\sqrt{R^2 + l^2})^3} \quad (\text{IV.22})$$

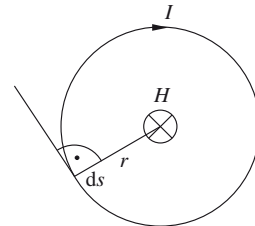


**Bild IV-10**  
Feld im Zentrum eines  
Kreisstromes

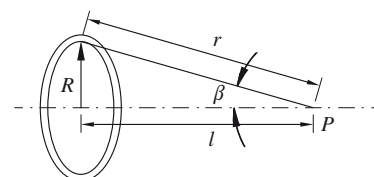


**Bild IV-11** Feld auf der Achse eines Kreisstromes

- **Beispiel:** Zwei parallel stromdurchflossene Leiter mit einem Abstand von  $a = 45 \text{ mm}$  führen nach Bild IV-12 die Ströme  $I_1 = 90 \text{ A}$ ,  $I_2 = 70 \text{ A}$ . Der angegebene Punkt  $P$  ist von den Leitern  $b = 50 \text{ mm}$ ,  $c = 30 \text{ mm}$  entfernt. Wie groß ist die Feldstärke im Punkt  $P$ ? Welche Richtung hat sie zur Verbindungslinie der beiden Leiter?

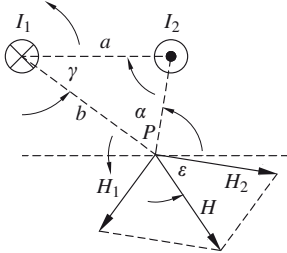


**Bild IV-12** Beispiel Magnetfeld von 2 Leitern

Die von den einzelnen Strömen erzeugten Magnetfelder stehen senkrecht auf den jeweiligen Verbindungslinien zum Punkt  $P$ . Die Beträge berechnen sich nach Gleichung (IV.10).

$$H_1 = \frac{90 \text{ A}}{2\pi \cdot 0,05 \text{ m}} = 286,5 \frac{\text{A}}{\text{m}}; \quad H_2 = \frac{70 \text{ A}}{2\pi \cdot 0,03 \text{ m}} = 371,4 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Diese Komponenten können im entsprechenden Maßstab unter dem richtigen Winkel gezeichnet werden. Das resultierende Feld kann aus der Zeichnung abgelesen werden zu  $H = 350 \frac{\text{A}}{\text{m}}$ . Der gesuchte Winkel kann ebenfalls abgelesen werden:  $\epsilon = 56^\circ$ .

Soll die Lösung rechnerisch gefunden werden, müssen zunächst die Winkel im Dreieck  $PI_1I_2$  berechnet werden. Dies kann durch die Anwendung von Sinus- und Kosinussatz erfolgen.

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 0,805;$$

$$\gamma = 36,37^\circ; \quad \alpha = 62,73^\circ, \quad \beta = 80,9^\circ$$

Der Winkel zwischen  $H_1$  und  $H_2$  ist  $180 - \alpha = 117,3^\circ$ , für die resultierende Feldstärke  $H$  gilt

$$H = \sqrt{286,5^2 + 371,4^2 - 2 \cdot 286,5 \cdot 371,4 \cdot \cos 62,73^\circ} \frac{\text{A}}{\text{m}} = 350 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Für den Winkel zwischen  $H$  und  $H_2$  gilt

$$\sin \varphi = \frac{286,5}{350} \cdot \sin 62,73^\circ; \quad \varphi = 46,7^\circ$$

$$\epsilon = (90^\circ - 80,94^\circ) + 46,7^\circ = 55,76^\circ$$

## 2.2 Fluss, Flussdichte

Die Gesamtheit aller Feldlinien nennt man den *magnetischen Fluss*  $\Phi$ . Diese Größe kann gemessen werden, indem eine geschlossene Leiterschleife aus dem Magnetfeld herausgezogen wird. Während der Bewegung der Leiterschleife entsteht zwischen den Punkten A und B eine zeitlich veränderliche Spannung. Die Fläche unter der Spannungskurve wird als *Spannungsstoß* bezeichnet (Bild IV-13).

Dieser Spannungsstoß wird proportional zur Flussänderung  $\Delta \Phi$  durch die Leiterschleife gesetzt. Der magnetische Fluss wird in *Weber* (Wb) gemessen.

$$\text{Fluss } \Phi = \int u dt \quad \frac{\Phi}{\text{Wb}} = \frac{\text{Vs}}{\text{Vs}} \frac{U}{V} \frac{t}{s} \quad (\text{IV.23})$$

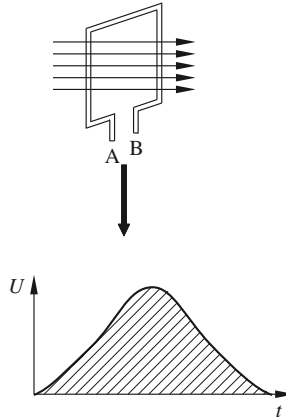


**Bild IV-13**  
Spannungsstoß

Wird der Fluss auf eine Flächeneinheit bezogen, ergibt sich die *Flussdichte*  $B$ .

$$\text{Flussdichte } B = \frac{\Phi}{A_n} \quad \frac{B}{\text{T}} = \frac{\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}}{\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}} \frac{A}{\text{m}^2} \quad (\text{IV.24})$$

Die Einheit ist 1 *Tesla*.

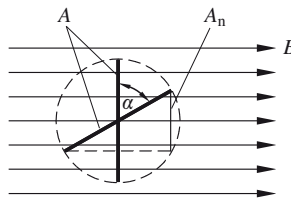


**Bild IV-14**  
Magnetischer Fluss

Die Fläche  $A_n$  ist dabei die vom Magnetfeld durchsetzte Fläche. Steht das Magnetfeld nicht senkrecht auf der Fläche, gilt nach Bild IV-14

$$A_n = A \cdot \cos \alpha \quad (\text{IV.25})$$

Zwischen der magnetischen Flussdichte und der magnetischen Feldstärke gilt im Vakuum die Beziehung

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} \quad (\text{IV.26})$$

Die Konstante  $\mu_0$  ist die magnetische Feldkonstante oder auch Permeabilität des Vakuums.

*magnetische Feldkonstante*

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \quad (\text{IV.27})$$

- **Beispiel:** Eine lange Zylinderspule wird von einem Strom  $I$  durchflossen. Wie groß sind das magnetische Feld und die Flussdichte im Inneren der Spule ( $N = 1000$ ,  $I = 5 \text{ A}$ ,  $l = 1 \text{ m}$ )?

$$H = \frac{NI}{l} = \frac{1000 \cdot 5 \text{ A}}{1 \text{ m}} = 5000 \frac{\text{A}}{\text{m}};$$

$$B = \mu_0 H = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 5000 \frac{\text{A}}{\text{m}} = 6,28 \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

Die elektrische Feldkonstante und die magnetische Feldkonstante bestimmen die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen im Vakuum.

Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  (IV.28)

Für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum gilt entsprechend der SI Definition (s. Physik I.2)

$c = 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Somit lässt sich hieraus die elektrische Feldkonstante bestimmen zu

$$\epsilon_0 = \frac{1}{c^2 \cdot \mu_0} = 8,8541878 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \quad (\text{IV.29})$$

### 3 Kräfte im Magnetfeld

#### 3.1 Kräfte auf bewegliche Ladungsträger

Im Gegensatz zu elektrischen Feldern, in denen auf Ladungen immer eine Kraft ausgeübt wird, werden im Magnetfeld Kräfte nur auf bewegte Ladungen ausgeübt. Sie dürfen sich dabei nicht parallel zu den magnetischen Feldlinien bewegen.

Lorentzkraft  $F_L = qvB \cdot \sin \varphi$  (IV.30)

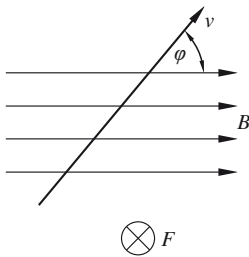


**Bild IV-15**  
Lorentzkraft

Der Winkel  $\varphi$  ergibt sich aus der Richtung der Geschwindigkeit  $v$  und der Richtung des Magnetfeldes  $B$ . Mit dieser Gleichung lässt sich nur der Betrag der Lorentzkraft berechnen. Die Richtung kann mit Hilfe der *Drei-Finger-Regel* der rechten Hand bestimmt werden. Die drei Finger werden rechtwinklig zueinander gestellt.

Der Daumen zeigt in Richtung der Geschwindigkeit, der Zeigefinger in Richtung des Magnetfeldes und der Mittelfinger bei positiver Ladung in Richtung der Kraft; bei negativer Ladung entgegengesetzt zur Kraft.

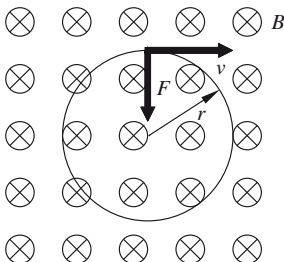


**Bild IV-16** Kreisbahn unter dem Einfluss der Lorentzkraft

Die drei Vektoren  $\vec{v}$ ,  $\vec{B}$  und  $\vec{F}$  stehen alle senkrecht aufeinander. Bewegt sich ein Elektron (negative Ladung) in einem Magnetfeld nach Bild IV-16, stehen die Feldlinien immer senkrecht auf dem Vektor der Geschwindigkeit des Elektrons. Damit muss auch die Kraft immer senkrecht auf der Geschwindigkeit stehen. Der Kraftvektor liegt immer in der Zeichenebene. Die Bewegung des Elektrons unter dem Einfluss einer zu jedem Zeitpunkt senkrecht stehenden Kraft ist eine Kreisbahn. Die Kraft ist dann zum Mittelpunkt gerichtet, die Richtung der momentanen Geschwindigkeit ist die Tangente an den Kreis. Der Radius der Kreisbahn ergibt sich aus der Überlegung, dass die Zentrifugalkraft gleich der Lorentzkraft ist.

$$\frac{mv^2}{r} = e_0 v B \quad (\text{IV.31})$$

$$r = \frac{mv}{e_0 B} \quad (\text{IV.32})$$

#### 3.2 Stromdurchflossener Leiter

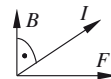
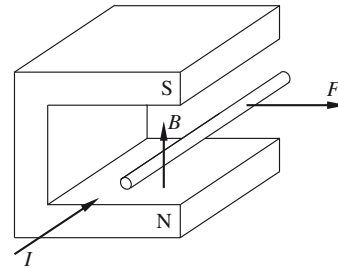


**Bild IV-17**  
Kraft auf Leiter im Magnetfeld

Auch in einem stromdurchflossenen Leiter werden Ladungen bewegt. Bringt man diesen Leiter in ein äußeres Magnetfeld, wird auch hier eine Kraft auf die Ladungen und damit auf den Leiter ausgeübt. Da die Ladungen negativ sind und die technische Stromrichtung der tatsächlichen Richtung der Elektronenbewegung entgegengesetzt ist, heben sich beide negativen Vorzeichen auf. Die Richtung der Kraft kann mit der *Drei-Finger-Regel* bestimmt werden.

Zeigt der Daumen in Stromrichtung und der Zeigefinger in Richtung des Magnetfeldes, dann gibt der Mittelfinger die Krafrichtung an.

Die Ermittlung der Krafrichtung ist auch unter dem Namen *Motorregel* bekannt. Hier wird allerdings die *linke Hand* benutzt. Sie wird so in das Magnetfeld gehalten, dass die magnetischen Feldlinien in die Innenfläche der linken Hand eintreten und die Fingerspitzen in Stromrichtung zeigen. Der abgespreizte Daumen zeigt dann die Krafrichtung an.

Das Magnetfeld des Dauermagneten und das durch den Strom im Leiter erzeugte Magnetfeld überlagern

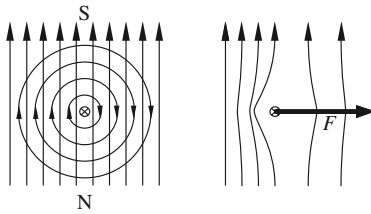


Bild IV-18 Resultierendes Feld um einen Leiter

sich. Auf der linken Seite von Bild IV-18 sind das durch den stromführenden Leiter und das durch den Dauermagneten erzeugte Feld gezeichnet, rechts das daraus entstehende resultierende Feld. Die Richtung der Kraft auf den Leiter ist aus diesem Feldlinienbild zu entnehmen. Die Kraft ist immer zu kleineren Feldstärken, also zu weiter auseinander liegenden Feldlinien, gerichtet. Die Größe der Kraft hängt neben der Flussdichte  $B$  und der Stromstärke  $I$  auch noch von der Länge des Leiters  $l$  im Magnetfeld und vom Winkel, den der Leiter mit den Magnetfeldlinien einschließt, ab. Dies folgt direkt aus Gleichung (IV.30).

$$\text{Kraft im Magnetfeld } F = I l B \sin \varphi \quad (\text{IV.33})$$

Die Kraft wirkt immer senkrecht zu der Fläche, die durch das Magnetfeld und die Stromrichtung definiert wird. Sind Leiter und Magnetfeld senkrecht zueinander, dann ist die Kraft

$$F = I l B \quad (\text{IV.34})$$

### 3.3 Magnetisches Moment

In einem äußeren Magnetfeld wird auf einen weiteren Magneten ein Drehmoment ausgeübt. Eine Magnetnadel wird sich in Richtung der Feldlinien einstellen. Der Quotient aus Drehmoment und Flussdichte wird *magnetisches Moment* genannt.

*magnetisches Moment*

$$|m| = \frac{|M|}{|B|} \quad \begin{array}{c|c|c} m & M & B \\ \hline \text{Am}^2 & \text{Nm} = \text{VAs} & \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \end{array} \quad (\text{IV.35})$$

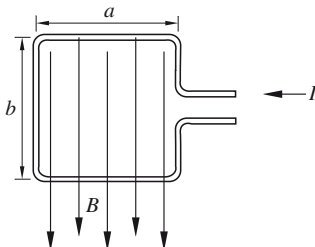


Bild IV-19 Leiterschleife im Magnetfeld

Das magnetische Moment ist ein Vektor, der vom Süd- zum Nordpol zeigt. Eine vom Strom durchflossene Spule erfährt in einem Magnetfeld ein Drehmo-

ment, das versucht, die Schleifenfläche senkrecht zu den Magnetfeldlinien zu stellen. Die rechteckige Leiterschleife und das Magnetfeld sind in Bild IV-19 dargestellt. Die Kantenlänge  $b$  liegt parallel zum Feld  $B$ , daher wird auf diesen Teil des Leiters keine Kraft ausgeübt. Auf die Rechteckseiten der Länge  $a$  wirken gleichgroße, entgegengesetzte Kräfte  $F = I B a$ . Die Schleife dreht sich um die Achse bei  $b/2$ .

*Drehmoment*

$$M = 2 \cdot I \cdot B \cdot a \cdot \frac{b}{2} = I \cdot B \cdot a \cdot b = I \cdot B \cdot A \quad (\text{IV.36})$$

$$\text{magnetisches Moment } m = \frac{M}{B} = I \cdot A \quad (\text{IV.37})$$

### 3.4 Kräfte zwischen zwei parallelen Leitern

Befindet sich ein stromführender Leiter in einem Magnetfeld, welches durch einen anderen Leiter hervorgerufen wird, muss auf den Leiter ebenfalls eine Kraft ausgeübt werden. Das Magnetfeld am Ort von Leiter 2 ist nach Gleichung (IV.10) und Bild IV-20:

$$H_1 = \frac{I_1}{2\pi d} \quad (\text{IV.38})$$

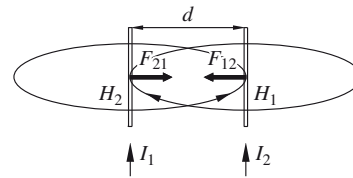


Bild IV-20 Kräfte zwischen zwei Leitern

Mit Gleichung (IV.34) gilt für die Kraft auf den Leiter 2, die durch das Magnetfeld des Leiters 1 hervorgerufen wird:

$$F_{12} = \mu_0 H_1 I_2 l = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d} \quad (\text{IV.39})$$

Die Richtung dieser Kraft kann nach der *Rechte-Hand-Regel* bestimmt werden und ist in Bild IV-20 eingezeichnet. Durch das Magnetfeld des Leiter 2 wird am Ort des Leiters 1 ein Magnetfeld

$$H_2 = \frac{I_2}{2\pi d} \quad (\text{IV.40})$$

erzeugt. Hierdurch wird nach der gleichen Überlegung die Kraft

$$F_{21} = \mu_0 H_2 I_1 l = \frac{\mu_0 I_2 I_1 l}{2\pi d} \quad (\text{IV.41})$$

ausgeübt.

Die Beträge sind gleich, die Richtungen entgegengesetzt. Es gilt die Aussage:

*Zwei parallele vom Strom in gleichen Richtungen durchflossene Leiter ziehen sich an.*

Die von beiden Strömen hervorgerufenen Magnetfelder überlagern sich.

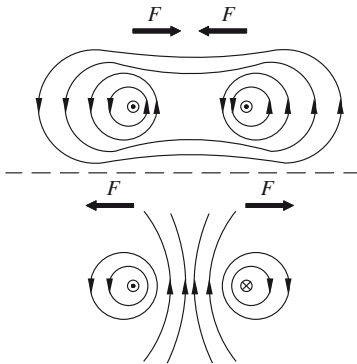


**Bild IV-21** Feldlinien um zwei Leiter

Zwischen den beiden Leitern sind die Richtungen der Feldlinien entgegengesetzt, das resultierende Feld wird hier geschwächt. Sind beide Ströme gleich groß, verschwindet das Feld genau in der Mitte. Die Kraft wirkt in Richtung des schwächeren Magnetfeldes. Die beiden Leiter ziehen sich also an. Sind die Stromrichtungen in beiden Leitern entgegengesetzt, wird das resultierende Feld zwischen den Leitern verstärkt. Die Kräfte sind jetzt so gerichtet, dass sich beide Leiter abstoßen.

*Zwei parallele vom Strom in entgegengesetzten Richtungen durchflossene Leiter stoßen sich ab.*

### 3.5 Hall-Effekt

Wird ein leitendes Plättchen in ein senkrecht zu seiner Oberfläche stehendes Magnetfeld gebracht und eine Spannungsquelle nach Bild IV-22 angeschlossen, fließt im Plättchen ein Strom in der angegebenen Richtung. Auf diese bewegten Ladungsträger wird durch das senkrecht zur Bewegungsrichtung stehende Magnetfeld die Lorentzkraft nach Gleichung (IV.30) ausgeübt. Bei der angegebenen Anordnung wird auf die Ladungsträger eine solche Kraft ausgeübt, dass die negativen Ladungsträger zur Oberseite des Plättchens abgelenkt werden und somit an der Unterseite ein Überschuss an positiven Ladungen entsteht. Durch die Ladungstrennung wird ein elektrisches Feld zwischen Ober- und Unterseite aufgebaut. Es entsteht die *Hallspannung*  $U_H$ . Im Gleichgewicht sind die Lorentzkraft und die durch das elektrische Feld auf die Ladungen wirkende Kraft entgegengesetzt gleich groß.

$$F_{Ly} = -ev_x B_z \quad (IV.42)$$

$$F_{el} = -eE = -e \frac{U_H}{d} \quad (IV.43)$$

$$U_H = d v_x B_z \quad (IV.44)$$

Mit Gleichung (I.9) ist

$$v_x = \frac{I}{neA} = \frac{I}{nebd} \quad (IV.45)$$

$$\text{Hallspannung } U_H = \frac{1}{ne} \cdot \frac{dIB}{bd} = R_H \cdot \frac{IB}{b} \quad (IV.46)$$

$$\text{Hall-Koeffizient } R_H = \frac{1}{ne} \quad \begin{array}{c|c|c} R_H & n & e \\ \hline \frac{\text{m}^3}{\text{As}} & \frac{1}{\text{m}^3} & \text{As} \end{array} \quad (IV.47)$$

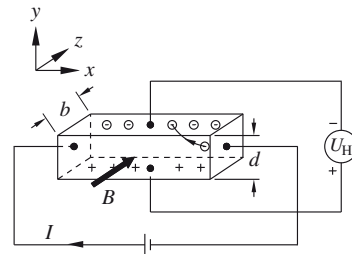


**Bild IV-22** Hall-Effekt

**Tabelle IV-1** Hall-Koeffizienten

| Werkstoff | $R_H / 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{As}}$ |
|-----------|-----------------------------------------------|
| Cu        | -5.5                                          |
| Al        | -3.6                                          |
| Ag        | -9.0                                          |
| Au        | -7.5                                          |
| Cd        | +6.0                                          |
| Sn        | +14.0                                         |
| InAs      | $-10^{-7}$                                    |

Durch Messung dieser Größe können die Ladungsträgerdichte und die Art des Leitungsmechanismus (Elektronen oder Löcherleitung) bestimmt werden. Sind die Ladungsträger Elektronen, ist der Hall-Koeffizient negativ; bei Löcherleitung ist er positiv. Da die Hallspannung direkt proportional zur Flussdichte  $B$  ist, werden *Hall-Sonden* zur Messung von Magnetfeldern verwendet. Bei bekannter Geometrie und bekanntem und konstantem Strom durch die Hallsonde ist die Hallspannung proportional zum Magnetfeld.

Eine weitere Anwendung findet der *Hallgenerator* in der Messtechnik. Er wird dann eingesetzt, wenn das Produkt zweier Größen gemessen werden soll. In Bild IV-23 ist die Prinzip-Schaltung angegeben. Der Strom  $I_H$  wird durch die Verbraucherspannung  $U$  festgelegt. Dabei muss dieser Strom klein gegen den Strom durch den Verbraucher gehalten werden. Dies wird durch den geeigneten Vorwiderstand  $R_V$  erreicht. Der Strom durch den Verbraucher wird durch

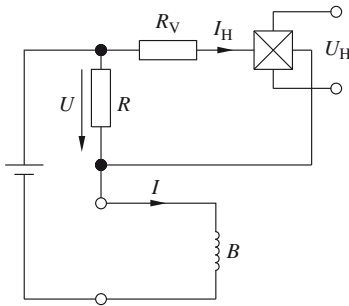


**Bild IV-23**  
Hallgenerator

eine in Reihe geschaltete Spule geschickt, die das für den Halleffekt erforderliche Magnetfeld erzeugt. Die Hallspannung ist proportional zum Produkt aus Strom und Spannung des Verbrauchers, also auch zu seiner Leistung

$$U_H \sim I_H \cdot B \sim U \cdot I \sim P. \quad (\text{IV.48})$$

Der Hallgenerator ist im Prinzip eine Multiplizierschaltung für zwei Ströme. Zur Leistungsmessung muss ein Strom als Messgröße an Stelle der Verbraucherspannung genommen werden.

#### 4 Energie des Magnetfeldes

Analog zu Gleichung (III.61) gilt im Falle eines Magnetfeldes für die Energiedichte

$$\text{Energiedichte } w = \int H dB \quad (\text{IV.49})$$

Wenn der Zusammenhang zwischen Flussdichte  $B$  und Feldstärke  $H$  nicht linear ist, kann dieses Integral nicht in einfacher Weise berechnet werden.

#### 5 Materie im Magnetfeld

Wird Materie in ein magnetisches Feld gebracht, ändert sich, analog zur Materie im elektrischen Feld, die Flussdichte  $B$ . Diese Änderung wird relativ zur Flussdichte im Vakuum angegeben.

$$\text{relative Permeabilität } \mu_r = \frac{B_M}{B_0} = \frac{B_M}{\mu_0 H_0} \quad (\text{IV.50})$$

$$\text{Induktionsflussdichte } B_M = \mu_r B_0 = \mu_r \mu_0 H_0 \quad (\text{IV.51})$$

Die dimensionslose Zahl  $\mu_r$  ist die *relative magnetische Feldkonstante* oder *relative Permeabilität*. Die durch die Materie zusätzlich hervorgerufene Flussdichte ist die

$$\text{magnetische Polarisation } J = B_M - B_0 \quad (\text{IV.52})$$

$$J = (\mu_r - 1) B_0 = (\mu_r - 1) \mu_0 H_0 \quad (\text{IV.53})$$

$$\text{magnetische Suszeptibilität } \chi_M = (\mu_r - 1) \quad (\text{IV.54})$$

$$J = \chi_M B_0 = \chi_M \mu_0 H_0 \quad (\text{IV.55})$$

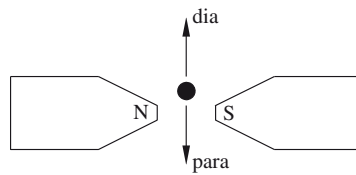


**Bild IV-24** Messung der Suszeptibilität

Die *magnetische Suszeptibilität* kann gemessen werden, indem der zu untersuchende Stoff in ein inhomogenes Magnetfeld gebracht wird. Stoffe mit negativer Suszeptibilität werden zu Orten geringerer Feldstärke herausgedrückt, Stoffe mit positiver Suszeptibilität zu Orten größerer Feldstärke gezogen.

Die magnetische Polarisation gibt die Änderung der magnetischen Flussdichte an. Die Änderung der magnetischen Feldstärke wird durch die *Magnetisierung*  $M$  beschrieben.

$$\text{Magnetisierung } M = H_M - H_0 \quad (\text{IV.56})$$

$$M = \frac{B_M}{\mu_0} - H_0 \quad (\text{IV.57})$$

$$M = \mu_r H_0 - H_0 = (\mu_r - 1) H_0 \quad (\text{IV.58})$$

$$M = \chi_M H_0 \quad (\text{IV.59})$$

$$\text{Polarisation } J = \mu_0 M \quad (\text{IV.60})$$

Die Magnetisierung ist bei vielen Stoffen proportional zur magnetischen Feldstärke  $H$  und somit ist für diese Stoffe  $\chi_M$  konstant. Ausnahme hiervon bilden die nichtlinearen magnetischen Werkstoffe, wie z.B. die ferromagnetischen Werkstoffe. Nach ihrem Verhalten in Magnetfeldern werden Werkstoffe in die in der Tabelle IV-2 aufgeführten Hauptklassen eingeteilt.

**Tabelle IV-2** Einteilung magnetischer Werkstoffe

|                      |                             |                                |
|----------------------|-----------------------------|--------------------------------|
| dia-<br>magnetisch   | $\mu_r < 1, \chi_M < 0$     | $-10^{-4} < \chi_M < -10^{-9}$ |
| para-<br>magnetisch  | $\mu_r > 1, \chi_M > 0$     | $10^{-6} < \chi_M < 10^{-2}$   |
| ferro-<br>magnetisch | $\mu_r \gg 1, \chi_M \gg 1$ | $\mu_r > 500$                  |

Das unterschiedliche Verhalten der Materie im Magnetfeld ist auf die Elektronenstruktur und die damit verbundenen magnetischen Momente zurückzuführen. Jedes Elektron erzeugt durch seine Bewegung magnetische Momente. Es gibt zwei unterschiedliche Bewegungen der Elektronen, die magnetische Momente erzeugen. Zum einen ist es die Bewegung um den Atomkern. Hierdurch wird das *magnetische Bahnmoment* erzeugt. Zum anderen rotiert das Elektron um seine eigene Achse. Diese Rotation wird *Spin* genannt. Durch diese Rotation entsteht das

*magnetische Spinnmoment.* In jedem Stoff liegt eine Überlagerung von Bahnmoment und Spinnmoment vor. Die Magnetisierung  $M$  ergibt sich als Summe aller magnetischen Momente.

Ein auf einer Kreisbahn um den Atomkern kreisendes Elektron kann als kreisförmiger Strom betrachtet werden, da Ladung transportiert wird. Bei einer Umlaufzeit  $T$  ist dieser

$$\text{Kreisstrom } I = \frac{e_0}{T} = \frac{\omega e_0}{2\pi} \quad (\text{IV.61})$$

Das magnetische Moment dieses Kreisstromes ist nach Gleichung (IV.37):

*magnetisches Moment*

$$m_B = IA = \frac{\omega e_0 \pi r^2}{2\pi} = \frac{e_0 \omega r^2}{2} \quad (\text{IV.62})$$

In der Quantenmechanik der Physik wird gezeigt, dass die Beziehung

$$m_{\text{el}} \omega r^2 = \frac{h}{2\pi} \quad (\text{IV.63})$$

gilt, mit der Naturkonstanten  $h$ , dem Planckschen Wirkungsquant und der Elektronenmasse  $m_{\text{el}}$ . Gleichung (IV.62) kann hiermit umgeformt werden zu

$$\text{Bohrsches Magneton } m_B = \frac{e_0 h}{4\pi m_{\text{el}}} \quad (\text{IV.64})$$

$$m_B = 9,274 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2 \quad (\text{IV.65})$$

Je nach Anordnung und Eigenschaften der magnetischen Momente in der Materie reagiert diese in unterschiedlicher Weise auf äußere Magnetfelder.

## 5.1 Diamagnetismus

Der Diamagnetismus ist bei allen Stoffen vorhanden, aber bei bestimmten Konfigurationen der magnetischen Momente der einzelnen Atome wird er von anderen magnetischen Eigenschaften überdeckt. Zu beobachten ist der Diamagnetismus bei allen Stoffen mit abgeschlossenen Elektronenschalen. Ohne äußeres Magnetfeld kompensieren sich die magnetischen Momente aller Elektronen eines Atoms. Unter dem Einfluss eines äußeren Feldes führen die Momente, analog zur Bewegung eines Kreisels, *Präzessionsbewegungen* aus. Dies ist eine Bewegung, die ein rotierender Körper durchführt, an dem eine äußere Kraft angreift. Der Körper weicht senkrecht zur Krafrichtung aus. Unter dem Einfluss des Magnetfeldes  $B$  laufen die Spitzen der einzelnen magnetischen Momente auf Kreisbahnen um die Richtung von  $B$ . Hierdurch entsteht ein zusätzliches Moment, welches der Richtung des äußeren Feldes entgegengesetzt ist und es schwächt. Somit muss die Suszeptibilität negativ sein. Der Diamagnetismus wird also durch das äußere Feld induziert. Die Suszeptibilität diamagnetischer Stoffe ist nicht temperaturabhängig.

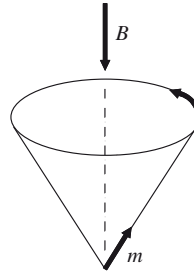


**Bild IV-25**  
Ursache des Diamagnetismus

**Tabelle IV-3** Suszeptibilität von diamagnetischen Stoffen

| Material                   | $\chi_M$              |
|----------------------------|-----------------------|
| N <sub>2</sub> (gasförmig) | $-6.75 \cdot 10^{-9}$ |
| Bi                         | $-1.5 \cdot 10^{-4}$  |
| Au                         | $-2.9 \cdot 10^{-5}$  |
| Cu                         | $-1 \cdot 10^{-5}$    |
| Wasser                     | $-7 \cdot 10^{-6}$    |

## 5.2 Paramagnetismus

Diese Stoffe haben normalerweise eine ungerade Anzahl von Elektronen, oder die Elektronenschalen sind nicht gefüllt. Somit verbleibt für jedes Atom ein resultierendes magnetisches Moment. Ohne äußeres Magnetfeld sind alle diese einzelnen Momente statistisch in alle Richtungen verteilt und das resultierende Moment verschwindet. Unter dem Einfluss eines äußeren Magnetfeldes richten sich die atomaren Momente in Feldrichtung aus und verstärken das Magnetfeld. Die Suszeptibilität ist daher positiv. Da die thermische Bewegung der Atome, und damit auch die der atomaren Momente, mit steigender Temperatur zunimmt, wird dieser Ordnungszustand der Momente im äußeren Feld bei höherer Temperatur schlechter. Daher muss die Suszeptibilität von der Temperatur abhängig sein.

$$\text{Curie-Gesetz } \chi_M = \frac{C}{T} \quad (\text{IV.66})$$

Die Größe  $C$  heißt *Curie-Konstante* und ist materialabhängig.

**Tabelle IV-4** Suszeptibilität von paramagnetischen Stoffen

| Material                   | $\chi_M$            |
|----------------------------|---------------------|
| O <sub>2</sub> (flüssig)   | $3.6 \cdot 10^{-3}$ |
| O <sub>2</sub> (gasförmig) | $1.5 \cdot 10^{-6}$ |
| Pt                         | $2.5 \cdot 10^{-4}$ |
| Al                         | $2.4 \cdot 10^{-5}$ |



### 5.3 Ferromagnetismus

Ferromagnetische Stoffe haben, wie paramagnetische Materialien, ein resultierendes magnetisches Moment pro Atom. Durch gegenseitige Kräfte stellt sich ein Zustand ein, bei dem in größeren Bereichen ohne äußeres Magnetfeld alle Momente in einer Richtung ausgerichtet sind. Diese Bereiche, die nach ihrem Entdecker benannten *Weißschen Bezirke*, können Durchmesser bis zu 1 mm haben. Die Wände, die diese Bezirke trennen, sind die *Bloch-Wände*. Ohne äußeres Feld sind die Momente der einzelnen Bezirke statistisch verteilt, der Werkstoff ist dann nach außen unmagnetisch.

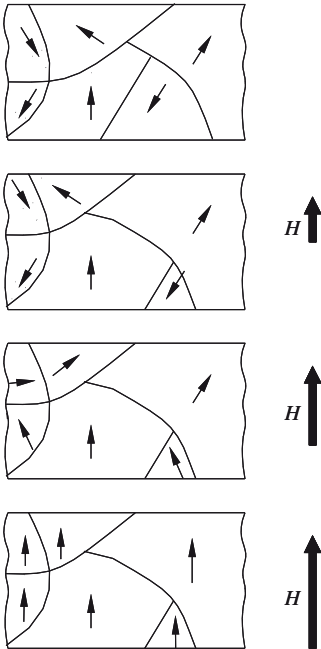


Bild IV-26 Weißsche Bezirke

Wird ein solches Material in ein Magnetfeld gebracht und dieses langsam vergrößert, geschieht die Magnetisierung des Materials in mehreren Schritten. Zunächst werden sich die Bezirke, deren Momente in etwa in Richtung des Magnetfeldes liegen, vergrößern. Es werden also die Wände zwischen den Weißschen Bezirken verschoben. Bei kleinen Feldstärken ist dieser Vorgang *reversibel* (Bereich I in Bild IV-27), bei Abschalten des Feldes werden die Verschiebungen rückgängig gemacht. Wird die Feldstärke weiter vergrößert, werden diese Wandverschiebungen *irreversibel* (Bereich II). Werden die Feldstärken noch größer, so werden schließlich alle Momente der einzelnen Bezirke gedreht, bis sie in der Endstellung parallel zum angelegten Magnetfeld liegen (Bereich III). Die Magnetisierung hat jetzt ihren *Sättigungswert*  $M_s$  erreicht.

#### 5.3.1 Magnetisierungskurve

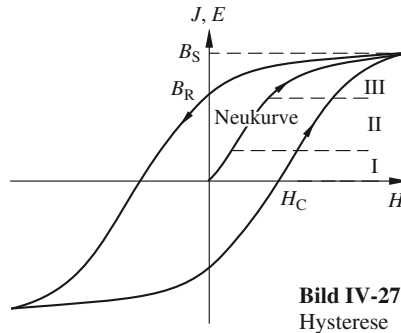


Bild IV-27  
Hysterese

Diese komplizierten Vorgänge verlaufen nicht linear mit steigender Feldstärke, daher ist auch die Magnetisierungskurve keine Gerade. Üblicherweise wird nicht die Magnetisierung  $M$  aufgetragen, sondern die Polarisation  $J$  oder die Flussdichte  $B$ . Da für diese Stoffe

$$\mu_r \gg 1 \text{ ist: } \chi_M \approx \mu_r \text{ und } J \approx B \quad (\text{IV.67})$$

Wird die Feldstärke nach Erreichen der *Sättigungsmagnetisierung* verringert, verläuft die Magnetisierungskurve auf einem anderen Weg, da die Vorgänge teilweise irreversibel sind. Wird das Magnetfeld umgepolt und dann wieder bis zur Sättigung magnetisiert, erhält man die in Bild IV-27 aufgezeigte Kurve. Aus dieser *Hysteresekurve* lassen sich folgende Größen ablesen:

Die verbleibende Flussdichte bei abgeschaltetem Magnetfeld wird als *Remanenzflussdichte* oder *Remanenz*  $B_r$  bezeichnet. Sie ist ein Maß für die Stärke von Dauermagneten. Die magnetische Feldstärke, die notwendig ist, um den Stoff zu entmagnetisieren (Wert  $B = 0$  einzustellen), wird als *Koerzitivfeldstärke*  $H_c$  bezeichnet.

Wird ein Stoff magnetisiert, muss hierzu Energie aufgewendet werden. Diese Energie wird für die Verschiebung der Wände und die Drehung der Momente aufgewendet.

$$w = \int H dB = \int H \mu_0 \mu_r(H) dH \quad (\text{IV.68})$$

Da die relative Permeabilität keine Konstante und der mathematische Zusammenhang nicht genau bekannt ist, kann dieses Integral normalerweise nicht berechnet werden. Die Bestimmung der aufzuwendenden Energie pro Volumeneinheit bis zu einer bestimmten Magnetisierung kann grafisch geschehen, indem die schraffierte Fläche in Bild IV-28 bestimmt wird.

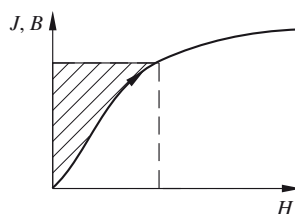


Bild IV-28  
Magnetisierungs-  
energie



Da bei einem vollen Durchlauf der Hysteresekurve in Bereichen, in denen der Werkstoff entmagnetisiert wird, Energie frei wird, ist die gesamte pro Volumeneinheit benötigte Energie bei einem vollen Durchlauf der Kurve aus der Fläche der Hysteresekurve zu entnehmen (Bild IV-29).

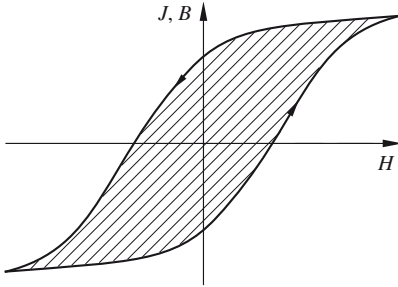


**Bild IV-29** Ummagnetisierungsverluste

$$w = \oint H dB \triangleq A_{\text{Hysteresis}} \quad (\text{IV.69})$$

Magnetische Werkstoffe werden in *magnetisch harte* und *magnetisch weiche* Materialien unterteilt. Magnetisch harte Werkstoffe besitzen eine große Fläche, und damit bei gleicher Remanenz eine große *Koerzitivfeldstärke*, magnetisch weiche Stoffe eine kleine Hysteresefläche (siehe Bild IV-30).

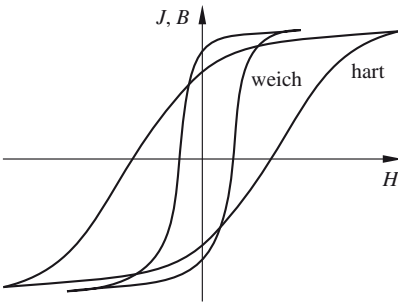


**Bild IV-30** harte und weiche Werkstoffe

### 5.3.2 Verlauf der Permeabilität

Die relative Permeabilität  $\mu_r$  ist durch Gleichung (IV.50) definiert. Ihr Wert kann aus der Hysteresekurve bestimmt werden. Hierzu wird der 1. Quadrant der Magnetisierungskurve betrachtet. Bei vorgegebener Feldstärke  $H$  wird die zugehörige Flussdichte  $B$  abgelesen und dann mit Gleichung (IV.50)  $\mu_r$  berechnet.

Wie aus Bild IV-31 oben zu entnehmen ist, sind bei einer Feldstärke bis zu drei verschiedene Flussdichten möglich. Daher kann es auch drei verschiedene Werte für die relative Permeabilität geben. Die relative Permeabilität ist von der magnetischen Vorgesichte des Werkstoffes abhängig. Wird die Bestimmung an der Neukurve vorgenommen (Bild IV-

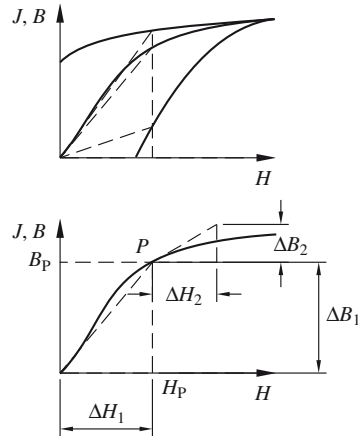


**Bild IV-31** Bestimmung der Permeabilität

31 unten), erhält man für jede Feldstärke nur einen Wert. Dieser Wert ist nicht konstant, sondern von  $H$  abhängig. Bestimmt wird  $\mu_r$  für die Feldstärke  $H_P$ , indem vom Nullpunkt eine Gerade zum Punkt  $P$  auf der Neukurve gezeichnet wird und dann  $\Delta B_1$  und  $\Delta H_1$  abgelesen werden. Hieraus wird  $\mu_r$  berechnet.

$$\text{relative Permeabilität } \mu_r = \frac{1}{\mu_0} \frac{\Delta B_1}{\Delta H_1} \quad (\text{IV.70})$$

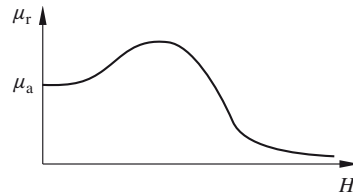


**Bild IV-32** Verlauf der Permeabilität

Der prinzipielle Verlauf ist in Bild IV-32 dargestellt. Ausgehend von einem Anfangswert  $\mu_a$  durchläuft die Kurve ein Maximum. Die Werte für  $\mu_a$  liegen im Bereich von einigen Hundert bis zu einigen Tausend. Für manche Überlegungen ist es notwendig, nicht die relative Permeabilität, sondern eine Größe zu verwenden, die aus der Steigung der Kurve bestimmt wird. Dies wird *differentielle Permeabilität*  $\mu_d$  genannt. Im Punkt  $P$  wird die Tangente an die Hysteresekurve gezeichnet und deren Steigung nach Bild IV-31 unten durch  $\Delta B_2$  und  $\Delta H_2$  bestimmt.

$$\text{differentielle Permeabilität } \mu_d = \frac{1}{\mu_0} \frac{\Delta B_2}{\Delta H_2} \quad (\text{IV.71})$$

### 5.3.3 Temperaturabhängigkeit

Grundlage für die ferromagnetischen Eigenschaften ist die Ausrichtung der magnetischen Momente in den Weißschen Bezirken. Diese Ausrichtung wird als *spontane Magnetisierung* bezeichnet. Eine solche

Ausrichtung wird durch die thermische Energie beeinflusst. Je höher die Temperatur, desto größer ist die thermische Bewegung, und desto geringer wird der Ordnungsgrad sein. Bei Überschreitung einer kritischen Temperatur werden die Weißschen Bezirke zerstört und der Werkstoff wird paramagnetisch. Als Maß für diesen Ordnungsgrad dient der Sättigungswert der Magnetisierung oder der Polarisation. Die Temperaturabhängigkeit von  $J_s$  ist in Bild IV-33 gezeigt.

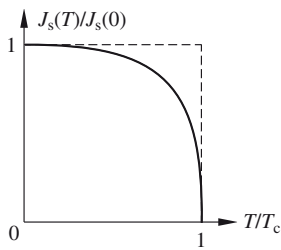


**Bild IV-33**  
Sättigungs-  
magnetisierung

Aufgetragen sind relative Sättigungswerte, bezogen auf den Wert bei 0 K als Funktion der Temperatur, bezogen auf die kritische Temperatur  $T_C$ . Diese kritische Temperatur ist die *Curie-Temperatur*. Für Temperaturen oberhalb der *Curie-Temperatur* gilt für die Suszeptibilität das

Curie-Weißsche Gesetz  $\chi_M = \frac{C}{T - T_C}$  (IV.72)

Die Curie-Temperaturen einiger Stoffe sind in Tabelle IV-5 aufgeführt.

**Tabelle IV-5** Curie-Temperatur und Sättigungspolarisation

| Werkstoff | $T_C/K$ | $J_s(0)/\frac{Vs}{m^2}$ |
|-----------|---------|-------------------------|
| Gd        | 289     | 2.54                    |
| Ni        | 631     | 0.64                    |
| Fe        | 1042    | 2.18                    |
| Co        | 1400    | 1.81                    |

**5.3.4 Magnetostriktion**

Durch die Verschiebung der Bloch-Wände bei der Magnetisierung von ferromagnetischen Stoffen kann eine Längenänderung des Werkstückes auftreten. Es kommen sowohl Verlängerungen, *positive Magnetostriktion*, als auch Verkürzungen, *negative Magnetostriktion*, vor. Die relativen Längenänderungen sind sehr klein  $\left(\frac{\Delta l}{l} \approx 4 \cdot 10^{-5}\right)$ . Technische Anwendung findet dieser Effekt bei der Erzeugung von Ultraschall bis zu einer Frequenz bis zu ungefähr 60 kHz.

**5.4 Antiferromagnetismus**

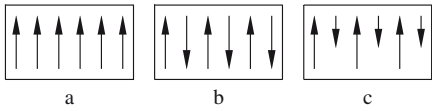


**Bild IV-34** Magnetische Stoffe

- a) ferro
- b) antiferro
- c) ferri

Voraussetzung für die ferromagnetischen Eigenschaften sind die Weißschen Bezirke mit den parallel eingestellten magnetischen Momenten (Bild IV-34a). Unter bestimmten Bedingungen stellen sich in einigen Werkstoffen die Momente nicht parallel, sondern antiparallel ein (Bild IV-34b). Für diese Stoffe gilt wie für die Ferromagnetika, dass sie sich oberhalb einer kritischen Temperatur, der *Néel-Temperatur*  $T_N$ , paramagnetisch verhalten, da die Ordnung der Momente durch die höhere Temperatur zerstört wird. Unterhalb der Néel-Temperatur sind diese Stoffe schwach magnetisch, da sich die Momente gegenseitig kompensieren. Typische Substanzen sind MnO, NiO, CoO, CrF<sub>3</sub>, FeO.

**5.5 Ferrimagnetismus**

In ferrimagnetischen Stoffen sind die Momente ebenfalls antiparallel eingestellt. Im Gegensatz zu den antiferromagnetischen Stoffen sind sie hier nicht gleich groß (Bild IV-34c). Die Ferrite haben große technische Bedeutung, sowohl als weichmagnetische, als auch als dauermagnetische Werkstoffe. Sie sind keine Metalle, sondern Ionenkristalle. Im Vergleich zu Metallen ( $\rho \approx 10^{-7} \Omega m$ ) haben sie einen wesentlich größeren spezifischen Widerstand ( $1 < \rho < 10^3 \Omega m$ ). Daher treten kaum Wirbelströme auf. Ferrite werden als Spulenkern für Anwendungen bei hohen Frequenzen eingesetzt. Die Abhängigkeit der spontanen Magnetisierung von der Temperatur ist sehr kompliziert und kann durchaus für die einzelnen Werkstoffe unterschiedlich sein. Auch diese Stoffe werden oberhalb der ferrimagnetischen Curie-Temperatur paramagnetisch. Typische Werkstoffe sind  $MeO \cdot Fe_2O_3$ , (Me = Fe, Co, Ni).

**6 Magnetische Kreise**

Manchmal ist es zur Berechnung der Kombinationen von magnetischen Bauteilen hilfreich, formale Analogien zu elektrischen Schaltungen herzustellen. Dazu werden eine magnetische Spannung und ein magnetischer Widerstand eingeführt.

**6.1 Magnetische Spannung**

In Analogie zur elektrischen Spannung nach Gleichung (III.8) kann man auch in magnetischen Kreisen eine magnetische Spannung definieren. Sie hat dann

die gleiche formale Struktur wie die elektrische Spannung. Die Spannung zwischen den Punkten 1 und 2 ist die magnetische Spannung.

$$\text{magnetische Spannung} \quad V_{12} = \int_1^2 \vec{H} d\vec{s} \quad (\text{IV.73})$$

Die Addition aller Teilspannungen ergibt die *magnetische Umlaufspannung*

$$V = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI \quad (\text{IV.74})$$

Dieser Ausdruck ist aber im Durchflutungsgesetz nach Gleichung (IV.6) aufgetreten.

$$\Theta = V \quad (\text{IV.75})$$

## 6.2 Magnetischer Widerstand

Der magnetische Fluss in einem konstanten Magnetfeld einer Ringspule ist

$$\phi = BA = \mu_0 \mu_r HA = \mu_0 \mu_r \frac{IN}{l} A \quad (\text{IV.76})$$

$$NI = V = \phi \frac{l}{\mu_0 \mu_r A} \quad (\text{IV.77})$$

In Analogie zu Gleichung (I.14) wird ein magnetischer Widerstand definiert.

*Magnetischer Widerstand*

$$R_m = \frac{l}{\mu_0 \mu_r A} \quad \begin{array}{c|c|c|c} R_m & l & \mu_0 & A \\ \hline \frac{\text{A}}{\text{Vs}} & \text{m} & \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} & \text{m}^2 \end{array} \quad (\text{IV.78})$$

$$\text{magnetischer Leitwert} \quad \Lambda = \frac{1}{R_m} = \frac{\mu_0 \mu_r A}{l} \quad (\text{IV.79})$$

Das Produkt  $\mu_0 \mu_r$  kann als magnetische Leitfähigkeit gedeutet werden. Die relative Permeabilität ist ein Maß dafür, magnetische Feldlinien zu leiten. Der formal gleiche Aufbau der Formeln für elektrische und magnetische Größen hat aber nur den Zweck, den Umgang mit magnetischen Größen zu vereinfachen. Es werden völlig andere Größen miteinander verglichen.

## 6.3 Unverzweigte Kreise

Ein unverzweigter magnetischer Kreis kann formal behandelt werden wie eine elektrische Masche

$$\sum V = \Theta = NI \quad (\text{IV.80})$$

Ein oft benutzter magnetischer Kreis ist der geschlossenen Eisenkern ohne Luftspalt, wie er in Bild IV-35 gezeichnet ist.

Der Eisenkern hat längs des Umlaufweges  $l$  überall den gleichen Querschnitt  $A$ . Abweichungen in den Ecken werden vernachlässigt. Die Neukurve ist in Bild IV-36 gegeben. Die Windungszahl der verwendeten Spule ist  $N$ . Da die relative Permeabilität von Eisen sehr viel größer ist als die von Luft

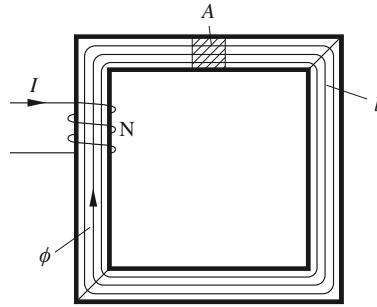


**Bild IV-35** Spule mit Eisenkern

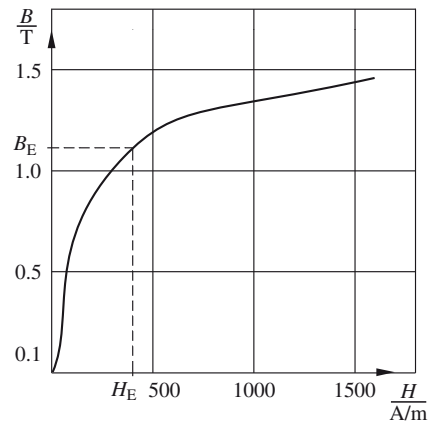


**Bild IV-36** Magnetisierungskurve von Eisen

( $\mu_{rFe} \approx 2000$ ), verläuft der in der Spule erzeugte magnetische Fluss fast vollständig im Eisenkern, obwohl die felderzeugende Spule nur an einer Stelle um den Eisenkern liegt. Der Fluss im Eisenkern ist daher überall gleich groß. Der Strom  $I$  durch die Spule erzeugt das Magnetfeld  $H_E = \frac{IN}{l}$ . Zu diesem

Magnetfeld kann aus der Magnetisierungskurve die zugehörige Flussdichte  $B_E$  abgelesen werden.

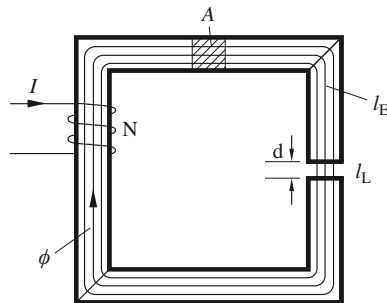


**Bild IV-37** Spule mit Luftspalt

Wird nun in den Eisenkern ein Luftspalt der Breite  $d$  geschnitten (Bild IV-37), sind analog zur Maschenre-

gel zwei magnetische Spannungen zu addieren. Der magnetische Gesamtwiderstand ist gleich der Summe der Einzelwiderstände. Da der Luftspalt als sehr klein angenommen wird, ist der magnetische Fluss im Eisen und im Spalt gleich.

Nach Gleichung (IV.77) ist

$$NI = \frac{\phi}{\mu_0 A} \left( \frac{l_E}{\mu_r} + \frac{l_L}{1} \right) \quad (\text{IV.81})$$

$$NI = H_E l_E + H_L l_L \quad (\text{IV.82})$$

$$H_L = \frac{B_E}{\mu_0} \quad (\text{IV.83})$$

$$NI = H_E l_E + \frac{B_E}{\mu_0} l_L \quad (\text{IV.84})$$

■ **Beispiel:** Ein Ringkern mit der in Bild IV-36 angegebenen Magnetisierungskurve hat eine mittlere Länge von  $l = 35 \text{ cm}$  und eine Querschnittsfläche von  $A = 4 \text{ cm}^2$ . Die verwendete Spule hat eine Windungszahl von  $N = 200$ .

a) Welche Stromstärke  $I$  wird benötigt, um einen Fluss von  $\phi = 4.4 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$  zu erzeugen?

b) in den Kern wird ein Luftspalt von  $0.3 \text{ mm}$  geschnitten. Welche Stromstärke wird jetzt benötigt?

$$\text{a) } B_E = \frac{\phi}{A} = \frac{4.4 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}}{4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 1.1 \text{ T}$$

Aus der Magnetisierungskurve wird zu diesem  $B$ -Wert ein Feld

$$H_E = 400 \frac{\text{A}}{\text{m}} \text{ abgelesen. Hierzu wird ein Strom von}$$

$$I = \frac{H_E l}{N} = \frac{400 \frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot 0.35 \text{ m}}{200} = 0.7 \text{ A} \text{ benötigt.}$$

b)  $B_E$  und  $H_E$  werden wie unter a) bestimmt. Das Feld im Luftspalt ist

$$H_L = \frac{B_E}{\mu_0} = \frac{1.1 \text{ T}}{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}} = 8.75 \cdot 10^5 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Nach Gleichung (IV.82) ist  $I_L = \frac{H_E l_E + H_L l_L}{N}$ ;

$$I_L = \frac{(400 \cdot 0.35 + 8.75 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-4}) \text{ A}}{200} = 2.01 \text{ A}$$

Ist hingegen bei einer Spule mit Luftspalt die Durchflutung gegeben und nach dem magnetischen Feld gefragt, kann dies Problem nur grafisch gelöst werden, da die mathematische Form der Magnetisierungskurve nicht bekannt ist. Ausgehend von Gleichung (IV.84) ist zu sehen, dass das Feld im Eisen linear mit zunehmender Breite des Luftspaltes abnimmt.

$$H_E l_E = NI - \frac{B_E}{\mu_0} l_L \quad (\text{IV.85})$$

Die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Koordinatenachsen berechnen sich nach

$$\text{Schnittpunkte } H_S = \frac{NI}{l_E} \quad (\text{IV.86})$$

$$B_S = \frac{\mu_0 NI}{l_L} \quad (\text{IV.87})$$

Die Schnittpunkte dieser „Luftspaltgeraden“ mit der Magnetisierungskurve ergeben die gesuchten Werte für  $H_E$  und  $B_E$ .

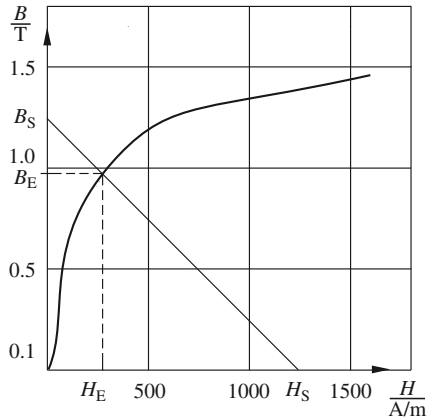


Bild IV-38 Einfluss des Luftspaltes

■ **Beispiel:** Wie groß ist die Feldstärke und die Flussdichte in einem Eisenkern mit  $0.3 \text{ mm}$  Luftspalt und einer mittleren Länge von  $24 \text{ cm}$ , wenn durch eine Spule mit  $150$  Windungen ein Strom von  $2 \text{ A}$  fließt?

$$H_S = \frac{2 \text{ A} \cdot 150}{0.24 \text{ m}} = 1250 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$B_S = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 2 \text{ A} \cdot 150}{3 \cdot 10^{-4} \text{ m}} = 1.256 \text{ T}$$

Diese Werte und die Gerade werden in Bild IV-38 eingetragen. Die Koordinaten des Schnittpunktes mit der Magnetisierungskurve sind  $H_E = 280 \frac{\text{A}}{\text{m}}$  und  $B_E = 0.97 \text{ T}$ .

## 6.4 Verzweigte Kreise

Die Berechnung kann analog zu den Überlegungen in elektrischen Kreisen durchgeführt werden.

$$\text{Knotenregel} \quad \sum_{i=1}^n \phi_i = 0 \quad (\text{IV.88})$$

$$\text{Maschenregel} \quad \Theta = \sum_{i=1}^n H_i l_i \quad (\text{IV.89})$$

■ **Beispiel:** Im mittleren Steg II des Transformatorkernes nach Bild IV-39 soll ein Fluss von  $\phi_2 = 1.6 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$  erzeugt werden. Auf Steg I befindet sich eine Spule mit  $150$  Windungen. Welcher Strom muss durch die Spule fließen? Die Magnetisierungskurve ist durch Bild IV-38 gegeben.

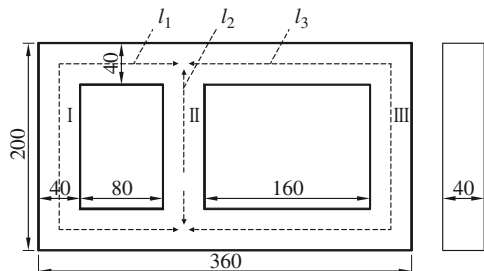


Bild IV-39 verzweigter Kreis

Aus der Zeichnung lassen sich folgende geometrische Größen bestimmen:

$l_1 = 40 \text{ cm}, l_2 = 16 \text{ cm}, l_3 = 56 \text{ cm}, A = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2.$

Da sich die Spule nur auf dem Steg I befindet, sind die magnetischen Spannungen der beiden Zweige II und III gleich

$H_2 l_2 = H_3 l_3; \quad B_2 = \frac{\phi_2}{A} = \frac{1,6 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}}{1,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2} = 1 \text{ T}.$

Hierzu gehört nach Bild IV-38

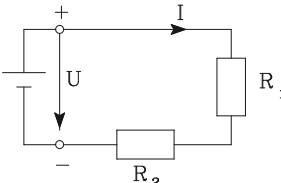
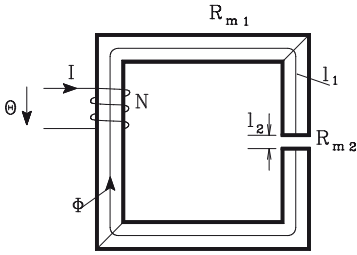
$H_2 = 300 \frac{\text{A}}{\text{m}}; \quad H_3 = \frac{H_2 l_2}{l_3} = 85,7 \frac{\text{A}}{\text{m}}; \quad B_3 = 0,4 \text{ T};$

$\phi_3 = B_3 A = 6,4 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}; \quad \phi_1 = \phi_2 + \phi_3 = 2,24 \cdot 10^{-3} \text{ Wb};$

$B_1 = \frac{\phi_1}{A} = 1,4 \text{ T}; \quad H_1 = 1100 \frac{\text{A}}{\text{m}};$

$NI = H_1 l_1 + H_2 l_2 = 488 \text{ A}; \quad I_1 = 3,25 \text{ A}$

Tabelle IV-6 Analogie elektrischer-magnetischer Kreis

|                 | elektrischer Kreis                                                                | magnetischer Kreis                                                                           |
|-----------------|-----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
|                 |  |            |
| Ursache         | elektrische Spannung<br>$U; [U] = 1 \text{ V}$                                    | magnetische Spannung<br>$\Theta = \oint H ds = NI; [\Theta] = 1 \text{ A}$                   |
| Wirkung         | Strom $I; [I] = 1 \text{ A}$                                                      | Fluss $\phi; [\phi] = 1 \text{ Wb} = 1 \text{ Vs}$                                           |
| Ohmsches Gesetz | $R = \frac{U}{I}$                                                                 | $R_m = \frac{\Theta}{\phi}$                                                                  |
| Widerstand      | $R = \frac{l}{\chi A}; [R] = 1 \Omega$                                            | $R_m = \frac{l}{\mu_0 \mu_r A}; [R_m] = 1 \frac{\text{A}}{\text{Wb}}$                        |
| Leitfähigkeit   | $\chi; [\chi] = 1 \frac{\text{A}}{\text{Vm}}$                                     | $\mu_0 \mu_r; [\mu_0 \mu_r] = 1 \frac{\text{Wb}}{\text{Am}} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$ |

## V Induktion

Eine der wichtigsten Erscheinungen für die Elektrotechnik ist die *Induktion*. Faraday erkannte im Jahr 1831, dass jede zeitliche Änderung des magnetischen Flusses in einer Leiterschleife eine Spannung hervorruft, die Spannung *induziert*. Ursache der Induktion ist die Lorentzkraft.

### 1 Induktion bei Änderung der Fläche

Bei der Bewegung eines Leiters in einem Magnetfeld senkrecht zu der Richtung der Feldlinien wird auf die Elektronen eine Kraft ausgeübt. Die Kraft ist bei den in Bild V-1 angegebenen Richtungen der Geschwindigkeit  $v$  und des Magnetfeldes  $B$  so, dass die Elektronen zum hinteren Teil des Leiters bewegt werden.

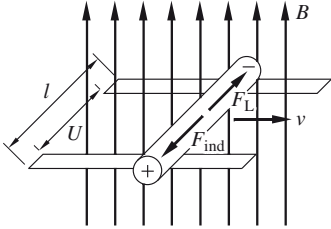


Bild V-1 Änderung der Fläche durch Bewegung des Leiters

Im Bild V-1 ist die Lorentzkraft auf negative Ladungen eingezeichnet. Diese Trennung erfolgt solange, bis das elektrostatische Gegenfeld und die da-

durch erzeugte Kraft  $F_{\text{ind}}$  sich aufheben. Für die Beträge gilt

$$|F_{\text{ind}}| = |F_L| \quad (\text{V.1})$$

$$|e_0 v B| = |e_0 E_{\text{ind}}| = \frac{|u_{\text{ind}}|}{l} \quad (\text{V.2})$$

$$|v B| = |E_{\text{ind}}| \quad (\text{V.3})$$

$$|u_{\text{ind}}| = |v B l| \quad (\text{V.4})$$

Wenn auf die Größen  $u_{\text{ind}}$ ,  $v$ ,  $B$  die rechte Handregel angewendet wird, ( $v$  in Daumen,  $B$  in Zeigefinger und  $u_{\text{ind}}$  in Mittelfingerrichtung nach Bild V-2), ist:

$$\text{Induzierte Spannung } u_{\text{ind}} = -v B l \quad (\text{V.5})$$

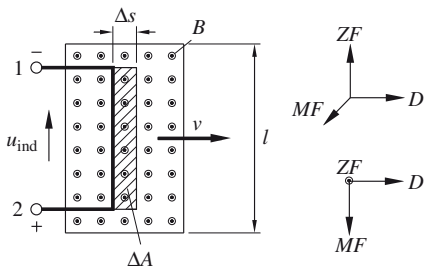


**Bild V-2** Bewegter Leiter im Magnetfeld

Bei der betrachteten Bewegung des Leiters wird die Fläche um das Stück vergrößert

$$\Delta A = l \cdot \Delta s = l \cdot v \cdot \Delta t \quad (\text{V.6})$$

$$\text{Flussänderung } \Delta \phi = B \cdot \Delta A = B \cdot l \cdot v \cdot \Delta t \quad (\text{V.7})$$

$$\text{induzierte Spannung } u_{\text{ind}} = -\frac{\Delta \phi}{\Delta t} \quad (\text{V.8})$$

Wird die Leiterschleife in Bild V-2 zwischen den Punkten 1 und 2 durch einen Widerstand verbunden, fließt ein Strom. Hierfür kann das in Bild V-3 dargestellte Ersatzschaltbild verwendet werden.

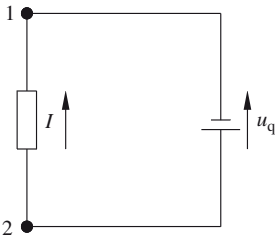


**Bild V-3** Induktion als Ersatzspannungsquelle

Der Strom, der in Bild V-2 durch den Leiter fließt, erzeugt selbst wieder ein Magnetfeld. Die Richtung dieses induzierten Feldes ist so, dass auf den Leiter eine Kraft ausgeübt wird, die die Bewegung des Leiters hemmt (Bild V-4). Das wird als *Lenzsche Regel* bezeichnet.

Die durch Bewegung von Magneten oder Leitern erzeugten Induktionsströme haben eine solche Richtung, dass ihr Magnetfeld der Bewegung entgegengesetzt wirkt.

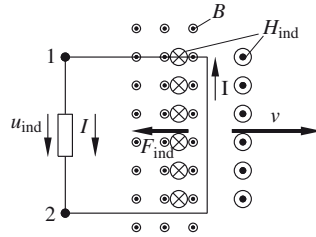


**Bild V-4**  
Lenzsche Regel

Es muss also bei der Bewegung Arbeit geleistet werden.

Das Magnetfeld stand bei der bisherigen Betrachtung senkrecht zur Fläche. Ist dies nicht der Fall, wird der Fluss durch den Flächenanteil, der senkrecht zum Magnetfeld steht, bestimmt. Eine Flussänderung kann auch durch Rotation einer Leiterschleife nach Bild V-5 bewirkt werden. Die Schleife dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ .

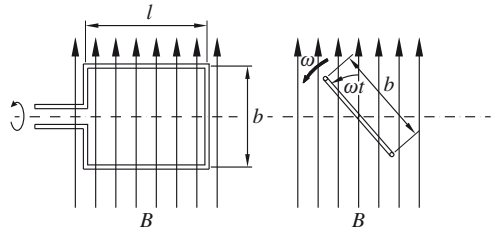


**Bild V-5** Rotation einer Leiterschleife

$$\text{Momentaner Fluss } \phi = B \cdot A \cdot \cos \omega t \quad (\text{V.9})$$

Daraus resultiert eine induzierte Spannung

$$u_{\text{ind}} = -\frac{d\phi}{dt} = B \cdot A \cdot \omega \cdot \sin \omega t \quad (\text{V.10})$$

$$\text{Wechselspannung } u = \hat{u} \cdot \sin \omega t \quad (\text{V.11})$$

$$\text{Scheitelspannung } \hat{u} = B \cdot A \cdot \omega \quad (\text{V.12})$$

Wird nicht nur eine Schleife, sondern eine Spule mit  $N$  Windungen gedreht, ist die

$$\text{Scheitelspannung } \hat{u} = N \cdot B \cdot A \cdot \omega \quad (\text{V.13})$$

■ **Beispiel:** Ein in Richtung Ost-West liegender Metallstab von 2 m Länge fällt aus 15 m Höhe zu Boden. Welche Spannung wird durch das Erdmagnetfeld induziert, wenn der Stab den Boden erreicht ( $B_{\text{Erde}} = 20 \mu\text{T}$ )?

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 15} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 17,16 \frac{\text{m}}{\text{s}};$$

$$|u_{\text{ind}}| = |v B l| = 17,16 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 20 \cdot 10^{-6} \text{ T} \cdot 2 \text{ m} = 0,68 \text{ mV}$$

■ **Beispiel:** Eine quadratische Spule mit der Kantenlänge  $a = 5 \text{ cm}$  und  $N_1 = 50$  Windungen rotiert mit  $n = 250 \text{ min}^{-1}$  um ihre Sym-

metrieachse im Inneren einer langen Zylinderspule, die je cm 8 Windungen hat und von 6 A durchflossen wird. Welchen Scheitwert erreicht die induzierte Spannung?

$$B_{\text{Sp}} = \mu_0 \frac{N_{\text{Sp}} I}{l_{\text{Sp}}}; \quad B_{\text{Sp}} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \frac{8 \cdot 6 \text{ A}}{10^{-2} \text{ m}} = 6 \text{ mT};$$

$$\dot{u} = N_1 \cdot B \cdot A \cdot 2\pi \cdot n;$$

$$\dot{u} = 50 \cdot 6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \cdot (5 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 \cdot 2\pi \cdot \frac{250}{60} \frac{1}{\text{s}} = 20 \text{ mV}$$

## 2 Induktion bei Änderung des Magnetfeldes

Bei konstanter Fläche einer Leiterschleife oder einer Spule kann durch Magnetfeldänderungen eine Flussänderung hervorgerufen werden. Dies kann z.B. durch Stromänderung in einer Erregerspule erreicht werden. Die Flussänderung ist dann

$$\text{Flussänderung} \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{\mu_0 N_{\text{err}}}{l_{\text{err}}} \frac{dI_{\text{err}}}{dt} \quad (\text{V.14})$$

Dieser Effekt wird bei Transformatoren verwendet. Das Induktionsgesetz lautet bei  $N$  Windungen einer Feldspule

$$\text{Induktionsgesetz} \quad u_{\text{ind}} = -N \frac{d\phi}{dt} \quad (\text{V.15})$$

$$u_{\text{ind}} = -N \left( A_n \frac{dB}{dt} + B \frac{dA_n}{dt} \right) \quad (\text{V.16})$$

$A_n$  ist der Flächenanteil, der senkrecht zu den Feldlinien steht.

Aus Gleichung (V.16) geht hervor, dass es gleichgültig ist, ob sich die magnetische Flussdichte bei gleichbleibender Fläche (*Transformatorprinzip*) oder die Fläche bei gleichbleibender Flussdichte (*Generatorprinzip*) ändert.

Entscheidend ist, dass sich der Fluss in einer Leiterschleife ändert. Wird eine Leiterschleife in einem homogenen Magnetfeld bewegt, ändert sich der Fluss nicht. Die durch die auch hier vorhandene Lorentzkraft verursachte Verschiebung der Elektronen hebt sich in gegenüberliegenden Teilen der Schleife gegenseitig auf.

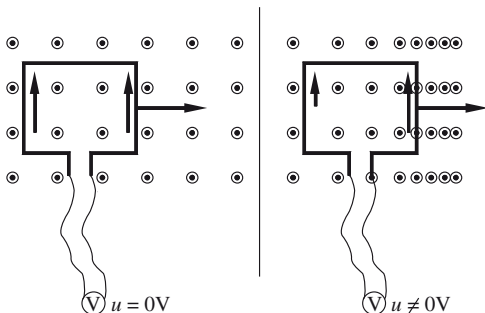


**Bild V-6** Bewegung einer Schleife im homogenen und inhomogenen Feld

Wird eine Schleife im inhomogenen Feld bewegt, entsteht eine Induktionsspannung, da sich bei der Bewegung der Fluss ändert und in den gegenüberliegenden Teilen der Schleife unterschiedliche Spannungen induziert werden. In den in Bild V-6 parallel zur Bewegungsrichtung liegenden Teilen der Schleife werden keine Spannungen induziert.

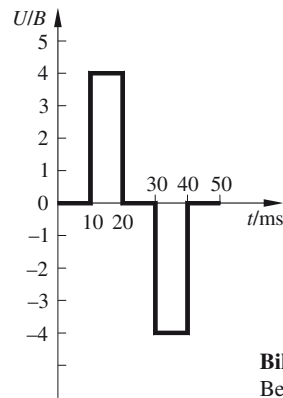
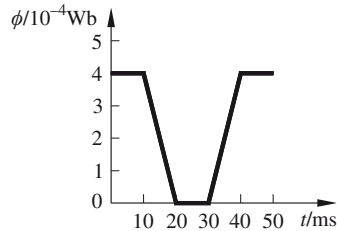


**Bild V-7**  
Beispiel Induktion

■ **Beispiel:** Eine Spule mit  $N = 100$  Windungen wird von einem Fluss  $\Phi$  durchsetzt, der den in Bild V-7 oben dargestellten Verlauf hat. Welchen zeitlichen Verlauf hat die induzierte Spannung? In den Zeitintervallen 0 ... 10 ms, 20 ... 30 ms, > 40 ms ändert sich der Fluss nicht, somit ist in diesen Bereichen  $u_{\text{ind}} = 0 \text{ V}$ . Im Intervall 10 ... 20 ms gilt

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{4 \cdot 10^{-4} \text{ Vs}}{10 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = -40 \text{ mV};$$

$$u_{\text{ind}} = -N \frac{d\phi}{dt} = -100 \cdot (-40 \text{ mV}) = 4 \text{ V}$$

Im Intervall 30 ... 40 ms hat die induzierte Spannung denselben Wert mit umgekehrtem Vorzeichen. Die induzierte Spannung ist in Bild V-7 unten aufgetragen.

## 3 Die Induktivität einer Spule

### 3.1 Selbstinduktion

In der Ringspule in Bild IV.4 mit der Windungszahl  $N$  soll der Strom  $i$  beliebig veränderbar sein. Wird der eingespeiste Strom geändert, so ändert sich auch der von diesem Strom erzeugte magnetische Fluss  $\phi$ . Wegen dieser Flussänderung wird eine Spannung in der Spule induziert. Dieser Vorgang wird *Selbstinduktion* genannt. Die induzierte Spannung ist nach

der Lenzschen-Regel dem erzeugenden Strom entgegen gesetzt.

$$u_{\text{ind}} = -N \frac{d\phi}{dt} \quad (\text{V.17})$$

Da die Flussänderung durch eine Stromänderung verursacht wird, gilt auch

$$u_{\text{ind}} = -L \frac{di}{dt} \quad (\text{V.18})$$

$$\text{Induktivität } L = \left| u_{\text{ind}} \frac{dt}{di} \right| = \frac{L}{H} \left| \frac{u}{V} \frac{di}{A} \frac{t}{s} \right| \quad (\text{V.19})$$

Die Einheit ist 1 Henry, 1 H.

Aus Gleichung (V.17) und (V.18) folgt

$$L = N \cdot \frac{d\phi}{di} = N \cdot \frac{A \cdot dB}{di} \quad (\text{V.20})$$

$$L = NA \frac{dB}{dH} \cdot \frac{dH}{di} \quad (\text{V.21})$$

Befindet sich kein ferromagnetischer Stoff in der Spule, so ist

$$\frac{dB}{dH} = \mu_0 \quad (\text{V.22})$$

$$\frac{dH}{di} = \frac{N}{l} \quad (\text{V.23})$$

$$\text{Induktivität } L = \mu_0 N^2 \frac{A}{l} \quad (\text{V.24})$$

Ist der Spulenkörper ferromagnetisch, gilt

$$\frac{dB}{dH} = \mu_0 \mu_d \quad (\text{V.25})$$

$$L = \mu_0 \mu_d N^2 \frac{A}{l} \quad (\text{V.26})$$

$\mu_d$  ist die *differentielle Permeabilität*.

Die Induktivität spielt in Wechselstromkreisen eine große Rolle. Sie ist für beliebige Leiteranordnungen und Leitergeometrien schwierig zu berechnen, lässt sich aber in Wechselstromkreisen gut durch Messungen bestimmen.

$$\text{Einfachleitung } L = \frac{\mu_0 \mu_r l}{2\pi} \left( \ln \left( \frac{2l}{r} \right) - \frac{3}{4} \right) \quad (\text{V.27})$$

$$\text{Doppelleitung } L = \frac{\mu_0 \mu_r l}{\pi} \left( \ln \left( \frac{a}{r} \right) + \frac{1}{4} \right) \quad (\text{V.28})$$

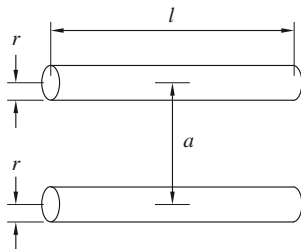


**Bild V-8** Doppel-Leitung

Bei koaxialen Leitern ist die Gesamtinduktivität nach folgenden Gleichungen zu berechnen:

$$\text{Innenleiter } L_i = \frac{\mu_0 \mu_r l}{8\pi} \quad (\text{V.29})$$

$$\text{Zwischenraum } L_{\text{ZW}} = \frac{\mu_0 \mu_r l}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r} \quad (\text{V.30})$$

*Außenleiter*

$$L_a = \frac{\mu_0 \mu_r l r_2^4}{2\pi(r_2^2 - r_1^2)} \left( \ln \frac{r_2}{r_1} - \frac{(3r_2^2 - r_1^2)(r_2^2 - r_1^2)}{4r_2^4} \right) \quad (\text{V.31})$$

$$\text{gesamte Induktivität } L_{\text{ges}} = L_i + L_{\text{ZW}} + L_a \quad (\text{V.32})$$

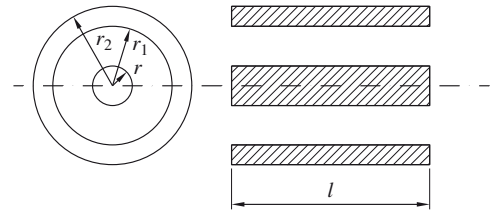


**Bild V-9** Koaxialleiter

### 3.2 Gegeninduktion

Befindet sich in der Nähe einer stromdurchflossenen Spule  $Sp_1$  eine zweite Spule  $Sp_2$ , so verläuft ein Teil des von der Spule 1 erzeugten Magnetfeldes auch durch die Spule 2. Die Spulen sind *magnetisch gekoppelt*. Der vom Strom  $I_1$  in der Spule 1 erzeugte magnetische Fluss durchsetzt die Spule 2 nur zum Teil. Dieser Anteil ist  $\phi_{12}$ . Der Gesamtfluss in der Spule 2 ist dann

$$\phi_{G12} = N_2 \phi_{12} \quad (\text{V.33})$$

$$N_2 \phi_{12} \sim I_1 \quad (\text{V.34})$$

$$N_2 \phi_{12} = M_{12} I_1 \quad (\text{V.35})$$

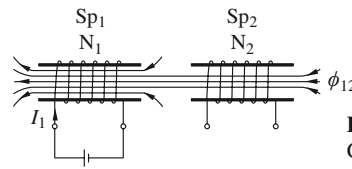


**Bild V-10**  
Gegeninduktion

Der Faktor  $M_{12}$  wird als *Gegeninduktivität* bezeichnet. Bei Abwesenheit von ferromagnetischen Materialien ist die Gegeninduktivität eine Konstante. Wird der Strom in der Spule 1 geändert, wird in der Spule 2 eine Spannung induziert.

$$u_2 = -N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt} = -M_{12} \frac{di_1}{dt} = \quad (\text{V.36})$$

Wird die Spule 2 vom Strom durchflossen, so wird in der Spule 1 eine Spannung

$$u_1 = -M_{21} \frac{di_2}{dt} \quad (\text{V.37})$$



induziert. Die Gegeninduktivitäten sind gleich, wenn die Permeabilitäten nicht vom Magnetfeld abhängen, wenn also keine ferromagnetischen Stoffe beteiligt sind. Wie aus Bild V-10 ersichtlich, wird Spule 2 nicht vom gesamten in Spule 1 erzeugten Fluss durchsetzt.

$$\phi_1 = \phi_{12} + \phi_{\sigma 1} \quad (\text{V.38})$$

$$\phi_2 = \phi_{21} + \phi_{\sigma 2} \quad (\text{V.39})$$

$\phi_{12}$  wird als *Hauptfluss*,  $\phi_{\sigma 1}$  als *Streufluss* bezeichnet. Es lassen sich folgende Ausdrücke definieren:

$$\text{Strefaktoren } \sigma_1 = \frac{\phi_{\sigma 1}}{\phi_1}; \quad \sigma_2 = \frac{\phi_{\sigma 2}}{\phi_2} \quad (\text{V.40})$$

$$\text{Streuinduktivitäten } L_{\sigma 1} = \sigma_1 L_1; \quad L_{\sigma 2} = \sigma_2 L_2 \quad (\text{V.41})$$

$$\text{Koppelungsfaktoren } k_1 = 1 - \sigma_1; \quad k_2 = 1 - \sigma_2 \quad (\text{V.42})$$

$$\text{totaler Koppelungsfaktor } k = \sqrt{k_1 k_2} \quad (\text{V.43})$$

$$\text{Hauptflüsse } \phi_{12} = k_1 \Phi_1; \quad \phi_{21} = k_2 \Phi_2 \quad (\text{V.44})$$

$$\text{Gegeninduktivität } M = \sqrt{k_1 k_2 L_1 L_2} = k \sqrt{L_1 L_2} \quad (\text{V.45})$$

■ **Beispiel:** Wie groß sind die Strefaktoren für die in Bild V-11 dargestellte Anordnung zweier konzentrisch ineinander liegender Zylinderspulen? Die Abmessungen der beiden Spulen sind

$$d_1 = 18 \text{ mm}, \quad l_1 = 60 \text{ mm}, \quad N_1 = 250,$$

$$d_2 = 10 \text{ mm}, \quad l_2 = 30 \text{ mm}, \quad N_2 = 24.$$

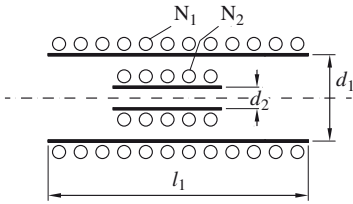


**Bild V-11** Beispiel Gegeninduktion

$$\text{Fluss } \phi_1 = \mu_0 H_1 A_1 = \mu_0 \frac{i_1 N_1}{l_1} \frac{\pi d_1^2}{4};$$

$$\phi_{12} = \mu_0 H_1 A_2 = \mu_0 \frac{i_1 N_1}{l_1} \frac{\pi d_2^2}{4}$$

$$\text{induzierte Spannung } u_2 = -N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt} = -\mu_0 \frac{N_1 N_2 \pi d_2^2}{4 l_1} \frac{di_1}{dt}$$

Der Faktor vor  $\frac{di_1}{dt}$  ist die Gegeninduktivität  $M$ .

$$\text{Gegeninduktivität } M = \mu_0 \frac{N_1 N_2 \pi d_2^2}{4 l_1};$$

$$M = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 250 \cdot 24 \cdot \pi \cdot (10 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2}{4 \cdot 60 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 9,87 \cdot 10^{-6} \text{ H}$$

$$\text{Strefaktor } \phi_{\sigma 1} = \phi_1 - \phi_{12};$$

$$\sigma_1 = \frac{\phi_{\sigma 1}}{\phi_1} = 1 - \frac{\phi_{12}}{\phi_1}; \quad \sigma_1 = 1 - \frac{\mu_0 \frac{i_1 N_1}{l_1} \frac{\pi d_2^2}{4}}{\mu_0 \frac{i_1 N_1}{l_1} \frac{\pi d_1^2}{4}} = 1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2;$$

$$\sigma_1 = 1 - \left(\frac{10 \text{ mm}}{18 \text{ mm}}\right)^2 = 0,691$$

### 3.3 Energie im Magnetfeld einer Spule

Zum Aufbau des Magnetfeldes in einer Spule ist Energie erforderlich. Ist die Induktivität  $L$  bekannt, kann die benötigte Energie berechnet werden.

$$u = L \frac{di}{dt} \quad (\text{V.46})$$

$$dW = u \cdot i \cdot dt \quad (\text{V.47})$$

$$dW = L \frac{di}{dt} \cdot i \cdot dt = L \cdot i \cdot di \quad (\text{V.48})$$

Wird die Spule nach Bild V-12 geschaltet, steigt der Strom vom Wert  $i = 0 \text{ A}$  bis zum Maximalwert  $i = \frac{U}{R} = I$  an. Damit beträgt die der Spule zugeführte und im Magnetfeld gespeicherte Energie:

$$\text{Energie des Magnetfeldes } W = \int_0^I Li \cdot di \quad (\text{V.49})$$

Ist die Induktivität konstant, enthält die Spule kein ferromagnetisches Material, kann dieses Integral berechnet werden.

$$\text{Energie in einer Spule } W = \frac{1}{2} LI^2 \quad (\text{V.50})$$

Bei Anwesenheit von ferromagnetischen Materialien ist zur Bestimmung der Energie das grafische Verfahren nach Bild IV.28 anzuwenden.

### 3.4 Ein- und Ausschaltvorgänge

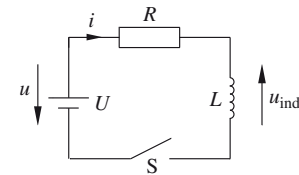


**Bild V-12**  
Spule

Wird im Stromkreis von Bild V-12 zur Zeit  $t = 0$  der Schalter  $S$  geschlossen, ändert sich der Strom  $i$ . Damit wird in der Spule eine Spannung induziert. Es gilt nach der Maschenregel

$$u + u_{\text{ind}} - iR = 0 \quad (\text{V.51})$$

$$u - L \frac{di}{dt} = iR \quad (\text{V.52})$$

Zu Beginn des Vorganges ist der Strom  $i = 0$ , am Ende hat der Strom seinen Maximalwert  $I = \frac{U}{R}$  erreicht. Die mathematische Form dieser Differentialgleichung ist wie die beim Aufladen eines Kondensators. Die Lösungsfunktion ist wie in Gleichung (III.67) durch eine  $e$ -Funktion darzustellen.

$$\text{Einschalten } i = I \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad (\text{V.53})$$

$$i = I \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (\text{V.54})$$

$$\text{Zeitkonstante } \tau = \frac{L}{R} \quad (\text{V.55})$$

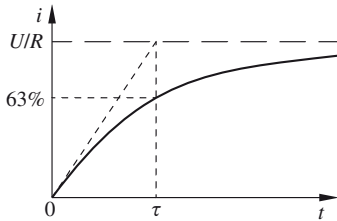


**Bild V-13** Einschaltvorgang einer Spule

Wird eine Spule, durch die ein konstanter Strom  $I$  fließt und in der ein konstantes Magnetfeld besteht, kurzgeschlossen, wird eine Spannung induziert, die nach der Lenzschen Regel versucht, das Magnetfeld aufrecht zu halten. Der Strom wird seinen Endwert ebenfalls nach einer  $e$ -Funktion erreichen.

$$\text{Kurzschließen } i = I e^{-\frac{R}{L}t} \quad (\text{V.56})$$

■ **Beispiel:** Eine Konstantstromquelle nach Bild V-14 speist die Reihenschaltung aus  $R = 50 \, \Omega$  und  $L = 200 \, \text{mH}$  mit einem Strom  $I = 2 \, \text{A}$ . Zum Zeitpunkt  $t = 0$  wird der Schalter geschlossen.

- Welcher Strom fließt durch den Widerstand nach  $2 \, \text{ms}$ ?
- Welche Spannung liegt dann am Widerstand?
- Welche Spannung liegt dann an der Spule?

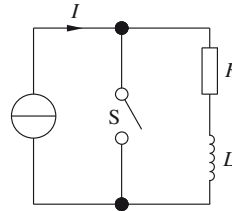


**Bild V-14**  
Beispiel Kurzschließen einer Spule

$$\tau = \frac{0,2 \, \text{H}}{50 \, \Omega} = \frac{0,2 \frac{\text{Vs}}{\text{A}}}{50 \frac{\text{V}}{\text{A}}} = 4 \, \text{ms}$$

$$\text{a) } i = I e^{-\frac{t}{\tau}} = 2 \, \text{A} \cdot e^{-\frac{2 \, \text{ms}}{4 \, \text{ms}}} = 1,21 \, \text{A};$$

$$\text{b) } u_R = i \cdot R = 1,21 \, \text{A} \cdot 50 \, \Omega = 60,65 \, \text{V}$$

$$\text{c) } u_L = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot I \cdot \left( -\frac{R}{L} \right) \cdot e^{-\frac{R}{L}t};$$

$$u_L = 0,2 \, \text{H} \cdot 2 \, \text{A} \cdot \left( -\frac{50 \, \Omega}{0,2 \, \text{H}} \right) e^{-\frac{2 \, \text{ms}}{4 \, \text{ms}}} = -60,65 \, \text{V};$$

$$u_R + u_L = 0$$

### 3.5 Zusammenschalten von Induktivitäten

Für die Zusammenschaltung von Induktivitäten gelten dieselben Gesetze wie bei Ohmschen Widerständen.

$$\text{Reihenschaltung } L_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n L_i \quad (\text{V.57})$$

$$\text{Parallelschaltung } \frac{1}{L_{\text{ges}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{L_i} \quad (\text{V.58})$$

## VI Wechselstrom

### 1 Grundbegriffe des Wechselstroms

Wechselstrom oder Wechselspannung sind Größen, bei denen sich die Werte zeitabhängig periodisch wiederholen. Der arithmetische Mittelwert der sich periodisch mit der Zeit ändernden Augenblickswerte ist gleich Null. Die Zeitspanne, nach der sich der periodische Verlauf gleichartig wiederholt, ist die *Periodendauer*  $T$ . Die Zahl der Perioden pro Zeit nennt man die *Frequenz*  $f$ .

$$\text{Frequenz } f = \frac{1}{T} \quad \left| \frac{f}{\frac{1}{s}} \right| \quad (\text{VI.1})$$

Die Einheit der Frequenz ist  $[f] = \text{s}^{-1} = \text{Hz}$  (Hertz).

Nach DIN 5488 unterscheidet man periodische Vorgänge, deren Mittelwert nicht Null wird und solche, deren Mittelwert Null wird. Ist der Mittelwert Null, spricht man von einer Wechselgröße. Bei den Wechselgrößen unterscheidet man die nichtsinusförmigen und die sinusförmigen Vorgänge (Sinusgrößen). Im Bild VI-1 ist der Verlauf einer Sinusgröße dargestellt.

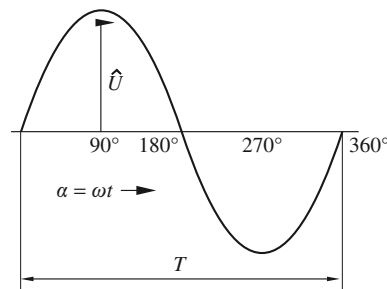


**Bild VI-1** Verlauf einer Sinusgröße

#### 1.1 Erzeugung einer sinusförmigen Wechselspannung

Wird eine Leiterschleife mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  in einem homogenen Magnetfeld gedreht (Bild VI-2), so hängt die Größe der indu-

zierten Spannung von der Winkelgeschwindigkeit und der vom Magnetfeld durchsetzten Fläche ab.

*induzierte Spannung*

$$u_{\text{ind}} = - \frac{d\Phi}{dt} = B \cdot A \cdot \omega \cdot \sin \omega t \quad \frac{u_{\text{ind}}}{V} \left| \frac{B}{\text{Vs}} \right| \left| \frac{A}{\text{m}^2} \right| \left| \frac{\omega}{\frac{1}{s}} \right| \quad (\text{VI.2})$$

Maximalwert der Spannung (Scheitelwert  $\hat{u}$ ):

$$\text{Scheitelwert } \hat{u} = B \cdot A \cdot \omega \quad (\text{VI.3})$$

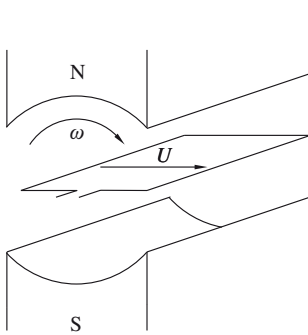


**Bild VI-2** Induktionsvorgang

Rotiert die Leiterschleife einmal im Magnetfeld, hat sie einen Winkel von  $360^\circ$  überstrichen. Dabei wurde in die Leiterschleife eine Wechselspannung induziert, deren zeitlicher Verlauf einer Sinusschwingung entspricht. Die Leiterschleife hat mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  in der Periodendauer  $T$  einen Winkel  $\alpha = 2\pi$  (Bogenmaß) überstrichen.

In Anlehnung an die gleichförmige Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  hat man für Wechselgrößen die *Kreisfrequenz* definiert.

$$\text{Kreisfrequenz } \omega = 2\pi f \quad \frac{\omega}{\text{s}^{-1}} \left| \frac{f}{\text{s}^{-1}} \right| \quad (\text{VI.4})$$

Die Kreisfrequenz  $\omega$  gibt an, welcher Bogen in einer Sekunde überstrichen wird. Hieraus ergibt sich die *Periodendauer*  $T$ .

$$\text{Periodendauer } T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\text{VI.5})$$

■ **Beispiel:** Eine Leiterschleife dreht sich mit einer Umdrehung pro Sekunde. Welchen Wert hat die Kreisfrequenz und die Periodendauer?

Mit  $f = 1 \text{ s}^{-1}$  folgt für die Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3,14 \cdot 1 \text{ s}^{-1} = 6,28 \text{ s}^{-1}$ .

Die Leiterschleife hat also einen Bogen von  $2\pi$  in einer Sekunde zurückgelegt.

Für die Periodendauer ergibt sich

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot 3,14}{6,28 \text{ s}^{-1}} = 1 \text{ s}^{-1}.$$

■ **Beispiel:** Eine Leiterschleife dreht sich mit 100 Umdrehungen pro Sekunde. Welchen Wert hat die Kreisfrequenz und die Periodendauer?

Mit  $f = 100 \text{ s}^{-1}$  folgt für die Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3,14 \cdot 100 \text{ s}^{-1} = 6,28 \cdot 10^2 \text{ s}^{-1}$ .

Die Leiterschleife hat also einen Bogen von  $2\pi \cdot 100$  in einer Sekunde zurückgelegt.

Für die Periodendauer ergibt sich

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot 3,14}{6,28 \cdot 100 \text{ s}^{-1}} = 10^{-2} \text{ s}^{-1}.$$

## 1.2 Phasenverschiebung

Werden in einem Magnetfeld zwei Leiterschleifen, die in einem Winkel  $\varphi$  zueinander versetzt sind, mit gleicher Winkelgeschwindigkeit gedreht, so werden in ihnen zwei sinusförmige Spannungen induziert, die sich nicht decken. Nach Bild VI-3 erreichen beide Spannungen ihr Maximum um den *Phasenwinkel*  $\varphi$  verschoben.

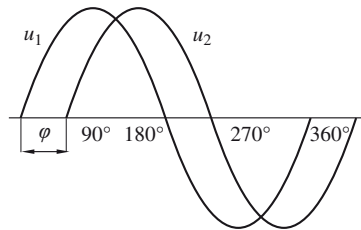


**Bild VI-3** Liniendiagramm zweier phasenverschobener Spannungen

Die Spannungen sind *phasenverschoben*. Nach Bild VI-3 erreicht die Spannung  $u_2$  den Maximalwert später als die Spannung  $u_1$ . Die Spannung  $u_2$  eilt der Spannung  $u_1$  nach.

## 1.3 Effektivwert

Mit dem Scheitelwert  $\hat{i}$  ergibt sich der *Effektivwert*  $I_{\text{eff}}$  eines sinusförmigen Wechselstroms:

$$\text{Effektivwert } I_{\text{eff}} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot \hat{i} \quad (\text{VI.6})$$

Der *Effektivwert*  $I_{\text{eff}}$  eines sinusförmigen Stroms verrichtet an einem Widerstand  $R$  die gleiche elektrische Arbeit wie ein gleich großer Gleichstrom.

Gleiche Überlegungen für die Spannung ergeben den *Effektivwert*  $U_{\text{eff}}$  einer sinusförmigen Wechselspannung:

$$\text{Effektivwert } U_{\text{eff}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot \hat{u} \quad (\text{VI.7})$$

Effektivwerte werden wie Gleichstromwerte durch Großbuchstaben bezeichnet, eventuell zusätzlich durch den Index „eff“.

■ **Beispiel:** Welchen Effektivwert weist ein sinusförmiger Wechselstrom mit Scheitelwert  $\hat{i} = 32 \text{ A}$  auf?

$$I = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot \hat{i} = 0,707 \cdot 32 \text{ A} = 22,624 \text{ A}$$

■ **Beispiel:** Welchen Scheitelwert weist eine sinusförmige Spannung mit dem Effektivwert  $U = 220 \text{ V}$  auf?

$$\hat{u} = \sqrt{2} \cdot U = 1,414 \cdot 220 \text{ V} = 311,08 \text{ V}$$

## 1.4 Darstellungsarten

Eine Sinusgröße ist eindeutig bestimmt durch die Angabe von Amplitude, Frequenz und Phasenlage. Handelt es sich um Sinusgrößen mit gleicher Frequenz, genügen zwei Angaben, um die Sinusgröße eindeutig zu bestimmen. Aus diesem Grund kann bei der Berechnung von sinusförmigen Vorgängen auf die Darstellung in Abhängigkeit von der Zeit (Frequenz) verzichtet werden. Für die Berechnung von Sinusgrößen in der Elektrotechnik haben sich zwei Verfahren durchgesetzt: die Zeigerdarstellung und die Darstellung der Größen in der komplexen Zahlenebene.

### 1.4.1 Zeigerdarstellung von Sinusgrößen

Der zeitliche Verlauf einer sinusförmigen Wechselgröße kann über ein Linien- oder ein *Zeigerdiagramm* dargestellt werden.

Aus der Geometrie ist bekannt, dass sich eine Sinuskurve aus der Drehung eines Zeigers im Einheitskreis konstruieren lässt. Umgekehrt kann jede Sinuskurve durch einen Zeiger, der nach Bild VI-4 rotiert, dargestellt werden.

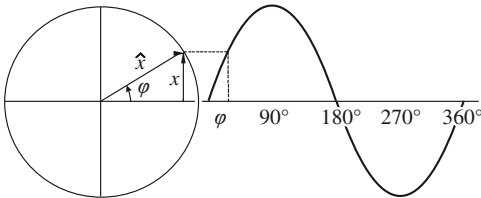


**Bild VI-4** Konstruktion eines Zeigers aus einer Sinusgröße

Wird die Länge des Zeigers als Maximalwert der Sinusgröße festgelegt, kann der Augenblickswert in Abhängigkeit vom zurückgelegten Winkel bestimmt werden.

$$\text{Augenblickswert } x = \hat{x} \cdot \sin \varphi \quad (\text{VI.8})$$

Zeichnerisch lässt sich der Augenblickswert ermitteln, indem von der Zeigerspitze das Lot auf die durch den Kreismittelpunkt gehende Gerade gefällt wird. Das Zeigerdiagramm stellt eine „Momentaufnahme“ der sich drehenden Zeiger dar.

Die Addition zweier sinusförmiger Wechselgrößen in der Zeigerdarstellung ergibt sich, wenn ein Zeiger parallelverschoben wird, bis sein Ursprung auf der Spitze des zweiten Zeigers liegt (Bild VI-5).

Die Subtraktion zweier Zeiger ergibt sich, wenn ein Zeiger parallelverschoben wird, bis seine Spitze auf der Spitze des zweiten Zeigers liegt (Bild VI-6).

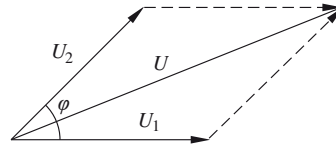


**Bild VI-5** Addition zweier Zeiger

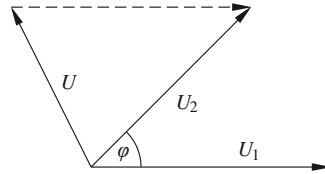


**Bild VI-6** Subtraktion zweier Zeiger

### 1.4.2 Darstellung von Sinusgrößen in der komplexen Zahlenebene

Eine Sinusgröße lässt sich durch die Zeigerdarstellung relativ einfach darstellen. Durch das graphische Verfahren dieser Darstellungsart ist eine genaue Auswertung oft unmöglich oder sehr zeitaufwendig. Aus diesem Grund wurden die Zeiger in der Gaußschen Zahlenebene als komplexe Größen dargestellt und können somit berechnet werden.

In der Gaußschen Zahlenebene wird jeder Punkt dieser Ebene durch eine komplexe Zahl beschrieben.

$$\text{komplexe Zahl } \underline{Z} = a + jb \quad (\text{VI.9})$$

Faktor  $a$  stellt den reellen Anteil dar und Faktor  $jb$  den imaginären Anteil. Beschreibt man den Endpunkt eines Zeigers  $\underline{Z}$ , der vom Nullpunkt der Gaußschen Zahlenebene ausgeht, durch eine komplexe Zahl (Bild VI-7), so ist damit auch der komplexe Zeiger eindeutig bestimmt.

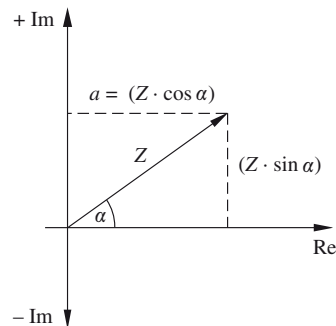


**Bild VI-7** Zeiger in der komplexen Zahlenebene

$$\text{kartesische Form } \underline{Z} = a + jb = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$$

$$(\text{mit } \underline{Z}_1 = a \text{ und } \underline{Z}_2 = jb) \quad (\text{VI.10})$$

Der Zeiger  $\underline{Z}$  kann also durch die Addition der beiden Zeiger  $\underline{Z}_1$  und  $\underline{Z}_2$  gebildet werden.

Vereinbarungsgemäß wird für die komplexe Darstellung von Zeigern das gleiche Symbol und die gleiche Definition benutzt wie für den Zeiger selbst. Der komplexe Zeiger wird mit dem unterstrichenen lateinischen Buchstaben der Größe bezeichnet. Der Betrag wird nur durch den lateinischen Buchstaben angegeben.

$$\text{Betrag des Zeigers} \quad |\underline{Z}| = Z = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} \quad (\text{VI.11})$$

Der Winkel mit der reellen Achse kann folgendermaßen berechnet werden:

$$\text{Winkel des Zeigers} \quad \alpha = \arctan \frac{Z_2}{Z_1} \quad (\text{VI.12})$$

Der Betrag des Zeigers lässt sich über die Phasenlage in den Realteil und den Imaginärteil zerlegen.

$$\text{Realteil} \quad \underline{Z}_1 = |\underline{Z}| \cdot \cos \alpha \quad (\text{VI.13})$$

$$\text{Imaginärteil} \quad \underline{Z}_2 = |\underline{Z}| \cdot \sin \alpha \quad (\text{VI.14})$$

Mit Hilfe dieser Zerlegung kann der Zeiger in der polaren Form beschrieben werden.

$$\text{polare Form} \quad \underline{Z} = |\underline{Z}| \cdot (\cos \alpha + j \sin \alpha) \quad (\text{VI.15})$$

Mit Hilfe der Eulerschen Gleichung ist die Exponentialform des Zeigers möglich:

$$\text{Eulersche Gleichung} \quad \cos \alpha + j \sin \alpha = e^{j\alpha} \quad (\text{VI.16})$$

$$\text{Exponentialform} \quad \underline{Z} = |\underline{Z}| \cdot e^{j\alpha} = Z \cdot e^{j\alpha} \quad (\text{VI.17})$$

Die bisher aufgeführten Möglichkeiten der Darstellung eines Zeigers in der komplexen Ebene gelten allgemein, also unabhängig davon, ob der Winkel  $\alpha$  konstant oder eine Funktion der Zeit ist. Bei der Behandlung von Wechselstromaufgaben muss jedoch zwischen den Operatoren und den Zeigern unterschieden werden.

*Operatoren* sind zeitlich konstante Größen. Sie symbolisieren meistens Widerstände. Ihr Winkel  $\alpha$  zu der reellen Achse ist zeitlich konstant.

*Zeiger* symbolisieren sinusförmige Wechselgrößen. Ihr Winkel  $\alpha$  ist eine Funktion der Zeit (Summe aus  $\omega \cdot t + \varphi$ ), obwohl diese Tatsache bei der Darstellung nicht berücksichtigt wird.

Berücksichtigt wird der Unterschied zwischen Operatoren und Zeigern bei der mathematischen Behandlung dieser Größen und zwar beim Integrieren und Differenzieren.

## 2 Grundschaltelemente im Wechselstromkreis

### 2.1 Ohmscher Widerstand

Wird ein ohmscher Widerstand an eine Wechselspannung angeschlossen, ergibt der 2. Kirchhoffsche Satz:

$$2. \text{ Kirchhoffsche Satz} \quad u - i \cdot R = 0 \quad (\text{VI.18})$$

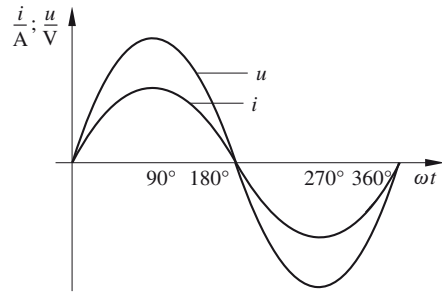


**Bild VI-8** Verlauf von Strom und Spannung am Ohmschen Widerstand

$$i = \frac{u}{R} \quad (\text{VI.19})$$

Der Wechselstrom hat also zu jeder Zeit einen Wert abhängig von  $u$  und  $R$ . Zwischen Strom und Spannung tritt keine Phasenverschiebung auf (Bild VI-8). Der Scheitelwert des Stroms und der ohmsche Wechselstromwiderstand berechnet sich zu

$$\text{Scheitelwert} \quad \hat{i} = \frac{\hat{u}}{R} \quad (\text{VI.20})$$

ohmscher Wechselstromwiderstand

$$R = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} = \frac{U}{I} \quad (\text{VI.21})$$

$$\text{Wechselstromleitwert} \quad G = \frac{1}{R} = \frac{\hat{i}}{\hat{u}} = \frac{I}{U} \quad (\text{VI.22})$$

Die Darstellung in der komplexen Schreibweise ergibt folgende Gleichungen:

$$\text{ohmsches Gesetz} \quad \underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \quad (\text{VI.23})$$

$$\text{Widerstandsoperator} \quad \underline{Z} = R = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \quad (\text{VI.24})$$

$$\text{Leitwertoperator} \quad \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = G \quad (\text{VI.25})$$

### 2.2 Kapazität

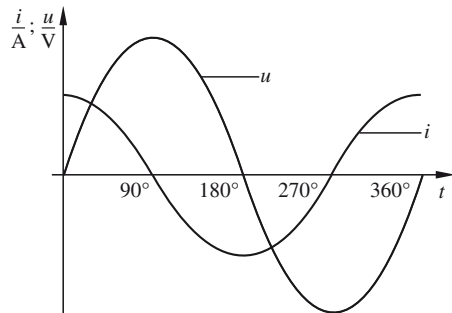


**Bild VI-9** Verlauf von Strom und Spannung an einer Kapazität

Wird eine Kapazität an eine Wechselspannung angeschlossen, so ergibt der 2. Kirchhoffsche Satz

$$2. \text{ Kirchhoffsche Satz } u - \frac{1}{C} \int i dt = 0 \quad (\text{VI.26})$$

$$i = C \cdot \frac{du}{dt} = C \cdot \hat{u} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (\text{VI.27})$$

(mit  $u = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ )

Zwischen dem Strom  $i$  und der Spannung  $u$  besteht eine Phasenverschiebung von  $\varphi = 90^\circ$  (Bild VI-9). Teilt man die Spannung durch den Strom, ergibt sich der *kapazitive Blindwiderstand*  $X_C$

*kapazitiver Blindwiderstand*

$$|X_C| = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} = \frac{U}{I} = \frac{1}{\omega \cdot C} \quad \frac{\omega}{s} \left| \frac{C}{\text{As}} \right| \frac{\text{Vs}}{\text{V}} \quad (\text{VI.28})$$

$$\text{kapazitiver Leitwert } B_C = \omega \cdot C \quad (\text{VI.29})$$

Der Kondensator im Wechselstromkreis ist also für den Wechselstrom kein unüberwindliches Hindernis, er wirkt aber trotzdem wie ein Widerstand. Dieses ist leicht zu verstehen, wenn man sich vorstellt, dass bei jeder Periode Ladungsträger zwischen den Kondensatorplatten und der Spannungsquelle bewegt werden. Die Darstellung in der komplexen Schreibweise ergibt die Gleichungen VI.30 bis VI.32.

$$\text{ohmsches Gesetz } \underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \quad (\text{VI.30})$$

*Widerstandsoperator*

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega \cdot C} = -jX_C = \frac{U}{I} \quad (\text{VI.31})$$

$$\text{Leitwertoperator } \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = j\omega \cdot C = jB_C \quad (\text{VI.32})$$

## 2.3 Spule

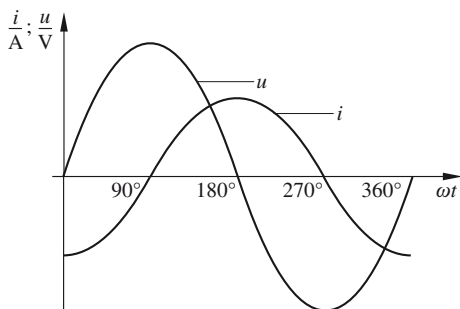


**Bild VI-10** Verlauf von Strom und Spannung an einer Induktivität

Wird eine Spule an eine Wechselspannung angeschlossen, so ergibt der 2. Kirchhoffsche Satz:

$$2. \text{ Kirchhoffsche Satz } u - L \frac{di}{dt} = 0 \quad (\text{VI.33})$$

$$u = L \frac{di}{dt} \quad (\text{VI.34})$$

$$i = \frac{1}{L} \cdot \int u dt = -\frac{1}{\omega \cdot L} \cdot \hat{u} \cdot \cos \omega \cdot t \quad (\text{VI.35})$$

(mit  $u = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ )

Zwischen dem Strom  $i$  und der Spannung  $u$  besteht eine Phasenverschiebung von  $\varphi = -90^\circ$  (Bild VI-10). Teilt man die Spannung durch den Strom, ergibt sich der *induktive Blindwiderstand*  $X_L$

*induktiver Blindwiderstand*

$$|X_L| = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} = \frac{U}{I} = \omega \cdot L \quad \frac{\omega}{s} \left| \frac{L}{\text{Vs}} \right| \frac{\text{Vs}}{\text{A}} \quad (\text{VI.36})$$

$$\text{induktiver Leitwert } B_L = \frac{1}{\omega \cdot L} \quad (\text{VI.37})$$

Die Spule im Wechselstromkreis ist also nicht widerstandslos, obwohl der ohmsche Anteil vernachlässigt wird. Der induktive Blindwiderstand der Spule ist durch die auftretende Selbstinduktionsspannung an der Spule zu erklären. Diese Spannung der Spule bewirkt, dass der Spulenstrom der Wechselspannung um  $90^\circ$  nacheilt.

Die Darstellung in der komplexen Schreibweise ergibt die Gleichungen VI.38 bis VI.40.

$$\text{ohmsches Gesetz } \underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \quad (\text{VI.38})$$

$$\text{Widerstandsoperator } \underline{Z} = j\omega \cdot L = jX_L = \frac{U}{I} \quad (\text{VI.39})$$

$$\text{Leitwertoperator } \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{j\omega \cdot L} = -jB_L \quad (\text{VI.40})$$

■ **Beispiel:** Ein Widerstand von  $R = 100 \Omega$  wird an einem Wechselstromnetz mit  $U = 220 \text{ V}$  und  $f = 50 \text{ Hz}$  betrieben. Welchen Wert hat der sich einstellende Strom? Darstellung des Zeigerbildes.

$$\text{Zeigerdarstellung: } \hat{i} = I = \frac{\hat{u}}{R} = \frac{U}{R} = \frac{220 \text{ V}}{100 \Omega} = 2,2 \text{ A}; \text{ Winkel ist nicht darstellbar.}$$

$$\text{Komplexe Darstellung: } \underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{U}{R} = \frac{220 \text{ V} \cdot e^{j0}}{100 \Omega \cdot e^{j0}} = 2,2 \text{ A} \cdot e^{j0}$$

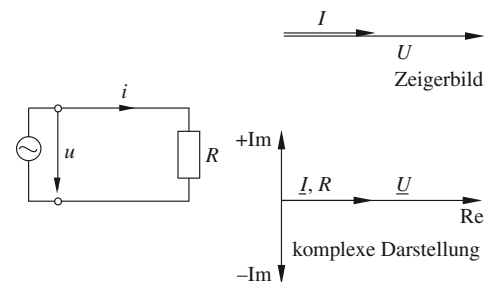


**Bild VI-11** Darstellung von Strom und Spannung am ohmschen Widerstand in der Zeiger- und komplexen Form

- **Beispiel:** Eine Induktivität von  $L = 100 \text{ m} \frac{\text{Vs}}{\text{A}}$  wird an einem Wechselstromnetz mit  $U = 220 \text{ V}$  und  $f = 50 \text{ Hz}$  betrieben. Welchen Wert hat der sich einstellende Strom? Darstellung des Zeigerbildes.

Zeigerdarstellung:

$$i = \frac{1}{L} \cdot \int u dt = -\frac{1}{\omega \cdot L} \cdot \hat{u} \cdot \cos \omega \cdot t$$

$$\Rightarrow I = \frac{U}{\omega \cdot L} = \frac{220 \text{ V}}{2 \cdot \pi \cdot 50 \text{ s}^{-1} \cdot 100 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Vs}}{\text{A}}} = 7 \text{ A}$$

Komplexe Darstellung:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{U \cdot e^{j0}}{j\omega \cdot L} = \frac{220 \text{ V} \cdot e^{j0}}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \text{ s}^{-1} \cdot 100 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Vs}}{\text{A}}}$$

$$= \frac{220 \text{ V} \cdot e^{j0}}{31,42 \cdot \frac{\text{Vs}}{\text{A}}} = 7 \cdot A e^{-j90}$$

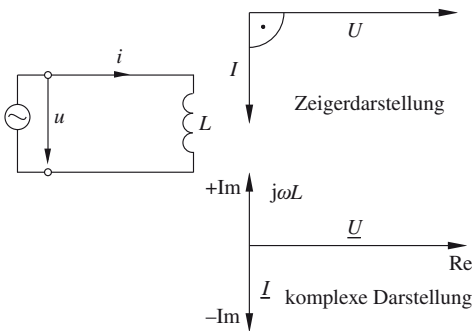


**Bild VI-12** Darstellung von Strom und Spannung am induktiven Widerstand in der Zeiger- und komplexen Form

- **Beispiel:** Eine Kapazität von  $C = 100 \mu \frac{\text{As}}{\text{V}}$  wird an einem Wechselstromnetz mit  $U = 220 \text{ V}$  und  $f = 50 \text{ Hz}$  betrieben. Welchen Wert hat der sich einstellende Strom? Darstellung des Zeigerbildes.

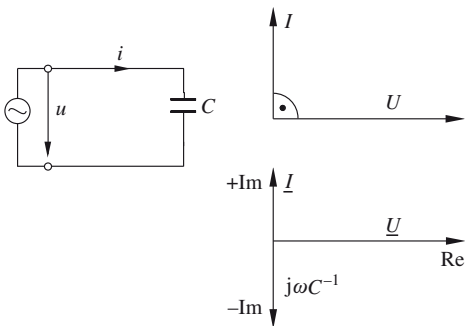


**Bild VI-13** Darstellung von Strom und Spannung am kapazitiven Widerstand in der Zeiger- und komplexen Form

Zeigerdarstellung:

$$i = C \cdot \frac{du}{dt} = \omega \cdot C \cdot \hat{u} \cdot \cos \omega \cdot t$$

$$\Rightarrow I = \omega \cdot C \cdot U = 2 \cdot \pi \cdot 50 \text{ s}^{-1} \cdot 100 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{V}} \cdot 220 \text{ V} = 6,9 \text{ A}$$

Komplexe Darstellung:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = j \cdot \omega \cdot C \cdot U \cdot e^{j0} = j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \text{ s}^{-1} \cdot 100 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{V}} \cdot 220 \text{ V} \cdot e^{j0}$$

$$= 0,03142 \cdot \frac{\text{As}}{\text{V}} \cdot e^{j90} \cdot 220 \cdot e^{j0} \text{ V} = 6,9 \cdot A e^{j90}$$

### 3 Schaltungen von Wechselstromwiderständen

Bei der weiteren Betrachtung von Wechselstromwiderständen werden nur noch die Effektivwerte der Wechselstromgrößen verwendet. Es wird nicht mehr ausdrücklich darauf hingewiesen, ob es sich bei dem benutzten Wert um einen Operator oder um einen Zeiger handelt.

#### 3.1 Reihenschaltung von Wechselstromwiderständen

Im Zeigerbild für die Reihenschaltung drehen sich die Zeiger der Spannungen gleichmäßig um einen gemeinsamen Drehpunkt. Die Lage der Spannungen zueinander bleibt immer erhalten. Die Zeiger der Spannungen können also addiert oder subtrahiert werden. Da Wirk- und Blindanteil immer senkrecht aufeinander stehen, ist das *Spannungsdreieck* stets rechtwinklig.

Für die Größen im rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$\text{Gesamtspannung} \quad U^2 = U_R^2 + U_B^2 \quad (\text{VI.41})$$

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_B^2} \quad (\text{VI.42})$$

Wirkanteil der Spannung

$$U_R = \sqrt{U^2 - U_B^2} = U \cdot \cos \varphi \quad (\text{VI.43})$$

Blindanteil der Spannung

$$U_B = \sqrt{U^2 - U_R^2} = U \cdot \sin \varphi \quad (\text{VI.44})$$

##### 3.1.1 Wirkwiderstand und Induktivität

Im allgemeinen enthält jede Induktionsspule neben dem induktiven Widerstand  $X_L$  auch einen ohmschen Widerstand  $R$ . Im Ersatzschaltbild werden beide Größen in Reihe geschaltet, da sie vom selben Strom durchflossen werden (Bild VI-14).

Der Strom erzeugt am Widerstand den Spannungsfall  $U_R = I \cdot R$  und an der Induktivität den Spannungsfall  $U_L = \omega \cdot L \cdot I$ . Beide Spannungen haben im Zeigerbild verschiedene Richtungen. Addiert ergeben die beiden Spannungszeiger den Zeiger der Gesamtspannung  $U$ . Nach Bild VI-15 liegt der Zeiger  $U_R$  in Richtung des Stroms  $I$ , der Zeiger  $U_L$  eilt dem Strom um  $90^\circ$  vor.



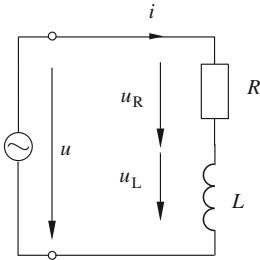


**Bild VI-14** Induktivität und ohmscher Widerstand im Wechselstromkreis

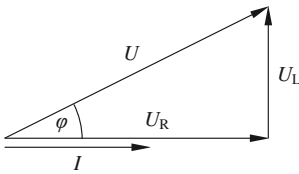


**Bild VI-15** Zeigerbild der Reihenschaltung von ohmschen Widerstand und Induktivität

Das durch die Zeigeraddition entstehende Spannungsdreieck kann nach dem Lehrsatz von Pythagoras berechnet werden.

*Gesamtspannung*

$$U^2 = U_R^2 + U_L^2 = I^2 \cdot R^2 + I^2 \cdot X_L^2 = I^2 (R^2 + X_L^2) \quad (\text{VI.45})$$

Hieraus folgt das ohmsche Gesetz für Wirkwiderstand und Induktivität im Wechselstromkreis.

$$\text{Gesamtspannung } U = I \cdot \sqrt{R^2 + X_L^2} \quad (\text{VI.46})$$

$$\text{Scheinwiderstand } Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} \quad (\text{VI.47})$$

Der Scheinwiderstand entspricht der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten dem Wirkwiderstand  $R$  und dem induktiven Blindwiderstand  $X_L$  entsprechen.

Die Phasenverschiebung zwischen der Gesamtspannung  $U$  und dem Strom  $I$  erhält man nach Bild VI-15.

*Phasenverschiebung*

$$\varphi = \arccos \frac{U_R}{U} = \arccos \frac{I \cdot R}{I \cdot Z} = \arccos \frac{R}{Z} \quad (\text{VI.48})$$

$$\varphi = \arctan \frac{U_L}{U_R} = \arctan \frac{I \cdot X_L}{I \cdot R} = \arctan \frac{X_L}{R} \quad (\text{VI.49})$$

In der komplexen Darstellung ergeben sich folgende Zusammenhänge:

*Gesamtspannung*

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L = \underline{I} \cdot R + \underline{I} \cdot jX_L = \underline{I} \cdot (R + jX_L) = \underline{I} \cdot \underline{Z} \quad (\text{VI.50})$$

$$\text{Scheinwiderstand } \underline{Z} = R + jX_L \quad (\text{VI.51})$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} \quad (\text{VI.52})$$

$$\text{Phasenwinkel } \varphi = \arctan \frac{X_L}{R} \quad (\text{VI.53})$$

■ **Beispiel:** Eine Spule mit einem ohmschen Widerstand von  $R = 100 \, \Omega$  und einem induktiven Blindwiderstand von  $X_L = 200 \, \Omega$  wird an eine Spannung von  $U = 200 \, \text{V}$  angeschlossen. Wie groß sind Scheinwiderstand und Stromstärke? Welche Spannungsfälle treten an den Bauelementen des Ersatzschaltbildes auf? Welcher Phasenwinkel herrscht zwischen Spannung und Strom?

*Zeigerdarstellung:*

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{100^2 \, \Omega^2 + 200^2 \, \Omega^2} = 223,6 \, \Omega$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{200 \, \text{V}}{223,6 \, \Omega} = 0,89 \, \text{A}$$

$$U_R = I \cdot R = 0,89 \, \text{A} \cdot 100 \, \Omega = 89 \, \text{V};$$

$$U_L = I \cdot X_L = 0,89 \, \text{A} \cdot 200 \, \Omega = 178 \, \text{V}$$

$$\varphi = \arctan \frac{X_L}{R} = \arctan \frac{200}{100} = 63,4^\circ$$

*Komplexe Darstellung:*

$$\varphi = \arctan \frac{X_L}{R} = \arctan \frac{200}{100} = 63,4^\circ$$

$$\underline{Z} = R + jX_L = 100 \, \Omega + j200 \, \Omega = 223,6 \, \Omega \cdot e^{j63,4^\circ}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{220 \, \text{V} \cdot e^{j0}}{223,6 \, \Omega \cdot e^{j63,4^\circ}} = 0,89 \, \text{A} \cdot e^{-j63,4^\circ}$$

$$\underline{U}_R = \underline{I} \cdot R = 0,89 \, \text{A} \cdot e^{-j63,4^\circ} \cdot 100 \, \Omega \cdot e^{j0} = 89 \, \text{V} \cdot e^{-j63,4^\circ}$$

$$\underline{U}_L = \underline{I} \cdot X_L = 0,89 \, \text{A} \cdot e^{-j63,4^\circ} \cdot 200 \, \Omega \cdot e^{j90^\circ} = 178 \, \text{V} \cdot e^{j26,6^\circ}$$

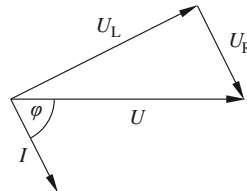


**Bild VI-16** Beispiel: Reihenschaltung von ohmschem Widerstand und Induktivität

### 3.1.2 Wirkwiderstand und Kapazität

Sind in einem Wechselstromkreis ein ohmscher Widerstand  $R$  und eine Kapazität mit dem kapazitiven Blindwiderstand  $X_C$  nach Ersatzschaltbild (Bild VI-17) in Reihe geschaltet, erzeugt der Strom am Widerstand den Spannungsfall  $U_R = I \cdot R$  und an der Kapazität den Spannungsfall  $U_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot I$ .

Beide Spannungen haben im Zeigerbild verschiedene Richtungen. Addiert ergeben die beiden Spannungszeiger den Zeiger der Gesamtspannung  $U$ . Nach Bild VI-18 liegt der Zeiger  $U_R$  in Richtung des Stroms  $I$ , der Zeiger  $U_C$  eilt dem Strom um  $90^\circ$  nach.



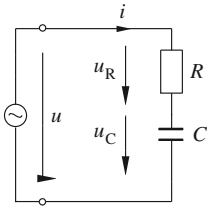


**Bild VI-17**  
Kapazität und ohmscher  
Widerstand im Wechsel-  
stromkreis

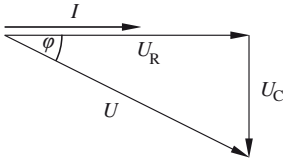


**Bild VI-18** Zeigerbild der Reihenschaltung von  
ohmschem Widerstand und Kapazität

Das durch die Zeigeraddition entstehende Spannungsdreieck kann nach dem Lehrsatz von Pythagoras berechnet werden.

*Gesamtspannung*

$$U^2 = U_R^2 + U_C^2 = I^2 \cdot R^2 + I^2 \cdot X_C^2 = I^2 (R^2 + X_C^2) \quad (\text{VI.54})$$

Hieraus folgt das ohmsche Gesetz für Wirkwiderstand und Induktivität im Wechselstromkreis.

$$\text{Gesamtspannung } U = I \cdot \sqrt{R^2 + X_C^2} \quad (\text{VI.55})$$

$$\text{Scheinwiderstand } Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} \quad (\text{VI.56})$$

Der Scheinwiderstand entspricht der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten dem Wirkwiderstand  $R$  und dem kapazitiven Blindwiderstand  $X_C$  entsprechen.

Die Phasenverschiebung zwischen der Gesamtspannung  $U$  und dem Strom  $I$  erhält man nach Bild VI-18.

*Phasenverschiebung*

$$\varphi = \arccos \frac{U_R}{U} = \arccos \frac{I \cdot R}{I \cdot Z} = \arccos \frac{R}{Z} \quad (\text{VI.57})$$

$$\varphi = \arctan \frac{U_C}{U_R} = \arctan \frac{I \cdot X_C}{I \cdot R} = \arctan \frac{X_C}{R} \quad (\text{VI.58})$$

In der komplexen Darstellung ergeben sich folgende Zusammenhänge.

*Gesamtspannung*

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_C = \underline{I} \cdot R + \underline{I} \cdot jX_C = \underline{I} \cdot (R + jX_C) = \underline{I} \cdot \underline{Z} \quad (\text{VI.59})$$

$$\text{Scheinwiderstand } \underline{Z} = R + jX_C \quad (\text{VI.60})$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} \quad (\text{VI.61})$$

$$\text{Phasenwinkel } \varphi = \arctan \frac{X_C}{R} \quad (\text{VI.62})$$

■ **Beispiel:** Ein ohmscher Widerstand von  $R = 100 \, \Omega$  und eine Kapazität mit einem kapazitiven Blindwiderstand von  $X_C = 200 \, \Omega$  werden an eine Spannung von  $U = 200 \, \text{V}$  angeschlossen. Wie groß sind Scheinwiderstand und Stromstärke? Welche Spannungsfälle treten an den Bauelementen auf? Welcher Phasenwinkel herrscht zwischen Spannung und Strom?

*Zeigerdarstellung:*

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{100^2 \, \Omega^2 + 200^2 \, \Omega^2} = 223,6 \, \Omega$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{200 \, \text{V}}{223,6 \, \Omega} = 0,89 \, \text{A}$$

$$U_R = I \cdot R = 0,89 \, \text{A} \cdot 100 \, \Omega = 89 \, \text{V};$$

$$U_C = I \cdot X_C = 0,89 \, \text{A} \cdot 200 \, \Omega = 178 \, \text{V}$$

$$\varphi = \arctan \frac{X_C}{R} = \arctan \frac{200}{100} = 63,4^\circ$$

*Komplexe Darstellung:*

$$\varphi = \arctan \frac{X_C}{R} = \arctan \frac{200}{100} = 63,4^\circ$$

$$\underline{Z} = R - jX_C = 100 \, \Omega - j200 \, \Omega = 223,6 \, \Omega \cdot e^{-j63,4}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{220 \, \text{V} \cdot e^{j0}}{223,6 \, \Omega \cdot e^{-j63,4}} = 0,89 \, \text{A} \cdot e^{j63,4}$$

$$\underline{U}_R = \underline{I} \cdot R = 0,89 \, \text{A} \cdot e^{j63,4} \cdot 100 \, \Omega \cdot e^{j0} = 89 \, \text{V} \cdot e^{j63,4}$$

$$\underline{U}_C = \underline{I} \cdot X_C = 0,89 \, \text{A} \cdot e^{j63,4} \cdot 200 \, \Omega \cdot e^{-j90} = 178 \, \text{V} \cdot e^{-j26,6}$$

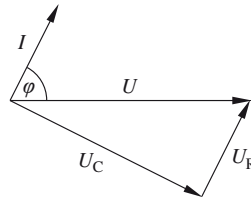


**Bild VI-19** Beispiel: Reihenschaltung von ohmschem  
Widerstand und Kapazität

### 3.1.3 Wirkwiderstand, Induktivität und Kapazität

Sind in einem Wechselstromkreis ein ohmscher Widerstand  $R$ , eine Induktivität mit dem induktiven Blindwiderstand  $X_L$  und eine Kapazität mit dem kapazitiven Blindwiderstand  $X_C$  nach Bild VI-20 in Reihe geschaltet, erzeugt der Strom am Widerstand den Spannungsfall  $U_R = I \cdot R$ , an der Induktivität den Spannungsfall  $U_L = \omega \cdot L \cdot I$  und an der Kapazität den

$$\text{Spannungsfall } U_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot I.$$

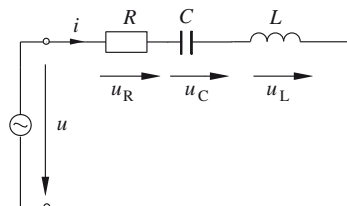


**Bild VI-20** Kapazität, Induktivität und ohmscher  
Widerstand im Wechselstromkreis

Die Spannungen haben im Zeigerbild verschiedenen Richtungen. Addiert ergeben die Spannungszeiger den Zeiger der Gesamtspannung  $U$ . Nach Bild VI-21 liegt der Zeiger  $U_R$  in Richtung des Stroms  $I$ , der Zeiger  $U_C$  eilt dem Strom um  $90^\circ$  nach und der Zeiger  $U_L$  eilt dem Strom um  $90^\circ$  vor.

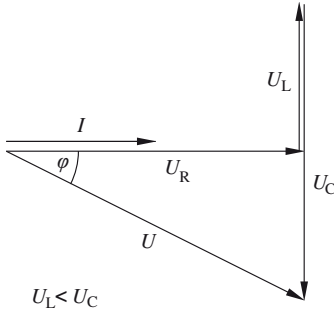


**Bild VI-21** Zeigerbild der Reihenschaltung vom ohmschem Widerstand, Induktivität und Kapazität

Das durch die Zeigeraddition entstehende Zeigerbild kann nach dem Lehrsatz von Pythagoras berechnet werden.

*Gesamtspannung*

$$\begin{aligned} U^2 &= U_R^2 + U'^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2 \\ &= I^2 \cdot R^2 + I^2 \cdot X'^2 = I^2 (R^2 + (X_L - X_C)^2) \end{aligned} \quad (\text{VI.63})$$

Hieraus folgt das ohmsche Gesetz für die Reihenschaltung von Wirkwiderstand, Induktivität und Kapazität im Wechselstromkreis.

*Gesamtspannung*  $U = I \cdot \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$  (VI.64)

*Scheinwiderstand*  $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$  (VI.65)

Der Scheinwiderstand entspricht der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten dem Wirkwiderstand  $R$  und der Differenz des induktiven Blindwiderstandes  $X_L$  und des kapazitiven Blindwiderstand  $X_C$  entsprechen.

Die Phasenverschiebung zwischen der Gesamtspannung  $U$  und dem Strom  $I$  erhält man nach Bild VI-21.

*Phasenverschiebung*

$$\varphi = \arccos \frac{U_R}{U} = \arccos \frac{I \cdot R}{I \cdot Z} = \arccos \frac{R}{Z} \quad (\text{VI.66})$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \arctan \frac{U'}{U_R} = \arctan \frac{I \cdot X'}{I \cdot R} \\ &= \arctan \frac{X_L - X_C}{R} \end{aligned} \quad (\text{VI.67})$$

In der komplexen Darstellung ergeben sich folgende Zusammenhänge.

*Gesamtspannung*

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_R + \underline{U}' = \underline{I} \cdot R + \underline{I} \cdot j \cdot (X_L - X_C) \\ &= \underline{I} \cdot (R + j \cdot (X_L - X_C)) = \underline{I} \cdot \underline{Z} \end{aligned} \quad (\text{VI.68})$$

*Scheinwiderstand*  $\underline{Z} = R + j \cdot (X_L - X_C)$  (VI.69)

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (\text{VI.70})$$

*Phasenwinkel*  $\varphi = \arctan \frac{(X_L - X_C)}{R}$  (VI.71)

Bei der Reihenschaltung von  $R$ ,  $L$  und  $C$  stellt der ohmsche Widerstand den Realteil dar, während der Imaginärteil eine Zusammensetzung aus induktiven und kapazitiven Blindwiderstand ist. Der Imaginärteil kann verschiedene elektrische Eigenschaften aufweisen. Ist der induktive Anteil größer als der kapazitive, ergibt die Zusammenfassung einen induktiv wirkenden Blindwiderstand.

$$X_L > X_C \Rightarrow X' = X_{\text{Lers}} = X_L - X_C \quad (\text{VI.72})$$

Ist der kapazitive Anteil größer als der induktive, ergibt die Zusammenfassung einen kapazitiv wirkenden Blindwiderstand.

$$X_C > X_L \Rightarrow X' = X_{\text{Cers}} = X_C - X_L \quad (\text{VI.73})$$

Sind kapazitiver und induktiver Anteil gleich groß, wird der Imaginärteil Null; die Schaltung hat einen rein ohmschen Charakter. In diesem Fall spricht man von einer Reihenresonanz.

*Reihenresonanz*

$$X_L = X_C \Rightarrow X' = 0 = \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \quad (\text{VI.74})$$

Über die Resonanzbedingung der Gleichung VI.74 kann die *Resonanzfrequenz*  $f_0$  bzw.  $\omega_0$  berechnet werden.

*Resonanzbedingung*

$$\omega_0 \cdot L = \frac{1}{\omega_0 \cdot C} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad (\text{VI.75})$$

$$\text{Resonanzfrequenz } f_0 = \frac{\omega_0}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \quad (\text{VI.76})$$

■ **Beispiel:** Ein ohmscher Widerstand von  $R = 100 \, \Omega$ , eine Induktivität mit einem induktiven Blindwiderstand von  $X_L = 300 \, \Omega$  und eine Kapazität mit einem kapazitiven Blindwiderstand von  $X_C = 200 \, \Omega$  werden an eine Spannung von  $U = 200 \, \text{V}$  angeschlossen. Die Netzfrequenz beträgt  $f = 50 \, \text{Hz}$ .

Wie groß sind Scheinwiderstand und Stromstärke? Welche Spannungsfälle treten an den Bauelementen auf? Welcher Phasenwinkel herrscht zwischen Spannung und Strom? Welche Resonanzfrequenz hat diese Schaltung?

*Zeigerdarstellung:*

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \\ &= \sqrt{100^2 \, \Omega^2 + (300 \, \Omega - 200 \, \Omega)^2} = 141,4 \, \Omega \end{aligned}$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{200 \, \text{V}}{141,4 \, \Omega} = 1,71 \, \text{A}$$

$$U_R = I \cdot R = 1,71 \text{ A} \cdot 100 \text{ } \Omega = 171 \text{ V} ;$$

$$U_L = I \cdot X_L = 1,71 \text{ A} \cdot 300 \text{ } \Omega = 513 \text{ V} ;$$

$$U_C = I \cdot X_C = 1,71 \text{ A} \cdot 200 \text{ } \Omega = 342 \text{ V}$$

$$\varphi = \arctan \frac{(X_L - X_C)}{R} = \arctan \frac{(300 \text{ } \Omega - 200 \text{ } \Omega)}{100 \text{ } \Omega} = 45^\circ$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{300 \frac{\text{V}}{\text{A}}}{2 \cdot \pi \cdot 50 \frac{1}{\text{s}}} = 0,955 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} ;$$

$$C = \frac{1}{\omega \cdot X_C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 50 \frac{1}{\text{s}} \cdot 200 \frac{\text{V}}{\text{A}}} = 15,9 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{V}}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{0,955 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} \cdot 15,9 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{V}}}} = 40,84 \frac{1}{\text{s}}$$

Komplexe Darstellung:

$$\varphi = \arctan \frac{(X_L - X_C)}{R} = \arctan \frac{300 \text{ } \Omega - 200 \text{ } \Omega}{100 \text{ } \Omega} = 45^\circ$$

$$\underline{Z} = R - j(X_L - X_C) = 100 \text{ } \Omega - j(300 - 200) \text{ } \Omega = 141,4 \text{ } \Omega \cdot e^{j45}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{220 \text{ V} \cdot e^{j0}}{141,4 \text{ } \Omega \cdot e^{j45}} = 1,71 \text{ A} \cdot e^{-j45}$$

$$\underline{U}_R = \underline{I} \cdot R = 1,71 \text{ A} \cdot e^{-j45} \cdot 100 \text{ } \Omega \cdot e^{j0} = 171 \text{ V} \cdot e^{-j45}$$

$$\underline{U}_L = \underline{I} \cdot X_L = 1,71 \text{ A} \cdot e^{-j45} \cdot 300 \text{ } \Omega \cdot e^{j90} = 513 \text{ V} \cdot e^{j45}$$

$$\underline{U}_C = \underline{I} \cdot X_C = 1,71 \text{ A} \cdot e^{-j45} \cdot 200 \text{ } \Omega \cdot e^{-j90} = 342 \text{ V} \cdot e^{-j135}$$

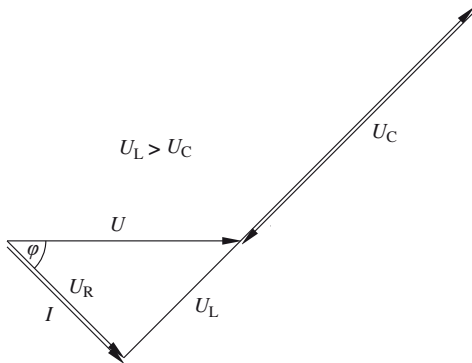


**Bild VI-22** Beispiel: Reihenschaltung von ohmschem Widerstand, Induktivität und Kapazität

### 3.2 Parallelschaltung von Wechselstromwiderständen

Im Zeigerbild für die Parallelschaltung drehen sich die Zeiger der Ströme gleichmäßig um einen gemeinsamen Drehpunkt. Die Lage der Ströme zueinander bleibt immer erhalten. Die Zeiger der Ströme können also addiert oder subtrahiert werden. Da Wirk- und Blindanteil immer senkrecht aufeinander stehen, ist das *Stromdreieck* stets rechtwinklig.

Für die Größen im rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$\text{Gesamtstrom } I^2 = I_R^2 + I_B^2 \quad (\text{VI.77})$$

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_B^2} \quad (\text{VI.78})$$

$$\text{Wirkstrom } I_R = \sqrt{I^2 - I_B^2} = I \cdot \cos \varphi \quad (\text{VI.79})$$

$$\text{Blindstrom } I_B = \sqrt{I^2 - I_R^2} = I \cdot \sin \varphi \quad (\text{VI.80})$$

#### 3.2.1 Wirkwiderstand und Induktivität

Für jede Parallelschaltung gilt, dass der Gesamtstrom die Summe der Teilströme in den Parallelzweigen ist. In der Parallelschaltung gilt als wesentlicher Grundsatz, dass Leitwerte addiert werden können.

Sind ein Wirkwiderstand  $R$  und ein induktiver Blindwiderstand  $X_L$  parallelgeschaltet, treibt die anliegende Wechselspannung nach Bild VI-23 einen Wirkstrom

$$I_W = \frac{U}{R} = U \cdot G \text{ durch den Wirkwiderstand und einen}$$

$$\text{Blindstrom } I_B = \frac{U}{X_L} = U \cdot B_L \text{ durch den Blindwiderstand.}$$

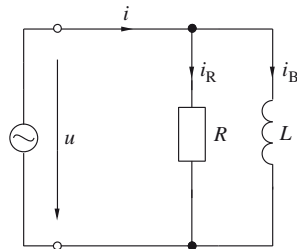


**Bild VI-23** Parallelschaltung von Induktivität und ohmschem Widerstand im Wechselstromkreis

Der Wirkstrom zeigt in Richtung der Spannung  $U$  (Bild VI-24), der Blindstrom eilt um  $90^\circ$  nach.

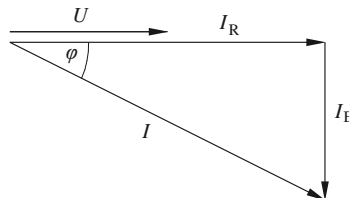


**Bild VI-24** Zeigerbild der Parallelschaltung von ohmschem Widerstand und Induktivität

Das durch die Zeigeraddition entstehende Zeigerbild kann nach dem Lehrsatz von Pythagoras berechnet werden.

**Gesamtstrom**

$$I^2 = I_R^2 + I_B^2 = U^2 \cdot G^2 + U^2 \cdot B_L^2 = U^2 \cdot (G^2 + B_L^2) \quad (\text{VI.81})$$

Hieraus folgt das ohmsche Gesetz für die Parallelschaltung von Wirkwiderstand und Induktivität im Wechselstromkreis.

$$\text{Gesamtstrom} \quad I = U \cdot \sqrt{G^2 + B_L^2} \quad (\text{VI.82})$$

$$\text{Scheinleitwert} \quad Y = \sqrt{G^2 + B_L^2} \quad (\text{VI.83})$$

$$\text{Scheinwiderstand} \quad Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{\sqrt{G^2 + B_L^2}} \quad (\text{VI.84})$$

Der Scheinleitwert entspricht der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten dem Leitwert des Wirkwiderstandes  $R$  und dem Leitwert des induktiven Blindwiderstandes  $X_L$  entsprechen.

Die Phasenverschiebung zwischen der Gesamtspannung  $U$  und dem Strom  $I$  erhält man nach Bild VI-24.

**Phasenverschiebung**

$$\varphi = \arccos \frac{I_R}{I} = \arccos \frac{U \cdot G}{U \cdot Y} = \arccos \frac{G}{Y} \quad (\text{VI.85})$$

$$\varphi = \arctan \frac{I_L}{I_R} = \arctan \frac{U \cdot B_L}{U \cdot G} = \arctan \frac{B_L}{G} \quad (\text{VI.86})$$

In der komplexen Darstellung ergeben sich folgende Zusammenhänge:

**Gesamtstrom**

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L = \underline{U} \cdot \underline{G} + \underline{U} \cdot (-jB_L) = \underline{U} \cdot (G - jB_L) = \underline{U} \cdot \underline{Y} \quad (\text{VI.87})$$

$$\text{Scheinleitwert} \quad \underline{Y} = G - jB_L \quad (\text{VI.88})$$

$$Y = \sqrt{G^2 + B_L^2} \quad (\text{VI.89})$$

$$\text{Scheinwiderstand} \quad \underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{G - jB_L} \quad (\text{VI.90})$$

$$\text{Phasenwinkel} \quad \varphi = \arctan \frac{B_L}{G} \quad (\text{VI.91})$$

### 3.2.2 Wirkwiderstand und Kapazität

Sind in einem Wechselstromkreis ein ohmscher Widerstand  $R$  und eine Kapazität mit dem kapazitiven Blindwiderstand  $X_C$  nach Ersatzschaltbild (Bild VI-25) parallel geschaltet, erzeugt die Spannung  $U$  durch den Widerstand den Strom  $I_R = U \cdot G$  und durch die Kapazität den Strom  $I_C = B_C \cdot U$ . Beide Ströme haben im Zeigerbild verschiedene Richtungen. Addiert ergeben die beiden Stromzeiger den Zeiger des Gesamtstromes  $I$ . Nach Bild VI-26 liegt der Zeiger  $I_R$  in Richtung der Spannung  $U$ ; der Zeiger  $I_C$  eilt der Spannung um  $90^\circ$  vor.

Das durch die Zeigeraddition entstehende Stromdreieck kann nach dem Lehrsatz von Pythagoras berechnet werden.

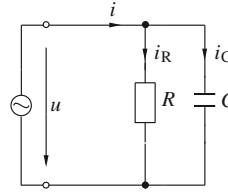


**Bild VI-25**

Parallelschaltung von Kapazität und ohmschen Widerstand im Wechselstromkreis

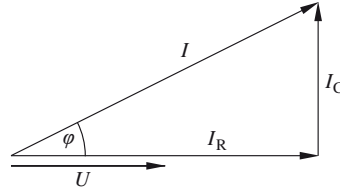


**Bild VI-26** Zeigerbild der Parallelschaltung von ohmschem Widerstand und Kapazität

**Gesamtstrom**

$$I^2 = I_R^2 + I_C^2 = U^2 \cdot G^2 + U^2 \cdot B_C^2 = U^2 (G^2 + B_C^2) \quad (\text{VI.92})$$

Hieraus folgt das ohmsche Gesetz für die Parallelschaltung von Wirkwiderstand und Kapazität im Wechselstromkreis.

$$\text{Gesamtstrom} \quad I = U \cdot \sqrt{G^2 + B_C^2} \quad (\text{VI.93})$$

$$\text{Scheinleitwert} \quad Y = \sqrt{G^2 + B_C^2} \quad (\text{VI.94})$$

Der Scheinleitwert entspricht der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten dem Leitwert des Wirkwiderstandes  $R$  und dem Leitwert des kapazitiven Blindwiderstandes  $X_C$  entsprechen.

Die Phasenverschiebung zwischen der Gesamtspannung  $U$  und dem Strom  $I$  erhält man nach Bild VI-26.

**Phasenverschiebung**

$$\varphi = \arccos \frac{I_R}{I} = \arccos \frac{U \cdot G}{U \cdot Y} = \arccos \frac{G}{Y} \quad (\text{VI.95})$$

$$\varphi = \arctan \frac{I_C}{I_R} = \arctan \frac{U \cdot B_C}{U \cdot G} = \arctan \frac{B_C}{G} \quad (\text{VI.96})$$

In der komplexen Darstellung ergeben sich folgende Zusammenhänge.

**Gesamtstrom**

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_C = \underline{U} \cdot \underline{G} + \underline{U} \cdot jB_C = \underline{U} \cdot (G + jB_C) = \underline{U} \cdot \underline{Y} \quad (\text{VI.97})$$

$$\text{Scheinleitwert} \quad \underline{Y} = G + jB_C \quad (\text{VI.98})$$

$$Y = \sqrt{G^2 + B_C^2} \quad (\text{VI.99})$$

$$\text{Phasenwinkel} \quad \varphi = \arctan \frac{B_C}{G} \quad (\text{VI.100})$$

### 3.2.3 Wirkwiderstand, Induktivität und Kapazität

Sind in einem Wechselstromkreis ein ohmscher Widerstand  $R$ , eine Induktivität mit dem induktiven Blindwiderstand  $X_L$  und eine Kapazität mit dem kapazitiven Blindwiderstand  $X_C$  nach Ersatzschaltbild (Bild VI-27) parallel geschaltet, erzeugt die Spannung durch den Widerstand den Strom  $I_R = U \cdot G$ , durch die Induktivität den Strom  $I_L = B_L \cdot U$  und durch die Kapazität den Strom  $I_C = B_C \cdot U$ .

Die Ströme haben im Zeigerbild verschiedene Richtungen. Addiert ergeben die Stromzeiger den Zeiger des Gesamtstroms  $I$ . Nach Bild VI-28 liegt der Zeiger  $I_R$  in Richtung der Spannung  $U$ , der Zeiger  $I_C$  eilt der Spannung um  $90^\circ$  vor und der Zeiger  $I_L$  eilt der Spannung um  $90^\circ$  nach.

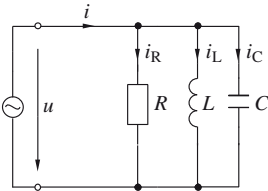


**Bild VI-27** Parallelschaltung von Induktivität, Kapazität und ohmschen Widerstand im Wechselstromkreis

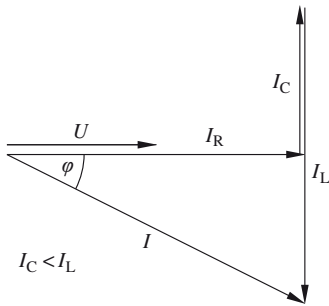


**Bild VI-28** Zeigerbild der Parallelschaltung von ohmschem Widerstand, Induktivität und Kapazität

Das durch die Zeigeraddition entstehende Zeigerbild kann nach dem Lehrsatz von Pythagoras berechnet werden.

*Gesamtstrom*

$$I^2 = I_R^2 + I'^2 = I_R^2 + (I_C - I_L)^2 \\ = U^2 \cdot G^2 + U^2 \cdot B'^2 = U^2 (G^2 + (B_C - B_L)^2) \quad (\text{VI.101})$$

Hieraus folgt das ohmsche Gesetz für die Parallelschaltung von Wirkwiderstand, Induktivität und Kapazität im Wechselstromkreis.

$$\text{Gesamtstrom} \quad I = U \cdot \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2} \quad (\text{VI.102})$$

$$\text{Scheinleitwert} \quad Y = \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2} \quad (\text{VI.103})$$

Der Scheinleitwert entspricht der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten dem Leitwert des Wirkwiderstand  $R$  und der Differenz des Leitwertes des kapazitiven Blindwiderstand  $X_C$  und des Leitwertes des induktiven Blindwiderstandes  $X_L$  entsprechen.

Die Phasenverschiebung zwischen der Gesamtspannung  $U$  und dem Strom  $I$  erhält man nach Bild VI-28.

*Phasenverschiebung*

$$\varphi = \arccos \frac{I_R}{I} = \arccos \frac{U \cdot G}{U \cdot Y} = \arccos \frac{G}{Y} \quad (\text{VI.104})$$

$$\varphi = \arctan \frac{I'}{I_R} = \arctan \frac{U \cdot B'}{U \cdot G} = \arctan \frac{B_C - B_L}{G} \quad (\text{VI.105})$$

In der komplexen Darstellung ergeben sich folgende Zusammenhänge:

*Gesamtstrom*

$$I = I_R + I' = U \cdot G + U \cdot j \cdot (B_C - B_L) \\ = U \cdot (G + j \cdot (B_C - B_L)) = U \cdot Y \quad (\text{VI.106})$$

$$\text{Scheinleitwert} \quad Y = G + j \cdot (B_C - B_L) \quad (\text{VI.107})$$

$$Y = \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2} \quad (\text{VI.108})$$

$$\text{Phasenwinkel} \quad \varphi = \arctan \frac{(B_C - B_L)}{G} \quad (\text{VI.109})$$

Bei der Parallelschaltung von  $R$ ,  $L$  und  $C$  stellt der ohmsche Widerstand den Realteil dar, während der Imaginärteil eine Zusammensetzung aus induktivem und kapazitivem Blindwiderstand ist. Der Imaginärteil kann verschiedene elektrische Eigenschaften aufweisen. Ist der induktive Anteil größer als der kapazitive, ergibt die Zusammenfassung einen induktiv wirkenden Leitwert.

$$B_L > B_C \Rightarrow B' = B_{\text{Lers}} = B_L - B_C \quad (\text{VI.110})$$

Ist der kapazitive Anteil größer als der induktive, ergibt die Zusammenfassung einen kapazitiv wirkenden Leitwert.

$$B_C > B_L \Rightarrow B' = B_{\text{Cers}} = B_C - B_L \quad (\text{VI.111})$$

Sind der kapazitive und der induktive Anteil gleich groß, wird der Imaginärteil Null; die Schaltung hat einen rein ohmschen Charakter. In diesem Fall spricht man von einer Parallelresonanz.

*Parallelresonanz*

$$B_L = B_C \Rightarrow B' = 0 = \omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L} \quad (\text{VI.112})$$

Über die Resonanzbedingung der Gleichung (VI.112) kann die *Resonanzfrequenz*  $f_0$  bzw.  $\omega_0$  berechnet werden.

**Resonanzbedingung**

$$\omega_0 \cdot C = \frac{1}{\omega_0 \cdot L} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad (\text{VI.113})$$

$$\text{Resonanzfrequenz } f_0 = \frac{\omega_0}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \quad (\text{VI.114})$$

■ **Beispiel:** Ein ohmscher Widerstand von  $R = 100 \, \Omega$ , eine Induktivität mit einem induktiven Blindwiderstand von  $X_L = 300 \, \Omega$  und eine Kapazität mit einem kapazitiven Blindwiderstand von  $X_C = 200 \, \Omega$  werden an eine Spannung von  $U = 200 \, \text{V}$  angeschlossen. Die Netzfrequenz beträgt  $f = 50 \, \text{Hz}$ .

Wie groß sind Scheinleitwert und Gesamtstromstärke? Welche Ströme fließen durch die Bauelemente, welcher Phasenwinkel herrscht zwischen Spannung und Strom? Welche Resonanzfrequenz hat diese Schaltung?

*Zeigerdarstellung:*

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{100 \, \Omega} = 10 \cdot 10^{-3} \, \text{S};$$

$$B_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{300 \, \Omega} = 3,33 \cdot 10^{-3} \, \text{S};$$

$$B_C = \frac{1}{X_C} = \frac{1}{200 \, \Omega} = 5 \cdot 10^{-3} \, \text{S}$$

$$Y = \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2} \\ = \sqrt{(10 \cdot 10^{-3})^2 \, \text{S}^2 + (5 \cdot 10^{-3} \, \text{S} - 3,3 \cdot 10^{-3} \, \text{S})^2} \\ = 10,14 \cdot 10^{-3} \, \text{S}$$

$$I = U \cdot Y = 200 \, \text{V} \cdot 10,14 \cdot 10^{-3} \, \text{S} = 2,03 \, \text{A}$$

$$I_R = U \cdot G = 200 \, \text{V} \cdot 10 \cdot 10^{-3} \, \text{S} = 2 \, \text{A};$$

$$I_L = U \cdot B_L = 200 \, \text{V} \cdot 3,3 \cdot 10^{-3} \, \text{S} = 0,66 \, \text{A};$$

$$I_C = U \cdot B_C = 200 \, \text{V} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \, \text{S} = 1 \, \text{A}$$

$$\varphi = \arccos \frac{G}{Y} = \arccos \frac{10 \cdot 10^{-3} \, \text{S}}{10,14 \cdot 10^{-3} \, \text{S}} = 9,5^\circ$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{300 \, \frac{\text{V}}{\text{A}}}{2 \cdot \pi \cdot 50 \, \frac{1}{\text{s}}} = 0,955 \, \frac{\text{Vs}}{\text{A}};$$

$$C = \frac{1}{\omega \cdot X_C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 50 \, \frac{1}{\text{s}} \cdot 200 \, \frac{\text{V}}{\text{A}}} = 15,9 \cdot 10^{-6} \, \frac{\text{As}}{\text{V}}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \\ = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{0,955 \, \frac{\text{Vs}}{\text{A}} \cdot 15,9 \cdot 10^{-6} \, \frac{\text{As}}{\text{V}}}} = 40,84 \, \frac{1}{\text{s}}$$

*Komplexe Darstellung:*

$$\underline{Y} = G - j(B_C - B_L) = 10 \cdot 10^{-3} \, \text{S} - j(5 \cdot 10^{-3} - 3,3 \cdot 10^{-3}) \, \text{S} \\ = 10,14 \cdot 10^{-3} \, \text{S} \cdot e^{j9,6}$$

$$\underline{I} = \underline{U} \cdot \underline{Y} = 200 \, \text{V} \cdot e^{j0} \cdot 10,14 \cdot 10^{-3} \, \text{S} \cdot e^{j9,6} = 2,03 \, \text{A} \cdot e^{j9,6}$$

$$\underline{I}_R = \underline{U} \cdot G = 200 \, \text{V} \cdot e^{j0} \cdot 10 \cdot 10^{-3} \, \text{S} \cdot e^{j0} = 2 \, \text{A} \cdot e^{j0}$$

$$\underline{I}_L = \underline{U} \cdot B_L = 200 \, \text{V} \cdot e^{j0} \cdot 3,3 \cdot 10^{-3} \, \text{S} \cdot e^{-j90} = 0,66 \, \text{A} \cdot e^{-j90}$$

$$\underline{I}_C = \underline{U} \cdot B_C = 200 \, \text{V} \cdot e^{j0} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \, \text{S} \cdot e^{j90} = 1 \, \text{A} \cdot e^{j90}$$

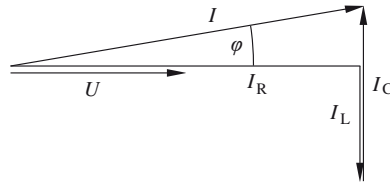


**Bild VI-29** Beispiel: Parallelschaltung von ohmschem Widerstand, Induktivität und Kapazität

**3.3 Gemischte Schaltungen**

Die Lösung von gemischten Schaltungen im Wechselstromkreis kann ebenfalls mit Hilfe der Zeigerdarstellung und der komplexen Rechnung erfolgen. Der Lösungsweg soll an einem Beispiel (Bild VI-30) dargestellt werden.

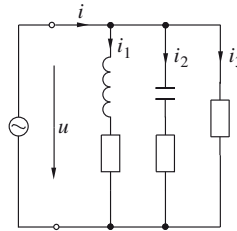


**Bild VI-30**  
Gemischte Schaltung  
im Wechselstromkreis

■ **Beispiel:** Lösung mit Hilfe der Zeigerdarstellung:

$$U = 200 \, \text{V}; \quad f = 50 \, \text{Hz}$$

Parallelzweig 1 mit Widerstand  $R_1 = 100 \, \Omega$  und Spule  $X_L = 200 \, \Omega$

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_L^2} = \sqrt{100^2 \Omega^2 + 200^2 \Omega^2} = 223,6 \Omega$$

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{200 \, \text{V}}{223,6 \, \Omega} = 0,89 \, \text{A}$$

$$\varphi_1 = \arctan \frac{X_L}{R_1} = \arctan \frac{200}{100} = 63,4^\circ$$

Strom eilt der Spannung nach!

Parallelzweig 2 mit Widerstand  $R_2 = 100 \, \Omega$  und Kapazität  $X_C = 200 \, \Omega$

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_C^2} = \sqrt{100^2 \Omega^2 + 200^2 \Omega^2} = 223,6 \Omega$$

$$I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{200 \, \text{V}}{223,6 \, \Omega} = 0,89 \, \text{A}$$

$$\varphi_2 = \arctan \frac{X_C}{R_2} = \arctan \frac{200}{100} = 63,4^\circ$$

Strom eilt der Spannung vor!

Parallelzweig 3 mit Widerstand  $R_3 = 200 \, \Omega$

$$I_3 = \frac{U}{R_3} = \frac{200 \, \text{V}}{200 \, \Omega} = 1 \, \text{A}$$

$$\varphi_3 = \arctan \frac{0}{R_3} = 0^\circ$$

Die rechnerische Addition der Ströme kann erfolgen, wenn die Zweigströme in ihre Real- und Blindstromanteile aufgelöst werden.

$$I_{1R} = I_1 \cdot \cos \varphi_1 = 0,89 \, \text{A} \cdot \cos (-63,4^\circ) \\ = 0,89 \, \text{A} \cdot 0,448 = 0,399 \, \text{A}$$

$$I_{1B} = I_1 \cdot \sin \varphi_1 = 0,89 \text{ A} \cdot \sin(-63,4^\circ) \\ = 0,89 \text{ A} \cdot (-0,894) = -0,796 \text{ A}$$

$$I_{2R} = I_2 \cdot \cos \varphi_2 = 0,89 \text{ A} \cdot \cos(63,4^\circ) \\ = 0,89 \text{ A} \cdot 0,448 = 0,399 \text{ A}$$

$$I_{2B} = I_2 \cdot \sin \varphi_2 = 0,89 \text{ A} \cdot \sin(63,4^\circ) \\ = 0,89 \text{ A} \cdot 0,894 = 0,796 \text{ A}$$

$$I_{3R} = I_3 \cdot \cos \varphi_3 = 0,89 \text{ A} \cdot \cos(0^\circ) = 1 \text{ A} \cdot 1 = 1 \text{ A}$$

$$I_{3B} = I_3 \cdot \sin \varphi_3 = 0,89 \text{ A} \cdot \sin(0^\circ) = 1 \text{ A} \cdot 0 = 0 \text{ A}$$

$$I_{\text{ges}R} = I_{1R} + I_{2R} + I_{3R} = 0,399 \text{ A} + 0,399 \text{ A} + 1 \text{ A} = 1,798 \text{ A}$$

$$I_{\text{ges}B} = I_{1B} + I_{2B} + I_{3B} = -0,796 \text{ A} + 0,796 \text{ A} + 0 \text{ A} = 0 \text{ A}$$

$$I_{\text{ges}} = \sqrt{I_{\text{ges}R}^2 + I_{\text{ges}B}^2} = \sqrt{1,798^2 + 0^2} \text{ A} = 1,798 \text{ A}$$

Die zeichnerische Lösung erfolgt durch Addition der Stromzeiger nach Bild VI-31

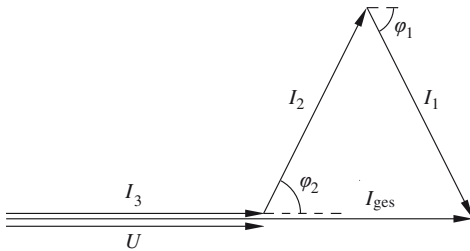


**Bild VI-31** Beispiel: Gemischte Schaltung im Wechselstromkreis in der Zeigerdarstellung

**Lösung** in der komplexen Darstellung:

In der komplexen Darstellung wird zuerst die *Gesamtimpedanz*  $Z_{\text{ges}}$  ermittelt.

$$Z_1 = R_1 + jX_L = 100 \, \Omega + j200 \, \Omega = 223,6 \, \Omega \cdot e^{j63,4^\circ}$$

$$Z_2 = R_2 - jX_C = 100 \, \Omega - j200 \, \Omega = 223,6 \, \Omega \cdot e^{-j63,4^\circ}$$

$$Z_3 = R_3 + j0 = 200 \, \Omega + j0 = 200 \, \Omega \cdot e^{j0^\circ}$$

In der Parallelschaltung können Leitwerte addiert werden, die Impedanzen müssen also in Leitwerte umgerechnet werden.

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{223,6 \, \Omega \cdot e^{j63,4^\circ}} = 4,47 \cdot 10^{-3} \text{ S} \cdot e^{-j63,4^\circ} \\ = (2,0 - j4,0) \cdot 10^{-3} \text{ S}$$

$$Y_2 = \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{223,6 \, \Omega \cdot e^{-j63,4^\circ}} = 4,47 \cdot 10^{-3} \text{ S} \cdot e^{j63,4^\circ} \\ = (2,0 + j4,0) \cdot 10^{-3} \text{ S}$$

$$Y_3 = \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{200 \, \Omega \cdot e^{j0^\circ}} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ S} \cdot e^{j0^\circ} = (5,0 - j0) \cdot 10^{-3} \text{ S}$$

$$Y_{\text{ges}} = Y_1 + Y_2 + Y_3 \\ = (2,0 + j4,0) \cdot 10^{-3} \text{ S} + (2,0 - j4,0) \cdot 10^{-3} \text{ S} + (5,0 - j0) \cdot 10^{-3} \text{ S} \\ = (9,0 + j0) \cdot 10^{-3} \text{ S} = 9,0 \cdot 10^{-3} \text{ S} \cdot e^{j0^\circ}$$

$$I_{\text{ges}} = \underline{U} \cdot Y_{\text{ges}} = (200 \text{ V} \cdot e^{j0^\circ}) \cdot (9 \cdot 10^{-3} \text{ S} \cdot e^{j0^\circ}) = 1,8 \text{ A} \cdot e^{j0^\circ}$$

## 4 Passive Filter

Passive Filter sind Schaltungen mit einem frequenzabhängigen Übertragungsverhältnis der Eingangsgröße zur Ausgangsgröße. Sie bestehen aus einer

Zusammenschaltung von ohmschen Widerständen  $R$ , Kapazitäten  $C$  und Induktivitäten  $L$  zu komplexen Netzwerken.

Ein Filter ist ein Netzwerk, das aus einem Frequenzgemisch einen bestimmten Frequenzbereich hervorhebt und einen anderen unterdrückt.

Im Durchlassbereich der Filter werden die zu übertragenden Größen kaum, im Sperrbereich dagegen stark gedämpft. Der Übergang von Sperr- in den Durchlassbereich wird durch die *Grenzfrequenz*  $f_G$  festgelegt.

Nach der Lage der Sperr- bzw. Durchlassbereiche unterscheidet man zwischen *Tief*-, *Hoch*- und *Bandpassschaltungen*.

### 4.1 Hochpassschaltung mit RC- und RL-Glied

Das in Bild VI-32 dargestellte RC-Glied stellt einen Hochpass dar.

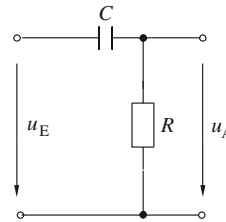


**Bild VI-32**  
Hochpassschaltung mit Kapazität und ohmschem Widerstand

Für die Filter sind Grenzfrequenz und Phasengang von besonderem Interesse. Die Grenzfrequenz ist die Frequenz, bei der das Verhältnis Ausgangsspannung

$U_A$  zu Eingangsspannung  $U_E$  den Wert  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  beträgt.

Das Verhältnis von Ausgangsspannung zu Eingangsspannung wird *Amplitudengang* genannt.

*Amplitudengang (RC)*

$$\frac{|U_A|}{|U_E|} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega \cdot C \cdot R)^2}}} \quad (\text{VI.115})$$

Der Amplitudengang hat für den Fall  $R = \frac{1}{\omega \cdot C}$  den

Wert

$$\frac{|U_A|}{|U_E|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\left(\omega \cdot C \cdot \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{VI.116})$$

Aus (VI.116) ergibt sich die Grenzfrequenz:

$$\text{Grenzfrequenz (RC)} \quad f_g = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C} \quad (\text{VI.117})$$

Der *Phasengang*, die Abhängigkeit des Winkels  $\varphi$  zwischen Ausgangs- und Eingangsspannung, ist stark von der Frequenz abhängig.

$$\text{Phasengang} \quad \arctan \varphi = f(\omega) \quad (\text{VI.118})$$

Der Winkel  $\varphi$  nimmt für verschiedene Frequenzen unterschiedliche Werte an. Häufig gebrauchte Grenzwerte:

$$\omega = 0 \quad \varphi = \arctan \frac{1}{\omega \cdot C \cdot R} = \arctan(\infty) = 90^\circ$$

$$\omega = \frac{1}{R \cdot C}$$

$$\varphi = \arctan \frac{1}{\omega \cdot C \cdot R} = \arctan \frac{C \cdot R}{C \cdot R} = \arctan(1) = 45^\circ$$

(Grenzfrequenz)

$$\omega = \infty \quad \varphi = \arctan \frac{1}{\omega \cdot C \cdot R} = \arctan(0) = 0^\circ$$

Im Bild VI-33 sind Amplituden- und Phasengang einer Hochpassschaltung dargestellt.

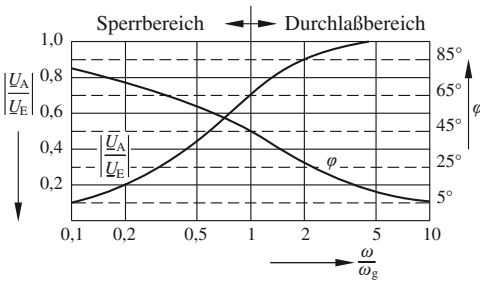


**Bild VI-33** Amplituden- und Phasengang der Hochpassschaltung mit Kapazität und ohmschem Widerstand

Wird anstatt des RC-Gliedes ein RL-Glied (Bild VI-34) als Hochpass eingesetzt, ergeben sich die Gleichungen (VI.119 und VI.120):

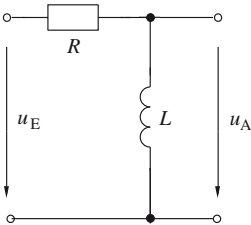


**Bild VI-34** Hochpassschaltung mit Induktivität und ohmschem Widerstand

Amplitudengang (RL)

$$\left| \frac{U_A}{U_E} \right| = \frac{X_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{R}{\omega \cdot L} \right)^2}} \quad (\text{VI.119})$$

$$\text{Grenzfrequenz (RL)} \quad f_g = \frac{R}{2 \cdot \pi \cdot L} \quad (\text{VI.120})$$

## 4.2 Tiefpassschaltung mit RC- und RL-Glied

Das in Bild VI-35 dargestellte RC-Glied stellt einen Tiefpass dar.

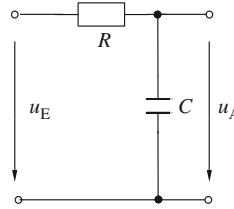


**Bild VI-35** Tiefpassschaltung mit Kapazität und ohmschem Widerstand

Für einen RC-Tiefpass ergeben sich die charakterisierenden Gleichungen (VI.121 bis VI.123):

Amplitudengang (RC)

$$\left| \frac{U_A}{U_E} \right| = \frac{X_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \cdot C \cdot R)^2}} \quad (\text{VI.121})$$

Der Amplitudengang hat für den Fall  $R = \frac{1}{\omega \cdot C}$  den Wert

$$\left| \frac{U_A}{U_E} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \omega \cdot C \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{VI.122})$$

Daraus folgt die Grenzfrequenz

$$\text{Grenzfrequenz (RC)} \quad f_g = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C} \quad (\text{VI.123})$$

Häufig gebrauchte Grenzwerte:

$$\omega = 0 \quad \varphi = \arctan \frac{1}{\omega \cdot C \cdot R} = \arctan(\infty) = 90^\circ$$

$$\omega = \frac{1}{R \cdot C}$$

$$\varphi = \arctan \omega \cdot C \cdot R = \arctan \frac{C \cdot R}{C \cdot R} = \arctan(1) = 45^\circ$$

(Grenzfrequenz)

$$\omega = \infty \quad \varphi = \arctan \omega \cdot C \cdot R = \arctan(\infty) = 90^\circ$$

Im Bild VI-36 sind Amplituden- und Phasengang einer Tiefpassschaltung dargestellt.

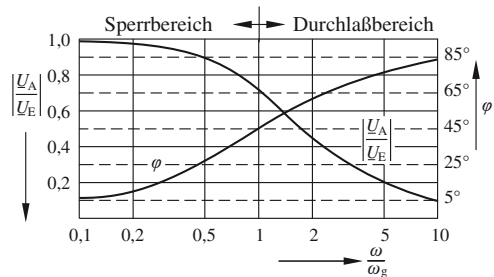


**Bild VI-36** Amplituden- und Phasengang der Tiefpassschaltung mit Kapazität und ohmschem Widerstand



Wird anstatt des RC-Gliedes ein RL-Glied (Bild VI-37) als Tiefpass eingesetzt, ergeben sich die Gleichungen (VI.124 und VI.125):

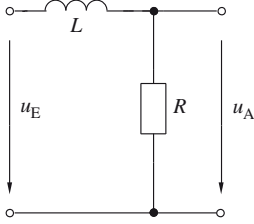


**Bild VI-37**  
Tiefpassschaltung mit Induktivität und ohmschem Widerstand

Amplitudengang (RL)

$$\frac{|U_A|}{|U_E|} = \frac{X_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega \cdot L}\right)^2}} \quad (\text{VI.124})$$

Grenzfrequenz (RL)  $f_g = \frac{R}{2 \cdot \pi \cdot L}$  (VI.125)

### 4.3 Bandpassschaltung

Bei einem Bandpass sind zwei verschiedene Filter (Hoch- und Tiefpass) hintereinander geschaltet (Bild VI-38).

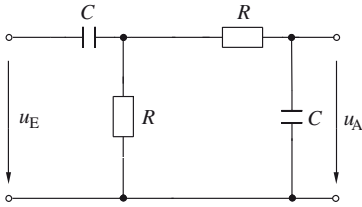


**Bild VI-38** Bandpassschaltung mit Kapazität und ohmschem Widerstand

Ein Bandpass überträgt zwischen zwei Grenzfrequenzen eine Eingangsspannung an einen Ausgang mit einem Verhältnis  $\frac{|U_A|}{|U_E|} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|U_A|_{\max}}{|U_E|}$ .

$$\frac{|U_A|}{|U_E|} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|U_A|_{\max}}{|U_E|}$$

Die Differenz der beiden Grenzfrequenzen wird als **Bandbreite B** bezeichnet.

Bandbreite  $B = f_{go} - f_{gu}$  (VI.126)

Für den Bandpass nach Bild VI-38 folgt für die Ausgangsspannung:

Ausgangsspannung Bandpass

$$\underline{U}_A = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} \cdot \underline{U}_E \quad (\text{VI.127})$$

$$\underline{U}_A = \frac{j\omega RC}{(j\omega RC + 1)^2 + j\omega RC} \cdot \underline{U}_E \quad (\text{VI.128})$$

Amplitudengang (BP)

$$\frac{|U_A|}{|U_E|} = \frac{1}{\sqrt{9 + \frac{[(\omega RC)^2 - 1]^2}{(\omega RC)^2}}} \quad (\text{VI.129})$$

Die Ausgangsspannung für den Bandpass wird maximal, wenn der Faktor  $\omega RC = 1$  wird.

maximale Ausgangsspannung

$$|U_A|_{\max} = \frac{1}{3} \cdot |U_E| \quad (\text{VI.130})$$

Die Grenzfrequenzen stellen sich bei einem Bandpass für folgende Frequenz ein:

untere Grenzfrequenz

$$f_{gu} = 0.303 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C} \quad (\text{VI.131})$$

obere Grenzfrequenz

$$f_{go} = 3.303 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C} \quad (\text{VI.132})$$

Häufig gebrauchte Grenzwerte:

$$\omega = 0 \quad \varphi = \arctan \frac{1 - (\omega \cdot R \cdot C)^2}{3 \cdot \omega \cdot C \cdot R} = \arctan(\infty) = 90^\circ$$

$$\omega = \frac{1}{R \cdot C}$$

$$\varphi = \arctan \frac{1 - (\omega \cdot R \cdot C)^2}{3 \cdot \omega \cdot C \cdot R} = \arctan \frac{1-1}{3} = \arctan(0) = 0^\circ$$

$$\omega = \infty$$

$$\varphi = \arctan \frac{1 - (\omega \cdot R \cdot C)^2}{3 \cdot \omega \cdot C \cdot R} = \frac{-\infty}{3 \cdot \infty} = \arctan(-\infty) = -90^\circ$$

Im Bild VI-39 sind Amplituden- und Phasengang einer Bandpassschaltung dargestellt.

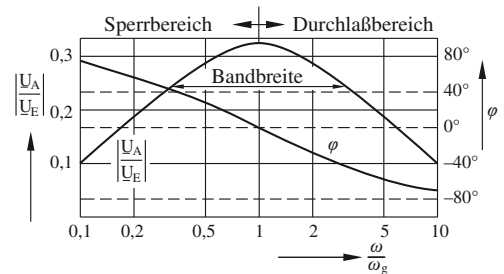


**Bild VI-39** Amplituden- und Phasengang der Bandpassschaltung mit Kapazität und ohmschem Widerstand

## 5 Schwingkreise

Anstelle der Bandpassschaltungen können bestimmte Frequenzbereiche auch durch eine Zusammenschaltung von ohmschem Widerstand, Induktivität und

Kapazität hervorgehoben oder bedämpft werden. Diese Schaltungen werden als Schwingkreise bezeichnet.

### 5.1 Reihensenanz

Bei der Reihenschaltung stellt sich für die Resonanzfrequenz  $f_r$  der maximale Strom  $I_r = \frac{U}{R}$  ein, da sich die Blindwiderstände gegenseitig kompensieren.

$$\text{Resonanzfrequenz } f_r = \frac{\omega_r}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \quad (\text{VI.133})$$

Die Reihenschaltung verhält sich nach außen wie ein rein ohmscher Widerstand mit dem Phasenwinkel  $\varphi = 0^\circ$ . Innerhalb der Reihenschaltung erreichen die Spannungen an Induktivität und Kapazität wesentlich höhere Werte als die Klemmenspannung.

*Resonanzspannung an der Induktivität*

$$U_{rL} = I_r \cdot \omega_r \cdot L \quad (\text{VI.134})$$

*Resonanzspannung an der Kapazität*

$$U_{rC} = \frac{I_r}{\omega_r \cdot C} \quad (\text{VI.135})$$

Die beiden Resonanzspannungen sind gleich groß, haben ihr Maximum jedoch um  $180^\circ$  verschoben.

Die im Kreis auftretenden Verluste werden über den *Dämpfungsfaktor*  $d$  angegeben. Der Dämpfungsfaktor beinhaltet die an der Spule, am Kondensator und am Widerstand auftretenden ohmschen Verluste im Verhältnis zum Blindwiderstand.

$$\text{Dämpfungsfaktor } d = \frac{R}{\omega_r \cdot L} \quad (\text{VI.136})$$

Der Kehrwert des Dämpfungsfaktors wird als *Güte*  $Q$  des Schwingkreises bezeichnet.

$$\text{Kreisgüte } Q = \frac{1}{d} = \frac{\omega_r \cdot L}{R} = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (\text{VI.137})$$

Die Güte des Reihenschwingkreises wird größer, wenn die Induktivität größer und die Kapazität kleiner wird. Mit Hilfe der Güte kann die Bandbreite des Reihenschwingkreises bestimmt werden.

$$\text{Bandbreite } \Delta f = f_{go} - f_{gu} = \frac{f_r}{Q} = f_r \cdot d \quad (\text{VI.138})$$

Bei den Grenzfrequenzen erreicht die Gesamtimpedanz  $Z$  des Kreises den  $\sqrt{2}$ -fachen Wert der Resonanzimpedanz.

$$Z_{go} = Z_{gu} = \sqrt{2} \cdot Z_r \quad (\text{VI.139})$$

### 5.2 Parallelresonanz

Ein Parallelschwingkreis ist die Zusammenschaltung von ohmschem Widerstand, Induktivität und Kapazität. Bei der Parallelschaltung stellt sich für die

Resonanzfrequenz  $f_r$  der minimale Strom  $I_r = \frac{U}{R}$  ein, da sich die Blindwiderstände gegenseitig kompensieren.

*Resonanzfrequenz*

$$f_r = \frac{\omega_r}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \quad (\text{VI.140})$$

Die Parallelschaltung verhält sich nach außen wie ein rein ohmscher Widerstand mit dem Phasenwinkel  $\varphi = 0^\circ$ . Innerhalb der Parallelschaltung erreichen die Ströme durch die Induktivität und die Kapazität wesentlich höhere Werte als der Strom in der Zuleitung.

*Resonanzstrom durch die Induktivität*

$$I_{rL} = \frac{U}{\omega_r \cdot L} \quad (\text{VI.141})$$

*Resonanzstrom durch die Kapazität*

$$I_{rC} = U \cdot \omega_r \cdot C \quad (\text{VI.142})$$

Die beiden Resonanzströme sind gleich groß, haben ihr Maximum jedoch um  $180^\circ$  verschoben.

Die im Kreis auftretenden Verluste werden wie bei der Reihensenanz über den *Dämpfungsfaktor*  $d$  angegeben.

$$\text{Dämpfungsfaktor } d = \frac{\omega_r \cdot L}{R} \quad (\text{VI.143})$$

$$\text{Kreisgüte } Q = \frac{1}{d} = \frac{R}{\omega_r \cdot L} = R \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (\text{VI.144})$$

Die Güte des Reihenschwingkreises wird größer, wenn die Induktivität kleiner und die Kapazität größer wird.

$$\text{Bandbreite } \Delta f = f_{go} - f_{gu} = \frac{f_r}{Q} = f_r \cdot d \quad (\text{VI.145})$$

Bei den Grenzfrequenzen erreicht die Gesamtimpedanz  $Z$  des Kreises den  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -fachen Wert der Resonanzimpedanz.

$$Z_{go} = Z_{gu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot Z_r \quad (\text{VI.146})$$

## 6 Leistung und Arbeit im Wechselstromkreis

### 6.1 Leistung und Arbeit bei Phasengleichheit von Spannung und Strom

Die Berechnung der Leistung im Gleichstromkreis erfolgt nach der Gleichung VI.147.

$$\text{Leistung im Gleichstromkreis } P = U \cdot I \quad (\text{VI.147})$$

Die Leistung im Wechselstromkreis kann analog zur Berechnung der Leistung im Gleichstromkreis für Werte erfolgen, die zeitlich zusammenfallen. Die Augenblicks- (Momentan-) Leistung ergibt sich zu:

$$\text{Momentanleistung } p = u \cdot i \quad (\text{VI.148})$$

Da am Wirkwiderstand Spannung und Strom gleiche Phasenlage haben, folgt

$$p = \hat{u} \cdot \hat{i} \cdot \sin^2 \omega \cdot t. \quad (\text{VI.149})$$

Das Liniendiagramm (Bild VI-40) zeigt, dass die Leistung mit doppelter Frequenz oberhalb der Nullachse um den Wert  $p_m = \frac{\hat{p}}{2}$  schwingt.

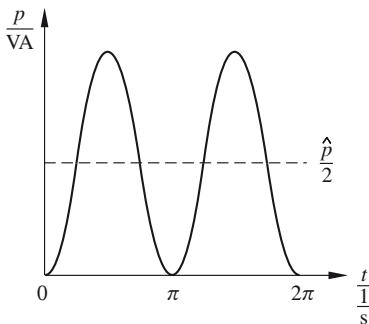


**Bild VI-40** Liniendiagramm der Leistung

Der Mittelwert der Leistung berechnet sich zu:

Mittelwert der Leistung

$$p_m = \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{2 \cdot \pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \omega t d(t) = \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{2} = \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = U \cdot I \quad (\text{VI.150})$$

Aus Gleichung (VI.150) ergibt sich, dass die Wirkleistung eines Wechselstroms in einem Stromkreis, der nur mit einem Wirkwiderstand belastet ist, gleich dem Produkt aus den Effektivwerten von Spannung und Stromstärke ist

$$\text{Wirkleistung } P = U \cdot I \quad \frac{P}{VA} = W \left| \frac{U}{V} \right| \frac{I}{A} \quad (\text{VI.151})$$

Die Stromarbeit ist das Produkt der Wirkleistung  $P$  und der Zeit  $t$ .

$$\text{Stromarbeit } W = P \cdot t \quad \frac{W}{Wh} \left| \frac{P}{W} \right| \frac{t}{h} \quad (\text{VI.152})$$

## 6.2 Leistung und Arbeit bei Phasenverschiebung von Spannung und Strom

Sind die Spannungs- und Stromwellen phasenverschoben (Bild VI-41), wird die Augenblicksleistung in den Bereichen negativ, in denen Spannung und Strom entgegengesetzte Vorzeichen haben. Der Mittelwert der Leistung verschiebt sich in Richtung Zeitachse. Die Wirkleistung wird also durch die Phasenverschiebung kleiner und erreicht ein Mini-

mum, wenn die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom  $90^\circ$  beträgt (Bild VI-42).

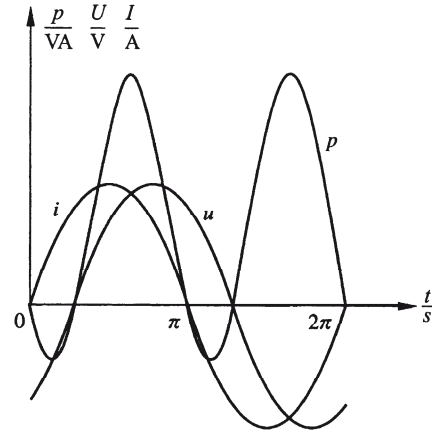


**Bild VI-41** Liniendiagramm der Leistung bei einer Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung

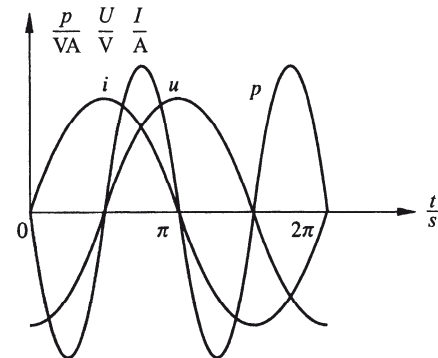


**Bild VI-42** Liniendiagramm der Leistung bei einer Phasenverschiebung von 90 Grad zwischen Strom und Spannung

Der Mittelwert der Leistung liegt im Bild VI-42 auf der Zeitachse und hat den Wert Null. Die Leistungskurve besteht aus positiven und negativen Halbwellen gleicher Größe, die Wirkleistung hat den Wert  $P = 0$ .

Beträgt die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung  $90^\circ$ , hat der Stromkreis eine rein induktive oder kapazitive Last. Der Effektivwert der Leistungskurve kann wiederum durch die Effektivwerte von Strom und Spannung bestimmt werden. Es handelt sich bei dieser Leistung jedoch um keine Wirkleistung, sondern um *Blindleistung*  $Q$ .

$$\text{Blindleistung } (q = 90^\circ) Q = U \cdot I \quad (\text{VI.153})$$

Von *Wirkleistung* spricht man, wenn Strom und Spannung keine Phasenverschiebung ( $\varphi = 0^\circ$ ) aufweisen, die Zeiger beider Größen also gleiche Richtung haben.

Von *Blindleistung* spricht man, wenn Strom und Spannung eine Phasenverschiebung von  $90^\circ$  haben, die Zeiger beider Größen einen rechten Winkel bilden. Liegt der Phasenwinkel zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$ , kann die Wirkleistung ermittelt werden, indem eine Zeigergröße in den Winkel  $0^\circ$  gelegt und die andere Zeigergröße in ihre Komponenten zerlegt wird, die in Richtung  $0^\circ$  und  $90^\circ$  zeigen (Bild VI-43).

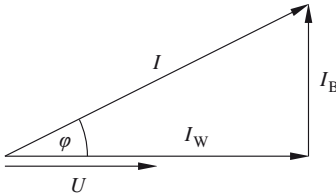


**Bild VI-43** Zeigerdiagramm von Strom und Spannung bei beliebigem Winkel

Im Bild VI-43 wird die Spannung nicht verschoben und der Strom in den *Wirkstrom*  $I_W$  und den *Blindstrom*  $I_B$  aufgeteilt.

$$\text{Wirkstrom } I_W = I \cdot \cos \varphi \quad (\text{VI.154})$$

$$\text{Blindstrom } I_B = I \cdot \sin \varphi \quad (\text{VI.155})$$

Für die entsprechenden Leistungen folgt:

$$\text{Wirkleistung } P = U \cdot I \cdot \cos \varphi \quad (\text{VI.156})$$

$$\text{Blindleistung } Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi \quad (\text{VI.157})$$

Wirkleistung und Blindleistung haben ihre Maxima im Liniendiagramm um  $90^\circ$  verschoben, das heißt, man kann die beiden Leistungsanteile als Zeiger darstellen, die einen Winkel von  $90^\circ$  einschließen. Zwischen resultierendem Zeiger und Wirkleistung ist der Winkel  $\varphi$  (Bild VI-44).

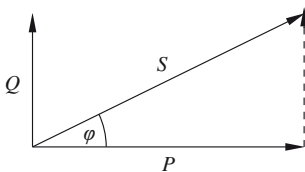


**Bild VI-44** Zeigerdiagramm der Leistung bei beliebigem Winkel (Operatoren)

Der resultierende Zeiger stellt die *Scheinleistung*  $S$  dar.

$$\text{Scheinleistung } S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (\text{VI.158})$$

$$S = P \cdot \cos \varphi \quad (\text{VI.159})$$

$$S = Q \cdot \sin \varphi \quad (\text{VI.160})$$

$$S = P \cdot \cos \varphi = U \cdot I \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi = U \cdot I \quad (\text{VI.161})$$

Die bei effektiver Spannung  $U$  und Stromstärke  $I$  abgegebene nutzbare Leistung beträgt also nur den durch den Faktor  $\cos \varphi$  gegebenen Teil der Schein-

leistung. Der andere Teil pendelt als Blindleistung zwischen der Spannungsquelle und dem Verbraucher hin und her.

Zur Unterscheidung der verschiedenen Leistungsarten, hat man unterschiedliche Maßbezeichnungen eingeführt, und zwar misst man die Wirkleistung in  $[P] = W$ , die Scheinleistung in  $[S] = VA$  und die Blindleistung in  $[Q] = var$ .

### 6.3 Leistung in komplexer Schreibweise

Die Leistung ist definiert als  $S = U \cdot I$ . Hieraus ergibt sich für die komplexe Schreibweise in der Exponentialform:

*komplexe Leistung*

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = U \cdot I \cdot e^{j\varphi_U} \cdot e^{-j\varphi_I} = U \cdot I \cdot e^{j(\varphi_U - \varphi_I)} \quad (\text{VI.162})$$

Die komplexe Leistung ist das Produkt aus der komplexen Spannung  $\underline{U}$  und dem konjugiert komplexen Strom  $\underline{I}^*$ .

Da  $\varphi = \varphi_U - \varphi_I$  die Verschiebung zwischen Spannung  $\underline{U}$  und Strom  $\underline{I}$  darstellt, gilt:

$$\underline{U} \cdot \underline{I}^* = U \cdot I \cdot (\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad (\text{VI.163})$$

Aus der vorhergehenden Definition ergeben sich die Gleichungen (VI.164) bis (VI.166).

$$\text{Wirkleistung } P = \operatorname{Re}(\underline{U} \cdot \underline{I}^*) = U \cdot I \cdot \cos \varphi \quad (\text{VI.164})$$

$$\text{Blindleistung } Q = \operatorname{Im}(\underline{U} \cdot \underline{I}^*) = U \cdot I \cdot \sin \varphi \quad (\text{VI.165})$$

$$\text{Scheinleistung } S = |\underline{U} \cdot \underline{I}^*| = U \cdot I \quad (\text{VI.166})$$

■ **Beispiel:** Ein induktiver Verbraucher nimmt bei  $U_n = 220 \text{ V}$  einen Strom  $I = 2 \text{ A}$  auf. Der Winkel zwischen Strom und Spannung beträgt  $\varphi = 40^\circ$ .

Welchen Wert haben a) die Scheinleistung, b) die Wirkleistung und c) die Blindleistung?

$$\text{a) } S = U \cdot I = 220 \text{ V} \cdot 2 \text{ A} = 440 \text{ VA}$$

$$\text{b) } P = S \cdot \cos \varphi = 440 \text{ VA} \cdot 0,766 = 337 \text{ W}$$

$$\text{c) } Q = S \cdot \sin \varphi = 440 \text{ VA} \cdot 0,643 = 283 \text{ var}$$

### 6.4 Leistungsfaktor

Die von einem Verbraucher aufgenommene Wirkleistung ist über den Faktor  $\cos \varphi$  mit der Scheinleistung verknüpft. Der Faktor  $\cos \varphi$  wird daher als *Leistungsfaktor* bezeichnet.

$$\text{Leistungsfaktor } \cos \varphi = \frac{S}{P} \quad (\text{VI.167})$$

Der Leistungsfaktor gibt an, wieviel Prozent der *Scheinleistung*  $S$  als *Wirkleistung*  $P$  im Verbraucher umgesetzt werden.

In der Praxis soll der Leistungsfaktor möglichst nahe bei Eins liegen, damit die Zuleitungen nicht unnötig mit Blindstrom belastet werden, da dieser Blindstrom auf der Zuleitung Verluste erzeugt.

## VII Drehstrom

### 1 Erzeugung von mehrphasigem Wechselstrom

Dreht man in einem homogenen Magnetfeld drei in einem Winkel von  $120^\circ$  versetzte gleiche Spulen (Bild VII-1) mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , so werden folgende Spannungen in den Spulen induziert:

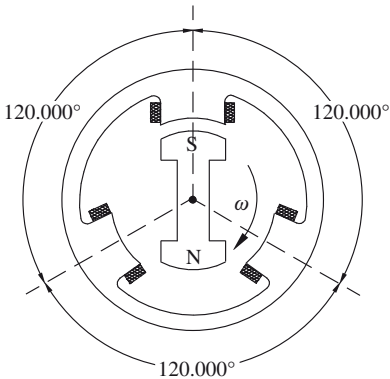


**Bild VII-1** Erzeugen eines Dreiphasensystems

$$\text{Spannung Spule 1} \quad u_1 = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (\text{VII.1})$$

$$\text{Spannung Spule 2} \quad u_2 = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t + 120^\circ) \quad (\text{VII.2})$$

$$\text{Spannung Spule 3} \quad u_3 = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t + 240^\circ) \quad (\text{VII.3})$$

Das Zeigerdiagramm der erzeugten Spannung ist in Bild VII-2 dargestellt.

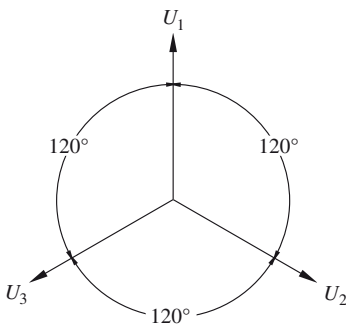


**Bild VII-2** Zeigerdiagramm der Spannungen gemäß Bild VII-1

Schließt man an jede der Spulen einen ohmschen Verbraucher mit gleichen Werten an, so treiben die Spannungen einen Strom durch die Verbraucher, der gleiche Amplitude hat, aber jeweils um den Winkel von  $120^\circ$  versetzt ist. Solche voneinander unabhängigen Dreiphasensysteme werden in der Praxis nicht

verwendet, da sie einen hohen Aufwand an Leitungsmaterial erfordern und keinen Vorteil gegenüber Wechselstromsystemen bieten.

### 2 Phasenverkettung

Betrachtet man die im Dreiphasensystem erzeugten Spannungen in einem beliebigen Zeitpunkt, so ergeben sich beispielsweise folgende Werte:

Zeitpunkt  $\varphi = 0^\circ$

$$u_1 = 0; \quad u_2 = 0,866 \cdot \hat{u}; \quad u_3 = -0,866 \cdot \hat{u}$$

Zeitpunkt  $\varphi = 90^\circ$

$$u_1 = \hat{u}; \quad u_2 = -0,5 \cdot \hat{u}; \quad u_3 = -0,5 \cdot \hat{u}$$

Zeitpunkt  $\varphi = 240^\circ$

$$u_1 = -0,866 \cdot \hat{u}; \quad u_2 = 0; \quad u_3 = 0,866 \cdot \hat{u}$$

Bei der Bildung der Summen der Augenblickswerte erkennt man, dass zu jedem beliebigen Zeitpunkt die Gesamtspannung der drei Stromkreise den Wert Null ergibt. Da die induzierten Spannungen stets in ihrer Addition den Wert Null ergeben, können die Spulen an einem Spulenende zusammengefasst werden, ohne dass ein Kurzschluss entsteht (Bild VII-3). Werden die Spulen derart zusammengefasst, spricht man von einer Verkettung. Man unterscheidet zwei Arten der Verkettung: die *Sternschaltung* und die *Dreieckschaltung*.

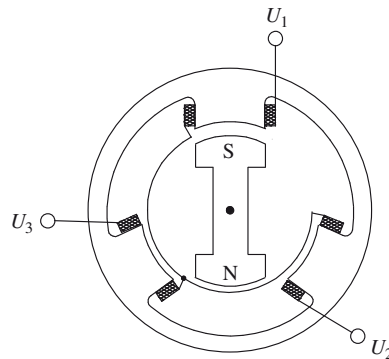


**Bild VII-3** Verkettung eines Dreiphasensystems

#### 2.1 Sternschaltung

Eine Sternschaltung erhält man, wenn die Enden der drei Generatorspulen in einem Punkt, dem *Sternpunkt*, zusammengeschaltet werden (Bild VII-4). Die in den Spulen induzierte Spannung wird *Strangspannung*  $U_{\text{Str}}$  genannt; die zwischen den Abgangsklemmen des Generators gemessene Spannung ist die *Leiterspannung*  $U_L$ .

Ein Zusammenhang zwischen den Strangwerten und den Leiterwerten des symmetrischen Drehstromsystems in Sternschaltung ist im Bild VII-5 zu erkennen.

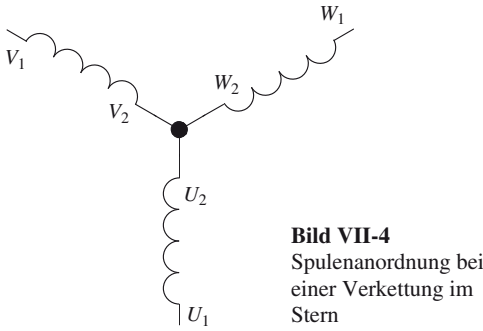


**Bild VII-4**  
Spulenordnung bei  
einer Verkettung im  
Stern

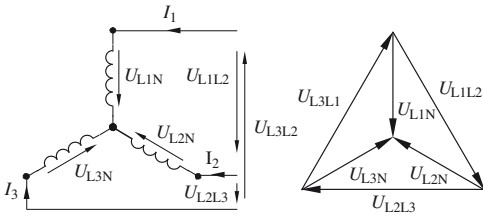


**Bild VII-5** Sternschaltung mit Zeigerbild der Spannungen

Nach Bild VII-5 ergeben sich folgende mathematischen Zusammenhänge.

$$\text{Strangspannung } U_{\text{Str}} = U_{1N} = U_{2N} = U_{3N} \quad (\text{VII.4})$$

Leiterspannung 1-2:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{L1L2} &= \underline{U}_{1N} - \underline{U}_{2N} = U_{1N} \cdot e^{-j90} - U_{2N} \cdot e^{j150} \\ &= U_{\text{Str}} \cdot (0,866 - j1,5) = 1,732 \cdot e^{-j60} \cdot U_{\text{Str}} \end{aligned} \quad (\text{VII.5})$$

Leiterspannung 2-3:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{L2L3} &= \underline{U}_{2N} - \underline{U}_{3N} = U_{2N} \cdot e^{j150} - U_{3N} \cdot e^{j30} \\ &= U_{\text{Str}} \cdot (1,732 - j0) = 1,732 \cdot e^{-j180} \cdot U_{\text{Str}} \end{aligned} \quad (\text{VII.6})$$

Leiterspannung 3-1:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{L3L1} &= \underline{U}_{3N} - \underline{U}_{1N} = U_{3N} \cdot e^{j30} - U_{1N} \cdot e^{-j90} \\ &= U_{\text{Str}} \cdot (0,866 + j1,5) = 1,732 \cdot e^{+j60} \cdot U_{\text{Str}} \end{aligned} \quad (\text{VII.7})$$

Strangstrom

$$I_{\text{Str}} = I_{1N} = I_{2N} = I_{3N} = I_{L1} = I_{L2} = I_{L3} \quad (\text{VII.8})$$

Die Leiterströme entsprechen in der symmetrischen Sternschaltung den Strangströmen, die Leiterspannungen einer symmetrischen Sternschaltung betragen das  $1,732 = \sqrt{3}$ -fache der Strangspannungen.

Für einen symmetrischen Drehstromverbraucher in Sternschaltung gelten gleiche Bedingungen.

## 2.2 Dreieckschaltung

Eine Dreiecksschaltung erhält man, wenn die drei Generatorspulen in Reihe geschaltet werden (Bild VII-6). Die in den Spulen induzierte Spannung ist die

zwischen den Abgangsklemmen des Generators gemessene Spannung.

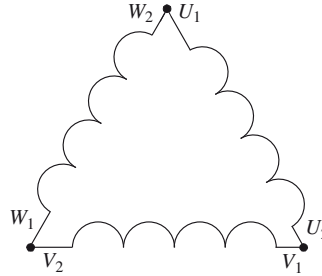


**Bild VII-6** Spulenordnung bei einer Verkettung im Dreieck

Ein Zusammenhang zwischen den Strangwerten und den Leiterwerten des symmetrischen Drehstromsystems in Dreieckschaltung ist im Bild VII-7 dargestellt.

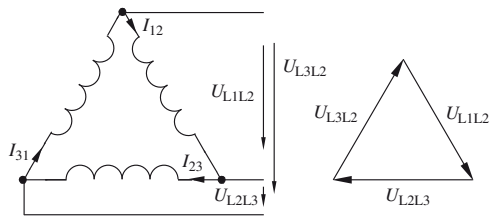


**Bild VII-7** Dreieckschaltung mit Zeigerbild der Spannungen

Nach Bild VII-7 ergeben sich folgende mathematischen Zusammenhänge:

$$\text{Strangstrom } I_{\text{Str}} = I_{12} = I_{23} = I_{31} \quad (\text{VII.9})$$

Leiterstrom 1:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = I_{12} \cdot e^{-j60} - I_{31} \cdot e^{j60} \\ &= I_{\text{Str}} \cdot (0 - j1,732) = 1,732 \cdot e^{-j90} \cdot I_{\text{Str}} \end{aligned} \quad (\text{VII.10})$$

Leiterstrom 2:

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} = I_{23} \cdot e^{-j90} - I_{12} \cdot e^{-j60} \\ &= I_{\text{Str}} \cdot (-1,5 + j0,866) = 1,732 \cdot e^{j150} \cdot I_{\text{Str}} \end{aligned} \quad (\text{VII.11})$$

Leiterstrom 3:

$$\begin{aligned} \underline{I}_3 &= \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} = I_{31} \cdot e^{j60} - I_{23} \cdot e^{j180} \\ &= I_{\text{Str}} \cdot (1,5 + j0,866) = 1,732 \cdot e^{j30} \cdot I_{\text{Str}} \end{aligned} \quad (\text{VII.12})$$

$$\text{Strangspannung } U_{\text{Str}} = U_{12} = U_{23} = U_{31} \quad (\text{VII.13})$$

Die Leiterspannungen entsprechen in der symmetrischen Dreieckschaltung den Strangspannungen; die Leiterströme einer symmetrischen Dreieckschaltung betragen das  $1,732 = \sqrt{3}$ -fache der Strangströme.

Für einen symmetrischen Drehstromverbraucher in Dreieckschaltung gelten gleiche Bedingungen.

### 3 Leistung des Dreiphasenstroms

In symmetrisch belasteten Dreiphasensystemen sind die Werte für  $U$ ,  $I$  und  $\varphi$  für die drei Stromkreise (Phasen) gleich. Die Leistung in jedem Strang ist somit identisch und kann nach den Gleichungen (VI-156) bis (VI-161) berechnet werden.

$$\text{Strangscheinleistung } S_{\text{Str}} = U_{\text{Str}} \cdot I_{\text{Str}} \quad (\text{VII.14})$$

$$\text{Strangwirkleistung } P_{\text{Str}} = U_{\text{Str}} \cdot I_{\text{Str}} \cdot \cos \varphi \quad (\text{VII.15})$$

$$\text{Strangblindleistung } Q_{\text{Str}} = U_{\text{Str}} \cdot I_{\text{Str}} \cdot \sin \varphi \quad (\text{VII.16})$$

Die Gesamtleistung des Dreiphasensystems ist die Summe der Strangleistungen.

$$\text{Scheinleistung } S = 3 \cdot S_{\text{Str}} \quad (\text{VII.17})$$

$$\text{Wirkleistung } P = 3 \cdot P_{\text{Str}} \quad (\text{VII.18})$$

$$\text{Blindleistung } Q = 3 \cdot Q_{\text{Str}} \quad (\text{VII.19})$$

Berechnung der Leistung über die Leiterspannung und den Leiterstrom:

*Sternschaltung*

$$S = 3 \cdot U_{\text{Str}} \cdot I_{\text{Str}} = 3 \cdot \frac{U_L}{\sqrt{3}} \cdot I_L = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \quad (\text{VII.20})$$

*Dreieckschaltung:*

$$S = 3 \cdot U_{\text{Str}} \cdot I_{\text{Str}} = 3 \cdot U_L \cdot \frac{I_L}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \quad (\text{VII.21})$$

Aus der Übereinstimmung der beiden Gleichungen ergibt sich, dass die Leistung eines Dreiphasensystems unabhängig davon berechnet wird, ob eine Stern- oder Dreieckschaltung vorliegt.

Die Wirk- und Blindleistungen im Dreiphasensystem bei symmetrischer Belastung werden entsprechend berechnet.

Aus Gründen der Vereinfachung werden bei Berechnungen die Leiterwerte des Dreiphasensystems ohne Indizes geschrieben.

■ **Beispiel:** Ein symmetrischer Drehstromverbraucher ist im Stern geschaltet. Bekannt sind  $U = 100 \text{ V}$  und  $R = 100 \Omega$ .

Wie groß sind die Strangströme und die Strangspannungen und welche Phasenlage haben sie? Welchen Wert hat die Scheinleistung?

$$U_{\text{Str}} = \frac{U}{\sqrt{3}} = \frac{100 \text{ V}}{\sqrt{3}} = 57,7 \text{ V}; \quad I = \frac{U_{\text{Str}}}{R} = \frac{57,7 \text{ V}}{100 \Omega} = 0,577 \text{ A}$$

Mit den Vorgaben im symmetrischen Drehstromnetz folgt für die Ströme und Spannungen:

$$\begin{aligned} I_1 &= 0,577 \text{ A } e^{-j90^\circ}; & U_{1N} &= 57,7 \text{ V } e^{-j90^\circ}; \\ I_2 &= 0,577 \text{ A } e^{j150^\circ}; & U_{2N} &= 57,7 \text{ V } e^{j150^\circ}; \\ I_3 &= 0,577 \text{ A } e^{j60^\circ}; & U_{3N} &= 57,7 \text{ V } e^{j60^\circ}; \end{aligned}$$

*Scheinleistung:*

$$S = \sqrt{3} \cdot U \cdot I = \sqrt{3} \cdot 100 \text{ V} \cdot 0,577 \text{ A} = 100 \text{ VA}$$

oder in der komplexen Form

$$\underline{S} = 3 \cdot (\underline{U}_{\text{Str}} \cdot \underline{I}_{\text{Str}}^*) = 3 \cdot 57,7 \text{ V} \cdot 0,577 \text{ A} \cdot e^{j((-90^\circ) - (-90^\circ))} = 100 \text{ VA} \cdot e^{j0}$$

■ **Beispiel:** Gegeben ist ein symmetrischer Verbraucher mit induktiver Last in Dreieckschaltung mit folgenden Werten:  $U = 100 \text{ V}$ ;  $Z = 300 \Omega \cdot e^{j20^\circ}$ . Welchen Wert und Phasenlage haben die Ströme in den Zuleitungen? Welchen Wert hat die Scheinleistung?

*Strangströme:*

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{Z_{12}} = \frac{100 \text{ V} \cdot e^{-j60^\circ}}{300 \Omega \cdot e^{j20^\circ}} = 0,33 \text{ A} \cdot e^{-j80^\circ} = (0,057 - j0,325) \text{ A}$$

$$\underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{Z_{23}} = \frac{100 \text{ V} \cdot e^{j180^\circ}}{300 \Omega \cdot e^{j20^\circ}} = 0,33 \text{ A} \cdot e^{j160^\circ} = (-0,31 + j0,113) \text{ A}$$

$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{Z_{31}} = \frac{100 \text{ V} \cdot e^{j60^\circ}}{300 \Omega \cdot e^{j20^\circ}} = 0,33 \text{ A} \cdot e^{j40^\circ} = (0,25 + j0,212) \text{ A}$$

*Ströme in der Zuleitung:*

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = 0,057 \text{ A} - j0,325 \text{ A} - (0,25 \text{ A} + j0,212 \text{ A}) \\ &= -0,193 \text{ A} - j0,537 \text{ A} = 0,57 \text{ A} \cdot e^{-j110^\circ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} = -0,31 \text{ A} + j0,113 \text{ A} - (0,057 \text{ A} - j0,325 \text{ A}) \\ &= -0,367 \text{ A} + j0,438 \text{ A} = 0,57 \text{ A} \cdot e^{j130^\circ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_3 &= \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} = 0,25 \text{ A} + j0,212 \text{ A} - (-0,31 \text{ A} + j0,113 \text{ A}) \\ &= 0,56 \text{ A} + j0,1 \text{ A} = 0,57 \text{ A} \cdot e^{j10^\circ} \end{aligned}$$

*Scheinleistung:*

$$S = \sqrt{3} \cdot U \cdot I = \sqrt{3} \cdot 100 \text{ V} \cdot 0,57 \text{ A} = 98,7 \text{ VA} \approx 100 \text{ VA}$$

## 4 Das unsymmetrische Dreiphasensystem

Nicht bei jedem Verbraucher oder bei jedem Belastungsfall kann gewährleistet werden, dass die Impedanzen der drei Stränge gleichen Wert oder gleiche Phasenlage haben. Tritt ein Ungleichgewicht im Dreiphasensystem auf, hat das Verschiebungen im Netz zur Folge. Damit diese Verschiebungen, besonders im Niederspannungsnetz, nicht zu große Auswirkungen auf die Phasenlage haben, wird das Netz, wenn ungleichmäßige Belastungen zu erwarten sind, nicht als Dreileiternetz, sondern als *Vierleiternetz* ausgeführt.

### 4.1 Das unsymmetrische Dreileiternetz

Im Dreiphasennetz sind die Leiterspannungen in Größe und Phasenlage vorgegeben. Treten am Verbraucher Unsymmetrien auf, so verschieben sich die Ströme in den Zuleitungen, ergeben als Summe aber immer noch Null!

Beim Verbraucher in der Sternschaltung nehmen die Strangspannungen einen anderen Winkel und eine andere Größe ein.

■ **Beispiel:** Gegeben ist ein unsymmetrischer, im Stern geschalteter Drehstromverbraucher mit folgenden Werten:  $U = 100 \text{ V}$ ;  $R_1 = 100 \Omega$ ;  $R_2 = 50 \Omega$ ;  $R_3 = 100 \Omega$ .

Für die Berechnung muss eine Stern-Dreieck-Umwandlung durchgeführt werden.

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_1}{R_3}$$

$$R_{23} = \frac{R_1 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_1}{R_1}$$

$$R_{31} = \frac{R_1 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_1}{R_2}$$



Mit Hilfe der Umwandlung können die Dreieckswiderstände bestimmt werden, die den gleichen Leiterstrom erzeugen, wie die Strangwiderstände der Sternschaltung.

$$R_{12} = \frac{100 \Omega \cdot 100 \Omega + 100 \Omega \cdot 50 \Omega + 100 \Omega \cdot 50 \Omega}{100 \Omega} = 200 \Omega$$

$$R_{23} = \frac{100 \Omega \cdot 100 \Omega + 100 \Omega \cdot 50 \Omega + 100 \Omega \cdot 50 \Omega}{100 \Omega} = 200 \Omega$$

$$R_{31} = \frac{100 \Omega \cdot 100 \Omega + 100 \Omega \cdot 50 \Omega + 100 \Omega \cdot 50 \Omega}{50 \Omega} = 400 \Omega$$

Nun können die Ströme in der Dreieckschaltung berechnet werden.

$$I_{12} = \frac{U_{L112}}{R_{12}} = \frac{100 \text{ V } e^{-j60}}{200 \frac{\text{V}}{\text{A}} e^{j0}} = 0,5 \text{ A } e^{-j60} = 0,25 \text{ A} - j0,433 \text{ A}$$

$$I_{23} = \frac{U_{L213}}{R_{23}} = \frac{100 \text{ V } e^{j180}}{200 \frac{\text{V}}{\text{A}} e^{j0}} = 0,5 \text{ A } e^{j180} = -0,5 \text{ A} + j0 \text{ A}$$

$$I_{31} = \frac{U_{L311}}{R_{31}} = \frac{100 \text{ V } e^{j60}}{400 \frac{\text{V}}{\text{A}} e^{j0}} = 0,25 \text{ A } e^{j60} = +0,125 \text{ A} + j0,216 \text{ A}$$

Ströme in der Zuleitung:

$$I_1 = I_{12} - I_{31} = 0,25 \text{ A} - j0,433 \text{ A} - (0,125 \text{ A} + j0,216 \text{ A})$$

$$= 0,125 \text{ A} + j0,649 \text{ A} = 0,66 \text{ A } e^{j79}$$

$$I_2 = I_{23} - I_{12} = -0,5 \text{ A} + j0 \text{ A} - (0,25 \text{ A} - j0,433 \text{ A})$$

$$= -0,75 \text{ A} - j0,433 \text{ A} = 0,866 \text{ A } e^{j150}$$

$$I_3 = I_{31} - I_{23} = 0,125 \text{ A} + j0,216 \text{ A} - (-0,5 \text{ A} + j0 \text{ A})$$

$$= 0,625 \text{ A} + j0,216 \text{ A} = 0,66 \text{ A } e^{j19}$$

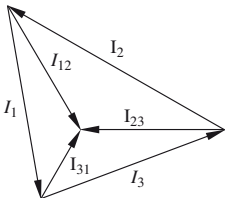


**Bild VII-8**  
Zeigerdiagramm der  
Ströme gemäß Beispiel

Sind die Ströme in den Zuleitungen bekannt, können die Spannungen an den Widerständen der Sternschaltung berechnet werden.

$$U_{1N} = I_1 \cdot R_1 = 0,66 \text{ A} \cdot e^{j79} \cdot 100 \Omega = 66 \text{ V} \cdot e^{j79}$$

$$U_{2N} = I_2 \cdot R_2 = 0,866 \text{ A} \cdot e^{-j150} \cdot 50 \Omega = 43,3 \text{ V} \cdot e^{-j150}$$

$$U_{3N} = I_3 \cdot R_3 = 0,66 \text{ A} \cdot e^{j19} \cdot 100 \Omega = 66 \text{ V} \cdot e^{j19}$$

Die Strangspannungen haben bei einer unsymmetrischen Belastung also nicht mehr den Wert  $U_{\text{str}} = \frac{U}{\sqrt{3}} = \frac{100 \text{ V}}{\sqrt{3}} = 57,7 \text{ V}$ , den sie bei einer symmetrischen Belastung aufweisen. Der Sternpunkt verschiebt sich um einen Wert  $U_0$  aus der Ursprungslage.

Scheinleistung:

$$S_{\text{ges}} = S_1 + S_2 + S_3 = U_{1N} \cdot I_1 + U_{2N} \cdot I_2 + U_{3N} \cdot I_3$$

$$= 66 \text{ V} \cdot 0,66 \text{ A} + 43,3 \text{ V} \cdot 0,866 \text{ A} + 66 \text{ V} \cdot 0,66 \text{ A}$$

$$= 43,56 \text{ VA} + 37,5 \text{ VA} + 43,56 \text{ VA} = 124,62 \text{ VA}$$

- **Beispiel:** Gegeben ist ein unsymmetrischer, im Dreieck geschalteter Drehstromverbraucher mit folgenden Werten:  $U = 100 \text{ V}$ ;  $R_{12} = 200 \Omega$ ;  $R_{23} = 200 \Omega$ ;  $R_{31} = 400 \Omega$ .

Ströme in der Dreieckschaltung:

$$I_{12} = \frac{U_{L112}}{R_{12}} = \frac{100 \text{ V } e^{-j60}}{200 \frac{\text{V}}{\text{A}} e^{j0}} = 0,5 \text{ A } e^{-j60} = 0,25 \text{ A} - j0,433 \text{ A}$$

$$I_{23} = \frac{U_{L213}}{R_{23}} = \frac{100 \text{ V } e^{j180}}{200 \frac{\text{V}}{\text{A}} e^{j0}} = 0,5 \text{ A } e^{j180} = -0,5 \text{ A} + j0 \text{ A}$$

$$I_{31} = \frac{U_{L311}}{R_{31}} = \frac{100 \text{ V } e^{j60}}{400 \frac{\text{V}}{\text{A}} e^{j0}} = 0,25 \text{ A } e^{j60} = 0,125 \text{ A} + j0,216 \text{ A}$$

Ströme in der Zuleitung:

$$I_1 = I_{12} - I_{31} = 0,25 \text{ A} - j0,433 \text{ A} - (0,125 \text{ A} + j0,216 \text{ A})$$

$$= 0,125 \text{ A} + j0,649 \text{ A} = 0,66 \text{ A } e^{j79}$$

$$I_2 = I_{23} - I_{12} = -0,5 \text{ A} + j0 \text{ A} - (0,25 \text{ A} - j0,433 \text{ A})$$

$$= -0,75 \text{ A} - j0,433 \text{ A} = 0,866 \text{ A } e^{j150}$$

$$I_3 = I_{31} - I_{23} = 0,125 \text{ A} + j0,216 \text{ A} - (-0,5 \text{ A} + j0 \text{ A})$$

$$= 0,625 \text{ A} + j0,216 \text{ A} = 0,66 \text{ A } e^{j19}$$

Scheinleistung:

$$S_{\text{ges}} = S_1 + S_2 + S_3 = U_{L112} \cdot I_{12} + U_{L213} \cdot I_{23} + U_{L311} \cdot I_{31}$$

$$= 100 \text{ V} \cdot 0,5 \text{ A} + 100 \text{ V} \cdot 0,5 \text{ A} + 100 \text{ V} \cdot 0,25 \text{ A}$$

$$= 50 \text{ VA} + 50 \text{ VA} + 25 \text{ VA} = 125 \text{ VA}$$

## 4.2 Das unsymmetrische Vierleiternetz

Muss in einem Dreiphasensystem mit starken Unsymmetrien gerechnet werden, wird das Vierleiternetz eingesetzt. Beim Vierleiternetz ist der Sternpunkt des Verbrauchers mit dem Sternpunkt der Spannungsquelle über einen separaten Leiter (Neutralleiter) verbunden (Bild VII-9). Treten am Verbraucher ungleiche Belastungen in den verschiedenen Phasen auf, wird der Differenzstrom des Systems über den Neutralleiter zur Spannungsquelle zurückgeleitet.

$$\text{Neutralleiterstrom } I_N = I_1 + I_2 + I_3 \quad (\text{VII.22})$$

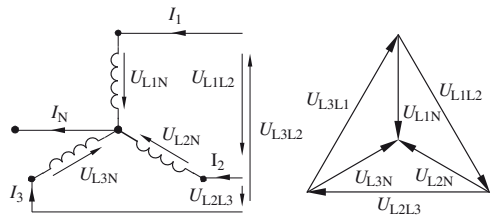


**Bild VII-9** Sternschaltung mit Zeigerbild der Spannungen im Vierleiternetz

Ist der Widerstand des Neutralleiters sehr klein gegenüber dem Widerstand des Verbrauchers, verschiebt sich beim Vierleiternetz die Sternpunktspannung nicht; die Strangspannungen bleiben in Phasenlage und Größe erhalten.

- **Beispiel:** Gegeben ist ein unsymmetrischer, im Stern geschalteter Drehstromverbraucher mit folgenden Werten:  $U = 100 \text{ V}$ ;  $R_1 = 100 \Omega$ ;  $R_2 = 50 \Omega$ ;  $R_3 = 100 \Omega$ .  
Unter der Voraussetzung, dass der Widerstand des Neutralleiters gegen Null geht, folgt:



$$U_{\text{Str}} = \frac{U}{\sqrt{3}} = \frac{100 \text{ V}}{\sqrt{3}} = 57,7 \text{ V} ;$$

Strangströme:

$$I_1 = \frac{U_{1N}}{R} = \frac{57,7 \text{ V} \cdot e^{-j90}}{100 \Omega} = 0,577 \text{ A} \cdot e^{-j90}$$

$$I_2 = \frac{U_{2N}}{R} = \frac{57,7 \text{ V} \cdot e^{j150}}{50 \Omega} = 1,154 \text{ A} \cdot e^{j150}$$

$$I_3 = \frac{U_{3N}}{R} = \frac{57,7 \text{ V} \cdot e^{j30}}{100 \Omega} = 0,577 \text{ A} \cdot e^{j30}$$

Der über den Neutralleiter abfließende Strom ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} I_N &= I_1 + I_2 + I_3 = 0,577 \text{ A} \cdot e^{-j90} + 1,154 \text{ A} \cdot e^{j150} + 0,577 \text{ A} \cdot e^{j30} \\ &= (0 - j0,577) \text{ A} + (-1,0 + j0,577) \text{ A} + (0,5 + j0,289) \text{ A} \\ &= (-0,5 + j0,289) \text{ A} = 0,577 \text{ A} \cdot e^{j150} \end{aligned}$$

## Literaturhinweise

- [1] *Hagmann, G.:* Grundlagen der Elektrotechnik: Aula-Verlag, 2006
- [2] *Hering, E.; Martin, R.; Stohrer, M.:* Physik für Ingenieure: Springer, 2002
- [3] *Frohne, H.:* Moeller Grundlagen der Elektrotechnik: Teubner, 2005
- [4] *Zastrow, D.:* Elektrotechnik: Vieweg, 2006
- [5] *Lindner, H.:* Physik für Ingenieure: Fachbuchverlag Leipzig im Carl-Hanser-Verlag, 2006

# Elektronik

## I Leitungsmechanismen bei Halbleitern, pn-Übergang

### 1 Einführung in die Halbleiterphysik

Im Periodischen System der Elemente findet man zwischen den Metallen und den Nichtmetallen Elemente, die als *Halbleiter* bezeichnet werden. Es handelt sich hierbei um Materialien mit einer *spezifischen Leitfähigkeit*, die in dem Bereich zwischen der spezifischen Leitfähigkeit von metallischen Leitern und der von Isolatoren liegt.

Die wichtigsten Halbleiterwerkstoffe sind das *Silizium* (Si) und das *Germanium* (Ge). Selen (Se) wird dagegen nur noch zur Herstellung kleinerer Netzgleichrichter verwendet.

Hinzu kommen jedoch noch die intermetallischen Verbindungen wie Gallium-Arsenid (GaAs), Gallium-Phosphid (GaP) und Indium-Arsenid (InAs). Sie werden hauptsächlich zur Herstellung von Fotohalbleitern und Hallgeneratoren verwendet.

*Silizium* und *Germanium* sind 4wertige Elemente; also bilden Atome mit vier Valenzelektronen das Kristallgitter (Tetraeder-Gefüge) von reinem Silizium und Germanium.

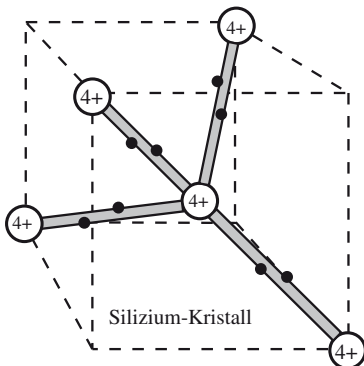


**Bild I-1** Elektronenpaarbindung bei Silizium

Bei diesen Elementen werden die Atome durch die Elektronenpaarbindung zusammengehalten. In den Atomkoordinationsgittern lagern sich die Atome mit ihren äußeren Elektronenschalen so aneinander, dass ihre Bindung über zwei Elektronen erfolgt. Die Atome teilen sich die Elektronen der äußersten Schale. Diese erhält so nach Bild I-1 den Bau einer Edelgaschale (Abschnitt Werkstoffkunde).

Bei einem störungsfreien Kristallgitteraufbau und absolutem Temperaturnullpunkt ( $\vartheta_0 = -273\text{ °C} = 0\text{ K (elvin)}$ ) befinden sich alle Atome im Ruhezustand. Die *Leitfähigkeit* des Halbleitermaterials ist unter den genannten Bedingungen gleich Null, und damit ist das Material ein absoluter Nichtleiter.

In reinem Silizium gibt nun jedes Si-Atom an vier Nachbaratome je ein Elektron ab oder nimmt von jedem der vier ein Elektron zur Aufrechterhaltung der Elektronenpaarbindung an. In einem reinen Siliziumkristall sind alle Valenzelektronen fest gebunden, so dass keine freien Elektronen zur Verfügung stehen.

Wird ein solcher Kristall der Einwirkung von Energie in Form von Licht und/oder Wärme ausgesetzt, so beginnen die Atome zu schwingen (thermische Eigenbewegung). Unter diesen Bedingungen können Valenzelektronen aus ihren Bindungen herauspringen und werden damit zu freien Elektronen, so dass die Leitfähigkeit des Materials größer wird.

An der Stelle, an der ein Valenzelektron aus seiner Bindung gerissen wurde, fehlt nun jedoch eine negative Ladung. Infolge der positiven Ladung der Protonen im Atom verbleibt dem Atom eine positive Ladung, die als „Defektelektron“ oder „Loch“ bezeichnet wird.

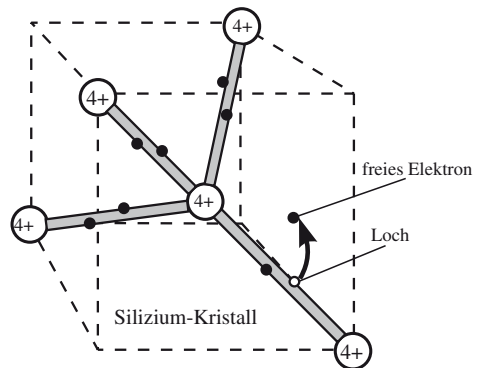


**Bild I-2** Thermische Paarbildung beziehungsweise Generation im Teilchen-Modell

Das Entstehen eines freien Elektrons und eines Loches nach Bild I-2 wird als „thermische Paarbildung“ oder „Generation“ bezeichnet. Bei andauernder Energiezuführung werden fortlaufend Elektronen frei, die scheinbar ziellos durch den Kristall wandern, bis sie auf ein Loch treffen und dort wieder in einen festen Atomverband zurückspringen. Dieser Vorgang wird „Rekombination“ genannt. Paarbildung und Rekombination sind stets im Gleichgewicht. Die Anzahl der verfügbaren Ladungsträger hängt aber von der Temperatur ab und wird mit steigender Temperatur größer.

Im Bereich der Raumtemperatur verdoppelt sich in etwa die Anzahl der Ladungsträgerpaare, wenn eine Temperaturerhöhung um 10 K vorgenommen wird. Diese Erhöhung der Leitfähigkeit mit steigender Temperatur wird allgemein „Eigenleitung“ genannt.

Beim Anlegen einer Spannung entsteht im Kristall ein elektrisches Feld, dass die frei gewordenen Elektronen vom Minuspol zum Pluspol der Spannungsquelle zieht. Sie springen auf ihrem Weg dahin immer von einem Loch zum anderen und „fallen hinein“ (rekombinieren). Damit wandern die Löcher aber scheinbar vom Pluspol zum Minuspol der Spannungsquelle.

In jedem Halbleitermaterial stehen also zum *Ladungs-transport* sowohl *Elektronen* als auch *Löcher* zur Verfügung. Diesen bipolaren Leitungsmechanismus gilt es zu nutzen.

Neben dem *Teilchen-Modell* gibt es noch das *Bändermodell*, das auf Überlegungen der Quantentheorie zurückgeführt wird (siehe Abschnitt Werkstoffkunde).

Danach kann Ladung (Energie) nur in Portionen, also bestimmten ganzzahligen Vielfachen der Grundladung  $e$  (Elektronenenergie) existieren. In einem Kristall können nach *Pauli* nur zwei Elektronen dasselbe Energieniveau haben. Dadurch liegen die Energieniveaulinien der Elektronen des Kristalls sehr dicht in Form von Bändern beieinander. Bei Festkörpern geben also *Bänder* die möglichen Energiezustände der Elektronen an:

1. Die Elektronen können keine beliebigen *Energie-werte* im Kristall einnehmen, sondern nur solche, die *innerhalb* eines Bandes liegen.
2. Die Elektronen können im Kristall keine *Energie-zustände* einnehmen, deren Werte zwischen den *Bändern*, dass heißt, in der verbotenen Zone, liegen.
3. Eine *Energiezufuhr* kann ein Anheben der Elektronen auf höhere Energiebänder bewirken, dass heißt, die verbotene Zone kann von den Elektronen übersprungen werden.
4. Nur in teilweise besetzten Bändern kann eine Elektronenleitung vonstatten gehen. In absolut leeren Bändern sind keine Elektronen vorhanden, und in völlig besetzten sind keine erlaubten Energieniveaus mehr vorhanden.
5. Bei Energieabgabe springen alle vorher angeregten Elektronen auf noch freie Plätze in den niederen Energiebändern zurück.

Werden Elektronen aus dem Valenzband VB in das Leitungsband LB angehoben, so ist die Elektronenbesetzung des VB nicht mehr komplett. Dieses VB mit relativ wenig unbesetzten Elektronenzuständen verhält sich nun hinsichtlich der Leitfähigkeit so, als wären die entstandenen Lücken positiv geladene Teilchen in einem sonst leeren Band.

Bei den Halbleitern ist deshalb eine *n-Leitung* durch die negativ geladenen Elektronen im Leitungsband und eine *p-Leitung* durch die positiv geladenen Defektelektronen des Valenzbandes zu unterscheiden.

Der „thermischen Paarbildung“ im Teilchenmodell steht also hier nach Bild I-3 die Anhebung eines Valenzelektrons durch Temperaturanstieg vom oberen Rand des Valenzbandes zum unteren Rand des Lei-

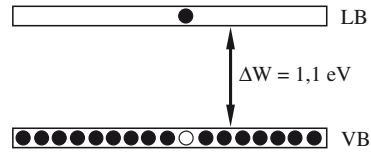


**Bild I-3** Generation im Bändermodell

tungsbandes adäquat gegenüber. Die zur Paarbildung notwendige Energie wird *Bindungsenergie* genannt und entspricht der Breite der verbotenen Zone.

Bei der bisher besprochenen „Eigenleitung“ hängt die Leitfähigkeit, also die Anzahl der freien Ladungsträger (Elektronen und Löcher) nur von der Temperatur ab.

Wie macht man die Leitfähigkeit möglichst temperaturunabhängig?

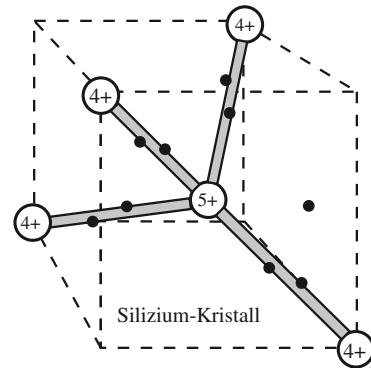


**Bild I-4** n-Dotierung von Silizium

Die Leitfähigkeit wird fast temperaturunabhängig, wenn man *Störstellen* im Gitter (Bild I-4) durch das gezielte Einbringen von Fremdatomen in das Kristallgitter des reinen Halbleitermaterials einbaut.

Ein derartiger Einbau von Fremdatomen wird als *Dotieren* bezeichnet. Zum Dotieren sind Stoffe geeignet, die entweder ein Valenzelektron mehr oder ein Valenzelektron weniger besitzen als zum Beispiel Silizium.

Die Elemente *Phosphor* (P), *Arsen* (As) und *Antimon* (Sb) haben fünf Valenzelektronen und damit ein Elektron mehr als Silizium hat.

Bringt man Atome dieser Elemente in das Kristallgitter der Halbleiter, so wird ein Elektron für die Elektronenpaarbindung im Kristall nicht gebraucht. Es entsteht ein Elektronenüberschuss im Kristallgitter (Elektronenspender = Donatoren).

Wird dagegen mit *Bor* (B), *Aluminium* (Al), *Gallium* (Ga) oder *Indium* (In) dotiert, entsteht im Kristall ein Elektronenmangel, weil diese Atome nur über drei Valenzelektronen verfügen. Eine Paarbindung ist nicht komplett, dass heißt es fehlt eine negative Ladung, was bedeutet, dass wir nun nach Bild I-5 Löcher (Defektelektronen) eingebracht haben (Elektronenempfänger = Akzeptoren).

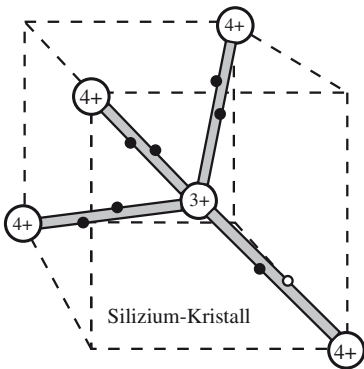


Bild I-5 p-Dotierung von Silizium

Diese durch gezielte Verunreinigung bewirkte Leitfähigkeit wird *Störstellenleitung* genannt. Sie ist maßgebend für die Leitfähigkeit aller dotierten Halbleitermaterialien und ist fast unabhängig von Temperaturänderungen.

Mit Hilfe des Bändermodells lässt sich dieses Phänomen auch erklären: Durch die Dotierung entstehen zusätzliche Energieniveaus, so dass ein Ladungsträgertransport bei äußerst kleiner Energiezufuhr möglich ist. Die Lage der neuen Energieniveaus ist im Bild I-6 für n-dotiertes Material und Bild I-7 für p-dotiertes Material erkennbar.

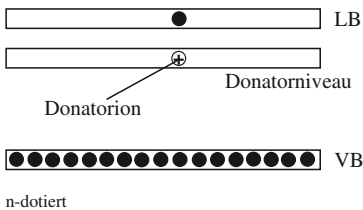


Bild I-6 Energieniveau bei n-dotiertem Silizium

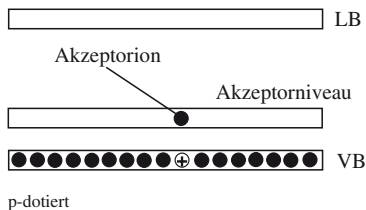


Bild I-7 Energieniveau bei p-dotiertem Silizium

Wir haben nun n-dotiertes und p-dotiertes Halbleitermaterial zur Verfügung und kennen zwei Leitungsmechanismen, nämlich n-Leitung und p-Leitung.

## 2 Der pn-Übergang

Fügt man n- und p-dotiertes Halbleitermaterial aneinander, liegt ein *pn-Übergang* nach Bild I-8 vor. Infolge *Diffusion* (Verschieben von Ladungsträgern

zwischen den beiden unterschiedlich dotierten Siliziumschichten infolge ihrer Wärmebewegung) verlagern sich Elektronen aus dem n-Bereich, in dem sie die Majoritätsträger (Mehrheit) darstellen, in den p-Bereich und rekombinieren mit den Löchern. Ebenso diffundieren Defektelektronen (Löcher) aus dem p-Bereich in den n-Bereich und rekombinieren mit den Elektronen.

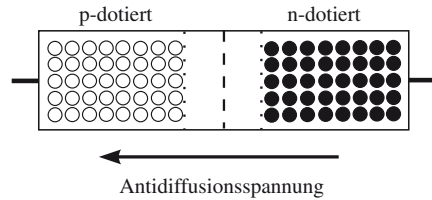


Bild I-8 pn-Übergang mit Antidiffusionsspannung

Diese Ladungsträger sind nunmehr für den Stromtransport verloren. Es bildet sich eine Grenzschicht aus, die keine oder nur sehr wenige freie Ladungsträger enthält, die sogenannte *Sperrschicht*. Infolge der fehlenden Ladungsträger ist die Leitfähigkeit dieser Zone sehr gering.

Da im p-Bereich aufgrund der Dotierung negative Atomrümpfe (Ionen) und im n-Bereich positive Atomrümpfe im Kristallgitter eingebunden sind, entsteht eine *Raumladung*, also eine Potentialdifferenz und damit ein elektrisches Feld, die eine weitere Diffusion unterbindet und somit die Breite der Sperrschicht begrenzt. Diese *Antidiffusionsspannung* ist von der Dotierung, vom Grundmaterial und der Temperaturspannung abhängig. Weil diese Spannung, die manchmal auch als Diffusionsspannung bezeichnet wird, nur unmittelbar an der Sperrschicht auftritt, kann sie von außen nicht gemessen werden.

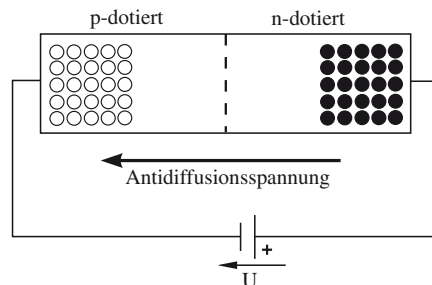


Bild I-9 pn-Übergang in Sperrrichtung

Legt man nun nach Bild I-9 von außen an den pn-Übergang eine größere Spannung an, die dieselbe Polarität wie die Antidiffusionsspannung aufweist, also eine Spannungsquelle mit dem Minus-Pol an den p-Bereich und dem Plus-Pol an den n-Bereich, so werden Elektronen in den p-Bereich gepumpt, die dann ihrerseits mit den Löchern rekombinieren.

In den n-Bereich werden zusätzliche Löcher gepumpt (Elektronen abgesaugt). Die Folge ist eine Ausweitung der Sperrschicht, da diese Grenzschicht weiter an Ladungsträgern verarmt. Der Widerstand der Sperrschicht wird nahezu unendlich groß.

Polzt man nun die Spannungsquelle nach Bild I-10 um (Plus-Pol an den p-Bereich und den Minus-Pol an den n-Bereich), werden Elektronen in den n-Bereich eingebracht, während Defektelektronen in den p-Bereich verbracht werden. Die Folge ist, dass rekombinierte Teilchen sofort durch neue ersetzt, die Sperrschicht abgebaut und bei genügend großer angelegter Spannung zum Verschwinden gebracht wird. Damit fließt ein größer werdender Strom durch den pn-Übergang. Überschreitet die Spannung den Wert der Antidiffusionsspannung, wird der Durchlassstrom schnell sehr groß.

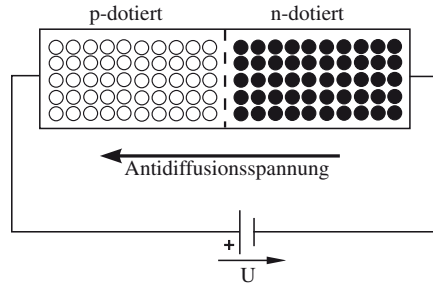


**Bild I-10** pn-Übergang in Durchlassrichtung

Ein pn-Übergang ist also ein Bauelement, dessen Widerstand von der Richtung der angelegten Spannung abhängig ist. Man unterscheidet eine *Sperrichtung* und eine *Durchlassrichtung*.

## II Dioden

### 1 Kennlinien

Aus den *Diodenkennlinien* nach Bild II-1 lassen sich Daten für den Einsatz und das Verhalten der einzelnen Diodentypen ermitteln.

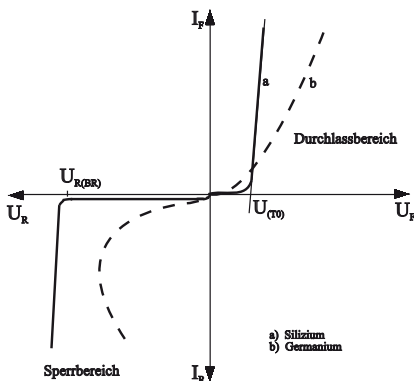


**Bild II-1** Vierquadrantenkennlinie für Silizium- und Germanium-Dioden

Der *Durchlassbereich* wird von den Größen Durchlassspannung  $U_F$  und Durchlassstrom  $I_F$  beschrieben ( $F$  steht für forward direction, engl.: Vorwärtsrichtung).

Legt man an die Kennlinie in Durchlassrichtung eine Tangente, wenn die Kennlinie in eine Gerade übergeht, so schneidet diese Tangente die Spannungsachse bei der Schleusenspannung  $U_{(TO)}$ .

Es gelten folgende Werte:

$$\text{Ge} \Rightarrow U_{(TO)} = 0,2 \dots 0,4 \text{ V}$$

$$\text{Si} \Rightarrow U_{(TO)} = 0,5 \dots 0,8 \text{ V}$$

Der *Sperrbereich* wird von den Größen Sperrspannung  $U_R$  und Sperrstrom  $I_R$  beschrieben ( $R$  steht für reverse direction, engl.: Rückwärtsrichtung).

Es gelten folgende Werte:

$$\text{Ge} \Rightarrow I_R = 10 \dots 500 \mu\text{A}$$

$$\text{Si} \Rightarrow I_R = 5 \dots 500 \text{ nA}$$

Im Koordinatenursprung scheint in der Kennlinie ein Knick zu sein. Bei genauerem Hinsehen findet man als Ursache einen Wechsel der Einheitsgröße bei Strom und Spannung. Die Spannung  $U_{R(BR)}$  ist hier nach Bild II-1 die rückwärtige Durchbruchspannung.

Die *Durchbruchspannung* ist als die Spannung definiert, für die die maximale Feldstärke im pn-Übergang einen kritischen Wert erreicht und der Sperrstrom sehr plötzlich große Werte annimmt.

Der Strom am pn-Übergang setzt sich aus einem Löcherinjektionsstrom ins n-Gebiet, einem Elektro-

neninjektionsstrom ins p-Gebiet und einem Rekombinations-Generationsstrom in der Raumladungszone zusammen. Dieser Strom ist temperaturabhängig. Je höher die Temperatur wird, um so größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Elektronen große Geschwindigkeiten annehmen.

Die *Temperaturspannung*  $U_T$  ist eine Funktion der Temperatur und lässt sich über den Energieerhaltungssatz aus der Wärmelehre ermitteln. Setzt man voraus, dass die Elektronen, bedingt durch die Temperatur  $T$ , eine bestimmte Energie besitzen, ohne dass eine elektrische Spannung vorhanden ist, so ist die Temperaturspannung als eine Spannung erklärbar.

$$\text{Temperaturspannung } U_T = \frac{k \cdot T}{|e|} \quad (\text{II.1})$$

mit  $k = 1,3804 \cdot 10^{-23} \text{ Ws/K}$  (Boltzmannkonstante) und  $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As}$  (Elementarladung) (für  $T = 300 \text{ K}$  ist  $U_T \approx 26 \text{ mV}$ )

Tritt nun eine elektrische Feldstärke infolge einer angelegten Spannung auf, so wird die Bewegung der Elektronen zum positiven Potential gerichtet sein. Insgesamt kann der Strom mathematisch wie folgt als die Kennlinie einer Diode in Durchlassrichtung so beschrieben werden:

$$\text{Diodenkennlinie } I = I_S \left\{ e^{\frac{U}{U_T}} - 1 \right\} \quad (\text{II.2})$$

Hierbei ist  $I_S$  eine Konstante (Sättigungsstrom), die von der Konstruktion der Diode und verschiedenen Materialparametern abhängt.

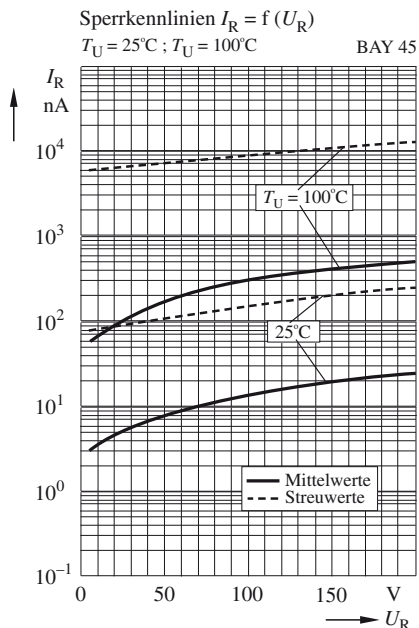


**Bild II-2** Sperrkennlinien einer Diode als  $f(T)$

Sperr- und Durchlassverhalten einer Diode sind temperaturabhängig. Bei einem Anstieg der Sperrschichttemperatur  $\vartheta_j$  um ca. 10 K bei einer Ge-Diode und ca. 7 K bei einer Si-Diode verdoppelt sich der Sperrstrom. Die Schleusenspannung verringert sich mit zunehmender Sperrschichttemperatur  $\vartheta_j$  um ca. 2 mV/K.

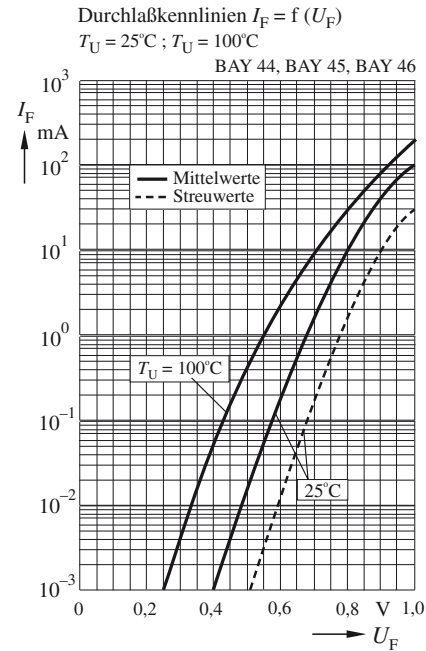


**Bild II-3** Durchlasskennlinien einer Diode als  $f(T)$

Die Diagramme in Bild II-2 und II-3 zeigen die Temperaturabhängigkeit der Sperr- beziehungsweise Durchlasskennlinien für 25 °C und 100 °C.

## 2 Kenndaten und Grenzwerte

Diodenhersteller geben in den Datenblättern eine Reihe von Kennwerten an. Diese Kennwerte sind getrennt nach Grenzwerten und Kenndaten zu bewerten.

*Grenzwerte* sind solche Werte, die auf keinen Fall überschritten werden dürfen, weil das Bauelement sonst zerstört werden könnte. Ein einzelner Grenzwert darf auch dann nicht überschritten werden, wenn andere Grenzwerte nicht voll ausgenutzt sind.

Dioden können auf verschiedene Arten elektrisch überlastet werden; durch einen zu großen Durchlassstrom  $I_F$ , eine zu hohe Sperrspannung  $U_R$ , eine zu große, in ihr umgesetzte Verlustleistung  $P_V$  oder durch eine zu hohe Sperrschichttemperatur  $\vartheta_{j \max}$ .

Die Datenblätter enthalten nach DIN 41782 Strom- und Spannungswerte mit folgenden Bedeutungen:

Stoßspitzenspannung  $U_{RSM}$ , Periodische Spitzensperrspannung  $U_{RRM}$ , Dauergrenzstrom  $I_{FAV}$ , Durchlassstrom-Effektivwert  $I_{FRMS}$  und Stoßstrom-Grenzwert  $I_{FSM}$ .

Beim Betrieb einer Diode entsteht sowohl in Durchlassrichtung als auch in Sperrrichtung eine Verlustleistung  $P_V$  in der Diode, wobei bei niedrigen Frequenzen die Sperrverluste gegenüber den Durchlassverlusten vernachlässigbar klein sind.

Verlustleistung  $P_V = U_F \cdot I_F$  (II.3)

Zur Berechnung dieser Verlustleistung muss  $U_F$  näher bestimmt werden. Es gilt:

$U_F = U_{(TO)} + r_F \cdot I_F$

Eingesetzt in Gleichung II.3 ergibt sich:

$P_V = (U_{(TO)} + r_F \cdot I_F) \cdot I_F = U_{(TO)} \cdot I_F + r_F \cdot I_F^2$  (II.4)

Sowohl Spannung als auch Strom sind hier abhängig von der Zeit  $f(t)$ . Der 1. Teil der Summe in Gleichung II.4 beschreibt den DC-Anteil der Leistung, während der 2. Teil der Summe den AC-Anteil darstellt. Damit ergibt sich  $P_V = U_{(TO)} \cdot I_{FAV} + r_F \cdot I_{RMS}^2$  und wegen  $I_{RMS} = F \cdot I_{FAV}$  mit  $F \equiv$  Formfaktor ergibt sich die

totale Verlustleistung

$P_{tot} \geq P_V = U_{(TO)} \cdot I_{FAV} + r_F (F \cdot I_{FAV})^2$  (II.5)

Diese Verlustleistung führt zur Erwärmung des Halbleiterkristalls. Die größte zulässige Verlustleistung wird als totale Verlustleistung  $P_{tot}$  vom Hersteller für bestimmte Temperaturbedingungen angegeben.

In diesem Zusammenhang muss auch die zulässige Impulsbelastbarkeit von Dioden gesehen werden. Wird die Diode mit einer rechteckförmigen Spannung betrieben, kann mit dem Diagramm nach Bild II-4 gearbeitet werden. Hier ist die Abhängigkeit des zulässigen Stroms  $I_F$  von der Impulsdauer  $t_i$  aufgetragen. Als Parameter wird hier  $\nu = t_i/T$  ange-

ben. Je größer der Parameter  $\nu$  wird, um so geringer wird der zulässige Strom in Durchlassrichtung.

Hauptsächlich durch die Verlustleistung bei Durchlassbetrieb entsteht in der Sperrschicht Wärme, durch die sich die Sperrschichttemperatur erhöht. Diese darf die maximale Sperrschichttemperatur  $\vartheta_{Jmax}$  nicht überschreiten, weil der Kristall seine Halbleitereigenschaften ansonsten stark verändert und die Diode zerstört wird.

Die höchste zulässige Sperrschichttemperatur hängt vom Material ab:  $\vartheta_{Jmax} \approx 70^\circ$  bis  $90^\circ \text{C}$  bei Germaniumdioden und  $\vartheta_{Jmax} \approx 150^\circ$  bis  $200^\circ \text{C}$  bei Siliziumdioden.

Besteht die Gefahr, dass die höchstzulässige Sperrschichttemperatur infolge der Verlustleistung und der Umgebungstemperatur überschritten werden kann, so muss die Diode „gekühlt“ werden.

Als Kenndaten werden Eigenschaften der Dioden angegeben, die das Verhalten in bestimmten Arbeitspunkten kennzeichnen. Die Kenndaten werden in dynamische und statische Daten unterteilt.

Statische Kenndaten beschreiben das Gleichstromverhalten während dynamische Kenndaten über das Verhalten bei Wechselstrom- und Impulsbetrieb informieren.

Der statische Durchlasswiderstand  $R_F$  ist der Gleichstromwiderstand einer Diode. Er ist nicht konstant, sondern hängt vom gewählten Arbeitspunkt ab. Oberhalb der Schleusenspannung ist  $R_F$  sehr klein, unterhalb aber bereits relativ groß.

Der dynamische Durchlasswiderstand  $r_F$  ist der Wechselstromwiderstand der Diode. Er lässt sich aus der Stromänderung  $\Delta I_F$  infolge einer Spannungsänderung  $\Delta U_F$  für einen bestimmten Arbeitspunkt aus dem Kennlinienbild ermitteln. Der dynamische Durchlasswiderstand wird mit steigendem Durchlassstrom kleiner. Sein Wert wird vom Hersteller in den entsprechenden Datenblättern in doppelt-logarithmischen Diagrammen, zum Beispiel im Diagramm nach Bild II-5 dargestellt.

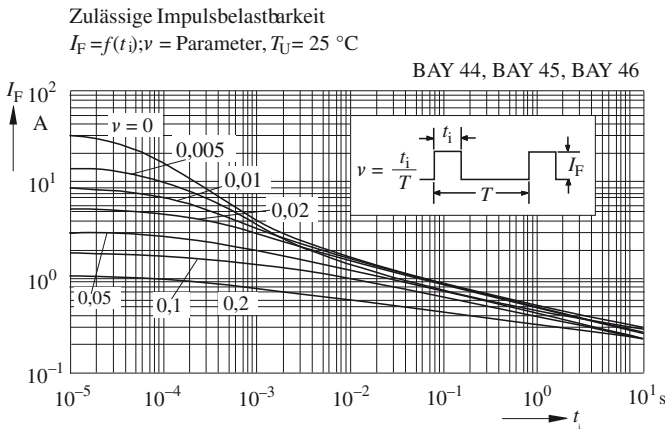


**Bild II-4**  
Zulässige Impulsbelastbarkeit



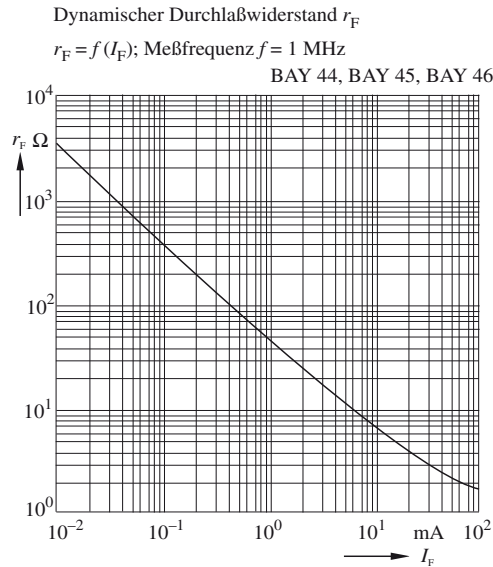


**Bild II-5** Dynamischer Durchlasswiderstand  $r_F$  einer Diode

dynamischer Durchlasswiderstand

$$r_F = \frac{\Delta U_F}{\Delta I_F} \quad (\text{II.6})$$

Der statische Sperrwiderstand  $R_R$  ist im gesamten zulässigen Sperrbereich sehr groß. Er ändert sich auch nur relativ wenig in Abhängigkeit von der Sperrspannung. Wird jedoch die höchstzulässige Spitzensperrspannung  $U_{RSM}$  überschritten, so wird der Sperrwiderstand plötzlich sehr klein. Eine normale Diode ist dann nicht mehr funktionsfähig.

Die *Sperrschicht*, die sich zwischen dem p-dotierten und dem n-dotierten Material ausbildet, wirkt als Isolator wie ein Dielektrikum, an das sich auf beiden Seiten ein gut leitendes Material anschließt. Jede Diode besitzt daher auch ohne angelegte Spannung eine *Sperrschichtkapazität*. Sie wird nach Bild II-6 mit zunehmender Sperrspannung kleiner, weil die Breite der Sperrschicht größer wird. Aus der Sperrschichtkapazität und der zwischen den Anschlüssen der Diode und dem Gehäuse auftretenden Kapazität ergibt sich die Diodenkapazität  $C_D$ .

Obwohl diese Diodenkapazität einen relativ kleinen Wert hat, kann sie beim Diodeneinsatz sehr störend wirken. So bildet eine Diode mit einem Vorwiderstand ein RC-Glied, das eine bestimmte Zeitkonstante hat. Bei Betrieb mit einer Wechselfspannung sehr hoher Frequenz wirkt das RC-Glied als Tiefpass, bei Impulsbetrieb als Integrierglied, durch das eine Impulsverformung auftritt.

Beim Einsatz in der Digitaltechnik müssen also Dioden mit sehr kleiner Diodenkapazität ausgewählt werden.

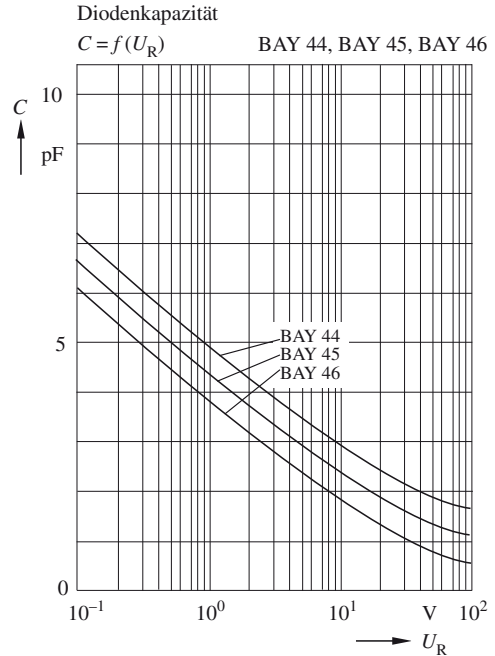


**Bild II-6** Dioden-Kapazität als Funktion der Sperrspannung

Die Sperrschicht ist abgebaut, wenn eine Diode in Durchlassrichtung betrieben wird. Nun befinden sich zahlreiche Ladungsträger im Bereich der Grenzschicht zwischen dem p- und n-Material. Bei schlagartigem Umpolen der äußeren Spannung (Übergang vom Durchlass- in den Sperrbetrieb) kann eine *Sperrwirkung* des pn-Überganges erst dann entstehen, wenn alle Ladungsträger aus der Grenzschicht abgefließen sind (Träger-Stauereffekt, TSE).

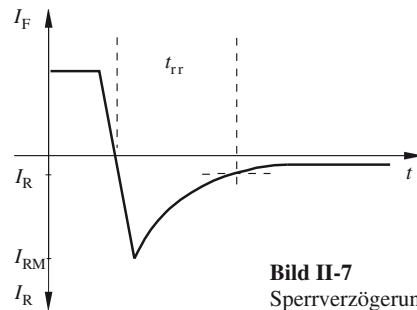


**Bild II-7** Sperrverzögerungszeit  $t_{rr}$

Die Zeit, die das Ausräumen der Ladungsträger aus der Grenzschicht erfordert, wird *Sperrverzögerungszeit*  $t_{rr}$  (reverse recovery time) oder Rückwärtserholzeit  $t_{rr}$  genannt. Bild II-7 zeigt den Zusammenhang zwischen dem maximal auftretenden Sperrstrom  $I_{RM}$  und der Dauer des fließenden Sperrstroms, bis dieser auf ca. 10 % von  $I_{RM}$  abgesunken ist, bei der die Sperrverzögerungszeit endet.



Die Sperrverzögerungszeit soll aus mehreren Gründen möglichst klein sein. So kann unmittelbar nach dem Umschalten vom Durchlass- in den Sperrbereich bereits eine hohe Sperrspannung  $U_R$  anliegen, während noch für eine gewisse Zeit ein relativ großer Ausräumstrom  $I_R$  fließt. Kurzzeitig ergibt sich dadurch eine hohe Verlustleistung, durch die die Diode zerstört werden kann. Eine TSE-Beschaltung (RC-Reihenglied parallel zur Diode) mindert diesen Effekt.

Weiterhin bestimmt die Sperrverzögerungszeit aber auch die höchste Frequenz, die mit der betreffenden Diode noch gleichgerichtet werden kann. Eine Gleichrichtung ist nur möglich, wenn die Dauer der zu sperrenden Halbwelle größer als die Sperrverzögerungszeit ist.

Bei Betrieb einer Diode (aber auch aller anderen Halbleiterbauelemente) wird die in der (oder den) Sperrschicht(en) auftretende Verlustleistung  $P_V$  in Wärme umgewandelt. Diese Wärme muss über das den Kristall umschließende Gehäuse aus Metall, Kunststoff oder Glas an die Umgebungsluft abgeführt werden.

Aufgrund der thermischen Gesetze geschieht dieses in dem Maße, je größer die Temperaturdifferenz zwischen Sperrschicht und Umgebungsluft ist und je besser die Ableitung der erzeugten Wärme erfolgen kann.

Wie gut die Wärme von der Sperrschicht ( $J = \text{junction}$ ) durch das Material an die Luft ( $U = \text{Umgebung}$ , auch  $A$  für engl. = ambient) abgeführt werden kann, wird durch den *Wärmewiderstand*  $R_{th\,JU}$  beschrieben, wobei der Index „th“ den thermischen Widerstand beschreibt.

Den mathematischen Zusammenhang beziehungsweise die Definition des Wärmewiderstandes kann man leicht formulieren.

$$\text{Wärmewiderstand } R_{th\,JU} = \frac{\vartheta_J - \vartheta_U}{P_V} \quad (\text{II.7})$$

Bei Dioden mit Verlustleistungen  $P_V < 1 \text{ W}$  genügt meist die Wärmeableitung über die Oberfläche des Gehäuses. Der Wärmewiderstand umfasst den Weg von der Sperrschicht über das Gehäuse an die Umgebungsluft. Bei Verlustleistungen  $P_V > 1 \text{ W}$  reicht die Wärmeableitung über das Gehäuse allein nicht mehr aus, weil die Oberfläche des Gehäuses zu klein ist. Um die abstrahlende Oberfläche zu vergrößern, wird die Diode auf einen zusätzlichen Kühlkörper gesetzt. Hierfür eignen sich Metalle, die eine gute Wärmeleitfähigkeit bei gleichzeitig geringem Gewicht haben.

Werden Dioden mit einem zusätzlichen Kühlkörper betrieben, so setzt sich der Wärmewiderstand  $R_{th\,JU}$  aus einer Reihenschaltung der drei Teilwiderstände  $\rightarrow R_{th\,JG}$  (Wärmewiderstand Sperrschicht – Gehäuse),  $R_{th\,GK}$  (Wärmewiderstand Gehäuse – Kühlkörper) und  $R_{th\,K}$  (Wärmewiderstand des Kühlkörpers) zusammen.

$$\rightarrow R_{th\,JU} = R_{th\,JG} + R_{th\,GK} + R_{th\,K}$$

Der gesamte Wärmerwiderstand  $R_{th\,JU}$  zwischen Sperrschicht und Umgebungsluft ist nun wegen der großen Oberfläche kleiner als der Wärmewiderstand  $R_{th\,JU}$ , der für das Halbleiterbauelement ohne Kühlkörper gilt. Je kleiner der Wärmewiderstand ist, um so größere Wärmemengen können von der Sperrschicht abgeführt werden. Die Wärmespeicherung kann durch entsprechende Ersatzschaltbilder (zum Beispiel „Kondensator“) dargestellt und berechnet werden.

*Zulässige Verlustleistung*

$$P_V = \frac{\vartheta_J - \vartheta_U}{R_{th\,JG} + R_{th\,GK} + R_{th\,K}} \quad (\text{II.8})$$

Der Wärmewiderstand  $R_{th\,K}$  eines Kühlkörpers ist aber nicht nur von der Größe der Oberfläche, sondern auch vom Material abhängig. Diese Materialabhängigkeit wird meistens in einem Diagramm angegeben. Heute werden in zunehmendem Umfang Rippenkühlkörper verwendet. Sie werden hauptsächlich aus einer *Aluminiumlegierung* gefertigt.

Zwischen dem Gehäuse des Bauelementes und dem Kühlkörper soll ein sehr enger Kontakt bestehen, damit der Wärmewiderstand  $R_{th\,GK}$  möglichst klein wird. Dies lässt sich mit einer *Wärmeleitpaste*, zum Beispiel Silikonfett erreichen.

### 3 Kennzeichnung von Halbleiter-Bauelementen

Die Typenbezeichnung setzt sich nach „Pro Electron“ aus *zwei* (für Typen, die vorwiegend in Rundfunk-, Fernseh- und Magnetongeräten verwendet werden) oder *drei* (Typen für kommerzielle Zwecke, beziehungsweise Industriotypen) Buchstaben und einer Zahlenkombination zusammen. Bei amerikanischen Herstellern ist die Bezeichnung 1N... für Dioden und 2N... für Transistoren üblich, wobei die Zahl vor dem „N“ die Anzahl der internen pn-Übergänge kennzeichnet. Hier ist das Ausgangsmaterial der Bauelemente nicht erkennbar. Die nachfolgende drei- oder vierstellige Zahl ist eine Registriernummer ohne besondere technische Aussage.

Das folgende Schema zeigt die Kennzeichnung von Halbleiter-Bauelementen der Firma Siemens und anderer Firmen. Darin bedeuten:

1. Buchstabe (Ausgangsmaterial):

A Germanium; B Silizium; C Material mit einem Energieabstand von mehr als 1,3 eV, zum Beispiel Gallium-Arsenid; D Material mit einem Energieabstand von weniger als 0,6 eV, zum Beispiel Indium-Antimonid; R Halbleiter-Material für Photoleiter und Hallgeneratoren

2. Buchstabe (Verwendungszweck):

A Allgemeine Kleinsignalgleichrichtung, Schaltodiode; B Kapazitätsdiode; C NF-Transistor; D NF-Leistungstransistor; E Tunnelodiode; F HF-Transistor; G Oszillatordiode für HF-Anwendung, auch Multi-

chips; H Diode, die auf ein Magnetfeld anspricht, Hall-Feldsonde; L HF-Leistungstransistor; N Optokoppler; P Fotodiode, Fotoelement (strahlungsempfindliches Bauelement); Q Leuchtdiode (strahlungserzeugendes Bauelement); R Elektrisch ausgelöste Steuer- oder Schaltbauteile mit Durchbruchcharakteristik; S Schalttransistor; T Elektrisch oder mittels Licht ausgelöste Steuer- oder Schaltbauteile mit Durchbruchcharakteristik; U Leistungs-Schalttransistor; X Verfielfacherdiode; Y Leistungsdiode; Z Z-Diode, Referenzdiode

Der 3. Buchstabe (nur X, Y und Z) kennzeichnet kommerzielle Typen.

## 4 Diodenarten

Dioden unterscheidet man zweckmäßigerweise nach ihrer Anwendung voneinander. Die bisher beschriebenen Grenz- und Kenndaten werden hierbei je nach Ausprägung der Dioden und der beabsichtigten Anwendung als Vor- oder Nachteile angesehen und zielgerichtet verwendet. Die folgenden Diodenarten stellen nur eine willkürliche Auswahl dar.

Alle mit den Vorgängen im Halbleitermaterial zusammenhängenden elektrischen Eigenschaften sind durch geeignete Wahl der Konzentration der Fremdatome (Donatoren beziehungsweise Akzeptoren) beiderseits des pn-Überganges, durch Wahl der Dicke von p- und n-Bereich, durch Wahl der Kristallfläche und durch das Herstellungsverfahren in weiten Grenzen beeinflussbar. In der Art, wie die gewünschten Konzentrationen von Donatoren und Akzeptoren in das Grundmaterial Silizium eingebracht werden, unterscheiden sich die möglichen grundsätzlichen Herstellungsverfahren.

Beim *Legierungsverfahren* nach Bild II-8 wird eine kleine Aluminium- oder Indiumkugel (-draht) auf eine n-dotierte Siliziumscheibe gebracht. Beides zusammen wird soweit erhitzt, bis sich ein kleiner geschmolzener Al-Si-Bereich bildet, der nach dem Abkühlen eine p-leitende Zone bildet. Das Restaluminium bildet den Kontakt der p-Zone. Die genaue Lage, die Fläche und die Eindringtiefe des entstandenen pn-Überganges sind nur schwer exakt zu steuern. Das Legierungsverfahren wird deshalb nur noch in Sonderfällen eingesetzt.

**Tabelle II-1** Diodenarten und Anwendungsbereiche

| Art                         | Schaltzeichen                                                                       | Anwendungsbereich                                                                                                                                                                                             |
|-----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Silizium-Flächendiode       |  | Universaldiode zur Gleichrichtung von Spannungen und Strömen in der Elektrotechnik, Elektronik und Messtechnik                                                                                                |
| Silizium-Gleichrichterzelle |                                                                                     | Gleichrichten von Strömen und Spannungen in der Leistungselektronik                                                                                                                                           |
| Germanium-Spitzendiode      |                                                                                     | Gleichrichten von kleinen Wechselspannungen und -strömen bis zu hoher Frequenz.<br>Anwendung als schnelle Schaltodiode in der Digitalelektronik                                                               |
| Schottky-Diode              |                                                                                     | Gleichrichten von kleinen Wechselspannungen und -strömen bis zu extrem hoher Frequenz. Anwendung als sehr schnelle Schaltodiode. Bestandteil monolithischer integrierter Schaltungen in der Digitalelektronik |
| Backwarddiode               |  | Gleichrichten extrem kleiner Wechselspannungen bei hoher Frequenz                                                                                                                                             |
| Tunneldiode                 |  | Schwingungserzeugung im Mikrowellenbereich. Schnelle Schaltodiode in der Digitalelektronik                                                                                                                    |
| Kapazitätsdiode             |  | Abstimmung von Schwingkreisen, automatische Nachstimm-schaltungen, Modulationsschaltungen, Mischer und Frequenzvervielfacher                                                                                  |
| Z-Diode                     |  | Begrenzen von Spannungen, Spannungs-Referenzelement in der Messtechnik, Schaltungen zur Spannungsneubildung                                                                                                   |
| Magnetdiode                 |  | Magnetfeldabhängige Steuerungen                                                                                                                                                                               |
| Suppressor-Diode            |  | Begrenzen von Überspannungsspitzen im gesamten Bereich der Elektronik                                                                                                                                         |

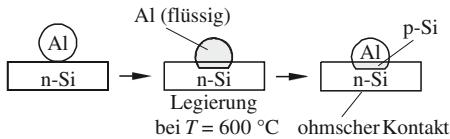


**Bild II-8** Prinzip des Legierungsverfahrens

Das *Festkörper-Diffusionsverfahren* erlaubt eine wesentlich bessere Kontrolle der Eindringtiefe des pn-Überganges. Bei diesem Verfahren werden nach Bild II-9 einkristalline *n-dotierte Si-Scheiben* bei hohen Temperaturen einer Dotierstoff enthaltenen Atmosphäre ausgesetzt. Die Fremdatome diffundieren in das n-Silizium, wobei sich durch geeignete Wahl von Temperatur und Zeit die Eindringtiefe sehr genau einstellen lässt. Die Fläche des für eine einzelne Diode benutzten pn-Überganges wird hierdurch jedoch nicht bestimmt. Diese muss durch Zerkleinern in Einkristalle gewünschter Größe erfolgen. Der dann seitlich freiliegende pn-Übergang muss zusätzlich geätzt und abgedeckt werden.

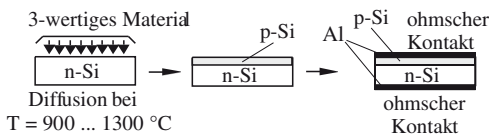


**Bild II-9** Prinzip des Diffusionsverfahrens

Durch das Planarverfahren ist eine wesentlich bessere Kontrolle der Geometrie von pn-Übergängen möglich. Bei diesem Verfahren wird nach Bild II-10 auf der einkristallinen n-dotierten Si-Scheibe bei hohen Temperaturen durch Sauerstoffzufuhr eine  $\text{SiO}_2$ -Schicht aufgebracht, durch die quasi keine Fremdatome eindringen können. Durch einen *photolithographischen Prozess* wird in diese  $\text{SiO}_2$ -Schicht ein Fenster eingefügt, das einer Dotierstoff enthaltenen Atmosphäre ausgesetzt wird. Die Fremdatome diffundieren an dieser Stelle in das n-Silizium. So lässt sich durch geeignete Wahl von Temperatur und Zeit die Eindringtiefe und die Fläche des für eine einzelne Diode benutzten pn-Überganges sehr genau einstellen.

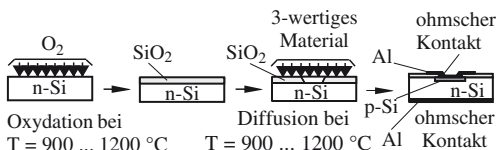


**Bild II-10** Planar-Diffusionsverfahren

Hinsichtlich der inneren Verluste bringt das *Epitaxie-Verfahren* nach Bild II-11 eine weitere Verbesserung gegenüber dem einfachen Planar-Diffusionsverfahren mit sich. Hierbei wird auf der niederohmigen einkristallinen n-dotierten Si-Scheibe epitaktisch eine ebenfalls, allerdings hochohmige, einkristalline n-do-

tierte Si-Scheibe durch chemische Reaktion bei der Entstehung abgeschieden. Die weiteren Schritte entsprechen dem oben beschriebenen Planar-Diffusionsverfahren.

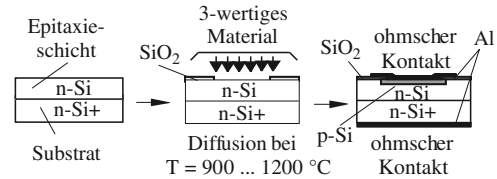


**Bild II-11** Epitaxie-Planar-Diffusionsverfahren

Diese grundsätzlichen Herstellungsverfahren können natürlich auch für die Fertigung von Transistoren und anderen HL-Bauelementen angewendet werden. Zur Herstellung von Feldeffekttransistoren und integrierten Schaltkreisen wird neuerdings die Ionenimplantation angewendet. Bei diesem Verfahren werden die Dotierungsatome in einem elektrischen Feld ionisiert und mit hoher Geschwindigkeit in das Grundmaterial „geschossen“. Da sich hierbei die Eindringtiefe sehr genau steuern lässt, sind die pn-Übergänge sehr scharf abgegrenzt, so dass unerwünschte Kapazitäten klein gehalten werden können. Auch die Größe des einzelnen Transistorsystems kann verringert werden, was die Integrationsdichte von ICs erhöht.

## 4.1 Kapazitätsdioden

Bei den Kapazitätsdioden wird die Sperrschichtkapazität und die Abhängigkeit ihrer Größe von der anliegenden Sperrspannung als gewünschte spezielle Eigenschaft benutzt. Die in Sperrichtung betriebene Kapazitätsdiode kann mit einem Plattenkondensator verglichen werden. Die Breite der Sperrschicht, dass heißt hier der Plattenabstand, kann durch die Größe der Sperrspannung variiert werden. So wird mit zunehmender Sperrspannung die Breite der Sperrschicht größer und damit die Sperrschichtkapazität  $C_j$  kleiner. Um eine starke Spannungsabhängigkeit der Sperrschichtkapazität zu erreichen, bildet man hyperabrupte pn-Übergänge. Die Diffusionstechnik macht es möglich, Siliziumdioden mit eng tolerierter und recht verlustfreier Sperrschichtkapazität herzustellen.

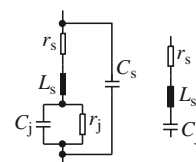


**Bild II-12**  
Ersatzschaltungen von  
Kapazitätsdioden

Bei den Kenndaten ist die *Nennkapazität* von wesentlicher Bedeutung. Sie wird in den Datenblättern stets für bestimmte Sperrspannungen angegeben und wird nicht nur durch die Sperrschichtkapazität  $C_j$  gebildet. Die Sperrschicht bildet keinen idealen kapazitiven

Blindwiderstand, sondern ist im Zusammenhang mit den anderen Anteilen der Diode in den *Ersatzschaltungen* nach Bild II-12 zu betrachten. Neben der Kapazität  $C_j$  ist auch die Güte  $Q$  einer Kapazitätsdiode beim praktischen Einsatz von Bedeutung, da Kapazitätsdioden für den Einsatz in HF-Schwingkreisen vorgesehen sind. Unter Vernachlässigung der Serieninduktivität  $L_s$  lässt sich die Güte nach Bild II-12 definieren.

$$\text{Güte } Q = \frac{1}{\omega C_j \cdot r_s + \frac{1}{\omega C_j \cdot r_j}} \quad (\text{II.9})$$

Gleichung II.9 lässt erkennen, dass die Güte frequenzabhängig ist. Die Serieninduktivität (bedingt durch die Anschlussdrähte) ist bei hohen Frequenzen nicht vernachlässigbar. Die meisten Anwendungen ermöglichen die Verwendung eines Ersatzschaltbildes nach Bild II-12b. Hierbei kann der Sperrschichtwiderstand  $r_j$  und die Anschlusskapazität  $C_s$  vernachlässigt werden. In den Datenblättern der Hersteller wird die Abhängigkeit der Güte von der Frequenz in Diagrammen dargestellt, desgleichen die Temperatur- und Sperrspannungsabhängigkeit der ausnutzbaren Kapazität.

Wegen ihrer relativ kleinen Kapazitäten werden Kapazitätsdioden überwiegend als Schwingkreiskapazitäten in der Hochfrequenztechnik eingesetzt. Sie haben in Radio- und Fernsehgeräten den früher üblichen mechanischen Drehkondensator weitgehend verdrängt.

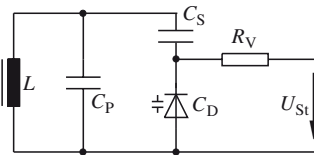


**Bild II-13**  
Prinzipschaltung einer Nachstimm-schaltung

Die Kapazität der Kapazitätsdiode ist in den Nachstimm-schaltungen nach Bild II-13 meistens nur eine Teilkapazität. Durch Ansteuern mit einer veränderbaren Gleichspannung  $U_{st}$  wird die Sperrschichtkapazität und damit auch die Resonanzfrequenz des Schwingkreises verändert (siehe Abschnitt Nachrichtentechnik).

## 4.2 Schalterdioden

In einem Stromkreis muss ein Schalter in der Stellung „Geschlossen“ einen möglichst kleinen Widerstand (idealer Wert  $R = 0 \Omega$ ) und in der Stellung „Offen“ einen möglichst großen Widerstand (idealer Wert  $R = \infty \Omega$ ) haben. Mit mechanischen Schaltern lassen sich die idealen Werte weitgehend erreichen, bei elektronischen Schaltern jedoch nur näherungsweise.

Die Diode stellt einen elektronischen Schalter dar, wenn ihr kleiner Durchlasswiderstand  $R_F$  und ihr großer Sperrwiderstand  $R_R$  als Schalterzustand be-

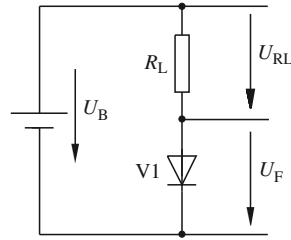


**Bild II-14a**  
Diode als elektronischer Schalter

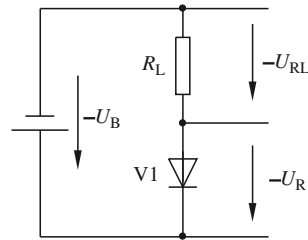


**Bild II-14b**

nutzt werden. Der Schaltzustand der Diode als Schalter hängt also von der Polarität der angelegten Betriebsspannung  $U_B$  in der Schaltung nach Bild II-14a und II-14b ab. Wird der Lastwiderstand  $R_L$  als Widerstandsgerade in das Kennlinienfeld einer Diode nach Bild II-15 eingetragen und eine Rechteckspannung  $U_B$  mit positiven und negativen Amplituden verwendet, so können die jeweils auftretenden Spannungen und Ströme in den beiden sich einstellenden Arbeitspunkten AP abgelesen und die zugehörigen Leistungen ermittelt werden.

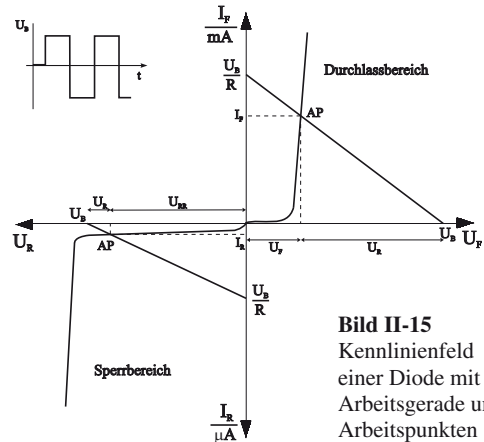


**Bild II-15**  
Kennlinienfeld einer Diode mit Arbeitsgerade und Arbeitspunkten

Die Schnittpunkte der Durchlass- und Sperrkennlinien mit den Widerstandsgeraden ergeben die sich einstellenden Arbeitspunkte bei leitender Diode (Schalter geschlossen) und gesperrter Diode (Schalter offen).

*Diodenschalter*

$$U_B = I_F \cdot R_L + U_F \quad (\text{Schalter geschlossen})$$

$$U_B = I_R \cdot R_L + U_R \quad (\text{Schalter offen})$$

Beim Arbeitspunkt in Durchlassrichtung fällt an der Diode die Durchlassspannung  $U_{FA}$  ab, während am Widerstand die Spannung ( $U_B - U_{FA}$ ) abfällt. Durch beide Bauelemente fließt der Strom  $I_{FA}$  (Durchlassstrom im Arbeitspunkt). Da auch in Sperrichtung ein geringer Strom (Sättigungsstrom, Reststrom) fließt, fällt auch am Widerstand in Sperrichtung eine minimale Spannung ab.

Wichtige Grenzdaten: maximale Sperrspannung  $U_{RRM}$ ; maximaler Durchlassstrom  $I_{FAVM}$ ; maximale Sperrschichttemperatur  $\vartheta_{Jmax}$ ; maximale Verlustleistung  $P_{tot}$ ; minimale Sperrverzögerungszeit  $t_{tr min}$

$$\text{Schaltleistung } P_S = I_F^2 \cdot R_L \leq I_{FAVM}^2 \cdot R_L \quad (\text{II.10})$$

Die Schaltleistung  $P_S$ , die mit einer Diode geschaltet werden kann, ist wesentlich größer als die zulässige Verlustleistung der Diode. Sie hängt praktisch nur von der Betriebsspannung ab.

### 4.3 Schottky-Dioden

Unter bestimmten Bedingungen stellt sich eine Gleichrichterwirkung auch zwischen einer n-dotierten Siliziumschicht und einer aufliegenden Metallektrode ein. Dieser Effekt wurde nach seinem Entdecker „Schottky-Effekt“ benannt. Weil die Elektronen im n-Silizium einen höheren Energiezustand haben als die Elektronen im Metall, wandern Elektronen aus dem n-Silizium in das Metall. Dadurch entsteht in der Grenzschicht eine Raumladungszone.

In Durchlassrichtung erreichen die frei beweglichen Elektronen des Siliziums eine so hohe Energie, dass sie aus der n-Zone in das Metall hineinwandern. Die frei beweglichen Elektronen des Metalls können dagegen bei Raumtemperatur das Metall nicht verlassen. Daher kann auch nach Umpolen der angelegten Spannung kein Elektronenfluss in dem Silizium-Kristall zustandekommen. Der Übergang vom Sperr- in den Durchlasszustand und umgekehrt erfolgt sehr schnell, da es praktisch keine Sperrschichtkapazität gibt, die von Ladungsträgern geräumt werden muss. Die Schaltzeiten von Schottky-Dioden sind daher sehr klein.

Darum werden Schottky-Dioden als integrierte Bauelemente in integrierten Schaltkreisen der Digital-elektronik (zum Beispiel Schottky-TTL in 74LSxx-Bausteinen) verwendet.

Schottky-Dioden werden auch als „Hot-Carrier-Dioden“ (engl. = heiße Ladungsträger-Diode) bezeichnet aufgrund des höheren Energiezustandes der Elektronen im Silizium im Vergleich zum Metall.

Wichtige Kennwerte: Einschaltverzögerungszeit  $t_{tr} \approx 50$  ps; Ausschaltverzögerungszeit  $t_{rr} \approx 100$  ps; Diodenkapazität  $C_D \approx 10$  pF; Sperrstrom  $I_R \approx 5$   $\mu$ A

### 4.4 Gleichrichter-Dioden

Gleichrichterioden lassen sich in Klein- und Leistungsgleichrichterioden unterteilen. Als Kleingleichrichterioden werden in der Regel Dioden mit höchst-

zulässigen Durchlassströmen von einigen mA bis zu etwa 5 A bezeichnet. Der Bereich der Leistungsgleichrichterioden erstreckt sich von etwa 5 A bis 2000 A.

Die Durchbruchspannung  $U_{R(BR)}$  eines normalen pn-Überganges liegt für sinnvolle Störstellenkonzentration von ca.  $10^{16} \text{ cm}^{-3}$  in der Größenordnung von einigen 10 V. Das reicht für Netzgleichrichter (mögliche Sperrspannungen bei einem 230 V-Netz liegen bei 650 V) nicht aus.

Deshalb sind für solche Gleichrichterioden andere Konstruktionen notwendig und zwar die pin-Struktur nach Bild II-16. Hierbei befindet sich zwischen zwei hochdotierten p- und n-Gebieten noch eine eigenleitende Schicht (i-Gebiet) oder eine schwach n-beziehungsweise p-leitende Schicht. Diese Zwischenschicht nimmt nun die gesamte Sperrspannung auf.

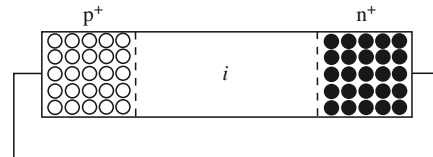


**Bild II-16** Schematische Darstellung einer pin-Diode

Bei einer pin-Diode ist die Feldstärke über die gesamte i-Schicht konstant. Damit ist die Sperrspannung  $U_R$  proportional zur Dicke  $d_i$  der i-Schicht. Reine i-Schichten sind in der Praxis nicht erreichbar, denn hier dürften absolut keine Störstellen enthalten sein. Leistungsgleichrichter werden deshalb als  $p^+nn^+$ -Diode oder  $p^+pn^+$ -Diode realisiert.

Die Durchbruchspannung  $U_{R(BR)}$  von  $p^+nn^+$ -Dioden in Abhängigkeit von der Dotierung und der Dicke  $d_n$  des n-dotierten Mittelgebietes zeigt das Diagramm nach Bild II-17. Heute werden Leistungsgleichrichterioden mit Durchbruchspannung in der Größe von 4800 V hergestellt.

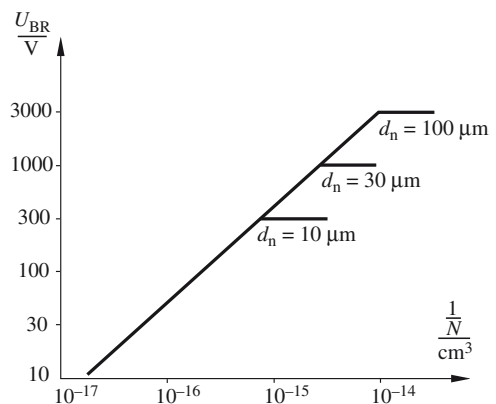


**Bild II-17** Durchbruchspannung in Abhängigkeit von der Dotierung und der Dicke des Mittelgebietes



## 4.5 Z-Dioden

Wird bei einer Si-Diode die Sperrspannung über den Wert  $U_{RRM}$  hinaus erhöht, steigt der Strom nach dem Überschreiten der Durchbruchspannung  $U_{R(BR)}$  plötzlich sehr stark an. Dioden, die in Sperrichtung einen sehr scharf einsetzenden, steilen Stromanstieg nach Bild II-18 besitzen, werden Z-Dioden genannt. Wegen ihrer charakteristischen Kennlinie im Sperrbereich (Bereich der Durchbruchspannung) kann die Z-Diode zur Stabilisierung oder Begrenzung von Gleichspannungen benutzt werden. Bei den Z-Dioden überlagern sich im Bereich der Durchbruchspannungen zwei unterschiedliche physikalische Effekte.

So tritt bei Z-Dioden mit einer Z-Spannung von  $U_Z < 5\text{ V}$  eine innere Feldemission auf, die als Zener-Effekt bezeichnet wird. Ein Durchbruch aufgrund des

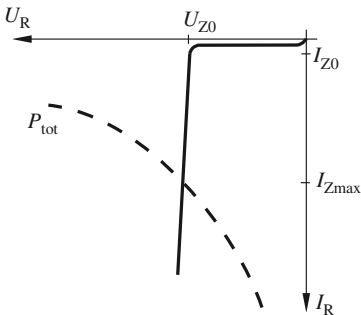


**Bild II-18** Charakteristische Kennlinie einer Z-Diode mit Arbeitsbereich

Zener-Effektes erfolgt, weil beim Überschreiten einer bestimmten Feldstärke beim Silizium Elektronen aus dem Gitterverband herausgelöst werden. Die dabei freiwerdenden Elektronen und Löcher erhöhen die Anzahl der freien Ladungsträger und damit die Leitfähigkeit der Diode. Dadurch steigt der Sperrstrom  $I_Z$  stark an.

Bei Z-Dioden mit etwa  $U_Z > 6\text{ V}$  erfolgt dagegen der Durchbruch aufgrund des Lawineneffektes (engl.: avalanche breakdown) und führt zu einem scharfen Abknicken der Kennlinie. Beim Lawinen-Effekt ist die Geschwindigkeit der vorhandenen beweglichen Ladungsträger infolge der hohen Feldstärke so groß, dass sie beim Aufprall auf Atome Elektronen und Löcher herauslösen, die als frei bewegliche Ladungsträger nun ihrerseits weitere Ladungsträger aus dem Atomverband ausschlagen. Weil der Sperrstrom  $I_Z$  dadurch sehr schnell anwächst, wird dieser Vorgang als Lawinendurchbruch bezeichnet.

Zwischen etwa  $5\text{ V} < U_Z < 6\text{ V}$  liegt ein Gebiet, in dem sich Zener-Effekt und Lawinen-Effekt überlagern.

Z-Dioden mit einer Durchbruchspannung  $U_Z < 5\text{ V}$  haben für die Durchbruchspannung einen negativen Temperaturkoeffizienten, weil eine Temperaturer-

höhung eine verstärkte Feldemission bewirkt. Bei Z-Dioden mit  $U_Z > 6\text{ V}$  wird mit zunehmender Temperatur die freie Weglänge der Ladungsträger kleiner. Um den gleichen Durchbruchstrom aufgrund des Lawineneffekts zu erzielen, sind bei größeren Temperaturen größere Sperrspannungen notwendig. Diese Z-Dioden haben einen positiven Temperaturkoeffizienten  $\alpha$ . Bei positiven Temperaturkoeffizienten verschiebt sich die Kennlinie zu höheren Z-Spannungen. Der höchstzulässige Sperrstrom  $I_{Zmax}$  ergibt sich nach Bild II-18 als Schnittpunkt der Leistungshyperbel  $P_{tot}$  mit der Sperrkennlinie der Z-Diode. Z-Dioden werden in einem Arbeitsbereich betrieben, der zwischen dem Stromwert  $I_{Zmax}$  und einem Wert  $I_Z$  liegt, der unmittelbar hinter dem scharfen Kennlinienbereich ist. Lieferbar sind Z-Dioden mit Z-Spannungen  $U_{Z0}$  zwischen  $2,4\text{ V}$  und einigen  $100\text{ V}$ . Da ihr Arbeitspunkt immer im Bereich der Durchbruchspannung liegt, muss zur Strombegrenzung unbedingt ein Vorwiderstand  $R_V$  nach Bild II-19 verwendet werden.

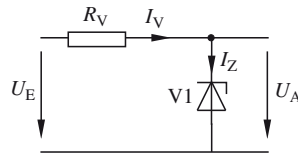


**Bild II-19**  
Z-Diode mit  
Vorwiderstand

Wichtig ist der differentielle Widerstand  $r_Z$  der Diode, der die Steilheit der Arbeitskennlinie beschreibt. Je kleiner dieser Widerstand ist, um so geringer ist die Spannungsänderung bei einer bestimmten Stromänderung. Der differentielle Widerstand  $r_Z$  liefert also eine Aussage über den Stabilisierungsgrad der Z-Diode. Er ist nicht völlig konstant, sondern hängt von der Temperatur, dem Z-Strom und der Z-Spannung nach Bild II-20 ab.

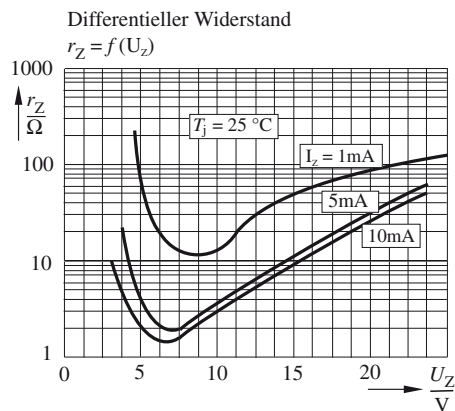


**Bild II-20** Differentieller Widerstand  $r_Z$

Die für eine Z-Diode in den Datenblättern angegebene Z-Spannung gilt oft für einen Strom  $I_Z = 5\text{ mA}$ . Die Abstufung zwischen den Spannungen entspricht häufig der E-24-Reihe. Um die Toleranzen der an-

gegebenen Z-Spannungen zu kennzeichnen, wird an die Typenbezeichnung des Grundtyps der Kennbuchstabe der Güteklasse angehängt.

Wichtige Grenzdaten: max. Sperrschichttemperatur  $\vartheta_{J\max}$ ; maximale Verlustleistung  $P_{\text{tot}}$ ; maximaler Durchlassstrom  $I_{\text{FAVM}}$ ; Wärmewiderstand  $R_{\text{thJU}}$   
Wichtige Kenndaten: Nennspannung  $U_{\text{ZO}}$  bei  $I_Z = 5\text{ mA}$ ; differentieller Widerstand  $r_z$  bei  $I_Z = 5\text{ mA}$ ,  $1\text{ mA}$

5 Anwendungsschaltungen

Dioden sind in vielen Funktionen und Leistungskategorien einsetzbar. Ihre Anwendung in der Nachrichtentechnik unterliegt anderen Gesichtspunkten als in der Leistungselektronik oder Digitaltechnik.

5.1 Begrenzerschaltungen

Ein Einsatzgebiet der Diode als Schalter sind Begrenzerschaltungen. Das sind Schaltungen, die Spannungsamplituden oberhalb oder unterhalb eines bestimmten positiven oder negativen Pegels durchlassen oder unterdrücken.  
Im Bereich der Digitaltechnik müssen sowohl Störspannungsspitzen unterdrückt wie auch das Rauschen bei Signalen herausgefiltert werden. Diodenschalter wie Differenzier- und Integrierglieder lassen sich auch zur Impulsformung einsetzen.  
Begrenzerschaltungen werden auch zur Unterdrückung von Störspannungsspitzen in der Signaltechnik eingesetzt, aber auch zur Trennung der einzelnen Amplitudenhöhen eines Fernseh-BAS-Signals benutzt.

Die sinusförmige Eingangsspannung  $u_e$  ist so klein, dass die Diodenschwellspannung  $U_D$  nicht vernachlässigbar klein ist. Bild II-21 zeigt eine Begrenzerschaltung, bei der die Ausgangsspannung  $u_a$  in Durchlassrichtung auf die Schwellspannung beschränkt ist. In Sperrichtung liegt allerdings die Spannung  $u_e$  in voller Größe, also mit dem Scheitelwert, an. Die Schaltung dient zum Begrenzen positiver Spannungswerte auf den Wert der Diodenschwellspannung  $U_D$ , bei Reihenschaltung mehrerer Dioden auf die entsprechende höhere Spannungssumme.

In der Schaltung nach Bild II-22 sind Diode V1 und Widerstand  $R$  gegenüber Bild II-21 getauscht. Die Ausgangsspannung  $u_a$  ist gleich Null, solange die Diode noch gesperrt ist, so dass kein Strom fließt. Überschreitet die Eingangsspannung  $u_e$  den Wert der Diodenschwellspannung  $U_D$ , so fließt ein sinusförmiger Strom durch den Widerstand  $R$  und lässt eine proportionale Spannung abfallen. Bei kleinen Amplituden von  $u_e$  setzt der Stromfluss und damit die Ausgangsspannung  $u_a$  deutlich später als die Eingangsspannung ein. Da bei negativer Eingangsspannung  $u_e$  die Diode sperrt, ist die Ausgangsspannung  $u_a$  in der Zeit gleich Null.

Statt einer Diode sind in der Schaltung nach Bild II-23 mehrere in Reihe geschaltete Dioden V1 bis V4 eingesetzt, so dass außer der negativen Amplitude auch ein erheblicher Anteil (hier  $4 \cdot 0,7\text{ V}$ ) der positiven Spannungswerte unterdrückt wird.

Bild II-24 zeigt eine Schaltung, die sowohl positive als auch negative Eingangssignale  $u_e$  am Ausgang begrenzt. Die Ausgangsspannung  $u_a$  wird hier durch die antiparallele Reihenschaltung von jeweils 2 Dioden (V1, V2 und V3, V4) auf die doppelte Diodenschwellspannung  $U_D$  begrenzt.

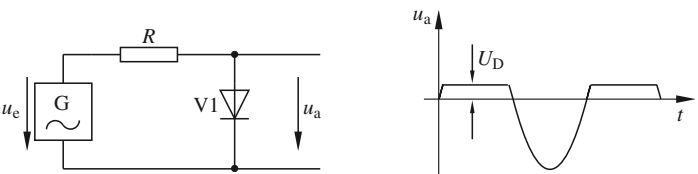


Bild II-21  
Spannungsbegrenzung auf die Diodenschwellspannung  $U_D$  und zugehöriges Liniendiagramm

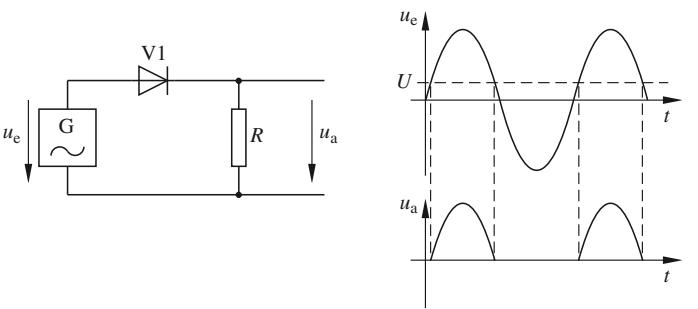
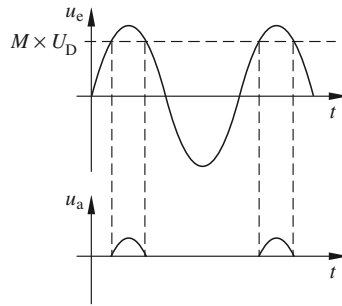
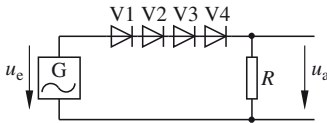
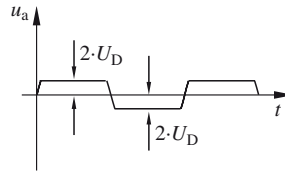
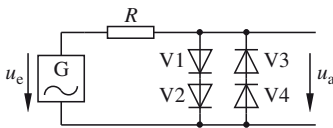


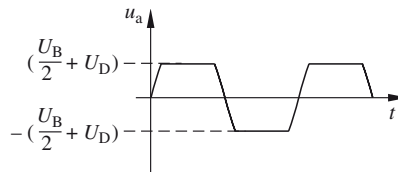
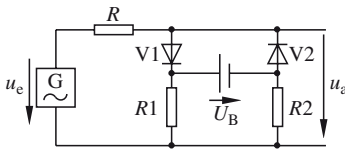
Bild II-22  
Schaltung zur Restspannungsunterdrückung und zugehöriges Liniendiagramm

**Bild II-23**

Begrenzerschaltung mit zugehörigem Liniendiagramm

**Bild II-24**

Schaltung zur Begrenzung positiver und negativer Eingangssignale

**Bild II-25**

Schaltung mit einstellbarem Begrenzungspegel der positiven und negativen Ausgangsspannung mit zugehörigem Liniendiagramm

Mit Hilfe der Schaltung nach Bild II-25 wird der Begrenzungspegel der Ausgangsspannung einstellbar gemacht. Die Spannung  $U_B$  wird durch die Widerstände  $R1$  in zwei gleiche Teile aufgeteilt. Diese Teilspannungen spannen die Dioden  $V1$  und  $V2$  in Sperrichtung vor, so dass immer dann eine der beiden Dioden durchlässig wird, wenn die Eingangsspannung  $u_e$  in positiver oder negativer Richtung den Wert  $U_B/2 + U_D$  überschreitet. Ist die Spannung  $U_B$  einstellbar, kann der Begrenzungspegel variiert werden.

Bild II-26 zeigt eine Begrenzerschaltung, bei der die Diode  $V1$  durch die Gleichspannungsquelle  $U_B$  in Sperrichtung vorgespannt ist. Solange sie gesperrt ist, hat sie den größten Widerstand im Generator- und Batteriestromkreis. Die Diode wird leitend, sobald ihre Anode um den Betrag der Schwellspannung positiver ist als die Kathode. Dies ist der Fall, wenn die Eingangsspannung  $u_e$  mindestens einen positiven Wert von  $U_B + U_D$  hat. Steigt  $u_e$  weiter an, bleibt die Ausgangsspannung  $u_a$  auf diesen Wert begrenzt.

## 5.2 Gleichrichter

Haupteinsatzgebiet der Klein- und Leistungsgleichrichterdiode ist die Gleichrichtung niederfrequenter Wechselspannungen, insbesondere von Netzspannungen.

Im allgemeinen benötigen elektronische Schaltungen als Energieversorgung eine oder mehrere Gleichspannungsquellen. Bei höherem Energiebedarf ist die Verwendung von Batterien unwirtschaftlich. Darum erfolgt eine Speisung aus dem Wechselspannungsnetz (AC). Hierbei ist neben einer Abwärtstransformation auch eine Gleichrichtung der Wechselspannung zu Gleichspannung (DC) erforderlich. Halbleiterdioden sind hierfür wegen ihrer kleinen Durchlassspannung, ihrer hohen Belastbarkeit und ihres großen Verhältnisses zwischen Sperrwiderstand und Durchlasswiderstand sehr gut geeignet.

### 5.2.1 Einweggleichrichter (M1)

Bei der in Bild II-27 dargestellten Schaltung ist die Diode nur während der positiven Halbwellen der AC leitend. Die Schwellspannung  $U_D$  der Diode  $V1$  sei vernachlässigbar klein gegenüber der Spitzenspannung  $U_{S1}$  der vom Transformator gelieferten Spannung  $U_1$  ( $= U_{RMS}$ ).

Daher fließt auch nur während dieser Zeitdauer ein Strom  $I_D$  durch den Lastwiderstand  $R_L$ . An diesem Widerstand kann aber nur dann eine Spannung auftreten, wenn ein Strom fließt. Der Spannungsverlauf am Lastwiderstand entspricht also einer pulsierenden DC, die nur aus positiven sinusförmigen Halbwellen besteht.



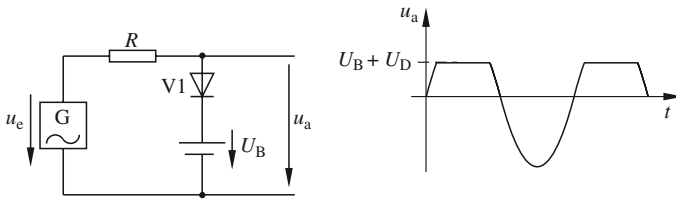


**Bild II-26**

Schaltung mit einstellbarem Begrenzungspegel der positiven Ausgangsspannung und zugehörigem Liniendiagramm

Während der negativen Halbwelle liegt die Diode in Sperrichtung an dem Spitzenwert  $U_{S1}$  der AC, das heißt, die Diode muss für  $U_{S1} = U_{RRM} = (\sqrt{2} \cdot U_1)$  geeignet sein.

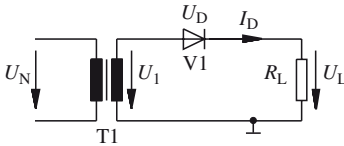


**Bild II-27** Einweggleichrichterschaltung (M1) mit ohmscher Last

Die am Lastwiderstand  $R_L$  auftretende Spannung  $U_L$  ist nach Bild II-28 eine pulsierende Gleichspannung (DC). Wird sie mit einem Gleichspannungs-Messinstrument (Drehspulinstrument) gemessen, bildet dieses den arithmetischen Mittelwert  $U_{AVL}$  beziehungsweise den arithmetischen Mittelwert  $I_{AVL}$  aus der pulsierenden DC. Wird sie dagegen mit einem Dreheiseninstrument gemessen, bildet dieses den quadratischer Mittelwert (Effektivwert)  $U_{RMSL}$  aus der pulsierenden DC.

Während der positiven Halbwelle der Trafospannung ist die Diode jeweils leitend, und es fließt durch die Diode ein periodischer Spitzendurchlassstrom

$$I_{FRM} = (\sqrt{2} \cdot I_D).$$

Auswahlkriterien:

$U_{RRM}$  periodische Spitzensperrspannung

$I_{FRM}$  periodischer Spitzendurchlassstrom

Die Ausgangsspannung  $U_L$  einer Einweggleichrichterschaltung pulsiert so stark, dass sie zur Energieversorgung von elektronischen Geräten nicht geeignet ist. Teilweise Abhilfe schafft die Schaltung nach Bild II-29.

Der Ladekondensator  $C_L$  wirkt in dieser Schaltung als Speicher, der jeweils in der positiven Halbwelle aufgeladen wird. Durch die Diode V1 fließt dann gleichzeitig der Ladestrom  $I_C$  für den Kondensator  $C_L$  und der Laststrom  $I_L$ . In den negativen Halbwellen, in denen die Diode sperrt, entlädt sich der Kondensator über den Lastwiderstand, so dass dieser auch in den Sperrzeiten der Diode von einem Strom durchflossen wird. Auf diese Art wird die pulsierende DC geglättet.

Im Bild II-30 sind die Strom- und Spannungsverläufe für verschiedene Fälle dargestellt.

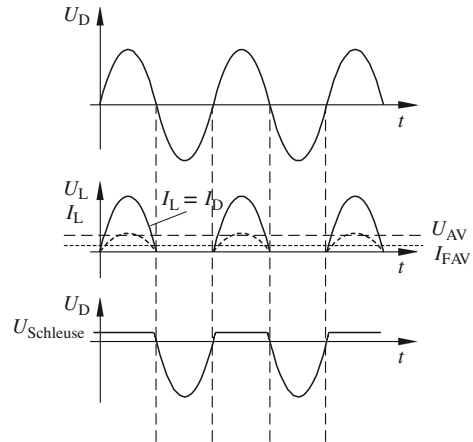


**Bild II-28** Ausgangsspannung der Einweggleichrichterschaltung nach Bild II-27

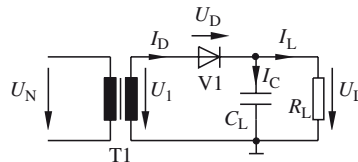


**Bild II-29** Einweggleichrichterschaltung (M1) mit ohmscher Last und Ladekondensator

Wie gut der Ladekondensator  $C_L$  diese Glättung bewirkt, hängt hauptsächlich von zwei Bedingungen ab:

1. Kapazität des Ladekondensators: Je kleiner seine Kapazität  $C_L$  ist, desto stärker entlädt er sich in der negativen Halbwelle. Damit wird die Welligkeit größer und der arithmetische Mittelwert  $U_{AVL}$  kleiner.
2. Größe des Lastwiderstandes  $R_L$ : Je hochohmiger der Lastwiderstand  $R_L$  ist, umso geringer ist der Strom, den er in den negativen Halbwellen aus dem Ladekondensator  $C_L$  zieht, das heißt, desto weniger wird der Ladekondensator entladen.

Die Größe der mittleren Ausgangsgleichspannung  $U_{AVL}$ , aber auch die ihr überlagerte Brummspannung  $U_{Br}$ , ist sehr stark abhängig von der Kapazität des Ladekondensators und vom Laststrom. Die folgende Tabelle II-2 gilt unter der Voraussetzung, dass der Kondensator eine Kapazität von  $1 \mu F$  je  $1 \text{ mA}$  Laststrom hat.

**Tabelle II-2** Charakteristische Werte und Faktoren für einfache Gleichrichterschaltungen

| Schaltungsart                    | M1                             | M2                             | B2                            |
|----------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|
| Leerlaufspannung $U_{AVL}$       | $(\sqrt{2} \cdot U_1)$         | $(\sqrt{2} \cdot U_1)$         | $(\sqrt{2} \cdot U_1)$        |
| Ausgangsgleichspannung $U_{AV2}$ | $1,2 \cdot U_1$                | $1,3 \cdot U_1$                | $1,3 \cdot U_1$               |
| Durchlassstrom $I_{FAVM}$        | $I_L$                          | $0,5 \cdot I_L$                | $0,5 \cdot I_L$               |
| max. Sperrspannung $U_{RRM}$     | $2 \cdot (\sqrt{2} \cdot U_1)$ | $2 \cdot (\sqrt{2} \cdot U_1)$ | $(\sqrt{2} \cdot U_1)$        |
| Faktor $k$ ( $U_{Br}$ )          | $4,8 \cdot 10^{-3} \text{ s}$  | $1,8 \cdot 10^{-3} \text{ s}$  | $1,8 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ |
| Faktor $k$ ( $U_{Brss}$ )        | $14 \cdot 10^{-3} \text{ s}$   | $5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$    | $5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$   |
| Frequenz $f_{Br}$                | 50 Hz                          | 100 Hz                         | 100 Hz                        |

Unter der oben genannten Bedingung kann für die Ausgangsgleichspannung  $U_{AVL}$  mit hinreichender Genauigkeit nach Tabelle II-2  $U_{AVL} \approx 1,2 \cdot U_1$  angenommen werden.

Bei  $R_L = \infty \Omega$  wird während der negativen Halbwellen kein Strom aus dem Kondensator gezogen, so dass für die Leerlauf-Ausgangsgleichspannung gilt

$$U_{AVL} = \sqrt{2} \cdot U_1 - U_D = U_{S1} - U_D$$

Für große Werte von  $U_1$  kann die Spannung  $U_D$  vernachlässigt werden.

In einer Einweggleichrichterschaltung mit Ladekondensator ist die Diode nicht mehr während einer gesamten Halbwelle, sondern nach Bild II-30 nur noch während eines kurzen Zeitabschnittes leitend. Dieser Zeitabschnitt hängt von den Augenblickswerten der Spannungsdifferenz zwischen Kathode und Anode ab.

Die Nachladung des Ladekondensators beginnt jeweils während der positiven Halbwelle der Trafo-Spannung zu dem Zeitpunkt, in dem die Spannung an der Anode um etwa 0,6 V größer wird als die Spannung an der Kathode. Die Nachladung wird beendet, sobald die Spannung an der Anode wieder unter die Spannung an der Kathode, also unter die Kondensatorspannung, abgesunken ist.

Da hier in sehr kurzer Zeit eine große Energie nachgeladen werden muss, ist der Ladestrom erheblich größer als der entnommene Gleichstrom. Darum geben die Hersteller in den Datenblättern oft einen Höchstwert für den Ladekondensator an.

Die maximal mögliche Sperrspannung im Leerlauf ist  $U_{RRM} = 2 \cdot (\sqrt{2} \cdot U_1)$  nach Tabelle II-2, da der Ladekondensator dann auf  $+U_{S1}$  aufgeladen ist, jedoch der negative Spitzenwert der Eingangsspannung  $U_1$  den Wert  $-U_{S1}$  hat. Bild II-30 zeigt diesen Umstand im unteren Teil auf.

Wegen der fortlaufenden Auf- und Entladung des Kondensators ist der mittleren Ausgangsgleichspannung  $U_{AV2}$  immer noch eine Wechselspannung (Restwelligkeit) überlagert, die nichtsinusförmig ist, aber

eine Frequenz  $f = 50 \text{ Hz}$  hat, wenn die Gleichrichterschaltung mit Netzfrequenz betrieben wird. Diese überlagerte Wechselspannung wird als *Brummspannung*  $U_{Br}$  bezeichnet, da sie zum Beispiel in einem Lautsprecher als tiefes Brummen gut hörbar ist.

Die am Ladekondensator abfallende Brummspannung lässt sich mit den in Tabelle II-2 angegebenen  $K$ -Faktoren hinreichend genau berechnen.

$$\text{Brummspannung } U_{Br} = K \cdot \frac{I_L}{C_L} \quad (\text{II.11})$$

$$\text{periodischer Spitzenstrom } I_{FRM} \leq \frac{U_{AVL}}{\sqrt{R_i \cdot R_L}} \quad (\text{II.12})$$

Der Wert der Brummspannung hängt also im wesentlichen von der Kapazität des Ladekondensators, der Größe des Laststroms und einer schaltungsspezifischen Konstanten ab.

$$\text{Einschaltspitzenstrom } I_{FRME} \leq \frac{U_{S1}}{R_i} \quad (\text{II.13})$$

Der periodische Spitzenstrom  $I_{FRM}$  lässt sich nach Gleichung II.12 berechnen, der Einschaltspitzenstrom  $I_{FRME}$  nach Gleichung II.13.

### 5.2.2 Mittelpunktsschaltung (M2)

Um die Höhe der Brummspannung grundsätzlich zu verkleinern, werden nach Bild II-31 zwei Einweggleichrichter zu einer Mittelpunktgleichrichterschaltung zusammengefasst. Für einen solchen Zweiweggleichrichter wird ein Transformator mit einer Mittelanzapfung benötigt, die auf Masse gelegt wird und als Bezugspunkt dient.

Eine Analyse der Schaltung ergibt, dass die Diode D1 für die Dauer der positiven Halbwelle der Spannung  $U_1$  leitend ist, während die Diode D2 gesperrt ist. In der negativen Halbwelle verhalten sich die Dioden umgekehrt. Jede Diode wird aber nur noch mit einem Diodenstrom  $I_D$  belastet, der dem halben Laststrom  $I_L$  entspricht.

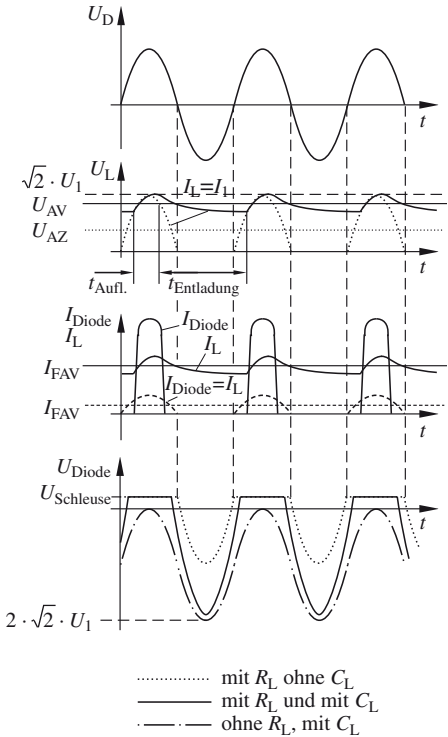


**Bild II-30** Strom- und Spannungsverlauf für verschiedene Werte von  $R_L$  und  $C_L$

Dies führt dazu, dass sowohl in der positiven als auch in der negativen Halbwelle ein Strom durch den Lastwiderstand  $R_L$  fließt. Da das in derselben Richtung geschieht, muss von DC gesprochen werden.

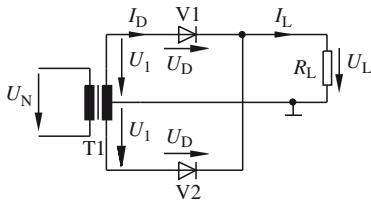


**Bild II-31** Mittelpunktleiterschaltung (M2) mit ohmscher Last

Die am  $R_L$  abfallende Spannung  $U_2$  besteht nach Bild II-32 nur aus positiven sinusförmigen Halbwellen mit einer Frequenz  $f = 100 \text{ Hz}$ , das heißt, die negativen sinusförmigen Halbwellen werden einfach „nach oben“ geklappt. Genau wie bei einem Einweggleichrichter kann auch hier nach der Schaltung in Bild II-33 ein Ladekondensator parallel zum Lastwiderstand geschaltet werden, der die pulsierende DC entsprechend Bild II-32 weiter glättet.

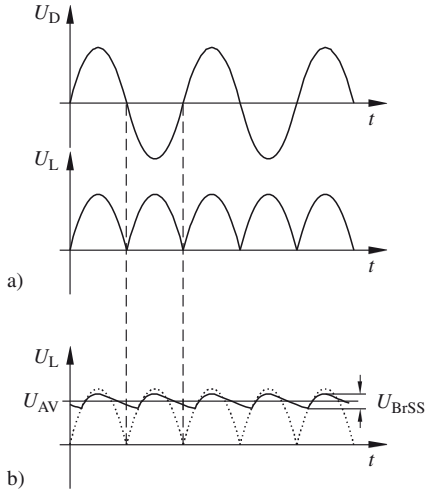


**Bild II-32** Ausgangsspannung einer M2-Schaltung mit/ohne Ladekondensator

Die Mittelpunktschaltung wird nur noch in Ausnahmefällen eingesetzt. Ein Transformator mit Mittelanzapfung ist teuer und hat wegen der zweiten Sekundärwicklung ein größeres Gewicht.

### 5.2.3 Brückengleichrichterschaltung (B2)

Die am häufigsten verwendete Gleichrichterschaltung ist die Brückenschaltung. Sie kommt mit einem normalen Transformator aus, benötigt aber vier Dioden.

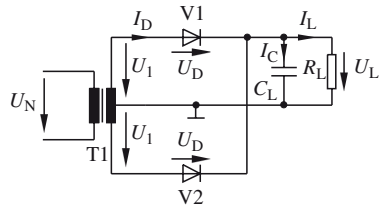


**Bild II-33** Mittelpunktleiterschaltung mit ohmscher Last und Ladekondensator

In der Schaltung nach Bild II-34 kann man bei angemessener Polarität der Spannung  $U_1$  den Strom  $I_L$  in seinem Flussverlauf verfolgen und so erkennen, dass der Laststrom  $I_L$ , der sich aus der Summe der beiden

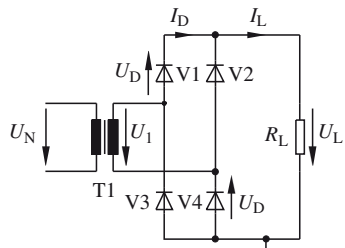


**Bild II-34** Brückengleichrichterschaltung (B2) mit ohmscher Last

**Tabelle II-3** Technische Daten der Baureihe B40C... Blockgleichrichter

| Typ           | $U_1$ | $I_{FRM}$   | Strombegrenzungswiderstand $R_i$ | $C_{Lmax}$    |
|---------------|-------|-------------|----------------------------------|---------------|
| B40C800       | 40 V  | 0,8 A       | 1 $\Omega$                       | 2500 $\mu F$  |
| B40C1000      | 40 V  | 1,0 A       | 1 $\Omega$                       | 2500 $\mu F$  |
| B40C1500/1000 | 40 V  | 1,5 A       | 1 $\Omega$                       | 2500 $\mu F$  |
| B40C3200/2200 | 40 V  | 3,2 A/2,2 A | 0,6 $\Omega$                     | 5000 $\mu F$  |
| B40C5000/3300 | 40 V  | 5,0 A/3,3 A | 0,5 $\Omega$                     | 10000 $\mu F$ |

Diodenströme  $I_D$  bildet, stets in der gleichen Richtung durch den Lastwiderstand  $R_L$  fließt. Der Spannungsabfall am Lastwiderstand ist also eine pulsierende DC, die nur aus positiven sinusförmigen Halbwellen besteht und eine Frequenz  $f = 100$  Hz hat. Die Ausgangsgrößen dieser Schaltung sind identisch mit denen der Mittelpunktschaltung.

Die pulsierende DC wird nach Bild II-35 durch die Parallelschaltung eines Ladekondensators  $C_L$  zum Lastwiderstand  $R_L$  geglättet. Bezüglich der Auflade- und Entladevorgänge ergeben sich ähnliche Verhältnisse wie bei der Mittelpunktschaltung. Die Auf- und Entladung des Kondensators erfolgt bei der Brückenschaltung in jeder Halbwelle. Auch bei der Brückengleichrichterschaltung mit Ladekondensator hat die Ausgangsspannung noch eine Restwelligkeit. Entsprechende Werte können der Tabelle II-2 entnommen werden. Um den Aufbau von Gleichrichterschaltungen zu vereinfachen, bieten die Hersteller komplette Gleichrichtersätze in einem Kunststoff- oder Metallgehäuse an. Lieferbar sind verschiedene Baureihen. Der Einsatzbereich kann bei diesen Baureihen von Brückengleichrichtern direkt aus der Typenbezeichnung abgelesen werden.

So bedeutet B = Brückenschaltung. Der Buchstabe C bedeutet, dass der Gleichrichter für eine kapazitive Last, das heißt, für den Betrieb mit einem Ladekondensator vorgesehen ist. Bei Doppelwerten des Laststroms gilt der erste Wert für eine Chassismontage des Gleichrichters, der zweite Wert für eine freistehende Montage.

Um die Brummspannung am Ausgang der oben beschriebenen Schaltungen zu senken, schaltet man

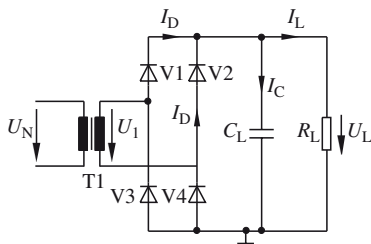


**Bild II-35** Brückengleichrichterschaltung (B2) mit ohmscher Last und Ladekondensator

an den Ausgang der Schaltung nach Bild II-35 einen Filter.

Der in die Schaltung nach Bild II-36 integrierte RC-Tiefpass reduziert die Brummspannung um den Glättungsfaktor  $g$ .

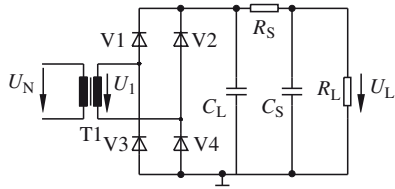


**Bild II-36** B2-Schaltung mit RC-Siebglied

Der Kondensator in der RC-Tiefpass-Filterschaltung nach Bild II-37 stellt für höhere Frequenzen einen Kurzschluss beziehungsweise einen sehr geringen kapazitiven Blindwiderstand dar. Die Schaltung kann als Spannungsteiler mit  $U_{Br2}$  als Ausgangsspannung betrachtet werden.

Glättungsfaktor

$$g = \frac{U_{Br1}}{U_{Br2}} = \sqrt{\omega_{Br}^2 \cdot R_S^2 \cdot C_S^2 + 1} \quad (II.14)$$

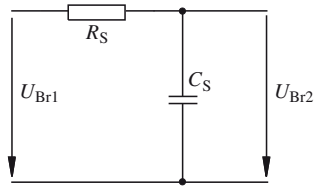


**Bild II-37**  
Schaltung eines RC-Siebgliedes

Der RC-Filter nach Bild II-37 kann auch durch einen LC-Filter nach Bild II-38 ersetzt werden mit dem Vorteil einer effektiveren Filterung und geringen ohmschen Verlusten.

$$g = \sqrt{\omega_{Br}^4 \cdot L_S^2 \cdot C_S^2 + 1} \quad (II.15)$$

Ein Filter mit der Schaltung nach Bild II-19 hat zusätzlich den Vorteil, dass auch eine Stabilisierung der Ausgangsspannung vorgenommen wird, wenn

vorausgesetzt werden kann, dass die Brummspannung kleine Amplituden aufweist.

$$\text{Glättungsfaktor } g = 1 + \frac{R_V}{r_Z} \quad (\text{II.16})$$

Wird mit einem Zwei-Kanal-Oszilloskop die Wechselspannung über dem Ladekondensator  $C_L$  und dem Siebkondensator  $C_S$  (Bild II-36) gemessen, also die Spannung  $U_L$  am Ausgang der Schaltung, so zeigen nach Bild II-39 beide Spannungen deutliches Einschwingverhalten.

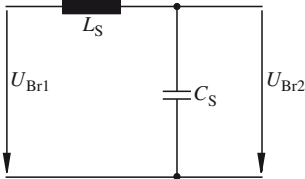


**Bild II-38**  
Schaltung eines LC-Siebgliedes

Schaltungsdaten: Spannung  $U_{S1} = 12 \text{ V}$ , Ladekondensator  $C_L = 10 \mu\text{F}$ , Siebwiderstand  $R_S = 160 \Omega$ , Siebkondensator  $C_S = 50 \mu\text{F}$ , Lastwiderstand  $R_L = 1 \text{ k}\Omega$

Nach ungefähr 100 ms befindet sich die Schaltung im „stationären Zustand“, die Schaltung ist eingeschungen, und es zeigt sich am Ausgang eine Gleichspannung  $U_{AVL} = 8 \text{ V}$ , die von einer geringen Brummspannung überlagert ist.

### 5.3 Spannungsvervielfacher

Zum Betrieb von Oszilloskopen und Bildröhren oder Geiger-Müller-Zählrohren werden Gleichspannungen benötigt, die erheblich größer als die Netzspannungen sind und damit bereits im Bereich der Hochspannung liegen.

Da diese Spannungsquellen nur sehr kleine Lastströme liefern müssen, ist es meist günstiger, keine speziellen Hochspannungstransformatoren einzusetzen, sondern die hohen Gleichspannungen mit Hilfe von Spannungsverdoppler- oder Spannungsvervielfacherschaltungen zu erzeugen.

Die Delon-Schaltung besteht aus zwei Einwegschaltungen, die nach Bild II-40 zusammengeschaltet sind. Je nach Polarität der Spannung  $U_1$  ist entweder die Diode  $V_1$  oder die Diode  $V_2$  in Durchlassrichtung geschaltet. Infolgedessen werden die Kondensatoren  $C_1$  und  $C_2$  mit der angegebenen Polarität geladen. Die Ladespannungen beider Kondensatoren liegen in Reihe, so dass sie sich zur Gesamtspannung  $U_2 = U_{AV2}$  (im unbelasteten Zustand) addieren.

$$\text{Gesamtspannung } U_{AV2} = U_{C1} + U_{C2} = 2 \cdot U_{S1} \quad (\text{II.17})$$

Diese Schaltung ist also eine Spannungsverdopplerschaltung im Leerlaufbetrieb.

Bild II-41 stellt eine Villard-Schaltung dar. Bei entsprechender Polarität der Spannung  $U_1$  liegt die Diode  $V_1$  in Durchlassrichtung und lädt den Kondensator  $C_1$  in der eingezeichneten Polarität auf den Wert

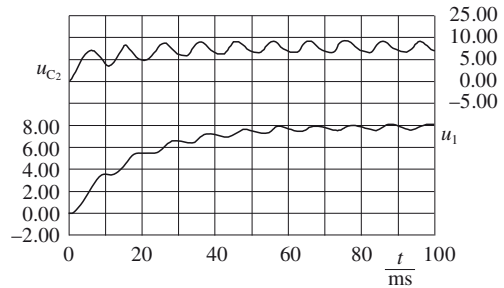
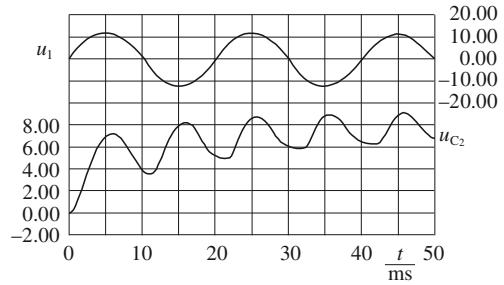


**Bild II-39** Einschwingverhalten einer B2-Gleichrichterschaltung mit Ladekondensator und RC-Siebglied

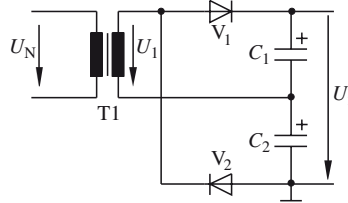


**Bild II-40** Spannungsverdopplerschaltung (Delon-Schaltung)

$U_{C1} = U_{S1}$ . In der nächsten Halbwelle liegt die Diode  $V_1$  in Sperrrichtung. An  $V_1$  liegt dann die Summe aus  $U_{S1} + U_{C1} = 2 \cdot U_{S1}$  als Sperrspannung an. Diese Spannung ist jetzt die Speisespannung für die zweite Gleichrichterstufe. Über  $V_2$  wird der Kondensator  $C_2$  dann auf die Spannung  $2 \cdot U_{S1}$  aufgeladen.

Die Dioden müssen eine periodische Spitzensperrspannung  $U_{RRM} = 2 \cdot U_{S1}$  in beiden Schaltungen ermöglichen, während der Strom  $I_{FM} = I_L$  beträgt. Beiden Schaltungen können nur kleine Lastströme entnommen werden. Die Belastung der Schaltungen erfolgt in der Praxis so, dass die Ausgangsspannung minimal sinkt.

*maximale Ausgangsgleichspannung*

$$U_{AV2} \sim 0,8 \dots 0,9 \cdot (2 \cdot U_{S1}) \quad (\text{II.18})$$

Die Villard-Schaltung lässt sich zur Vervielfacherschaltung erweitern. Werden nach Bild II-42 zwei oder mehr Villard-Schaltungen hintereinander geschaltet (hier drei Villard-Schaltungen), so entsteht eine Hochspannungskaskadenschaltung. Für die Ausgangsspannung  $U_2$  einer unbelasteten Kaskadenschaltung

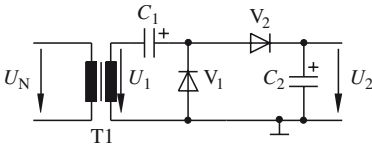


**Bild II-41** Spannungsverdopplerschaltung (Villard-Schaltung)

tung gilt Gleichung II.17, wobei  $n$  die Anzahl der aneinandergereihten Villard-Schaltungen bedeutet.

*maximale Ausgangsgleichspannung*

$$U_{AV2} \approx n \cdot 2 \cdot U_{S1} \quad (\text{II.19})$$

Die Dioden müssen eine periodische Spitzenspannung  $U_{RRM} = 2 \cdot U_{S1}$  ermöglichen, während der Strom  $I_{FM} = n \cdot I_L$  beträgt. Es sind nur geringe Lastströme möglich. Kaskadenschaltungen mit vielen Stufen zeigen deutlich ein Hochlaufen der Ausgangsspannung, weil die einzelnen Kondensatoren nacheinander aufgeladen und die Ladungen von einem Kondensator auf den nächsten verschoben werden.

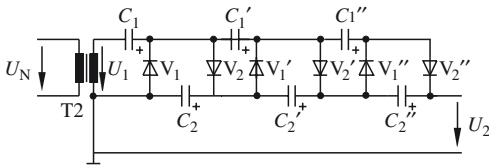


**Bild II-42** Spannungsvervielfacherschaltung nach Villard

## 5.4 Diode als Konstantspannungsquelle (Z-Diode)

Bild II-43 zeigt die Grundsaltung für die Spannungsstabilisierung mit Hilfe einer Z-Diode. Als stabilisierte Ausgangsspannung  $U_A$  tritt die an der Z-Diode liegende Spannung  $U_Z$  auf. Im zulässigen Arbeitsbereich bleibt sie sowohl bei einer Änderung der Eingangsspannung  $U_E$  als auch bei einer Änderung des Laststroms  $I_A$  nahezu konstant ( $I_V = I_Z + I_A = \text{const}$ ). Dieses kann aber nur eintreten, wenn der Diodenstrom  $I_Z$  jeweils um den gleichen Betrag kleiner wird wie der Laststrom  $I_A$  größer. Der Arbeitspunkt der Z-Diode wandert daher nach Bild II-44a auf der Kennlinie in Richtung auf A2.

Infolge der steilen Kennlinie der Z-Diode ändert sich die Ausgangsspannung  $U_A$  nur um einen kleinen Betrag, dass heißt,  $U_Z$  bleibt nahezu konstant, wenn sich der Laststrom  $I_A$  ändert. Wird dabei jedoch  $I_Z < I_{Z\min}$ , so wandert der Arbeitspunkt in den waagerechten Bereich der Kennlinie, so dass sich  $U_A$  sehr stark ändert, dass heißt, die stabilisierende Wirkung der Z-Diode ist beendet ( $I_{Z\min} \approx 0,1 \cdot I_{Z\max}$ ,  $I_{A\max} \approx 0,9 \cdot I_{Z\max}$ ).

Ändert sich die Eingangsspannung  $U_E$  um den Betrag  $\pm \Delta U_E$  bei konstantem Laststrom  $I_A$  nach Bild II-44b,

so verschiebt sich der Arbeitspunkt A0 aufgrund der Parallelverschiebung der Arbeitsgeraden nach A1 oder A2, je nachdem, ob es sich um eine Spannungserhöhung oder -minderung handelt. Aufgrund der steilen Kennlinie ändert sich  $U_Z$  deutlich weniger als  $U_E$ , so dass die Ausgangsspannung  $U_A = U_Z$  nahezu gleich bleibt ( $U_E \approx 2 \dots 4 \cdot U_A$ ,  $U_{E\min} \approx 1,2 \dots 2 \cdot U_A$ ).

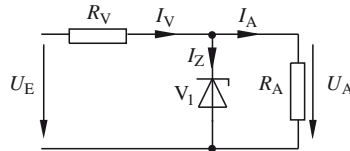


**Bild II-43** Grundsaltung einer Spannungsstabilisierung mit Z-Diode

Beim praktischen Einsatz der Stabilisierungsschaltung nach Bild II-43 überlagern sich beide Fälle, so dass eine exakte Trennung kaum noch möglich ist. Der gewählte Vorwiderstand  $R_V$  muss beiden Erwartungen gerecht werden. Er lässt sich näherungsweise mit der Gleichung II.18 berechnen. Zu verwenden ist dann ein Widerstandswert nach der E-Reihe, der zwischen den beiden Werten, aber näher an  $R_{V\max}$  liegt.

*Vorwiderstand*

$$R_{V\min} \approx \frac{U_{E\max} - U_Z}{I_{Z\max} + I_{A\min}} \quad R_{V\max} \approx \frac{U_{E\min} - U_Z}{I_{Z\min} + I_{A\max}} \quad (\text{II.20})$$

Die Stabilisierung wird bei einer vorgegebenen Z-Diode um so besser, je größer die Eingangsspannung gewählt wird. Die Verlustleistung am Vorwiderstand  $R_V$  nimmt allerdings schneller zu als der relative Stabilisierungsfaktor  $S$ .

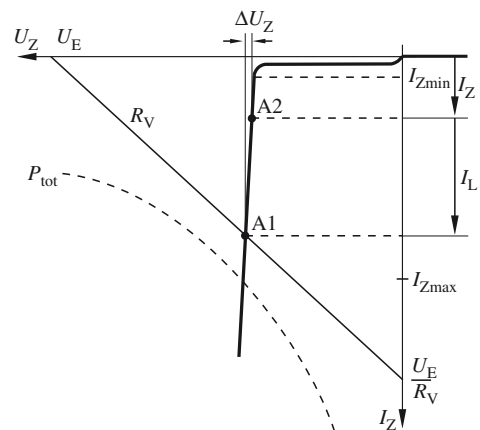


**Bild II-44** Ermittlung der Arbeitspunktverschiebung  
a) konstante Eingangsspannung und variable Last  
b) konstante Last und schwankende Eingangsspannung

Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, das Verhältnis der Relativwerte der Schwankungen von Eingangs- und Ausgangsspannung als Stabilisierungsfaktor  $S$  einzuführen.

Stabilisierungsfaktor

$$S = \frac{\frac{\Delta U_E}{U_E}}{\frac{\Delta U_A}{U_A}} = \left(1 + \frac{R_V}{r_Z}\right) \cdot \frac{U_A}{U_E} \quad (\text{II.21})$$

Der differentielle Widerstand  $r_Z$  einer Z-Diode wird für bestimmte Stromwerte in den Datenblättern der Hersteller genannt. Auch die Z-Spannung  $U_{Z0}$  wird für konkrete Werte des Z-Stroms  $I_Z$  angegeben. Damit ergibt sich die Möglichkeit, eine Ersatzschaltung für die Z-Diode in der Schaltung nach Bild II-43

zu finden. Die Schaltung nach Bild II-45 zeigt eine solche Ersatzschaltung, in der die Z-Diode als Spannungsquelle mit der Quellenspannung  $U_{Z0}$  und dem Innenwiderstand  $R_i = r_Z$  verwendet wird. Mit ihrer Hilfe lässt sich der Ausgangswiderstand einer solchen Stabilisierungsschaltung bestimmen.

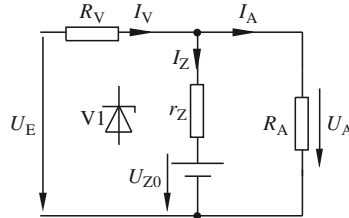


**Bild II-45** Ersatzschaltung einer Z-Diode mit Vorwiderstand und ohmscher Last

### III Mehrschichtdioden und -trioden

Silizium-Gleichrichterdioden mit „pin“-Übergang werden wegen ihrer hohen Durchlassströme und verhältnismäßig hohen Sperrspannungen überwiegend in industriellen Anlagen zur Gleichrichtung der Netzwechselspannung eingesetzt. Für zahlreiche Anwendungen werden aber regelbare, steuerbare Gleichspannungen gefordert.

Bereits im Jahre 1958 wurde ein steuerbarer Silizium-Gleichrichter (**SCR** = Silicon-controlled-rectifier) entwickelt, der ähnliche Eigenschaften zeigte wie die erwähnte Gleichrichterzelle. Dieses elektronische Bauelement erhielt die Bezeichnung „Thyristor“.

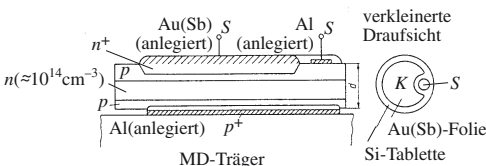


**Bild III-1** Realer Aufbau des Thyristors

Heute geht man bei der Herstellung von Thyristoren von einem hochohmigen n-dotierten Siliziumplättchen aus, in das von beiden Seiten Akzeptoren (B, Al, Ga) eindiffundiert werden. Anschließend wird als Kathode eine Sb-dotierte Au-Folie an der Oberseite einlegiert, wodurch dort ein stark dotiertes n-Gebiet

(n<sup>+</sup>) entsteht. Auch die Al-Kontakte für die Steuerelektrode und die Anode werden anlegiert. Die entstandene „Silizium-Tablette“ nach Bild III-1 wird anodenseitig auf einen Molybdänträger aufgebracht. Die Tablette ist meist rund, da so das elektrische Feld an den Rändern besser zu handhaben ist.

Unter dem Sammelbegriff „Thyristoren“ werden häufig die Mehrschicht-Halbleiter zusammengefasst, die einfach Mehrschichtdioden und -trioden genannt werden. Sie sind jeweils aus drei oder mehr pn-Übergängen aufgebaut und haben ein ausgeprägtes Schalt- beziehungsweise Kippverhalten. Diese Mehrschicht-Halbleiter besitzen zwei Schaltzustände, und zwar den Schaltzustand „Ein“ = leitend und den Schaltzustand „Aus“ = gesperrt.

Das Umschalten vom gesperrten in den leitenden Zustand wird als „Zünden“ und das Umschalten vom leitenden in den gesperrten Zustand als „Löschen“ bezeichnet. Sowohl der Zündvorgang als auch der Löschvorgang laufen in sehr kurzer Zeit ab.

Bei den Bauelementen mit *Einrichtungs-Betrieb* (Vierschichtdiode, Thyristor) werden die beiden Hauptanschlüsse wie bei der Diode mit Anode und Kathode bezeichnet. Ein *Stromfluss* ist nur möglich, wenn die Anode positiv gegenüber der Kathode ist. Bei den Bauelementen mit *Zweirichtungs-Betrieb* (Diac, Triac) werden die Hauptanschlüsse dagegen Anode 1 (A1) und Anode 2 (A2) genannt.



Thyristor und Triac haben einen Steueranschluss, der als Gate (G) bezeichnet wird. Die Zündung erfolgt mit einem Steuerstrom über das Gate und löst einen wesentlich größeren Hauptstrom durch das Bauelement aus.

Von großer Bedeutung ist ihr Einsatz als Leistungsschalter. Durch die gezielte und vermehrte Anwendung von Thyristoren hat sich inzwischen ein eigenes Fachgebiet der Elektronik, die Leistungselektronik, entwickelt. Triacs haben wegen ihres Zweirichtungs-Betriebes (aber relativ geringem Durchlassstrom) und ihrer recht einfachen Ansteuermöglichkeit zum Beispiel über Diacs eine weite Verbreitung in Phasenschnittschaltungen zur Leistungssteuerung von Lampen (Helligkeit) und zur Drehzahlsteuerung von Kleinmotoren gefunden.

## 1 Vierschichtdioden

Vierschichtdioden haben nach Bild III-2 eine pnnpn-Zonenfolge in einem Silizium-Kristall. An den beiden äußeren Zonen sind die Anschlüsse sperrschichtfrei angebracht.

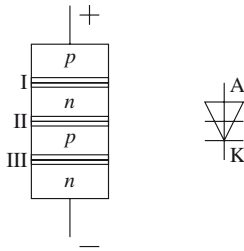


**Bild III-2**

Zonenfolge in einem Silizium-Kristall

Beim Anlegen einer kleinen Spannung  $U_D$  in der eingezeichneten Polarität (Anode positiver als die Kathode) liegen die Sperrschichten I und III in Durchlassrichtung, während die Sperrschicht II in Sperrrichtung gepolt ist. An dieser Schicht fällt dementsprechend die gesamte anliegende Spannung  $U_D$  ab. Die Vierschichtdiode befindet sich im Blockierbereich (hochohmiger Bereich), so dass lediglich ein sehr kleiner Sperrstrom  $I_D$  durch das Bauelement fließt.

Wird die Spannung  $U_D$  weiter erhöht, so steigt die Feldstärke in der Sperrschicht II an. Bei einem bestimmten Spannungswert, der Nullkippspannung  $U_{(BO)O}$ , wird die Feldstärke jedoch so groß, dass ein Durchbruch an Sperrschicht II auftritt und plötzlich ein stark ansteigender Strom  $I_T$  durch die Vierschichtdiode fließt. Dieser Vorgang wird als „Zünden“ bezeichnet. Der Strom  $I_T$  muss durch einen Vorwiderstand  $R_V$  begrenzt werden.

Die Vierschichtdiode geht in den Durchlassbereich (niederohmiger Bereich) über, und die Spannung  $U_D$  an der Diode sinkt plötzlich auf einen kleinen Wert ab. Diese Durchlassspannung  $U_T$  beträgt etwa 0,5 ... 1,2 V. Der Durchlassbereich einer Vierschichtdiode, also ihr weiterer Kennlinienverlauf nach dem Zünden, ähnelt dem der normalen Silizium-Diode.

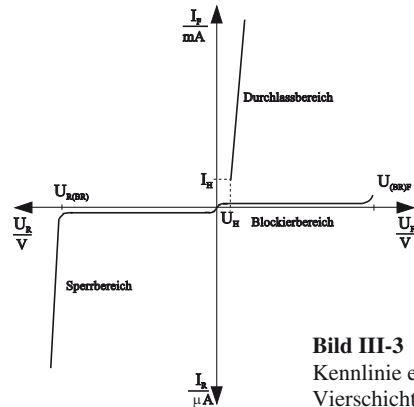


**Bild III-3**

Kennlinie einer Vierschichtdiode

Die Vierschichtdiode kippt in den Blockierbereich zurück, wenn der Strom  $I_T$  durch die Diode den Haltestrom  $I_H$  unterschreitet. Dieser Zusammenhang wird als „Löschen“ bezeichnet.

Im Sperrbereich der Vierschichtdiode, also im 3. Quadranten der Kennlinie nach Bild III-3, kann man erkennen, dass erst bei einer sehr hohen Durchbruchspannung  $U_{(BR)R}$  der Durchbruchstrom zum Fließen gelangt. Bei dieser Polarität sind die Sperrschichten I und III in Sperrrichtung gepolt.

Eine Vierschichtdiode „zündet“ also nur, wenn sie in Vorwärtsrichtung betrieben wird und die anliegende Spannung  $U_D$  größer als die Kippspannung  $U_{(BO)O}$  wird. Auch bei einer Verringerung der Spannung  $U_D$  bleibt die Diode leitend, sie „löscht“ erst wieder, wenn der Haltestrom  $I_H$  unterschritten wird.

Kennwerte: Schaltspannung  $U_{(BO)O}$  ( $\approx 20 \dots 200$  V), Haltestrom  $I_H$  ( $\approx 1 \dots 45$  mA), Schaltzeit (100 bis 600 ns)

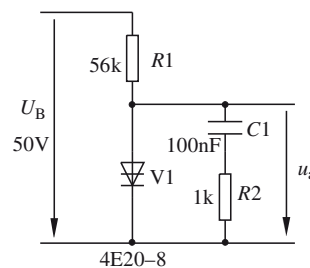


**Bild III-4**

Sägezahn-Generator mit Vierschichtdiode

Die Schaltung in Bild III-4 zeigt einen Sägezahn-Generator mit Vierschichtdiode. Der Kondensator  $C$  wird über die Widerstände  $R1$  und  $R2$  aufgeladen, bis dieser den Wert  $U_{(BO)O}$  der Vierschichtdiode erreicht. Nach der erfolgten Zündung entlädt sich  $C$  sehr schnell über die Diode und den Widerstand  $R2$ , der den Entladestrom begrenzt. Sobald bei der Entladung der Haltestrom  $I_H$  unterschritten wird, kippt die Diode in den Sperrzustand zurück, und es beginnt ein neuer Ladevorgang.

Die sägezahnförmige Ausgangsspannung nach Bild III-5 kann linearer gemacht werden, indem man

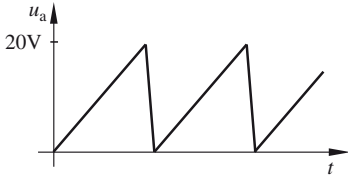


**Bild III-5** Liniendiagramm der sägezahnförmigen Ausgangsspannung

das Verhältnis von  $U_B$  zu  $U_{(BO)O}$  größer macht. In dem Falle wird nur der nahezu lineare Beginn der nach der e-Funktion verlaufenden Ausgangsspannung benutzt. Der gleiche Effekt wird erzielt, wenn die Spannungsquelle durch eine Konstantstromquelle ersetzt wird.

Lastwiderstand  $\frac{U_B}{I_H} \geq R_1 \geq \frac{U_B}{I_{T\max}}$  (III.1)

Ist der Lastwiderstand der Vierschichtdiode zu hochohmig, kann nicht der erforderliche Haltestrom  $I_H$  fließen. Es kommt nicht zum dauerhaften Zünden der Diode. Eine rechnerische Einschätzung ermöglicht Gleichung III.1.

2 Thyristoren

Die Einrichtungs-Thyristortrioden werden allgemein als Thyristoren bezeichnet und sind generell aufgebaut wie Vierschichtdioden. Das einzig neue ist das als Steueranschluss zusätzlich herausgeführte Gate (G).

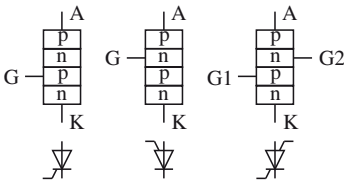


**Bild III-6** Anschlüsse der Einrichtungs-Thyristortrioden

Der Anschluss ist nach Bild III-6 sowohl an der innenliegenden p-Schicht (kathodenseitig gesteuerter Thyristor) als auch an der innenliegenden n-Schicht (anodenseitig gesteuerter Thyristor) möglich. Auch zwei Gateanschlüsse sind möglich, jedoch wird die Thyristortetrode selten verwendet. Die wichtigste Bauart ist der kathodenseitig gesteuerte, rückwärtssperrende Thyristor.

Unabhängig von der Polarität der zwischen Anode und Kathode liegenden Spannung ist bei kleinen Spannungswerten mindestens ein pn-Übergang in Sperrichtung. Der Thyristor ist daher sowohl im Vorwärtsbetrieb (Anode positiv gegenüber Kathode) als auch im Rückwärtsbetrieb (Anode negativ gegenüber Kathode) zunächst gesperrt. Wird im Vorwärtsbetrieb die Spannung weiter erhöht, kippt der Thyristor genau wie die Vierschichtdiode bei  $U_{(BO)O}$  schlagartig in den leitenden Zustand. Dieser Vorgang

ist zwar technisch zulässig, aber im Sinne einer Steuerung nicht erwünscht.

maximale Betriebsspannung  $U_{DRM} \leq \frac{2}{3} U_{(BO)O}$  (III.2)

Um ein Überkopfzünden zu vermeiden, darf die maximale Betriebsspannung des Thyristors die Nullkippspannung nicht erreichen. Für ausreichende Sicherheit kann gesorgt werden, indem ein Thyristortyp mit höherer Nullkippspannung verwendet wird.

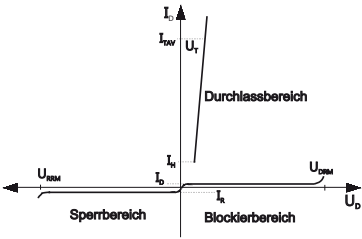


**Bild III-7** Charakteristische Kennlinie eines Thyristors

In Rückwärtsrichtung verhält sich ein Thyristor wie eine gesperrte Diode. Solange die maximal zulässige Sperrspannung  $U_{(BR)R}$  nicht überschritten wird, fließt nur ein sehr kleiner Sperrstrom  $I_R$ . Wird dieser Spannungswert überschritten, so steigt der Sperrstrom lawinenartig an, und der Thyristor wird zerstört. Die charakteristische Kennlinie eines Thyristors nach Bild III-7 ähnelt also stark der Kennlinie einer Vierschichtdiode.

Thyristoren können durch Ansteuerung des Gates gezündet werden, wenn die Anode positiver ist als die Kathode. Bei den kathodenseitig gesteuerten Thyristoren ist eine positive Gatespannung  $U_G$  erforderlich, die einen Gatestrom  $I_G$  in den Thyristor hineinfließen

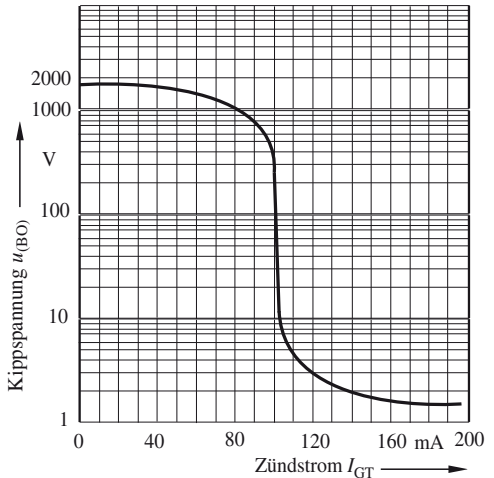


**Bild III-8** Zündkennlinie eines Thyristors zur Vertikalsteuerung

lässt. Der Zündvorgang hängt wesentlich von der Größe des jeweiligen Gatestroms  $I_G$  ab. Durch ihn gelangen Ladungsträger in die Halbleiterzonen, und infolge der gegenseitigen Beeinflussung der pn-Übergänge kippt der Thyristor bei niedrigeren Werten von  $U_D$  in den leitenden Zustand. Den Zusammenhang zwischen Kippspannung  $U_{(BO)O}$  und Zündstrom  $I_{GT}$  zeigt das Diagramm nach Bild III-8. Diese Art der Zündung bezeichnet man als Vertikalsteuerung. Sie wird selten angewendet, da sich der Zündzeitpunkt nur ungenau einstellen lässt.

Um den Zündzeitpunkt genauer einstellen zu können, geben die Hersteller Zünddiagramme für Thyristoren an, die den Zusammenhang zwischen der Gatespannung und dem Gatestrom beschreiben. Diese weisen nach Bild III-9 drei wichtige Zonen auf:

- Unterhalb der Zündspannung  $U_{GD}$  ist eine Zündung nicht möglich, weil die erforderliche Zündenergie nicht zur Verfügung steht.
- Oberhalb der Zündspannung  $U_{GD}$  liegt der Bereich, in dem zwar eine Zündung erfolgen kann, die aber von mehreren zusätzlichen Faktoren abhängt, wie zum Beispiel der anliegenden Durchlassspannung, der Sperrschichttemperatur, u.a.
- Sichere Zündung ist gewährleistet, wenn die Gatespannung größer als  $U_{GT}$  und der Gatestrom größer als  $I_{GT}$  sind. Begrenzt wird dieser Bereich durch die Grenzwerte  $U_{GTM}$ ,  $I_{GTM}$  und die maximal zulässige Gate-Verlustleistung  $P_{Gtot}$ .

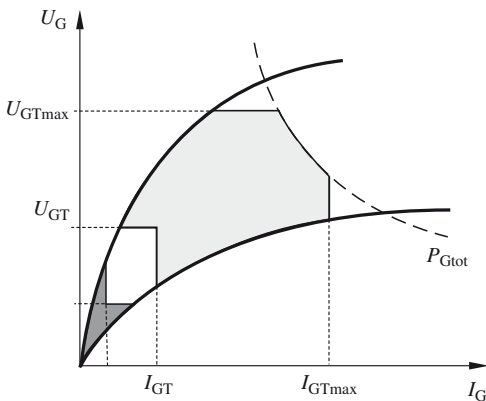


**Bild III-9** Eingangskennlinie und Zünddiagramm eines Thyristors

Das Zündverhalten hängt relativ stark von der Sperrschichttemperatur des Thyristors ab. Je höher die Temperatur, desto kleiner werden die zur sicheren Zündung erforderliche obere Zündspannung  $U_{GT}$  und der obere Zündstrom  $I_{GT}$ . Nach dem Zünden kippt der Thyristor sehr schnell vom Blockierbereich in den Durchlassbereich. Die Durchlasskennlinie ähnelt der von Silizium-Dioden, jedoch ist die Durchlassspannung etwas größer. In den Datenblättern werden die Strom- und Spannungswerte bei gezündeten Thyristoren

(Durchlasszustand) als  $I_T$  und  $U_T$  anstelle von  $I_D$  und  $U_D$  bezeichnet. Die wichtigsten Kenndaten von Thyristoren werden im Kennlinienfeld nach Bild III-10 dargestellt.

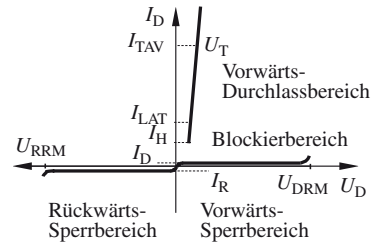


**Bild III-10** Darstellung der wichtigsten Kenndaten eines Thyristors

Der hohe Durchlassstrom stellt genügend Ladungsträger zur Verfügung, um die pn-Übergänge im leitfähigen Zustand zu halten, wenn der Einraststrom  $I_{LAT}$  kurzzeitig überschritten wird. Um den Thyristor wieder in den Sperrzustand zu bringen, muss der Durchlassstrom kleiner als der Haltestrom  $I_H$  werden. Dieser Strom hängt vom jeweiligen Thyristortyp ab und liegt zwischen einigen mA und etwa 100 mA. Auch der Haltestrom ist stark temperaturabhängig.

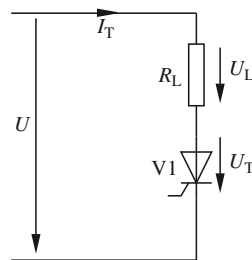


**Bild III-11**  
Thyristor mit Lastwiderstand an Wechselspannung

Wird ein Thyristor nach Bild III-11 mit sinusförmiger Wechselspannung betrieben, so erfolgt ein Löschen bei jedem Nulldurchgang der Betriebsspannung, weil dadurch zwangsläufig der Haltestrom unterschritten wird. Der Thyristor muss also nach jedem positiven Nulldurchgang erneut gezündet werden.

Beim Betrieb mit Gleichspannung wird üblicherweise der Thyristor gelöscht, indem man einen kurzen negativen Spannungsimpuls an die Anode gibt. Dadurch wird der Thyristor kurzzeitig im Rückwärts-Sperrbereich betrieben und somit gelöscht.

Das Löschen über das Gate ist bei den meisten Thyristoren nicht möglich (Ausnahme: GTO-Thyristor).

Bei Wechselspannungsbetrieb ist der Thyristor in der negativen Halbwelle stets gesperrt, und eine Zündung ist nur in der positiven Halbwelle möglich. Der Zündvorgang kann jeweils bei einem bestimmten Phasenwinkel  $\alpha$  der anliegenden Wechselspannung erfolgen. Bild III-12 zeigt hier die entsprechenden Zusammenhänge auf.

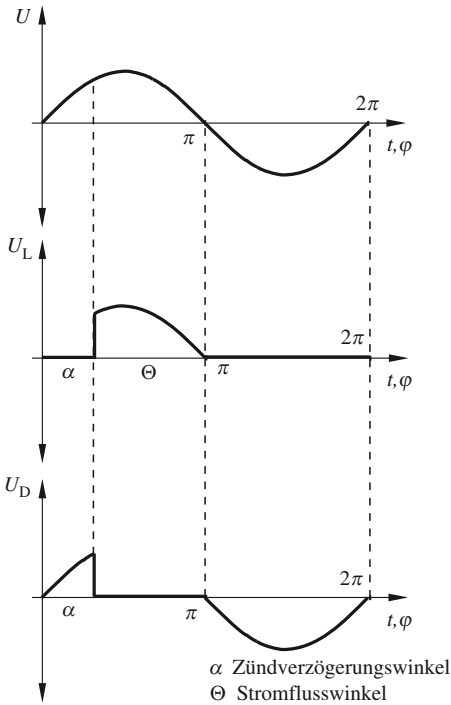


**Bild III-12** Liniendiagramm einer sinusförmigen Spannung am Thyristor

Der Thyristor wird jeweils bei  $\alpha = 90^\circ$  gezündet und automatisch bei  $\omega t = 180^\circ$ , also beim nächsten Nulldurchgang, gelöscht.

Ein Strom fließt also nur während  $180^\circ \geq \omega t \geq 90^\circ$  durch den Thyristor. Diese Zeitspanne wird auch als Stromflusswinkel  $\Theta$  bezeichnet. Der Stromflusswinkel  $\Theta$  wird zur Berechnung des arithmetischen Mittelwertes des Stroms  $I_{TAV}$  benötigt, aber natürlich auch zur Berechnung des quadratischen Mittelwertes. Um diese Berechnung zu vermeiden, wird der Zusammenhang zwischen Verlustleistung, Stromflusswinkel  $\Theta$  und Strom  $I_{TAV}$  in Diagrammen angegeben. Die hier gezeigte Leistungssteuerung wird als *Phasenanschnittsteuerung* bezeichnet und ermöglicht eine stufenlose Leistungssteuerung.

Grenzdaten: periodische Spitzensperrspannung  $U_{DRM}$  und  $U_{RRM}$ ; maximale Stoßspitzenspannung  $U_{DSM}$  und  $U_{RSM}$ ; Dauergrenzstrom  $I_{TAV}$ ; maximaler periodischer Spitzenstrom  $I_{TRM}$ ; maximaler Durchlassstrom  $I_{TRMS}$   
 Kenndaten: Nullkippspannung  $U_{(BO)0}$ ; Sperrströme  $I_D$ ,  $I_R$ ; Durchlassspannung  $U_T$ ; Haltestrom  $I_H$ ; Einraststrom  $I_{LAT}$ ; Zündstrom  $I_{GT}$ ; Zündspannung  $U_{GT}$

Beim Betrieb des Thyristors sind dynamische Kennwerte zu beachten. Der zum Zünden erforderliche Gatestrom muss mindestens so lange fließen, bis die Zündung erfolgt ist. Diese Zeit wird als Zündzeit  $t_{gt}$  bezeichnet. Zwischen dem Löszeitpunkt im Nulldurchgang des Durchlassstroms und der Wiederkehr einer Spannung in Vorwärtsrichtung muss eine Min-

destwartezeit liegen, die Freiwerdezeit oder Erholzeit  $t_q$  genannt wird.

Aber auch ein zu schneller Strom- oder Spannungsanstieg im Zünd- beziehungsweise Löszeitpunkt kann zu unkalkulierbaren Zuständen einschließlich der Zerstörung des Thyristors führen (Strom- und Spannungsteilheit).

Durch entsprechende Schutzbeschaltungen des Thyristors (siehe Abschnitt 3.5) kann dem entgegenge wirkt werden.

Thyristoren werden in großem Umfang als Leistungsschalter und zur Leistungssteuerung in Gleich-, Wechsel- und Drehstromkreisen eingesetzt.

Mit einem Thyristor als Steuerelement nach Bild III-11 ist nur Halbwellenbetrieb möglich, dass heißt, nur die positiven Halbwellen (max. Stromflusswinkel  $\Theta = 180^\circ$ ) gelangen an die Last und erbringen maximal eine Halbierung der wirksamen Leistungsaufnahme. Eine Verringerung des Stromflusswinkels bedeutet eine weitere Verringerung der Leistung.

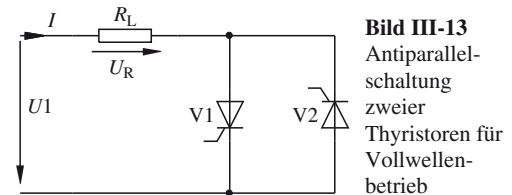


**Bild III-13** Antiparallelschaltung zweier Thyristoren für Vollwellenbetrieb

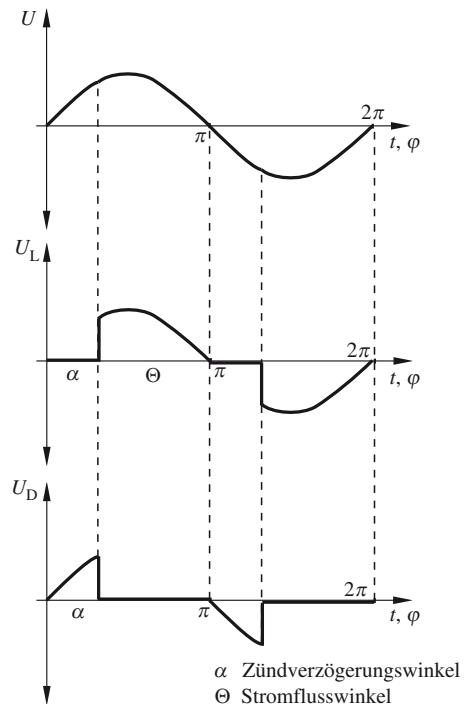


**Bild III-14** Liniendiagramm einer sinusförmigen Spannung bei Vollwellenbetrieb

Eine Grundsaltung für den Vollwellenbetrieb nach Bild III-13 ist die Antiparallelschaltung zweier Thyristoren. Hier ist zu beachten, dass die Gatespannungen  $U_{G1}$  und  $U_{G2}$  jeweils potentialfrei zugeführt werden müssen. Dies erfolgt in modernen Steuerungen mit Hilfe von Optokopplern, aber auch mit Überträgern. Die Synchronisation muss so erfolgen, dass jeweils mit dem gleichen Phasenanschnittwinkel  $\alpha$  der V1 in der positiven und der V2 in der negativen Halbwelle der Betriebsspannung gezündet wird. Im Liniendiagramm nach Bild III-14 wird ein Zündwinkel  $\alpha = 90^\circ$  angenommen. Bei Vollwellenbetrieb ist eine Leistungssteuerung zwischen  $P = 0 \text{ W}$  und  $P = P_{\max}$  möglich. Der Zusammenhang zwischen der gesteuerten Leistung  $P$  und dem Phasenanschnittwinkel  $\alpha$  ist nichtlinear aufgrund der Nichtlinearität der sinusförmigen Versorgungsspannung.

Bei kleineren Leistungen werden wegen des Schaltungsaufwandes statt dieser Antiparallelschaltung von Thyristoren Triacs und Diacs verwendet.

### 3 Diac

Schaltet man zwei Vierschichtdioden antiparallel zueinander intern in einen Silizium-Kristall, so erhält man eine Zweirichtungs-Thyristordiode, die sowohl in Vorwärts- wie auch in Rückwärtsrichtung gezündet werden kann. Die übliche Bezeichnung ist „Diac“ (= diode alternating current switch = Diodenwechselstromschalter), aber auch die Bezeichnung Triggerdiode ist üblich. Prinzipieller Aufbau und Schaltzeichen sind in Bild III-15 zu sehen. Während dieser Diac insgesamt 5 Schichten hat, gibt es auch solche mit 3 Schichten (pnp).

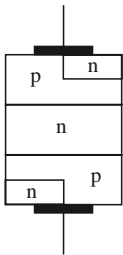


**Bild III-15**  
Aufbau und Schaltzeichen eines Diacs

Aufgrund der Antiparallelschaltung ergibt sich für den Rückwärtsbereich (3. Quadrant) ein spiegelbildlicher Verlauf der Kennlinie im Vorwärtsbereich (1. Quadrant). Nach Überschreiten der Durchbruchspannungen  $U_{(BR)R}$  und  $U_{(BR)F}$  kommt ein Strom in der jeweiligen Richtung schlagartig zum Fließen, der durch einen Vorwiderstand begrenzt werden muss. Die charakteristische Kennlinie eines Diacs mit Blockier- und Durchlassbereich zeigt Bild III-16. Sowohl bei Betrieb im Vorwärts- als auch im Rückwärtsbereich kann der gezündete und damit niederohmige Diac nur durch Unterschreiten seines Haltestroms wieder in den Blockierzustand gebracht werden. Bei

Diacs mit drei Schichten erfolgt der Spannungseinbruch nach dem Zünden nur um einen bestimmten Spannungsbetrag  $\Delta U$ .

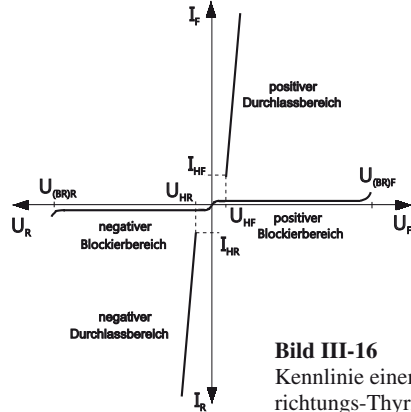


**Bild III-16**  
Kennlinie einer Zweirichtungs-Thyristordiode

Diacs lassen sich als elektronische Wechselstromschalter verwenden. Sie werden überwiegend für relativ kleine Ströme gefertigt und hauptsächlich zur Ansteuerung von Triacs eingesetzt.

Kennwerte: Durchbruchspannungen  $U_{(BR)F}$ ,  $U_{(BR)R}$ ; Durchbruchströme  $I_{(BR)F}$ ,  $I_{(BR)R}$ ; Halteströme  $I_{HF}$ ,  $I_{HR}$ ; maximaler Spitzenstrom  $I_{\max}$

Wegen seines Kippverhaltens in Vorwärts- und Rückwärtsrichtung werden Diacs hauptsächlich in Zündschaltungen für Triacs eingesetzt. Die Zündschaltung nach Bild III-17 zeigt das Prinzip eines Dimmers, wobei der Widerstand  $R_L$  für den Gate-Widerstand eines Triacs steht.

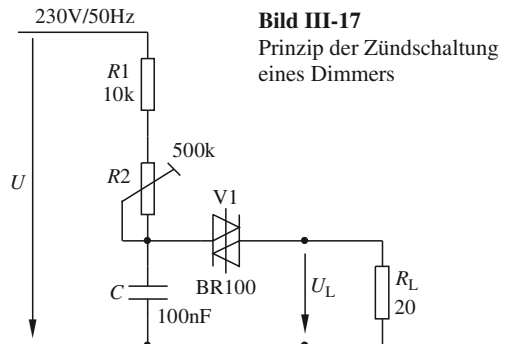


**Bild III-17**  
Prinzip der Zündschaltung eines Dimmers

Der Kondensator  $C$  wird in dieser Schaltung über  $R1$  und  $R2$  durch die anliegende AC jeweils auf- und umgeladen. Die RC-Schaltung muss so ausgelegt werden, dass die Spannung  $U_C$  in jeder Halbwelle  $U_{(BR)F}$  beziehungsweise  $U_{(BR)R}$  erreicht, da der Diac sonst nicht zündet. Wenn der Diac zündet, entlädt sich der Kondensator  $C$  schlagartig über den Diac und den Widerstand  $R_L$ . Dadurch entsteht an  $R_L$  ein kurzer positiver beziehungsweise negativer Stromimpuls. Durch Verstellen des Ladewiderstandes  $R2$  kann der Zündzeitpunkt des Diacs während der Halbwellen

verändert werden. Die Spannungshöhe und die Impulsdauer hängen im wesentlichen von der Kapazität des Kondensators, dem Durchlasswiderstand des Diacs und der Spannungsdifferenz  $\Delta U$  des Diacs ab. Der Diac bleibt gezündet, bis sein Haltestrom unterschritten wird, was beim nächsten Nulldurchgang der Wechselspannung eintritt.

## 4 Triac

Ein Triac (= **tri**ode **alt**ernating **c**urrent **s**witch) kann von seinem technologischen Aufbau her, aber auch aufgrund seiner Funktion nach Bild III-18 als eine Antiparallelschaltung zweier Thyristoren aufgefasst werden.

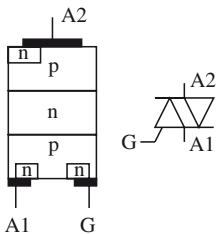


**Bild III-18**  
Aufbau und Schaltzeichen  
eines Triacs

Der Triac hat zwei Vorwärtsrichtungen und kann am Gate mit einem Zündstrom beziehungsweise einer Zündspannung beliebiger Polarität gezündet werden. Die Kennlinie eines Triacs nach Bild III-19 zeigt einen spiegelbildlichen Verlauf im I. und III. Quadranten des Kennlinienfeldes auf der Basis der Kennlinie eines Thyristors. Ein gezündeter Triac kippt genau wie ein Thyristor nur dann wieder in den Sperrzustand zurück, wenn sein Haltestrom unterschritten wird.

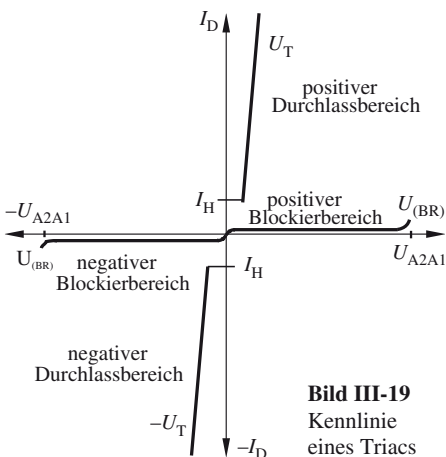


**Bild III-19**  
Kennlinie  
eines Triacs

Triacs werden meistens mit einem Impuls gezündet, dessen Polarität mit der Polarität der an Anschlüssen A1 und A2 anliegenden Spannung (I. und III. Quad-

rant) übereinstimmt. Eine entsprechende Zündung kann auch in den anderen Quadranten erfolgen, erfordert aber größere Steuerleistungen. Wegen der vier möglichen Steuerungsarten werden für die Gateströme vier zugehörige Werte angegeben.

Mit Triacs lassen sich in recht einfacher Weise Phasenanschnittsteuerungen für Vollwellenbetrieb aufbauen. Wegen der niedrigen zulässigen kritischen Spannungssteilheit ist der Einsatz bei Lasten mit stark induktivem Anteil nicht gut möglich.

## 5 Schutz der Dioden und Trioden

Dioden, Triacs und Thyristoren müssen, wie alle Bauelemente in der Elektronik, gegen Überlastung geschützt werden. Den Überstromschutz übernehmen superflinke Sicherungen und Sicherungsautomaten mit magnetischer und thermischer Schnellauslösung.

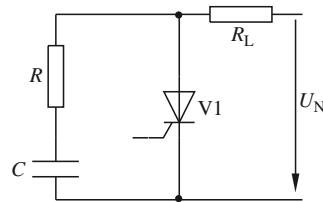


**Bild III-20**  
Schutzbeschaltung  
gegen hohe Spannungs-  
anstiegsgeschwindigkeit  
( $du/dr$ )

Zum Schutz der Bauelemente gegen hohe Spannungsanstiegsgeschwindigkeit ( $du/dr$ ) werden RC-Glieder eingesetzt und den Ventilen nach Bild III-20 parallel geschaltet. Die Hersteller geben hier Dimensionierungshilfen in Tabellen- oder Diagrammform. Die RC-Beschaltung dient gleichzeitig dem Schutz vor den Folgen des Trägerstaueffektes.

Zum Schutz der Bauelemente gegen hohe Stromanstiegsgeschwindigkeit ( $di/dr$ ) werden kleine Schutzinduktivitäten  $L_S$  nach Bild III-21 in Reihe zu den Ventilen geschaltet. Hier reicht unter Umständen bereits die Induktivität des Netztransformators oder die Anschlussdrähte der Bauelemente aus.

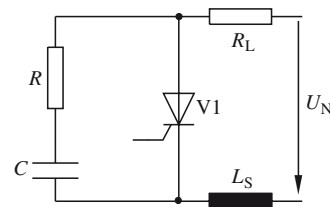


**Bild III-21**  
Schutzbeschaltung  
gegen hohe Stromanstiegsgeschwindigkeit  
( $di/dr$ )

Um einen gewissen Schutz gegen Überspannungen sicherzustellen, werden von den Herstellern fertig zugeschnittene Baugruppen geliefert, die zusätzlich einen Varistor parallel zum RC-Glied enthalten. Auch andere Schutzorgane finden hier Verwendung. Solche Baugruppen können natürlich auch in Gleichrichterschaltungen wie hier nach Bild III-22 integriert werden.



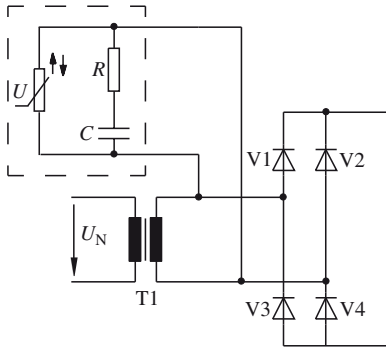


**Bild III-22** Fertige Baugruppen zum Schutz gegen Überspannungen

Da Triacs und Thyristoren in wenigen Mikrosekunden zünden, muss auch der Strom in sehr kurzer Zeit auf den Wert ansteigen, den die Last aufgrund der zum Zündzeitpunkt anliegenden Spannung „zieht“.

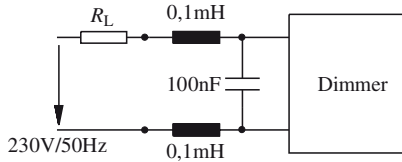


**Bild III-23** Entstörmaßnahme für Dimmerschaltungen

Derartig kurze Stromanstiege verursachen jedoch Hochfrequenzstörungen, die sich beim Rundfunk- und Fernsehempfang störend bemerkbar machen. Daher sind Entstörmaßnahmen für Dimmer zum Beispiel nach Bild III-23 vorzunehmen (Entstörfilter).

## 6 Zündmethoden

Bei Thyristoren und Triacs muss zwischen der Vertikal- und der Horizontalsteuerung unterschieden werden. In der Praxis wird der Steuerstrom größer als der obere Zündstrom gewählt. Begrenzt wird der

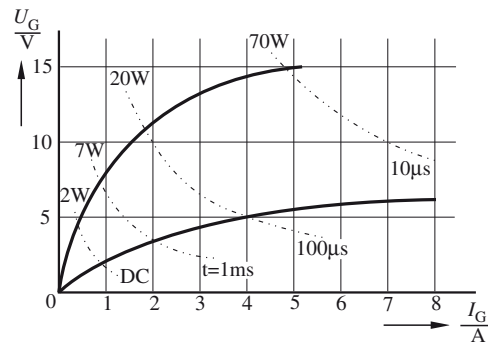


**Bild III-24** Gate-Eingangskennlinie

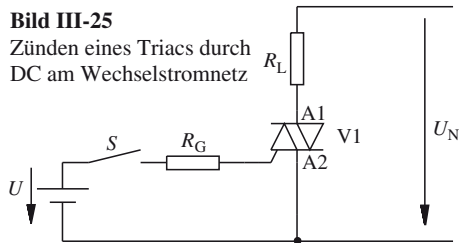
Steuerstrom durch die zulässige Steuerverlustleistung  $P_G$ , die in Datenblättern für definierte Impulsdauern nach Bild III-24 angegeben wird. Die Einschaltzeit des Thyristors muss beendet sein, bevor der Impuls seinen Scheitelwert erreicht hat.

Die Vertikalsteuerung (Bild III-8) wird nur selten angewendet, weil eine genaue Bestimmung der Zündwinkel nicht erreicht werden kann und nur Steuerwinkel bis  $\alpha = 90^\circ$  möglich sind. Die Horizontalsteuerung weist diese Mängel nicht auf. Die Ansteuerung erfolgt häufig durch Zündimpulse und ermöglicht das Zünden auch bei kleiner Spannung und niedriger Temperatur. Die Steuerung kann mit Einzelbauelementen oder mit Ansteuer-IC's verwirklicht werden.

Bei Betrieb der Schaltung nach Bild III-25 an Wechselspannung zündet der Triac bei geschlossenem Schalter S mit dem Anstieg der sinusförmigen Betriebsspannung. Der Zündzeitpunkt kann durch die Wahl des Gatevorwiderstandes  $R_G$  und damit der Einstellung des Gatestroms für Steuerwinkel bis  $\alpha = 90^\circ$  bestimmt werden. Er löscht wieder, wenn beim nächsten Nulldurchgang der Wechselspannung sein Haltestrom zwangsläufig unterschritten wird. Solange Schalter S geschlossen ist, fließt ein Wechselstrom durch den Lastwiderstand.

**Bild III-25**

Zünden eines Triacs durch DC am Wechselstromnetz



Die Schaltung ermöglicht das Einschalten von Wechselstromlasten. Ersetzt man die Spannungsquelle und den Schalter S durch ein Digitalgatter, kann eine Last kontaktlos und fast leistungslos eingeschaltet werden. Wird die Stromzufuhr ins Gate unterbrochen, so wird der Triac mit dem nächstfolgenden Nulldurchgang des Laststroms löschen (Vertikalsteuerung).

Die Schaltung nach Bild III-26 zeigt ein Grundprinzip einer Phasenanschnittsteuerung mit Kondensatorladung. In der positiven Halbwelle der Betriebsspannung wird der Kondensator C über den veränderbaren Vorwiderstand  $R_G$  aufgeladen. Je nach Widerstandswert von R2 steigt die Spannung am Kondensator schnell oder langsam an. Dadurch wird die zum Zünden des Thyristors erforderliche Gatespannung erst mit einer einstellbaren Verzögerung gegenüber dem Beginn der positiven Halbwelle der Betriebsspannung erreicht. Auf diese Weise kann der Zündzeitpunkt „beliebig“ eingestellt werden. Sobald der Thyristor gezündet hat, wird der Kondensator über die Gate-Kathodenstrecke des Thyristors teilweise wieder entladen. Der Widerstand R1 begrenzt den maximalen Gatestrom.



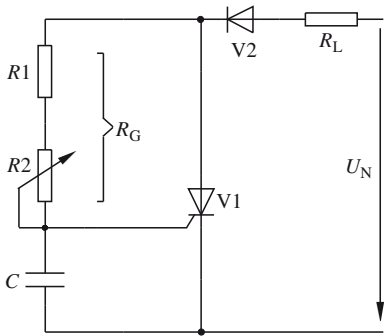


**Bild III-26** Grundprinzip einer Phasenanschnittsteuerung

Der Lastwiderstand ist vor das RC-Glied gezogen worden und bietet den Vorteil, dass die Ladespannung des Kondensators nach dem Zünden auf die geringe Durchlassspannung des Thyristors begrenzt wird. Mit dieser Schaltung lassen sich Stromflusswinkel  $20^\circ < \theta < 160^\circ$  erreichen.

Bei der Horizontalsteuerung erfolgt die Ansteuerung zweckmäßigerweise durch Zündimpulse und ermöglicht präzises Zünden zu jedem gewünschten Zeitpunkt innerhalb der Halbwellen. Dies lässt sich durch eine Synchronisierung des Impulsgenerators mit der Netzspannung erreichen.

Die Schaltung nach Bild III-27 lässt den Vollwellenbetrieb mit einem Thyristor zu. Der B2-Gleichrichter lässt eine Spannung am Widerstand R1 abfallen. Mit Hilfe des RC-Gliedes (R5 und C1) kann nun der Zeitpunkt eingestellt werden, an dem der Unijunction-Transistor (UJT) durchsteuert und Spannungsimpulse an R3 hervorgerufen werden, die den Thyristor am Gate ansteuern. Der Widerstand R4 dient zur Begrenzung des Gatestroms.

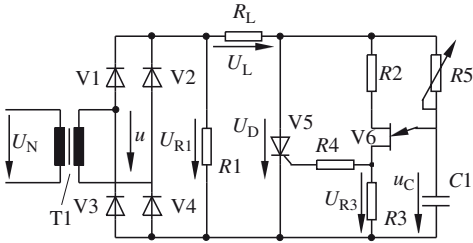


**Bild III-27** Schaltung zum Vollwellenbetrieb mit einem Thyristor

Aufgrund der Spannung  $U_{R1}$  ist der Thyristor immer im Vorwärtsbetrieb und kann darum in jeder Halbwelle gezündet werden. Die Leistung ist theoretisch zwischen  $0 \leq P \leq P_{\max}$  steuerbar, zum Beispiel kann die Helligkeit einer Lampe von 0 % bis 100 % gesteuert werden. Die Grenzbereiche ( $\alpha < 15^\circ$  und  $\alpha > 165^\circ$ ) lassen sich mit dieser Schaltung nicht realisieren.

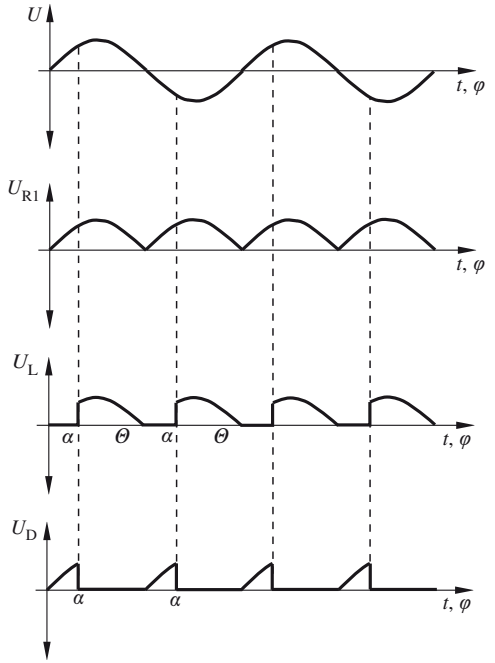


**Bild III-28** Liniendiagramm einer Vollwellenschaltung mit Thyristor

Im Liniendiagramm nach Bild III-28 ist ein Phasenanschnittwinkel  $\alpha = 90^\circ$  angenommen, so dass hier  $I_L$  und  $U_L$  jeweils mit halbierten positiven Halbwellen wirksam sind, also die Hälfte der maximalen Leistung an die Last (Lampe) gelangt.

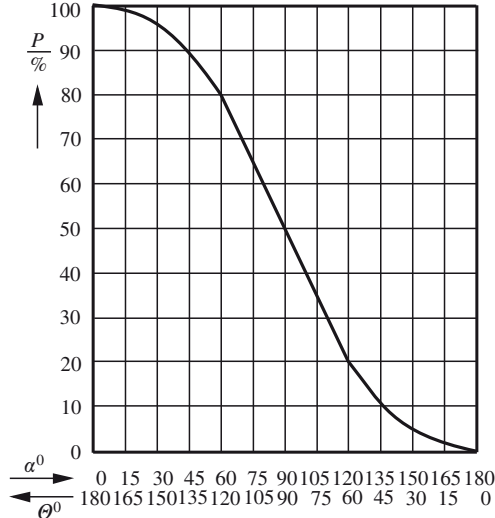


**Bild III-29** Zusammenhang zwischen Anschnittwinkel, Stromflusswinkel und Leistung

Der Zusammenhang zwischen  $P_{\max}$  und dem jeweiligen Winkel ist im Bild III-29 dargestellt. Hier ist erkennbar, dass der Zusammenhang nichtlinear ist.

## IV Transistoren

Der Prototyp des Transistors wurde im Jahre 1948 gefunden, als die US-Amerikaner John Bardeen und Walter H. Brattain bei der Untersuchung von Diodenübergängen eine Metallprüfspitze auf die n-Schicht aufsetzten und so unbeabsichtigt eine pnp-Schichtfolge entstand. Zu ihrer Überraschung stellten sie bei weiteren Messungen fest, dass bei Widerstandsänderungen in der einen Grenzschicht auch der Widerstand der anderen Grenzschicht beeinflusst wird. Damit war das Grundprinzip des Transistors entdeckt. Das Kunstwort „Transistor“ entstand aus der Bezeichnung „transfer resistor“, was soviel wie „Widerstandsänderungen von einer Grenzschicht zur anderen übertragen“ bedeutet.

### 1 Bipolare Transistoren

Ergänzt man die pn-Schichtenfolge einer Diode um eine weitere n- oder p-Schicht, so erhält man die Schichtenfolge eines Transistors. Entsprechend der Schichtenfolge unterscheidet man npn- oder pnp-Transistoren.

Am Ladungstransport sind aufgrund der verschiedenen Dotierungsarten sowohl Löcher als auch Elektronen beteiligt. Darum spricht man hier von „bipolaren“ Transistoren im Gegensatz zu den „unipolaren“ Transistoren, die im Kapitel 4.2 beschrieben werden.

Die mittlere Schicht bezeichnet man als Basis. Sie dient zum Steuern des Transistors. Die beiden äußeren Schichten heißen Emitter (sendet Ladungsträger aus) und Kollektor (sammelt Ladungsträger ein). Der Pfeil am Emitter gibt die technische Stromrichtung des Emittierstroms an.

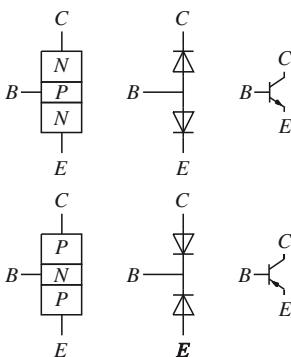


**Bild IV-1**  
Schichtenfolge,  
Ersatzschaltbild  
und Schaltzeichen  
von npn- und  
pnp-Transistoren

Als Ersatzschaltbild nach Bild IV-1 kann man die Reihenschaltung zweier Dioden verwenden, die eine gemeinsame Kathode beziehungsweise Anode haben. Die eine Diode ist die Basis-Emitter-Diode, die andere die Basis-Kollektor-Diode.

Anhand dieses Ersatzschaltbildes nach Bild IV-1 soll die grundsätzliche Polung eines als Verstärker betriebenen Transistors nach folgenden Bedingungen beschrieben werden:

1. Die Basis-Emitter-Diode ist grundsätzlich in Durchlassrichtung zu betreiben.
2. Die Basis-Kollektor-Diode ist grundsätzlich in Sperrrichtung geschaltet.

Um den Transistor als Verstärker betreiben zu können, müssen für die Basis zwei Voraussetzungen erfüllt sein:

1. Sie muss sehr gering dotiert sein; Dotierungsgrad 1/100 des Emitters!
2. Sie muss sehr dünn sein gegenüber der mittleren freien Weglänge der Majoritätsträger (1 bis 100  $\mu\text{m}$ ).

Sind diese beiden Voraussetzungen erfüllt, kann mit einem kleinen Eingangsstrom (Basisstrom) ein großer Ausgangsstrom (Kollektorstrom) gesteuert werden.

#### 1.1 Transistoreffekt

Durch die in Durchlassrichtung betriebene Basis-Emitter-Diode eines npn-Transistors fließt ein großer Durchlassstrom (Emitterstrom), der so gerichtet ist, dass die durch Dotierung vorhandenen Elektronen zur Basis wandern. In der Basis findet diese große Menge an Elektronen wegen des geringen Dotierungsgrades der Basis nur wenig Löcher als Rekombinierungspartner vor. Es kommt deshalb nur zu einer geringen Anzahl von Rekombinationen. Der größte Teil der vom Emitter kommenden Elektronen überschwemmt die Basis als freie Ladungsträger. Da die Basis sehr dünn ist, werden die Elektronen aufgrund ihrer Eigengeschwindigkeit zum Kollektor hin abgedrängt. Das Überschreiten der Kollektor-Basis-Sperrschicht bildet für die Elektronen kein Problem, da sie in der Basis Minoritätsträger sind. Die Sperrschicht eines pn-Überganges stellt jedoch nur für die Majoritätsträger ein Hindernis dar.

Wegen der geringen Anzahl von Rekombinationen in der Basis gelangen also fast alle vom Emitter ausgesandten Elektronen zum Kollektor. Es fließt ein Kollektorstrom, der etwas kleiner ist als der Emitterstrom, denn die durch Rekombination in der Basis gebliebenen Elektronen würden die Basis negativer machen, wenn sie nicht nach außen abgeführt würden. Dieser Elektronenstrom, der aus der Basis herausfließen muss, damit Basispotential und Emittierstrom konstant bleiben, stellt den Basisstrom dar. Er bestimmt den Arbeitspunkt des Transistors.

Wird der Basisstrom größer, werden mehr Elektronen aus der Basis entnommen, als zur Erhaltung eines

stabilen Zustandes notwendig wäre. Die Basis wird positiver und die Basis-Emitter-Spannung und der Emitterstrom werden größer. Werden weniger Elektronen entnommen, so wird der Emitterstrom kleiner. Durch diesen kleinen Basisstrom, der zum Emitterstrom im gleichen Verhältnis steht wie der Dotierungsgrad der Basis zum Dotierungsgrad des Emitters, kann der große Emitter- beziehungsweise Kollektorstrom gesteuert werden.

Beim npn-Transistor sind vorwiegend Elektronen am Ladungstransport beteiligt, während beim pnp-Transistor vornehmlich Löcher am Ladungstransport beteiligt sind.

Deren Bewegungsrichtung ist wegen der umgekehrten Polung des pnp-Transistors jedoch die gleiche wie die der Elektronen beim npn-Transistor, nämlich vom Kollektor zum Emitter. Somit erübrigt sich die Beschreibung der physikalischen Wirkungsweise des pnp-Transistors. Letztlich ist ja auch der Löcherstrom ein Elektronenstrom, der auf der indirekten Elektronenbewegung beruht (darum sind Elektronen beweglicher als Löcher).

Wegen der unterschiedlichen Beweglichkeit von Elektronen und Löchern sind npn-Transistoren für hohe Frequenzen besser geeignet als pnp-Transistoren. Viele elegante und einfache Schaltungen lassen sich mit „Komplementärpärchen“ (je ein npn- und pnp-Transistor mit identischen Daten) realisieren.

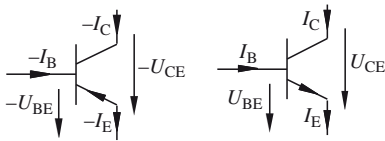


**Bild IV-2** Spannungs- und Strompfeile an Transistoren (a + b)

Die *Spannungen* am Transistor werden nach Bild IV-2 durch zwei Indices gekennzeichnet, nämlich durch die Indices der Elektroden, zwischen denen die Spannung gemessen wird. Die Reihenfolge der Indices beziehungsweise die Richtung der Spannungspfeile gibt die Messrichtung an: Kollektor-Basisspannung  $U_{CB}$ , Basis-Emitterspannung  $U_{BE}$  und Kollektor-Emitterspannung  $U_{CE}$ .

Die *Ströme* am Transistor werden durch einen Index gekennzeichnet, und zwar durch den Index der Elektrode, durch die sie fließen.

Die Festlegung der Richtungspfeile kann man nach verschiedenen Gesichtspunkten vornehmen: Entweder nach der tatsächlichen Bewegungsrichtung der Ladungsträger im Kristall und in den Zuleitungen (zur physikalischen Deutung) oder nach der allgemein üblichen technischen Stromrichtung, vom Pluspol zum Minuspol. Transistoren sind in zahlreichen Gehäuseformen (Bauformen) lieferbar, die nur zum Teil genormt sind.

## 1.2 Transistorkennlinien

Um das Betriebsverhalten eines Transistors im Normal- und Grenzfall beschreiben zu können, ist die Kenntnis der Ein- und Ausgangsgrößen erforderlich.

Eingangsgrößen: Basis-Emitter-Spannung  $U_{BE}$

Basisstrom  $I_B$

Ausgangsgrößen: Kollektor-Emitter-Spannung  $U_{CE}$

Kollektorstrom  $I_C$

Die Eingangskennlinie  $I_B = f(U_{BE})$  eines Transistors ist in Bild IV-3 dargestellt. Mit dem Basisstrom verändert sich zwangsläufig auch der Kollektorstrom. Darum müssen Kollektorspannung und Sperrschichttemperatur konstant gehalten werden.

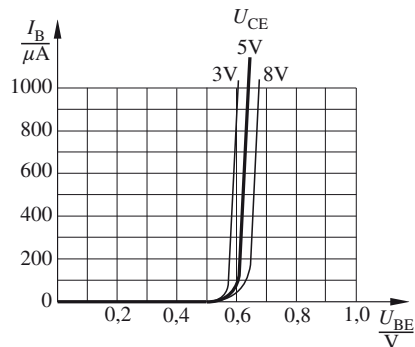


**Bild IV-3** Eingangskennlinie eines Transistors

Da die Basis-Emitter-Strecke eines Transistors eine Diode in Durchlassrichtung ist, hat die Eingangskennlinie die Form einer Diodenkennlinie in Durchlassrichtung. Der Basisstrom steigt stark an, sobald die Basis-Emitter-Spannung einen bestimmten Wert (die Diffusionsspannung) überschritten hat. Für andere Werte von  $U_{CE}$  ergeben sich andere Eingangskennlinien, wie Bild IV-3 zeigt.

$U_{BE} \approx 0,2 \text{ V bis } 0,3 \text{ V}$  bei Ge-Transistoren

$U_{BE} \approx 0,6 \text{ V bis } 0,7 \text{ V}$  bei Si-Transistoren

Hieraus lässt sich der Ersatzwiderstand  $r_{BE}$  zwischen Basis- und Emitterschluss des Transistors berechnen, durch den die Steuerspannungsquelle belastet wird.

$$\text{DC-Eingangswiderstand } R_{BE} = \frac{U_{BEA}}{I_{BA}} \quad (\text{IV.1})$$

Dieser Gleichstromwiderstand  $R_{BE}$  darf nicht mit dem differentiellen Eingangswiderstand  $r_{BE}$  (Kleinsignal-Eingangswiderstand) des Transistors verwechselt werden. Er stellt die Steigung der Eingangskennlinie im jeweiligen Kennlinienpunkt, sprich Arbeitspunkt, dar.

Für eine Diodenkennlinie gilt Gleichung II.2, die dementsprechend auch für eine Transistor-Eingangs-

kennlinie gilt. Berechnet man mathematisch die 1. Ableitung der Kurve, so gilt:

$$\frac{dI_B}{dU_{BE}} = \frac{1}{r_{BE}} = \frac{I_{BS} \cdot e^{\frac{U_{BE}}{U_T}}}{U_T} \approx \frac{I_{BA}}{U_T} \quad \text{für } U_{BE} \gg U_T$$

$$\text{differentieller Widerstand } r_{BE} \approx \frac{U_T}{I_{BA}} \quad (\text{IV.2})$$

Der differentielle Widerstand  $r_{BE}$  ist bedeutend kleiner als der Basis-Emitter-Ersatzwiderstand  $R_{BE}$ .

Bei der Aufnahme der Stromsteuerkennlinie  $I_C = f(I_B)$  nach Bild IV-4 wird der Basisstrom  $I_B$  verändert, während  $U_{CE}$  jeweils konstant gehalten wird. Bereits bei der Untersuchung der Funktionsweise des Transistors ist erkennbar, dass der Kollektorstrom mit dem Basisstrom verknüpft ist.

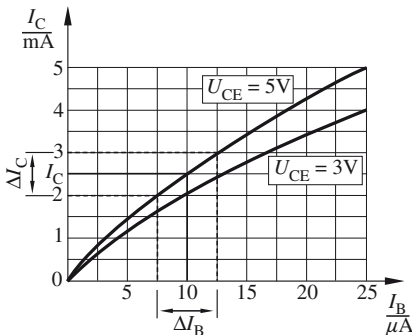


**Bild IV-4** Stromsteuerkennlinie

Die Stromverstärkung  $B$  wird durch den Dotierungsgrad der einzelnen Schichten des Transistors eingestellt, ist also in erster Linie hiervon abhängig und weniger von anderen Einflussgrößen. Tatsächlich ist zwischen  $I_C$  und  $I_B$  über einen weiten Bereich eine Proportionalität vorhanden, der Graph ergibt annähernd eine Gerade. Für verschiedene Werte von  $U_{CE}$  ergeben sich unterschiedliche Stromverstärkungskennlinien, wie Bild IV-4 zeigt.

$$\text{Gleichstromverstärkung } B = \frac{I_C}{I_B} \quad (\text{IV.3})$$

$$\text{Kleinsignalverstärkung } \beta = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B} \quad (\text{IV.4})$$

Die Spannungssteuerkennlinie  $I_C = f(U_{BE})$  ergibt annähernd den exponentiellen Verlauf einer Diodenkennlinie (siehe Eingangskennlinie). Die Steigung  $S$  der Kennlinie nach Bild IV-5 wird in Anlehnung an die Röhrentechnik als *Steilheit*  $S$  bezeichnet. Beim „idealen Transistor“, bei dem der Kollektorstrom exponentiell mit der Basis-Emitter-Spannung steigt, ist das Verhältnis von Steilheit zu Kollektorstrom konstant.

Die Gleichung ergibt sich aus der 1. Ableitung der Diodenkennlinie unter Berücksichtigung der Temperaturspannung  $U_T$ .

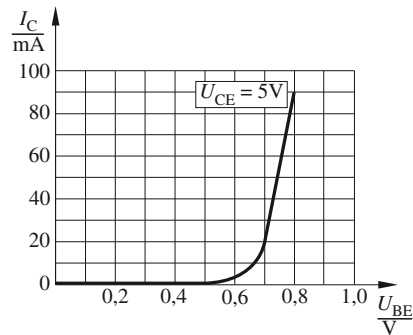


**Bild IV-5** Spannungssteuerkennlinie

$$\text{Steilheit } S = \frac{dI_C}{dU_{BE}} \approx \frac{I_C}{U_T} \quad [S] = \frac{\text{mA}}{\text{V}} \quad (\text{IV.5})$$

Eine Sperrschichttemperatur von  $45^\circ\text{C}$  ergibt  $U_T = 24,4 \text{ mV}$ . Die theoretisch mögliche Steilheit eines Transistors für Übersichtsrechnungen beträgt bei dieser Temperatur

$$\text{Steilheit } S = 36 \cdot \frac{1}{V} \cdot I_C \quad (\text{IV.6})$$

Für Kleinsignal-Transistoren stimmt diese Gleichung recht gut, bei Leistungs-Transistoren weichen die errechneten Werte von den tatsächlichen Größen erheblich ab. Die Ausgangskennlinien beschreiben den Zusammenhang zwischen den beiden Ausgangsgrößen, dem Kollektorstrom  $I_C$  und der Kollektor-Emitter-Spannung  $U_{CE}$ . Bei konstanter Sperrschichttemperatur muss entweder der Basisstrom oder die Basis-Emitter-Spannung konstant gehalten werden, wenn die Kennlinien eindeutig sein sollen.

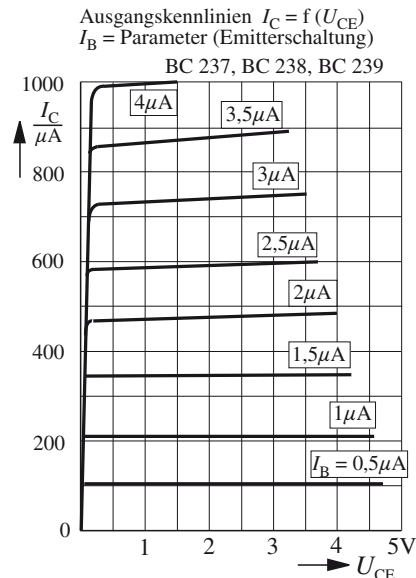


**Bild IV-6** Ausgangskennlinienfeld mit  $I_B$  als Parameter

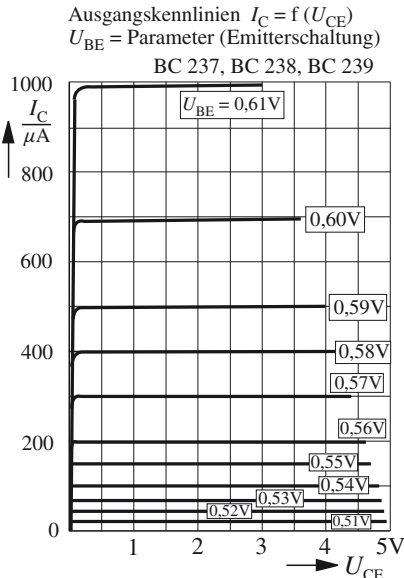


**Bild IV-7** Ausgangskennlinienfeld mit  $U_{BE}$  als Parameter

Man unterscheidet deshalb zwei Ausgangskennlinienfelder:

1. das Ausgangskennlinienfeld, bei dem  $I_B$  konstant gehalten wird ( $I_B$  als Parameter, Bild IV-6)
2. das Ausgangskennlinienfeld, bei dem  $U_{BE}$  konstant gehalten wird ( $U_{BE}$  als Parameter, Bild IV-7)

Der Verlauf der beiden Ausgangskennlinienfelder ist grundsätzlich gleich. Bei beiden Kennlinienfeldern steigt der Kollektorstrom schon bei kleinen Werten der Kollektor-Emitter-Spannung stark an, um dann ab Erreichen eines bestimmten Wertes von  $U_{CE}$  in die Sättigung überzugehen.

Dieser Wert von  $U_{CE}$ , der vom jeweiligen Basisstrom abhängig ist, heißt Sättigungsspannung  $U_{CE\text{ sat}}$ . Wird  $U_{CE}$  größer als  $U_{CE\text{ sat}}$  steigt der Kollektorstrom nur noch sehr gering an.

Die Kennlinien beider Kennlinienfelder zeigen nach Überschreiten der Sättigungsspannung einen sehr

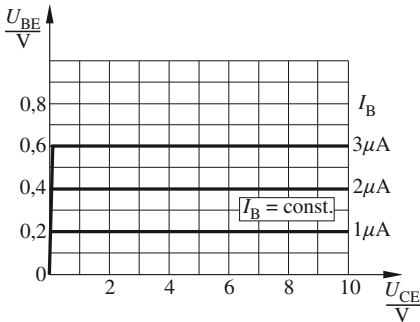


**Bild IV-8** Spannungsrückwirkungskennlinie

flachen Verlauf. Wenn der Arbeitspunkt eingangsseitig festgehalten wird ( $U_{BE}$ ,  $I_B$ ), ändert sich der Kollektorstrom kaum. Die Stromverstärkung wird durch die Dotierung eingestellt, kann also durch  $U_{CE}$  kaum beeinflusst werden.

Um zu untersuchen, welche Rückwirkung die Ausgangsspannung  $U_{CE}$  des Transistors auf die Eingangsspannung  $U_{BE}$  ausübt, wird  $U_{BE}$  in Abhängigkeit von  $U_{CE}$  dargestellt. Damit die Kennlinien eindeutig sind, wird der Basisstrom  $I_B$  konstant gehalten. Bild IV-8 zeigt für verschiedene Werte von  $I_B$  das Kennlinienfeld der Spannungsrückwirkung  $D_u$ . Es ist erkennbar, dass die Spannungsrückwirkung sehr gering ist. Das Verhältnis von  $\Delta U_{BE} / \Delta U_{CE}$  liegt bei etwa  $10^{-4}$  bis  $10^{-6}$ .

Eine Darstellungsweise, die die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Kennlinien besonders deutlich macht, ist das Vierquadranten-Kennlinienfeld. Hier werden alle vier Quadranten eines Koordinatenkreuzes zur Darstellung der verschiedenen Kennlinien ausgenutzt, wobei die gegenseitige Abhängigkeit in Bild IV-9 deutlich wird.

Im I. Quadranten wird das Ausgangskennlinienfeld mit  $I_B$  als Parameter dargestellt, im II. Quadranten die Stromsteuerkennlinie, im III. Quadranten die Eingangskennlinie und im IV. Quadranten die Rückwirkungskennlinien.

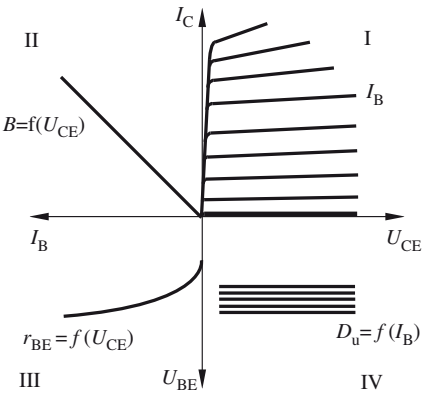


**Bild IV-9** Vier-Quadranten-Kennlinienfeld eines Transistors

Je flacher die Ausgangskennlinien verlaufen, desto weniger hängt die Stromsteuerkennlinie vom Parameter  $U_{CE}$  ab.

### 1.3 Kenn- und Grenzwerte des Transistors

Um den Arbeitsbereich eines Transistors nach Bild IV-10 einzugrenzen, sind Grenzwerte und Kenn-  
daten zu ermitteln und zuzuordnen.

Grenzwerte: zu hohe Kollektor-Emitter-Spannung  $U_{CE} > U_{CE\text{ max}}$ , zu großer Kollektorstrom  $I_C > I_{C\text{ max}}$ , zu große Verlustleistung  $P_V > P_{\text{tot}}$ , zu hohe Sperr-

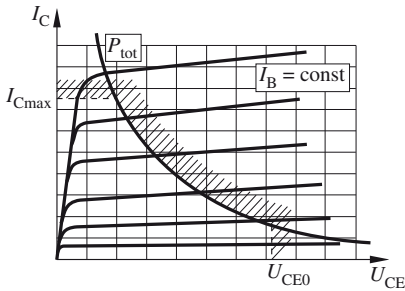


**Bild IV-10** Zulässiger Arbeitsbereich eines Transistors

Temperaturabhängigkeit der zulässigen Gesamtverlustleistung

$$P_{\text{tot}} = f(T_U); R_{\text{th}} = \text{Parameter}$$

BC 237, BC 238, BC 239

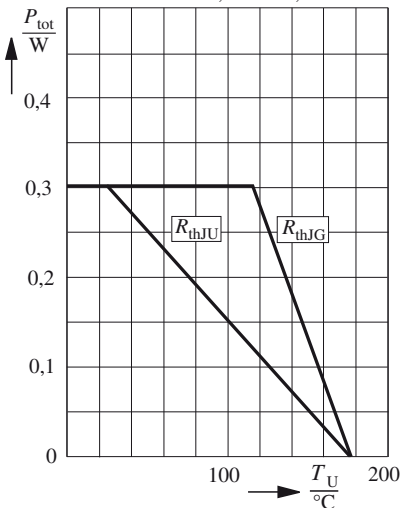


**Bild IV-11** Verlustleistung in Abhängigkeit von der Umgebungstemperatur

schichttemperatur  $\vartheta_J > \vartheta_{J \max}$ , zu große Basis-Emitter-Spannung  $U_{BE} > U_{BE \max}$ , zu großer Basisstrom  $I_B > I_{B \max}$  können zur Zerstörung des Transistors führen.

Das Diagramm nach Bild IV-11 zeigt, wie hoch die Verlustleistung bei einer bestimmten Umgebungstemperatur sein darf. Wird jedoch die im Transistor erzeugte Wärme durch einen Kühlkörper  $R_{\text{thJG}}$  oder durch eine Montage auf ein Chassis besser abgeführt, so ist die Gesamtverlustleistung auch noch bei höheren Umgebungstemperaturen zulässig.

*Gesamtverlustleistung*

$$P_V = U_{CE} \cdot I_C + U_{BE} \cdot I_B \leq P_{\text{tot}} \quad (\text{IV.7})$$

Wegen

$$U_{CE} \cdot I_C \gg U_{BE} \cdot I_B$$

gilt

$$P_V \approx U_{CE} \cdot I_C \leq P_{\text{tot}} \quad (\text{IV.8})$$

Durch die Verlustleistung bei Dauerbetrieb entsteht in der Sperrschicht Wärme; die Sperrschichttemperatur erhöht sich. Sie darf bestimmte Werte nicht überschreiten, weil der Kristall ansonsten seine Halbleitereigenschaften stark verändert und der Transistor zerstört wird. Die zulässige Sperrschichttemperatur  $T_J$  hängt vom Halbleitermaterial ab.

Sperrschichttemperatur  $\vartheta_J \approx 90^\circ\text{C}$  bei Germanium-Transistoren und  $\vartheta_J \approx 150^\circ\text{C}$  bis  $200^\circ\text{C}$  bei Silizium-Transistoren.

Oberhalb einer bestimmten, vom Basisstrom abhängigen Kollektor-Emitter-Spannung wächst der Kollektorstrom plötzlich sehr stark mit  $U_{CE}$  an. Dieses Verhalten wird als „2. Durchbruch“ bezeichnet. Hier darf ein Transistor nicht mehr betrieben werden.

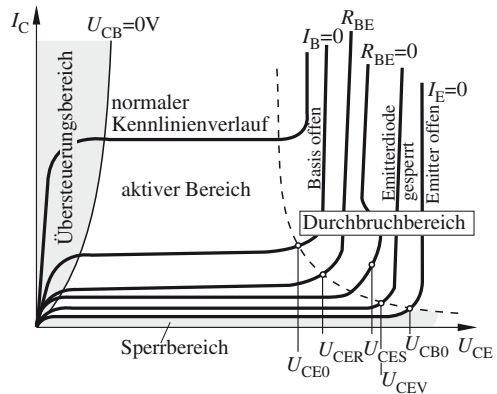


**Bild IV-12** Durchbruchspannungen und Restströme eines Transistors

Bild IV-12 zeigt die wichtigsten Durchbruchspannungen und die zugehörigen Restströme.

Es gilt folgende Beziehung:

$$U_{CE0} < U_{CER} < U_{CES} < U_{CEV}$$

Statische Kenndaten: Gleichstromverstärkung  $B$ , Sättigungsspannung  $U_{CE \text{ sat}}$ , Restströme  $I_{CE0}$

Die *Sättigungsspannung* ist vor allem dann von Interesse, wenn ein Transistor im Schalterbetrieb arbeitet. Sie ist die Spannung, die zwischen Kollektor und Emitter abfällt, wenn der Transistor voll durchgesteuert ist. Sie wird auch Restspannung genannt. Gerade bei kleinen Kollektorstromwerten macht sich in den pn-Übergängen der Reststrom störend bemerkbar. Wenn der Basisstrom noch Null ist, fließt zum Beispiel schon ein geringer Kollektorstrom. Dies ist der Kollektor-Emitter-„Reststrom“  $I_{CE0}$ . Das ist der auf der Eigenleitung beruhende Sperrstrom der Kollektor-Emitter-Strecke; er ist stark temperaturabhängig.

Die oben beschriebenen Kennlinien liefern die Daten für die Gleichstromsteuerung und den Großsignalbetrieb. Infolge der Krümmung der meisten Kennlinien muss man zur Beschreibung des Kleinsignalverhaltens des Transistors die Steigung der Kennlinien im Arbeitspunkt verwenden (Tangente an die Kennlinie im AP).

Die grafische Ermittlung dieser Kennwerte ist meist ungenau. Sie werden darum in den Datenblättern der Hersteller als Zahlenwert genannt. Die Datenblätter geben die *dynamischen Kenngrößen* in Form der *h*-Parameter oder *y*-Parameter an, die nur für einen bestimmten Arbeitspunkt, eine bestimmte Temperatur und eine bestimmte Frequenz gelten. Sie stellen die Wechselstrom-(Signal-)kennwerte dar.

Während diese Transistor-Kenndaten im NF-Bereich meist als *h*-Parameter angegeben sind, werden sie im HF-Bereich und bei den Feldeffekttransistoren als *y*-Parameter dargestellt. Diese Parameter sind Verhältnissgrößen und beschreiben wegen der Vierpoltheorie das Gesamtverhalten eines Transistors als Kleinsignalverstärker, wenn man ihn als Vierpol nach Bild IV-13 betrachtet.

$$u_1 = h_{11} \cdot i_1 + h_{12} \cdot u_2, \quad i_2 = h_{21} \cdot i_1 + h_{22} \cdot u_2$$

Die Begriffe kurzgeschlossener und offener Eingang oder Ausgang beziehen sich immer auf den Wechselspannungsanteil eines Signals. Ein solcher Kurzschluss lässt sich zum Beispiel leicht mit Hilfe eines ausreichend großen Kondensators herstellen.



**Bild IV-13** Transistor als Vierpol

Auf Transistoren angewendet:

$$u_{BE} = h_{11} \cdot i_B + h_{12} \cdot u_{CE}, \quad i_C = h_{21} \cdot i_B + h_{22} \cdot u_{CE} \quad (\text{IV.9})$$

Die in den Datenblättern angegebenen Parameter gelten immer nur für einen ganz genau definierten Arbeitspunkt. Soll der Transistor in einem anderen Arbeitspunkt betrieben werden, müssen die *h*-Parameter für den neuen Arbeitspunkt umgerechnet werden.

Aus den Diagrammen nach Bild IV-14 lässt sich jeweils der Faktor  $H_e$  für den neugewählten Kollektorstrom oder für die neugewählte Kollektorspannung ablesen. Daraus lassen sich die *h*-Parameter für den neuen Arbeitspunkt berechnen.

*umgerechnete h-Parameter*

$$\begin{aligned} h_{\text{neu}} &= h_{\text{alt}} \cdot H_{\text{ci}} \\ h_{\text{neu}} &= h_{\text{alt}} \cdot H_{\text{eu}} \\ h_{\text{neu}} &= h_{\text{alt}} \cdot H_{\text{ci}} \cdot H_{\text{eu}} \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

Mit den *h*-Parametern lässt sich das für alle Grundschaltungen des Transistors gültige Wechselstrom-Ersatzschaltbild nach Bild IV-15 beschreiben.

**Tabelle IV-1** Bedeutung der *h*-Parameter

**Bedeutung der *h*-Parameter**

Ermittlung aus Kennlinien/Messgrößen:

$$h_{11} = r_{BE} = \frac{\Delta U_{BE}}{\Delta I_B} = \frac{u_{BE}}{i_B} \quad \text{Kurzschluss-Eingangswiderstand (Einheit } \Omega \text{)}$$

für  $U_{CE} = \text{const}$  und  $u_{CE} = 0$

$$h_{12} = D_u = \frac{\Delta U_{BE}}{\Delta U_{CE}} = \frac{u_{BE}}{u_{CE}} \quad \text{Leerlauf-Spannungsrückwirkung (dimensionslos)}$$

für  $I_B = \text{const}$  und  $i_B = 0$

$$h_{21} = \beta = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B} = \frac{i_C}{i_B} \quad \text{Kurzschluss-Stromverstärkung (dimensionslos)}$$

für  $U_{CE} = \text{const}$  und  $u_{CE} = 0$

$$h_{22} = \frac{1}{r_{CE}} = \frac{\Delta I_C}{\Delta U_{CE}} = \frac{i_C}{u_{CE}} \quad \text{Leerlauf-Ausgangsleitwert (Einheit eines Leitwertes)}$$

für  $I_B = \text{const}$  und  $i_B = 0$



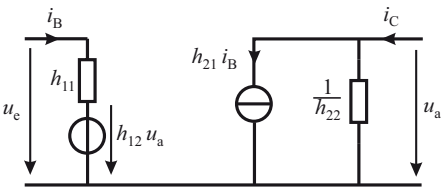
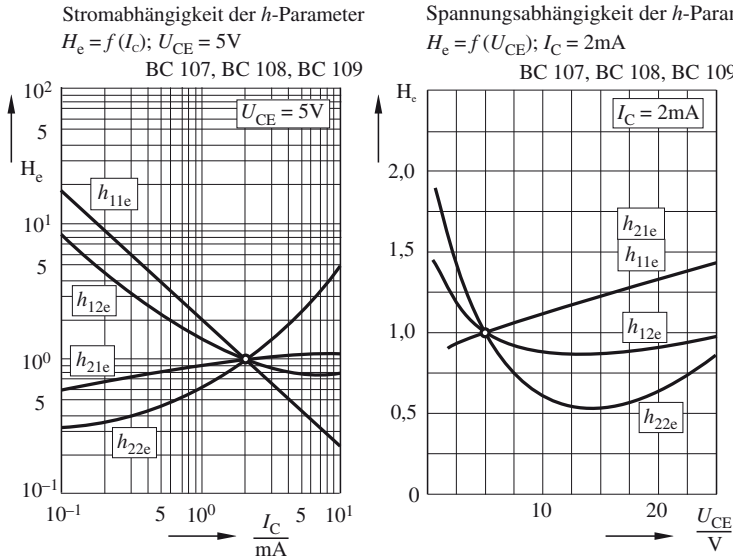


**Bild IV-15** Wechselstrom-Ersatzschaltbild eines Transistors

In den Datenblättern werden häufig die für die Emitterschaltung gültigen  $h$ -Parameter ( $h$ -Parameter mit dem Index „e“ gekennzeichnet) angegeben, die sich mit Hilfe der Gleichungen in Tabelle IV-2 leicht in die  $h$ -Parameter für die anderen Grundschaltungen umrechnen lassen.

**Tabelle IV-2** Umrechnungsfaktoren

| Basisschaltung                                               | Kollektorschaltung                                |
|--------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| $h_{11b} = \frac{h_{11e}}{\Sigma h_e}$                       | $h_{11c} = h_{11e}$                               |
| $h_{21b} = -\frac{h_{21e} + \Delta h_e}{\Sigma h_e}$         | $h_{21c} = -h_{21e} - 1$                          |
| $\Delta h_e = h_{11e} \cdot h_{22e} - h_{12e} \cdot h_{21e}$ | $h_{22c} = h_{22e}$                               |
| $h_{12b} = -\frac{h_{12e} - \Delta h_e}{\Sigma h_e}$         | $h_{12c} = -h_{12e} + 1$                          |
| $h_{22b} = \frac{h_{22e}}{\Sigma h_e}$                       | $\Sigma h_e = 1 - h_{12e} + h_{21e} + \Delta h_e$ |

Wichtig für das Wechselstromverhalten sind die Sperrschichtkapazitäten des Transistors; ihr Wert hängt von der anliegenden Sperrspannung ab. Die Kollektor-Basis-Kapazität  $C_{CB}$  liegt zwischen Emitter- und Basis-Anschluss im Gegenkopplungskreis und bildet mit dem Ausgangswiderstand des Transistors einen Hochpass für die Signalfrequenzen.

Zusätzlich macht sich bei höheren Frequenzen auch die Laufzeit der Ladungsträger durch den Transistor bemerkbar.

Aus diesen Gründen wird die Stromverstärkung  $\beta$  des Transistors mit zunehmender Frequenz kleiner. Bei der Grenzfrequenz  $f_g$  ist die Verstärkung um 3 dB gesunken.

Die Frequenzabhängigkeit der Stromverstärkung eines Transistors ist in Bild IV-16 im Prinzip dargestellt.

Die Frequenz, bei der  $\beta = 1$  ist, wird als Transitfrequenz  $f_T$  bezeichnet. Die Transitfrequenz  $f_T$  hängt sowohl vom Kollektorstrom als auch von der Spannung ab.

Bei Kleinsignalverstärkern mit geringen Eingangsleistungen ist das Rauschen von Transistoren im NF- und HF-Bereich von Bedeutung.

Das Stromrauschen ist dabei auf Unregelmäßigkeiten im Ladungsträgerfluss zurückzuführen. Solche Effekte treten in Halbleitern durch Generation und Rekombination von Ladungsträgern auf, aber auch an Metall-Halbleiterübergängen.

Thermisches Rauschen dagegen beruht auf der regellosen Bewegung thermisch angeregter Ladungsträger.

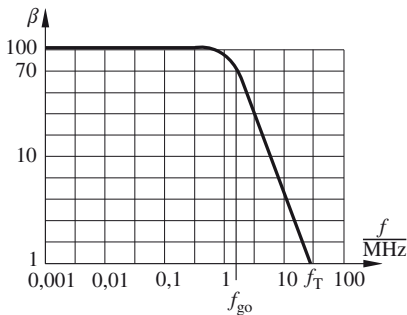


**Bild IV-16** Stromverstärkung in Abhängigkeit von der Frequenz

Mit der Zunahme der Temperatur steigt auch das thermische Rauschen an.

Ein Maß für das in einem Transistor erzeugte Rauschen ist die *Rauschzahl*  $F$ , die in den Datenblättern meistens im logarithmischen Wert in dB angegeben ist. Hiermit kann nun bei einer gegebenen Verstärkerschaltung die Mindestnutzspannung berechnet werden, die am Eingang anliegen muss, damit am Ausgang des Verstärkers das Nutzsignal um einen bestimmten Faktor größer als das Rauschen ist.

Die so erzeugte Rauschspannung deckt unter Umständen ein weites Frequenzband ab und führt bei sehr geringen Signalspannungen in der Nachrichtentechnik zu erheblichen Problemen.

**2 Feldeffekttransistoren (FET)**

Neben den bipolaren Transistoren gibt es die „unipolaren“ Transistoren, bei denen am Ladungsträgertransport nur eine Ladungsträgerart, also entweder Löcher oder Elektronen, beteiligt sind. Die Steuerung des Stromflusses erfolgt bei ihnen durch ein elektrisches Feld. Deshalb wird bei den unipolaren Transistoren auch von „Feld-Effekt-Transistoren“ (FET) gesprochen.

Grundsätzlich muss zwischen zwei FET-Gruppen unterschieden werden, und zwar zwischen den Sperrschicht-FET (auch J-FET genannt) und den IG-FET (IG = isoliertes Gate). Bei den IG-FET unterscheidet man zwischen den Typen je nach technischer Ausführung der Isolierschicht und dem verwendeten dotierten Halbleitermaterial. Eine Übersicht bietet Bild IV-17.

In der heutigen Technologie verwendet man als Isolierschicht fast ausschließlich Siliziumdioxid. Daher kommen MOS-FET (metal-oxide-semiconductor) am häufigsten vor.

Da die Steuerung des Stroms im FET über ein elektrisches Feld erfolgt, fließt in den Steuereingang des FET (Gate G) quasi kein Strom. Folglich hat der FET einen sehr hohen Eingangswiderstand und wird nahezu leistungslos angesteuert.

Der Einsatz als Wechselspannungsverstärker beschränkt sich dabei fast nur auf die Vorverstärkerstufe im HF- und NF-Bereich. Das Hauptanwendungsgebiet der FET liegt jedoch bei den integrierten Schaltungen der Analogtechnik und insbesondere der Digitaltechnik, also Verwendung als Schalter.

Die Weiterentwicklung der FET hat zu Typen wie VMOSFET, SIPMOSFET und IGBT geführt, die die Einsatzgebiete ausgedehnt haben.

**2.1 Aufbau und Wirkungsweise des Sperrschicht-FET**

Sperrschicht-FET werden als P-Kanal- oder N-Kanal-Typ hergestellt. Ihre Schaltzeichen sind in Bild IV-18 dargestellt. Im folgenden wird ein *N-Kanal-Typ* beschrieben.

Bei einem *P-Kanal-Typ* sind lediglich die Kanal- und Gatedotierung sowie die Polaritäten der Spannungen zu vertauschen.

Bild IV-19 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines N-Kanal-Sperrschicht-FET mit den drei Anschlüssen Gate G, Drain D und Source S. Er besteht im wesentlichen aus einem länglichen Stück n-dotierten

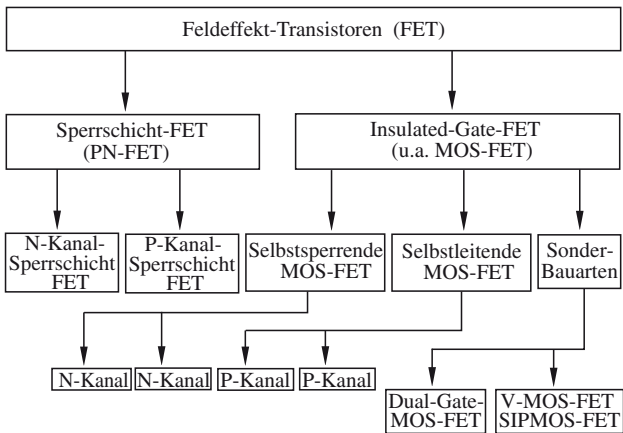


**Bild IV-17**  
Übersicht zu den Transistoren

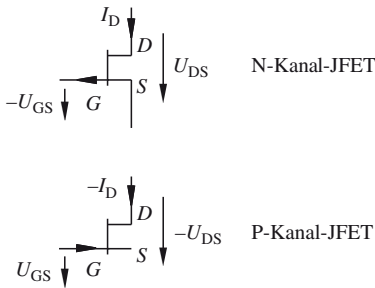


**Bild IV-18** Schaltzeichen eines Sperrschicht-FET vom N-Kanal-Typ oder P-Kanal-Typ

Halbleitermaterial, dessen Anschlüsse an den Enden Drain (engl.: Abfluss, Senke) und Source (engl.: Quelle) genannt werden. In die Seiten wird p-dotiertes Halbleitermaterial eindiffundiert, so dass pn-Übergänge entstehen. Diese sind miteinander verbunden und bilden den Gate-Anschluss. Durch eine entsprechende Steuerspannung  $U_{GS}$  zwischen dem Gate- und Source-Anschluss wird der pn-Übergang in Sperrrichtung betrieben, so dass in den Steueranschluss lediglich ein geringer Sperrstrom fließt. Der pn-Übergang darf nicht in Durchlassrichtung betrieben werden! Verbindet man nun das Gate mit dem Source und legt zwischen Drain und Source eine Spannung  $U_{DS}$  nach Bild IV-20a, so bildet sich an beiden pn-Übergängen eine Sperrschicht. Dadurch reduziert sich die für die Leitfähigkeit wirksame Kanalbreite, so dass der Kanalwiderstand erhöht wird.

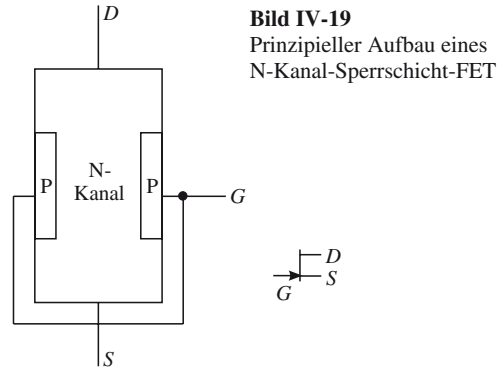


**Bild IV-19**  
Prinzipieller Aufbau eines N-Kanal-Sperrschicht-FET

Wird die Spannung  $U_{DS}$  fortwährend erhöht, so wird der Kanal nach Bild IV-20b schmaler, bis die beiden Sperrschichten aneinander stoßen und den Kanal abschnüren. Am Drain-Anschluss ist die Abschnürung deutlicher.

Dieser Wert der Spannung  $U_{DS}$  wird maximale Sättigungsspannung  $U_{DSS}$  genannt. Den zugehörigen Wert des Stroms  $I_D$  nennt man maximaler Sättigungsstrom  $I_{DS}$ . Für Werte  $U_{DS} > U_{DSS}$  bleibt der Stromfluss erhalten.

Durch eine negative Steuerspannung  $U_{GS}$  nach Bild IV-21a wird die Breite der Sperrschicht an den pn-Übergängen beeinflusst. Im Betrieb überlagern sich die Wirkungen der beiden Spannungen und zeigen die in Bild IV-21b beschriebene Eingrenzung des Kanals.

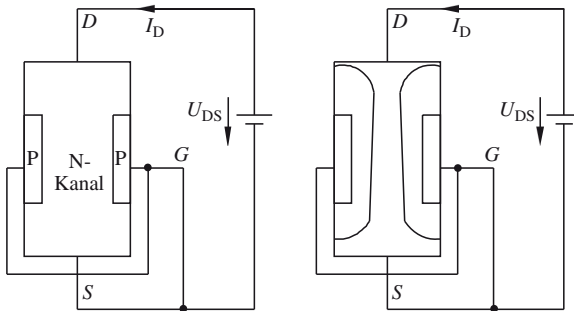


**Bild IV-20**  
Abhängigkeit der Kanalbreite von der Drain-Source-Spannung  $U_{DS}$

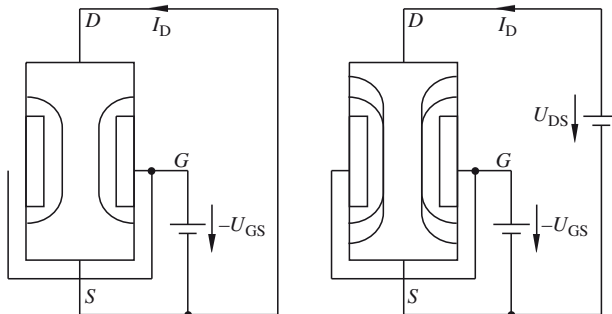


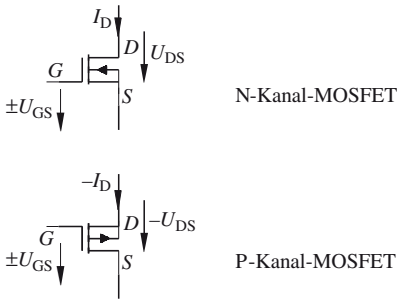
**Bild IV-21**  
Abhängigkeit der Kanalbreite von  $U_{DS}$  und der Steuerspannung  $U_{GS}$

Die Steuerspannung  $U_{GS}$  darf bei einem N-Kanal-PN-FET nicht positiv werden, da dieses zur Zerstörung des Bauelementes führen kann.

2.2 Aufbau und Wirkungsweise des MOSFET

Beim Sperrschicht-FET wird die Veränderung des wirksamen Kanalquerschnittes zur Einstellung des Widerstandes der Drain-Source-Strecke benutzt. Beim FET mit isoliertem Gate hingegen wird die Variation des Kanalwiderstandes mit Hilfe der Ladungsträgerdichte betrieben, wobei die Anzahl der geeigneten Ladungsträger zwischen Drain und Source durch ein elektrisches Feld gesteuert wird. Hierbei unterscheidet man generell zwei Versionen.

Der IG-FET vom Normally-On-Typ (auch Verarmungstyp, Depletion-Typ genannt) nach Bild IV-22 ist genau wie der Sperrschicht-FET ein selbstleitender Typ. Bei einer Steuerspannung  $U_{GS} = 0\text{ V}$  existiert bereits ein leitender Kanal zwischen Drain und Source, dessen Ladungsträgerdichte je nach Kanalart (N-Kanal oder P-Kanal) und der Polarität der Steuerspannung weiter erhöht oder verringert werden kann.



Normally-On-Typ

Bild IV-22 Schaltzeichen selbstleitender IG-FET

Der prinzipielle Aufbau eines selbstleitenden N-Kanal-MOS-FET ist in Bild IV-23 dargestellt. Der Gate-Anschluss ist vom Halbleitermaterial durch eine Isolierschicht getrennt. Bei einer Steuerspannung  $U_{GS} = 0\text{ V}$  fließt durch den N-Kanal bereits ein Drainstrom. Durch eine negative Steuerspannung  $U_{GS}$  nimmt die Elektrendichte im Kanal ab, da die Elektronen durch das elektrische Feld abgedrängt werden. Damit nimmt aber der Widerstand zwischen Drain und Source zu. Bei  $U_{GS} = U_p$  existiert kein N-Kanal mehr zwischen Drain und Source, dass heißt, der Drainstrom  $I_D$  wird zu Null. Legt man eine positive Steuerspannung an das Gate, so wird die Ladungsträgerdichte im Kanal größer; die Leitfähigkeit des Kanals wird vergrößert. Der IG-FET kann sowohl über die Gate-Source-Spannung als auch über eine Spannung zwischen Bulk B und Source S gesteuert werden. Der Einfluss dieser Spannung ist aber geringer, und diese Steuerungsmöglichkeit wird seltener genutzt. Meist sind Bulk und Source miteinander intern verbunden.

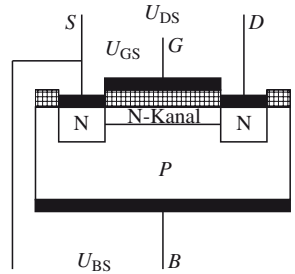
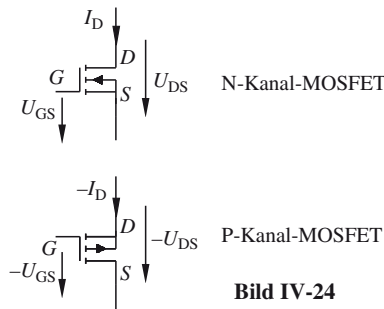


Bild IV-23 Prinzipieller Aufbau eines selbstleitenden N-Kanal-MOS-FET

Die Funktion eines selbstleitenden P-Kanal-MOS-FET entspricht der des selbstleitenden N-Kanal-MOS-FET.

Der IG-FET vom Normally-Off-Typ (auch Anreicherungs-, Enhancement- oder selbstsperrender Typ genannt) nach Bild IV-24 besitzt bei einer Steuerspannung  $U_{GS} = 0\text{ V}$  keinen leitfähigen Kanal zwischen Drain und Source. Er bildet sich erst, wenn die angelegte Steuerspannung einen Schwellenwert  $U_{GS(TO)}$  überschreitet.



Normally-Off-Typ

Bild IV-24 Schaltzeichen selbstsperrender IG-FET

Der prinzipielle Aufbau eines selbstsperrenden N-Kanal-MOS-FET ist in Bild IV-25 dargestellt. Bei einer Steuerspannung  $U_{GS} = 0\text{ V}$  fließt kein Drainstrom, da ein Kanal nicht durch entsprechende Dotierung eingebaut wurde.

Legt man eine positive Steuerspannung an das Gate, so werden Elektronen aus dem p-dotierten Substrat in Richtung Gate gezogen und führen dort zur Ausbildung eines N-Kanals. Der zum Fließen kommende Drainstrom wird um so größer, je größer die positive Steuerspannung wird.

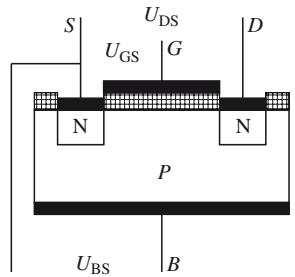


Bild IV-25 Prinzipieller Aufbau eines selbstsperrenden N-Kanal-MOS-FET

Die Funktion eines selbstsperrenden P-Kanal-MOS-FET entspricht der des selbstsperrenden N-Kanal-MOS-FET.

### 2.3 Kennlinien von FET

Bei einem J-FET fließt in das Gate nur der Sperrstrom des pn-Übergangs, so dass eine Eingangskennlinie für den PN-FET nicht existiert. Interessant sind die Steuer- und Ausgangskennlinie eines J-FET nach Bild 4-26.

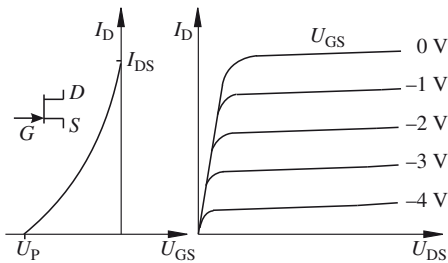


**Bild IV-26** Steuer- und Ausgangskennlinie eines J-FET

Diesen Kennlinien können alle relevanten Gleichspannungs- und -stromwerte entnommen werden. Bild IV-27 zeigt die Steuerkennlinie  $I_D = f(U_{GS})$  eines J-FET. Die Steuerkennlinie gilt für  $U_{DS} = \text{const.}$  Bei  $U_{GS} = 0 \text{ V}$  hat der Drainstrom  $I_D$  eines J-FET seinen höchsten Wert  $I_{DS}$  und verringert sich mit negativer werdender Steuerspannung. Die Spannung  $U_{GS}$ , bei der der Drainstrom auf Null reduziert ist, wird Abschnürspannung  $U_P$  (engl. pinch-off-voltage) genannt und liegt je nach Typ bei Werten zwischen 2 V und 10 V.

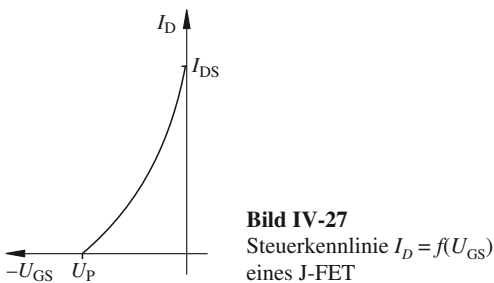


**Bild IV-27**  
Steuerkennlinie  $I_D = f(U_{GS})$   
eines J-FET

Während bei den bipolaren Transistoren der Kollektorstrom mit steigender Temperatur ebenfalls ansteigt, wird der Drainstrom beim J-FET mit steigender Temperatur kleiner.

Dies hat seine Ursache darin, dass die frei beweglichen und durch Dotierung entstandenen Ladungsträger durch die thermische Eigenbewegung der Atome in ihrer Beweglichkeit gemindert werden. Mit steigender Temperatur wird aber auch die Abschnürspannung größer. Beide Effekte zusammen haben zur Folge, dass es einen Drainstromwert gibt, der tempera-

taturunabhängig ist, dass heißt, der Temperaturkoeffizient wird Null. Bild IV-28 zeigt den Temperatureinfluss auf die Übertragungskennlinie.

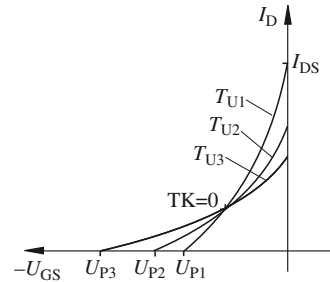


**Bild IV-28**  
Temperatureinfluss auf die Übertragungskennlinie

Die Gate-Source-Spannung  $U_{GSK}$  für den temperaturunabhängigen Kompensationspunkt lässt sich in Näherung berechnen.

$$\text{Gate-Source-Spannung } U_{GSK} \approx U_P + 0,7 \text{ V}$$

Soweit möglich sollte dieser Wert mit der Steuerspannung eingestellt werden, um eine thermische Arbeitspunktstabilisierung unnötig zu machen. Von Nachteil ist hier, dass die Kennlinie keine Gerade ist und somit das Ausgangssignal verzerrt sein kann.

Das Ausgangskennlinienfeld ( $I_D$ - $U_{DS}$ -Kennlinie mit  $U_{GS}$  als Parameter) nach Bild IV-29 lässt sich mit Unterstützung durch Bild IV-26 qualitativ erklären.

Steigert man die Spannung  $U_{DS}$  von Null an, so steigt der Strom  $I_D$  bei  $U_{GS} = \text{const}$  zunächst linear mit der Spannung, der Kanalwiderstand bleibt in etwa konstant (ohmscher Bereich). Mit wachsendem Strom beginnt sich der Kanal merklich zu verengen, der Kanalwiderstand nimmt zu, und der Anstieg von  $I_D$  mit  $U_{DS}$  wird immer geringer, bis beide Sperrschichten sich nahezu berühren. Man sagt, der Kanal ist abgeschnürt.

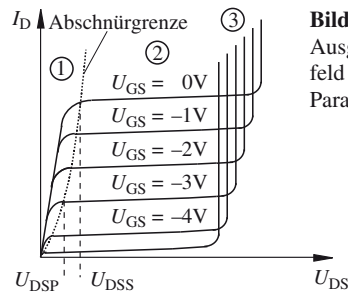


**Bild IV-29**  
Ausgangskennlinienfeld mit  $U_{GS}$  als Parameter

Die Drain-Source-Spannung  $U_{DSP}$ , bei der diese Abschnürung (pinch off) eintritt, ist in Bild IV-29 eingezeichnet.  $U_{DSP}$  wird auch Kniespannung genannt.

$$\text{Abschnürspannung } U_{DSP} \equiv U_{DSS} + U_{GS} \quad (\text{IV.11})$$

Mit wachsender Steuerspannung  $U_{GS}$  wird die Abschnürspannung früher, dass heißt bei kleinerem Strom  $I_D$  und kleineren Werten von  $U_{DSP}$  erreicht. Die  $I_D$ - $U_{DS}$ -Kennlinien verschieben sich daher mit zuneh-

mender Gate-Source-Sperrspannung zu kleineren Drainstromwerten.

Verbindet man alle Abschnürpunkte nach Bild IV-29 miteinander, so erhält man die *Abschnürgrenze*, die den ohmschen Bereich (Bereich 1) vom aktiven Bereich (Bereich 2) – auch Sättigungsbereich genannt – trennt. Oberhalb von  $U_{DSP}$  steigt der Drainstrom nur noch wenig an.

Wird die Spannung  $U_{DS}$  zu weit erhöht, so kommt es zu einem Durchbruch (Bereich 3) zwischen Drain und Source, wobei der Drainstrom so stark ansteigt, dass die Gefahr der Zerstörung des FET eintritt.

Da der J-FET eine quadratische Abhängigkeit des Drainstroms von der Steuerspannung hat, sind seine nichtlinearen Verzerrungen bei einer Spannungsaussteuerung wesentlich geringer als beim bipolaren Transistor.

Für das Betreiben des J-FET im aktiven Bereich, sprich Verstärkerbereich, lässt sich somit die Steilheit  $S$  errechnen. Praktische Werte für die maximale Steilheit liegen zwischen 1 mA/V und 50 mA/V. Die Steilheit  $S$  ist ein direktes Maß für die Spannungsverstärkung einer J-FET-Verstärkerstufe. Je größer  $S$ , umso größer ist auch die zu erwartende Spannungsverstärkung  $V_u$ .

Im ohmschen Bereich kann der J-FET als spannungsgesteuerter Widerstand eingesetzt werden.

Bei den IG-FET fließt kein Strom in das Gate, da es durch eine Isolierungsschicht vom übrigen Halbleiter getrennt ist, so dass auch hier keine Eingangskennlinie existiert.

Die Steuer- und Ausgangskennlinie eines selbstleitenden N-Kanal-MOS-FET, also vom Normally-On-Typ, zeigt Bild IV-30.

Diesen Kennlinien können alle relevanten Gleichspannungs- und Stromwerte entnommen werden. Da auch der PN-FET ein selbstleitender FET ist, ergeben sich hier generell zahlreiche Übereinstimmungen im Verhalten.

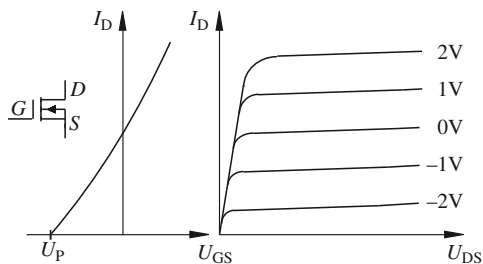


**Bild IV-30** Steuer- und Ausgangskennlinie eines selbstleitenden N-Kanal-MOS-FET

Für die Ausgangskennlinie ( $I_D$ - $U_{DS}$ -Kennlinie) gelten im Prinzip die Aussagen zum J-FET. Hier wird die Spannung  $U_{GS}$  als Parameter verwendet, während die Drain-Source-Spannung verändert wird.

Deutlich erkennbar ist die Abhängigkeit des Drainstroms  $I_D$  vom Wert der negativen und positiven

Steuerspannung  $U_{GS}$ . Der Normally-On-Typ kann also sowohl als Verarmungs-FET als auch wie ein Anreicherungs-FET betrieben werden.

Der Drainstrom kann durch eine positive Gatespannung  $U_{GS}$  nicht weiter beliebig erhöht werden, weil ab einem bestimmten Spannungswert eine Vergrößerung der Leitfähigkeit des Kanals nicht mehr möglich ist.

Die Steuerkennlinie ( $I_D$ - $U_{DS}$ -Kennlinie) des selbstleitenden N-Kanal-MOS-FET zeigt, dass bereits bei  $U_{GS} = 0$  V ein Drainstrom fließt. Selbstleitende MOS-FET haben wie die J-FET einen geringen positiven Temperaturkoeffizienten. Der Drainstrom wird also mit steigender Temperatur kleiner. Die Gate-Source-Spannung  $U_{GSK}$  für den temperaturunabhängigen Kompensationspunkt lässt sich in Näherung berechnen.

$$\text{Gate-Source-Spannung } U_{GSK} \approx U_p + 2,5 \text{ V} \quad (\text{IV.12})$$

Die Steuer- und Ausgangskennlinie eines selbstsperrenden N-Kanal-MOS-FET, also vom Normally-Off-Typ, zeigt Bild IV-31. Diesen Kennlinien können alle relevanten Gleichspannungs- und Stromwerte entnommen werden.

Die Schwellenspannung  $U_{GS(TO)}$  kann als die Spannung an der Gateelektrode verstanden werden, die die Störstellenladung und die Raumladung kompensiert.

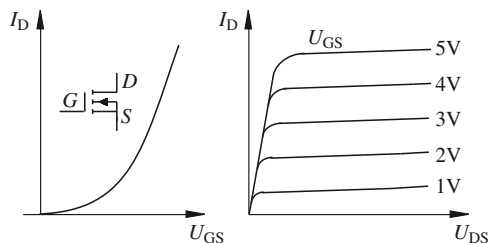


**Bild IV-31** Steuer- und Ausgangskennlinie eines selbstsperrenden N-Kanal-MOS-FET

Sie ist nur geringfügig von der Temperatur abhängig. Darum lässt sich die Steuerspannung  $U_{GSK}$  für einen temperaturkompensierten Arbeitspunkt gut näherungsweise berechnen.

$$\text{Steuerspannung } U_{GSK} \approx U_{GS(TO)} + 2,5 \text{ V} \quad (\text{IV.13})$$

Je größer die Steuerspannung  $U_{GS}$  ist, um so größer wird der Drainstrom. Ein maximaler Sättigungsstrom lässt sich daher nicht angeben.

## 2.4 Kennwerte von FET

Wie bei den bipolaren Transistoren und Dioden unterscheidet man auch hier Kenn- und Grenzwerte. Für die Kenngrößen werden in den Datenblättern je nach Bedarf Mittelwerte und/oder obere und/oder untere Streuwerte angegeben. Die Kennliniendarstellungen sind, falls nicht anders vermerkt, Mittelwert-Darstellungen und gelten nur für die jeweils angege-

bene Temperatur. J-FET können auf verschiedene Weise elektrisch überlastet werden:

*Drain-Source-Spannung*  $U_{DS} > U_{DS\max}$

*Drain-Gate-Spannung*  $U_{DG} > U_{DG\max}$

*Gate-Source-Spannung*  $U_{GS} > U_{GS\max}$

*Drain-Strom*  $I_D > I_{D\max} = I_{DSS}$

*Gate-Strom*  $I_G > I_{G\max}$

*Verlustleistung*  $P_V > P_{\text{tot}}$

*Sperrschichttemperatur*  $\vartheta_J > \vartheta_{J\max}$

Liegt zwischen dem Kanal- und dem Gate-Anschluss eine zu hohe Spannung, kann der in Sperrrichtung betriebene pn-Übergang zerstört werden. Die Spannungswerte  $U_{DS\max}$ ,  $U_{DG\max}$  und  $U_{GS\max}$  dürfen nicht überschritten werden und liegen bei den heute verwendeten N-Kanal-J-FET etwa zwischen 20 V und 30 V.

Der durch das Gate fließende Sperrstrom ist normalerweise vernachlässigbar klein. Bei kurzzeitigem Betrieb des pn-Überganges in Durchlassrichtung darf der dann fließende Strom  $I_G$  den Wert  $I_{G\max}$  nicht überschreiten.  $I_G$  liegt meistens in der Größenordnung von 10 mA.

Beim Betrieb eines FET liegt zwischen Drain und Source die Spannung  $U_{DS}$ , und es fließt der Strom  $I_D$ . Daraus ergibt sich eine Verlustleistung, die im FET zur Erwärmung des Kristalls führt. Diese Verlustleistung  $P_V$  muss kleiner als die größte zulässige Verlustleistung  $P_{\text{tot}}$  sein.

#### Temperaturabhängigkeit der zulässigen Gesamtverlustleistung

$$P_{\text{tot}} = f(T_U)$$

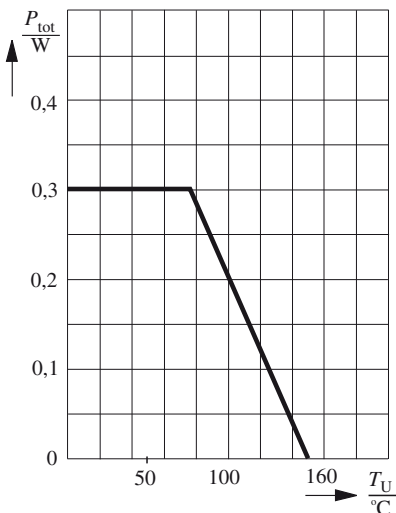


**Bild IV-32** Temperaturabhängigkeit der zulässigen Verlustleistung

#### totale Verlustleistung

$$P_V = U_{DS} \cdot I_D \leq P_{\text{tot}} \quad (\text{IV.14})$$

Hauptsächlich durch die Verlustleistung im Dauerbetrieb entsteht in der Sperrzone und im Kanal Wärme, durch die sich die Temperatur im Bauelement erhöht. Die in den Datenblättern angegebene Sperrschichttemperatur  $\vartheta_J$  bezieht sich auf die höchste im Kanal auftretende Kanalttemperatur  $\vartheta_{J\max}$ . Bei den üblichen FET beträgt  $\vartheta_{J\max}$  etwa 150 bis 200 °C.

In den Datenblättern einiger Hersteller wird ein Diagramm für die Temperaturabhängigkeit der zulässigen Verlustleistung angegeben. In Bild IV-32 kann direkt abgelesen werden, wie groß  $P_{\text{tot}}$  bei einer bestimmten Umgebungstemperatur ist.

Mit den statischen Kenndaten wird das Gleichstromverhalten eines FET beschrieben. Die Transistoren werden nach dem Drain-Source-Kurzschlussstrom  $I_{DSS}$  gesucht und eventuell in Gruppen A, B und C eingeteilt. Der Strom  $I_{DSS}$  ist der Drainstrom, der bei einem selbstleitenden FET mit Drain-Source-Kurzschluss fließt.

Der pn-Übergang wird zwischen Gate und Kanal in Sperrrichtung betrieben. Trotzdem fließt hier ein Gate-Reststrom  $-I_{GSS}$ . Wie Bild IV-33 zeigt, hängt die Größe dieses Sperrstroms von der Temperatur ab.

#### Temperaturabhängigkeit des Sperrstromes

$$I_{GSS} = f(T_J)$$

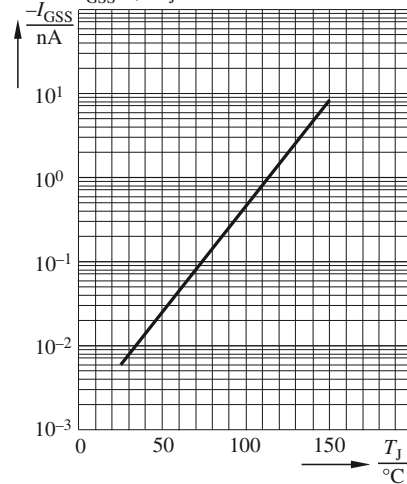


**Bild IV-33** Temperaturabhängigkeit des Sperrstroms

Um einen FET zu sperren, ist die Gate-Source-Abschnürspannung  $-U_p$  erforderlich. Diese Spannung ist arbeitspunktabhängig und unterliegt einer großen Streuung.

Den statischen Eingangswiderstand  $R_{GS}$  des gesperrten pn-Übergangs kann man in Abhängigkeit von der Spannung  $U_{GS}$  aus dem entsprechenden Diagramm in den Datenblättern herauslesen. Er liegt in der Größenordnung von  $10^9$  bis  $10^{11} \Omega$  und kann in vielen Anwendungsfällen vernachlässigt werden.



Für den N-Kanal-J-FET ergeben sich etwa die folgenden praktischen Richtwerte:

*Drain-Source-Spannung*  $U_{DS \max} \approx 25 \text{ V bis } 30 \text{ V}$

*Gate-Source-Spannung*  $U_{GS \max} \approx -8 \text{ V}$

*Drain-Strom*  $I_{D \max} \approx 25 \text{ mA}$

*Gate-Strom*  $I_{G \max} \approx 10 \text{ mA}$

*Verlustleistung*  $P_{\text{tot}} \approx 200 \text{ mW}$

*Sperrschichttemperatur*  $\vartheta_{J \max} \approx 125^\circ \text{C}$

Aufgrund des vorhandenen pn-Übergangs zwischen Bulk und den anderen Anschlüssen müssen die Grenzwerte für diese Spannungen beachtet werden.

*Drain-Bulk-Spannung*  $U_{DB} > U_{DB \max}$

*Gate-Bulk-Spannung*  $U_{GB} > U_{GB \max}$

Infolge des isolierten Gate ergibt sich für den MOS-FET ein sehr hoher Eingangswiderstand  $r_{GS}$  in der Größenordnung von etwa  $10^{15} \Omega$ . Statische Aufladungen können dementsprechend nicht entladen werden, was zu sehr hohen Feldstärken führt, die bei Überschreitung einer bestimmten Feldstärke zu einem Durchschlag und damit zur Zerstörung des MOS-FET führen.

Für den N-Kanal-MOS-FET ergeben sich etwa die folgenden praktischen Richtwerte:

*Drain-Source-Spannung*  $U_{DS \max} \approx 22 \text{ V bis } 35 \text{ V}$

*Drain-Strom*  $I_{D \max} \approx 20 \text{ mA bis } 50 \text{ mA}$

*Verlustleistung*  $P_{\text{tot}} \approx 150 \text{ mW bis } 200 \text{ mW}$

*Sperrschichttemperatur*  $\vartheta_{J \max} \approx \text{bis } 200^\circ \text{C}$

*Drain-Bulk-Spannung*  $U_{DB \max} \approx 30 \text{ V bis } 35 \text{ V}$

Bei der Kleinsignalaussteuerung eines FET können die Kennlinien in einem Bereich um den Arbeitspunkt durch Geraden angenähert werden. Der FET verhält sich dann wie ein linearer, aktiver Vierpol.

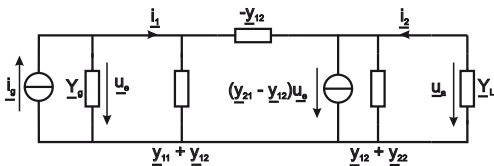


**Bild IV-34** AC-Ersatzschaltbild eines FET

Für diesen Vierpol kann das AC-Ersatzschaltbild bei niedrigen, aber auch bei hohen Frequenzen bestimmt werden. Um das Wechselstromverhalten eines FET zu beschreiben, werden seine dynamischen Kennwerte nach Bild IV-34 angegeben.

Üblich ist es, an Stelle der Hybrid-Koeffizienten ( $h$ -Parameter) die  $y$ -Leitwertparameter anzugeben. Sie sind bei FET sinnvoller, da die Stromverstärkung für FET's nicht angegeben werden kann.

Die  $y$ -Parameter haben komplexe Werte, dass heißt, die Ein- und Ausgangsspannungen  $u_1$  und  $u_2$  beziehungsweise die Ein- und Ausgangsströme  $i_1$  und  $i_2$  sind ebenfalls komplexe Größen.

*Vierpolgleichungen*

$$\underline{i}_1 = \underline{y}_{11} \cdot \underline{u}_e + \underline{y}_{12} \cdot \underline{u}_a \quad (\text{IV.15})$$

$$\underline{i}_2 = \underline{y}_{21} \cdot \underline{u}_e + \underline{y}_{22} \cdot \underline{u}_a$$

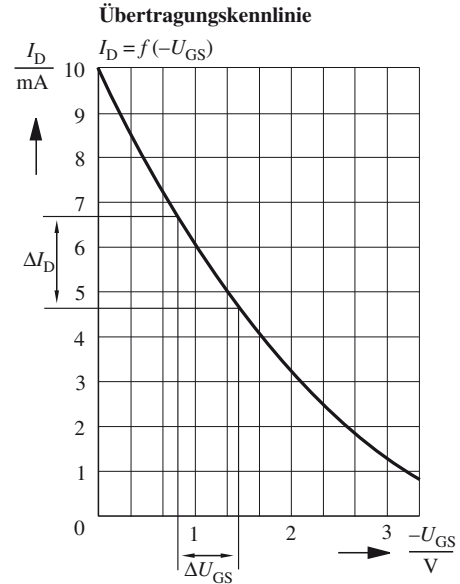


**Bild IV-35** Übertragungskennlinie

Aus der Steuerkennlinie nach Bild IV-35 kann grafisch die Vorwärtssteilheit  $y_{21}$  ermittelt werden. Hierbei wird die Steilheit der Kennlinie im Arbeitspunkt bei  $U_{DS} = \text{const}$  ermittelt.

$$\text{Vorwärtssteilheit } y_{21} = \frac{\Delta I_D}{\Delta U_{GS}} \quad (\text{IV.16})$$

Da eine Annäherung durch eine Gerade im AP häufig zu ungenau ist, steht meistens ein entsprechendes Diagramm nach Bild IV-36 zur Verfügung, aus dem die Steilheit für jeden Drainstrom und die A-, B- oder C-Typen ablesbar ist.

Wichtig ist in diesem Zusammenhang der differentielle Ausgangswiderstand  $r_{ds}$ . Er ist der Kehrwert des Ausgangsleitwertes  $y_{22}$ .

$$\text{Ausgangsleitwert } y_{22} = \frac{\Delta I_D}{\Delta U_{DS}} \quad (\text{IV.17})$$

Der Ausgangsleitwert beschreibt die Steilheit der Ausgangskennlinie im Arbeitspunkt für  $U_{GS} = \text{const}$ . Seine Bestimmung wird im Diagramm nach Bild IV-37 dargestellt.

Da eine Annäherung durch eine Gerade im AP häufig zu ungenau ist, steht i.d.R. ein entsprechendes Dia-

**Vorwärtsteilheit**  $y_{21} = f(I_D)$

$U_{DS} = 15V$ ;  $f = 1 \text{ kHz}$ ;  $T_U = 25^\circ\text{C}$

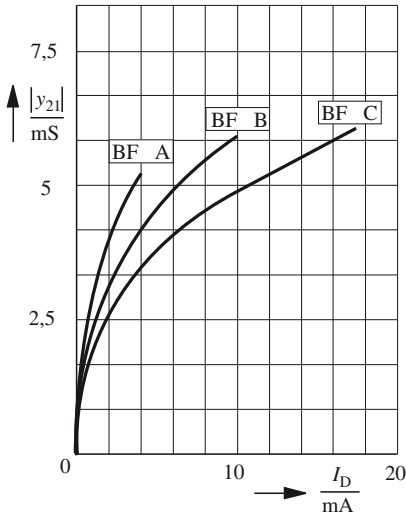


**Bild IV-36** Vorwärtsteilheit

**Ausgangskennlinie**

$I_D = f(U_{DS})$ ;  $U_{GS} = \text{Parameter}$

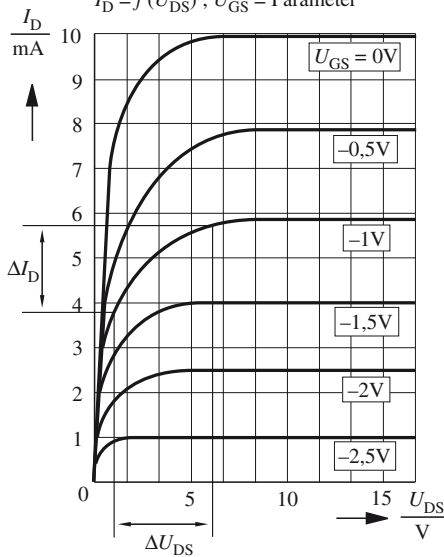


**Bild IV-37** Ausgangskennlinien

gramm nach Bild IV-38 zur Verfügung, aus dem der dynamische Drain-Source-Widerstand für jede Gate-Source-Spannung und die A-, B- oder C-Typen ablesbar ist.

Erheblichen Einfluss haben im HF-Bereich die dort wirksam werdenden Kapazitäten, die beim J-FET durch den pn-Übergang und bei den IG-FET durch die Isolierschichten entstehen. Die Kapazitäten sind es

auch, die die y-Parameter komplex werden lassen. Wir haben Ein- und Ausgangskapazität sowie die Rückwirkungskapazität nach Bild IV-39 zu berücksichtigen.

**Dynamischer Drain-Source-Widerstand**

$r_{DS} = f(-U_{GS})$ ;  $U_{DS} = 0$ ;  $f = 1 \text{ kHz}$ ;  $T_U = 25^\circ\text{C}$

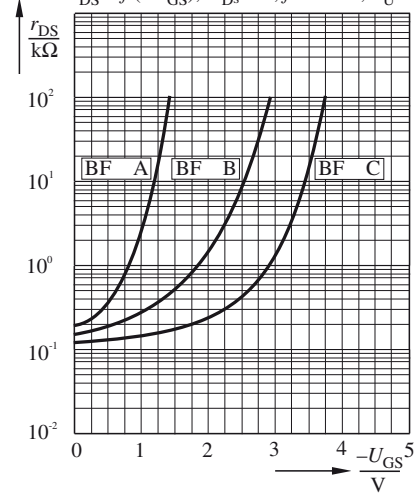


**Bild IV-38** Dynamischer Drain-Source-Widerstand

In den Datenblättern der Hersteller werden *arbeitspunktbezogen* die Werte für die Kurzschluss-Eingangskapazität  $C_{iss}$ , die Kurzschluss-Ausgangskapazität  $C_{oss}$  und die Rückwirkungskapazität  $C_{rss}$  angegeben.

Analog zum bipolaren Transistor lassen sich auch für den FET die *Betriebsgrößen des Vierpols*, nämlich die *Wechselspannungsverstärkung* sowie die *Ein- und Ausgangsleitwerte* anhand des AC-Ersatzschaltbildes nach Bild IV-34 wie folgt berechnen.

Die betriebliche Spannungsverstärkung des Vierpols ist das Verhältnis von Ausgangsspannung zur Eingangsspannung.

*Spannungsverstärkung*

$$\underline{V}_u = \frac{u_a}{u_e} = - \frac{y_{21}}{y_{22} + Y_L} \quad (\text{IV.18})$$

Der Eingangsleitwert des Vierpols ist das Verhältnis von Eingangsstrom zur Eingangsspannung.

*Eingangsleitwert*

$$\underline{y}_i = y_{11} + \frac{y_{12} \cdot y_{21}}{y_{22} + Y_L} = y_{11} + y_{12} \cdot \underline{V}_u \quad (\text{IV.19})$$

Der Ausgangsleitwert des Vierpols ist das Verhältnis von Ausgangsstrom zur Ausgangsspannung. Um ihn bestimmen zu können, wird an den Ausgang eine Spannung  $u_a$  angelegt, während die Stromquelle eine Unterbrechung darstellt.

$$\text{Ausgangsleitwert } \underline{y}_o = \frac{i_2}{u_a} = \underline{y}_{22} - \frac{y_{12} \cdot y_{21}}{y_{11} + Y_g} \quad (\text{IV.20})$$

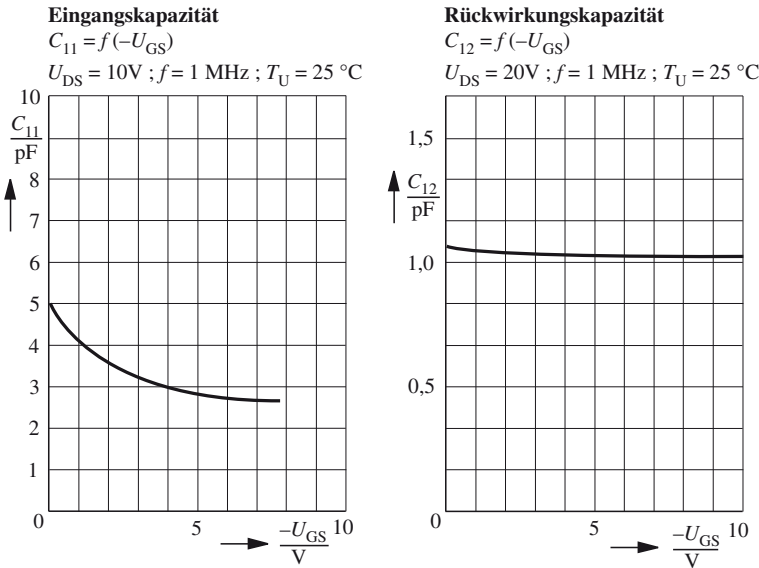


**Bild IV-39**  
Kennlinien der  
Eingangs- und  
Rückwirkungskapazität

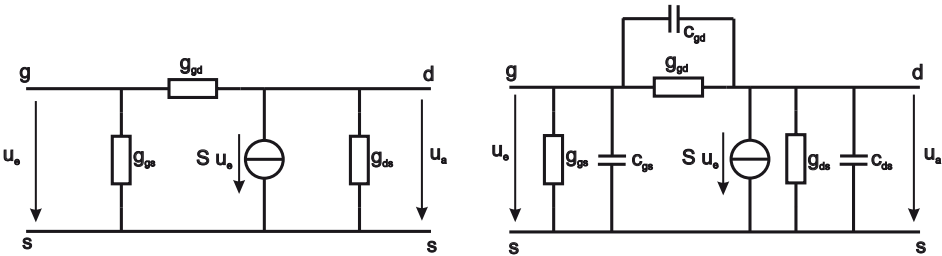


**Bild IV-40** AC-Ersatzschaltbilder für den NF- und HF-Bereich von J-FET

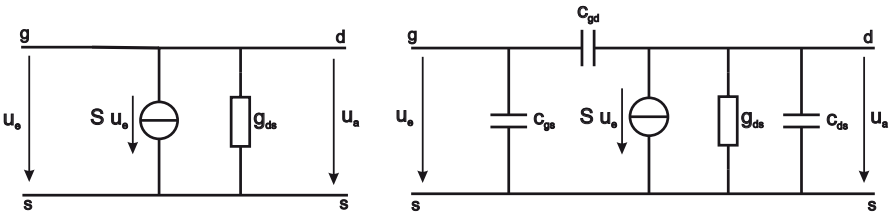


**Bild IV-41** AC-Ersatzschaltbilder für den NF- und HF-Bereich von MOS-FET

Aufgrund der spezifischen Kennwerte von J-FET lässt sich das Wechselstromersatzschaltbild stark vereinfachen und für die NF- und HF-Bereiche getrennt darstellen im Bild IV-40.

Die Daten von FET mit isoliertem Gate unterscheiden sich nur unwesentlich von J-FET. Die Steuerkennlinien unterscheiden sich in der Lage zum Nullpunkt, der Kennlinienverlauf ist ähnlich. Auch für MOS-FET lässt sich das Wechselstromersatzschaltbild stark vereinfachen und für die NF- und HF-Bereiche getrennt darstellen im Bild IV-41.

Aufgrund der Isolierschicht zwischen Kanal und Gate sind beim MOS-FET die Leitwerte  $g_{gs}$  und  $g_{gd}$  zwischen Gate und Source beziehungsweise Gate und

Drain so gering, dass sie vernachlässigt werden können. Damit ergibt sich dieses AC-Ersatzschaltbild.

Bei höheren Frequenzen wird die Gate-Kanal-Kapazität durch die Kondensatoren  $c_{gs}$  und  $c_{gd}$  berücksichtigt. Der Kanal wird in diesem Ersatzschaltbild durch den Ausgangsleitwert  $g_{ds}$ , die Kapazität  $c_{ds}$  und die Stromquelle  $S \cdot u_e$  elektrisch dargestellt.

Vergleicht man diese AC-Ersatzschaltbilder mit dem aktiven Vierpol nach Bild IV-34, so lassen sich die *y-Parameter*, also die *Leitwertparameter*, ermitteln. Für die Sourceschaltung von FETs werden diese *y-Parameter* mit einem zusätzlichen Index *s* gekennzeichnet, wie wir es schon von den Bipolaren Transistoren her kennen.

# V Besondere Halbleiter-Bauelemente

## 1 Unijunction-Transistor (Doppelbasisdiode)

Unijunction-Transistoren (UJT) werden aus einem homogenen, n-dotierten Si-Kristall als Planartyp oder Legierungstyp nach Bild V-1 hergestellt. An zwei gegenüberliegenden Seiten sind sperrschichtfreie Anschlüsse angebracht, die als Basis 1 (B1) und Basis 2 (B2) bezeichnet werden. Unsymmetrisch zu diesen Basisanschlüssen ist als Emitter (E) eine p-Zone angeordnet. Dadurch entsteht ein pn-Übergang, der die Funktion einer Diode hat.

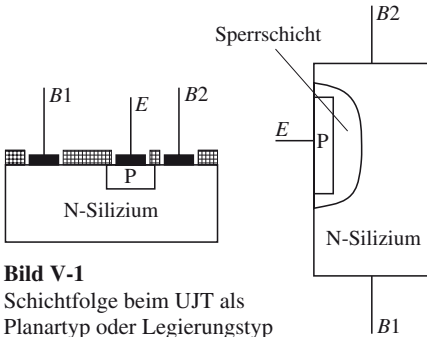


**Bild V-1**

Schichtfolge beim UJT als Planartyp oder Legierungstyp

Aus der physikalischen Wirkungsweise lässt sich das Ersatzschaltbild des UJT nach Bild V-2 herleiten, wobei sich zwei interne Vorgänge überlagern.

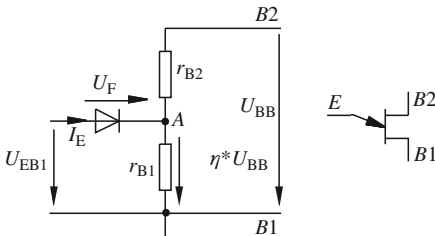


**Bild V-2** Ersatzschaltbild und Schaltzeichen eines UJT

Legt man zwischen B2 und B1 eine positive Spannung  $U_{BB}$  bei offenem Emitteranschluss, so fließt ein relativ kleiner Elektronenstrom von B1 nach B2, der von der Größe der Spannung  $U_{BB}$  und der des statischen Interbasiswiderstandes  $R_{BB}$  abhängt. Wird dagegen eine Spannung  $U_{EB1}$  zwischen E und B1 gelegt ohne eine Spannung  $U_{BB}$ , so zeigt diese Strecke das Verhalten einer Diode.

In einer Schaltung liegen aber beide Spannungen am UJT. Für die Betriebsspannung wirkt der UJT wie ein Spannungsteiler, der die Spannung  $U_{BB}$  im Verhältnis der Teilwiderstände aufteilt. Der mit „A“ gekennzeichnete Punkt in der Schaltung liegt also auf einem Ruhepotential  $U_A$ .

Solange die Eingangsspannung  $U_{EB1}$  kleiner ist als  $U_A$ , wird die Diode in Sperrrichtung betrieben und es fließt ein sehr kleiner Sperrstrom. Wird die Eingangsspannung  $U_{EB1}$  aber um die Schwellenspannung der Ersatzdiode größer als  $U_A$ , so wird die Diode in Durchlassrichtung betrieben und es fließt ein Emitterstrom  $I_E$ .

*Höckerspannung*

$$U_{EB1} \geq 0,7 \text{ V} + U_A = U_{EP} \quad (\text{V.1})$$

Wird  $U_{EB1} > U_{EP}$ , so fließt ein Emitterstrom und es werden Löcher in das n-dotierte Silizium injiziert. Damit vergrößert sich die Leitfähigkeit der Strecke zwischen E und B1. Daher fließt jetzt bei einer geringeren Spannung  $U_{EB1}$  ein größerer Strom  $I_E$  als vorher bei einer größeren Spannung  $U_{EB1}$ .

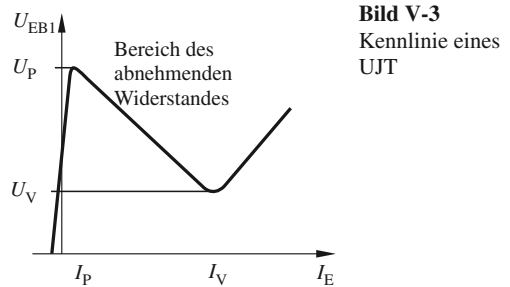


**Bild V-3**

Kennlinie eines UJT

Mit dem Talpunkt („Valley“) beginnt der Sättigungsbereich, weil eine weitere Verkleinerung von  $r_{B1}$  durch Ladungsträgerinjektion nicht mehr möglich ist. Die UJT-Kennlinie nach Bild V-3 geht daher in die Kennlinie einer normalen Si-Dioden-Kennlinie über, und der Strom  $I_E$  steigt mit steigender Spannung  $U_{EB1}$  wieder an.

Sowohl das Umschalten vom hochohmigen Zustand in den niederohmigen Zustand als auch das Umschalten vom niederohmigen in den hochohmigen Zustand erfolgt sehr schnell, wenn die Spannung  $U_{EB1}$  die Höckerspannung  $U_{EP}$  überschreitet beziehungsweise unter den Wert der Talspannung  $U_{EV}$  absinkt, also  $U_{EB1} < U_{EV}$  wird.

Die Hersteller geben eine charakteristische Kennlinie nach Bild V-3 an, in der die Definitionen der einzelnen Kennwerte angegeben sind.

**Grenzwerte:** Zu hohe Spannung  $U_{BB}$ ; zu hohe Spannung  $-U_{EB1}$ ; zu hoher Emitterstoßstrom  $I_E$ ; zu hohe Gesamtverlustleistung  $P_V$ ; zu hohe Sperrschichttemperatur  $\vartheta_j$

**Statische Kenndaten:** Interbasiswiderstand  $r_{BB}$ ; Temperaturbeiwert  $\alpha$

Aus dem Kennlinienfeld nach Bild V-4 ist zu erkennen, dass sowohl Höckerspannung und Talspannung als auch der Talstrom von der Spannung  $U_{BB}$  abhängig sind.

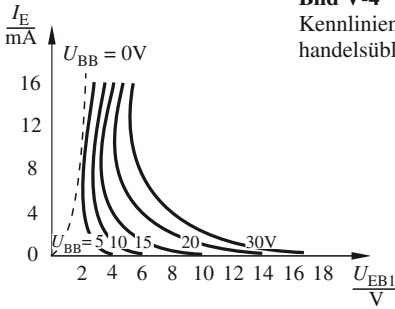


**Bild V-4**  
Kennlinienfeld eines handelsüblichen UJT

**Anwendungen:** Wegen ihres Schaltverhaltens werden UJTs hauptsächlich in Sägezahn- oder Zündgeneratoren in der Schaltung nach Bild V-5 für Thyristoren beziehungsweise Triacs eingesetzt. Die Spannung  $u_C$  wirkt in dieser Schaltung als Steuerspannung des UJT.

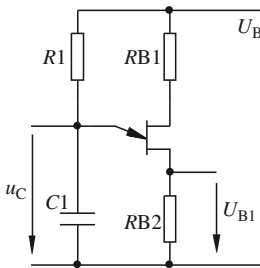


**Bild V-5**  
Sägezahnspannungsgenerator beziehungsweise Zündgenerator mit UJT

Der Kondensator  $C$  wird über  $R1$  geladen, und die Spannung  $u_C$  steigt entsprechend einer e-Funktion nach Bild V-6 an. Sobald  $u_C > U_{EP}$  wird, zündet der UJT, und es fließt sowohl der Entladestrom des

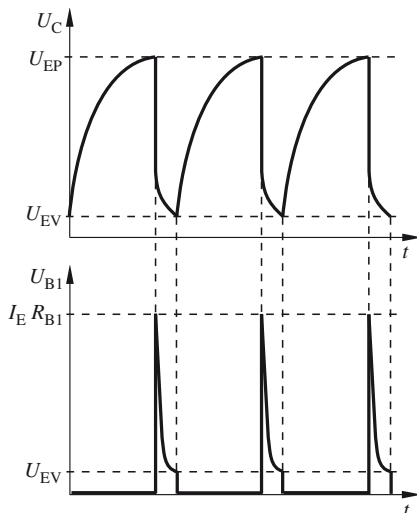


**Bild V-6** Ein- und Ausgangsspannungen der Schaltung nach Bild V-5

Kondensators als auch der Transistorstrom über den UJT ab. Aus diesem Grunde treten an  $R_{B2}$  Spannungsimpulse auf. Wird nun  $u_C$  kleiner als die Talspannung  $U_{EV}$ , so sperrt der UJT wieder und ein neuer Aufladevorgang des Kondensators beginnt.

## 2 Darlington-Transistor

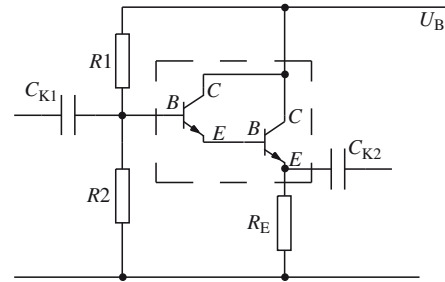


**Bild V-7** Verstärker in Kollektorschaltung für höhere Gleichstrom- und Wechselstrom-Verstärkung

Eine Möglichkeit, höhere Gleichstrom-Verstärkung zu erhalten, bietet der Darlington-Transistor, der in der Schaltung in Bild V-7 zu sehen ist. Der zweite Transistor arbeitet hier als Lastwiderstand für den ersten Transistor, der als Emittterfolger (Kollektorschaltung, siehe Abschnitt VI) geschaltet ist. Durch eine derartige Kopplung zweier Transistoren mit gleicher Schichtfolge ergeben sich für den Darlington-Transistor interessante Werte für den Eingangswiderstand und den Ausgangswiderstand der Schaltung.

**Eingangswiderstand**

$$R_{cin} = r_{BE} + (\beta + 1) (R_E // R_A) \quad (V.2)$$

**Ausgangswiderstand**  $R_{aus} = \frac{r_{BE} + R_E}{\beta + 1} \quad (V.3)$

mit  $h_{11}^{\#} = r_{BE} = r_{BE1} + \beta_1 \cdot r_{BE2}$  und  $\beta = \beta_1 \cdot \beta_2$

**Schleusenspannung**  $U_{BE} = U_{BE1} + U_{BE2}$

Interessant wird der Darlington-Transistor neben hohem Eingangswiderstand und kleinem Ausgangswiderstand nach Bild V-8 durch seine hohe Stromverstärkung, die i.d.R. bei  $\beta > 2000$  liegt. Dieser Transistor gilt aus diesem Grunde als DC-Verstärker und wird insbesondere in Leistungsverstärkern (siehe Abschnitt VII) eingesetzt.

Werden zwei Transistoren mit unterschiedlicher Schichtfolge zusammengeschaltet, so entsteht ein Komplementär-Darlington-Transistor. Das Verhalten eines Darlington-Transistors wird im wesentlichen durch die Eigenschaften des ersten Transistors bestimmt. Komplementär-Darlington-Transistoren haben den Vorteil, dass sie nur eine sehr kleine Schleusenspannung  $U_{BE}$  haben.

Darlington-Transistoren beziehungsweise Komplementär-Darlington-Transistoren können durch zu-

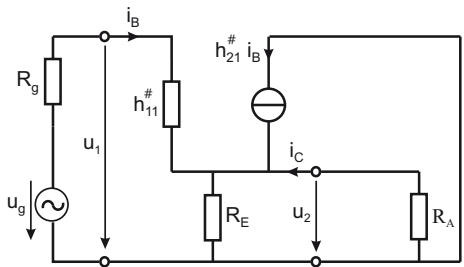


**Bild V-8** AC-Ersatzschaltbild eines Darlington-Transistors

sammengeschaltete Einzeltransistoren realisiert werden, in den meisten Fällen empfiehlt sich jedoch die Benutzung eines fertig konfektionierten Typs, wie er von zahlreichen Herstellern (zum Beispiel Siemens) angeboten wird.

**3 VMOS-Transistoren**

Die Grenzwerte des Drainstroms  $I_{DM}$  und der Drain-Source-Spannung  $U_{DSS}$  begrenzen die mit einem Feldeffekt-Transistor zu steuernde Leistung. Die höchste mit einem FET zu steuernde Leistung ergibt sich also als  $P_{max} = I_{DM} \cdot U_{DSS}$ .

Höhere Grenzwerte des Drainstroms  $I_{DM}$  erfordern eine höhere Steilheit. Die lässt sich aber nur durch eine Verkürzung des Kanals erreichen. Eine Verkürzung des Kanals geht aber zu Lasten der Drain-Source-Spannung  $U_{DSS}$ . In der Konsequenz bedeutet dies aber, dass die maximal zu steuernde Leistung gleich bleibt. Offensichtlich lässt sich mit der bisher beschriebenen Technologie ein FET zur Steuerung höherer Leistungen nicht verwirklichen.

Bild V-9 beschreibt den grundsätzlichen Schichtaufbau eines VMOS-FET (vertical-metal-oxide-semiconductor-field-effekt-transistor). In eine Vier-Lagen-Struktur ist ein V-förmiger Graben eingätzt. Hier fließt der Drainstrom  $I_D$  senkrecht, also vertikal durch den Kristall. Bei positiver Ansteuerung des Gate bildet sich ein durchgehender Strompfad beiderseits des Grabens mit einem sehr niedrigen Bahnwiderstand aus, so dass der Drainstrom, durch den V-förmigen Einschnitt geteilt, zu beiden Source-An-

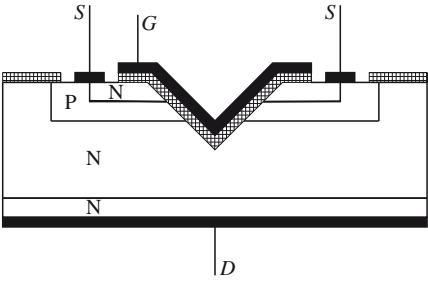


**Bild V-9** Grundsätzlicher Schichtaufbau eines VMOS-FET

schlüssen fließt. Somit ist der Kanalquerschnitt groß und die Kanallänge kurz.

Im Ergebnis bedeutet dies ein Bauteil mit hoher zulässiger Verlustleistung bei hoher Spannungsfestigkeit und großem Verstärkungsfaktor. Der selbstsperrende N-Kanal-VMOS-FET weist praktisch keine Schaltverzögerung auf.

Die Source-Elektrode überbrückt die obere N- und P-Schicht, was eine parasitäre Diode zwischen Gate und Source ergibt. Bei Anwendungen mit induktiver Last funktioniert die Diode als Freilaufdiode, so dass eine zusätzliche Schutzbeschaltung der Drain-Source-Strecke i.d.R. unnötig ist.

Kennlinien und Grenzwerte von VMOS-FET sind identisch mit denen der MOS-FET. Der Unterschied besteht lediglich in den Werten.

Die Parallelschaltung von VMOS-FET ist fast problemlos möglich, da der positive Temperaturkoeffizient des Kanals für thermische Stabilität sorgt.

Aufgrund des hohen Eingangswiderstandes, der hohen Spannungsfestigkeit und der hohen Stromverstärkung ist der VMOS-FET ein sehr gut geeignetes Bauteil für Pegelumsetzer und Treiberschaltungen (zum Beispiel TTL-, TTL-LS- und CMOS-Familie).

Für höhere Betriebsspannungen ist die VMOS-Technik nicht gut geeignet, da die Isolierschicht in der Spitze der V-Rinne nicht die erforderliche gleichmäßige Dicke besitzt, so dass es dort zu Durchschlägen kommt.

**Tabelle V-1** Unterschied zwischen Standard-MOS-FET und Leistungs-MOS-FET

|                                  | MOS-FET                       | VMOS-FET                     |
|----------------------------------|-------------------------------|------------------------------|
| Drainstrom $I_D$                 | mA                            | A                            |
| Einschaltwiderstand $R_{DS(on)}$ | 100 $\Omega$ ... 500 $\Omega$ | 0,1 $\Omega$ ... 10 $\Omega$ |
| Gate-Source-Spannung $U_{GS}$    | 0 V ... 5 V                   | 0 V ... 10 V                 |

4 SIPMOS-Transistoren

Eine wesentlich andere Konstruktion kommt bei den SIPMOS-Leistungstransistoren (**Siemens-Power-MOS**; eingetragenes Warenzeichen der Siemens AG) nach Bild V-10 zur Anwendung.

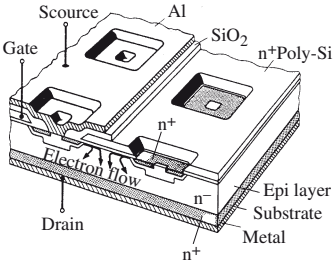


**Bild V-10**  
Aufbau eines SIPMOS-FET (Siemens-Bild)

Diese sind vertikal in Planartechnik aufgebaut und haben eine doppelt implantierte Kanalstruktur. Bei einem N-Kanal-FET dient das niederohmige n<sup>+</sup>-Substrat mit der darunter liegenden Metallschicht als Träger und Drainanschluss. Über dem niederohmigen n<sup>+</sup>-Substrat liegt eine n<sup>-</sup>-Epitaxieschicht, die je nach zu realisierender Sperrspannung verschieden dick und entsprechend dotiert ist. Darüber liegt das Gate aus n<sup>+</sup>-polykristallinem Silizium mit hoher Dotierung, eingebettet in isolierendes Siliziumdioxid. Das Gate bildet eine Gitterstruktur. In die Gitteröffnungen sind die Sourcezellen hineindotiert. Diese werden durch eine abdeckende Metallisierung (hier mit Aluminium) parallel geschaltet. Also kann man sagen, dass ein SIPMOS-FET aus der Parallelschaltung einiger tausend einzelner MOS-Systeme in einem Chip besteht. Die Gateschicht wird in einer Ecke des Chips unbedeckt gelassen und kann dort kontaktiert werden.

SIPMOS-FET haben sehr hohe Eingangswiderstände, aber Durchlasswiderstände  $R_{D(on)}$  von nur wenigen Ohm. Ihre Schaltzeit liegt in der Größenordnung von einigen hundert Nanosekunden und ist mit einer Ansteuerschaltung nach Bild V-11 variabel machbar, um zu große Stromteilheiten beim Einschalten nach Bild V-12 zu vermeiden beziehungsweise zu variieren. SIPMOS-FET benötigen nur beim Einschalten Energie und zwar hauptsächlich zum Aufladen der Gate-Drain-Kapazität. Wie der VMOS-FET hat auch

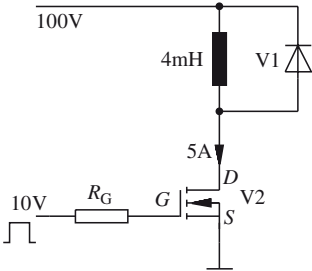


**Bild V-11**  
Ansteuerschaltung für SIPMOS-FET

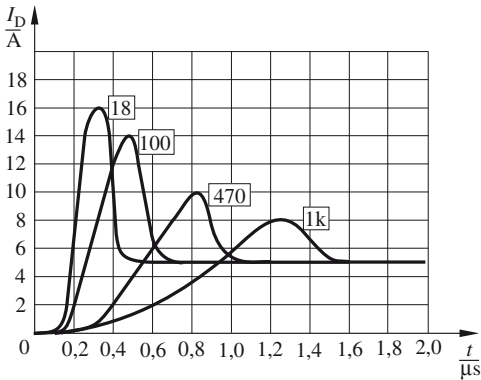


**Bild V-12** Schaltverhalten des Drainstroms für verschiedene Gatewiderstände

dieser FET einen positiven Temperaturbeiwert und kann sich somit gegen thermische Überlastung selber schützen.

SIPMOS-FET sind selbstsperrende FET und können auch aus diesem Grunde als schneller Leistungsschalter in der Leistungselektronik Verwendung finden. Reicht der Drainstrom eines SIPMOS-FET nicht aus, so können nahezu beliebig viele nach Bild V-13 parallel zueinander geschaltet werden und gleichzeitig angesteuert werden. Zum Ausgleich von Unsymmetrien werden Gate-Widerstände ( $R = 4,7 \Omega$  bis  $200 \Omega$ ) empfohlen.

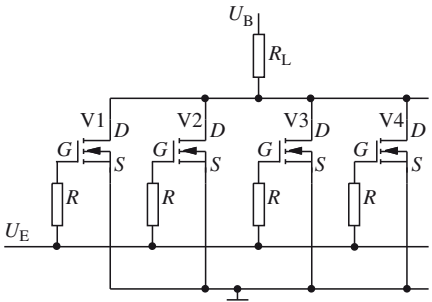


**Bild V-13** Parallel geschaltete SIPMOS-FET für höhere Stromleistungen

Gleichzeitig wird eine Drainstromreduzierung um den Faktor 0,8 empfohlen.

$\rightarrow I_{D ges} = 0,8 \cdot I_D \cdot n \quad (n = \text{Anzahl der FET})$

Schnelles Ein- und Ausschalten, aber auch sicherer Schutz gegen unbeabsichtigtes Einschalten müssen gewährleistet werden. Die komplementären SIPMOS-Kleinsignaltransistoren BSS100 und BSS110 sind gut geeignet, um auch SIPMOS-FET mit großer Eingangskapazität oder parallel geschaltete SIPMOS-FET schnell zu steuern. Die Treiberschaltung nach Bild V-14 (Fa. Siemens) bietet auch im spannungslosen Zustand einen sicheren Schutz gegen unbeabsichtigtes Einschalten.



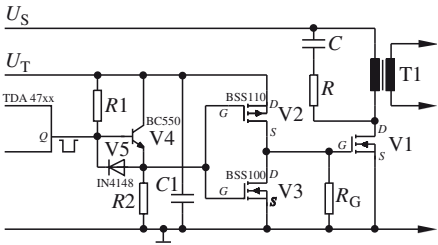


**Bild V-14** Treiberschaltung für schnelles Ein- und Ausschalten von SIPMOS-FET (Fa. Siemens)

Die Versorgungsspannung für die Ansteuerschaltung kann hier  $U_T = 10\text{ V}$  bis  $15\text{ V}$  betragen. Der Widerstandswert von  $R_G$  liegt ungefähr bei  $10\text{ k}\Omega$ , während  $R1 = 2,2\text{ k}\Omega$  und  $R2 = 1\text{ k}\Omega$  betragen. Der Kondensator  $C1$  hat einen Wert von  $0,47\text{ }\mu\text{F}$ . Die Werte für  $R$  und  $C$  bemessen sich nach der Größe des Transformators  $T1$  beziehungsweise seiner Leistungsbeanspruchung.

## 5 IGBT

Ein IGBT (insulated-gate-bipolar-transistor) beruht grundsätzlich auf der Technologie der SIPMOS-Transistoren.

Bild V-15 macht hier die Unterschiede deutlich. Während der SIPMOS-FET auf einem  $n^+n^-$ -Substrat am Drain aufgebaut ist, hat der IGBT ein homogenes Substrat mit einem speziell ausgebildeten pn-Übergang

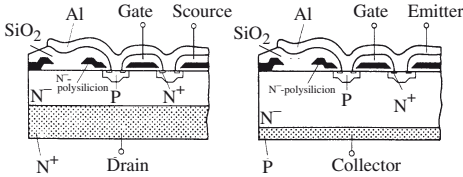


**Bild V-15** Aufbau eines SIPMOS-FET und eines IGBT

an dieser Seite. Deshalb wird dieser Anschluss auch Kollektor genannt. In eingeschaltetem Zustand bewirkt der pn-Übergang die Reduzierung des Einschaltwiderstandes  $R_{D(on)}$  durch Ladungsträgerinjektion.

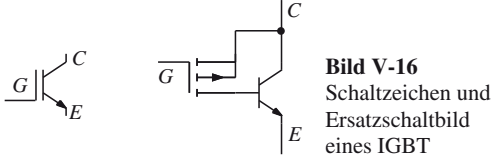


**Bild V-16** Schaltzeichen und Ersatzschaltbild eines IGBT

Der IGBT ist eine Kombination aus MOS-FET und Bipolarem Transistor. Entsprechend verhält sich der IGBT am Eingang wie ein selbstsperrender MOS-FET und kann nahezu leistungslos gesteuert werden. Ausgangsseitig ist der IGBT einem bipolaren Leistungstransistor ähnlich. Deshalb kann er relativ hohe Spannungen (zur Zeit bis  $1700\text{ V}$ ) und Ströme (zur Zeit ungefähr  $600\text{ A}$ ) pro Chip schalten mit zunehmender Tendenz. Aus diesem Zusammenhang resultiert das Schaltzeichen und Ersatzschaltbild eines IGBT nach Bild V-16.

**Tabelle V-2** Typenübersicht und Kenndaten (Fa. Siemens)

### SIPMOS-FET

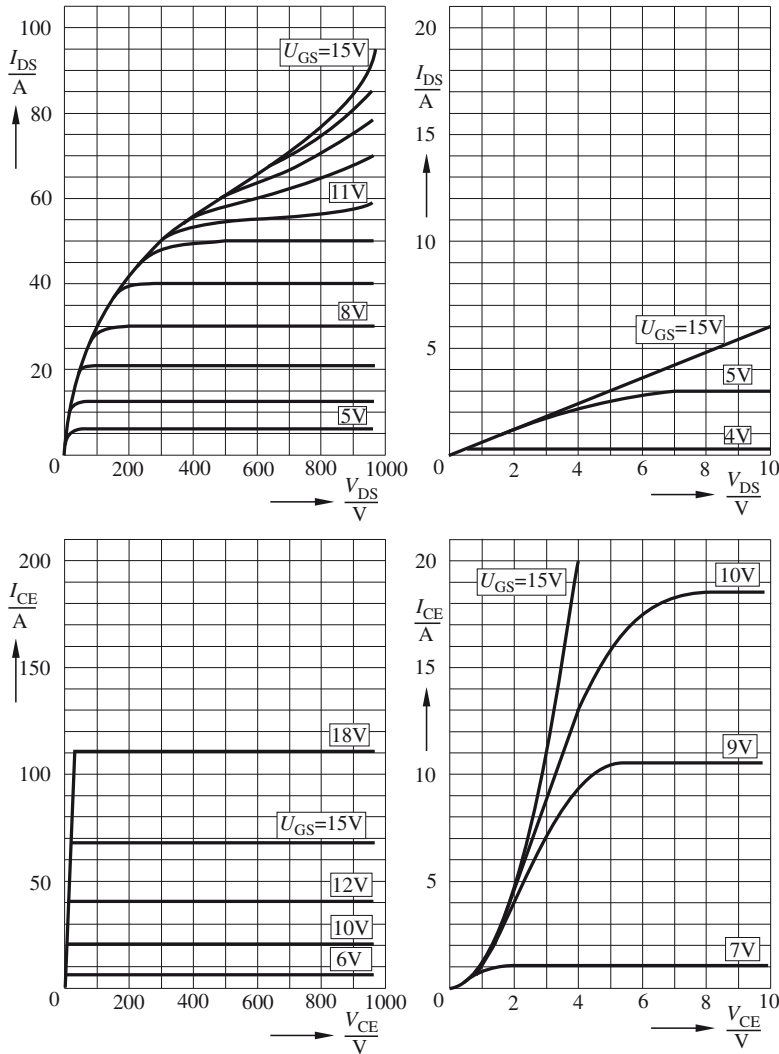
| Typ    | $U_{DS}/\text{V}$ | $R_{DS(on)}/\Omega$ | $I_{D(on)}/\text{A}$ | Gehäuse |
|--------|-------------------|---------------------|----------------------|---------|
| BUZ 10 | 50                | 0,1                 | 12                   | TO-220  |
| BUZ 20 | 100               | 0,2                 | 8                    | TO-220  |
| BUZ 31 | 200               | 0,2                 | 12,5                 | TO-220  |
| BUZ 45 | 500               | 0,8                 | 7,5                  | TO-3    |
| BUZ 84 | 800               | 2,0                 | 4,7                  | TO-3    |
| BUZ 54 | 1000              | 2,0                 | 4,7                  | TO-3    |

### IGBT

| Typ     | $U_{CE}/\text{V}$ | $I_C/\text{A}$ | Gehäuse |
|---------|-------------------|----------------|---------|
| BUP 304 | 1000              | 25             | TO-218  |

### IGBT-Module

| Typ         | $U_{CE}/\text{V}$ | $I_C/\text{A}$ | $U_{CE(sat)}/\text{V}$ | Bemerkungen |
|-------------|-------------------|----------------|------------------------|-------------|
| BSM50GB100D | 1000              | $2 \times 50$  | 5                      | Halbbrücke  |
| BSM15GD100D | 1000              | $6 \times 15$  | 5                      | Vollbrücke  |

**Bild V-17**

Ausgangskennlinienfeld eines SIPMOS-FET (obere Reihe) und eines IGBT (untere Reihe)

Die Ausgangskennlinien nach Bild V-17 zeigen einen SIPMOS BUZ 54 und einen IGBT BUP 304 bei gleicher Chipgröße. Das Schaltverhalten der beiden Bauelemente unterscheidet sich hauptsächlich durch den Spannungsabfall im eingeschalteten Zustand. So hat der BUZ 54 bereits bei 5 A einen Spannungsabfall von 8 V, während der BUP 304 bei 10 A auf weniger als 3 V Spannungsabfall kommt. Erkennbar ist außerdem, dass der Einschaltwiderstand  $R_{D(on)}$  weniger spannungsabhängig ist als der der SIPMOS-FET.

Im Schaltbetrieb ist die Gesamtverlustleistung quasi identisch mit der temperaturabhängigen Durchlass verlustleistung. Der Einschaltwiderstand  $R_{D(on)}$  wird in den Datenblättern für 25 °C angegeben. IGBT haben im Gegensatz zu SIPMOS-FET aufgrund der unterschiedlichen Herstellungstechnolo-

gie keine integrierte Inversdiode. Deshalb muss bei Verwendung des IGBT als Schalter mit induktiven Lasten eine separate Freilaufdiode geschaltet werden.

In „Modulen“ sind IGBT, Inversdioden und andere erforderliche Schutzbausteine zusammengefasst. Sie sind rationelle Bausteine im Leistungsteil von selbstgeführten Stromrichtern (siehe Abschnitt 15), vor allem bei Zweipuls- (B2) und Sechspuls-Brückenschaltungen (B6).

Grundsätzlich kann man einen IGBT dadurch abschalten, indem man die Gate-Emitter-Spannung auf „Null“ setzt. Um das Abschaltverhalten zu verbessern und auch Notabschaltungen leichter zu ermöglichen, wird der IGBT nach Bild V-18 auch mit negativen Spannungen an der Gate-Emitter-Strecke angesteuert.

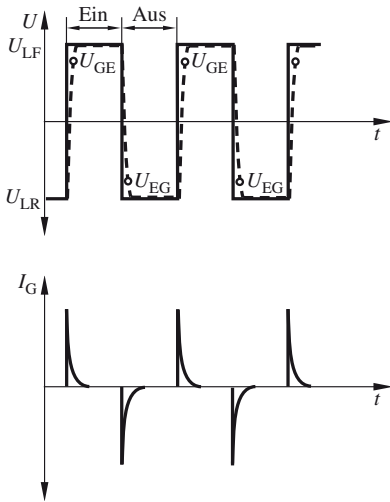


**Bild V-18** Liniendiagramm von Steuerstrom und -spannung

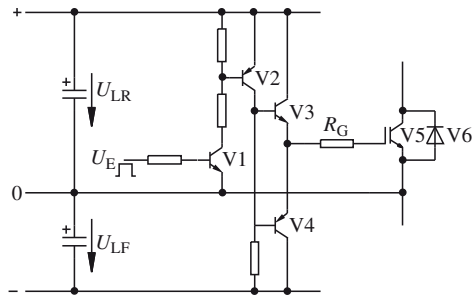


**Bild V-19** Prinzipschaltung einer Treiberstufe mit komplementären Transistoren

Der Gatevorwiderstand  $R_G$  begrenzt (wie beim SIP-MOS) die entstehenden Steuerstromimpulse. Um die Steuerspannungen zu erzeugen, verwendet man Treiberstufen mit komplementären Transistoren, wobei die Schaltung nach Bild V-19 nur eine mögliche Prinzipschaltung darstellt.

## VI Analoge Verstärker

Der *Transistor* ist ein aktives Bauelement im Gegensatz zu passiven Bauelementen wie zum Beispiel Dioden oder Widerstände. Einer Transistorschaltung kann am Ausgang mehr Signalleistung entnommen werden als ihr am Eingang zur Verfügung steht.

In den meisten Anwendungsfällen werden Transistoren verwendet, um kleine Eingangsspannungen und -ströme zu großen Ausgangsspannungen und -strömen zu verstärken. Der Signalverlauf, also die Form der Signale, bleibt erhalten, während sich der Amplitudenwert der Signale vergrößert. Da Eingangs- und Ausgangssignale einander ähnlich sind, arbeitet der Transistor als Analogverstärker.

Die zur Umformung (Verstärkung) eines anliegenden Signals erforderliche Hilfsenergie liefert die Betriebsspannung. Unter Signal versteht man eine bestimmte Eingangsspannung, einen bestimmten Eingangsstrom oder eine bestimmte Eingangsleistung mit den entsprechenden Ausgangsgrößen.

Zu verstärkende Signale liefern Mikrophone, Tonabnehmersysteme von Plattenspielern, CD-Playern, Tonköpfen in Recordern, Antennen, Vorverstärker. Die verstärkten Signale (Ausgangssignale) können über entsprechende Wandler (Lautsprecher, Bildröhren, Motoren und andere Ausgabeeinheiten) hörbar beziehungsweise sichtbar gemacht werden.

### 1 Bipolarer Transistor als Verstärker

Der bipolare Transistor muss als gleichstromsteuerndes Bauelement verstanden werden.

Wechselspannungen, also Signale mit positiven und negativen Amplituden, können nur mit Hilfe von Schaltungskniffen verstärkt werden. Bildet man zum

Beispiel eine Mischspannung aus einer Gleich- und einer Wechselspannung, indem man einem Gleichstrom die Signalspannung entsprechend der Schaltung nach Bild VI-1 überlagert, so verstärkt der Transistor diese pulsierende Gleichspannung.

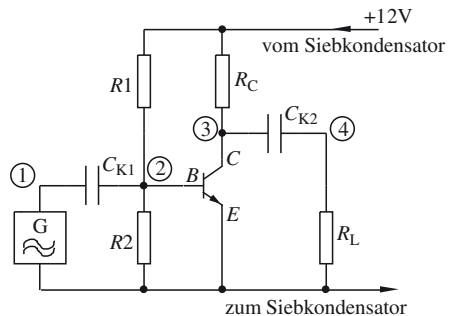


**Bild VI-1** Transistor als AC-Verstärker

Bild VI-2a stellt die sinusförmigen Ein- und Ausgangsspannungen an den Punkten 1 und 4 dar. Die Phasenverschiebung zwischen den beiden Kurven ergibt sich aus der generellen Phasenverschiebung bei der Emitterschaltung und der Phasenverschiebung aufgrund der beiden RC-Glieder.

Bild VI-2b zeigt die Mischspannungen an der Basis (Punkt 2) und am Kollektor (Punkt 3) des Transistors. Der Gleichanteil muss so groß bemessen sein, dass die Mischspannung keine negativen Anteile hat. Ohne diese Maßnahme würden nur die positiven Amplituden verstärkt werden. Durch einen Kondensator kann der Gleichstromanteil am Ausgang der Verstärkerschaltung unterdrückt werden.

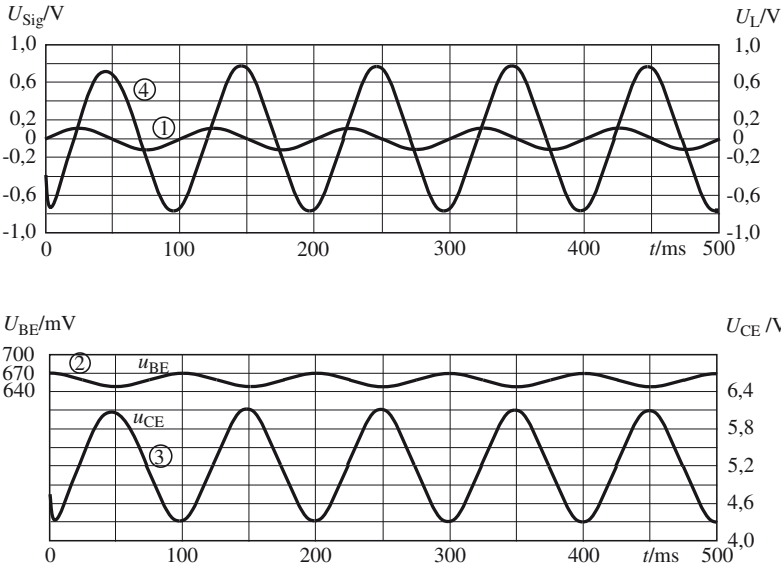


**Bild VI-2**  
Sinusförmige Ein- und Ausgangsspannungen sowie Mischspannungen an Basis und Kollektor

Der besondere Vorteil des Vierquadranten-Kennlinienfeldes eines bipolaren Transistors liegt darin, dass bestimmte Daten von einem Quadranten direkt in einen anderen Quadranten, also von einem Kennlinienfeld in ein anderes, übertragen werden können. Daher lässt sich die Verstärkerwirkung eines bipolaren Transistors im Vierquadranten-Kennlinienfeld besonders gut darstellen und erläutern.

In Bild VI-3 sind die Zusammenhänge für eine prinzipiell zu erstellende Verstärkerschaltung dargestellt und graphisch erläutert.

Zunächst muss die *Arbeitsgerade* des Kollektorwiderstandes  $R_C$  ( $5\text{ k}\Omega$  gewählt) in das Ausgangskennlinienfeld eingezeichnet werden. Sie verläuft von links oben nach rechts unten und endet

auf der X-Achse bei

$$U_{CE} = U_B \quad (10\text{ V gewählt}) \quad (VI.1)$$

auf der Y-Achse bei

$$I_C = \frac{U_B}{R_C} \quad (2\text{ mA errechnet}) \quad (VI.2)$$

Der Arbeitspunkt AP1 sollte liegen bei

$$U_{CEA} = \frac{U_B}{2} \quad (5\text{ V errechnet}) \quad (VI.3)$$

Diese Wahlen ergeben im I. Quadranten einen  $I_C = 1\text{ mA}$ , im II. Quadranten einen  $I_B \approx 5\text{ }\mu\text{A}$  und weitergeführt in den III. Quadranten ein  $U_{BE} = 0,5\text{ V}$ . Der Arbeitspunkt AP liegt nun fest bei  $I_{CA} = 1\text{ mA}$  und  $U_{CEA} = 5\text{ V}$ .

Legt man nun an die Basis des Transistors eine Eingangsspannung (AC)  $U_{ess} = 0,1\text{ V}$ , so wird die Gleichspannung von ihr überlagert.

Für die AC wandert nun der AP im III. Quadranten an der Kennlinie entlang zwischen  $I_B = 2\text{ }\mu\text{A}$  und  $8\text{ }\mu\text{A}$ . Somit ändert sich auch der  $I_C$  und wandert nun zwischen  $I_C = 0,5\text{ mA}$  und  $1,25\text{ mA}$ .

Die Änderung des Kollektorstroms ruft am Arbeitswiderstand  $R_C$  eine Spannungsänderung hervor, so dass sich auch  $U_{CE}$  zwischen  $U_{CE} = 7,25\text{ V}$  und  $1,25\text{ V}$  um  $\Delta U_{CE} = 6\text{ V}$  ändert.

Bei einer Änderung der Eingangsspannung  $U_e$  um einen bestimmten Wert ergibt sich bei diesem Transistor eine Änderung der Ausgangsspannung  $U_a$  um einen entsprechend vergrößerten Betrag.

Es ist erkennbar, dass die Ausgangsspannung gegenüber der Eingangsspannung verzerrt ist. Es handelt sich demnach um eine Spannungssteuerung des Transistors.

Im Falle einer *Stromsteuerung* des Transistors (der Basisstrom entstammt einer „Stromquelle“) kann

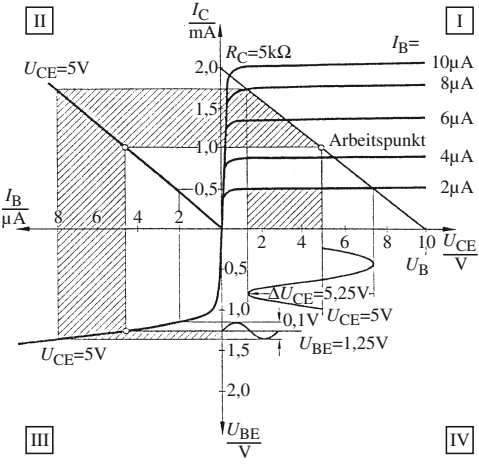


**Bild VI-3** Verstärkerwirkung eines bipolaren Transistors im Vier-Quadranten-Kennlinienfeld

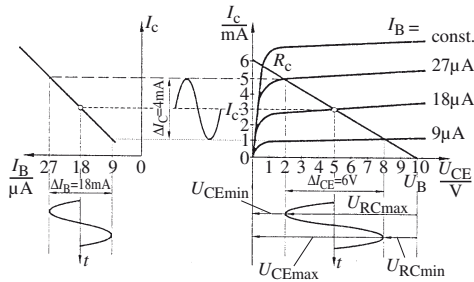


**Bild VI-4** Stromsteuerung

man von einer Betrachtung nach Bild VI-4 ausgehen, bei der die Ausgangsspannung nahezu unverzerrt am Kollektorwiderstand abfällt.

### 1.1 Grundsaltungen

Ein Verstärker hat stets zwei Anschlüsse für den Eingang und zwei Anschlüsse für den Ausgang. Transistoren haben aber nur drei Elektroden (Beinchen). Wird ein Transistor als Verstärker eingesetzt, muss eine dieser Elektroden sowohl zu den Eingangsanschlüssen als auch zu den Ausgangsanschlüssen gehören.

Damit ergeben sich drei Möglichkeiten, Transistoren als Verstärker zu betreiben. Diese drei Schaltungen werden als Transistor-Grundsaltungen bezeichnet. Die jeweilige Bezeichnung der Transistor-Grundsaltung ist von derjenigen Elektrode abgeleitet, die gemeinsamer Bezugspunkt für das Eingangs- und Ausgangssignal ist.

Jede der drei Grundsaltungen hat besondere Eigenschaften. Sie werden durch eine Reihe von Kenngrößen näher beschrieben.

Wichtige Kenngrößen sind: Wechselstromeingangswiderstand  $r_e$ , Wechselstromausgangswiderstand  $r_a$ , Spannungsverstärkung  $V_u$ , Stromverstärkung  $V_i$ , Leistungsverstärkung  $V_p$ , Phasendrehung des Signals  $\varphi$  und Grenzfrequenz der Schaltung  $f_g$ .

Das Vierpol-Ersatzschaltbild nach Bild VI-5 in Anlehnung an Bild IV-15 gilt ebenso wie die folgenden Betriebsgrößen für alle Grundsaltungen.

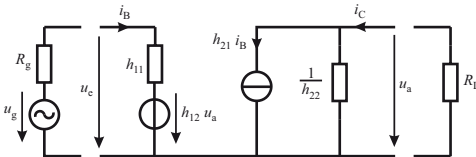


**Bild VI-5** Vierpol-Ersatzschaltbild mit Last und Signalquelle

Für einen beliebigen Abschlusswiderstand  $R_L$  kann mit Hilfe der Vierpolgleichungen (Tabelle IV-1) die Stromverstärkung  $V_i$  des Transistors bestimmt werden.

$$\text{Stromverstärkung } V_i = \frac{i_C}{i_B} = \frac{h_{21}}{1 + h_{22} \cdot R_L} \quad (\text{VI.4})$$

Die betriebliche Stromverstärkung ist also stets kleiner als die Kurzschlussstromverstärkung  $\beta$  des Transistors als Bauelement.

Auch für die Berechnung der betrieblichen Spannungsverstärkung  $V_u$  werden die Vierpolgleichungen benutzt. Durch geschicktes Einsetzen ergibt sich dann **Spannungsverstärkung**

$$V_u = \frac{u_a}{u_e} = \frac{h_{21} \cdot R_L}{\Delta h \cdot R_L + h_{11}} \quad (\text{VI.5})$$

$$\text{mit } \Delta h = h_{11} \cdot h_{22} - h_{12} \cdot h_{21}$$

**Strom- und Spannungsverstärkung** sind ebenso wie der Eingangswiderstand  $r_e$  lastabhängige Größen.

$$\text{Eingangswiderstand } r_e = \frac{\Delta h \cdot R_L + h_{11}}{1 + h_{22} \cdot R_L} \quad (\text{VI.6})$$

Der Ausgangswiderstand  $r_a$  ist vor allem vom Innenwiderstand  $R_g$  der Signalquelle abhängig. Er lässt sich nach dem Ohmschen Gesetz vom Ausgang her berechnen.

**Ausgangswiderstand**

$$r_a = \frac{u_a}{i_C} = \frac{h_{11} + R_g}{\Delta h + h_{22} \cdot R_g} \quad (\text{VI.7})$$

Unter Leistungsverstärkung versteht man das Verhältnis von Ausgangs- zur Eingangsleistung.

**Leistungsverstärkung**

$$V_p = \frac{h_{21}^2 \cdot R_L}{(1 + h_{22} \cdot R_L) (h_{11} + \Delta h \cdot R_L)} \quad (\text{VI.8})$$

Mit Hilfe der Gleichungen VI.4 bis VI.8 lassen sich die betrieblichen Übertragungseigenschaften eines Transistorverstärkers berechnen. Dabei muss berücksichtigt werden, dass die  $h$ -Parameter nur für den Kleinsignalbetrieb im NF-Bereich gelten.

Die **Spannungsrückwirkung** des Transistors ist in den meisten Fällen so gering, dass man sie vernachlässigen kann und die Ersatzschaltungen nach Bild VI-6 gültig sind. Aufgrund dieser Tatsache lassen sich Vereinfachungen vornehmen.

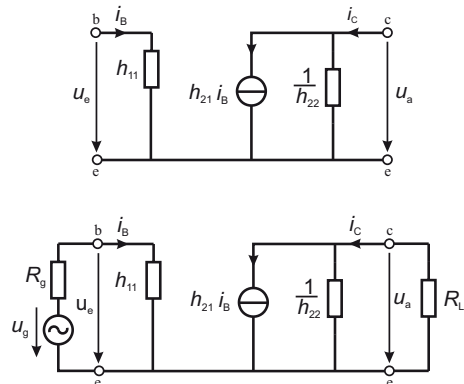


**Bild VI-6** Ersatzschaltungen bei Vernachlässigung der Spannungsrückwirkung

So beschreiben folgende sechs Werte das Verhalten des Transistors selber.

*Stromverstärkung*

$$B = \frac{I_C}{I_B} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B} = h_{21}$$

*Eingangswiderstand*

$$R_{BE} = \frac{U_{BE}}{I_B} \quad \text{und} \quad r_{BE} = \frac{\Delta U_{BE}}{\Delta I_B} = h_{11}$$

*Ausgangswiderstand*

$$B_{CE} = \frac{U_{CE}}{I_C} \quad \text{und} \quad r_{CE} = \frac{\Delta U_{CE}}{\Delta I_C} = \frac{1}{h_{22}}$$

Um die Betriebsgrößen der Grundsaltungen bestimmen zu können, müssen die Grundbedingungen für den Betrieb der Schaltungen definiert werden. Der Arbeitspunkt wird generell durch eine Gleichspannungsquelle am Eingang eingestellt. Er wird jeweils so eingestellt, dass die Schaltung im linearen Teil der Eingangskennlinie arbeitet und Kleinsignalbetrieb vorliegt, also der Arbeitspunkt nicht in den Sättigungsbeziehungweise Sperrbereich gelangen kann.

Zu der **Emitter-Grundsaltung** nach Bild VI-7 zählt auch der Kollektorwiderstand  $R_C$ . Dieser ist unbedingt erforderlich, damit eine Wechselspannung, also ein Ausgangssignal am Kollektor entstehen kann. Ohne den Arbeitswiderstand  $R_C$  liegt der Kollektor des Transistors über die Gleichspannungsquelle wechselstrommäßig auf Masse, was einen wechselstrommäßigen Kurzschluss bedeuten würde.

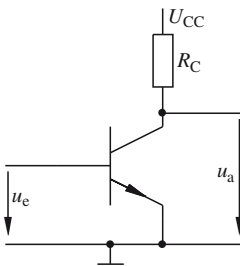


**Bild VI-7**  
Emitter-Grundsaltung

Die Eigenschaften der Emitter-Grundsaltung hängen nicht nur von den Kennwerten des Transistors selbst, sondern auch von der Größe des Kollektorwiderstandes ab. Die Kennwerte dieser gesamten Grundsaltung bezeichnet man als Betriebsgrößen. Ein mögliches Wechselstrom-Ersatzschaltbild, basierend auf Bild VI-6 (Emitter-Grundsaltung) zeigt Bild VI-8.

*Wechselstromeingangswiderstand*

$$r_{eE} = r_{BE} = h_{11e} \quad (\text{VI.9})$$

*Wechselstromausgangswiderstand*

$$r_{aE} = r_{CE} \parallel R_C \quad (\text{VI.10})$$

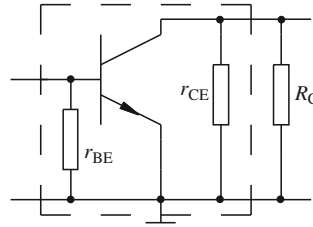


**Bild VI-8**

Ein Wechselstrom-Ersatzschaltbild der Emitter-Grundsaltung

*Spannungsverstärkung*

$$|V_{uE}| = \frac{-\beta}{r_{BE}} \cdot r_{CE} \parallel R_C = \frac{\beta \cdot R_C \cdot r_{CE}}{r_{BE}(R_C + r_{CE})} \quad (\text{VI.11})$$

*Stromverstärkung*

$$V_{iE} = \beta \cdot \frac{r_{CE}}{R_C + r_{CE}} \quad (\text{VI.12})$$

*Leistungsverstärkung*

$$V_{pE} = \beta^2 \cdot \frac{r_{CE}^2 \cdot R_C}{(R_C + r_{CE})^2 \cdot r_{BE}} \quad (\text{VI.13})$$

maximale Leistungsverstärkung  $V_{p \max}$  bei Leistungsanpassung, also wenn  $R_C = r_{CE}$  · Phasendrehung des Signals 180°.

Die *Emitterschaltung* liefert sowohl eine Strom- und als auch eine Spannungsverstärkung, die beide  $>1$  sind. Somit liefert diese Schaltung die größtmögliche Leistungsverstärkung und wird deshalb häufig angewendet.

In der **Kollektor-Grundsaltung** nach Bild VI-9 liegt der Kollektor wechselstrommäßig auf Masse.

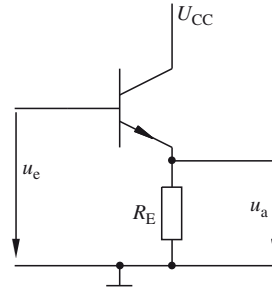


**Bild VI-9**  
Kollektor-Grundsaltung

Wird der Basisstrom erhöht, so erhöhen sich auch der Kollektorstrom und der Spannungsabfall am Emitterwiderstand  $R_E$ . Die Phasenverschiebung zwischen Ausgangs- und Eingangsspannung beträgt also 0°.

Die Eigenschaften der Kollektor-Grundsaltung hängen nicht nur von den Kennwerten des Transistors selbst, sondern auch von der Größe des Emitterwiderstandes ab. Ein Wechselstrom-Ersatzschaltbild der Kollektor-Grundsaltung zeigt Bild VI-10.

Da in den Datenblättern der Hersteller die Kenndaten des Transistors nur für die Emitter-Grundsaltung angegeben werden, ist es sinnvoll, die Betriebsgrößen der Kollektor- und Basis-Grundsaltung auf die Kennwerte der Emitter-Grundsaltung zurückzuführen.

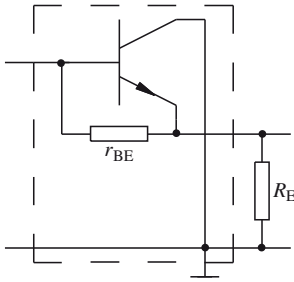


**Bild VI-10**  
Wechselstrom-  
Ersatzschaltbild  
der Kollektor-  
Grundsaltung

Wechselstromeingangswiderstand

$$r_{eC} = r_{eE} + \beta \cdot R_E \quad (\text{VI.14})$$

Wechselstromausgangswiderstand

$$r_{aC} = R_E \parallel \frac{r_{BE} + R_g}{\beta} \quad (\text{VI.15})$$

Spannungsverstärkung

$$V_{uC} \approx 1 \quad (\text{VI.16})$$

Stromverstärkung

$$V_{iC} = (\beta + 1) \cdot \frac{r_{CE}}{(R_E + r_{CE})} \quad (\text{VI.17})$$

Leistungsverstärkung

$$V_{pC} \approx V_{iE} \quad (\text{VI.18})$$

Die Kollektorschaltung hat bei hohem Eingangswiderstand einen niedrigen Ausgangswiderstand. Sie findet also häufig Anwendung als Impedanzwandler, zum Beispiel zur Anpassung hochohmiger Generatoren an niederohmige Verbraucher.

Auch in Endstufen von Leistungsverstärkern findet sie Anwendung, da ihre Stromverstärkung etwa so groß ist wie die der Emitterschaltung.

In der **Basis-Grundsaltung** nach Bild VI-11 liegt die Basis *wechselstrommäßig* auf Masse. Wird die Eingangsspannung (Spannung zwischen Emitter und Basis) größer, der Emitter also negativer, so wird der Transistor niederohmiger. Es fließt daher ein erhöhter Kollektorstrom, der am Kollektorwiderstand  $R_C$  einen erhöhten Spannungsabfall bewirkt. Die Phasenverschiebung zwischen Ausgangs- und Eingangsspannung beträgt dann  $0^\circ$ .

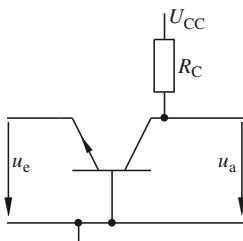


**Bild VI-11**  
Basis-Grundsaltung

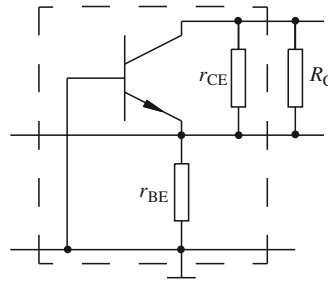


**Bild VI-12**  
Wechselstrom-  
Ersatzschaltbild  
der Basis-  
Grundsaltung

Die Eigenschaften der Basis-Grundsaltung hängen nicht nur von den Kennwerten des Transistors selbst, sondern auch von der Größe des Kollektorwiderstandes ab. Ein Wechselstrom-Ersatzschaltbild der Basis-Grundsaltung zeigt Bild VI-12.

Wechselstromeingangswiderstand

$$r_{eB} = \frac{r_{eE}}{\beta} \quad (\text{VI.19})$$

Wechselstromausgangswiderstand

$$r_{aB} = R_C \parallel r_{CE} \cdot \left( 1 + \beta \cdot \frac{R_g}{r_{BE}} \right) \quad (\text{VI.20})$$

und für  $R_g \Rightarrow 0 \Omega$ :

$$r_{aB} \approx R_C \parallel r_{CE} \quad (\text{VI.21})$$

Spannungsverstärkung

$$V_{uB} = V_{uE} - 1 \quad (\text{VI.22})$$

Stromverstärkung

$$V_{iB} \approx 1 \quad (\text{VI.23})$$

Leistungsverstärkung

$$V_{pB} \approx V_{uB} \quad (\text{VI.24})$$

Die Stromverstärkung ist quasi gleich eins und der Ausgangsstrom praktisch identisch mit dem Eingangsstrom. Damit erfolgt eine schnellere Steuerung des Ausgangsstroms durch den Eingangsstrom als bei den anderen Grundsaltungen.

Die obere Grenzfrequenz der Basischaltung hängt von der Stromverstärkung des Transistors ab.

$$\text{obere Grenzfrequenz } f_a \approx \beta \cdot f_g \quad (\text{VI.25})$$

Wegen ihrer hohen Grenzfrequenz  $f_a$  wird die Basischaltung vorzugsweise in der Hochfrequenztechnik eingesetzt. Sie hat bei einem niedrigen Eingangswiderstand einen verhältnismäßig hohen Ausgangswiderstand.

## 1.2 Arbeitspunktstabilisierung

Zum Betrieb eines Transistors ist nach Bild VI-1 und Bild VI.3 neben der Spannungsversorgung  $U_B$  auch ein Widerstand  $R_C$  in der Kollektorzuleitung erforderlich.

Der **Kollektorwiderstand**  $R_C$  hat zwei verschiedene Aufgaben zu erfüllen. Er muss den Kollektorstrom  $I_C$



begrenzen und die im Transistor auftretende Stromverstärkung  $\beta$  in eine Spannungsverstärkung  $V_u$  umwandeln.

Der Transistor muss mit genau festgelegten Werten für  $I_C$  und  $U_{CE}$  betrieben werden. Das Bestimmen und Einstellen dieser Werte bezeichnet man als „in den Arbeitspunkt bringen“ oder „den Arbeitspunkt einstellen“.

Der **Arbeitspunkt AP** (siehe Kap. 6.1) wird durch  $U_{CEA}$  und  $I_{CA}$  festgelegt und durch  $I_{BA}$  eingestellt und gehalten. Bei einer vorgegebenen Betriebsspannung  $U_B$  lässt sich der erforderliche  $R_C$  errechnen.

$$R_C = \frac{U_B - U_{CEA}}{I_{CA}} \quad (\text{VI.26})$$

$$I_{BA} = \frac{I_{CA}}{\beta} \quad (\text{VI.27})$$

Der Arbeitspunkt eines Transistors im Kleinsignalbetrieb als NF-Verstärker sollte möglichst in der Mitte der Widerstandsgeraden liegen (Gleichung VI.3). Dadurch wird verhindert, dass ein Signal infolge der Kennlinienkrümmungen unsymmetrisch verstärkt wird. Bei Ansteuerung des Transistors mit einem sinusförmigen Signal an der Basis ändert sich der Kollektorstrom um einen bestimmten Wert nach oben und unten. Man kann sagen, dass sich der AP an der Widerstandsgeraden entlang um den AP herum hin und her bewegt.

Der Arbeitspunkt des Transistors kann durch Einstellung des Basisstroms und durch Einstellung der Basis-Emitter-Spannung festgelegt werden.

Die Basis-Emitter-Strecke muss in Durchlassrichtung betrieben werden, damit ein Kollektorstrom fließen kann. Das wird durch eine Basisvorspannung  $U_{BE}$  erreicht, die doppelt so groß sein muss wie die Schleusenspannung der Basis-Emitter-Diode.

Die einfachste Schaltung zur Erzeugung dieser Basisvorspannung und zur Einstellung des Basisstroms mit Hilfe des Basisvorwiderstandes  $R_1$  ist in Bild VI-13 dargestellt.

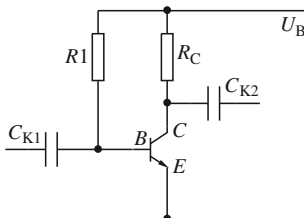


**Bild VI-13**  
Einstellung des Arbeitspunktes mit Basisvorwiderstand

Der Spannungsabfall an  $R_1$  muss so groß sein, dass von der Spannung  $U_B$  gerade noch die Basisvorspannung übrig bleibt, die die Basis-Emitter-Diode in Durchlassrichtung betreibt.

$$\text{Basisvorwiderstand } R_1 = \frac{U_B - U_{BEA}}{I_{BA}} \quad (\text{VI.28})$$

mit  $I_{BA}$  nach Gleichung VI.27.

Durch diese Schaltungsmaßnahme (Konstantstrom) wird der Arbeitspunkt des Transistors eingestellt.

Die Basisvorspannung bleibt sowohl bei Schwankungen von  $U_B$  als auch bei Temperaturschwankungen nahezu konstant, weil der Spannungsabfall bei einem Ansteigen von  $I_{BA}$  an  $R_1$  höher wird. Dadurch wird  $U_{BE}$  wieder kleiner, verbunden mit einem Rückgang von  $I_{BA}$  auf seinen ursprünglichen Wert.

Von Vorteil ist auch der stets sehr hochohmige Widerstand  $R_1$ , weil dadurch die Spannungs- und die Signalquelle nur gering belastet werden.

Nachteilig ist dagegen, dass aufgrund der Exemplarstreuungen der Transistoren jede einzelne Transistorstufe abgeglichen werden muss, was nach einem möglichen Auswechseln eines Transistors wiederholt werden muss.

Die Kondensatoren  $C_{K1}$  und  $C_{K2}$  verhindern, dass eine Gleichspannung an den Signalgenerator oder eine davor liegende Verstärkerstufe gelangt.

Eine weitere Möglichkeit, einen Transistor in den AP zu bringen, ist die Erzeugung der Basisvorspannung durch einen Basisvorspannteiler nach Bild VI-14.

Der Strom durch  $R_1$  teilt sich an der Basis auf in den Basisstrom  $I_{BA}$  und den Querstrom  $I_q$ , so dass durch  $R_1$  die Summe aus  $I_q$  und  $I_{BA}$  fließt, durch  $R_2$  jedoch nur der  $I_q$ .

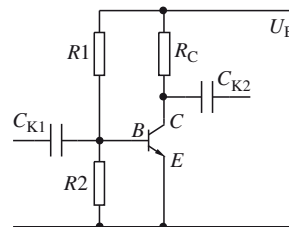


**Bild VI-14**  
Einstellung des Arbeitspunktes mit Basisvorspannteiler

Der *Querstrom*  $I_q$  sollte verhältnismäßig groß gegenüber dem Basisstrom gewählt werden. Dies erreicht man, indem der Spannteiler entsprechend niederohmig gemacht wird, so dass er als unbelastet gelten kann und somit eine von Belastungsschwankungen weitgehend unabhängige  $U_{BE}$  liefern kann.

$$\text{Richtwert } I_q = (2 \dots 10) \cdot I_B$$

Die Berechnung der Teilerwiderstände ergibt sich aus:

$$R_1 = \frac{U_B - U_{BEA}}{I_q + I_{BA}} \quad (\text{VI.29})$$

$$R_2 = \frac{U_{BEA}}{I_q} \quad (\text{VI.30})$$

Da die Eingangskennlinie sehr steil verläuft, ergibt schon eine kleine Änderung von  $U_{BEA}$  eine große Änderung des Basisstroms. Deshalb erfolgt die genaue Einstellung des Arbeitspunktes bei dieser Schaltung durch ein Potentiometer anstelle von  $R_2$ .

Die Lage des Arbeitspunktes ist nicht temperaturstabil. Eine einfache Möglichkeit zur thermischen Arbeitspunkt-Stabilisierung lässt sich realisieren, indem man parallel zum Widerstand  $R_2$  einen NTC-Widerstand schaltet, der unmittelbar an dem Transistorgehäuse oder an dem Kühlkörper des Transistors installiert wird. Mit steigender Temperatur wird der Widerstandswert des NTC aufgrund des negativen Temperaturkoeffizienten kleiner.

Da der Ersatzwiderstand einer Parallelschaltung immer kleiner ist als der kleinste Teilwiderstand, wird auch der Spannungsabfall an dieser Parallelschaltung kleiner, so dass  $I_B$  heruntergeregelt wird und damit auch  $I_C$  nicht weiter ansteigt.

Mit dem Widerstand  $R_2$  lässt sich die *Wirksamkeit* des NTC einstellen. Je niederohmiger  $R_2$  ist, um so geringer ist der Einfluss des NTC auf den Widerstandswert der Parallelschaltung.

Diese Art der Arbeitspunkt-Stabilisierung wird betrieben, wenn es sich um eine Verstärkerstufe mit hoher Ausgangsleistung handelt, man also auf den Emittewiderstand  $R_E$  verzichten möchte (wegen zu großer Leistungsverluste in ihm) und die infolge der Verlustleistung des Transistors abgegebene Wärmemenge groß genug ist, um eine ausreichend große Wirkung auf den NTC-Widerstand auszuüben.

In den meisten Emitterschaltungen wird eine Arbeitspunktstabilisierung durch Gegenkopplung angestrebt. Man spricht von einer Rückkopplung, wenn ein Teil der Ausgangsenergie eines Verstärkers auf seinen Eingang zurückgeführt wird. Liegt das rückgekoppelte Signal mit dem Eingangssignal in Phase, wirkt es also gleichsinnig mit dem Eingangssignal, spricht man von Mitkopplung (Schalter- und Trigger-Anwendungen). Wirkt das rückgekoppelte Signal jedoch dem Eingangssignal entgegen, so spricht man von Gegenkopplung.

Bild VI-15 soll den Signalfluss bei einem gegengekoppelten Verstärker verdeutlichen. Der strichpunktierte Kasten stellt den gegengekoppelten Verstärker dar, während der mit „Verstärker“ gekennzeichnete Kasten den rückkopplungsfreien Verstärker darstellt. Das mit „Rückführung“ gekennzeichnete Übertragungsglied koppelt nun eine Ausgangsgröße – entweder dem Ausgangsstrom oder der Ausgangsspannung proportional – aus und führt diese Größe mit umgekehrtem Vorzeichen dem Verstärkereingang zu.

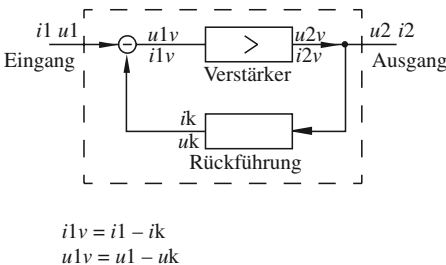


**Bild VI-15** Blockschaltbild des Signalflusses bei einem gegengekoppelten Verstärker

*Vorteile* der Gegenkopplung sind: Die Verstärkerkennwerte werden gegenüber Temperatureinflüssen und Exemplarstreuung stabilisiert. Die Ein- und Ausgangswiderstände und die Verstärkung lassen sich in ihrer Größe beeinflussen. Die nichtlinearen Verzerrungen (Klirrfaktor) werden verringert. Der Übertragungsbereich (Bandbreite) eines Verstärkers kann erhöht werden (Verringerung der linearen Verzerrungen). Eine Gegenkopplung hat immer eine Verringerung der Verstärkung zur Folge. Gegenkopplung kann durch das Einfügen eines Emittewiderstandes  $R_E$  in die Schaltung nach Bild VI-14 erreicht werden.

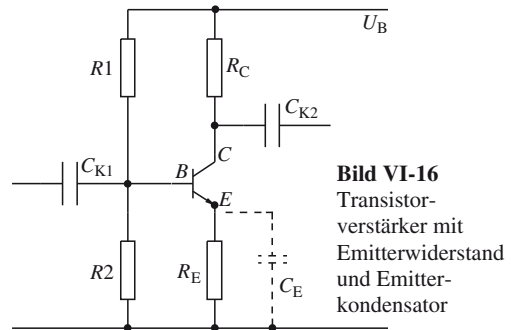


**Bild VI-16**  
Transistorverstärker mit Emittewiderstand und Emitterkondensator

Der Emittorstrom  $I_E$  lässt am Widerstand  $R_E$  in der Schaltung nach Bild VI-16 eine Spannung  $U_{RE}$  abfallen. Ändert sich der Strom  $I_E$  im Transistor aufgrund einer Temperaturänderung, so regelt sich die Transistorschaltung selber aus.

*Beschreibung der Regelung:*

Aufgrund einer Temperaturerhöhung erhöht sich der Strom  $I_C$ . Daraufhin wird die Spannung  $U_{RE}$  beispielsweise von 1 V auf 1,1 V ansteigen. Da  $U_{R2}$  durch den Basisspannungsteiler konstant gehalten wird, muss die Basisvorspannung  $U_{BE}$  um 0,1 V auf 0,6 V sinken. Das wiederum führt zu einem Absinken des Basisstroms  $I_B$ .

Durch die Gleichstromverstärkung  $B$  sinkt der Kollektorstrom  $I_C$  um einen entsprechenden Betrag ab. Das führt zu einer Senkung der Spannung an  $R_E$ ; der ursprüngliche Zustand ist wieder erreicht.

Da sich  $U_{BE}$  bei jeder kleinsten Emittorstromänderung sofort mit verändert, wird die thermische Arbeitspunktstabilisierung mit Hilfe eines Emittewiderstandes in fast allen Verstärkerschaltungen angewandt.

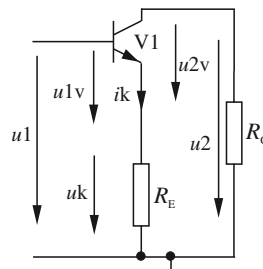


**Bild VI-17**  
Strom-Spannungs-Gegenkopplung (Regelkreis)

Diesen Effekt bezeichnet man als *Strom-Spannungs-Gegenkopplung*, da eine Stromänderung am Ausgang ( $I_E = i_k$ ) in eine Spannungsänderung am Eingang ( $U_{BE} = u_1 - u_k$ ) umgewandelt wird (Bild VI-17).

Die Güte der Stabilisierung des eingestellten Arbeitspunktes hängt von der Spannung am Widerstand  $R_E$  und damit vom Widerstandswert ab. Die Änderung des Kollektorstroms infolge einer Erwärmung des Transistors kann als Störgröße im Gegenkopplungskreis aufgefasst werden.

$$\text{Richtwert } U_{RE} \approx (0,1 \dots 0,2) \cdot U_B$$

Der Widerstand  $R_2$  muss so berechnet werden, dass an ihm die Summe der Spannungen aus  $U_{RE}$  und  $U_{BE}$  abfällt.

$$R_1 = \frac{U_B - (U_{BEA} + U_{RE})}{I_q + I_{BA}} \quad (\text{VI.31})$$

$$R_2 = \frac{U_{BEA} + U_{RE}}{I_q} \quad (\text{VI.32})$$

Im Bild VI-16 ist der Emittorwiderstand nur dann gleichstrommäßig wirksam, wenn er mit einem Kondensator  $C_E$  überbrückt ist, der auch bei der unteren Grenzfrequenz der Verstärkerstufe noch sehr niederohmig gegen  $R_E$  ist und deshalb jede Wechselspannung (= Signal), die am Emittor auftritt, nach Masse kurzschließt.

Befindet sich in der Schaltung nach Bild VI-16 der Kondensator  $C_E$ , so ist wechselstrommäßig nur der Kollektorwiderstand  $R_C$  wirksam. Diese Schaltung verhält sich wechselstrommäßig wie eine Emitterschaltung ohne  $R_E$ , bei der die Batteriespannung um den Betrag  $U_{REA}$  kleiner ist als im vorliegenden Fall. Eine weitere Möglichkeit zur thermischen Arbeitspunktstabilisierung zeigt die Schaltung nach Bild VI-18. Im Gegensatz zur Stromgegenkopplung, bei

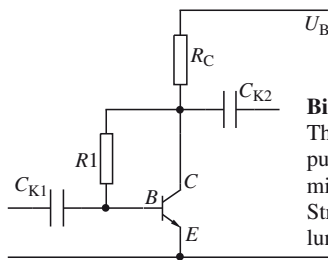


**Bild VI-18**  
Thermische Arbeitspunktstabilisierung mit Spannungs-Strom-Gegenkopplung

der eine dem Ausgangsstrom proportionale Spannung zum Eingang zurückgekoppelt wird, koppelt man hier einen Teil der gegenphasigen Ausgangsspannung zum Eingang zurück (Spannungs-Strom-Gegenkopplung).

Die Stabilisierung wird um so besser, je größer das Verhältnis  $R_C/R_1$  wird. Die Gegenkopplung geschieht durch den Widerstand  $R_1$ , der den Basisstrom  $I_{BA}$  zur Arbeitspunkteinstellung liefert. Dieser ist jedoch

nicht an die konstante Betriebsspannung angeschlossen, sondern an das veränderliche Kollektorpotential. Da der Widerstand  $R_1$  gleich- und wechselspannungsmäßig wirksam ist, spricht man von einer Gleich- und Wechselspannungsgegenkopplung. Ändert sich in dieser Schaltung die Temperatur, so ändert sich auch der eingestellte Kollektorstrom, damit auch die Spannung  $U_{CE}$  und als Folge davon die Basisvorspannung  $U_{BE}$ .

$$R_C = \frac{U_B - U_{CEA}}{I_{CA} + I_{BA}} \quad (\text{VI.33})$$

$$R_1 = \frac{U_{CEA} - U_{BEA}}{I_{BA}} \quad (\text{VI.34})$$

Zur Berechnung von  $R_C$  kann  $I_{BA}$  wegen  $B > 100$  vernachlässigt werden. In der Schaltung nach Bild VI-19 wird die Arbeitspunkteinstellung wieder durch einen Basisspannungsteiler unter Ausnutzung der Gegenkopplung vorgenommen.

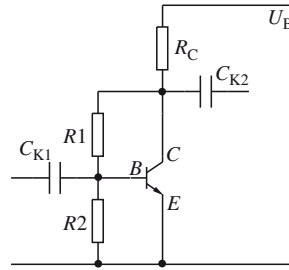


**Bild VI-19**  
Arbeitspunkteinstellung durch Basisspannungsteiler bei Spannungs-Strom-Gegenkopplung

Die Wechselspannungsgegenkopplung lässt sich hier nur schwer unwirksam machen, so dass diese Schaltung nicht häufig Verwendung findet.

$$\text{Kollektorwiderstand } R_C = \frac{U_B - U_{CEA}}{I_{CA} + I_{BA} + I_q} \quad (\text{VI.35})$$

Basisspannungsteilerwiderstände

$$R_1 = \frac{U_{CEA} - U_{BEA}}{I_{BA} + I_q} \quad (\text{VI.36})$$

$$R_2 = \frac{U_{BEA}}{I_q} \quad (\text{VI.37})$$

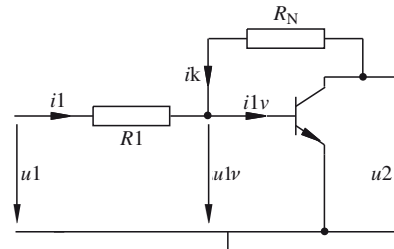


**Bild VI-20** Spannungs-Strom-Gegenkopplung (Regelkreis)

Die Wirkung der *Spannungs-Strom-Gegenkopplung* lässt sich nach Bild VI-20 mit Unterstützung von Bild VI-15 nachvollziehen. Der Widerstand  $R_N$  ist der Gegenkopplungswiderstand R1 nach Bild VI-19.

### 1.3 Emitterschaltungen

Die Emitterschaltung nach Bild VI-16 ist die am häufigsten eingesetzte Grundschiung. Der Emittor ist bei dieser Schaltung wechselstrommäßig der gemeinsame Anschluss für den Eingang und Ausgang des Transistors.

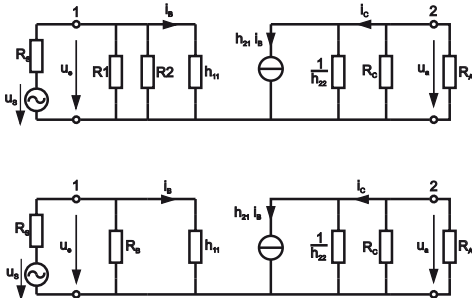


**Bild VI-21** AC-Ersatzschaltbild der Emitterschaltung mit Emittorkondensator

Diese Schaltung wird mit dem Abschlusswiderstand  $R_A$  belastet und von einer Signalquelle  $u_s$  mit dem Innenwiderstand  $R_S$  gespeist.

Bild VI-21a zeigt das AC-Ersatzschaltbild der Emitterschaltung mit dem integrierten Emittorkondensator  $C_E$ , wobei das AC-Ersatzschaltbild des Transistors nach Bild VI-6 verwendet wird. Der Emittorwiderstand  $R_E$  erscheint nicht in diesem Ersatzschaltbild, da er durch  $C_E$  kurzgeschlossen wird.

Die Spannungsrückwirkung wird hier vernachlässigt. Der Innenwiderstand der Gleichspannungsquelle kann für Wechselspannungen zu Null genommen werden, so dass der Kollektorkondensator und der Widerstand R1 gegen Masse liegen.

Fasst man die Parallelschaltung der Widerstände R1 und R2 zum Ersatzwiderstand  $R_B$  zusammen, so erhält man Bild VI-21b. Somit ergibt sich für diese Transistorstufe die Ersatzschaltung nach Bild VI-22.

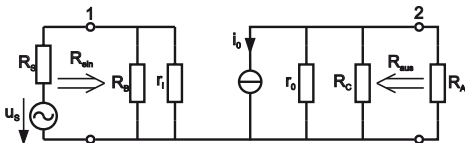


**Bild VI-22** Vollständige AC-Ersatzschaltung

Der Wechselstrom-Eingangswiderstand  $R_{\text{ein}}$  wird bei der Emitterschaltung hauptsächlich durch den dynamischen Eingangswiderstand  $r_{\text{BE}}$  des Transistors bestimmt. Der Ausgangswiderstand  $R_{\text{aus}}$  ergibt sich

als Parallelschaltung des Kollektorkondensators  $R_C$  mit dem Ausgangswiderstand  $r_o$  (Bild VI-21) des Transistors nach Bild VI-22.

*Eingangswiderstand*

$$R_{\text{ein}} = R_1 \parallel R_2 \parallel r_i = R_B \parallel r_{\text{BE}} \quad (\text{VI.38})$$

*Ausgangswiderstand*

$$R_{\text{aus}} = R_C \parallel r_o = R_C \parallel r_{\text{CE}} \quad (\text{VI.39})$$

Der Wechselstrom-Ausgangswiderstand bei der Emitterschaltung wird also wegen  $r_{\text{aE}} \gg R_C$  durch den Kollektorkondensator  $R_C$  bestimmt.

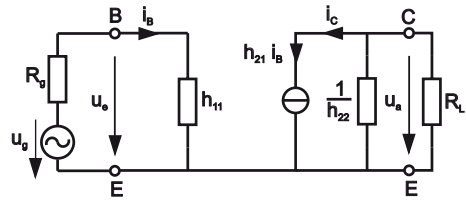


**Bild VI-23** AC-Ersatzschaltung mit umgerechneter Signalquelle

Nunmehr lässt sich die AC-Ersatzschaltung nach Bild VI-22 vollständig umrechnen nach Bild VI-23 mit den gegebenen Werten.

Mit

$$R_L = R_C \parallel R_A; \quad R_g = R_1 \parallel R_2 \parallel R_S$$

und

$$u_g = u_s \cdot \frac{R_1 \parallel R_2}{R_S + R_1 \parallel R_2}$$

gilt für die Spannungsverstärkung

$$V_u = \frac{\beta}{r_{\text{BE}}} \cdot r_{\text{CE}} \parallel R_L \quad (\text{VI.40})$$

und die Stromverstärkung

$$V_i = \beta \cdot \frac{r_{\text{CE}}}{R_L + r_{\text{CE}}} \quad (\text{VI.41})$$

Die Leistungsverstärkung der Stufe, also von Klemme 1 nach Klemme 2 gemäß Bild VI-22, ist geringer als die Multiplikation der errechneten Spannungs- und Stromverstärkungswerte.

*Leistungsverstärkung*

$$V_{\text{Stufe}} = V_u^2 \cdot \frac{R_B \cdot r_{\text{eE}}}{R_A \cdot (R_B + r_{\text{eE}})} \quad (\text{VI.42})$$

Hier sind jetzt auch die Wechselstromverluste in den Widerständen  $R_C$ , R1 und R2, die zur Arbeitspunkt-einstellung erforderlich sind, berücksichtigt.

Bei der Emitterschaltung wird das Ausgangssignal gegenüber dem Eingangssignal um  $180^\circ$  phasenverschoben verstärkt wiedergegeben.

Die Koppelkondensatoren  $C_{K1}$  und  $C_{K2}$  stellen im Idealfall für die Signalspannung einen Kurzschluss dar. Sie bestimmen die untere Übertragungsfrequenz des Verstärkers ebenso wie der Emittorkondensator, denn je größer ihre Wechselstromwiderstände mit abnehmender Frequenz werden, um so geringer wird die Spannungsverstärkung der Schaltung. Darum muss für die Koppelkondensatoren  $C_{K1}$  und  $C_{K2}$  eine untere Grenzfrequenz  $f_u$  angegeben werden, für die diese zu berechnen sind. Als Grenzfrequenz ist die Frequenz festgelegt, bei der die Spannungsverstärkung  $V_u$  auf 0,707 der Verstärkung bei mittleren Frequenzen abgesunken ist. Das entspricht einer Dämpfung von 3 dB.

#### Koppelkondensatoren

$$C_{K1} = C_{K2} = \frac{1}{2\pi f_u \cdot (R_{\text{aus}} + R_{\text{ein}})} \quad (\text{VI.43})$$

In Gleichung VI.43 beschreibt  $R_{\text{aus}}$  den Ausgangswiderstand der signalgebenden Schaltung und  $R_{\text{ein}}$  den Eingangswiderstand der aufnehmenden Schaltung beziehungsweise des Lastwiderstandes. Die Kapazität des Emittorkondensators ergibt sich für eine vorgegebene untere Grenzfrequenz  $f_u$  mit folgender Überlegung nach Bild VI-24.

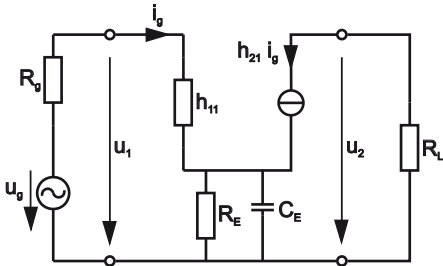


**Bild VI-24** AC-Ersatzschaltung für Emitterschaltung mit Emittorkondensator

Faktisch liegt der Kondensator  $C_E$  parallel zum Widerstand  $R_E$  und muss somit bei der Berechnung der Spannungsverstärkung berücksichtigt werden. Bei der Grenzfrequenz ist die Verstärkung um 3 dB abgesunken. Bei Frequenzen unterhalb der Grenzfrequenz ist der Emittorkondensator nicht mehr wirksam.

#### Emittorkondensator

$$C_E = \frac{R_g + r_{BE} + \beta \cdot R_E}{2\pi f_u \cdot R_E \cdot (R_g + r_{BE})} \quad (\text{VI.44})$$

Wird der Emittorkondensator  $C_E$  nach Bild VI-16 überbrückt, so ist er nach Bild VI-25 auch wechselstrommäßig wirksam. In diesem Fall liegt eine Gleich- und Wechselstromgegenkopplung vor. Ein Teil der AC-Ausgangsspannung  $u_a$ , der Signalspannungsabfall an  $R_E$ , wird auf den Eingang zurückgekoppelt.

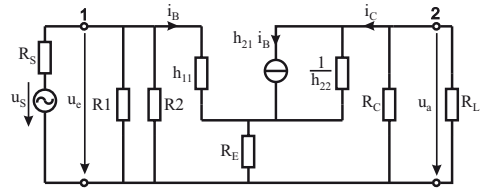


**Bild VI-25** AC-Ersatzschaltung für Emitterschaltung ohne Emittorkondensator

Diese AC-Gegenkopplung hat Auswirkungen auf die Spannungsverstärkung.

Vereinfacht gilt:  
mit

$$R_L = R_C \parallel R_A; \quad u_a \approx -(i_B \cdot h_{21e}) \cdot R_L$$

und

$$u_e = i_B \cdot [h_{11e} + (h_{21e} + 1) \cdot R_E]$$

#### Spannungsverstärkung

$$V'_u = - \frac{h_{21e} \cdot R_L}{[h_{11e} + (h_{21e} + 1) \cdot R_E]} \quad (\text{VI.45})$$

Durch die AC-Gegenkopplung wird die AC-Verstärkung der Transistorstufe herabgesetzt. Daraus folgt, dass die Spannungsverstärkung  $V'_u$  einer Transistorstufe mit  $R_E$  ohne  $C_E$  kleiner ist als bei einer Stufe mit  $C_E \parallel R_E$ .

$$\text{Näherung } V'_u \approx - \frac{R_L}{R_E} \quad (\text{VI.46})$$

$$\text{wenn } R_E \gg \frac{r_{BE}}{\beta}$$

Die Wechselstromgegenkopplung macht zwar die Spannungsverstärkung kleiner, ergibt jedoch zwei erhebliche Vorteile:

Die *Spannungsverstärkung* lässt sich auf einen gewünschten Wert mit Hilfe der beiden Widerstände  $R_C$  und  $R_E$  einstellen! Die Spannungsverstärkung wird praktisch *unabhängig* von den Daten des Transistors und hängt nur von den beiden Widerständen ab (wichtig beim Bau von Seriengeräten und bei Reparaturen)!

Es ist erkennbar, dass der AC-Eingangswiderstand der Schaltung nach Bild VI-26 andere Werte hat als in der Schaltung nach Bild VI-22. Der Eingangswiderstand des Transistors als solcher ist durch die AC-Wirkung des  $R_E$  größer geworden.

#### Eingangswiderstand

$$R_{\text{ein}} = R_B \parallel [h_{11e} + (h_{21e} + 1) \cdot R_E] \quad (\text{VI.47})$$

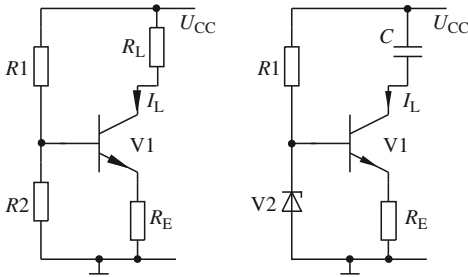
Der Eingangswiderstand der gegengekoppelten Schaltung wird aber weiterhin im wesentlichen durch die Größe der Spannungsteiler-Widerstände bestimmt.

Der Ausgangswiderstand der Schaltung ohne Beachtung von  $R_C$  und  $R_A$  wird durch den  $R_E$  erhöht. Es gilt vereinfacht:

*Ausgangswiderstand*

$$R_{\text{aus}} \approx r_{CE} \cdot \left[ 1 + \frac{h_{21e} \cdot R_E}{(h_{11e} + R_E + R_S)} \right] \quad (\text{VI.48})$$

Dieser „widerstandsbehaftete“ Transistor lässt sich nutzen. Die Transistorschaltung mit  $R_E$  hat das Verhalten einer Stromquelle, da der Widerstand  $R_E$  die Eigenschaft hat, den Signalstrom zu stabilisieren beziehungsweise bei konstanter Eingangsspannung konstant zu halten. Konstantstromquellen nach Bild VI-26 haben einen sehr großen, theoretisch unendlich hohen Innenwiderstand.

**Bild VI-26** Konstantstromquellen

Der Kondensator als Lastwiderstand in der Schaltung nach Bild VI-26b wird linear und nicht nach einer Exponentialfunktion geladen. Die Z-Diode V2 stabilisiert die Versorgungsspannung  $V_{CC}$ . Der differentielle Innenwiderstand dieser Konstantstromquelle lässt sich leicht berechnen.

*Innenwiderstand*

$$r_i = \frac{dU_L}{dI_L} = r_{CE} \cdot \left[ 1 + \frac{h_{21e} \cdot R_E}{(h_{11e} + R_E)} \right] \quad (\text{VI.49})$$

Wegen  $I_L \approx I_E$  lässt sich der Strom dieser Konstantstromquelle berechnen.

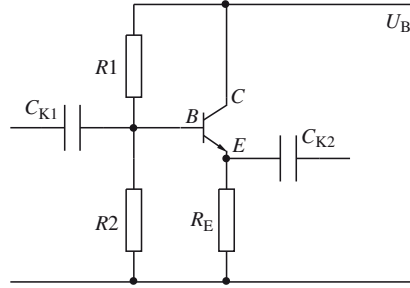
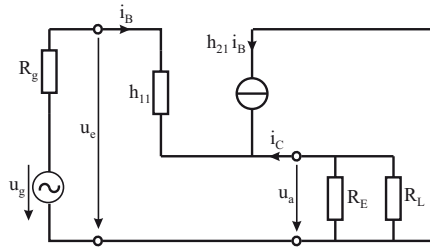
*Laststrom*

$$I_L \approx \frac{U_{RE}}{R_E} = \frac{U_{R2} - U_{BEA}}{R_E} \quad (\text{VI.50})$$

**1.4 Kollektorschaltungen**

Eine Kollektorschaltung mit Basisspannungsteiler ist in Bild VI-27 dargestellt. Bei der gezeigten Schaltung wird die Basisvorspannung durch den Vorwiderstand  $R_2$  erzeugt und der AP durch den Emittterwiderstand  $R_E$  stabilisiert. Der Emittterwiderstand darf nicht durch einen Kondensator gebrückt werden, weil an  $R_E$  das Ausgangssignal abgegriffen wird. Die Kondensatoren  $C_{K1}$  und  $C_{K2}$  trennen den Generator und den Lastwiderstand gleichstrommäßig von der Schaltung.

Diese Schaltung wird nun (vgl. 6.1.3) mit dem Lastwiderstand  $R_L$  belastet und von einer Signalquelle  $u_s$  mit dem Innenwiderstand  $R_S$  gespeist. Die Parallelschaltung der Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  fasst man zum Ersatzwiderstand  $R_B$  zusammen.

**Bild VI-27** Kollektorschaltung mit Basisspannungsteiler**Bild VI-28** AC-Ersatzschaltung der Kollektorschaltung

Nun lässt sich die AC-Ersatzschaltung nach Bild VI-28 mit den gegebenen Werten vollständig berechnen.

$$R_g = R_1 \parallel R_2 \parallel R_S, \quad u_g = u_s \cdot \frac{R_1 \parallel R_2}{R_S + R_1 \parallel R_2}$$

Die Kennwerte der vollständigen Schaltung lassen sich aus dem AC-Ersatzschaltbild nach Bild VI-28 herleiten und erklären.

Unter Berücksichtigung des Lastwiderstandes und  $r_{CE} \gg R_E \parallel R_L$  gilt dann:

*AC-Eingangswiderstand*

$$R_{\text{ein}} \approx \left[ r_{BE} + \beta \cdot \frac{R_E \cdot R_L}{(R_E + R_L)} \right] \quad (\text{VI.51})$$

Der Wechselstrom-Eingangswiderstand der Kollektorschaltung ist folglich größer als der einer Emittterschaltung, wird jedoch durch die Parallelschaltung des Basisspannungsteilers  $R_B$  deutlich herabgesetzt.

Der Wechselstrom-Ausgangswiderstand der Kollektorschaltung ist laut Ersatzschaltbild in seinem Wert kleiner als bei der Emittterschaltung.

*AC-Ausgangswiderstand*

$$R_{\text{aus}} = R_E \parallel \left[ \frac{r_{BE} + R_g}{\beta} \right] \quad (\text{VI.52})$$

Für die Spannungsverstärkung gilt grundsätzlich:

*Spannungsverstärkung*

$$U_u = \frac{u_a}{u_e} = \frac{\Delta U_{RE}}{\Delta U_{RE} + \Delta U_{BE}} \approx 1 \quad (\text{VI.53})$$



Da die Summe der Spannungen unter dem Bruchstrich größer ist als der Wert oberhalb, gilt  $V_u < 1$ ! Für die Stromverstärkung gilt grundsätzlich:

$$V_i = \frac{i_a}{i_e} = \frac{\Delta I_C + \Delta I_B}{\Delta I_B} = \beta + 1 \quad (\text{VI.54})$$

Näherungsweise kann mit  $V_i \approx \beta$  gerechnet werden. Da die Leistungsverstärkung  $V_p$  das Produkt aus  $V_u$  und  $V_i$  ist, gilt bei  $V_u \approx 1$  und  $V_i \approx \beta$  eine Leistungsverstärkung

$$V_p \approx V_i \approx \beta \quad (\text{VI.55})$$

Da ein größerer Basisstrom bei der Kollektorschaltung auch einen höheren Kollektorstrom und damit Emittterstrom bewirkt, wird auch bei steigendem Basisstrom der Spannungsabfall an  $R_E$  größer. Bei der Kollektorschaltung entsteht somit *keine* Phasenverschiebung zwischen dem Ein- und Ausgangssignal.

Die *Grenzfrequenz* unterscheidet sich hier kaum von der der Emitterschaltung. Aufgrund des hohen Eingangswiderstandes und des niedrigen Ausgangswiderstandes wird die Kollektorschaltung als *Impedanzwandler* verwendet; sie ermöglicht die Anpassung hochohmiger Signalquellen an kleine Verbraucherwiderstände. Durch die geringe Belastung des Signalgenerators ist sie gut verwendbar als Eingangsstufe für mehrstufige Verstärkerschaltungen.

## 1.5 Basisschaltung

Bei der Basisschaltung ist die Basis gemeinsamer Bezugspunkt (Elektrode) für das Ein- und Ausgangssignal.

Bild VI-29 zeigt eine vollständige Verstärkerstufe, die mit einem Basisspannungsteiler (R1 und R2) zur Basisvorspannungserzeugung versehen ist. Beachtenswert ist hier der Anschlusspunkt für die Versorgungsspannung  $U_B$ .

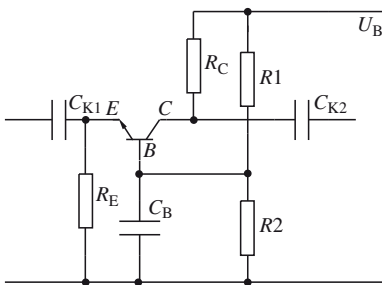


**Bild VI-29** Verstärkerstufe in Basisschaltung mit Basisspannungsteiler

Der Arbeitspunkt wird durch den Widerstand  $R_E$  stabilisiert. Der Kondensator  $C_B$  sorgt dafür, dass die Basis des Transistors wechsellspannungsmäßig auf Masse gelegt wird. Für Wechselspannungen schließt der Kondensator  $C_B$  den Widerstand R2 des Spannungsteilers kurz, während der Widerstand R1 durch

die Batterie (Netzteil) kurzgeschlossen wird. Somit ist der Basisspannungsteiler im AC-Ersatzschaltbild nicht vorhanden.

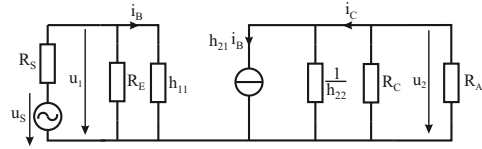


**Bild VI-30** AC-Ersatzschaltbild der Basisschaltung

Die Kennwerte lassen sich aus dem AC-Ersatzschaltbild nach Bild VI-30 herleiten und erklären.

*AC-Eingangswiderstand*

$$R_{\text{ein}} = \frac{u_1}{i_1} = \frac{R_E \cdot r_{BE}}{r_{BE} + (\beta + 1) \cdot R_E} \quad (\text{VI.56})$$

Der Wechselstrom-Eingangswiderstand der Basisschaltung ist wesentlich niedriger als der der beiden anderen Grundschaltungen.

Generell gilt für den Wechselstrom-Ausgangswiderstand der Basisschaltung

*AC-Ausgangswiderstand*

$$R_{\text{aus}} \approx \frac{r_{BE} + (\beta + 1) \cdot R_S}{r_{CE} \cdot R_S} \parallel R_C \approx R_C \quad (\text{VI.57})$$

Die Spannungsverstärkung einer Basisschaltung ergibt sich aus zur Emitterschaltung ähnlichen Zusammenhängen. Da bei der Basisschaltung  $r_{CE} \gg R_C$  ist, gilt

$$\text{Spannungsverstärkung } V_u \approx \frac{\beta \cdot R_C}{r_{BE}} \quad (\text{VI.58})$$

Ist ein Lastwiderstand vorhanden, so liegt dieser parallel zu  $R_C$  und muss entsprechend berücksichtigt werden.

$$\text{Stromverstärkung } V_i = \frac{\beta}{\beta + 1} \approx 1 \quad (\text{VI.59})$$

Da die Leistungsverstärkung das Produkt aus Spannungs- und Stromverstärkung ist, gilt näherungsweise:

$$\text{Leistungsverstärkung } V_p \approx V_u \approx \frac{\beta \cdot R_C}{r_{BE}} \quad (\text{VI.60})$$

Aus der Art der Ansteuerung ist erkennbar, dass es keine Phasendrehung zwischen Eingangs- und Ausgangssignal geben kann.

Die höchste übertragbare Frequenz  $f_{go}$  liegt bei der Basisschaltung in der Nähe der Transitfrequenz, aber auf jeden Fall oberhalb der Grenzfrequenz der Emitterschaltung. Den Grund dafür findet man im Wechselstrom-Ersatzschaltbild. Da die Basis direkt an Masse liegt, kann über die interne Kapazität  $C_B$  des Transistors das Ausgangssignal nicht auf den Eingang zurückgeführt werden.



Die Grenzfrequenz der Basisschaltung errechnet sich daher zu

$$f_{go} = \beta \cdot f_{go \text{ Emitter}} \quad (\text{VI.61})$$

Aufgrund der hohen Grenzfrequenz wird diese Schaltung fast ausschließlich in Hoch- und Höchsthochfrequenzschaltungen eingesetzt (Eingangsstufe für Signalfrequenzen größer 100 MHz).

Ein weiterer Vorteil ist der niedrige Eingangswiderstand der Basisschaltung, der eine sehr gute und einfache Anpassung an die niedrige Antennenimpedanz von  $Z = 75 \, \Omega$  ermöglicht.

## 2 Feldeffekt-Transistor als Verstärker

Feldeffekt-Transistoren haben im Vergleich zu den bipolaren Transistoren für die Anwendung als AC-Verstärker zwei erhebliche Vorteile. Auf die geringeren nichtlinearen Signalverzerrungen beim FET ist bereits hingewiesen worden. Die große Eingangsimpedanz der FET ist ein weiterer Vorteil, denn sie ermöglicht eine große Spannungsverstärkung.

Der Verstärkungsvorgang bei den FET ist im Prinzip identisch mit dem der bipolaren Transistoren (Bild VI-31).

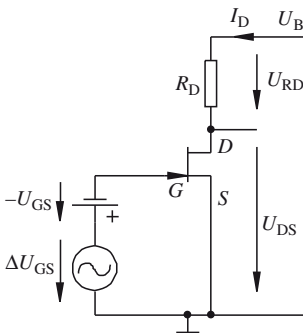


**Bild VI-31**  
Prinzipschaltung  
eines Verstärkers  
mit J-FET

Durch eine negative Gate-Source-Spannung  $-U_{GS}$  wird bei diesem N-Kanal-J-FET der Arbeitspunkt eingestellt, der damit sowohl für die Übertragungskennlinie wie auch für das Ausgangskennlinienfeld bestimmt ist. Dort liegt der Arbeitspunkt im Schnittpunkt der Arbeitsgeraden mit der  $I_D$ - $U_{DS}$ -Kennlinie mit  $U_{GS}$  als Parameter. Die Arbeitsgerade gehorcht den gleichen Bedingungen wie bei den bipolaren Transistoren.

Das zu verstärkende Signal  $\Delta U_{GS}$  wird der Gate-Source-Spannung überlagert und lässt nunmehr in der Summe den Arbeitspunkt auf der Arbeitsgeraden wandern. Die positive Amplitude des Signals lässt die Gate-Source-Spannung  $U_{GS}$  positiver werden und somit den Drainstrom  $I_D$  ansteigen. Dadurch erhöht sich der Spannungsabfall am Drainwiderstand  $R_D$ . Infolge dieser Spannungserhöhung muss die Drain-Source-Spannung  $U_{DS}$  kleiner werden. Ein- und Ausgangsspannung haben hier also entgegengesetzte Polarität, was von der Emitterschaltung bei den bipolaren Transistoren her bekannt ist.

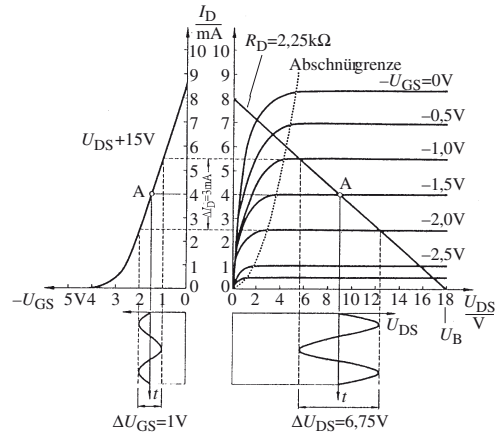


**Bild VI-32** Verstärkungsvorgang beim J-FET

Eine nahezu verzerrungsfreie Verstärkung des Signals  $\Delta U_{GS}$  ist nur zu erwarten, wenn der Arbeitspunkt im Ausgangskennlinienfeld auch bei maximaler Amplitude des Signals nicht über die Abschnürgrenze hinaus in den ohmschen Bereich wandert. Bild VI-32 veranschaulicht den beschriebenen Vorgang. Die Analogie zu den bipolaren Transistoren ist unübersehbar.

### 2.1 Arbeitspunkteinstellung und -stabilisierung

Bei der Verwendung des FET als Verstärker wird nur der Abschnürbereich des Ausgangskennlinienfeldes benutzt. Der Arbeitsbereich, also der Bereich, in dem der Arbeitspunkt liegen darf, ist durch folgende Kurven beziehungsweise Werte begrenzt: die Verlusthyperbel, die Abschnürgrenze und die Kennlinien für die maximale und minimale Gate-Source-Spannung. Bei Kleinsignal-Aussteuerung legt man den Arbeitspunkt in den oberen Bereich der Übertragungskennlinie bei einem großen Ruhestrom  $I_{DA}$ , da hier die Kennlinie nahezu linear verläuft. Muss ein temperaturunabhängiger Arbeitspunkt gewählt werden, kann der Kompensationspunkt genommen werden.

Für diesen Arbeitspunkt wird in Kapitel 4.2 die Gate-Source-Spannung  $U_{GSK}$  ermittelt. Größere Nichtlinearität ist hier allerdings die Folge.

Bei der Aussteuerung muss gewährleistet werden, dass die Drainspannung die im Datenblatt angegebene Durchbruchspannung  $U_{(BR)DS}$  nicht übersteigt.

In Bild VI-32 ist der Arbeitspunkt so gewählt, dass  $U_{DS} = U_B/2$  ist. Wie bei einem Verstärker mit bipolarem Transistor ist das ein guter Arbeitspunkt.

Dieser Arbeitspunkt muss nun mit der Gate-Source-Spannung  $U_{GS}$  eingestellt werden. Bild VI-33 zeigt die Steuerkennlinien der drei möglichen N-Kanal-Typen mit günstigen Arbeitspunkten für den Betrieb in AC-Verstärkern.

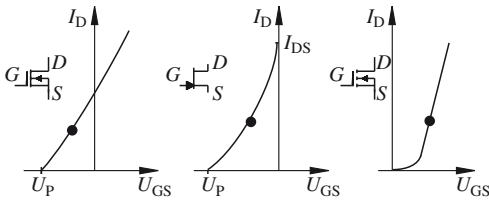


**Bild VI-33** Steuerkennlinien der drei N-Kanal-Typen

Beim J-FET und beim MOS-FET vom Normally-On-Typ ist die Steuerspannung  $U_{GS}$  negativ, beim MOS-FET vom Normally-Off-Typ dagegen positiv zu machen.

Eine Arbeitspunktstabilisierung ist nur bei der Source-Schaltung, die der Emitterschaltung entspricht, vorzusehen. Die beiden anderen Grundschaltungen sind infolge der internen Gegenkopplung thermisch stabil.

J-FET sind selbstleitende Typen, bei denen auch ohne Gate-Source-Spannung ein großer Drainstrom fließt. Dies ist auch bei den MOS-FET vom Normally-On-Typ der Fall.

Dieser Umstand ermöglicht die Arbeitspunkteinstellung und -stabilisierung mit Hilfe der automatischen Gate-Source-Spannung. Die automatische Erzeugung

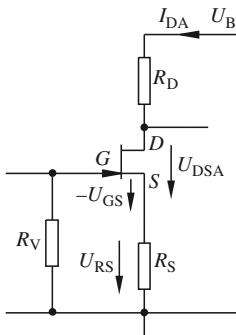


**Bild VI-34** Arbeitspunktstabilisierung mit automatischer Gate-Source-Spannung

dieser Spannung mit Hilfe eines Widerstandes  $R_S$  in der Sourceleitung zeigt die Schaltung nach Bild VI-34. Der durch die Widerstände  $R_D$  und  $R_S$  fließende Drainstrom  $I_{DA}$  lässt am Sourcewiderstand  $R_S$  eine Spannung  $U_{RS}$  abfallen. Die Source-Elektrode ist daher um den Wert dieser Spannung positiver als das über den Widerstand  $R_V$  auf Masse gelegte Gate, wobei daran erinnert sei, dass die Gate-Source-Strecke quasi einen unendlich hohen Widerstand darstellt und somit kein Gatestrom fließt. Damit wird deutlich, dass mit Hilfe des Sourcewiderstandes  $R_S$  die Gate-Source-Spannung eingestellt werden kann.

*Gate-Source-Spannung*

$$U_{RS} = -U_{GS} = I_{DA} \cdot R_S \quad (\text{VI.62})$$

Ein steigender Drainstrom führt zu einer negativer werdenden Gate-Source-Spannung, die ihrerseits den Drainstrom begrenzt beziehungsweise verkleinert. Ein

sinkender Drainstrom führt zu einem entgegengesetzten Effekt. Es handelt sich also bei diesem Sourcewiderstand  $R_S$  um eine *Gleichstrom-Gegenkopplung*, wie sie beim bipolaren Transistor zur thermischen Arbeitspunktstabilisierung bereits behandelt worden ist.

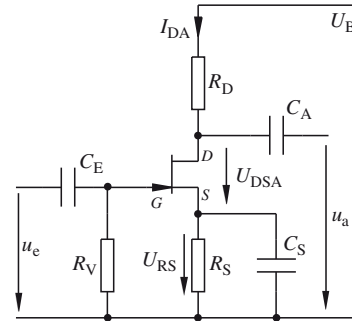


**Bild VI-35** Vollständige Verstärkerstufe mit J-FET

Wird der FET mit einer Wechselspannung angesteuert, fällt an  $R_S$  eine Wechselspannung ab, die eine gegenkoppelnde Wirkung hat. Wie in der Emitterschaltung (bipolare Transistoren) wird auch hier die AC-Verstärkung gemindert. Will man eine AC-Gegenkopplung vermeiden, kann durch einen genügend großen Kondensator  $C_S$  des Widerstandes  $R_S$  wechsellspannungsmäßig kurzgeschlossen werden. Die Kondensatoren  $C_E$  und  $C_A$  nach Bild VI-35 dienen zur Ein- und Auskopplung des Signals.

Je größer der Widerstand  $R_S$  gewählt wird, um so geringer wird eine mögliche Arbeitspunktverschiebung aufgrund von Exemplarstreuungen des FET sein. Nachteilig ist dann jedoch die sich ergebende Lage des Arbeitspunktes im unteren Teil der Übertragungskennlinie.

Bei den selbstsperrenden MOS-FET ist die automatische Vorspannungserzeugung nicht möglich. Aus diesem Grunde werden die Normally-Off-Typen immer und die anderen FET bei bestimmten Gelegenheiten mit Hilfe eines Gate-Spannungsteilers nach Bild VI-36 „in den Arbeitspunkt gebracht“ und mit dem Sourcewiderstand  $R_S$  gegen Arbeitspunktschwankungen stabilisiert.

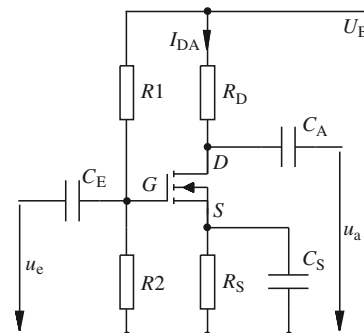


**Bild VI-36** Verstärkerschaltung mit selbstsperrenden MOS-FET

Für direkt gekoppelte Verstärkerschaltungen können nur FET verwendet werden, deren Drain-Source- und Gate-Source-Spannung gleiche Polarität haben. Je nach Verhältnis der Widerstände  $R_1$ ,  $R_2$  und  $R_S$  lassen sich mit dem Spannungsteiler entsprechende Vorspannungen am Gate einstellen.

Jetzt lassen sich auch Arbeitspunkte im oberen Teil der Übertragungskennlinie einstellen. Unter Vernachlässigung des Gatestroms  $I_G$  lässt sich der Drainstrom  $I_D$  berechnen.

*Drainstrom*

$$I_D = \frac{\frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_B - U_{GS}}{R_S} = \frac{U_0 - U_{GS}}{R_S} \quad (\text{VI.63})$$

Je größer der Spannungsabfall an den Widerständen  $R_2$  und  $R_S$  gewählt wird, um so besser lassen sich Änderungen des Arbeitspunktes durch Exemplarstreuungen des FET oder Temperaturschwankungen reduzieren. Der Spannungsteiler sollte aber nicht zu hoch gewählt werden, da sonst die exponentielle Temperaturabhängigkeit des Gatestroms wirksam wird. Wird der Spannungsteiler zu niederohmig, wird der Wechselstrom-Eingangswiderstand der Verstärkerschaltung wesentlich reduziert.

Bei vorgegebenen Werten für den Bereich des gewünschten Arbeitspunktes (Wandern des AP auf der Arbeitsgeraden) lässt sich der Sourcewiderstand durch Vorgabe des maximalen und minimalen Ruhestroms ( $I_{DA+}$ ,  $I_{DA-}$ ) berechnen.

$$\text{Sourcewiderstand } R_S = \frac{U_{GSA+} - U_{GSA-}}{I_{DA+} - I_{DA-}} \quad (\text{VI.64})$$

Der Spannungsteiler kann als unbelastet angenommen werden.

$$\text{Teilverhältnis } \frac{R_1}{R_2} = \frac{U_B}{I_{DA} \cdot R_S + U_{GSA}} - 1 \quad (\text{VI.65})$$

Häufig wird die Spannung  $U_{RS}$  in der Größenordnung um 1 V gewählt, während der Querstrom  $I_q$  durch den Teiler im Mikroampere-Bereich liegt.

Da sich der Drainstrom bei Temperaturerhöhung nur geringfügig verringert, können FET ohne zusätzliche Sicherheitsmaßnahmen parallelgeschaltet werden.

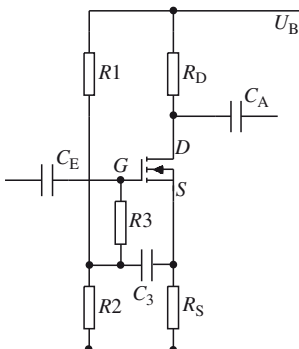


**Bild VI-37**  
Bootstrap-Schaltung mit selbstsperrenden FET

Weitere Schaltungen zur Arbeitspunkteinstellung und -stabilisierung haben zusätzlich zum Ziel, einen hohen Eingangswiderstand des Verstärkers zu realisieren. Die Bootstrap-Schaltung nach Bild VI-37 lässt sich genauso wie die Spannungs-Gegenkopplung nach Bild VI-38 mit selbstsperrenden FET anwenden. Die Spannungsverstärkung wird durch die Gegenkopplung herabgesetzt, was bereits von den bipolaren Transistoren her bekannt ist.

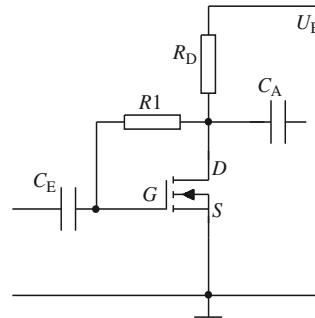


**Bild VI-38**  
Verstärkerstufe mit selbstsperrenden FET und Spannungsgegenkopplung

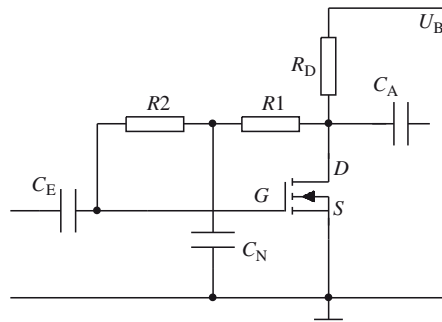


**Bild VI-39** Spannungsgegenkopplung ohne Signalgegenkopplung

Die Spannungs-Gegenkopplung kann für Signalspannungen mit höherer Frequenz aufgehoben werden. Hierzu wird der Gegenkopplungswiderstand in der Schaltung nach Bild VI-38 in zwei Widerstände mit gleichem Widerstandswert aufgeteilt und ein Kondensator vom Mittelpunkt des Teilers gegen Masse geschaltet, wie in Bild VI-39 zu sehen ist. Für die Signalspannung bestimmt der Widerstand  $R_2$  den Eingangswiderstand der Schaltung.

Der Arbeitspunkt bei Drainschaltungen, die den Kollektorschaltungen entsprechen, lässt sich auf die gleiche Weise wie zuvor beschrieben einstellen.

## 2.2 Grundsaltungen von FET

Das Betriebsverhalten von FET wird durch die vier typischen Eigenschaften dieser Transistoren bestimmt:

- hoher Eingangswiderstand im NF-Bereich
- verhältnismäßig geringe Vorwärts-Steilheit

- hoher Ausgangswiderstand (da spannungsgesteuerte Stromquelle)
- vernachlässigbar kleine Spannungsrückwirkung im NF-Bereich.

Entsprechend der Emitter-, Kollektor- und Baisschaltung des bipolaren Transistors lässt sich der FET als Verstärker in der Source-, Drain- und Gateschaltung betreiben. Jede dieser Grundsaltungen weist hinsichtlich der Betriebsgrößen typische Eigenschaften auf.

Die wichtigsten Kenngrößen dieser Grundsaltungen sind: Wechselstrom-Eingangswiderstand  $R_{\text{ein}}$ , Wechselstrom-Ausgangswiderstand  $R_{\text{aus}}$ , Spannungsverstärkung  $V_u$ , Stromverstärkung  $V_i$ , Phasenverschiebung  $\varphi$ . In den folgenden Abschnitten werden die Betriebsgrößen (Kenngrößen) der drei Grundsaltungen mit N-Kanal-J-FET beschrieben beziehungsweise berechnet.

### 2.2.1 Sourceschaltung

Die Source-Schaltungen nach Bild VI-35 und Bild VI-41 sind die am meisten verwendeten Verstärkerschaltungen des FET.

Mit Hilfe der Widerstände  $R_V$ ,  $R_S$  und  $R_D$  oder  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_S$  und  $R_D$  wird der Arbeitspunkt des FET eingestellt und stabilisiert. Um eine AC-Gegenkopplung zu verhindern, ist der Sourcewiderstand in beiden Schaltungen durch einen genügend großen Kondensator  $C_S$  kurzgeschlossen. Die Kondensatoren  $C_E$  und  $C_A$  dienen in beiden Schaltungen zur gleichstrommäßigen Entkopplung des FET-Verstärkers von der Signalquelle und vom Lastwiderstand.

Aufgrund der komplexen y-Parameter der Vierpol-Ersatzschaltung soll hier für die vorläufige Betrachtung ein komplexer Innenwiderstand  $Z_S$  der Signalquelle und ein komplexer Lastwiderstand  $Z_A$  als Abschlusswiderstand angenommen werden.

Zur Source-Schaltung nach Bild VI-35 gehört das AC-Ersatzschaltbild nach Bild VI-40. Der Widerstand  $Z_L$  steht hier als Ersatzwiderstand für die Parallelschaltung von  $Z_A$  und  $R_D$ .

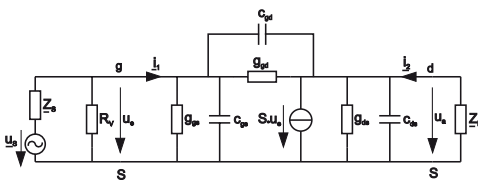


**Bild VI-40** AC-Ersatzschaltbild zur Source-Schaltung nach Bild VI-35

In der Schaltung nach Bild VI-41 wird der Arbeitspunkt durch den Gatespannungsteiler eingestellt.

Zur Source-Schaltung nach Bild VI-41 gehört das AC-Ersatzschaltbild nach Bild VI-42a. Am Eingang des J-FET liegt die Parallelschaltung von  $R_1$  und  $R_2$ , am Ausgang liegt wieder die Parallelschaltung von  $Z_A$  und  $R_D$ .

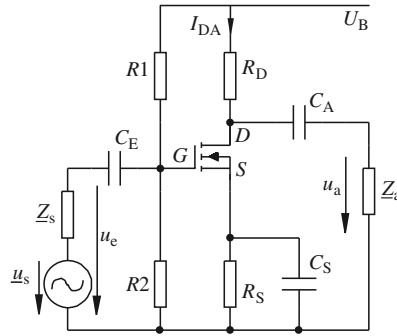


**Bild VI-41** Source-Schaltung mit Gatespannungsteiler

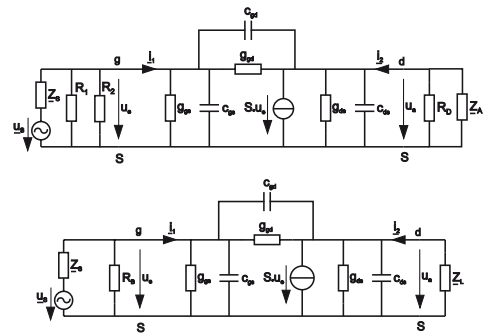


**Bild VI-42** AC-Ersatzschaltbilder zur Source-Schaltung nach Bild VI-41

Als Vereinfachung findet man  $R_B$  für  $R_1 \parallel R_2$  und  $Z_L$  als Ersatzwiderstand für  $Z_A \parallel R_D$  in Bild VI-42b.

Nimmt man Gleichung IV.28 in Verbindung mit dem Ersatzschaltbild, so erhält man die betriebliche Spannungsverstärkung der Source-Schaltung.

*Spannungsverstärkung*

$$V_u = \frac{S + g_{gs}}{S + g_{ds} + g_{gs} + G_L} \quad (\text{VI.66})$$

Bei niedrigen Frequenzen können die kapazitiven Elemente des Ersatzschaltbildes ebenso vernachlässigt werden wie der sehr geringe Rückwirkungsleitwert  $g_{gd}$ , so dass sich die Gleichung mit einer rein ohmschen Last  $R_L$  vereinfachen lässt.

*Spannungsverstärkung (NF)*

$$V_u = - \frac{S}{g_{ds} + G_L} \quad (\text{VI.67})$$

Das negative Vorzeichen in der Gleichung weist auf die Phasenverschiebung  $\varphi$  zwischen Ein- und Ausgangssignal hin.

Der Kanalwiderstand  $r_{ds} = 1/g_{ds}$  ist sehr hochohmig, so dass gilt:  $r_{ds} \gg R_L$

$$\text{Spannungsverstärkung (NF)} \quad V_u \approx -S \cdot R_L \quad (\text{VI.68})$$

Die betriebliche Stromverstärkung der Source-Schaltung lässt sich mit Gleichung IV.29 für niedrige Frequenzen bei rein ohmscher Last berechnen.

$$\text{Stromverstärkung (NF)} \quad V_i = \frac{S \cdot G_L}{g_{gs}(g_{ds} + G_L)} \quad (\text{VI.69})$$

Mit  $g_{ds} \ll G_L$  gilt dann:

$$\text{Stromverstärkung (NF)} \quad V_i \approx \frac{S}{g_{gs}} \quad (\text{VI.70})$$

Da der Leitwert  $g_{gs}$  sehr klein ist, ergibt sich rein rechnerisch eine große Stromverstärkung bei tiefen Frequenzen. Bei hohen Frequenzen bewirken die kapazitiven Elemente des Ersatzschaltbildes eine Reduzierung der Stromverstärkung.

Der AC-Eingangswiderstand  $R_{\text{cin}}$  ist derjenige Widerstand, mit dem die Verstärkerschaltung die Signalquelle belastet. Der komplexe Eingangsleitwert  $y_i$  der Source-Schaltung lässt sich nach Gleichung IV.30 berechnen. Es ergibt sich folgende Vereinfachung:

*Eingangsleitwert  $y_i$*

$$y_i = g_{gs} + g_{gd} + j\omega C_{\text{iss}} - (g_{gd} + j\omega C_{\text{rss}}) \cdot V_u \quad (\text{VI.71})$$

Es ist erkennbar, dass sich der kapazitive Anteil des Eingangsleitwertes bei größeren Werten für die Spannungsverstärkung beträchtlich erhöht, wodurch die obere Grenzfrequenz erheblich reduziert wird. Bei Annahme eines rein ohmschen Generatorleitwertes  $G_g$  ergibt sich folgender Zusammenhang:

*obere Grenzfrequenz*

$$f_o = \frac{g_{gs} + G_g + g_{gd}(1 - V_u)}{2\pi[C_{gs} + C_{gd}(1 - V_u)]} \quad (\text{VI.72})$$

Die kapazitive Rückwirkung über den Kondensator  $C_{gd}$  bewirkt also die niedrige Grenzfrequenz der Source-Schaltung. Der komplexe Generatorleitwert  $Y_g$  lässt sich als Parallelschaltung  $Z_g \parallel R_B$  berechnen. Bei niedrigen Frequenzen ist der Eingangsleitwert rein reell und sehr klein

*Eingangsleitwert*

$$y_i = g_{gs} + g_{gd} \left( 1 + \frac{S - g_{gd}}{g_{ds} + g_{gd} + G_L} \right) \quad (\text{VI.73})$$

und kann in vielen Fällen näherungsweise gelten als

$$\text{Eingangsleitwert} \quad y_i \approx g_{gs} \quad (\text{VI.74})$$

Der AC-Ausgangswiderstand  $R_{\text{aus}}$  ist derjenige Widerstand, der als Innenwiderstand der Verstärkerstufe für einen Lastwiderstand wirksam ist. Der komplexe Ausgangsleitwert  $y_a$  der Source-Schaltung lässt sich nach Gleichung IV.31 berechnen.

*Ausgangsleitwert*

$$y_a = g_{ds} + j\omega C_{\text{oss}} + \frac{j\omega C_{\text{rss}}(S - j\omega C_{\text{rss}})}{g_{gs} + j\omega C_{\text{iss}} + Y_g} \quad (\text{VI.75})$$

Bei niedrigen Frequenzen ergibt sich näherungsweise:

$$\text{Ausgangsleitwert} \quad y_a \approx g_{ds} \quad (\text{VI.76})$$

Der Ausgangsleitwert lässt sich aus den Kennlinien zum Beispiel nach Bild VI-33 ermitteln.

Die wesentlichen Merkmale der Source-Schaltung im NF-Betrieb sind der geringe Eingangsleitwert, die große Spannungsverstärkung bei hochohmigem Lastwiderstand, die große Stromverstärkung und mittlere Werte für den Ausgangsleitwert.

*AC-Eingangswiderstand*

$$R_{\text{cin}} \approx R_V \parallel r_{gs} \quad \text{oder} \quad R_{\text{cin}} \approx R_B \parallel r_{gs}$$

da

$$r_{gs} \gg R_V \quad \text{oder} \quad r_{gs} \gg R_B$$

gilt folgende Näherung:

$$R_{\text{cin}} \approx R_V \quad \text{oder} \quad R_{\text{cin}} \approx R_B$$

*AC-Ausgangswiderstand*

$$R_{\text{aus}} \approx R_D \parallel r_{ds}$$

da

$$r_{ds} \gg R_D$$

gilt folgende Näherung:

$$R_{\text{aus}} \approx R_D$$

Obwohl eine AC-Gegenkopplung die Spannungsverstärkung mindert, wird sie häufig angewendet, da sie die Source-Schaltung positiv beeinflusst. Die AC-Gegenkopplung bewirkt eine Verbesserung des Frequenzganges und der Stabilität. Außerdem ergeben sich geringere nichtlineare Verzerrungen des Signals.

Um nicht die volle Gleichstrom-Gegenkopplung für Wechsignale wirksam werden zu lassen, benutzt man häufig eine Schaltung nach Bild VI-43. Hier wird eine Strom-Spannungs-Gegenkopplung durch

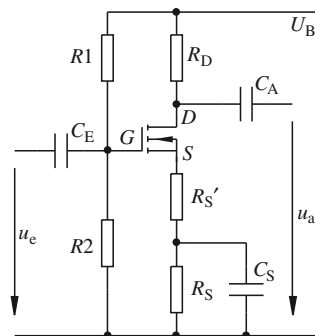


**Bild VI-43**  
Verstärkerschaltung mit einstellbarer Wechselstrom-Gegenkopplung

einen Sourcewiderstand  $R_S'$  bewirkt. Die kapazitiven Elemente des Ersatzschaltbildes können bei niedrigen Frequenzen vernachlässigt werden. Bei ohmscher Last ergibt sich dann folgende Gleichung:

### Spannungsverstärkung (NF)

$$V'_u \approx \frac{-S}{G_L + g_{ds} + R'_S G_L (S + g_{ds})} \quad (\text{VI.77})$$

Bei großer Steilheit  $S$  und einem großen Sourcewiderstand  $R'_S$  wird die Verstärkung nur durch das Verhältnis der Widerstände  $R_L$  und  $R'_S$  bestimmt.

### Spannungsverstärkung (NF)

$$V'_u \approx -\frac{R_L}{R'_S} \quad (\text{VI.78})$$

Der Ausgangswiderstand des Transistors wird durch die „stabilisierende Wirkung“ des Gegenkopplungswiderstandes erhöht. Angenähert ergibt sich für den Ausgangswiderstand des Transistors folgender Wert:

### Ausgangswiderstand

$$\frac{1}{y'_a} = r'_a \approx r_{ds} (1 + S \cdot R'_S)$$

Der Wert in der Klammer ist die Kreisverstärkung in der Gegenkopplungsschleife.

Wie in Verstärkerschaltungen mit bipolaren Transistoren wird die untere Grenzfrequenz durch die Widerstände und Kapazitäten (Hochpässe) in den Ein- und Ausgangskreisen bestimmt. FETs sind gleichstromsteuernde Bauelemente und haben keinen Einfluss auf die untere Grenzfrequenz  $f_u$ .

Die Kapazitätswerte für  $C_E$  und  $C_A$  lassen sich berechnen nach folgenden Gleichungen.

### Koppelkondensatoren

$$C_E = \frac{1}{2\pi \cdot f_u (R_B + Z_S)}$$

$$C_A = \frac{1}{2\pi \cdot f_u (R_D + Z_A)}$$

Jeder Hochpass in der Verstärkerschaltung bewirkt bei der unteren Grenzfrequenz eine Absenkung der Verstärkung um 3 dB. Soll in jeder Verstärkerstufe insgesamt nur eine Absenkung von 3 dB zugelassen sein, müssen die Kondensatoren 1,7mal so groß wie berechnet gewählt werden.

Der Sourcekondensator, der die Gegenkopplung für die Signale aufheben soll, kann nach folgender Gleichung berechnet werden:

$$C_S = \frac{S}{2\pi \cdot f_u}$$

## 2.2.2 Drainschaltung

Die Schaltung nach Bild VI-44 zeigt einen J-FET als Verstärker in einer Drain-Schaltung. Hier darf der Sourcewiderstand nicht durch einen Kondensator gebrückt werden, weil in dieser Schaltung das Ausgangssignal am Sourcewiderstand abgegriffen wird. Der Koppelkondensator  $C_E$  verhindert eine Gleichstromkopplung mit dem Generator.

Da das Sourcepotential dem Gatepotential folgt ( $u_a = u_e - u_{gs}$ ), wird die Drainschaltung auch Sourcefolger genannt.

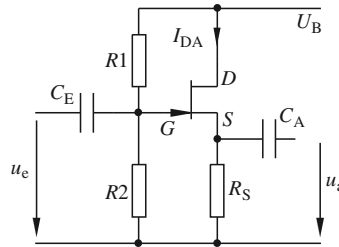


**Bild VI-44**

J-FET als Verstärkerbauelement in Drain-Schaltung

Nimmt man nun Gleichung IV.28 in Verbindung mit dem Grundersatzschaltbild, so ergibt sich die betriebliche Spannungsverstärkung der Drain-Schaltung.

### Spannungsverstärkung

$$V_u = \frac{S + g_{gs} + j\omega (C_{iss} - C_{rss})}{S + g_{gs} + g_{ds} + j\omega (C_{iss} + C_{oss} - 2C_{rss}) + Y_L} \quad (\text{VI.79})$$

Die Spannungsverstärkung der Drain-Schaltung ist immer kleiner als Eins. Da die Kapazitäten im NF-Bereich vernachlässigt werden können, vereinfacht sich die Gleichung VI.79 bei rein ohmscher Last erheblich.

### Spannungsverstärkung (NF)

$$V_u = \frac{S + g_{gs}}{S + g_{ds} + g_{gs} + G_L} \quad (\text{VI.80})$$

Das AC-Ersatzschaltbild zur Drain-Schaltung nach Bild VI-44 zeigt Bild VI-45. Der Leitwert  $G_L$  ist hier der Ersatzleitwert für  $R_A \parallel R_S$ . Sind  $S$  und  $G_L$  sehr viel größer als  $g_{gs}$  und  $g_{ds}$ , kann die Gleichung VI.93 weiter vereinfacht werden. Analog zur Source-Schaltung lässt sich auch die Stromverstärkung der Drain-Schaltung ermitteln.

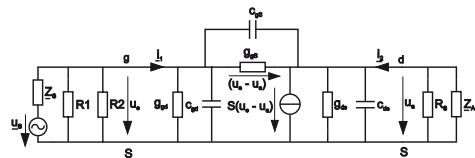


**Bild VI-45** AC-Ersatzschaltbild zur Drain-Schaltung

Wie bei der Source-Schaltung lässt sich auch der komplexe Eingangsleitwert der Drain-Schaltung ermitteln. Für den NF-Bereich und bei rein ohmscher Last vereinfacht sich die Gleichung.

### Eingangsleitwert (NF)

$$y_i = g_i = g_{gs} + g_{gd} - \frac{g_{gs} (S + g_{gs})}{S + g_{gs} + g_{ds} + G_L} \quad (\text{VI.81})$$



Sind  $S$  und  $G_L$  sehr viel größer als  $g_{gs}$  und  $g_{ds}$ , ergibt sich mit  $g_{gd} \approx 0$  eine weitere zulässige Vereinfachung.

*Eingangsleitwert (NF)*

$$y_i = g_i = \frac{g_{\text{gs}} \cdot G_L}{S + G_L} \quad (\text{VI.82})$$

Wiederum analog zur Source-Schaltung lässt sich auch der komplexe Ausgangsleitwert der Drain-Schaltung ermitteln. Für den NF-Bereich ergibt sich mit  $g_{\text{gd}} \approx 0$  und bei rein ohmschem Generatorleitwert  $G_g$  diese Gleichung.

*Ausgangsleitwert (NF)*

$$y_a = g_a = S + g_{\text{ds}} + \frac{g_{\text{gs}}(G_g - S)}{g_{\text{gs}} + G_g} \quad (\text{VI.83})$$

Der AC-Eingangswiderstand  $R_{\text{ein}}$  ist derjenige Widerstand, mit dem die Verstärkerschaltung die Signalquelle belastet.

### AC-Eingangswiderstand

$$R_{\text{ein}} \approx R_V \parallel (1 + S \cdot R_S) r_{\text{gs}}$$

oder

$$R_{\text{ein}} \approx R_B \parallel (1 + S \cdot R_S) r_{\text{gs}}$$

also:  $R_{\text{ein}} \approx R_V$  oder  $R_{\text{ein}} \approx R_B$

Der AC-Ausgangswiderstand  $R_{\text{aus}}$  ist derjenige Widerstand, der als Innenwiderstand der Verstärkerstufe für einen Lastwiderstand wirksam ist.

### AC-Ausgangswiderstand

$$R_{\text{aus}} \approx R_S \parallel 1/S \quad \text{also:} \quad R_{\text{aus}} \approx 1/S$$

Die Drain-Schaltung ist vergleichbar mit der Kollektorschaltung von bipolaren Transistoren. Während der Eingangswiderstand sehr groß ist, wird der Ausgangswiderstand klein. Im Gegensatz zur Kollektorschaltung ist der Ausgangswiderstand unabhängig von Widerständen im Eingang.

Der Vorteil der Drain-Schaltung gegenüber der Source-Schaltung ist der geringere Ausgangswiderstand. Deshalb wird die Drain-Schaltung als Impedanzwandler und bei Verwendung eines Leistungs-FET auch als Leistungsverstärker benutzt.

### 2.2.3 Gateschaltung

Bei der Gate-Schaltung nach Bild VI-46 liegt das Eingangssignal zwischen Source und Gate, während das Ausgangssignal zwischen Drain und Gate abgegriffen wird.

Das Eingangssignal soll wieder von einer Signalquelle  $U_S$  mit dem komplexen Innenwiderstand  $Z_S$  geliefert werden. Belastet wird die Verstärkerstufe mit dem komplexen Abschlusswiderstand  $Z_L$ .

Das AC-Ersatzschaltbild nach Bild VI-47 zeigt die Besonderheiten dieser Schaltung und macht die

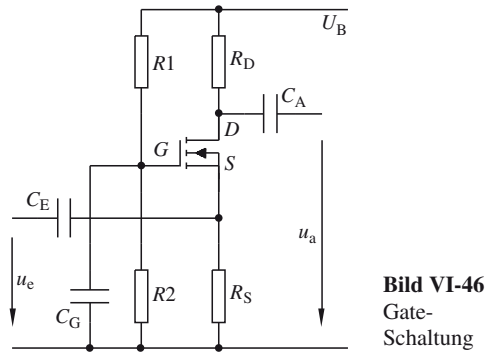


**Bild VI-46**  
Gate-  
Schaltung

Berechnung der Betriebsgrößen im Vergleich mit der Vierpol-Ersatzschaltung möglich.

Nimmt man nun Gleichung IV.28 in Verbindung mit dem Ersatzschaltbild, so ergibt sich die betriebliche Spannungsverstärkung der Gate-Schaltung.

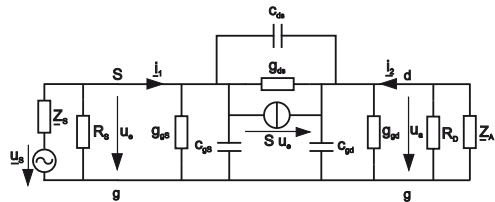


**Bild VI-47** AC-Ersatzschaltbild zur Gate-Schaltung nach Bild VI-46

## Spannungsverstärkung

$$V_u = \frac{S + g_{ds} + j\omega C_{ds}}{g_{gd} + g_{ds} + j\omega(C_{gd} + C_{ds}) + Y_L} \quad (\text{VI.84})$$

Im NF-Bereich können wiederum die kapazitiven Leitwerte vernachlässigt werden, so dass sich bei rein ohmscher Last und  $R_L = R_D \parallel R_A$  folgende Gleichung ergibt.

*Spannungsverstärkung (NF)*

$$V_u = \frac{S + g_{ds}}{g_{gd} + g_{ds} + G_L} \quad (\text{VI.85})$$

Sehr stark vereinfacht ergibt sich dann:

$$V_{\mu}(\text{NF}) \approx S \cdot R_I$$

Bei niedrigen Frequenzen liegt die Stromverstärkung bei ungefähr  $V_i \approx -1$ .

Der AC-Eingangswiderstand  $R_{\text{ein}}$  ist derjenige Widerstand, mit dem die Verstärkerschaltung die Signalquelle belastet. In der Schaltung nach Bild VI-46 ist erkennbar, dass der Kondensator  $C_G$  die Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  des Gatespannungsteilers für Signale kurzschließt, so dass diese Widerstände im AC-Ersatzschaltbild nach Bild VI-47 nicht mehr erscheinen.



**Eingangsleitwert**

$$y_i = S + g_{gs} + g_{ds} + j\omega(C_{gs} + C_{ds}) - \frac{(g_{ds} + j\omega C_{ds})(S + g_{ds} + j\omega C_{ds})}{g_{gd} + g_{ds} + j\omega(C_{gd} + C_{ds}) + Y_L} \quad (VI.86)$$

Für den NF-Bereich sind die Kapazitäten wieder vernachlässigbar.

**Eingangsleitwert (NF)**

$$y_i = g_i = S + g_{gs} + \frac{g_{ds}(G_L - S + g_{gd})}{g_{gd} + g_{ds} + G_L} \quad (VI.87)$$

Analog dazu erhalten wir nun nach Gleichung IV.31 den Ausgangsleitwert des FET.

**Ausgangsleitwert**

$$y_a = g_{gd} + g_{ds} + j\omega(C_{gd} + C_{ds}) - \frac{(g_{ds} + j\omega C_{ds})(S + g_{ds} + j\omega C_{ds})}{S + g_{gs} + g_{ds} + j\omega(C_{gs} + C_{ds}) + Y_g} \quad (VI.88)$$

Für den NF-Bereich sind die Kapazitäten wieder vernachlässigbar.

**Ausgangsleitwert (NF)**

$$y_a = g_a = g_{gd} + \frac{g_{ds}(g_{ds} + G_g)}{S + g_{gs} + g_{ds} + G_g} \quad (VI.89)$$

Die wesentlichen Merkmale der Gate-Schaltung sind ein großer Eingangs- und ein kleiner Ausgangsleitwert. Mit der Gate-Schaltung ist die höchste Grenzfrequenz aller Grundschaltungen zu erreichen. Sie wird darum fast ausschließlich bei hohen Frequenzen verwendet.

**2.3 Weitere Anwendungen**

**Konstantstromquellen** sind Schaltungen mit einem sehr hochohmigen Innenwiderstand, die in einem größeren Spannungsbereich nahezu gleichbleibende Ströme zur Verfügung stellen. Mit selbstleitenden Feldeffekt-Transistoren lassen sich solche Konstantstromquellen besonders einfach realisieren.

Bei der Spannung  $U_{GS} = 0$  V fließt durch einen J-FET der maximale Drainstrom. In der Schaltung nach Bild VI-48 lässt sich die Gate-Source-Spannung mit Hilfe des Sourcewiderstandes  $R_S$  variieren und damit wiederum der Ausgangsstrom  $I_L$  veränderbar gestalten. Der Arbeitspunkt des FET muss im Abschnürbe-

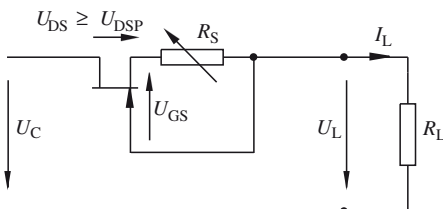


**Bild VI-48** Konstantstromquelle mit J-FET

reich des Ausgangskennlinienfeldes liegen, dass heißt, die Drain-Source-Spannung  $U_{DS}$  darf nicht kleiner sein als  $U_{DSP}$ .

Unter Vernachlässigung des Gatestroms ergibt sich eine einfache Gleichung.

$$U_B = U_{DS} - U_{GS} + R_L \cdot I_L$$

Die Gatespannung wird meistens in der Weise gewählt, dass der Arbeitspunkt in der Mitte der Steuerkennlinie liegt. Hier lässt sich auch ermitteln, welche Gate-Source-Spannung für einen bestimmten Laststrom  $I_L$  bei vorgegebenem Sourcewiderstand erforderlich ist.

$$\text{Laststrom } I_L = I_D = \frac{-U_{GS}}{R_S} \quad (VI.90)$$

Bei vorgegebenem Ausgangsstrom darf der Lastwiderstand einen bestimmten maximalen Wert nicht übersteigen.

**maximaler Lastwiderstand**

$$R_{L\max} = \frac{U_B + U_P}{I_L} \quad (VI.91)$$

Bei konstanter Betriebsspannung der Schaltung lässt sich der Innenwiderstand dieser Konstantstromquelle berechnen.

$$\text{Innenwiderstand } r_i = R_S + r_{DS}(S \cdot R_S + 1) \quad (VI.92)$$

Der Arbeitspunkt eines *IG-FET* wird nun in den ohmschen Bereich der Ausgangskennlinie gelegt und so die Drain-Source-Strecke *als spannungsgesteuerter Widerstand* betrieben. Mit Hilfe der Gate-Source-Spannung lässt sich dieser Widerstand zwischen Werten von einigen Ohm bis in den Megaohm-Bereich hinein nahezu leistungslos variieren. Da die  $I_D$ - $U_{DS}$ -Kennlinien des FET aber nur für kleine Werte von  $U_{DS}$  annähernd linear verlaufen, sind die Anwendungsmöglichkeiten sehr eingeschränkt.

Wird ein Festwiderstand  $R_V$  nach Bild VI-49 in Reihe zum Drain-Source-Widerstand eines J-FET geschaltet, entsteht ein Spannungsteiler, der sich leicht berechnen lässt.

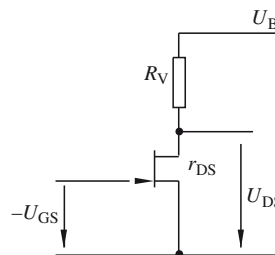


**Bild VI-49**  
J-FET als spannungsgesteuerter Widerstand

$$\text{Spannungsteiler } U_{DS} = |U_{GS}| \cdot \frac{r_{DS}}{R_V + r_{DS}} \quad (VI.93)$$

Der geringste Widerstand der Drain-Source-Strecke ergibt sich, wenn die Steuerspannung  $U_{GS} = 0$  V ist. Damit ergibt sich eine interessante Kenngröße (mit  $\beta$

als Materialkonstante), der minimale Drain-Source-Widerstand.

*minimaler Drain-Source-Widerstand*

$$r_{DS(on)} = -\frac{1}{\beta \cdot U_P} \quad (VI.94)$$

Der Widerstand der Drain-Source-Strecke lässt sich auch in der folgenden Form angeben:

*Drain-Source-Widerstand*

$$r_{DS} = \frac{r_{DS(on)}}{1 - \frac{U_{GS}}{U_P}} \quad (VI.95)$$

Durch eine Rückkopplung zwischen Drain und Source wird die vorhandene Nichtlinearität weitgehend aufgehoben, wenn eine Spannung  $U_{GS}$  gewählt wird, die sich zur Hälfte aus der Steuerspannung  $U_{St}$  am Eingang und der Spannung  $U_{DS}$  zusammensetzt.

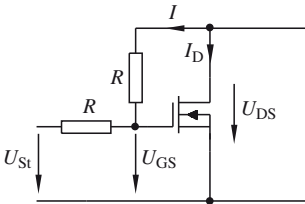


**Bild VI-50**  
Selbstleitender IG-FET als spannungsgesteuerter Widerstand

Eine entsprechende Schaltung mit einem selbstleitenden IG-FET zeigt Bild VI-50.

Für die Drain-Source-Strecke ergibt sich  $R_{DS}$  als

$$R_{DS} = r_{DS} = \frac{r_{DS(on)}}{1 - \frac{U_{St}}{2 \cdot U_P}}$$

Damit errechnet sich der gesteuerte Widerstand  $R_{St}$ .  
*gesteuerter Widerstand*

$$R_{St} = \frac{1}{\beta \left( \frac{U_{St}}{2} - U_P \right) + \frac{1 - \frac{U_{St}}{2}}{2R}} \approx r_{DS} \quad (VI.96)$$

Wählt man die Widerstände  $R$  sehr hochohmig, kann der Strom  $I$  vernachlässigt werden und der Näherungswert aus Gleichung VI.96 wird gültig.

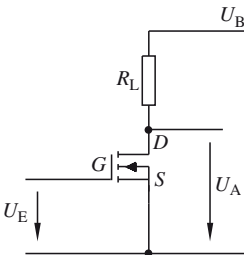


**Bild VI-51**  
Selbstsperrende N-Kanal-IG-FET als Schalter im Serienbetrieb

Im Vergleich zum bipolaren Transistor weist der FET beim Einsatz als Schalter einige Vorteile auf:

- nahezu leistungslose Steuerung aufgrund des hohen Eingangswiderstandes
- Drainstrom sehr gering im gesperrten Zustand
- für integrierte Schaltungstechnik aufgrund der einfachen Herstellung und geringen Abmessungen gut geeignet
- selbstsperrende IG-FET für digitale Logikschaltungen besonders geeignet, da die einzelnen Schalterstufen direkt gleichstrommäßig gekoppelt werden können
- gutes dynamisches Schaltverhalten, da nur Majoritätsträger am Strom beteiligt sind.

Die Schaltung nach Bild VI-51 zeigt einen selbstsperrenden N-Kanal-IG-FET als Schalter im Serienbetrieb. Solange die Eingangs- oder Steuerspannung  $U_E$  kleiner ist als die Schwellenspannung  $U_{GS(To)}$ , befindet sich der FET im gesperrten Zustand und auf der Arbeitsgeraden im Arbeitspunkt AP1. In diesem Zustand fließt nur der sehr geringe Drainstrom  $I_{D(Off)}$ , wobei der Gleichstromwiderstand  $R_{DS(Off)}$  und der differentielle Widerstand  $r_{DS(Off)}$  etwa den gleichen Wert ( $10^9 - 10^{11} \Omega$ ) haben.

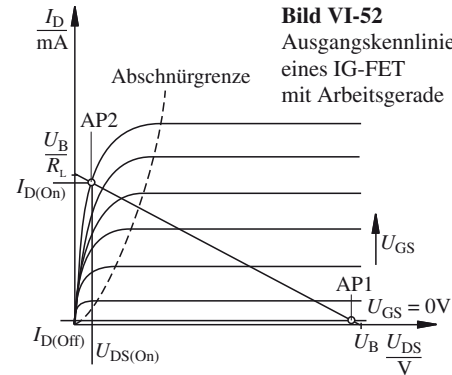


**Bild VI-52**  
Ausgangskennlinienfeld eines IG-FET mit Arbeitsgerade

Überschreitet die Eingangsspannung die Schwellenspannung, so verschiebt sich der Arbeitspunkt an der Arbeitsgeraden entlang zu größeren Drainstromwerten. Bei einer ausreichenden Eingangsspannung stellt sich der Arbeitspunkt AP2 im ohmschen Bereich des Kennlinienfeldes nach Bild VI-52 ein. Es fließt nun ein Drainstrom  $I_{D(on)}$ , da die Drain-Source-Strecke relativ niederohmig ist, wobei auch hier der Gleichstromwiderstand  $R_{DS(Off)}$  und der differentielle Widerstand  $r_{DS(Off)}$  etwa den gleichen Wert (10 bis einige  $100 \Omega$ ) haben.

Schalterstufen erhalten für die Integration besonders günstige Eigenschaften, wenn man als Lastwiderstand ebenfalls einen IG-FET verwendet, der gegenseitig zum eigentlichen Schalttransistor besteuert wird. Das wird sehr einfach, wenn man für Steuer- und Last-FET komplementäre Systeme verwendet (C-MOS-Technik). Wird der eigentliche Schalttran-

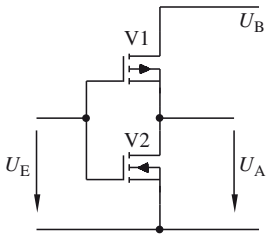


**Bild VI-53**  
Schalttransistor in  
C-MOS-Technik

sistor V2 nach Bild VI-53 leitend, so wird der Lasttransistor V1 gesperrt. Der Lasttransistor V1 ist also bei Einschaltung sehr hochohmig, was im Hinblick auf einen geringen Leistungsverbrauch in integrierten Schaltkreisen vorteilhaft ist. Die Schaltung nach Bild VI-53 stellt einen Inverter mit komplementären IG-FET dar.

### 3 Mehrstufige Verstärker

Obwohl integrierte Schaltkreise (IC = integrated circuits) die bisherigen diskreten Schaltungen und Transistoren immer mehr verdrängen, werden die Transistoren auch in Zukunft noch in vielen elektronischen Schaltungen eine erhebliche Bedeutung behalten.

Dieses gilt insbesondere auch für die Lösung von Anpassungsproblemen an Ein- und Ausgängen von integrierten Schaltkreisen sowie für die Leistungsverstärker.

Ein Verstärker besteht einerseits aus einer oder mehreren Vorstufen, die hauptsächlich zur Spannungsverstärkung und eventuell zur Signalbeeinflussung (zum Beispiel Klangregelung) dienen. Andererseits besteht er aus einem Leistungsverstärker, der mit einem Eingangssignal hoher Spannungsamplitude angesteuert wird und dessen Aufgabe es ist, vor allem eine Leistungs- oder Stromverstärkung vorzunehmen.

Der Leistungsverstärker selbst kann aus einer oder mehreren Treiberstufen und einer Endstufe bestehen.

Treiberstufen haben die Aufgabe, die zum Ansteuern der Endstufe notwendige Steuerleistung zur Verfügung zu stellen. Um eine optimale Leistungsübertragung zu gewährleisten, sollte zwischen Treiber- und Endstufe eine Leistungsanpassung vorliegen. Das bedeutet, dass der Eingangswiderstand der Endstufe gleich dem Ausgangswiderstand der Treiberstufe sein sollte.

Es nicht ohne weiteres möglich, zwei Verstärkerstufen miteinander zu koppeln, da die Gleichspannungspotentiale der miteinander zu koppelnden Schaltungspunkte nicht übereinstimmen.

Die Kopplung hat die Aufgabe, Signalspannungen vom Ausgang der einen Stufe möglichst unverfälscht auf den Eingang der nachfolgenden Stufe zu übertragen.

Dabei ist grundsätzlich zwischen **drei Kopplungsarten** zu unterscheiden: Übertragerkopplung, kapazitive Kopplung (RC-Kopplung) und galvanische Kopplung (Gleichstromkopplung).

Die *Übertragerkopplung*, also die Signalübertragung von einer Stufe zur nächsten mit Hilfe eines „Transformators“, hat in der modernen Elektronik kaum noch eine Bedeutung. Das gilt auch für die Gleichstromkopplung in der diskreten Schaltungstechnik. Eine *Gegenkopplung* über zwei Stufen hinweg lässt sich jedoch nur bei der galvanischen Kopplung realisieren.

In Operationsverstärkern (OpAmp) ist die *galvanische* Kopplung wichtigstes Prinzip.

Die *kapazitive Kopplung* nach Bild VI-54 ist wohl die problemloseste Kopplungsart. Aber während bei einer galvanischen Kopplung zwischen zwei Verstärkerstufen sowohl Gleichspannungs- als auch Wechselspannungssignale übertragen werden, können hier nur Wechselspannungen übertragen werden.

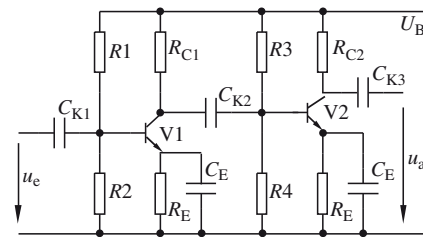


**Bild VI-54** Kapazitive Kopplung zweier  
Transistorstufen

Die Kopplung der einzelnen Stufen erfolgt mit Hilfe eines Koppelkondensators  $C_{K2}$ , während die Stufen des Verstärkers gleichstrommäßig voneinander unabhängig sind. Daher können die *Arbeitspunkte* jeder Stufe getrennt voneinander eingestellt werden.

Die untere Grenzfrequenz des Verstärkers hängt wesentlich von dem RC-Glied (Hochpass) ab, das durch den Koppelkondensator und den Eingangswiderstand  $R_{\text{ein}}$  der nachfolgenden Stufe sowie den Ausgangswiderstand  $R_{\text{aus}}$  der vorausgehenden Stufe nach Bild VI-55 gebildet wird.

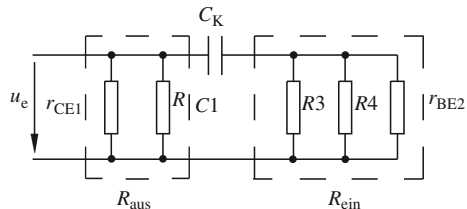


**Bild VI-55** Koppelkondensator in Wechselwirkung  
zwischen Ein- und Ausgangswiderstand

Der Koppelkondensator  $C_K$  muss so bemessen sein, dass Wechselspannungen bei der unteren Grenzfrequenz noch ungehindert auf die nächste Stufe übertragen werden. Die Grenzfrequenz des Hochpasses ist gleich der unteren Grenzfrequenz  $f_{\text{gu}}$  des Verstärkers, wenn  $C_K$  die einzige beeinflussende Kapazität dar-

stellt. Damit lässt sich die Kapazität des Koppelkondensators berechnen.

*Koppelkondensator*

$$C_K = \frac{1}{2\pi f_{gu} (R_{aus} + R_{ein})} \quad (VI.97)$$

Die wirksamen Widerstände lassen sich nach Bild VI-63 als Parallschaltung berechnen. Die Nennspannung dieses Koppelkondensators ergibt sich aus der Differenz der Ruhepotentiale des Kollektors von V1 und der Basis von V2.

Je niedriger die untere Grenzfrequenz sein soll, um so größer muss die Kapazität des Koppelkondensators sein.

Die untere Grenzfrequenz  $f'_{gu}$  eines mehrstufigen Verstärkers ist nicht identisch mit der unteren Grenzfrequenz  $f_{gu}$  der gleichartigen Teilverstärkerstufe. Für einen vielstufigen Verstärker mit  $n$  identischen Stufen gilt dann:

$$\text{Grenzfrequenz } f'_{gu} = f_{gu} (\sqrt{2})^{(n-1)} \quad (VI.98)$$

Es findet auch eine Minderung der Verstärkung bei der oberen Grenzfrequenz  $f'_{go}$  statt, da sich die jeweiligen Querkapazitäten summieren. Das bedeutet, dass die Bandbreite  $B'$  des Gesamtverstärkers kleiner ist als die Bandbreite  $B$  der Teilverstärkerstufen.

Bei der RC-Kopplung mehrerer Stufen kann für bestimmte Frequenzen eine große Phasenverschiebung zwischen Ausgangs- und Eingangsspannung auftreten. Eine Gegenkopplung kann unter Umständen in eine Mitkopplung verkehrt werden. Wesentlich günstiger ist es, mehrere Transistoren galvanisch zu koppeln und alle Arbeitspunkte der Schaltung durch eine einzige Gleichspannungs-Gegenkopplung zu stabilisieren.

Diese direkte Kopplung nach Bild VI-56 ist jedoch nur möglich, wenn die Potentiale des Kollektors von V1 und der Basis von V2 gleich sind.

Der Nachteil mehrstufiger Verstärker mit direkter Kopplung liegt darin, dass sich geringe Arbeitspunktverschiebungen der ersten Stufe verstärkt auf die nachfolgende(n) Stufe(n) auswirken. Temperaturänderungen oder Bauteiltoleranzen bei Ersatzbestückung können dafür verantwortlich sein.

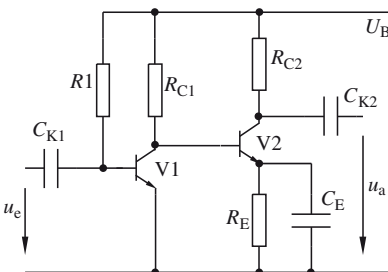


**Bild VI-56** Direkte Kopplung zweier Transistorstufen

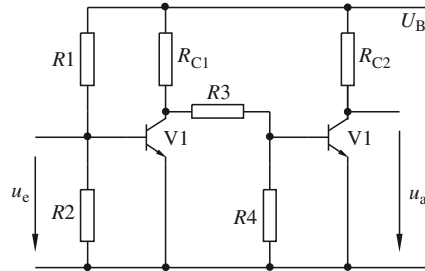


**Bild VI-57** Potentialanpassung durch Spannungsteiler

Wenn die Potentiale des Kollektors von V1 und der Basis von V2 jedoch nicht gleich sind, so kann man das Basisruhepotential von V2 über einen von der Kollektor-Emitter-Spannung von V1 versorgten Spannungsteiler gewinnen.

$$\frac{U_{BE2}}{U_{CE1}} \approx \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

Nachteilig ist jedoch, dass auch die *Signalspannung* im Verhältnis der Spannungsteilerwiderstände  $R_3$  und  $R_4$  nach Bild VI-57 *herabgesetzt* wird.

Damit lässt sich die Gesamtverstärkung näherungsweise berechnen.

*Gesamtverstärkung*

$$V_{u \text{ ges}} \approx V_{u1} \cdot \frac{\Delta U_{BE2}}{\Delta U_{CE1}} = V_{u1} \cdot \frac{R_4 \parallel r_{BE2}}{R_3 + R_4 \parallel r_{BE2}} \quad (VI.99)$$

Der Arbeitspunkt der 1. Stufe nach Bild VI-58 wird mit Hilfe des Widerstandes  $R_2$  für den A-Betrieb eingestellt. Der Emittewiderstand  $R_4$  sorgt für die thermische Arbeitspunktstabilisierung infolge der Stromgegenkopplung. Da der  $R_4$  nicht durch einen Emittewiderstand gebrückt ist, wirkt sich die Stromgegenkopplung verstärkungsmindernd auf die Wechsellspannung aus. Arbeitspunktverschiebungen infolge Temperaturänderung werden an die 2. Stufe weitergegeben.

Zur Verbesserung der Aussteuerbarkeit der 2. Stufe wird deren Arbeitspunkt durch den Spannungsteiler aus  $R_3$  und  $R_5$  auf den gleichen Arbeitspunkt wie die 1. Stufe eingestellt. Der Verlust von Signalspannung

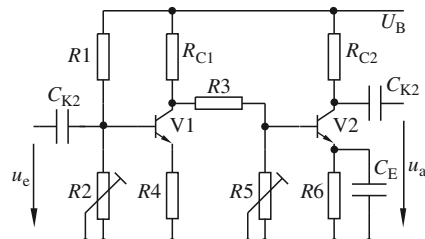


**Bild VI-58** Optimierung der Arbeitspunkte durch Potentiometer

am Widerstand  $R_5$  ist in dieser Variante nicht zu vermeiden.

Die Gesamtverstärkung ist relativ klein, weil die am Ausgang der 1. Stufe liegende Signalspannung u.a. durch den Spannungsteiler und den kleinen Eingangswiderstand der 2. Stufe stark herabgesetzt wird. Die Herabsetzung der Signalspannung durch das Koppelglied kann vermieden werden, wenn man einen der beiden Spannungsteilerwiderstände  $R_3$  und  $R_4$  durch ein Bauelement ersetzt, dessen Wechselstromwiderstand ( differentieller Widerstand) sich von seinem Gleichstromwiderstand wesentlich unterscheidet.

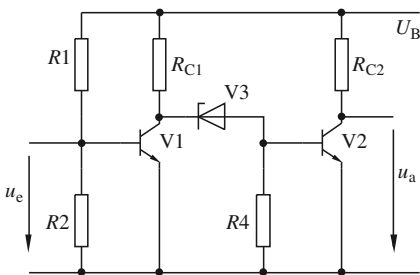


**Bild VI-59** Potentialanpassung durch Spannungsteiler mit Z-Diode

Es erfolgt wie gewünscht eine Herabsetzung des Gleichspannungspotentials, jedoch keine Herabsetzung der Signalspannung.

Nun bestehen zwei Möglichkeiten:

- man ersetzt  $R_3$  durch ein Bauelement mit niedrigem differentiellen Widerstand oder
- man ersetzt  $R_4$  durch ein Bauelement mit hohem differentiellen Widerstand.

In beiden Fällen ist das *Spannungsteilverhältnis* wechselstrommäßig wesentlich günstiger als bei einer Kopplung mit ohmschem Spannungsteiler. Für die erste Möglichkeit bieten sich Dioden und Z-Dioden an, die nach Bild VI-59 integriert werden.

Bei der zweiten Möglichkeit wird der Widerstand  $R_4$  durch eine Transistorkonstantstromquelle in Bild VI-60 ersetzt.

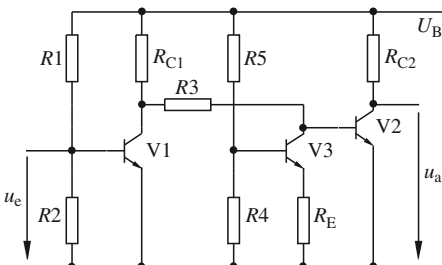


**Bild VI-60** Potentialanpassung durch Transistorkonstantstromquelle

Es gilt

$$\Delta U_{CE1} \approx \Delta U_{BE2}$$

In beiden Fällen wird also die Signalspannung durch das Koppelglied nur unwesentlich herabgesetzt. Allerdings sind diese Schaltungen aufwendiger. Sie sollten wegen des besonders hohen Aufwandes für das Koppelglied nur bei hohen Anforderungen an geringes Rauschen verwendet werden.

Die genannten Nachteile lassen sich weitgehend vermeiden, wenn man den zweistufigen Verstärker mit komplementären Transistoren aufbaut, wie die Schaltung nach Bild VI-61 zeigt.

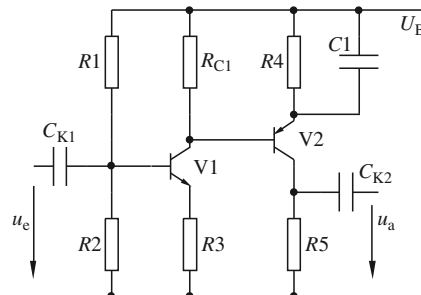


**Bild VI-61** Zweistufiger Verstärker mit komplementären Transistoren

Beide Transistoren arbeiten auch hier in Emitterschaltung. Mit den Widerständen  $R_2$  und  $R_4$  werden die Arbeitspunkte so eingestellt, dass beide Stufen im A-Betrieb arbeiten, so dass jeweils ein größtmöglicher Aussteuerbereich vorhanden ist. Mit dieser Schaltung lässt sich eine höhere Verstärkung erreichen.

Bei mehrstufigen Verstärkern wird neben der gleichstrommäßigen Gegenkopplung auch eine zusätzliche wechselstrommäßige Gegenkopplung über mehrere Stufen verwendet.

Eine Gegenkopplung liegt vor, wenn ein Teil der Signalspannung am Ausgang des Verstärkers gegenphasig, das heißt mit einer Phasenverschiebung von  $180^\circ$  auf den Eingang des Verstärkers zurückgeführt wird. Solange diese Phasenbedingung eingehalten wird, kann die Rückkopplung über eine Stufe oder auch über mehrere Stufen erfolgen. Die Verstärkerkennlinie wird linearisiert. Dadurch werden die sonst auftretenden Verzerrungen verringert.

Bei der Schaltung nach Bild VI-62 handelt es sich um einen zweistufigen NF-Verstärker mit galvanischer Kopplung beider Stufen. Für Wechselspannungen arbeiten die Transistoren  $V_1$  und  $V_2$  in Emitterschaltung ohne Gegenkopplung. Die Widerstände  $R_1$  und  $R_E$  dienen der Arbeitspunkteinstellung und -stabilisierung.  $R_E$  bewirkt eine Gleichstromgegenkopplung für den Transistor  $V_2$ . Für Gleichspannungen arbeitet  $V_2$  bezüglich seines Emittentialpotentials als Emittfolger. Bei Vernachlässigung von  $U_{BE2}$  ist damit sein Emittter-DC-Potential gleich dem Kollektor-DC-Potential von  $V_1$ .

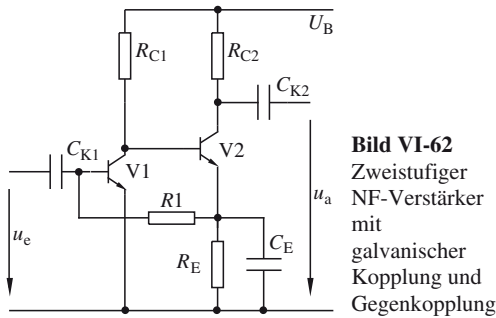


**Bild VI-62**  
Zweistufiger  
NF-Verstärker  
mit  
galvanischer  
Kopplung und  
Gegenkopplung

Über den Widerstand  $R_1$  ist der Transistor V1 für DC voll gegengekoppelt. Aufgrund des Kondensators  $C_E$  ist der Verstärker für Wechselgrößen nicht gekoppelt.

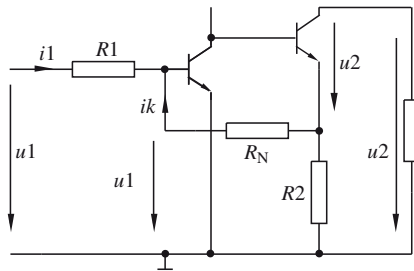


**Bild VI-63** Prinzip der Strom-Strom-Gegenkopplung

Das Prinzip der Strom-Strom-Gegenkopplung lässt sich anhand des in Bild VI-63 dargestellten Regelkreises unter Beachtung der Schaltung nach Bild VI-62 nachvollziehen. Eine Erhöhung des Emittersstroms von V2 bewirkt eine Erhöhung des Spannungsabfalles an  $R_E$ , wodurch das Basisruhepotential von V1 größer wird. Dadurch wird der Basisstrom von V1 erhöht, was zu einer Erhöhung des Kollektorstroms von V1 führt. Damit senkt sich das Basisruhepotential von V2; der Transistor V1 wird weniger leitend und der Emittersstrom von V2 verringert sich.

Bei galvanisch gekoppelten Verstärkerstufen sind die Transistoren direkt oder über ohmsche Widerstände miteinander verbunden. Alle Arbeitspunkte werden durch eine einzige Gleichspannungsgegenkopplung stabilisiert.

Durch eine wechselstrommäßige Gegenkopplung können die Eigenschaften des Verstärkers weiter verbessert werden. Bei geeigneter Dimensionierung kann zum Beispiel die Spannungsverstärkung weitgehend unabhängig von den Transistordaten und deren Streuung gemacht werden. Hierbei wird häufig eine Spannungs-Spannungs-Gegenkopplung verwendet. In Bild VI-64 wird das Grundprinzip der Spannungs-Spannungs-Gegenkopplung dargestellt.

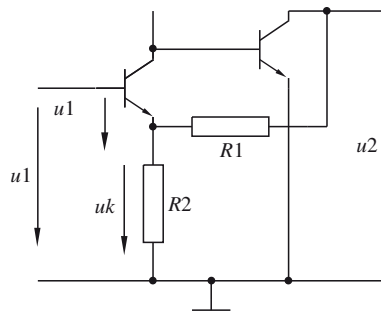


**Bild VI-64** Prinzip der Spannungs-Spannungs-Gegenkopplung

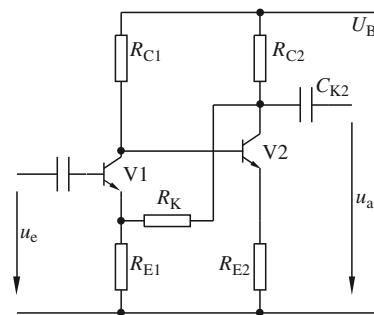


**Bild VI-65** Schaltung mit Anwendung der Spannungs-Spannungs-Gegenkopplung

Die Ausgangswechselspannung  $u_2$  wird über den Widerstand  $R_1$  auf den Emitter von V1 zurückgekopelt. Das zur Emitterwechselspannung  $u_k$  phasengleiche Signal  $u_2$  vergrößert  $u_k$ , so dass auch die Eingangsspannung  $u_1$  größer werden muss. Die Gesamtverstärkung wird allerdings kleiner. Die Schaltung nach Bild VI-65 gibt dieses Prinzip der Spannungs-Spannungs-Gegenkopplung wieder.

Kombiniert man beide Gegenkopplungsverfahren miteinander, ergibt sich die Schaltung nach Bild VI-66. Der Emitter von V1 liegt nun nicht mehr auf Nullpotential. Die Gleichspannung an  $R_{E1}$  ist jedoch vernachlässigbar klein, wenn man diesen Widerstand genügend klein und  $R_K$  genügend groß wählt.

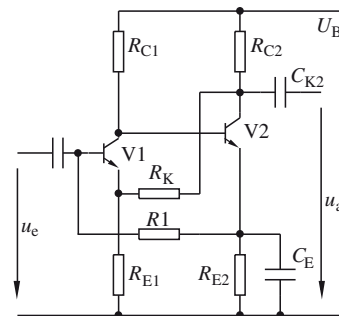


**Bild VI-66**  
Zweistufiger  
NF-Verstärker  
mit galvanischer  
Kopplung und  
doppelter  
Gegenkopplung

Diese beiden Widerstände sind für die AC-Gegenkopplung zuständig, während  $R_1$  und  $R_{E2}$  für die DC-Gegenkopplung über beide Stufen hinweg sorgen.

Die Gegenkopplung hat aber auch einen wesentlichen Einfluss auf die Bandbreite des Verstärkers. So wird die Bandbreite um so größer, je stärker die Verstärkung  $V_u$  durch die Gegenkopplung auf  $V'_u$  verkleinert wird. Dies ist besonders bei Breitbandverstärkern von Bedeutung.

Macht man nun die AC-Gegenkopplung sehr stark  $\beta_2 \cdot R_{C2}/R_K \gg 1$ , so vereinfacht sich die Gleichung weiter.

$$\text{Spannungsverstärkung } V'_u \approx \frac{R_K}{R_{E1}} \quad (\text{VI.100})$$

In Anlehnung an die Schaltung nach Bild VI-61 kann auch eine Schaltung nach Bild VI-67 verwendet werden, in der Komplementärtransistoren miteinander verschaltet sind. Der Spannungsabfall am Widerstand  $R_{C1}$  stellt die Basis-Emitter-Spannung  $U_{BE2}$  für V2. Der Widerstand  $R_3$  stellt die DC-Gegenkopplung dar. Die Reihenschaltung aus  $R_4$  und  $C_4$  verringert die Gegenkopplung für Wechselspannungen.

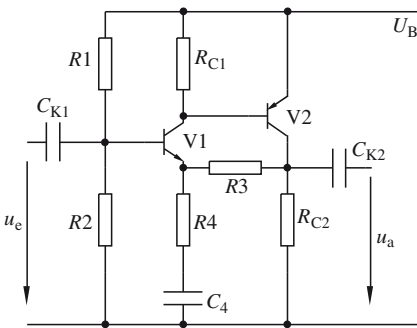


**Bild VI-67** Zweistufiger NF-Verstärker mit Komplementärtransistoren

Diese Schaltungskombination ermöglicht oft eine einfachere Potentialanpassung.

NF-Verstärker werden häufig in integrierter Schaltungstechnik (IC) hergestellt. Es handelt sich dabei um galvanisch gekoppelte Verstärkerstufen, wobei die Gesamtverstärkung und der Frequenzgang häufig nur durch eine äußere Beschaltung beeinflusst werden. Ein Beispiel für einen solchen NF-Verstärker ist der IC TAA 370 in Bild VI-68.

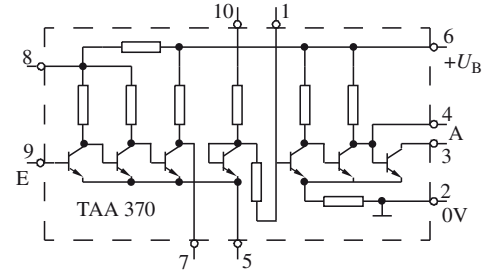


**Bild VI-68** Innenbeschaltung des IC TAA 370

Als Schaltungsbeispiel (application) ist in Bild VI-69 ein Hörgeräteverstärker dargestellt. Die Ausgangsleistung der Schaltung beträgt  $P = 1,5 \text{ mW}$ , wobei sich die Verstärkung und damit die Lautstärke mit dem Potentiometer  $R_1$  einstellen lässt.

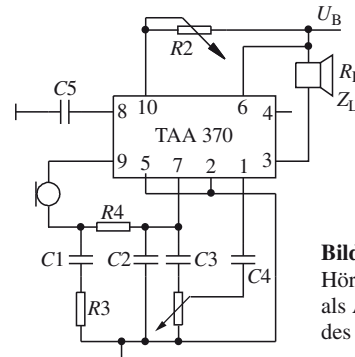


**Bild VI-69**  
Hörgeräteverstärker  
als Application  
des TAA 370

$U_B = +1,3 \text{ V}$ ,  $R_1 = 25 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 1,5 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 120 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = 0,47 \text{ }\mu\text{F}$ ,  $C_2 = 22 \text{ nF}$ ,  $C_3 = C_4 = 1 \text{ }\mu\text{F}$ ,  $C_5 = 2,2 \text{ }\mu\text{F}$ ,  $R_L = 100 \text{ }\Omega$ ,  $Z_L = 300 \text{ }\Omega$



## VII Endstufen

### 1 Betriebsarten

Um möglichst große Leistungen an einen Verbraucher, wie zum Beispiel einen Lautsprecher, abgeben zu können, braucht man Endstufen. Das sind Verstärkerschaltungen, bei denen eine *möglichst große Signalleistung* im Vordergrund steht, während die Spannungsverstärkung nur eine Nebenrolle spielt.

Da große Leistungen selbstverständlich auch große Spannungen und Ströme bedeuten, werden die Transistorkennlinien in den Endstufen voll durchgesteuert. Eine nicht völlig lineare Kennlinie führt dabei zu Verzerrungen des Ausgangssignales.

Bei Leistungsverstärkern können verschiedene Arbeitspunkte auf der Arbeitsgeraden gewählt werden. Man unterscheidet dann Verstärker im A-Betrieb, Verstärker im B-Betrieb und Verstärker im AB-Betrieb.

Bisher wurde der Arbeitspunkt immer in die Mitte des geradlinigen Kennlinienfeldes gelegt. Diese Betriebsart nennt man *A-Betrieb*. Für die Arbeitspunkteinstellung ist die Vorspannung  $U_{BEA}$  erforderlich, aus der ein Basis-Ruhestrom  $I_{BA}$  beziehungsweise ein Kollektor-Ruhestrom  $I_{CA}$  folgt. Der Transistor wird dabei durch beide Halbwellen des Steuersignals angesteuert. Die Ruhestrome fließen aber auch, wenn die Signalspannung Null ist.

Bei diesen im A-Betrieb arbeitenden Verstärkern werden beide Halbwellen einer sinusförmigen Signalspannung mit einem einzigen Transistor verstärkt. Man spricht deshalb auch von einem *Eintakt-Betrieb*. Beim *B-Betrieb* wird der Transistor ohne Vorspannung  $U_{BE}$  betrieben. Der Basisstrom und der Kollektorstrom sind Null, wenn die Signalspannung Null ist. Daraus folgt, dass der Transistor nur eine Halbwelle einer Wechselspannung verstärken kann. Hierbei liegt der Arbeitspunkt im unteren Kennlinienknick der Steuerkennlinie. Die andere Halbwelle muss von einem zweiten Transistor verstärkt werden. Man spricht dann von einem *Gegentakt-Betrieb*, weil die zwei Transistoren abwechselnd, nämlich im Takt der positiven und negativen Halbwellen, im aktiven Bereich arbeiten. Nach der Verstärkung werden die beiden Halbwellen wieder zusammengefügt.

Da im B-Betrieb keine Ruhestrome fließen, ist die Verlustleistung des Verstärkers wesentlich geringer als beim A-Betrieb, was kleinere Kühlkörper zur Folge hat und Energie sparen hilft.

Um nichtlineare Verzerrungen zu mildern, bildet man eine Synthese zwischen A- und B-Betrieb zum *AB-Betrieb*. Hierbei wird wie beim A-Betrieb durch eine Basis-Vorspannung  $U_{BE}$  ein Ruhestrom eingestellt, der aber wesentlich geringer ist als beim A-Betrieb.

Die Vorspannung  $U_{BEA}$  ist gerade so groß, dass sie die Schleusenspannung der Basis-Emitter-Diode kompensiert. Auch hier ist nur ein *Gegentakt-Betrieb* sinnvoll.

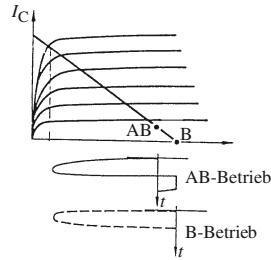


**Bild VII-1**

Lage der Arbeitspunkte bei B- beziehungsweise AB-Betrieb im Kennlinienfeld

Sowohl Vorverstärker als auch Treiberstufen werden hauptsächlich als A-Verstärker in Emitter- oder Kollektorschaltung betrieben.

Bei großen Leistungen spielt der Wirkungsgrad eine erhebliche Rolle. Gute Endstufen erreichen einen Wirkungsgrad von nahezu 70 %. Die Verlustleistung der Transistoren wird im Transistor in Wärme umgewandelt und muss an die Umgebungsluft abgegeben werden. Wegen der relativ hohen Verlustleistung sind die Endtransistoren meistens auf Kühlkörper montiert.

### 2 Schaltungen

Durch den ständig fließenden großen Ruhestrom tritt bei A-Betrieb eines Leistungsverstärkers die größte Verlustleistung auf, wenn der Verstärker nicht angesteuert wird. Der Wirkungsgrad einer solchen Schaltung kann nicht größer als 50 % werden.

Für Leistungsverstärker werden im allgemeinen Verstärkerstufen in Kollektorschaltung (Emitterfolger) verwendet, da sie einen hohen Eingangswiderstand bei niedrigem Ausgangswiderstand aufweist. Eine solche Kombination ist zur Speisung niederohmiger Verbraucher wie Lautsprecher notwendig.

Die Schaltung nach Bild VII-2 zeigt einen Emitterfolger mit gleich großen positiven und negativen Betriebsspannungen, wie er überwiegend bei Audio-Verstärkern verwendet wird.

Von Vorteil ist die einfache Arbeitspunkteinstellung (keine zusätzlichen Widerstände erforderlich) und der Fortfall der Koppelkapazitäten am Ein- und Ausgang. Der Lastwiderstand  $R_L$  steht symbolisch für den Lautsprecher.

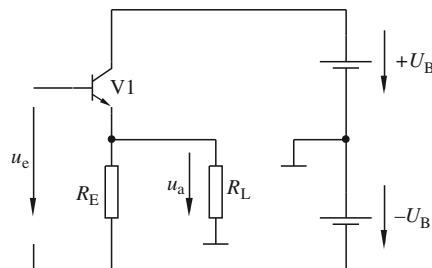


**Bild VII-2** Emitterfolger mit positiven und negativen Betriebsspannungen

Infolge der Arbeitspunkteinstellung für A-Betrieb, also im linearen Teil der Eingangskennlinie, ergibt sich ein Basis-Ruhestrom  $I_{BA}$ , ein Kollektor-Ruhestrom  $I_{CA}$  und somit eine Kollektor-Emitter-Ruhe-spannung  $U_{CEA} \approx U_B$ . Damit lässt sich die Verlustleistung im Transistor berechnen.

*Transistorverlustleistung*

$$P_T = U_{CEA} \cdot I_{CA} \approx \frac{U_B^2}{R_E} \quad (\text{VII.1})$$

Bei  $u_e = 0$  V ist die auftretende Verlustleistung gleichzeitig die maximale Transistorverlustleistung. Die bei  $u_e \neq 0$  V auftretende Verlustleistung ist stets kleiner. Die von den Betriebsspannungsquellen gelieferte Gesamtleistung lässt sich ebenfalls näherungsweise berechnen.

$$\text{Gesamtleistung } P_{\text{ges}} \approx \frac{2U_B^2}{R_E} \quad (\text{VII.2})$$

Diese Leistung ist völlig unabhängig von der Aussteuerung des Transistors. Die an den Lastwiderstand abgegebene Ausgangsleistung hängt vom Widerstandsverhältnis  $R_E/R_L$  ab.

$$\text{Ausgangsleistung } P_L = \frac{U_B^2}{2} \cdot \frac{R_L}{2(R_L + R_E)^2} \quad (\text{VII.3})$$

Die Ausgangsleistung ist bei Leistungsanpassung ( $R_E = R_L$ ) maximal.

$$\text{maximale Ausgangsleistung } P_{L\text{max}} = \frac{U_B^2}{8R_L} \quad (\text{VII.4})$$

Die Transistorverlustleistung  $P_T$  ist also 8mal so groß wie die maximale Ausgangsleistung. Die von den Betriebsspannungsquellen aufzubringende Leistung ist sogar 16mal so groß wie die maximale Ausgangsleistung.

Damit kann der Wirkungsgrad  $\eta$  dieser Schaltung berechnet werden.

$$\text{Wirkungsgrad } \eta = \frac{P_{L\text{max}}}{P_{\text{ges}}} \approx 6,25\% \quad (\text{VII.5})$$

Bild VII-3 zeigt die Schaltung nach Bild VII-2 in der üblichen vereinfachten Form. Durch die Krümmung der Kennlinien bei größeren Aussteuerungen entstehen Verzerrungen.

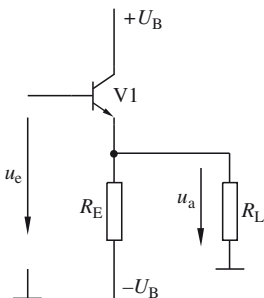


**Bild VII-3**  
Emitterfolger in der vereinfachten Form

Die Nachteile des A-Betriebes sind: kleiner linearer Aussteuerbereich, geringe Ausgangsleistung, kleiner Wirkungsgrad.

*Endstufen in A-Betrieb* finden in der Praxis Verwendung als Gegentakt-A-Endstufen bei sehr hochwertigen Endstufen.

Im Ausgangskennlinienfeld nach Bild VII-1 ist erkennbar, dass die Amplitude des Ausgangssignals bei B-Betrieb etwa die Größe der Betriebsspannung  $U_{CE\text{max}} = U_B$  erreichen kann. Bei einer entsprechenden Ansteuerung kann jedoch nur eine Halbwelle des Signals verstärkt werden.

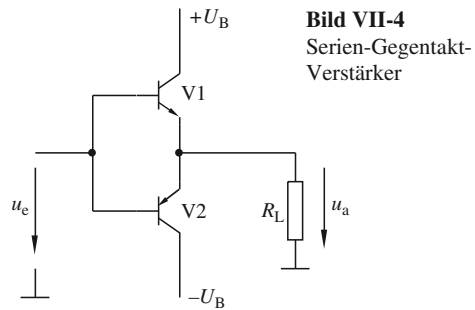


**Bild VII-4**  
Serien-Gegentakt-Verstärker

Dazu bedarf es eines neuen Schaltungskonzeptes. Man schaltet nach Bild VII-4 zwei Transistoren gleichstrommäßig in Reihe (Serien-Gegentakt-Verstärker), wobei der eine ein npn- und der andere ein pnp-Transistor mit sonst identischen Daten (Komplementärtransistoren) ist. In dieser Schaltung wird während der positiven Halbwelle des Eingangssignals nur der npn-Transistor (V1) der Gegentakt-Endstufe leitend. Es fließt ein Kollektorstrom durch den Lastwiderstand mit der eingezeichneten Spannungsrichtung. Während der negativen Halbwelle der Eingangswechselspannung wird der pnp-Transistor (V2) leitend, und es fließt ein Strom in entgegengesetzter Richtung durch den Lastwiderstand. Die beiden einzeln verstärkten Halbwellen werden im Lastwiderstand wieder zu einem Gesamtsignal zusammengefügt.

Es fließt jedoch erst dann ein Kollektorstrom, wenn die Amplitude des Ansteuersignals größer ist als der Schwellwert der Basis-Emitterdiode der Transistoren. Das Ausgangssignal ist daher bei einem Gegentakt-B-Verstärker im Bereich des Nulldurchganges, kleine Eingangsspannungen vorausgesetzt, zwangsläufig verzerrt. Bei größeren Eingangswechselspannungen sind diese Übernahmeverzerrungen jedoch von untergeordneter Bedeutung.

Beim AB-Betrieb wird der Arbeitspunkt nach Bild VII-1 etwas in Richtung des A-Arbeitspunktes verschoben. Um diesen Arbeitspunkt einzustellen, muss an die Basis-Emitterdioden eine *Basis-Vorspannung*  $U_{BE}$  gelegt werden, so dass beide Transistoren schon ohne Ansteuerung geringfügig leitend sind. Die Schaltung nach Bild VII-5 zeigt die Prinzipschaltung

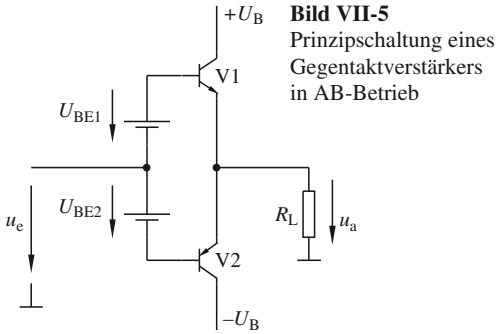


**Bild VII-5**  
Prinzipschaltung eines  
Gegentaktverstärkers  
in AB-Betrieb

eines Gegentaktverstärkers in AB-Betrieb mit den beiden Gleichspannungsquellen  $U_{BE}$ , die für die Basisvorspannung erforderlich sind.

Da der *Ruhestrom* nicht gleich Null ist, verschlechtert sich der Wirkungsgrad der Schaltung geringfügig. Liegt bei dieser Variante eine Ansteuerung mit einer kleinen Signalspannung vor, so ist die Verzerrung deutlich kleiner. Der Verstärkungsvorgang erfolgt in der gleichen Weise wie beim B-Betrieb.

Die maximale Ausgangswechsellleistung, die mit einem Gegentakt-B-Verstärker erreicht werden kann, lässt sich mit folgender Überlegung bestimmen. Zwei Emitterfolger im Gegentakt-B-Betrieb haben eine doppelt so hohe Aussteuerbarkeit ( $\pm U_B$  statt  $\pm U_B/2$ ) und damit eine 4mal so große Ausgangsleistung wie ein Emitterfolger im A-Betrieb.

Die Ausgangsleistung ist bei Leistungsanpassung ( $R_E = R_L$ ) maximal.

$$\text{max. Ausgangsleistung } P_{L\max} = \frac{U_B^2}{2R_L} \quad (\text{VII.6})$$

$$\text{Transistorverlustleistung } P_T = 0,1 \cdot \frac{U_B^2}{R_L} \quad (\text{VII.7})$$

Bei gleicher Ausgangsleistung ist die Verlustleistung eines Transistors bei Gegentakt-B-Betrieb ungefähr 40mal kleiner als bei A-Betrieb.

Die von den Betriebsspannungsquellen gelieferte Gesamtleistung lässt sich bei sinusförmiger Vollaussteuerung näherungsweise berechnen.

$$\text{Gesamtleistung } P_{\text{ges}} = \frac{2U_B^2}{\pi \cdot R_L} \quad (\text{VII.8})$$

Damit kann der Wirkungsgrad  $\eta$  dieser Schaltung berechnet werden.

$$\text{Wirkungsgrad } \eta = \frac{P_{L\max}}{P_{\text{ges}}} = 78,5\% \quad (\text{VII.9})$$

**Vorteile** von Leistungsverstärkern im AB- und B-Betrieb sind: kleiner Ruhestrom und kleine Verlustleistung, großer Wirkungsgrad ( $\approx 70\%$ ), großer Aussteuerbereich ( $\approx \pm U_B$ ), große Ausgangswechsellleistung.

**Nachteile** sind: Transistoren-Pärchen (Komplementär-Transistoren) erforderlich, gegenüber A-Betrieb größere Verzerrungen bei kleiner Aussteuerung. Will man ohne Komplementär-Transistoren arbeiten, wird am Eingang für einen Transistor eine Phasenumkehrstufe benötigt.

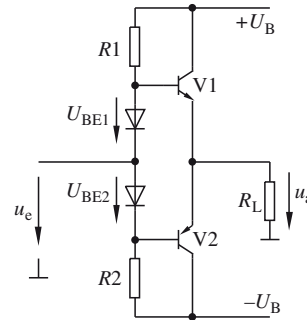


**Bild VII-6**  
Spannungsteiler  
mit integrierten  
Dioden

Die Vorspannung nach Bild VII-5 lässt sich relativ einfach über einen Spannungsteiler aus den Betriebsspannungen  $U_B$  gewinnen. Die Schaltung nach Bild VII-6 zeigt einen Spannungsteiler mit integrierten Dioden.

Da die Durchlasskennlinie einer Diode praktisch dieselbe Temperaturabhängigkeit wie die Eingangskennlinie eines Transistors aufweist, kann man mit dieser Variante auch die Temperaturdrift der Transistoren auffangen. Wenn die beiden Dioden sich in der gleichen Weise erwärmen wie die Transistoren (gemeinsame Montage auf einen Kühlkörper), nehmen die Spannungen  $U_{BE1}$  und  $U_{BE2}$  im selben Maße ab wie die Basis-Emitter-Spannungen der Transistoren. Die Folge ist, dass der Ruhestrom nahezu konstant bleibt. Das eigentliche Problem beim Gegentakt-AB-Verstärker besteht in der Stabilisierung des Ruhestroms. Der Ruhestrom kann sich wegen der kleinen Lastwiderstände durch thermische Rückkopplung leicht aufschaukeln und zur Zerstörung des Transistors führen.

Die beiden Emitterwiderstände  $R_{E1}$  und  $R_{E2}$  in der Schaltung nach Bild VII-7 bewirken eine Stromgegenkopplung, also eine Arbeitspunktstabilisierung. Die Widerstände sind durch die Dioden V5 und V6 gebrückt, die schon bei geringen Eingangssignalen leitend werden. Wäre dieses nicht der Fall, so würde die Wechselstromverlustleistung in den Emitterwiderständen unverträglich groß werden. Der Kollektorruhestrom sollte an den Emitterwiderständen einen Spannungsabfall von ungefähr 0,2 V bis 0,3 V hervorrufen (wenn Si-Dioden verwendet werden); die Spannungsabfälle sollen bei  $u_e = 0$  V kleiner sein als die Schließenspannungen der Dioden.

Wird die Eingangsspannung so groß, dass aufgrund des erhöhten Emitterstroms der Spannungsabfall an  $R_E$  den Wert von 0,7 V übersteigt, wird die entsprechende Diode leitend. Infolge des sehr niedrigen

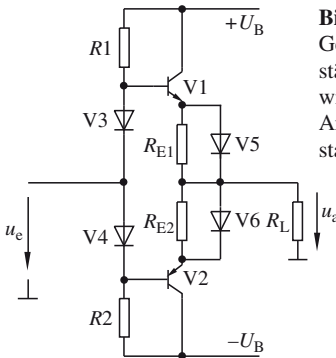


**Bild VII-7**  
Gegentakt-AB-Verstärker mit Emittterwiderständen zur Arbeitspunktstabilisierung

differentiellen Widerstandes der Diode fließt praktisch die *gesamte Wechselleistung* über die Diode, so dass an  $R_E$  kein wesentlicher Leistungsverlust entsteht und die Spannungsabfälle auf die Durchlassspannungen der Dioden begrenzt werden.

Diese Schaltung hat allerdings einen erheblichen Nachteil, da nur ein Teil des Signaleingangswechselstroms in die Basis der Transistoren gelangt, während der andere Teil über die Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  ungenutzt abfließt. Die Folge ist eine relativ geringe Gesamtstromverstärkung der Stufe und damit eine geringe Leistungsverstärkung.

Ersetzt man die Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  in der Schaltung nach Bild VII-7 durch *Konstantstromquellen*, so erhöht man deutlich den Eingangswiderstand der Schaltung. Der differentielle Innenwiderstand der Quellen ist sehr hoch.

Die Schaltung nach Bild VII-8 hat nun den hohen Eingangswiderstand eines Emittterfolgers ohne Eingangsspannungsteiler. Praktisch haben diese Konstantstromquellen einen unendlich hohen Innenwiderstand. Somit muss der Vorverstärker (Signalquelle) nur noch den für die Aussteuerung der Transistoren erforderlichen Basisstrom liefern. Die Z-Dioden werden häufig durch die Reihenschaltung aus zwei bis drei in Durchlassrichtung betriebene Siliziumdioden ersetzt.

Die mit den bisher besprochenen Schaltungen erzielbaren Ausgangsströme werden von den Transistoren  $V_1$  und  $V_2$  oder deren Stromverstärkungen bestimmt.

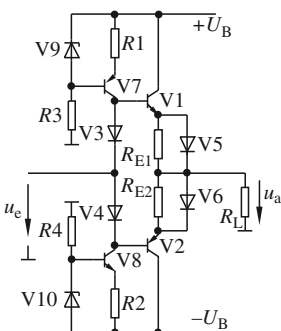


**Bild VII-8**  
Gegentakt-AB-Verstärker mit hohem Eingangswiderstand

Um eine höhere Stromverstärkung zu erreichen, verwendet man eine Darlington-Schaltung oder als Endtransistoren Darlington-Transistoren.

Die Transistoren  $V_1$ - $V_1$  beziehungsweise  $V_2$ - $V_2$  benötigen in der Schaltung nach Bild VII-9 eine Basis-Emitter-Spannung, die doppelt so groß ist wie die in der Schaltung nach Bild VII-8. Deshalb benutzt man hier jeweils zwei in Reihe geschaltete Dioden.

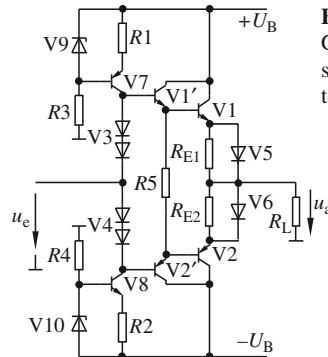


**Bild VII-9**  
Gegentakt-AB-Verstärker mit Darlington-Transistoren

Durch den Widerstand  $R_5$  werden die Ruhestrome von  $V_1'$  und  $V_2'$  stabilisiert. Auf diese Weise kann erreicht werden, dass die Basis-Ruhestrome von  $V_1$  und  $V_2$  gleich sind, da ansonsten die Übernahmeverzerrungen nicht vernachlässigbar klein wären.

Manchmal ist es schwierig, für Verstärker mit höheren Ausgangsleistungen geeignete pnp/npn-Transistortypen zu finden. Daraus folgt die Absicht, für bestimmte Anwendungen Transistoren vom gleichen Leitungstyp für  $V_1$  und  $V_2$  zu verwenden.

Dann wird eine Darlington-Schaltung mit komplementären Transistoren, wie die Schaltung nach Bild VII-10 zeigt, ausgeführt. Die Transistoren  $V_1$  und  $V_2$  sind vom gleichen Leitungstyp (npn). Der Darlington-Transistor  $V_1'$ - $V_1$  wirkt wie der Transistor  $V_1$  nach Bild VII-8 als npn-Transistor und der Darlington-Transistor  $V_2'$ - $V_2$  ebenfalls als npn-Transistor in der gleichen Funktion wie der Transistor  $V_2$  nach Bild VII-8.

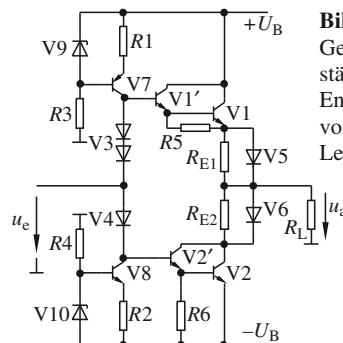


**Bild VII-10**  
Gegentakt-AB-Verstärker mit Endtransistoren vom gleichen Leitungstyp

Die Schaltung nach Bild VII-10 wird als *Quasi-Komplementär-Endstufe* bezeichnet. Der Darlington-Transistor V2'-V2 benötigt zur Vorspannungserzeugung lediglich die Diode V4. Die Widerstände R5 dienen der Ruhestromeinstellung der Transistoren V1' und V2'.

Diese Gegentakt-Endstufen bilden die Grundlage für zahlreiche weitere Schaltungen. Die vorgestellten Endstufen arbeiten mit Emitterfolgern, die eine Spannungsverstärkung  $V_u \approx 1$  aufweisen. Ziel ist, die Spannungsverstärkung zu erhöhen.

Die Endtransistoren in der Schaltung nach Bild VII-11 sind Darlington-Schaltungen entsprechend den Schaltungen nach Bild VII-9 und Bild VII-10. Der Übersichtlichkeit wegen sind sie als einfache Transistoren dargestellt. Legt man die Signalspannung  $u_e$  zwischen die Dioden V3 und V4, so ist die Schaltung identisch mit Bild VII-8. Legt man jedoch die Signalspannung  $u'_e$  an den Emitter des Transistors V7, arbeitet dieser bezüglich der Signalspannung als Transistor in Basisschaltung und betrachtet die Stromquelle mit Transistor V8 als Arbeitswiderstand. Da eine Basisschaltung ein  $V_u > 1$  hat, tritt am Kollektor von V7 nun eine Wechsellspannung  $u_e$  auf, die größer ist als die Signalspannung  $u'_e$ .

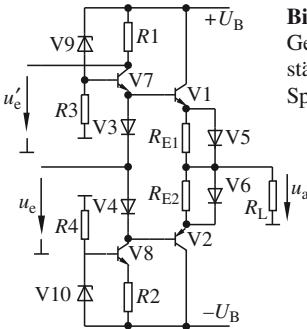


**Bild VII-11**  
Gegentakt-AB-Verstärker mit erhöhter Spannungsverstärkung

Durch den Wechsel des Signaleinganges ist also eine Spannungsverstärkung erreicht worden. Zu beachten ist jedoch, dass bei Ansteuerung zwischen V3 und V4 das Eingangs-Ruhepotential Null ist. Bei Ansteuerung der Schaltung am Emitter des Transistors V7 liegt jedoch das Eingangs-Ruhepotential in der Nähe der Betriebsspannung  $+U_B$  (genauer: auf  $U_B - U_R$ ).

Ein Vorverstärker kann also nicht wahlweise angeschlossen werden, sondern sein Ausgangs-Ruhepotential muss angepasst werden. Die Schaltung nach Bild VII-12 zeigt die Möglichkeit einer Ruhepotentialanpassung.

Der Vorverstärker liefert die Signalspannung  $u''_e$  an die Basisverstärkerstufe mit V11, wobei die Widerstände R1 und R6 eine Strom-Spannungs-Gegenkopplung darstellen. Die Wechsellspannung  $u'_e$  ist entsprechend dem Widerstandsverhältnis  $R1/R2$  größer als die vom Vorverstärker gelieferte Signalspannung  $u''_e$ . Am Ausgang des Vorverstärker ist das Eingangs-Ruhepotential wieder Null.

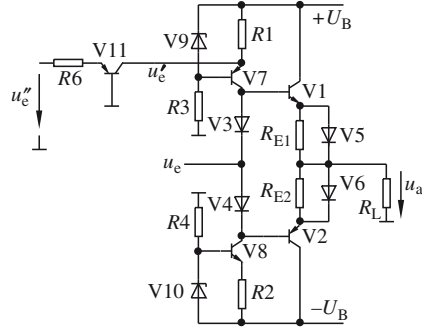


**Bild VII-12** Möglichkeit einer Ruhepotentialanpassung mit OP am Eingang

Gegentakt-Verstärker können auch mit unsymmetrischer Spannungsversorgung betrieben werden. Allerdings ist dann ein Koppelkondensator einzufügen. Um einen gleichstrommäßigen Kurzschluss zu vermeiden, muss der Lastwiderstand mittels des Kondensators mit der Endstufe verbunden sein.

Die Schaltung nach Bild VII-13 zeigt eine quasikomplementäre Endstufe mit unsymmetrischer Spannungsversorgung. Die Transistoren V1 und V2 sind npn-Transistoren und werden durch das komplementäre Transistorenpaar V1' und V2' angesteuert. Der Transistor V3 arbeitet in Emitterschaltung und bewirkt eine Spannungsverstärkung. Mit dem Trimmer R5 wird der Ruhestrom der Transistoren V1 und V2 eingestellt. Um eine zu starke wechsellspannungsmäßige Belastung von V3 zu vermeiden und um die Spannungsverstärkung von V3 möglichst groß zu machen, ist ein Wechsellspannungsbootstrapp (C2) vorhanden. Der Kondensator C4 und der Widerstand R12 sind für eine Wechsellspannungsgegenkopplung zur Einstellung einer definierten Spannungsverstärkung erforderlich.

Der Lastwiderstand  $R_L$  kann bei unsymmetrischer Spannungsversorgung einseitig am Plus- oder Minuspol der Versorgungsspannung liegen. Ist der Lastwiderstand  $R_L$  zum Beispiel am Minuspol angeschlossen, wird der Kondensator bei leitendem npn-Transistor etwa auf die halbe Betriebsspannung  $U_B$  aufgeladen. Während der Sperrphase des npn-Transistor wirkt der

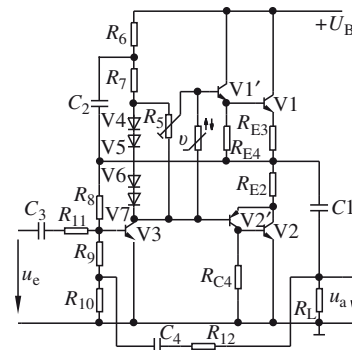


**Bild VII-13**  
Quasikomplementäre Endstufe mit unsymmetrischer Spannungsversorgung

Kondensator als Spannungsquelle für den pnp-Transistor und treibt einen Strom durch ihn. Dadurch wird der Kondensator wieder etwas entladen. Die Änderung der Kondensatorspannung muss durch die Wahl eines genügend großen Kondensators klein gehalten werden. Der Kondensator wird im Takt des Signals auf- und entladen. Der Kondensator erspart eine Spannungsquelle mit Mittelanzapfung, weil sich an ihm eine Spannung  $U_B/2$  aufbaut, die als Speisespannung für den Transistor V2 wirkt. Von Nachteil ist, dass der Kondensator und der Lastwiderstand einen Hochpass bilden. Soll dessen untere Grenzfrequenz sehr niedrig sein, muss die Kapazität des Kondensators sehr groß sein.

Gegentakt-AB-Verstärker größerer Leistung und höherer Ansprüche bezüglich möglichst kleiner Verzerrungen sind bereits sehr aufwendig. Die Schaltung nach Bild VII-14 realisiert einen hohen Eingangswiderstand durch einen Operationsverstärker in Elektrometerschaltung.

Die Spannungsverstärkung der Gesamtschaltung wird durch das Verhältnis der Widerstände R6 und R7

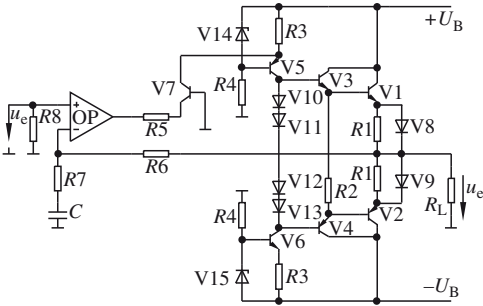


**Bild VII-14** Gegentakt-AB-Verstärker großer Leistung mit sehr hohem Eingangswiderstand

eingestellt. Da das Ausgangspotential des OP gleich Null ist, dient V7 zur Potentialverschiebung. Aufgrund der Aufwendigkeit solcher Schaltungen haben sich inzwischen Gegentaktverstärker in integrierter Schaltungstechnik durchgesetzt.

# VIII Operationsverstärker

## 1 Einführung

Eine wichtige *lineare, integrierte Schaltung* ist der *Operationsverstärker*, der in Kurzform mit OpAmp (operations-amplifier) oder OP bezeichnet wird. Diese Art von Verstärkern wurde fast ausschließlich als Rechenverstärker, also für Rechen-Operationen in Analog-Rechnern eingesetzt. Obwohl er aus einer Vielzahl von Transistoren, Dioden und Widerständen aufgebaut ist, kann er vom Anwender als ein einziges, kompaktes Verstärker-Bauelement betrachtet werden.

Der besondere Vorteil der OPs liegt darin, dass sich seine Eigenschaften durch einfache äußere Beschaltungen stark variieren lassen. OPs sind daher in immer größer werdendem Umfang in analogen Schaltungen, aber auch in Schaltungen der Digitaltechnik anwendbar und integrierbar.

Da dieser Abschnitt einführenden und erklärenden Charakter hat, wird hier auf die normgerechte Darstellung der Schaltzeichen an einigen Stellen verzichtet. Ebenso wird die Betriebsmittellkennzeichnung nach DIN nicht beachtet, da manche Bauteile trotz identischer Schaltzeichen unterschiedliche Benennungen hätten und dieser Umstand zu Missverständnissen führen kann.

Beispiel für einen Widerstand:

|                         |   |
|-------------------------|---|
| Normaler Strombegrenzer | R |
| Heizwiderstand          | E |
| Messwiderstand          | B |

Für Spulen (Induktivität) und Transformatoren werden die üblichen Schaltzeichen benutzt. Für alle Halbleiterbauteile wird die übliche Kennung „V“ verwendet.

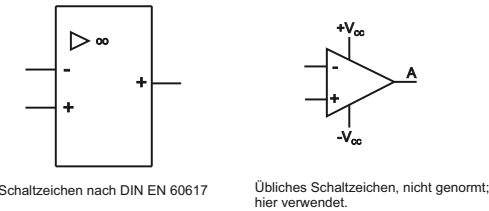


**Bild VIII-0** Schaltzeichen eines Operationsverstärkers

## 2 Differenzverstärker

Operationsverstärker (OP) haben einen Differenzverstärker mit Transistoren als Eingangsschaltung. Differenzverstärker sind dadurch gekennzeichnet, dass bei gleicher Ansteuerung der beiden Eingänge die Ausgangsspannung  $U_A$  (nahezu) Null ist; die Gleichtaktverstärkung ist also sehr klein. Das Gleichtaktsignal bewirkt jedoch in beiden Transistoren eine Verschiebung des Gleichstrom-Arbeitspunktes.

Die Kollektorströme ändern sich. In der Realität sind die Transistoren nicht völlig identisch, so



**Tabelle VIII-1** Operationsverstärker (Auswahl)  
Kenndaten bei  $U_B = \pm 15\text{ V}$  und  $T_U = 25\text{ °C}$

| Typ                                     |                    | Bipolare Eingänge             |                   |                   | FET-Eingänge            |                         |
|-----------------------------------------|--------------------|-------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------------|-------------------------|
|                                         |                    | TBA 221<br>$\mu\text{A } 741$ | TAA 521<br>709    | TAA 761           | LF 355                  | LF 357                  |
| Leerlaufverstärkung<br>(open loop gain) | $V_0$              | 100 dB                        | 93 dB             | 85 dB             | 80 dB                   | 80 dB                   |
| Gleichtaktunterdrückung (CMRR)          | $G$                | 90 dB                         | 90 dB             | 79 dB             | 100 dB                  | 100 dB                  |
| Offsetspannung<br>(offset voltage)      | $U_o$              | $\pm 6\text{ mV}$             | $\pm 2\text{ mV}$ | $\pm 6\text{ mV}$ | $\pm 3\text{ mV}$       | $\pm 3\text{ mV}$       |
| Eingangsruehestrom<br>(bias current)    | $I_E$              | 80 nA                         | 300 nA            | 500 nA            | 30 pA                   | 30 pA                   |
| Eingangswiderstand                      | $r_e$              | 2 M $\Omega$                  | 250 k $\Omega$    | 200 k $\Omega$    | $10^{12}\text{ }\Omega$ | $10^{12}\text{ }\Omega$ |
| Ausgangswiderstand                      | $r_a$              | 75 $\Omega$                   | 150 $\Omega$      | o. K.             | 50 $\Omega$             | –                       |
| Ausgangsstrom (max.)                    | $I_A$              | 20 mA                         | 10 mA             | 70 mA             | 25 mA                   | –                       |
| Ausgangsspannung<br>(max.)              | $U_{A\text{ max}}$ | $\pm 13\text{ V}$             | $\pm 13\text{ V}$ | $\pm 13\text{ V}$ | $\pm 13\text{ V}$       | $\pm 13\text{ V}$       |
| Transitfrequenz                         | $f_T$              | 500 kHz                       | 5 MHz             | 200 kHz           | 2,5 MHz                 | 25 MHz                  |

dass das Gleichtaktsignal eine geringe Änderung des Ausgangssignals zur Folge hat. Differenzverstärker sind sehr unempfindlich gegenüber Temperatureinflüssen. Bild VIII-1 zeigt einen vollständigen Differenzverstärker. Bezogen auf den Ausgang A heißt der Eingang E<sup>–</sup> invertierender Eingang und der Eingang E<sup>+</sup> nichtinvertierender Eingang. Betrachtet man die Steuerspannung an beiden Eingängen der Schaltung, können unabhängig vom Aufbau und der Form dieser Signalspannungen bezogen auf die Wirkung im Differenzverstärker zwei Aussagen getroffen werden:

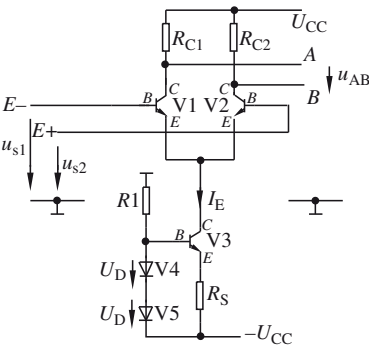


**Bild VIII-1** Vollständiger Differenzverstärker

Jede Eingangsspannung an den Eingängen eines Differenzverstärkers lässt sich immer in zwei Komponenten zerlegen, nämlich in eine *Gleichtaktspannung*  $U_{\text{Gl}}$ , die sich als arithmetisches Mittel aus den beiden Eingangsspannungen ergibt und in eine *Differenzspannung*  $U_D$ .

$$\text{Gleichtaktspannung } U_{\text{Gl}} = \frac{u_{s1} + u_{s2}}{2} \quad (\text{VIII.1})$$

$$\text{Differenzspannung } U_D = u_{s2} - u_{s1} \quad (\text{VIII.2})$$

Die Eingangsspannungsdifferenzen werden mit der hohen Differenzverstärkung  $v_d$ , gleiche Eingangsspannungen dagegen mit der wesentlich kleineren Gleichtaktverstärkung  $v_{\text{Gl}}$  verstärkt. Das Verhältnis der beiden zueinander wird als Gleichtaktunterdrückung  $G$  bezeichnet und beschreibt die Güte eines Differenzverstärkers.

*Gleichtaktunterdrückung*

$$G = \frac{V_d}{V_{\text{Gl}}} = \frac{r_{\text{BE}} + 2R_E \cdot (\beta + 1)}{2r_{\text{BE}}} \approx \frac{\beta \cdot R_E}{r_{\text{BE}}} \quad (\text{VIII.3})$$

Meist wird die Gleichtaktunterdrückung  $G$  in dB angegeben.

*Gleichtaktunterdrückung  $G$  in dB*

$$C_{\text{MRR}} \text{ (dB)} = 20 \cdot \log G \quad (\text{VIII.4})$$

$$C_{\text{MRR}} \left| \begin{array}{c} r_{\text{BE}} \\ \Omega \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} R_E \\ \Omega \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \beta \\ 1 \end{array} \right|$$

Ersetzt man die Transistoren im Differenzverstärker durch Darlington-Transistoren, lässt sich der Differenz-Eingangswiderstand mindestens verdoppeln. Soll er noch größer werden, verwendet man als Eingangstransistoren FETs.

Die Endstufen in OPs bestehen im wesentlichen aus Gegentakt-Endstufen oder Eintakt-Endstufen mit „open collector“.

### 3 Grundlagen des OP

Bei OPs mit Differenzeingang reagiert der Verstärker nur auf die Differenz der beiden Eingangssignale. Die *Differenzeingangsspannung*  $U_D$  ist die Spannung, die als resultierende Spannung am Eingang des Verstärkers liegt.



Tabelle VIII-2 Gegenüberstellung von idealem und realem OP

| charakteristische Eigenschaften | idealer OP                                      | realer OP                                                                |
|---------------------------------|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| Leerlaufverstärkung $V_0$       | $\infty$                                        | $10^3$ bis $10^7$                                                        |
| Eingangswiderstand $r_e$        | $\infty \, \Omega$                              | $10^6$ bis $10^{14} \, \Omega$                                           |
| Ausgangswiderstand $r_a$        | $0 \, \Omega$                                   | 30 bis $100 \, \Omega$                                                   |
| Temperaturdrift                 | nicht vorhanden                                 | von $-50 \, ^\circ\text{C}$ bis $+75 \, ^\circ\text{C}$ vernachlässigbar |
| Übertragungsbandbreite $B$      | $\infty \, \text{Hz}$                           | $10^4$ bis $10^7 \, \text{Hz}$                                           |
| Aussteuerbereich $U_A = f(U_E)$ | $-\infty \, \text{V}$ bis $+\infty \, \text{V}$ | $-U_B$ bis $+U_B$                                                        |

Differenzeingangsspannung

$$U_D = U_{E+} - U_{E-} \tag{VIII.5}$$

Diese Spannung  $U_D$  wird nun mit der *Leerlaufverstärkung*  $V_0$  (open loop gain) verstärkt an den Ausgang gebracht und ist als Ausgangsspannung  $U_A$  messbar.

$$\text{Ausgangsspannung } U_A = V_0 \cdot U_D \tag{VIII.6}$$

Die Gleichungen geben den mathematischen Zusammenhang der elektrischen Größen unter der Voraussetzung wieder, dass in die Eingänge des OPs kein Eingangsstrom fließt.

Das *Ersatzschaltbild* eines OPs nach Bild VIII-2 „beschreibt“ elektrisch einen „realen OP“ mit den entsprechenden Ein- und Ausgangsgrößen.

Sollen die Eingangsströme Null sein, muss der Eingangswiderstand  $r_e$  des OPs unendlich groß sein. Die Ausgangsspannung  $U_A$  muss in der Folge ebenfalls unendlich groß sein können. Da diese Spannung an einem Lastwiderstand einen entsprechenden Strom zieht, muss der Ausgangsstrom bei konstanter Ausgangsspannung ebenfalls konstant sein. Das kann aber nur der Fall sein, wenn der Ausgangswiderstand  $r_a$  des OPs Null ist.

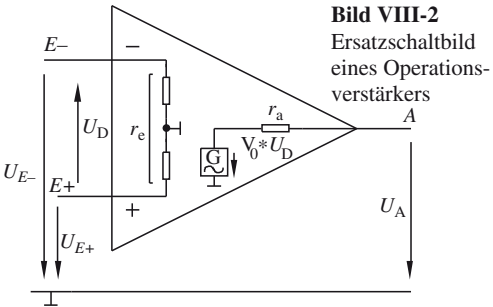


Bild VIII-2  
Ersatzschaltbild  
eines Operations-  
verstärkers

Deshalb muss die Leerlaufverstärkung  $V_0$  ebenfalls unendlich groß sein. Nach Bild VIII-3 sind Ausgangsspannung  $U_A$  und Eingangs differenzspannung  $U_D$  nur proportional bis zu dem Wert  $\pm U_{A \max}$ , bei dem der OP in die Sättigung geht. Wegen der hohen Leerlaufverstärkung wird ein unbeschalteter OP

bereits bei kleinen Eingangsspannungen in die Sättigung gesteuert.

So würde zum Beispiel bei  $V_0 = 30000$  eine Störspannung von nur  $0,1 \, \text{mV}$  bereits eine Änderung der Ausgangsspannung von  $3 \, \text{V}$  bewirken.

Die Daten eines „realen OPs“ können den Datenblättern der Hersteller entnommen werden. Die Daten eines „idealen“ und „realen“ OPs sind einander in der Tendenz gegenübergestellt.

Die meisten Operationsverstärker werden in einer *Rückkopplungsschaltung* betrieben, dass heißt, ein Teil der Ausgangsgröße (in der Regel ein Teil der Aus-

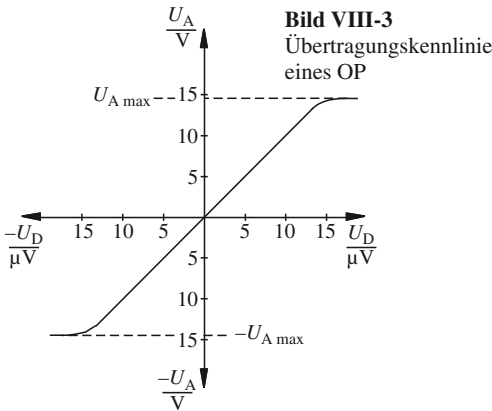


Bild VIII-3  
Übertragungskennlinie  
eines OP

gangsspannung) wird auf den Eingang zurückgeführt. Bei der Rückkopplung unterscheidet man zwischen einer Mitkopplung und einer Gegenkopplung. Bei der *Mitkopplung* wird die Ausgangsgröße gleichphasig auf den Eingang zurückgeführt, dass heißt, das Eingangssignal wird in seiner Wirkung verstärkt. Für den Fall der reinen Mitkopplung der Schaltung nimmt die Amplitude der Ausgangsspannung so lange zu, bis die Sättigung des Verstärkers erreicht ist.

Bei der *Gegenkopplung* wird ein Teil der Ausgangsgröße gegenphasig auf den Eingang zurückgeführt und somit das Eingangssignal in seiner Wirkung geschwächt. Die Gesamtverstärkung nimmt ab. Die Grundsaltung des Inverters (invertierender OP) wird dargestellt in Bild VIII-4.

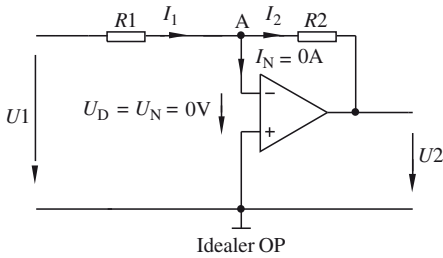


**Bild VIII-4** Grundschaltung des idealen invertierenden OP

Wegen  $V_0 = \infty$  gilt  $\Rightarrow U_D = 0$  V. Deshalb liegt der Punkt A auf Masse. Punkt A ist „virtueller Nullpunkt“, und es gilt:

$$\text{Spannungsverstärkung } V_u = -\frac{U_2}{U_1} = -\frac{R_2}{R_1} \quad (\text{VIII.7})$$

Diese Gleichung gilt für den „idealen“ OP.

Die Verstärkung wird also nur durch das Widerstandsverhältnis und damit unabhängig von den spezifischen Kenngrößen des OP festgelegt.

Der Fehler bei Annahme eines „idealen“ OPs gegenüber korrekter Rechnung beträgt nur ungefähr 1 %. Unter Beachtung der Widerstandstoleranzen kann in der Praxis mit der Gleichung für den „idealen“ OP bei  $V_0 \geq 60$  dB gearbeitet werden.

Bezogen auf einen an den Ausgang geschalteten Verbraucher wird der endliche Ausgangswiderstand  $r'_a$  des realen OP um den Faktor der Schleifenverstärkung  $g$  niederohmiger.

*Ausgangswiderstand des beschalteten OP*

$$r'_a = \frac{r_a}{V_0} + r_a \cdot \frac{V_u}{V_0} \quad (\text{VIII.8})$$

Der Eingangswiderstand eines „realen“ OPs ist nicht, wie beim „idealen“ OP angenommen, unendlich groß. Darum gilt:

*Eingangswiderstand des beschalteten OP*

$$r'_e = R_1 \quad (\text{VIII.9})$$

Beschaltet man einen OP gemäß Schaltung nach Bild VIII-5, so entsteht ein *nichtinvertierender Verstärker*.

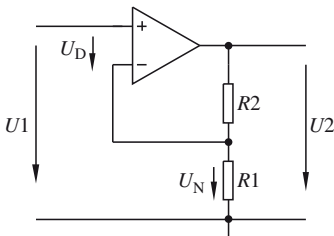


**Bild VIII-5** Grundschaltung des idealen nichtinvertierenden OP

Die Verstärkung des nichtinvertierenden OPs hängt nur von der äußeren Beschaltung ab und kann in

weiten Grenzen unabhängig von der Leerlaufverstärkung frei festgelegt beziehungsweise eingestellt werden.

Gleichung VIII.10 lässt erkennen, dass die Verstärkung  $V_u$  nicht kleiner als 1 werden kann, was beim invertierenden OP möglich ist.

$$\text{Spannungsverstärkung } V_u = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad (\text{VIII.10})$$

Bei niedrigen Frequenzen ( $f < 100$  Hz) tritt als Eingangswiderstand  $r'_e$  der Schaltung der sehr hohe Gleichaktwiderstand  $r_{GI}$  des OPs auf.

*Eingangswiderstand des beschalteten OP*

$$r'_e \approx r_{GI} \quad (\text{VIII.11})$$

*Ausgangswiderstand des beschalteten OP*

$$r'_a = r_a \cdot \frac{V_u}{V_0} \quad (\text{VIII.12})$$

Die beiden Eingänge  $E^+$  und  $E^-$  sind eigentlich die Basisanschlüsse der Eingangstransistoren der Differenzverstärkerstufe. Es fließt daher ein Basisstrom, dass heißt, in den OP fließen die *Eingangsruhestrome*  $I_N$  und  $I_P$ . Obwohl diese Ströme sehr klein sind, können sie infolge der unterschiedlichen Spannungsabfälle an den äußeren Widerständen eine Spannungsdifferenz an den Eingängen des OPs bewirken. Diese Spannungsdifferenz wird verstärkt und würde ohne geeignete Maßnahmen als Störgröße am Ausgang des OPs auftreten.

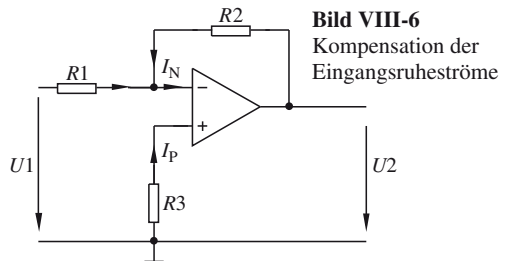


**Bild VIII-6** Kompensation der Eingangsruhestrome

Die Kompensation der Eingangsruhestrome lässt sich durch den Widerstand  $R_3$  in der Schaltung nach Bild VIII-6 erreichen.

Dabei gilt:

$$R_3 = R_1 \parallel R_2 \quad (\text{VIII.13})$$

Die identischen Spannungsabfälle an den beiden Eingängen verhindern eine Differenzspannung an den Eingängen.

Soll ein nichtinvertierender OP zur Anwendung kommen, umgeht man diese Schwierigkeit generell durch Verwendung eines OPs mit FET-Eingang. Bei diesen Typen können die Eingangsruhestrome ganz vernachlässigt werden.

Beim realen OP sind die Transistoren der Differenzverstärkerstufe am Eingang natürlich nicht absolut identisch. Die interne Differenzspannung zwischen

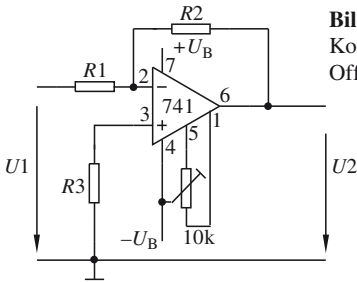


**Bild VIII-7**  
Kompensation der  
Offset-Spannung

$U_{BE1}$  und  $U_{BE2}$  wird als *Offset-Spannung*  $U_O$  bezeichnet. Diese Spannung ist die Ursache dafür, dass die Ausgangsspannung  $U_A$  am Ausgang ungleich Null ist, auch wenn die Spannung  $U_D$  am Eingang durch Kurzschließen und auf Masse legen der beiden Eingänge zu Null gemacht wurde.

Je nach OP-Typ gibt es verschiedene, vom Hersteller empfohlene Schaltungsmöglichkeiten zur *Kompensation* der Offset-Spannung  $U_O$ .

Besonders einfach ist die äußere Beschaltung für die Offset-Spannungskompensation beim Typ 741. Nach Bild VIII-7 ist lediglich ein  $10\text{ k}\Omega$ -Widerstand zwischen Pin 1 und Pin 5 anzuschließen und abzugleichen. Dieser Abgleich ist in der Weise vorzunehmen, dass bei an Masse gelegtem Eingang des OP die Ausgangsspannung gleich Null wird.

Die *Kompensation der Eingangsruheströme* erfolgt in Bild VIII-7 durch Widerstand R3 nach Gleichung VIII.13.

Unerwünschte und unvermeidbare interne Schalt- und Transistorkapazitäten ergeben zusammen mit den Widerständen in den OPs *Tiefpässe*. Ähnlich wie bei den Transistorverstärkerstufen führt das zu frequenzabhängigen Verstärkungsfaktoren, dass heißt,  $V_u$  bleibt nicht konstant bis zu höchsten Frequenzen. Der Frequenzgang ist also nicht linear.

Auch die Phasendrehung zwischen Ein- und Ausgang ändert sich und kann aus einer Gegenkopplung eine Mitkopplung machen, so dass die OP-Schaltung „schwingt“. Der OP geht in den Oszillatorbetrieb über, er arbeitet als „Signalgenerator“. Diese unangenehme Nebenwirkung kann mit Hilfe eines RC-Gliedes, das nach Herstellerangaben zu dimensionieren ist, durch *Frequenzkompensation* vermieden werden. In zahlreichen OP-Typen wird die Frequenzkompensation bereits im Innern des OP vorgenommen.

## 4 Operationsverstärker als Verstärker

In elektronischen Schaltungen werden Verstärker mit unterschiedlichen Verstärkungsfaktoren und mit bestimmtem dynamischen Übertragungsverhalten benötigt.

Außerdem sind zusätzlich Schaltungen erforderlich, die diverse Rechenoperationen, wie zum Beispiel Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren, Integrieren, Differenzieren ausführen können. Das

gewünschte Verhalten kann man durch eine entsprechende Beschaltung eines OP erreichen.

### 4.1 Verstärker mit frequenzunabhängiger Gegenkopplung

Wenn bei OP-Verstärkern im Gegenkopplungszweig ausschließlich ohmsche Widerstände benutzt werden, ist die Gegenkopplung frequenzunabhängig.

Dadurch ist die Verstärkung  $V_u$  im zulässigen Arbeitsbereich des Verstärkers konstant und unabhängig von der Frequenz des Signals.

Wird  $R2 < R1$ , so wird auch  $V_u < 1$ . Die Eingangsspannung  $U_E$  wird nicht verstärkt, sondern gedämpft.

Einen *Umkehrverstärker mit kontinuierlich einstellbarer Verstärkung* (Abgleich von Reglerschaltungen) zeigt die Schaltung nach Bild VIII-8. Die Verstärkung wird mit R1, R2 und R3 eingestellt. Offsetspannung und Offsetstrom werden mit R7, R8 und R9 sowie R5 eingestellt. Die Dioden D1 und D2 bilden mit R6 und R10 einen Massepunkt. Hier wird ein OP 761 mit open-collector-Ausgang eingesetzt.

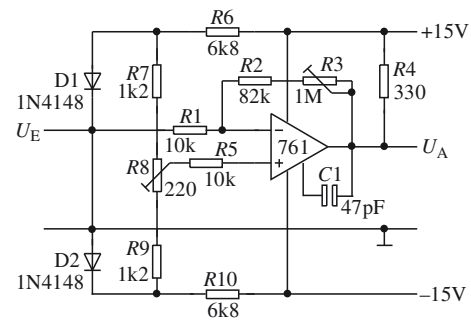


**Bild VIII-8** Umkehrverstärker mit kontinuierlich einstellbarer Verstärkung

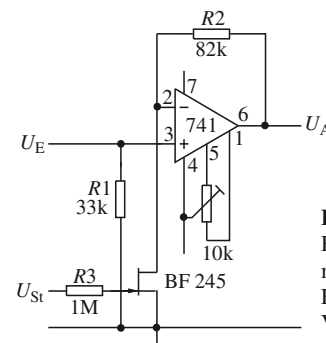


**Bild VIII-9**  
Regelverstärker  
mit kontinuierlicher  
Einstellung der  
Verstärkung

Eine kontinuierliche Einstellung der Verstärkung kann mit Hilfe des Feldeffekttransistors in der Schaltung nach Bild VIII-9 vorgenommen werden. In diesem *Regelverstärker* wird der Vorteil ausgenutzt, dass beim Elektrometervverstärker eine Änderung der Rückkopplungswiderstände keinen Einfluss auf den Eingangswiderstand der Schaltung hat.

Der Eingangswiderstand beträgt hier  $R_1 = 33 \text{ k}\Omega$ . Der normalerweise hohe Eingangswiderstand eines Elektrometersverstärkers wird in dieser Schaltung also nicht genutzt.

Die Verstärkungseinstellung erfolgt durch Änderung des Drain-Source-Widerstandes  $R_{DS}$  des FET, der in bestimmten Grenzen durch eine gesteuerte Gleichspannung variiert werden kann. Die Verstärkung dieses Regelverstärkers ist etwa im Bereich von  $V_u = 1$  bis  $V_u = 150$  veränderbar.

Die Elektrometerschaltung ist in Bild VIII-10 tragendes Element in dem sehr hochohmigen Spannungsmessgerät. Der Eingang dieser *Messschaltung* wird durch einen Spannungsteiler aus Messwiderständen gebildet. Er ist so dimensioniert, dass sich die Messbereiche 100 mV, 1 V, 10 V und 100 V ergeben.

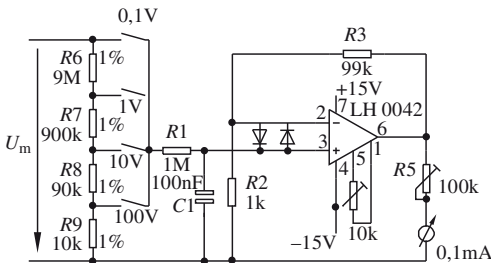


**Bild VIII-10** Spannungsmessgerät mit OP in Elektrometerschaltung

Der Widerstand  $R_1$  dient zur Strombegrenzung in dem OP. Zusammen mit  $C_1$  bildet er einen Tiefpass, dessen Aufgabe es ist, Oberschwingungen und Spannungsspitzen wegzufiltern. Die antiparallelen Dioden zwischen den OP-Eingängen begrenzen die Eingangs-Differenz-Spannung des OP. Der Trimmer  $R_5$  ermöglicht einen Abgleich des Messinstrumentes.

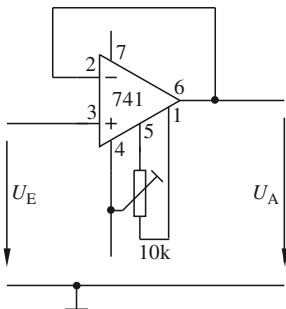


**Bild VIII-11**  
Impedanzwandler mit OP

Die Verstärkung  $V_u$  eines nicht-invertierenden OP-Verstärkers berechnet sich nach Gleichung VIII.10. Lässt man den Wert des Widerstandes  $R_1$  gegen  $\infty$  gehen, so wird der Bruchwert zu Null. Das gleiche geschieht, wenn man  $R_2 = 0 \Omega$  setzt. Die Verstärkung der Schaltung nach Bild VIII-11 wird damit

zu  $V_u = 1$ , dass heißt,  $U_E = U_A$ . Es gelten die Gleichungen VIII.11 und VIII.12.

*Ausgangswiderstand*

$$r'_a = \frac{r_a}{V_o} \quad \text{mit} \quad V_u = 1 \quad (\text{VIII.14})$$

Diese Schaltung bewirkt also eine *Impedanzwandlung*, da sie einen hohen Eingangswiderstand und einen sehr niedrigen Ausgangswiderstand hat.

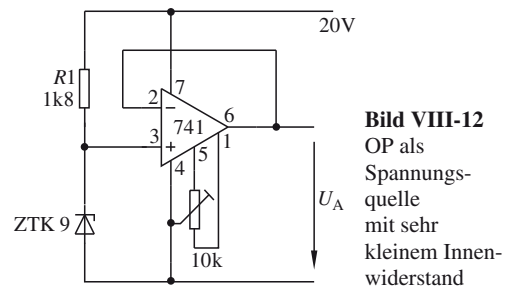


**Bild VIII-12**  
OP als Spannungsquelle mit sehr kleinem Innenwiderstand

Die Schaltung nach Bild VIII-12 realisiert eine *Spannungsquelle* mit sehr kleinem Innenwiderstand bei unsymmetrischer Spannungsversorgung des OP. Die Referenzspannung liefert eine Z-Diode. Am Ausgang des OP steht diese Spannung nun mit dem sehr kleinen Ausgangswiderstand des Spannungsfolgers zur Verfügung, während der dynamische Innenwiderstand der Z-Diode Werte von ca.  $10 \Omega$  bis  $100 \Omega$  haben kann.

Deshalb kann der Ausgang der Schaltung erheblich stärker belastet werden als bei einer Stabilisierungsschaltung ausschließlich mit Z-Diode.

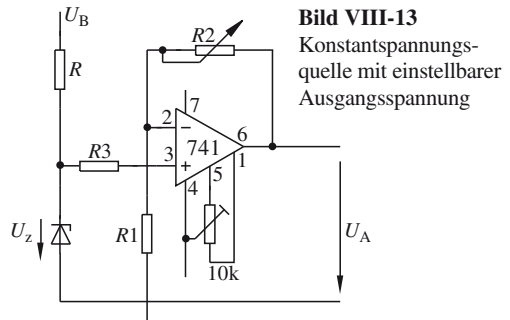
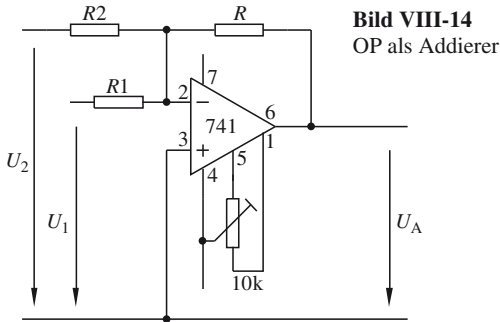


**Bild VIII-13**  
Konstantspannungsquelle mit einstellbarer Ausgangsspannung

Um die Ausgangsspannung regel- oder einstellbar zu machen, kann auch die Prinzipschaltung in Bild VIII-13 einer *Konstantspannungsquelle* verwendet werden.

$$\text{Ausgangsspannung} \quad U_A = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot U_Z \quad (\text{VIII.15})$$

Auch hier ist der Ausgangswiderstand durch die hohe Verstärkung des OP sehr klein und kann durch einen nachgeschalteten Spannungsfolger noch gemindert werden.



Der Operationsverstärker in der Schaltung nach Bild VIII-14 ist so beschaltet, dass die zwei Eingangsspannungen  $U_1$  und  $U_2$  elektrisch addiert und verstärkt werden.

*Ausgangsspannung*

$$-U_A = \frac{R}{R_1} \cdot U_1 + \frac{R}{R_2} \cdot U_2 \quad (\text{VIII.16})$$

Setzt man  $R_1 = R_2 = R_3$ , so vereinfacht sich die Gleichung zu

*Ausgangsspannung*

$$-U_A = \frac{R}{R_3} \cdot (U_1 + U_2) \quad (\text{VIII.17})$$

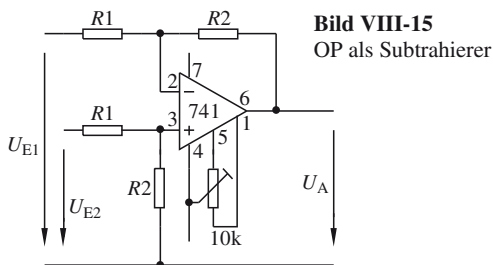
Das Minuszeichen in der Gleichung weist lediglich auf die Phasendrehung des invertierenden OP hin.

Der *Addierer* kann auf eine beliebige Anzahl  $n$  von Eingängen erweitert und nach folgender Gleichung berechnet werden :

*Ausgangsspannung*

$$-U_A = \frac{R}{R_1} \cdot U_1 + \frac{R}{R_2} \cdot U_2 + \dots + \frac{R}{R_n} \cdot U_n \quad (\text{VIII.18})$$

Bei der Dimensionierung eines Addierers muss beachtet werden, dass die maximale Ausgangsspannung eines OP knapp 1 V unter der Versorgungsspannung des OP liegt.



Die Schaltung nach Bild VIII-15 ist ein *Subtrahierer*. Sie entspricht im Prinzip der Schaltung des Differenzverstärkers. Mit ihr wird die zwischen den beiden Eingängen wirksame Spannung verstärkt. Zur Vereinfachung, aber auch um eine Offset-Stromkompensation realisieren zu können, werden die Widerstände

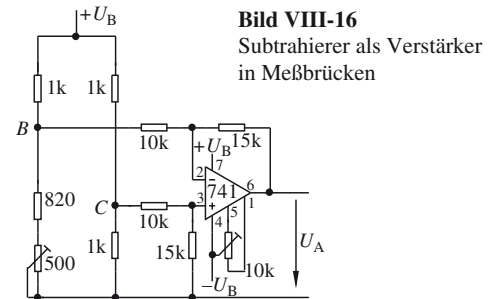
nach Bild VIII-15 gewählt. Werden beide Eingänge gleichzeitig angesteuert, so gilt:

*Ausgangsspannung*

$$U_A = \frac{R_2}{R_1} \cdot (U_{E2} - U_{E1}) \quad (\text{VIII.19})$$

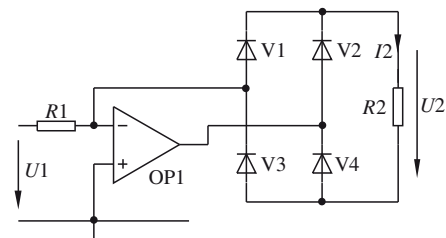
Mit den gewählten Widerständen arbeitet der Subtrahierer korrekt, da die Eingangsspannungen mit dem gleichen Verstärkungsfaktor verstärkt und dann subtrahiert werden. Unsymmetrien in der Brücke können mit dem Potentiometer abgeglichen werden.

Im Zusammenhang mit Messbrücken (Brückenschaltung) nach Bild VIII-16 bietet der Subtrahierer die Möglichkeit, die massefreie Brückenspannung in eine massebezogene Spannung umzuwandeln, die dann weiterverarbeitet werden kann.



Sollen Wechselspannungen mit kleiner Amplitude in einer normalen Brückengleichrichterschaltung B2 gleichgerichtet werden, ergibt sich wegen der Schwellenspannungen der Dioden der Nachteil, dass zwischen den positiven Halbwellen am Ausgang je nach Wert der Amplitude mehr oder weniger deutlich Lücken erkennbar sind.

Besonders in der Messtechnik sind Gleichrichterschaltungen erforderlich, die auch kleine Spannungen linear verarbeiten.



In der Schaltung nach Bild VIII-17, die einen OP mit Brückengleichrichter im Rückkopplungszweig zeigt, muss der *Gegenkopplungsstrom* wegen des Gleichrichters *stets in gleicher Richtung durch den Lastwiderstand* in der Brücke fließen.

Ein *Drehspulinstrument* als Lastwiderstand R2 im Querzweig der Brücke zeigt den arithmetischen Mittelwert dieses nichtlückenden Stroms an.

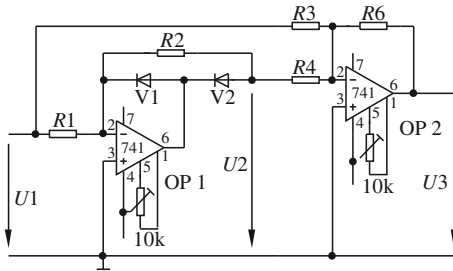
arithmetischer Mittelwert

$$I_{AV} = \frac{2 \cdot I_s}{\pi} = \frac{2 \cdot U_s}{R_1 \cdot \pi} \quad (\text{VIII.20})$$

Diese Gleichrichterschaltung B2 ist zur Spannungsversorgung potentialfreier Lastwiderstände, wie zum Beispiel Anzeigeinstrumente geeignet.

Soll das gleichgerichtete Messsignal jedoch einen Lastwiderstand speisen, der einpolig an Masse liegt, so ist die obige Schaltung ungeeignet. Die Schaltung nach Bild VIII-18 besteht aus einem Einweggleichrichter mit OP und einem Addierer.

Wenn  $R_1 = R_2 = R_3 = 2 \cdot R_4 = R_6 = R$  gewählt wird, dann ist  $U_{S3} = U_{S1}$ .



Zweiweggleichrichter-Schalter mit OPs

**Bild VIII-18** Gleichrichter für kleine Spannungen mit OP (Zweiweggleichrichter)

Wird jedoch der Widerstand R6 anders gewählt, so gilt:

$$\text{Ausgangsspannung } U_{S3} = \frac{R_6}{R} \cdot U_{S1} \quad (\text{VIII.21})$$

Der *Zweiweggleichrichter* nach Bild VIII-18 liefert eine pulsierende Gleichspannung wie eine normale B2-Schaltung.

Ein Drehspulinstrument am Ausgang zeigt wegen seiner mechanischen Trägheit einen konstanten (arithmetischen) Mittelwert an.

## 4.2 Verstärker mit frequenzabhängiger Gegenkopplung

Werden die ohmschen Widerstände, die bisher in den Schaltungen ausschließlich verwendet wurden, durch Kapazitäten oder Induktivitäten ersetzt, ist die Verstärkung  $V_u$  für Frequenzen unterhalb  $f_0$  nicht mehr konstant.

Mit Wechselstromwiderständen ist der *Frequenzgang des beschalteten OP* definierbar als

*Frequenzgang*

$$F(j\omega) = \frac{\text{Rückführimpedanz}}{\text{Eingangsimpedanz}} \quad (\text{VIII.22})$$

Die Darstellung des frequenzabhängigen Übertragungsverhaltens, aufgeteilt in den *Frequenzgang der Amplitudenverstärkung* in doppellogarithmischer Darstellung und den *Frequenzgang der Phasenver-*

*schiebung* linearer Darstellung, wird *Bode-Diagramm* genannt. Ein BodeDiagramm zeigt, wie ein Baustein ein sinusförmiges Eingangssignal frequenzabhängig an den Ausgang bringt.

*Frequenzgang der Amplitudenverstärkung*

$$F = \frac{u_a}{u_e} = f(\omega) \quad (\text{VIII.23})$$

Die Amplitudenverstärkung wird meistens in Dezibel (dB) umgerechnet. *Dezibel* ist eine logarithmische Maßeinheit und wurde ursprünglich als Maß für die Dämpfung eingeführt. Sie kennzeichnete ein Leistungsverhältnis.

Es gilt:

*Leistungsverhältnis*

$$\frac{P_a}{P_e} \text{ in dB} = 10 \cdot \lg \frac{P_a}{P_e} \text{ (dB)}$$

$$10 \text{ dB} = 1 \text{ B (Bel)} \quad (\text{VIII.24})$$

Oft drückt man auch das Verhältnis zweier Spannungen oder Ströme in dB aus.

*Spannungsverhältnis*

$$\frac{U_a}{U_e} \text{ in dB} = 20 \cdot \lg \frac{U_a}{U_e} \text{ (dB)} \quad (\text{VIII.25})$$

Die Schaltung nach Bild VIII-19 zeigt einen *Integrator* mit invertierendem OP. Beim Integrator wird ein Teil der Ausgangsspannung über einen Kondensator auf den invertierenden Eingang des OPs zurückgekoppelt.

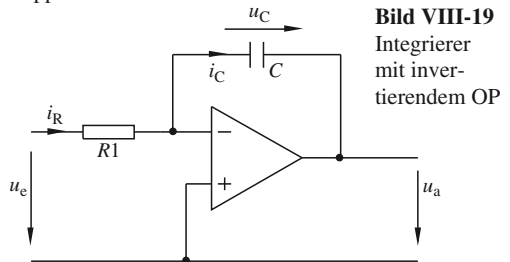


**Bild VIII-19**  
Integrierer mit invertierendem OP

Das Bodediagramm eines Integrators zeigt Bild VIII-20, wobei die linke Achse die Verstärkung (gain) in dB und die rechte Achse die Phasenverschiebung (phase range) in Grad (deg) anzeigt (hier für  $R1 = 100 \text{ k}\Omega$  und  $C = 1 \text{ nF}$ ).

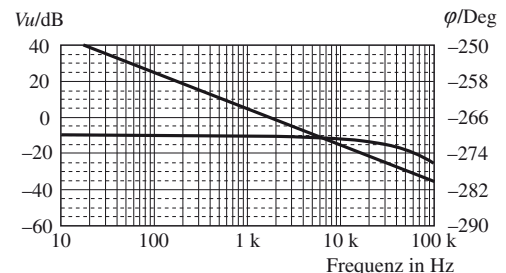


**Bild VIII-20** Bodediagramm eines Integrierers



Eine RC-Schaltung verursacht eine Phasenverschiebung der Ausgangsspannung um  $-90^\circ$ . Zusammen mit der Phasenverschiebung des invertierenden OP von  $-180^\circ$  ergibt das die dargestellte Phasenverschiebung von  $-270^\circ$ . Diese ist jedoch identisch mit einer Verschiebung von  $+90^\circ$ .

Unter der Voraussetzung, dass der OP ideale Eigenschaften aufweist, gilt die Gleichung:

*Ausgangsspannung*

$$u_a = -\frac{1}{R_1 \cdot C} \int_0^t u_e \, dt + U_{a0} \quad (\text{VIII.26})$$

$U_{a0}$  ist die Spannung, die zu Beginn der Integration am Ausgang der Schaltung vorhanden ist. Das Produkt  $R_1 \cdot C = T_i$  wird *Integrierzeit* genannt.

Ist die Eingangsspannung  $u_e(t) = U_E = \text{const}$  (also eine Gleichspannung), so ist auch der Strom  $I_R = -I_C = \text{const}$ . Damit vereinfacht sich die Integralgleichung zur folgenden linearen Gleichung

$$\text{Ausgangsspannung } U_A = -\frac{U_E \cdot t}{R_1 \cdot C} \quad (\text{VIII.27})$$

Somit ist die Ausgangsspannung  $U_A$  eine *lineare Größe* und verläuft nicht, wie am Kondensator erwartet, nach einer e-Funktion. Sie kann je nach Polarität der Eingangsspannung nur noch linear ansteigen oder abfallen.

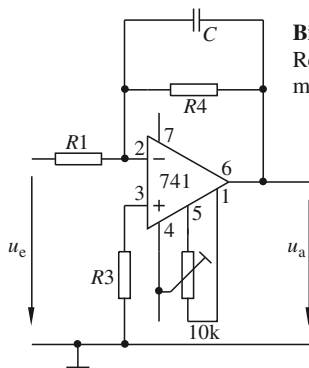


**Bild VIII-21**  
Realer Integrierer  
mit invertierendem OP

In der Praxis erweist sich eine Schaltung nach Bild VIII-19 als wenig zweckmäßig. Die endliche Gleichtaktunterdrückung, der Eingangsruhestrom und die Drift werden aufsummiert. Der Integrator würde immer in eine Endlage „laufen“.

Der Widerstand  $R_3$  in der Schaltung nach Bild VIII-21 dient zur Kompensation des Eingangsruhestroms. Der Widerstand  $R_4$  bestimmt die Gleichspannungsverstärkung  $V_u$  beziehungsweise stabilisiert den Gleichspannungsbetriebspunkt.

Elektrolytkondensatoren sollten wegen der relativ hohen Leckströme nicht verwendet werden. Durch den theoretisch unendlich großen Eingangswiderstand des OP entlädt sich der Kondensator fast nie.

Die Schaltung nach Bild VIII-22 zeigt die Prinzipschaltung eines *Differentiators* mit invertierendem OP. Betrachten wir den OP wieder als ideal, dass

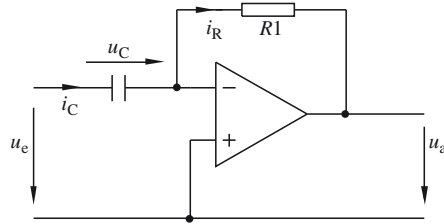


**Bild VIII-22** Prinzipschaltung eines Differentiators

heißt, die Leerlaufverstärkung  $V_0$  geht gegen Unendlich, so gilt

$$\text{Ausgangsspannung } -u_a = R_1 \cdot C \frac{du_e}{dt} \quad (\text{VIII.28})$$

Die Ausgangsgröße  $u_a$  des Differentiator hängt also von der zeitlichen Änderung der Eingangsspannung  $u_e$  ab. Eine konstante Eingangsspannung verursacht beim Differentiator also keine Ausgangsgröße.

Die Schaltung eines Differentiators nach Bild VIII-22 ist kaum zu verwenden, da Signale höherer Frequenzen mit der Leerlaufverstärkung  $V_0$  verstärkt werden. Mit dem Kondensator  $C_2$  ( $R_1 \cdot C_2 \approx R_4 \cdot C$  gewählt) in der Schaltung nach Bild VIII-23 kann das durch Störfrequenzen verursachte Rauschen des Differentiators herabgesetzt werden.

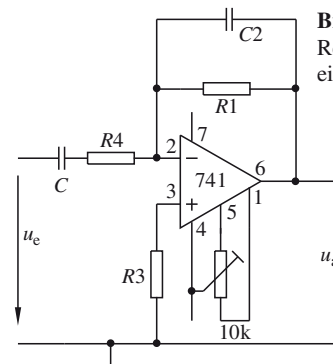


**Bild VIII-23**  
Reale Schaltung  
eines Differentiators

Die Kreisfrequenz  $\omega$  sollte wegen  $R_4 \cdot C$  (Eingangszeitkonstante) geschickt gewählt werden ( $\omega \ll 1/R_4 \cdot C$ ).

Im Bode-Diagramm eines Differentiators ist der Amplitudengang eine Gerade, die mit 20 dB/Dekade ansteigt.

In der Schaltung nach Bild VIII-24 wird ein OP als Wechselspannungsverstärker verwendet. Aufgrund der vorhandenen Kondensatoren muss man hinsichtlich AC- und DC-Verstärkungsverhalten unterscheiden.

So trennt der Kondensator  $C_3$  den OP gleichspannungsmäßig von der Signalquelle, während der Widerstand  $R_3$  dafür sorgt, dass ein Ruhestrom fließen kann. Der Kondensator  $C_1$  macht die Gegenkopplung für DC voll wirksam.



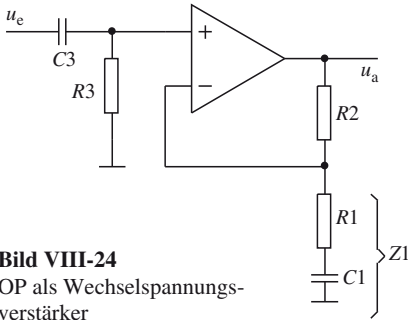


**Bild VIII-24**  
OP als Wechselspannungs-  
verstärker

Das bedeutet aber, dass Aus- und Eingang unter Berücksichtigung der Offset-Spannung auf dem gleichen Gleichspannungspotential liegen.

Eine Korrektur der Eingangsruheströme und ihrer Spannungsabfälle an R2 und R3 lässt sich leicht vornehmen, indem man  $R2 \approx R3$  wählt.

Die Schaltung stellt insgesamt einen AC-Verstärker mit Hochpass-Verhalten dar. Die untere Grenzfrequenz  $f_u$  lässt sich analog zu CR-Gliedern berechnen als

$$\text{untere Grenzfrequenz } f_u = \frac{1}{2\pi \cdot R_1 \cdot C_1} \quad (\text{VIII.29})$$

Der Eingangswiderstand der Schaltung ist praktisch gleich R3.

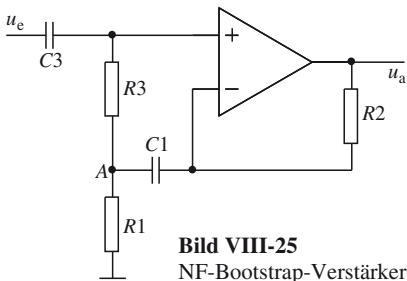


**Bild VIII-25**  
NF-Bootstrap-Verstärker mit OP

Hier ist nun eine Variante des Elektrometer-NF-Verstärkers hilfreich. Der NF-Bootstrap-Verstärker in der Schaltung nach Bild VIII-25 hat einen besonders hohen Eingangswiderstand.

Der Widerstand R3 liegt nicht an Masse, sondern am Punkt A, der eine Wechselspannung führt, die wegen  $U_D \approx 0 \text{ V}$  fast genau den gleichen Wert hat wie die Eingangswechselspannung  $u_e$ . Deshalb fließt durch den Widerstand R3 praktisch kein Wechselstrom. Der Widerstand R3 und damit der Eingangswiderstand dieser Schaltung werden dynamisch (also wechselstrommäßig) hochtransformiert. Die Ausgangs-Offsetspannung ist kleiner als in der oben erwähnten Schaltung.

### 4.3 OP als Leistungsverstärker

Bei Operationsverstärkern vom Typ 741 (Gegentakt-ausgang) liegt der zulässige Ausgangsstrom bei 20 mA, beim Typ 761 (open collector) liegt er bei

70 mA. Lieferbar sind von verschiedenen Herstellern auch Operationsverstärker, die Ausgangsleistungen von 25 W bei einem Ausgangsstrom von 3,5 A bereitstellen. Zu ihrer Realisierung geben Datenblätter die häufig recht einfache externe Beschaltung an.

Bei zahlreichen Anwendungen sind noch höhere Leistungen erforderlich, die sich erreichen lassen, wenn dem OP eine Gegentakt-Leistungsendstufe nachgeschaltet wird. Diese Endstufen sind dann meistens mit externen Leistungstransistoren aufgebaut.

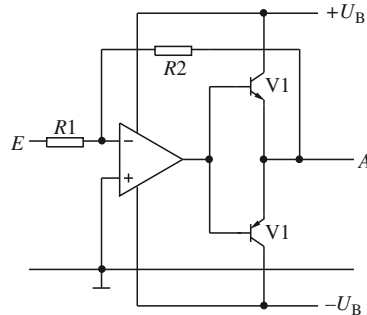


**Bild VIII-26** OP-Verstärker mit Leistungsendstufe

Bei der Schaltung eines OP-Verstärkers nach Bild VIII-26 ist als Leistungsendstufe ein komplementärer Emitterfolger für B-Betrieb angefügt. Der Gegenkopplungswiderstand R2 des invertierenden OP muss am Ausgang der Endstufe angeschlossen werden.

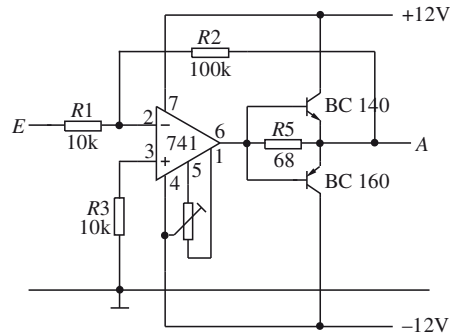


**Bild VIII-27** OP mit Gegentakt-Emitterfolger  
im AB-Betrieb

Die Übernahmeverzerrungen in der obigen Schaltung lassen sich mit der Schaltung nach Bild VIII-27 erheblich reduzieren. Dieser nachgeschaltete Gegentakt-Emitterfolger ermöglicht immerhin schon einen zulässigen Laststrom von ungefähr 200 mA.

Müssen die Übernahmeverzerrungen auf fast Null reduziert werden, erhöht sich der Schaltungsaufwand erheblich. Hier muss unter Umständen der Gegentakt-Emitterfolger im AB-Betrieb betrieben werden.

Um den Schaltungsaufwand zu reduzieren, wurden Ansteuerschaltungen in integrierter Schaltungstechnik entwickelt. Eine Möglichkeit ist der ICL 8063 nach Bild VIII-28, der für eine Ansteuerung mit dem

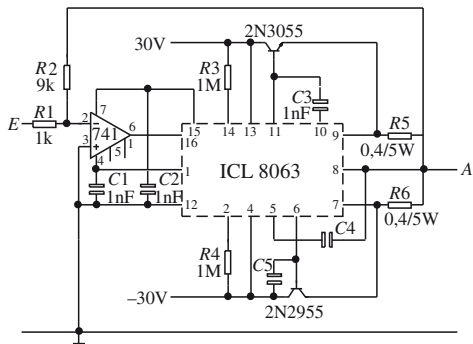


**Bild VIII-28** Leistungs-OP ICL 8063 (Intersil)

OP-Typ 741 ausgelegt ist. Der Kurzschlusschutz für die beiden angesteuerten Leistungstransistoren ist im IC enthalten. Dem Ausgang der nebenstehenden Schaltung können Ströme bis ca. 3 A entnommen werden.

**4.4 Aktive Filterschaltungen**

Netzwerke aus ohmschen, induktiven und kapazitiven Widerständen, die eingesetzt werden, um den *Frequenzgang* gezielt zu beeinflussen, nennt man *Filter*. Ideale Tiefpass-Filter sollen Nutzsignale mit  $f < f_g$  unverfälscht übertragen und alle Störsignale mit  $f > f_g$  unterdrücken. Dieses Ziel kann mit konstantem Übertragungsfaktor im Durchlassbereich ( $f < f_g$ ) und mit starkem Amplitudenabfall oberhalb der Grenzfrequenz erreicht werden. Der Übergang vom Durchlassbereich zum Sperrbereich ( $f > f_g$ ) sollte sehr steil erfolgen.

Durch das Einbringen eines Verstärkerelementes in den Filter erreicht man, dass aus der generellen Dämpfung des Signals eine Verstärkung mit  $V_u \geq 1$  wird.

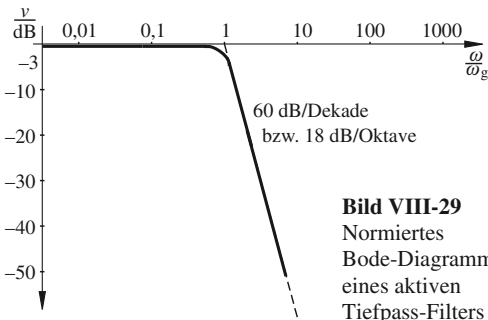
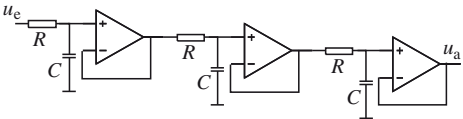


**Bild VIII-29**  
Normiertes  
Bode-Diagramm  
eines aktiven  
Tiefpass-Filters

Es gibt sehr viele Schaltungsvarianten zu Aufbau und Ausführung von aktiven Filtern. Man unterscheidet aktive Tief- und Hochpässe sowie selektive Filter wie aktive Bandsperrern und Bandpässe. Bild VIII-29 zeigt das normierte Bode-Diagramm eines aktiven Tiefpass-Filters 3. Ordnung.

Die Frequenz-Achse ist normiert, so dass der Durchlassbereich des TP bei  $f/f_g = 1$  endet und Spannungen mit Frequenzen  $f > f_g$  hier mit 60 dB/Dekade oder 18 dB/Oktave bedämpft werden. Das normierte Bode-Diagramm eines aktiven Hochpass-Filters zeigt, dass der Durchlassbereich des HP bei  $f/f_g = 1$  beginnt und Spannungen mit Frequenzen  $f < f_g$  mit 60 dB/Dekade oder 18 dB/Oktave bedämpft werden. Bei der Grenzfrequenz  $f_g$  tritt eine Dämpfung/Verstärkung von 3 dB/Dekade/-3 dB/Dekade auf.



Gauss-Filter 3. Ordnung

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$
 als Grenzfrequenz einer Filterstufe

**Bild VIII-30** Tiefpass-Filter 3. Ordnung mit OPs

In der Schaltung nach Bild VIII-30 sind RC-Glieder mit OPs als Impedanzwandler zu einem Tiefpass 3. Ordnung zusammengeschaltet. Durch die direkte Gegenkopplung der OPs ist die DC-Verstärkung der Gesamtschaltung gleich eins. Jede der  $n$  Filterstufen hat bei der Frequenz  $f_0$  eine Dämpfung von 3 dB/Dekade. Die gesamte Schaltung hat aber bei der Frequenz  $f_0$  eine Dämpfung von  $n \cdot 3$  dB/Dekade. Der Tiefpass 3. Ordnung nach Bild VIII-30 hat eine Dämpfung von 3 dB/Dekade bei der Grenzfrequenz  $f_g < f_0$ . Oberhalb der Frequenz  $f_0$  wird die Ausgangsspannung mit 60 dB/Dekade bedämpft. Diese Schaltung realisiert ein *Gauß-Filter*, da das Bode-Diagramm nach Bild VIII-31 die Gaußfunktion eines Tiefpass-Filters zeigt.

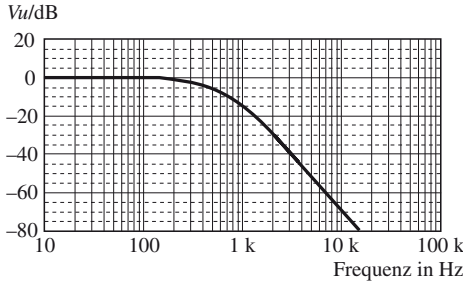


**Bild VIII-31** Bode-Diagramm eines Gauß-Filters

Charakteristikum eines Gauß-Filters ist der relativ flache Einsatz des Amplitudenganges oberhalb der Grenzfrequenz  $f_g$ . Der flache Einsatz ist aber gemessen am idealen Filter ein erheblicher Nachteil. Dem gegenüber steht der Vorteil dieses Filtertyps, dass bei sprungförmiger Änderung der Eingangsspannung die Ausgangsspannung nicht überschwingt.

Durch Vertauschen von  $R$  und  $C$  erhält man einen Hochpass 3. Ordnung. Gauß-Filter höherer Ordnung lassen sich so aufbauen.

Es gibt viele Methoden zum Aufbau aktiver Tief- und Hochpassfilter höherer Ordnung. Bei den meisten Filtern ist ihre Berechnung und Dimensionierung äußerst aufwendig.

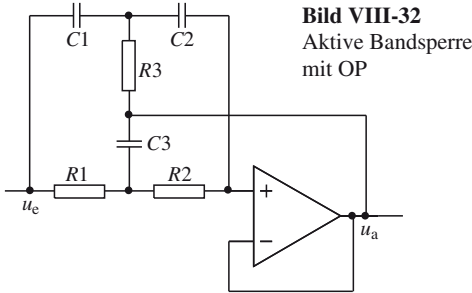


**Bild VIII-32**  
Aktive Bandsperre  
mit OP

Um nur bestimmte Frequenzen zu verstärken oder zu unterdrücken, benötigt man *selektive Filter*. Mit einer Kombination von Hoch- und Tiefpass kann man selektive Filter aufbauen.

Die Schaltung nach Bild VIII-32 zeigt eine leicht berechenbare *Bandsperre*.

Wählt man  $R_1 = R_2 = 2 \cdot R_3$  und  $C_1 = C_2 = C_3/2$ , so gilt für die Mittenfrequenz dieser Bandsperre folgende Gleichung:

$$\text{Mittenfrequenz } f = \frac{1}{2\pi \cdot R_1 \cdot C_1} \quad (\text{VIII.30})$$

Dieses Filter überträgt Signale hoher und tiefer Frequenzen unverändert. In einem bestimmten Frequenzbereich werden jedoch die Signale stark unterdrückt. Bei der Grenzfrequenz (Resonanzfrequenz) hat das Filter einen hohen Übertragungswiderstand.

Das Bode-Diagramm nach Bild VIII-33 zeigt das normierte Bode-Diagramm einer Bandsperre. Es ist erkennbar, dass die obere Grenzfrequenz des Tiefpasses unterhalb der unteren Grenzfrequenz des Hochpasses liegt.

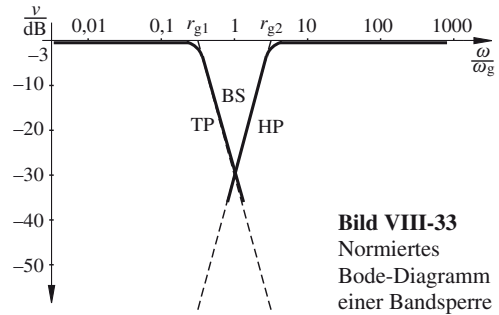


**Bild VIII-33**  
Normiertes  
Bode-Diagramm  
einer Bandsperre

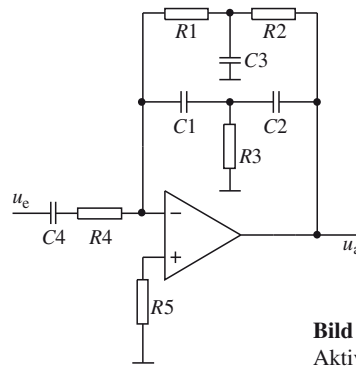


**Bild VIII-34**  
Aktiver Bandpaß

Zur Verstärkung bestimmter Frequenzen kann das Doppel-T-Filter in die Rückkopplung als Gegenkopplung des OP geschaltet werden.

Die Schaltung nach Bild VIII-34 zeigt einen aktiven *Bandpass*. Beim Bandpass werden Spannungen unterhalb und oberhalb bestimmter Frequenzen gedämpft und das Frequenzband dazwischen unverändert übertragen.

In der Regel wird man versuchen, die Signale mit der favorisierten Frequenz zu verstärken.

## IX Elektronische Schalter, Kippstufen

### 1 Transistor als Schalter

Wird ein Transistor als Schalter betrieben, so hat er zwei Arbeitspunkte, zwischen denen er im Betriebsfall je nach Betriebszustand wechselt. Der Übergang von einem Arbeitspunkt zum anderen wird durch ein entsprechendes Steuersignal am Eingang des Transistors erreicht.

Damit dieser Übergang möglichst schnell ablaufen kann, muss das Steuersignal einen *sprungartigen Verlauf* im Schaltzeitpunkt haben (Rechteckimpuls).

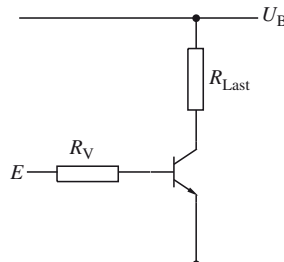


**Bild IX-1**  
Transistorschalter  
mit ohmscher Last

Bild IX-1 zeigt einen Transistorschalter mit ohmschem Lastwiderstand im Serienbetrieb. Das Kennlinienfeld nach Bild IX-2 zeigt die Anordnung der Arbeitspunkte A1 und A2 auf der Arbeitsgeraden. Die Arbeitsgerade ist die Kennlinie des Kollektorwiderstandes  $R_C$ , der in diesem Betriebsfall der Lastwiderstand  $R_{Last}$  ist.

Bei  $I_B = 0$  A fließt der sehr geringe Kollektor-Emitter-Reststrom  $I_{CEO}$ . Damit ist  $U_{CE} \approx U_B$ . Der Arbeitspunkt A1 kann weiter nach unten verschoben werden, indem die Basis beispielsweise auf negatives Potential gelegt wird.

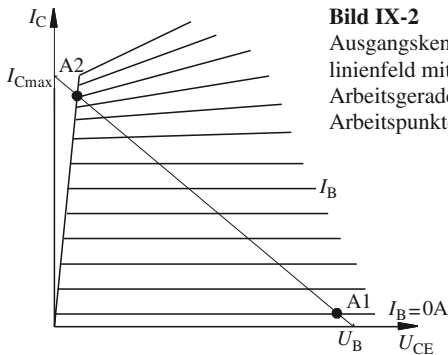


**Bild IX-2**  
Ausgangskennlinienfeld mit Arbeitsgerade und Arbeitspunkten

Steuert man den Transistor mit einem großen Basisstrom  $I_B$  an, fließt ein großer Kollektorstrom (Arbeitspunkt A2). Die Spannung  $U_{CE}$  nimmt einen minimalen Wert  $U_{CEmin} = U_{CEsat}$  bei  $U_{CB} = 0$  V an. Der Idealzustand eines Schalters mit  $R = \infty \Omega$  (Arbeitspunkt A1) und  $R = 0 \Omega$  (Arbeitspunkt A2) wird von einem Transistorschalter nicht realisiert. Der Transistor erreicht seine Arbeitspunkte jeweils entlang der Arbeitsgeraden.

Je mehr ein Transistor übersteuert wird, um so sicherer wird der Arbeitspunkt A2 erreicht und gehalten. Als Folge des überhöhten Basisstroms ergibt sich ein weiter reduziertes  $U_{CEsat}$ . Den Grad der Übersteuerung gibt man als den Übersteuerungsfaktor  $\ddot{u}$  an. Er ist das Verhältnis zwischen dem tatsächlich fließenden Basisstrom  $I_{Bist}$  und dem Basisstrom  $I_{B soll}$ , der eigentlich nur erforderlich wäre, um  $U_{CB} = 0$  V zu erreichen.

Im Schalterbetrieb wird ein Transistor meistens übersteuert. Je stärker die Übersteuerung, desto kürzer wird die Einschaltzeit  $t_{ein}$  des Transistors.

Die Einschaltzeit ergibt sich als Summe aus Verzögerungszeit  $t_d$  und Anstiegszeit  $t_r$ . Die Verzögerungszeit  $t_d$  (delay time) ergibt sich aus der Tatsache, dass die Sperrschichtkapazität  $C_{EB}$  am Anfang ungeladen ist und die Emitterdiode in Durchlassrichtung gepolt werden muss. Die Anstiegszeit  $t_r$  (rise time) ist eine definierte Größe, d.h., sie ist die Zeit, während der der Ausgangsstrom vom 0,1 auf den 0,9fachen Endwert ansteigt. Die Einschaltzeit  $t_{ein}$  wird mit zunehmendem Basisstrom kleiner.

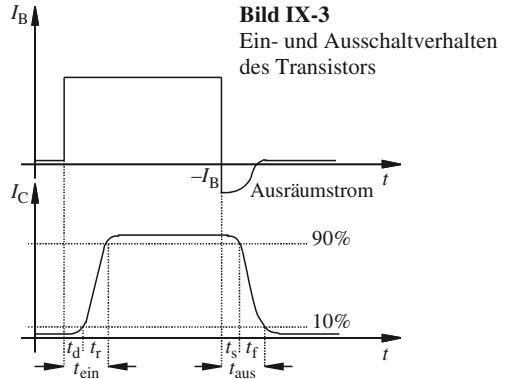
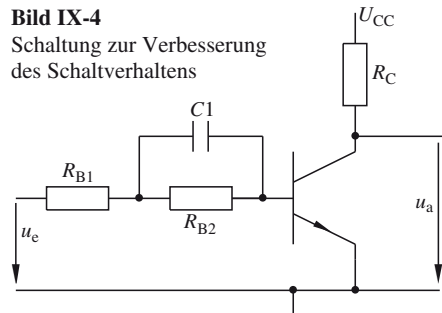


**Bild IX-3**  
Ein- und Ausschaltverhalten des Transistors

Nachteilig ist jedoch, dass damit die Ausschaltzeit  $t_{aus}$  des Transistors größer wird. Die Basis-Emitter-Strecke wird durch den großen Basisstrom mit Ladungsträgern überschwemmt und muss beim Ausschalten erst von ihnen geräumt werden, um zu sperren. Diese Speicherzeit  $t_s$  (storage time) ergibt sich aus der Sperrschichtkapazität  $C_{CB}$ . Hinzu kommt die Abfallzeit  $t_f$  (fall time) als definierte Zeitgröße. Den Zusammenhang macht Bild IX-3 deutlich.

Die Einschaltzeit lässt sich durch kleine Werte für  $R_B$  und große Übersteuerung verkürzen. Eine Schaltung zur Realisierung solcher Zustände zeigt Bild IX-4. Der Basisvorwiderstand  $R_B$  wird durch die Teilwiderstände  $R_{B1}$  und  $R_{B2}$  ersetzt.

**Bild IX-4**  
Schaltung zur Verbesserung des Schaltverhaltens



Im Einschaltmoment schließt der Kondensator C1 den Widerstand  $R_{B2}$  kurz, so dass der Basisstrom nur durch  $R_{B1}$  begrenzt wird und somit zur schnellen Übersteuerung führt. Ist der Kondensator geladen, begrenzt der Basisvorwiderstand  $R_B$  wieder den Basisstrom. Im Ausschaltmoment läuft der gleiche Prozess mit umgekehrtem Vorzeichen.

$$\text{Übersteuerungsfaktor } \ddot{u} = \frac{I_{Bist}}{I_{B soll}} \quad (\text{IX.1})$$

mit

$$I_{B soll} = \frac{I_C}{\beta} \quad (\text{IX.2})$$

gewählt:  $\ddot{u} \approx 2 \dots 10$

mit  $R_C = R_{\text{last}}$ :

$$R_C = \frac{U_B - U_{\text{CE sat}}}{I_C} \quad R_B = \frac{U_E - U_{\text{BE}}}{I_B}$$

Überschlägig kann  $R_B \approx 10 \cdot R_C$  gewählt werden.

Die *Sperrverluste* sind sehr klein gegenüber den Durchlassverlusten und können daher meistens vernachlässigt werden.

*Verlustleistung im Sperrzustand*

$$P_{\text{Sperr}} = U_{\text{CE}} \cdot I_{\text{CBO}} \quad (\text{IX.3})$$

Die *Durchlassverluste* lassen sich messtechnisch und rechnerisch recht einfach bestimmen.

*Verlustleistung im Durchlasszustand*

$$P_D = U_{\text{CE sat}} \cdot I_{\text{CA2}} = P_V \quad (\text{IX.4})$$

Die *Umschaltverluste* lassen sich nicht so leicht bestimmen, weil die Strom- und Spannungswerte sich während des Umschaltens ständig ändern. Bei einem Schalter mit ohmscher Last sind Ein- und Ausschaltverluste beim Umschalten gleich groß, was bei kapazitiven und induktiven Lasten nicht der Fall ist. In der Praxis sind die wesentlich größeren Ausschaltverluste bei induktiven Lasten besonders zu beachten.

Die Berechnung der Umschaltverluste kann allenfalls überschlägig erfolgen.

*Umschaltverluste*

$$P_{\text{Sch}} \approx U_B \cdot I_{\text{Cmax}} \cdot \frac{(t_{\text{ein}} + t_{\text{aus}})}{T} \quad (\text{IX.5})$$

Bei Transistoren im Schalterbetrieb ergibt sich die gesamte Verlustleistung  $P_{\text{ges}}$  als die Summe der Teilverluste.

$$\text{Verlustleistung} \quad P_{\text{ges}} = P_{\text{Sperr}} + P_D + P_{\text{Sch}} \quad (\text{IX.6})$$

Bei *Leistungstransistoren* liegen die Werte für die Ein- und Ausschaltzeiten im Bereich von 1 ... 3  $\mu\text{s}$ .

Wenn die Lasten zudem noch in größeren Zeitabständen geschaltet werden, gilt folgende Vereinfachung

für  $T \gg (t_{\text{ein}} + t_{\text{aus}})$

gilt

$$P_{\text{ges}} \approx P_D = U_{\text{CE sat}} \cdot I_{\text{CA2}} = P_V \quad (\text{IX.7})$$

Für den *Impulsbetrieb* (im Gegensatz zum Dauerbetrieb) kann eine *mittlere Verlustleistung* definiert und berechnet werden.

*mittlere Verlustleistung*

$$P_m = P_V \cdot \nu = \frac{U^2}{R} \cdot \nu \quad (\text{IX.8})$$

*Periodendauer*  $T = t_i + t_p$

$$\text{Tastverhältnis} \quad \nu = \frac{t_i}{T} \quad (\text{IX.9})$$

In der Praxis werden Transistoren für den Betrieb als Leistungsschalter bezüglich ihrer Verlustleistung meistens recht großzügig ausgewählt. Es muss auf die korrekte Bemessung der Kühlkörper geachtet werden. Auch die Einhaltung der Grenzwerte  $U_{\text{CE max}}$  und  $I_{\text{C max}}$  des ausgewählten Transistors muss gewährleistet sein. Das ist besonders wichtig im Hinblick auf den kleinen Kaltwiderstand einer Glühlampe im Einschaltmoment oder auch wegen des hohen Anlaufstroms von Gleichstrommotoren.

Relais, Hubmagnete oder Motore haben einen überwiegend induktiven Anteil und können insgesamt durch die Ersatzschaltung einer Spule (Induktivität und ohmscher Spulenwiderstand in Reihe) elektrisch beschrieben werden.

In der Schaltung nach Bild IX-5 ist der  $R_{\text{Last}}$  so gewählt, dass er mit dem in Bild IX-1 übereinstimmt. Die Arbeitsgerade, die sich aus diesem Widerstand ergibt, ist im Kennlinienfeld gestrichelt eingetragen. Auf ihr liegen die *statischen Arbeitspunkte* A1 und A2.

Aufgrund der Selbstinduktionsspannung kann der Kollektorstrom zunächst nur gering ansteigen, was zur Folge hat, dass sich der dynamische Arbeitspunkt dem Arbeitspunkt A2 von unten nähert. Diesen Vorgang zeigt das Kennlinienfeld nach Bild IX-6.

Im Moment des Ausschaltens wird die in der Induktivität gespeicherte Energie frei und bewirkt eine hohe Selbstinduktionsspannung, die so gepolt ist, dass

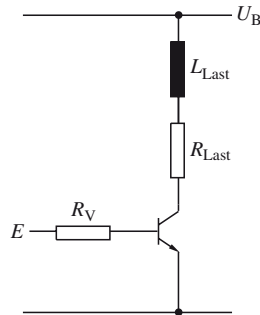


**Bild IX-5**  
Transistorschalter mit induktiv-ohmscher Last

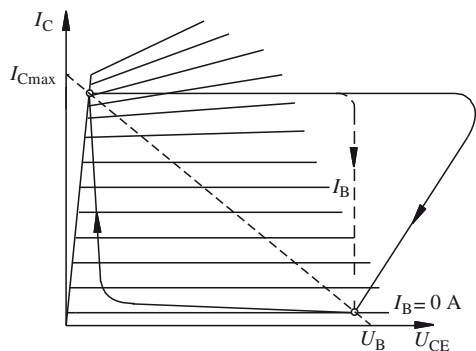


**Bild IX-6** Ausgangskennlinienfeld mit eingezeichnetem Verlauf des Arbeitspunktwechsels

sie als positive Kollektorspannung wirkt. Die Selbstinduktionsspannung erhöht die Kollektor-Emitter-Spannung  $U_{CE}$  soweit, dass sie größer als die Betriebsspannung  $U_B$  werden kann. Sie kann Werte erreichen, durch die der Transistor zerstört wird ( $U_{CE} > U_{CE0}$ ). Der Umschaltvorgang verläuft entlang der dynamischen Umschaltkurve nach Bild IX-6 und macht die Spannungsüberhöhung deutlich. Aus diesem Grund muss ein Transistorschalter im Serienbetrieb mit induktiven Lasten (Relais) vor Überspannungen im Ausschaltmoment geschützt werden.

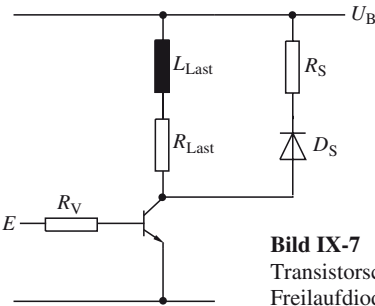


**Bild IX-7**  
Transistorschalter mit Freilaufdiode

Ein einfacher, aber wirksamer Schutz ist eine *Freilaufdiode*, wie sie in der Schaltung nach Bild IX-7 zu sehen ist. Die Freilaufdiode liegt für die Betriebsspannung  $U_B$  in Sperrichtung und ist somit unwirksam. Erst im Ausschaltmoment, also dann, wenn infolge der Induktionsspannung die Kollektorspannung größer als  $U_B$  wird, liegt die Diode in Durchlassrichtung. Der dann fließende Strom  $I_F$  baut die Energie des Magnetfeldes so rasch ab, dass eine gefährliche Überspannung nicht auftreten kann. Der Widerstand  $R_S$  begrenzt den Strom durch die Diode auf zulässige Werte und wandelt die magnetische Energie in Wärme um. Die Wirkung dieser Schutzmaßnahme ist im Kennlinienfeld nach Bild IX-6 eingezeichnet.

Die Arbeitsgerade kann beim Schalterbetrieb des Transistors nach Bild IX-8 durch die Verlustleistungshyperbel verlaufen, jedoch müssen die statischen Arbeitspunkte außerhalb liegen. Bei induktiver beziehungsweise kapazitiver Last muss darauf ge-

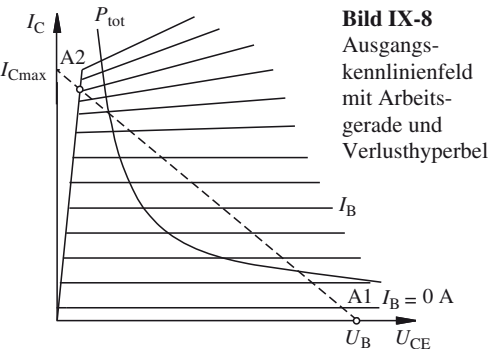


**Bild IX-8**  
Ausgangskennlinienfeld mit Arbeitsgerade und Verlusthyperbel

achtet werden, dass der dynamische Arbeitspunkt nicht zu lange in der Hyperbel verweilt. In der Schaltung nach Bild IX-9 ist die Prinzipschaltung eines Transistorschalters mit einem Kondensator als Lastwiderstand dargestellt. Der Kondensator ist als „reale“ Kapazität dargestellt.

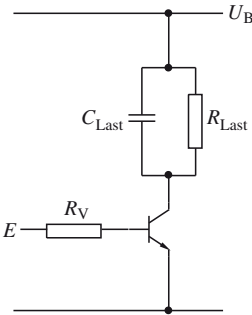


**Bild IX-9**  
Transistor mit Kondensator als Last

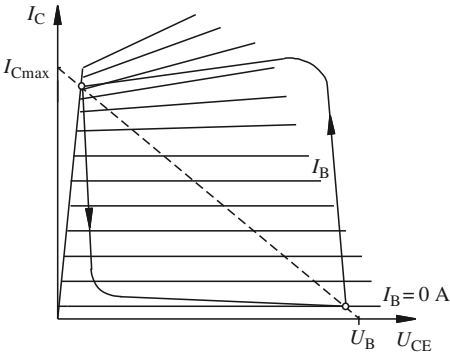


**Bild IX-10** Ausgangskennlinienfeld mit eingezeichnetem Verlauf des Arbeitspunktwechsels

Ohne diesen Parallelwiderstand, der im Kennlinienfeld nach Bild IX-10 als gestrichelte Arbeitsgerade dargestellt ist, wäre ein statischer Betrieb im Arbeitspunkt A2 nicht möglich.

Der Wert dieses  $R_{Last}$  ist mit dem Widerstandswert nach Bild IX-1 identisch gewählt, um die Wirkung von  $C_{Last}$  anschaulicher darstellen zu können.

Qualitativer Verlauf und Richtung des Arbeitspunktverlaufs beim Ein- und Ausschalten sind im Kennlinienfeld nach Bild IX-10 eingezeichnet. Je niedriger der Kapazitätswert ist, desto mehr nähert sich die Übergangskennlinie der gestrichelten Arbeitsgeraden.

In der Schaltung nach Bild IX-11 wird ein Transistor als Schalter verwendet, um ein Leistungsrelais an den Ausgang eines Digitalgatters (hier NOT-Glied) anzupassen. Liegt der Ausgang des Gatters auf L-Potential, so ist der Transistor gesperrt; bei H-Potential hingegen ist der Transistor leitend und damit das Relais im erregten Zustand.

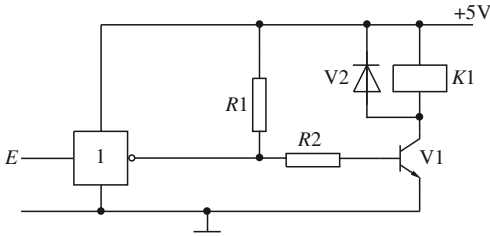
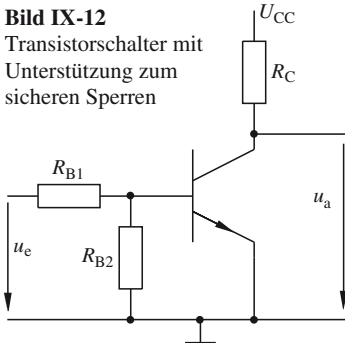


Bild IX-11 Transistorschalter als „Interface“

Bild IX-12 Transistorschalter mit Unterstützung zum sicheren Sperren



Um zu verhindern, dass auch bei L-Potential der Transistor leitend wird, verwendet man häufig eine Schaltung nach Bild IX-12. Hier reicht das L-Potential häufig nicht aus, um eine Basisvorspannung zu bewirken, die den Transistor leitend werden lässt. In der Signalverarbeitung wird der Transistorschalter meistens an seinem Ausgang durch die Eingangswiderstände nachfolgender Transistorschalter belastet. Diese Belastung kann sowohl gegen Masse als auch gegen die Betriebsspannung  $U_B$  auftreten.

## 2 Kippstufen mit Transistoren

Kippstufen bestehen hauptsächlich aus zwei Transistor-Schaltstufen, bei denen gleichzeitig eine Stufe leitend und die andere Stufe gesperrt ist.

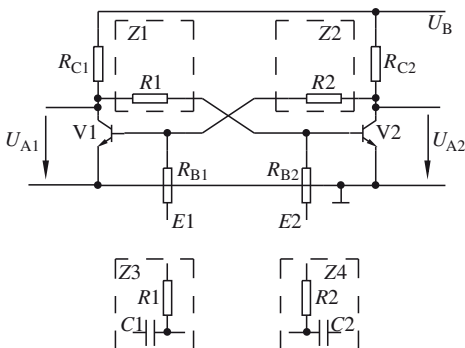


Bild IX-13 Gemeinsame Kriterien und Synthese von Kippstufen

Je nachdem, wie ein Kippvorgang ausgelöst oder eingeleitet wird, aber auch nach der Anzahl der stabilen Zustände einer Kippschaltung, unterscheidet man folgende Arten: bistabile Kippstufen, monostabile Kippstufen, astabile Kippstufen und Trigger-schaltungen.

Die Art der Kippstufen hängt nach Bild IX-13 von der technischen Ausführung der Koppellemente Z1 und Z2 ab. Sind die Koppellemente Z1 und Z2, wie hier im Bild dargestellt, ohmsche Widerstände R1 und R2, so ist diese Kippschaltung eine „bistabile Kippstufe“.

Ist das Koppellement Z1 ein ohmscher Widerstand R1, jedoch das Koppellement Z2 durch das Koppellement Z4 (C2 und R2) ersetzt, so ist diese Kipp-schaltung eine „monostabile Kippstufe“.

Ist das Koppellement Z2 weiterhin ein ohmscher Widerstand R2, wird jedoch das Koppellement Z1 durch das Koppellement Z3 (C1 und R1) ersetzt, so handelt es sich bei der Kippschaltung ebenfalls um eine „monostabile Kippstufe“.

Werden in der Kippschaltung sowohl Koppellement Z1 durch Koppellement Z3 wie auch Koppellement Z2 durch Koppellement Z4 ersetzt, so handelt es sich bei dieser Kippschaltung um eine „astabile Kippstufe“.

### 2.1 Bistabile Kippstufe

Eine *bistabile Kippstufe* nach Bild IX-14, auch „Flip-Flop“ (FF) genannt, besitzt zwei stabile Schaltzustände. Hier sind beide Transistorschalter identisch dimensioniert. Es ist erkennbar, dass der Kollektor von V1 direkt auf die Basis des Transistors V2 einwirkt wie auch der Kollektor von V2 direkt auf die Basis des Transistors V1 einwirkt.

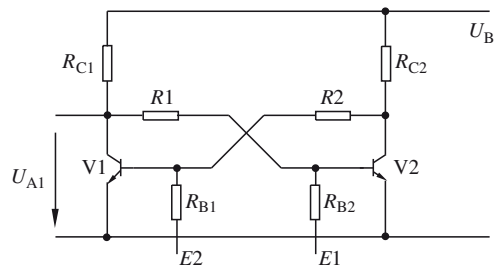


Bild IX-14 Bistabile Kippstufe, auch „Flip-Flop“ (FF)

Ist der Transistor V2 im Sperrzustand, so ist V1 leitend und damit  $U_{A1} \approx U_{CE\text{ sat}}$ . Die Basis des Transistor V1 liegt über den Widerstand  $R_2$  und  $R_{C2}$  an  $U_B$ . Somit liegt die Basis von V2 über  $R_1$  und  $R_{C1}$  an  $U_{CE\text{ sat}}$  von V1 und ist sicher gesperrt. Je nachdem, welcher der beiden Transistoren als erster durchsteuert, stellt sich ein bestimmter, aber dann nicht von selbst veränderbarer Zustand an den Ausgängen ein. An die Basisanschlüsse der Transistoren V1 und V2 nach Bild IX-14 sind die Eingänge E1 und E2 angebunden. Geht man von obiger Darstellung aus, dass heißt, V1 leitend und V2 gesperrt, und bringt man



nun auf den Eingang E1 einen positiven Spannungsimpuls  $U_{E1}$ , so wird V2 leitend und V1 gesperrt und damit  $U_{A1} \approx U_B$ . Dies hat zur Folge, dass die Basis von V2 über R1 auf  $U_B$  gehalten wird und der Transistor V2 leitend bleibt.

Bringt man nun auf den Eingang E2 einen positiven Spannungsimpuls  $U_{E2}$ , so wird V1 leitend. Die beiden positiven Spannungsimpulse auf E1 und E2 haben also den ursprünglichen Zustand wiederhergestellt. Die Werte für  $U_{A1}$  und  $U_{A2}$  sind einander entgegengesetzt. Zum Umschalten in den jeweils entgegengesetzten Zustand ist nur ein kurzzeitiger Eingangsimpuls am jeweiligen Steuereingang erforderlich. Der dann eingenommene Zustand wird solange gespeichert, bis ein entsprechender Impuls am anderen Eingang einen neuen Zustand herbeiführt.

Aus diesem Grund können Flip-Flops (bistabile Kippstufen) in der Digitaltechnik als Informationsspeicher eingesetzt werden.

Beim Anlegen der Spannung  $U_B$  an ein FF tritt ein beliebiger, aber stabiler Ausgangszustand ein, der nur von den Parameterstreuungen der Transistoren abhängt.

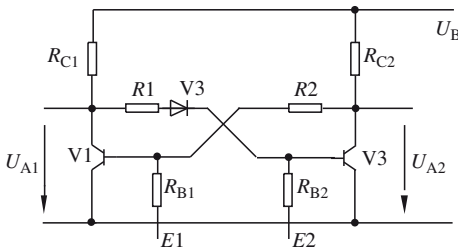


**Bild IX-15** Bistabile Kippstufe mit definiertem Grundzustand

Soll nach dem Anlegen der Spannung  $U_B$  ein definierter Ausgangszustand festliegen, so muss die Schaltung nach Bild IX-14 entsprechend Bild IX-15 modifiziert werden.

Die Diode V3 bewirkt in dieser Schaltung, dass der Transistor V1 immer vor dem Transistor V2 leitend wird und nach dem Einschalten der Versorgungsspannung somit  $U_{A1} \approx U_{CE\text{ sat}}$  ist.

Berechnet werden kann eine solche Schaltung prinzipiell nach folgenden Gleichungen ( $U_{BE}$  und  $U_{V3}$  vernachlässigt):

*Kollektorwiderstand*

$$R_{C1} = R_{C2} = \frac{U_B - U_{CE\text{ sat}}}{I_C} \approx \frac{U_B}{I_C} \quad (\text{IX.10})$$

*Vorwiderstand*  $R_1 = R_2 = \frac{1}{\beta} \cdot R_C \cdot B \quad (\text{IX.11})$

Durch weitere Maßnahmen, wie zum Beispiel Parallelschaltung von Kondensatoren zu den Widerständen R1 und R2, kann die *Flankensteilheit* der Ausgangsspannungen verbessert werden.

*Parallelkondensatoren*

$$C_K \leq \frac{R_C + R_B}{4,6 \cdot f \cdot R_C \cdot R_B} \quad (\text{IX.12})$$

mit der Frequenz der Eingangssignale  $f = \frac{f_{\text{ein}}}{2}$

## 2.2 Monostabile Kippstufe

Es gibt zwei Versionen der monostabilen Kippstufe (Bild IX-13). Sie werden mit Kennzeichnung der Eingänge E1 und E2 vorgestellt. Ein positives Signal auf den Eingang E2 lässt das Monoflop nach Bild IX-16 vom stabilen Zustand in den nichtstabilen Zustand kippen. Nach einer von der Schaltungsdimensionierung abhängigen Zeit  $t_i$  kippt er von selbst in die stabile Schaltstellung zurück und kann nach einer bestimmten Zeit  $t_{\text{rec}}$  erneut gesetzt werden.

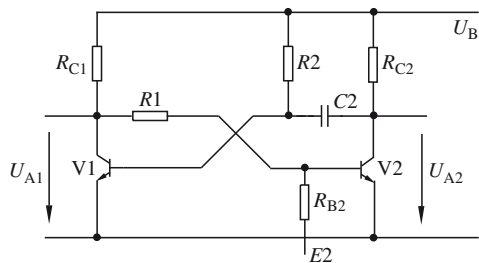


**Bild IX-16** Prinzipschaltung einer monostabilen Kippstufe

Beim Anlegen der Versorgungsspannung  $U_B$  wird der Transistor V1 leitend, weil sein Basisstrom über  $R_{C2}$  und  $R_2$  größer ist als derjenige nach V2. Der Kondensator C2 wird über  $R_{C2}$  geladen, das heißt, die Spannung  $U_{C2}$  am Kondensator ist am Ende des Ladevorganges gleich der Spannung  $U_B$ .

Es fließt kein Strom mehr über C2 in die Basis des Transistors. Lediglich der normale Basisstrom  $I_B$  fließt über  $R_2$  zu. Die Spannung  $U_{BE}$  am Transistor V1 beträgt ca. 0,7 V.

Ein positives Signal auf den Eingang E2 lässt den Transistor V2 leitend werden, wodurch die Spannung an der Basis von V1 auf einen Wert von  $U_{BE} = -U_B$  heruntergezogen wird, da der positive Anschluss von C2 auf Masse gelegt wird. Der Transistor V1 sperrt infolgedessen. Der Kondensator C2 beginnt nun damit, sich über den Widerstand  $R_2$  auf die Batteriespannung  $+U_B$  umzuladen. Wenn sich der Kondensator auf  $U_{BE} = +0,7$  V umgeladen hat, wird der Transistor V1 wieder leitend und damit  $U_{A1} \approx 0$  V.

*Schaltzeit*  $t_i = R_2 \cdot C_2 \cdot \ln 2 \quad (\text{IX.13})$

Der Kondensator C2 muss sich wieder in den normalen Zustand umladen, also von ca. 0 V auf  $U_{C2} = +U_B$ . Man spricht hier von der

*Erholzeit*  $t_{\text{rec}} = 5 \cdot R_{C2} \cdot C_2 \quad (\text{IX.14})$

Die nächste Triggerung (positives Signal an E2) des Monoflops sollte nicht vor Ablauf der Erholzeit erfolgen, da sonst C2 nicht voll aufgeladen wird und die Schaltzeit „unkalkulierbar“ verkürzt wird. Mit handelsüblichen Bauteilen lassen sich Impulszeiten von ca. 10  $\mu$ s bis maximal 10 s erreichen. Bei Verwendung von FET können längere Zeiten erreicht werden.

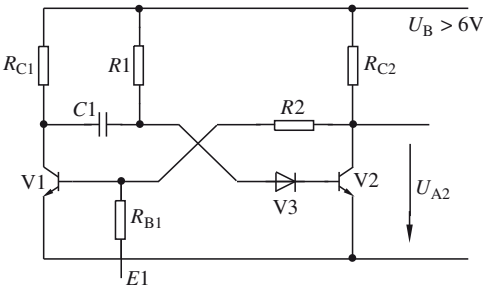


**Bild IX-17** Verbesserte monostabile Kippstufe

Wegen  $t_i \approx t_{rec}$  ist für  $t_i$  durch C2 eine untere Grenze gegeben, die praktisch bei  $t_i \approx \frac{T}{10}$  liegt.

Im Moment der Triggerung liegt die volle negative Batteriespannung  $U_B$  an der Basis-Emitter-Strecke des Transistors und beansprucht sie in Sperrichtung. Diese BE-Strecken haben aber schon bei Spannungen um 6 V ihre Durchbruchspannungen, wodurch dieser pn-Übergang stark gefährdet ist. Die Zeit  $t_i$  wird durch die schnelle Entladung des Kondensators stark verkürzt. Abhilfe schafft hier die Diode V3 nach Bild IX-17.

### 2.3 Astabile Kippstufe

Im Prinzip ist eine astabile Kippstufe nach Bild IX-18 eine geschickte Kombination zweier Monoflops ohne Eingänge. Beide Monoflops sind so geschaltet, dass sie sich jeweils nach Ablauf der durch die Zeitglieder bestimmten Schaltzeiten gegenseitig triggern (schalten). Da beide Schalter nur noch über Kondensatoren wechselstrommäßig miteinander gekoppelt sind, hat die Schaltung zwei instabile Zustände. Sie kippt daher fortlaufend von einem instabilen Zustand in den anderen und erzeugt dabei eine Ausgangsspannung mit einem kontinuierlichen, rechteckförmigen Verlauf (Rechteckgenerator).

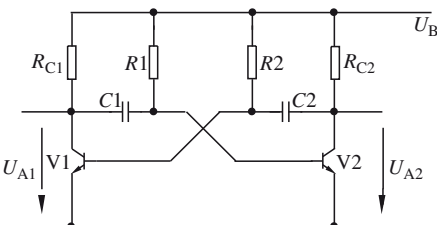


**Bild IX-18** Prinzipschaltung einer astabilen Kippstufe

Gleichstrommäßig sind die beiden Transistorschalter so ausgelegt, dass sie bei fehlenden Kondensatoren voll leiten würden. Die Frequenz der Ausgangsspannung sowie das Impuls-Pausen-Verhältnis hängen von den Zeitkonstanten der beiden RC-Glieder  $R2 \cdot C2$  beziehungsweise  $R1 \cdot C1$  ab.

$$\text{Periodendauer } T = (R_1 \cdot C_1 + R_2 \cdot C_2) \cdot \ln 2 \quad (\text{IX.15})$$

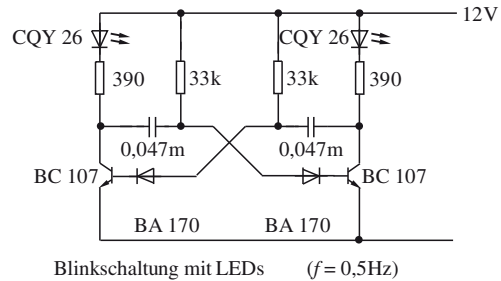


**Bild IX-19** Blinkerschaltung mit LEDs

Die Blinkerschaltung in Bild IX-19 ist in dieser Form verwendbar. Die Dioden vor der Basis der Transistoren haben die gleiche Funktion wie in Bild IX-17 beschrieben.

### 2.4 Triggerschaltungen

Als Schmitt-Trigger wird eine Kippschaltung bezeichnet, die beim Überschreiten einer bestimmten Eingangsspannung  $U_{E1}$  vom Ruhezustand in den Arbeitszustand kippt und erst beim Unterschreiten einer bestimmten Eingangsspannung  $U_{E2}$  wieder in den Ruhezustand zurückkippt. Schmitt-Trigger nach Bild IX-20 werden häufig als Schwellenwertschalter eingesetzt.

Wie bei jeder Kippschaltung erfolgt das Kippen stets sprunghaft, so dass auch bei einem beliebigen Verlauf der Eingangsspannung die Ausgangsspannung eines Schmitt-Triggers rechteckförmig ist und nur die beiden Spannungswerte  $U_{A \min}$  und  $U_{A \max}$  erscheinen, also ein digitales Signal vorliegt. Da das Kippen meistens schnell erfolgt, ergeben sich steile Flanken. Das Eingangssignal ist ein analoges Signal; der Schmitt-Trigger kann also als Analog-Digital-Wandler gelten.

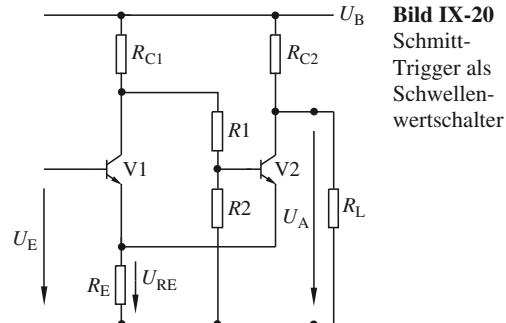


**Bild IX-20** Schmitt-Trigger als Schwellenwertschalter

Über den gemeinsamen Emitter-Widerstand  $R_E$  liegt eine gleichstrommäßige Mitkopplung zwischen den beiden Transistoren vor. Der Spannungsteiler aus  $R_1$  und  $R_2$  muss so dimensioniert sein, dass  $V_2$  mit der sich einstellenden Emitterspannung  $U_{RE}$  voll durchgesteuert ist. Die Ausgangsspannung  $U_{A \min}$  ist die Summe aus  $U_{RE} + U_{CE \text{ sat}}$ . Der Schmitt-Trigger befindet sich jetzt im Ruhezustand.

Er bleibt im Ruhezustand, solange die Eingangsspannung  $U_E < U_{E1}$  ist, wobei  $U_{E1}$  die obere Schwellspannung des Schmitt-Triggers darstellt. Die Mitkopplung bewirkt, dass der Schmitt-Trigger bei einer Erhöhung von  $U_E$  über  $U_{E1}$  hinaus sehr schnell vom Ruhezustand in den Arbeitszustand kippt, wobei  $V_1$  leitend und  $V_2$  gesperrt ( $U_{A \max} = U_B$ ) ist. Dieser Arbeitszustand bleibt solange erhalten, wie  $U_E > U_{E2}$  ist. Wird die Eingangsspannung  $U_E < U_{E2}$ , kippt der Schmitt-Trigger in den Ruhezustand zurück.

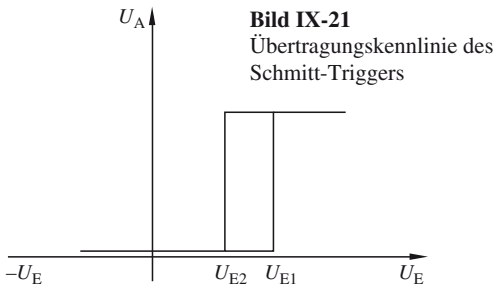


**Bild IX-21**  
Übertragungskennlinie des Schmitt-Triggers

Die Spannungsdifferenz zwischen  $U_{E1}$  und  $U_{E2}$  wird als *Schalthysterese* des Schmitt-Triggers bezeichnet. Der Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangsspannung wird in Bild IX-21 in Form der Übertragungskennlinie dargestellt. Die Flankensteilheit kann durch Parallelschalten eines Kondensators zu  $R_1$  verbessert werden. Sprunghafte Änderungen des Kollektorpotentials von Transistor  $V_1$  wirken sich so schneller auf  $V_2$  aus.

Bei dem *lichtabhängigen Schwellenwertschalter* nach Bild IX-22 wird der Schaltvorgang bei einer bestimmten Beleuchtungsstärke ausgelöst.

Solange auf die Fotodiode  $V_4$  kein Licht fällt, ist diese hochohmig,  $V_1$  leitend und damit  $V_2$  gesperrt. Fällt ausreichend Licht auf  $V_4$ , kippt der Trigger und das Relais  $K$  zieht an.

Als Hilfe zur Berechnung eines Schmitt-Triggers können folgende Überlegungen dienen:

*Ruhelage 1:*

$V_1$  gesperrt,  $V_2$  leitend mit  $U_E < U_{E1}$

*Einschaltspannung*

$$U_{E1} = U_{RE2} + U_{BE1} = I_{C2} \cdot R_E + U_{BE1} \quad (\text{IX.16})$$

$$\text{Kollektorstrom } I_{C2} = \frac{U_B - U_{CE \text{ sat}}}{R_{C2} + R_E} \quad (\text{IX.17})$$

$$\text{Ausgangsspannung } U_A = U_{RE2} + U_{CE \text{ sat2}} \quad (\text{IX.18})$$

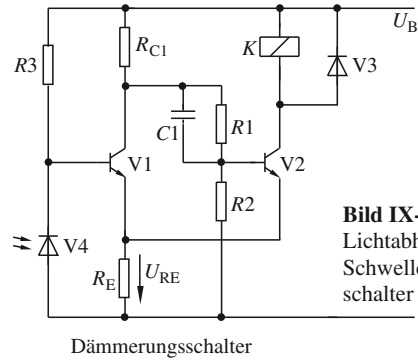


**Bild IX-22**  
Lichtabhängiger Schwellenwertschalter

*Ruhelage 2:*

$V_1$  leitend,  $V_2$  gesperrt mit  $U_E > U_{E2}$

*Ausschaltspannung*

$$U_{E2} = U_{RE1} + U_{BE1} = I_{C1} \cdot R_E + U_{BE1} \quad (\text{IX.19})$$

$$\text{Kollektorstrom } I_{C1} = \frac{U_B - U_{CE \text{ sat1}}}{R_{C1} + R_E} \quad (\text{IX.20})$$

$$\text{Ausgangsspannung } U_A = U_B \quad (\text{Leerlauf}) \quad (\text{IX.21})$$

Hilfreich zur Berechnung ist die Überlegung, dass beim Ausschalten für den Ausschaltmoment  $I_{C1} = I_{C2}$  sein muss!

$$\text{Hysteresespannung } \Delta U_E = U_{E1} - U_{E2} \quad (\text{IX.22})$$

### 3 Operationsverstärker als Schalter

Wird ein *OP ohne Gegenkopplung* betrieben, so ist seine Leerlaufverstärkung  $V_0$  voll wirksam. Legt man den OP nach Bild IX-23 mit dem invertierenden Eingang auf Masse und an den nichtinvertierenden Eingang eine variable Spannung, so ist diese Eingangsspannung  $U_E$  auch gleichzeitig die *Differenzspannung*  $U_D$ , die mit  $V_0$  verstärkt als Ausgangsspannung  $U_A$  an den Ausgang des OP gelangt.

Durch die sehr hohe Leerlaufverstärkung (beim idealen OP ist  $V_0 = \infty$ ) gelangt der OP schnell in die Sättigung, dass heißt die Ausgangsspannung erreicht schnell die positive oder negative Aussteuerengrenze des jeweiligen OP nach Bild IX-24.

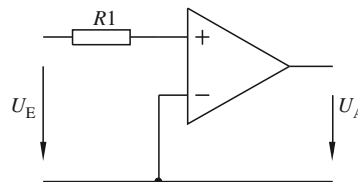
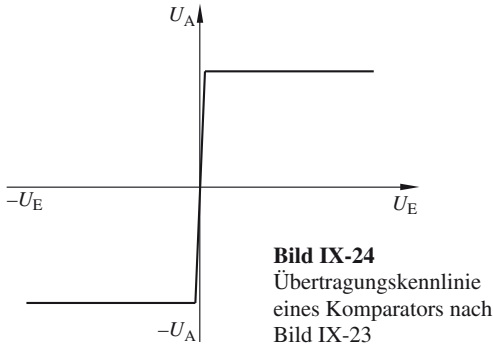


**Bild IX-23** Nichtinvertierender OP als Schalter

■ **Beispiel:** Die Aussteuerengrenze eines OP soll  $U_A = \pm 12 \text{ V}$  und die Leerlaufverstärkung  $V_0 = 10^5$  betragen.

Es gilt:  $U_A = U_D \cdot V_0 \Rightarrow U_D = U_A / V_0 = \pm 12 \text{ V} / 10^5 = \pm 0,12 \text{ mV}$



Demnach reicht eine Eingangsspannung von  $\pm 0,12 \text{ mV}$  aus, um den OP an die jeweilige Aussteuergrenze zu bringen. Der Signalwechsel am Ausgang findet also theoretisch immer beim Polaritätswechsel der Eingangsspannung statt. Der OP realisiert einen Komparator ohne Hysterese (Komparator = Spannungs-Vergleicher; to compare: engl. = vergleichen).

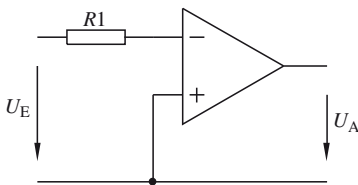
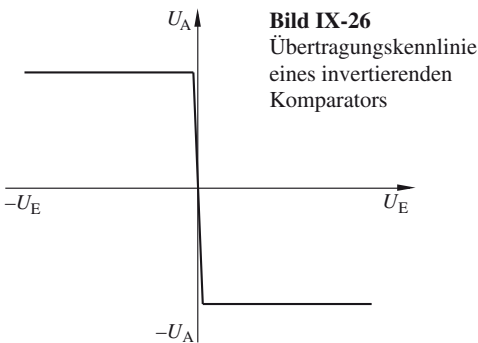


**Bild IX-25** Schaltung eines invertierenden Komparators



Natürlich ändert sich die Ausgangsspannung nicht in unendlich kurzer Zeit. Die Anstiegsgeschwindigkeit (slew rate) der Ausgangsspannung des OP 741 liegt zum Beispiel bei  $1 \text{ V}/\mu\text{s}$ , dass heißt, der Wechsel der Ausgangsspannung von der positiven zur negativen Aussteuergrenze (und umgekehrt) dauert im obigen Beispiel ca.  $24 \mu\text{s}$ . Außerdem muss eine zusätzliche „Erholzeit“ infolge der Übersteuerung des OP berücksichtigt werden.

Legt man nach Bild IX-25 den nichtinvertierten Eingang auf Masse und an den invertierten Eingang die Eingangsspannung nach nebenstehender Schaltung,

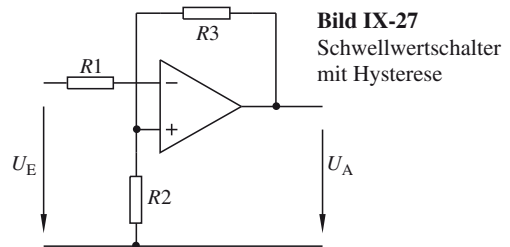
so kehren sich die oben dargestellten Überlegungen um (siehe Bild IX-26).

Der *Schaltpunkt* dieser Schwellwertschalter liegt also bei einer Spannung  $U_E$  nahe  $0 \text{ V}$ .

## 4 Kippschaltungen mit Operationsverstärker

### 4.1 Triggerschaltungen mit Operationsverstärker

Ein Schwellwertschalter ohne Hysterese ist in der Praxis kaum verwendbar, denn die dem eigentlichen Signal überlagerten Störspannungen führen zum mehrfachen Umschalten.

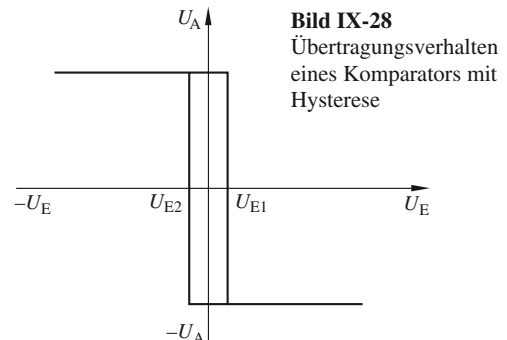


Durch Mitkopplung lassen sich Schaltungen realisieren, die diese Hysterese aufweisen. In der Schaltung nach Bild IX-27 wird die Spannung am Widerstand  $R_2$  mitgekoppelt. Weil die Eingangsspannung auf den invertierenden Eingang geführt wird, heißt diese Schaltung „Invertierender Komparator mit Hysterese“.

Die Ausgangsspannung kann nur zwei definierte Werte annehmen, nämlich  $U_A \approx \pm U_B$ .

$$\text{Mitkopplungsspannung } U_{R2} = U_B \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} \quad (\text{IX.23})$$

Wenn das Eingangssignal  $U_E$  den Wert von  $U_{R2}$  erreicht, kippt die Ausgangsspannung von  $+U_B$  nach  $-U_B$  um. Der Grund liegt darin, dass die Differenzspannung  $U_D$  ihren Nullpunkt durchläuft. Nun liegt der nichtinvertierende Eingang wegen des Spannungsteilers aus  $R_2$  und  $R_3$  auf einem negativen Potential, nämlich auf  $-U_{R2}$ .

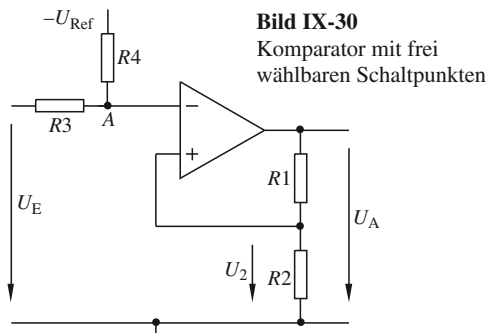
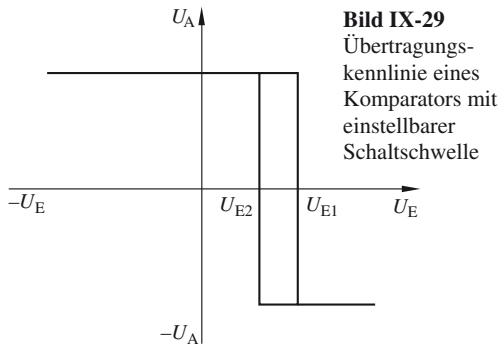


Wenn das Eingangssignal den Wert von  $-U_{R2}$  erreicht, kippt die Ausgangsspannung von  $-U_B$  nach  $+U_B$  um. Die rückgekoppelte Spannung  $U_{R2}$  des Spannungsteilers stellt also die Ein- und die Ausschaltschwelle des Komparators dar.

Das Übertragungsverhalten des Komparators ist in Bild IX-28 dargestellt. Die Schaltunkte liegen symmetrisch um das Nullpotential. Der Betrag der Schalthysterese ist also die Summe aus  $U_{E1}$  und  $U_{E2}$  und lässt sich berechnen als

$$\text{Hysteresespannung } U_{Hy} = 2 \cdot U_B \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} \quad (\text{IX.24})$$

Sollen die Schaltunkte nicht symmetrisch um das Nullpotential liegen, muss der jeweils benutzte Eingang auf den gewünschten Spannungswert (Referenzspannung) mit umgekehrtem Vorzeichen gelegt (vorspannt) werden.



Die Ausgangsspannung  $U_A$  ist wiederum die positive oder negative Aussteuerung des OP.

Die Übertragungskennlinie nach Bild IX-29 zeigt das prinzipielle Schaltverhalten. Der OP in der Schaltung nach Bild IX-30 schaltet um, wenn das Potential am Punkt A den Wert Null durchläuft. Mit den Widerständen R1 und R2 sind die Ein- und Ausschaltpunkte im Zusammenhang mit R3 und R4 einstellbar. In dieser Schaltung sind die Schaltunkte völlig frei wählbar.

■ **Beispiel:** Ein invertierender Komparator (mit idealem OP) soll für die Schaltpunkte  $U_{E1} = 10 \text{ V}$  und  $U_{E2} = 8 \text{ V}$  berechnet werden. Die Aussteuerungen des OP liegen bei  $U_A = \pm 12 \text{ V}$ .  $R_3 = R_4 = 100 \text{ k}\Omega$  und  $R_2 = 33 \text{ k}\Omega$ .

Zu bestimmen sind die Referenzspannung, die Mitkopplungsspannung  $U_2$  und der Wert von R2.

#### Lösung:

In zwei Schaltbildern sind die Potentiale unmittelbar vor dem Signalwechsel von  $U_A$  einzutragen. Daraus kann man erkennen:

Die Hysterese beträgt 2 V. Die Spannung am Punkt A verändert sich nur um 1 V infolge der Spannungsteilung durch R3 und R4, wenn sich die Eingangsspannung von 10 V auf 8 V ändert.

Dieselbe Spannungsänderung muss durch die Mitkopplungsspannung  $U_2$  erfolgen; somit muss  $U_2 = 0,5 \text{ V}$  sein.

Damit kann R2 als Teilerwiderstand berechnet werden. Wegen  $R_3 = R_4$  und theoretisch unendlich großem OP-Eingangswiderstand ist  $U_{R3} = U_{R4}$ .

Mit  $U_D = 0 \text{ V}$  gilt im Schalt Augenblick:  $U_{R3} = 10 \text{ V} - 0,5 \text{ V} = 9,5 \text{ V}$ . Damit ergibt sich als Referenzspannung  $U_{Ref} = -9 \text{ V}$ !

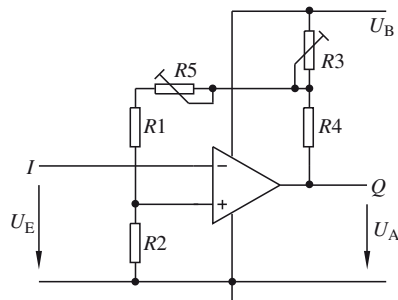
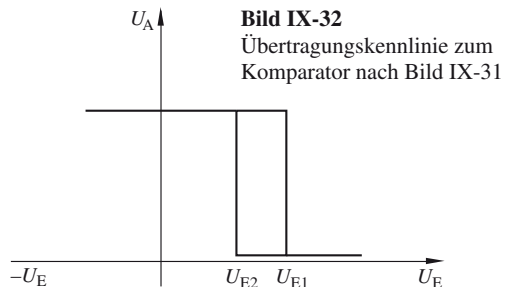


**Bild IX-31** Komparator mit einstellbarer Schaltschwelle und einstellbarer Hysterese



Die Schaltung nach Bild IX-31 zeigt einen invertierenden Komparator, bei dem Schaltschwelle und Hysterese mit Hilfe der Potentiometer R5 und R3 eingestellt werden. Der OP liegt an einer unsymmetrischen Versorgungsspannung, so dass die Ausgangsspannung  $U_A$  entsprechend der Übertragungskennlinie nach Bild IX-32 maximal zwischen 0 V und  $U_B$  springen kann.

## 4.2 Astabile Kippstufe mit Operationsverstärker

Beschaltet man den Eingang eines invertierenden Komparators (mit Hysterese) nach Bild IX-33 mit einem RC-Glied, das seine Spannung vom Ausgang des OP bezieht, so erhält man eine *astabile Kippstufe*.

Die Mitkopplungsspannung  $U_2$  hat dieselbe Polarität wie die Ausgangsspannung und wird durch den Spannungsteiler erstellt.

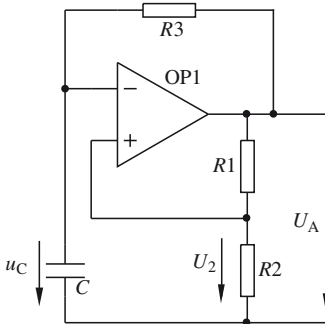


**Bild IX-33**  
Astable Kippstufe  
mit OP

Der Kondensator lädt sich über den Widerstand  $R_3$  auf die Spannung  $U_A$  auf. Erreicht die Kondensatorspannung  $u_C$  den Wert von  $U_2$ , so kippt der Ausgang, und der Kondensator lädt sich in die andere Richtung um. Dieser Vorgang wiederholt sich kontinuierlich.

$$\text{Impulsdauer } t_i = R_3 \cdot C_1 \cdot \ln \frac{U_A + U_2}{U_A - U_2} \quad (\text{IX.25})$$

Da  $t_i = t_p$  ist und somit  $T = 2 \cdot t$  und außerdem  $U_2$  ersetzbar ist, erhält man für die

Periodendauer

$$T = 2 \cdot R_3 \cdot C_1 \cdot \ln \left( 1 + 2 \cdot \frac{R_2}{R_1} \right) \quad (\text{IX.26})$$

Mit  $f = 1/T$  lässt sich die *Taktfrequenz der astabilen Kippstufe* berechnen. Die Ausgangsspannung ist eine Rechteckspannung mit positiver und negativer Amplitude (Rechteckgenerator).

### 4.3 Monostabile Kippstufe mit Operationsverstärker

Schaltet man parallel zum Kondensator  $C_1$  nach Bild IX-34 eine Diode  $V_1$ , dann sorgt die Schleusenspannung  $U_S$  der Diode dafür, dass der Kondensator sich nur in einer Richtung bis zur Mitkopplungsspannung  $U_2$  laden kann (Voraussetzung:  $U_2 > U_S$  gewählt). Die Schaltung kann nur nach einem der beiden Ladevorgänge kippen. Es handelt sich also um eine *monostabile Kippstufe*.

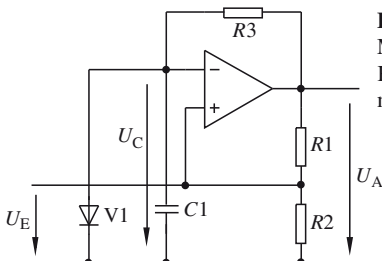


**Bild IX-34**  
Monostabile  
Kippstufe  
mit OP

Die Ausgangsspannung wird für eine bestimmte Zeit  $t_i$  auf einem bestimmten Pegel gehalten. (*Timer, Zeitglied*).

Die *Polarität* der Ausgangsspannung wird von der *Richtungslage der Diode  $V_1$*  bestimmt.

$$\text{Impulsdauer } t_i = R_3 \cdot C_1 \cdot \ln \frac{U_A + 0,7 \text{ V}}{U_A - U_2} \quad (\text{IX.27})$$

Abgerufen wird hier die Zeit  $t_i$ , indem man für einen Moment den nichtinvertierenden Eingang des OP negativer als den invertierenden Eingang macht. Dadurch kippt der OP am Ausgang auf  $-U_A$ , der nichtinvertierende Eingang wird somit auf  $-U_2$  gelegt, und der Kondensator lädt sich nach Bild IX-35 um. Wird  $u_C = -U_2$ , so kippt der OP erneut.

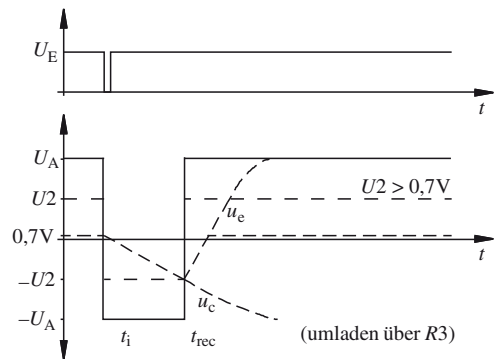


**Bild IX-35** Liniendiagramm einer monostabilen Kippstufe

Der Kondensator lädt sich aber jetzt nur auf die Schleusenspannung  $U_S$  der Diode, so dass ein weiterer Kippvorgang nicht ausgelöst wird. Wird die Diode umgepolt, so ist der Ablauf genau umgekehrt zu verfolgen. Die Zeit  $t_{rec}$ , die der Kondensator benötigt, um sich von  $-U_2$  auf  $U_S$  aufzuladen, sollte bis zum nächsten Abrufen des Zeitgliedes verstreichen, da sonst  $t_i$  nicht immer gleich ist.

### 4.4 Bistabile Kippstufe mit Operationsverstärker

Eine *bistabile Kippstufe* mit OP stellt die Schaltung nach Bild IX-36 dar.

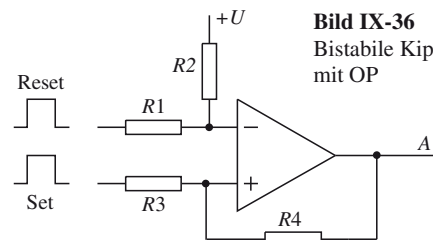


**Bild IX-36**  
Bistabile Kippstufe  
mit OP

Die Wirkungsweise der Schaltung ergibt sich aus dem Aufbau. Der Schaltungsaufwand ist sehr gering gegenüber dem Aufwand, der betrieben werden muss bei der Realisierung einer solchen Schaltung mit Transistoren. Auch die Schaltschnelligkeit des OP ist deutlich höher.

5 Zeitgeber 555

Monostabile und astabile Kippschaltungen lassen sich für zahlreiche Anwendungen mit einer integrierten Standardschaltung realisieren, die als Zeitgeber mit der Typenbezeichnung IC 555 (Bild IX-37) bekannt ist.

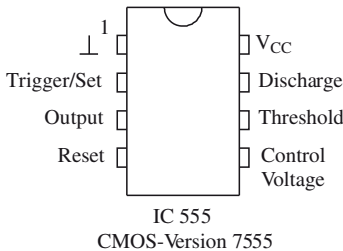


Bild IX-37  
Belegungsplan  
eines IC 555

Der Timer-IC 555 ist in der Schaltung nach Bild IX-38 als *monostabile Kippstufe* beschaltet. Die Verweilzeit  $t_i$  hängt nur von dem zeitbestimmenden RC-Glied und nicht von der Betriebsspannung des IC ab. Pin 2 ist der „Set“-Eingang, der auf die negative Flanke des Set-Signals reagiert.

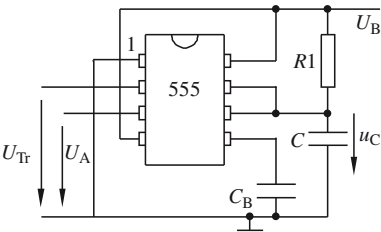


Bild IX-38 Timer-IC 555 als monostabile Kippstufe

An Pin 5 ist stets ein Kondensator  $C_B = 10 \text{ nF}$  gegen Masse zu schalten. Bei einer Versorgungsspannung von  $V_{CC} = +5 \text{ V}$  ist der Ausgang TTL-kompatibel; während der Verweilzeit  $t_i$  ist  $U_a \approx V_{CC}$ . Die Zeit kann zwischen  $1 \mu\text{s}$  und ca. 15 min liegen.

Verweilzeit  $t_i = R1 \cdot C \cdot \ln 3$  (IX.28)

Die einfache monostabile Kippstufe ist in der Schaltung nach Bild IX-39 zu einer *nachtriggerbaren monostabilen Kippstufe* erweitert worden. Gibt man innerhalb der Verweilzeit  $t_i$  einen erneuten Impuls mit negativer Flanke auf den Trigger (Pin 2), so wird dadurch das Rückkippen der KS verzögert. Bei einer schnellen Folge von Impulsen kann dadurch das Rückkippen der KS beliebig verzögert werden.

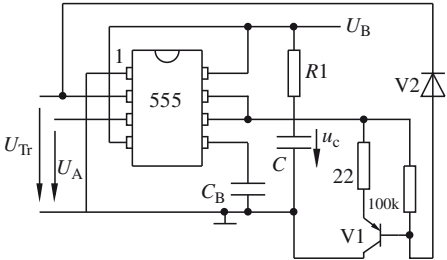


Bild IX-39 Nachtriggerbarer Timer mit dem IC 555

Das „Nachtriggern“ wird solange fortgesetzt, bis eine ausreichend lange Impulslücke auftritt. Die *Verweilzeit*  $t_i'$  nach dem letzten Impuls hängt allerdings auch von  $V_{CC}$  ab. Der IC 555 ist auch als astabile Kippstufe einsetzbar. Während der Impulsdauer  $t_i$  ist die Ausgangsspannung  $U_a \approx V_{CC}$ . Impulsdauer  $t_i$  und Pausendauer  $t_p$  sind unabhängig voneinander einstellbar.

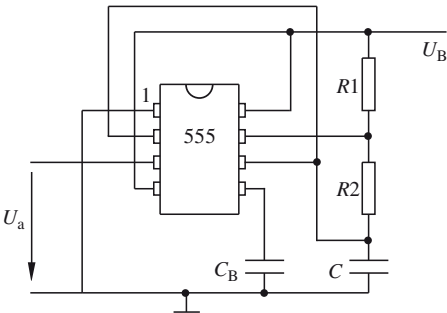


Bild IX-40 Astabile Schaltung mit dem IC 555

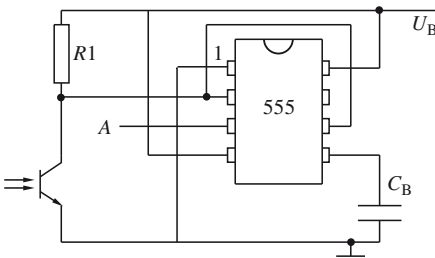


Bild IX-41 Lichtabhängiger Trigger mit dem IC 555

Für die astabile Schaltung nach Bild IX-40 gelten folgende Regeln:

Impulsdauer  $t_i = (R_1 + R_2) \cdot C \cdot \ln 2$  (IX.29)

Pausendauer  $t_p = R_2 \cdot C \cdot \ln 2$  (IX.30)

Als *Trigger* wird der IC 555 in der Schaltung nach Bild IX-41 verwendet. Fällt Licht auf den Fototransistor, wird er niederohmig, und die abfallende Flanke triggert den IC 555, der aufgrund der Ausgangsspannung  $U_a \approx V_{CC}$  und des Ausgangsstroms (max. 200 mA) unmittelbar ein Relais schalten könnte.



## 6 Trigger TCA 345 A

Neben einer Vielzahl an Triggern, z.B. aus der TTL-Typenreihe 74xx und der CMOS-Typenreihe 40xx, gibt es auch andere Trigger-IC-Typen. Der TCA 345 A nach Bild IX-42 ist einfach in eine Schaltung zu integrieren und durch die Auswahl der Versorgungsspannung  $U_B$  leicht entsprechend dem

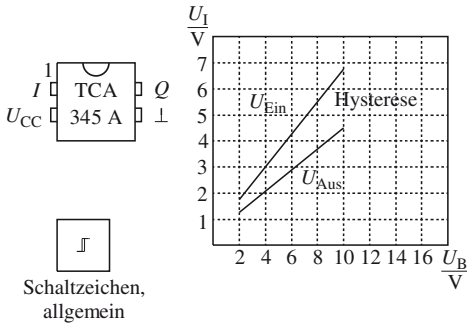


**Bild IX-42** TCA 345 mit Belegungsplan und Übertragungskennlinie

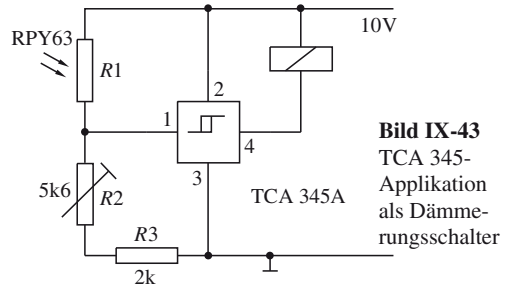


**Bild IX-43**  
TCA 345-A  
Applikation  
als Dämme-  
rungsschalter

zugehörigen Diagramm auf bestimmte Schwellwerte und zugehörige Hysteresespannungen einzustellen.

Die Schaltung nach Bild IX-43 zeigt einen Dämmerungsschalter mit dem LDR RPY 63 und dem TCA 345 A.

Die Schaltung wird mit dem Poti R2 so abgeglichen, dass bei Tageslicht (LDR niederohmig) die Eingangsspannung des TCA größer als  $U_{Ein}$  ist, so dass der Ausgang (Pin 4) auf 10 V liegt. Dadurch wird ein Schalten des Relais verhindert. Nach Einbruch der Dunkelheit unterschreitet die Eingangsspannung den Wert von  $U_{Aus}$  und das Relais zieht an.

## X Oszillatoren

### 1 Allgemeines

Oszillatoren sind *elektronische Schwingungserzeuger*. Sie dienen zur Erzeugung von *ungedämpften sinusförmigen Schwingungen*. Einsatzgebiete liegen vor in Sendern (Erzeugung der Hochfrequenz), Empfängern (Bildung der Zwischenfrequenz), Messgeräten (Sinus-, Rechteckgeneratoren) und elektronischen Musikinstrumenten (Synthesizer).

Oszillatoren bestehen aus einem Verstärker und einem *Rückkopplungsnetzwerk*, das meistens eine *Mitkopplung* darstellt. Diese Rückkopplung muss bestimmte Bedingungen erfüllen, damit Sinusschwingungen entstehen.

Das Rückkopplungsnetzwerk besteht aus einem Resonator und einer Anpassungsschaltung. Unter einem Resonator ist ein schwingungsfähiges Netzwerk, zum Beispiel ein Schwingkreis oder ein Schwingquarz, zu verstehen, das mit seiner Eigenfrequenz die Schwingfrequenz des Oszillators bestimmt. Da ein Resonator normalerweise verlustbehaftet ist, würde nach dem Anschwingen die Ausgangsamplitude exponentiell abnehmen, so dass eine gedämpfte Schwingung statt der gewünschten ungedämpften Schwingung zustande käme. Die Verluste der Schaltung müssen also durch einen Verstärker kompensiert werden.

Deshalb wird ein Teil der Ausgangsgröße (Spannung oder Strom) auf den Resonator zurückgeführt, so dass die Schwingung des Resonators erneut angestoßen wird (Selbsterregung).

Eine Selbsterregung kann nur bei einer Phasengleichheit von Eingangs- und Ausgangsgröße entstehen, dass heißt, es muss eine Mitkopplung vorliegen (Phasenbedingung).

Eine Mitkopplung hat als generelle Tendenz die Übersteuerung des Verstärkers zur Folge und liefert keine sinusförmige Ausgangsspannung mehr. Es muss also eine Amplitudenbegrenzung vorgenommen werden.

Bildet man das Verhältnis von Ausgangsspannung  $u_a$  zur Eingangsspannung  $u_e$  und nennt diese Verstärkung  $v$ , so kann man auch das Verhältnis von rückgekoppelter Spannung  $u_r$  zur Ausgangsspannung  $u_a$  bilden und nennt dieses Verhältnis Kopplungsfaktor  $K$ .

$$\text{Grundbedingung} \quad v = \frac{u_a}{u_e} \quad u_r = K \cdot u_a \quad (\text{X.1})$$

Das Produkt  $K \cdot v$  bezeichnet man als *Ringverstärkung*. Die Ringverstärkung muss mindestens gleich eins sein ( $K \cdot v = 1$ ), damit die Selbsterregung einsetzen kann (Amplitudenbedingung). Dieser Mindestwert reicht aus, um eine bestehende Schwingung zu erhalten (ungedämpfte Schwingung).

Ist die Ringverstärkung  $K \cdot v < 1$ , kommt keine Schwingung zustande oder eine vorhandene Schwingung „reißt“ ab.

Ist die Ringverstärkung  $K \cdot v > 1$ , schaukelt sich die Amplitude der Schwingung auf, und es treten durch Übersteuerung Verzerrungen auf.

Soll ein Oszillator anschlagen, muss die Ringverstärkung  $K \cdot v > 1$  sein; nach dem Anschlagen jedoch muss sich der Verstärkungs- oder Kopplungsfaktor mit wachsender Amplitude „automatisch“ auf  $K \cdot v = 1$  verringern.

Sind die Schwingungsbedingungen nur für eine Frequenz erfüllt, schwingt der Verstärker nur auf dieser einen Frequenz; die Schwingung ist sinusförmig.

## 2 Sinusgeneratoren (RC-Oszillatoren)

Bei sehr hohen Ansprüchen an die Genauigkeit der erzeugten Frequenz wird als frequenzbestimmendes Bauteil anstelle des Schwingkreises ein Schwingquarz eingesetzt. Die maximale Abweichung seiner Eigenschwingungen beträgt etwa 0,0001 %.

RC-Oszillatoren werden vorzugsweise für den Frequenzbereich von 0,01 Hz bis 500 kHz verwendet, da LC-Oszillatoren in diesem Bereich nur durch „unhandlich“ große Induktivitäten (schlechte Güte, relativ hohes Gewicht) und Kapazitäten realisiert werden können.

Man unterscheidet zwei Arten von RC-Oszillatoren: Phasenschieber- und Wien-Brücken-Oszillatoren.

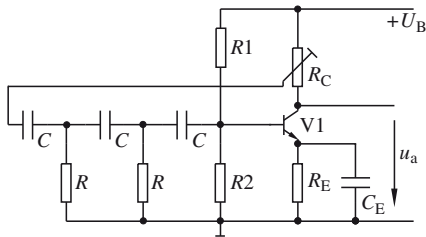


**Bild X-1** Prinzip des Phasenschiebersoszillators

Das Prinzip des Phasenschiebersoszillators lässt sich nach Bild X-1 erläutern. Die Ausgangsspannung  $u_a$  einer Emitterschaltung ist gegenüber der Eingangsspannung um  $180^\circ$  phasenverschoben. Um die Phasenbedingung (Mitkopplung) zu erfüllen, muss das Rückkopplungsnetzwerk ebenfalls eine Phasenverschiebung von  $180^\circ$  zwischen der Ausgangsspannung des Verstärkers und der rückgekoppelten Teilspannung erzeugen.

Mindestens drei in Reihe geschaltete RC-Glieder sind erforderlich, um diese Phasenverschiebung zu erzeugen, da jedes Glied eine Phasenverschiebung von weniger als  $90^\circ$  bewirkt. Im allgemeinen werden alle Kondensatoren und Widerstände der Phasenschieberkette gleich groß gemacht. Eine Selbsterregung tritt ein, wenn die am Poti  $R_C$  abgegriffene Rückkopplungsspannung groß genug ist.

Der Oszillator schwingt mit der Frequenz  $f_0$ , für die diese Phasenschieberkette insgesamt genau eine Phasenverschiebung von  $180^\circ$  bewirkt. Die Phasenverschiebung der einzelnen RC-Glieder ist nicht gleich groß, da jeweils das folgende Glied das vorausgehende belastet.

*Frequenz der Ausgangsspannung*

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{6} \cdot 2\pi \cdot R \cdot C} \quad (\text{X.2})$$

Die Widerstände  $R_1$ ,  $R_2$  und  $r_{BE}$  ergeben sich durch den Verstärker. Deshalb sind die Widerstände  $R$  danach zu dimensionieren.

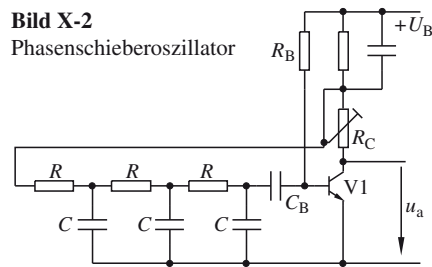
*Widerstandsbestimmung*  $R = R_1 \parallel R_2 \parallel r_{BE} \quad (\text{X.3})$

*Rückkopplungsfaktor*  $K = \frac{1}{29} \quad (\text{X.4})$

Um die Amplitudenbedingung zu erfüllen, muss der Verstärkungsfaktor des Verstärkers generell  $\rightarrow v \geq 29$  sein.

**Bild X-2**

Phasenschiebersoszillator



Die Kondensatoren und Widerstände der Phasenschieberkette können auch gemäß der Schaltung nach Bild X-2 vertauscht werden, ohne dass sich die Wirkungsweise grundsätzlich ändert. Die Amplitudenbegrenzung erfolgt hier durch eine Verstärkungsregelung. Bei großer Amplitude lädt sich der Kondensator  $C_B$  aufgrund der Gleichrichterwirkung der Basis-Emitter-Strecke auf. Dadurch kommt es zu einer Arbeitspunktverschiebung des Transistors, wodurch die Verstärkung geringer wird, bis die Ringverstärkung  $K \cdot v = 1$  ( $v = 29$ ) ist.

Bei Phasenschiebersoszillatoren ist die Amplitudenstabilisierung sehr kritisch, da die Abstimmemente

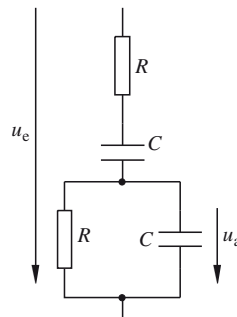


**Bild X-3**

Wien-Brücke als Rückkopplungsnetzwerk

$R$  oder  $C$  synchron veränderbar sein müssen. Die Frequenzkonstanz dieser Schaltung genügt selten den Ansprüchen moderner Schaltungen. Aus diesen Gründen werden Phasenschieberschaltungen in der Praxis wenig angewendet.

Eine wesentliche Verbesserung ergibt sich bei Verwendung einer *Wien-Brücke* als Rückkopplungsnetzwerk. Die Wien-Brücke nach Bild X-3 ist ein frequenzabhängiger Spannungsteiler. Die Schaltung besteht aus der Reihenschaltung eines RC-Tiefpasses mit einem RC-Hochpass, wobei die Ausgangsspannung  $u_a$  am Hochpass abgegriffen wird.

Bildet man mathematisch das Verhältnis von Ausgangsspannung  $u_a$  zur Eingangsspannung  $u_e$ , ergibt sich für eine bestimmte Frequenz eine maximale Ausgangsspannung und ein Phasenverschiebungswinkel von  $0^\circ$  zwischen Aus- und Eingangsspannung.

Daraus ergibt sich bei  $\frac{u_e}{u_a} = 3 + j \frac{(\omega RC)^2 - 1}{\omega RC}$  und

Trennung von Real- und Imaginärteil die

$$\text{Resonanzfrequenz } f_0 = \frac{1}{2\pi \cdot RC} \quad (\text{X.5})$$

und die maximale

$$\text{Ausgangsspannung bei } f_0 \quad U_{\text{amax}} = \frac{1}{3} U_e \quad (\text{X.6})$$

Wird ein Oszillator mit der Wien-Brücke aufgebaut, darf der Verstärker zwischen Aus- und Eingangsspannung keine Phasenverschiebung haben. Es müssen also zwei Emitterschaltungen in Reihe verwendet werden. Bei Verwendung eines Operationsverstärkers muss die Rückkopplung auf den nichtinvertierenden Eingang erfolgen. Die Schaltung nach Bild X-4 zeigt einen Wien-Brücken-Oszillator mit OP, bei dem die rückgekoppelte Spannung  $u_r$  auf den nichtinvertierenden Eingang gelegt ist. Die Ausgangsspannung  $u_a$  der Schaltung ist hier die Eingangsspannung der Wien-Brücke.

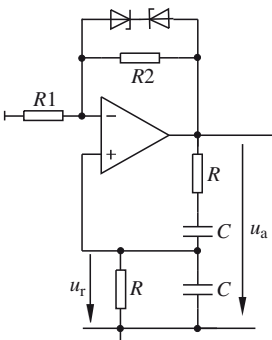


**Bild X-4**  
Wien-Brücken-  
Oszillator mit OP

Die Verstärkung  $V_u$  des OP kann mit den Widerständen  $R_1$  und  $R_2$  eingestellt werden und muss, da der Kopplungsfaktor nach Gleichung X.6 bekannt ist, zum Anschwingen größer als 3 sein.

Mit  $R_2 = 22 \text{ k}\Omega$  und  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$  ergibt sich eine Verstärkung  $V_u = 3,2$ , die zum Anschwingen ausreicht. Die gegeneinander geschalteten Z-Dioden parallel zum Widerstand  $R_2$  dienen hier zur Amplitudenbegrenzung, führen also die Verstärkung auf  $V_u = 3$  zurück.

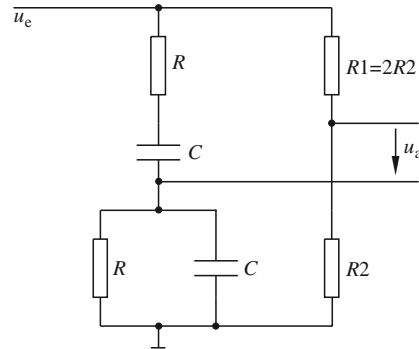


**Bild X-5** Wien-Robinson-Brücke  
als Rückkopplungsnetzwerk

Bessere Eigenschaften als die Wien-Brücke zeigt ihre Weiterentwicklung zur Wien-Robinson-Brücke als Rückkopplungsnetzwerk nach Bild X-5. Der Wien-Brücke ist ein fester, frequenzunabhängiger ohmscher Spannungsteiler parallel geschaltet, dessen Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  im Verhältnis 2:1 stehen. Im Resonanzfall ist die Ausgangsspannung dieser Brücke  $u_a = 0 \text{ V}$ . Das Verhalten der Wien-Robinson-Brücke kommt dem eines idealen Schwingkreises wesentlich näher.

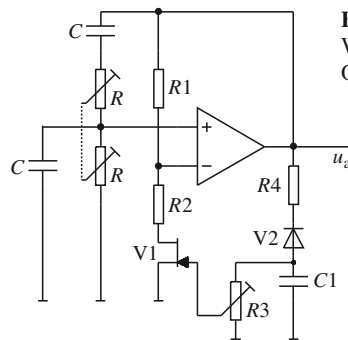


**Bild X-6**  
Wien-Robinson-  
Oszillator mit OP

Die Wien-Robinson-Brücke muss etwas verstimmt betrieben werden, da ihre Ausgangsspannung im Resonanzfall gleich Null ist, also auch die Rückkopplungsspannung gleich Null wäre. Die Verstärkerstufe muss eine relativ große Verstärkung haben. Die Schaltung nach Bild X-6 zeigt einen einfachen Wien-Robinson-Oszillator.

Der Widerstand  $R_2$  nach Bild X-5 ist hier ersetzt durch die Reihenschaltung des Widerstandes  $R_2$  mit dem FET V1. Das Netzwerk aus Diode V2, Kondensator C1 und Poti R3 bewirkt eine Stabilisierung der Ausgangsamplitude.



# XI Schaltungstechniken

## 1 Integrierte Schaltungen

Integrierte Schaltungen (IC = integrated circuit) werden in weiter zunehmender Zahl auf den Markt gebracht. Niedrige Herstellungskosten bei großen Stückzahlen, hohe Zuverlässigkeit, geringer Platzbedarf und hohe Arbeitsgeschwindigkeiten sind die wesentlichen Vorteile der integrierten Schaltungen im Vergleich zu Schaltungen mit diskreten Bauelementen.

Die Bauelemente eines IC und ihre Verdrahtung werden in einem gemeinsamen Fertigungsprozess auf einem *einkristallinen Halbleiterplättchen* aus Silizium (Chip) hergestellt. Diese Chips nach Bild XI-1 sind nur wenige Quadratmillimeter groß und werden in ein Gehäuse eingebaut, wobei die Chipanschlusskontakte durch sehr dünne Drähte mit den „Pins“ des Gehäuses verbunden werden. Aus Kostengründen werden möglichst viele Chips auf einer Siliziumscheibe (wafer) untergebracht.

Die Komplexität der Schaltungen auf den Chips steigt stetig mit weiter voranschreitender Integrationsdichte,

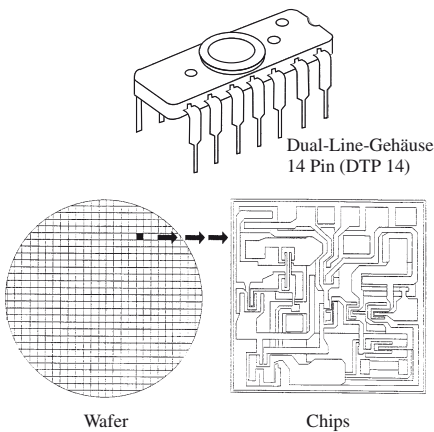


**Bild XI-1** Wafer, Chip und Bauform eines IC

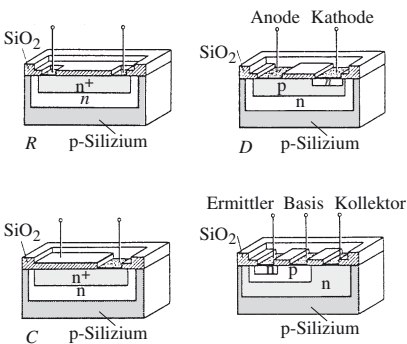


**Bild XI-2** Schichtenfolge der Bauelemente

also der Anzahl der Transistorfunktionen je Chip. Möglich wird das durch die bereits in Abschnitt II.4 beschriebene *Planartechnik*.

Bei den *monolithisch integrierten Schaltungen* sind alle zum Funktionieren erforderlichen Bauelemente der Schaltung, die auf einem konventionellen Vorbild mit diskreten Bauelementen beruht, in einen Halbleiterkristall hineindotiert, auch Bauelemente wie Kondensatoren, Dioden, Transistoren oder Widerstände nach Bild XI-2. Neben bipolaren Transistoren werden auch MOS-FET in Planartechnik (Abschnitt IV.2) in monolithisch integrierten Schaltungen eingebracht. Im Kristall müssen die Einzelbauelemente durch Isolierschichten voneinander getrennt sein.

Überwiegend werden npn-Transistoren in den IC realisiert, da sie bessere elektrische Eigenschaften haben und einfacher herstellbar sind als pnp-Transistoren. Die besondere Anordnung der einzelnen dotierten Bereiche ergibt sich aus technologischen Notwendigkeiten. Die Kontakte können nur auf der Siliziumoberfläche angebracht werden, und die Transistoren sind von p-dotierten Gebieten zur gegenseitigen Isolierung umgeben, so dass sich immer in Sperrrichtung liegende pn-Übergänge ergeben.

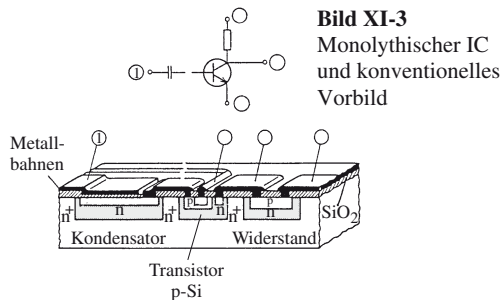


**Bild XI-3** Monolithischer IC und konventionelles Vorbild

Bild XI-3 zeigt eine einfache Schaltung mit diskreten Bauelementen und ihre Realisierung in monolithisch integrierter Technik.

Als *Isolationsschicht* zwischen der Siliziumoberfläche und den Leiterbahnen dient eine  $\text{SiO}_2$ -Schicht, die durch thermische Oxydation der Siliziumoberfläche erzeugt wird. Weitere Leiterbahnschichten können auf ähnliche Weise darübergelegt werden, während Löcher in der  $\text{SiO}_2$ -Schicht zum Anschluss von Kontakten eingebracht werden. Die Leiterbahnen bestehen im wesentlichen aus Aluminium.

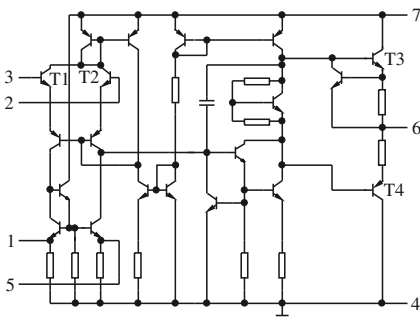
Auch bei den integrierten Schaltungen unterscheidet man zwischen *Bipolarschaltungen* und *MOS-Schaltungen* und ferner zwischen *integrierten Analog- und Digitalschaltungen*. Die Herstellungsverfahren sind zwar weitgehend identisch, aber während man bei Analogschaltungen mit einigen hundert Einzelbauelementen auf einem Chip auskommt, werden bei Digitalschaltungen einige hunderttausend

Tabelle XI-1 Integrationsgrade ( Fa. Siemens)

| Integrationsgrad                    | Anzahl der Funktionen | Mittlere Anzahl der Transistoren | System                                              | Mittlerer Flächenbedarf in mm <sup>2</sup> |
|-------------------------------------|-----------------------|----------------------------------|-----------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| SSI (small scale integration)       | 2–20                  | 100                              | bipolar digital + analog                            | 3                                          |
| MSI (medium scale integration)      | 20–100                | 500                              | bipolar digital + analog<br>unipolar digital MOS-IC | 8                                          |
| LSI (large scale integration)       | 100–50 000            | <100 000                         | bipolar digital + analog<br>unipolar digital MOS-IC | 20                                         |
| VLSI (very large scale integration) | >50 000               | >100 000                         | unipolar digital<br>CMOS-IC                         | >30                                        |

Einzelbauelemente benötigt. Die Frage, ob *bipolare* oder *unipolare Systeme* günstiger sind, lässt sich nur über Nebenbedingungen klären, wie zum Beispiel die Integrationsdichte und die beabsichtigte Anwendung.

Integrierte Schaltkreise in *Bipolar-Technik* kommen als *Analog- und Digitalschaltungen* zur Anwendung, im ersten Fall als Verstärker (siehe Abschnitt VI) und im zweiten Fall als Schalter (siehe Abschnitt IX). Als Vorteile gegenüber der MOS-Technik ist hier die Fähigkeit zu nennen, große Ströme zu treiben und die kurze Schaltzeit beziehungsweise die hohe Grenzfrequenz der bipolaren Transistoren.



Innenschaltung eines TL x741x

Bild XI-4 Innenbeschaltung eines Operationsverstärkers

Integrierte monolythische Schaltungen für analoge Anwendungen enthalten überwiegend widerstandsgekoppelte Verstärker ohne Koppelkondensatoren. Analogschaltungen setzen sich meist aus verhältnismäßig einfachen Grundschaltungen zusammen, wie sie in Abschnitt VI besprochen werden. Differenzverstärker werden aufgrund der Temperaturkompensation häufig verwendet. Die tatsächliche Innenbeschaltung ist für den Anwender nicht bedeutsam, jedoch wird der innere Funktionsablauf und die Wirkungsweise der Gesamtschaltung durch Block-

schaltbilder beschrieben. Die Komplexität der Innenbeschaltung eines einfachen Operationsverstärkers (Abschnitt VIII) zeigt die Schaltung nach Bild XI-4. Andere integrierte Analogschaltungen dienen Regelungszwecken, in der Energieelektronik zum Zünden von Thyristoren und Triacs oder sind für zahlreiche Anwendungen in Rundfunk- und Fernsehgeräten entworfen worden.

Spannungsregler (TDB 78xx), Zeitgeberschaltungen (TDB 555), Drehzahlregler (TCA 955) und viele mehr sind in der verfügbaren Bestellpalette enthalten.

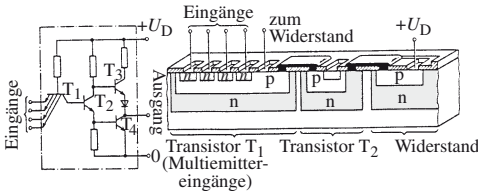


Bild XI-5 NAND-Gatter in TTL-Technik (Fa. Siemens)

Die integrierten Digitalschaltungen unterscheidet man nach der Ausführungsform der Grundgatter und spricht von *Logikfamilien*. Von den wichtigsten bipolaren Familien (TTL = transistor transistor logic; ECL = emitter coupled logic; I<sup>2</sup>L = integrated injection logic) werden zwei kurz behandelt (siehe Kapitel Datentechnik).

Bild XI-5 stellt ein NAND-Gatter in TTL-Ausführung dar. Die Eingänge des Gatters sind als mehrere Emmitter eines Transistors in der integrierten Schaltung erkennbar. Die einzelnen Bauelemente sind durch p-dotiertes Silizium voneinander getrennt.

Eine Weiterentwicklung dieser TTL-Technik zu höherer Integrationsdichte und verbesserten Schaltzeiten erbrachte die I<sup>2</sup>L-Technik. Über die zusätzlich integrierten *Komplementärtransistoren* nach Bild XI-6 bekommen die eigentlichen Transistoren einen konstanten Strom, so dass die Schaltung frei von größeren Stromschwankungen bleibt. Die rasche Änderung des



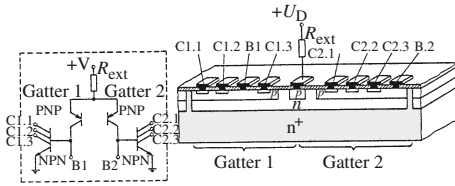


**Bild XI-6** NAND-Gatter in I<sup>2</sup>L-Technik (Fa. Siemens)

differentiellen Innenwiderstandes der Konstantstromquelle ergibt höhere Arbeitsgeschwindigkeiten. Wesentlichster Vorteil der I<sup>2</sup>L-Technik ist jedoch, dass ungefähr 11mal so viele Gatter auf einer bestimmten Fläche integriert werden können als bei der TTL-Technik.

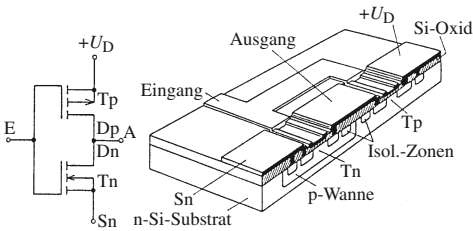


**Bild XI-7** Inverter in CMOS-Technik (Fa. Siemens)

Integrierte Schaltkreise in MOS-Technik bringen den großen Vorteil mit, dass ein MOS-Transistor fast leistungslos gesteuert wird (siehe Abschnitt IV.2). Der Stromkanal mit den Source- und Drain-Gebieten ist von den umgebenden p-Gebieten elektrisch isoliert. Da dieses auch beim Gate der Fall ist, stellt ein MOS-FET ein selbstisolierendes Bauelement dar, das nicht durch zusätzliche Maßnahmen im Chip von anderen Bauelementen isoliert werden muss. Dieser und weitere Effekte sorgen dafür, dass MOS-Schaltungen erheblich weniger Platz beanspruchen als gleichartige bipolare Schaltkreise. Die CMOS-Technik (C = complementary) ist heute die dominierende Technik bei den integrierten digitalen Schaltkreisen, weil sie leistungsarm ist und sehr hohe Integrationsdichten ermöglicht. Im Bild XI-7 ist erkennbar, dass eine Aluminiumschicht den gesamten Chip überzieht. Da direkte Kontaktierungen in den meisten Fällen nicht notwendig sind (isoliertes Gate), kann auf ausgeprägte Leiterbahnen verzichtet werden. Die Schaltung in Bild XI-7 zeigt einen Inverter in CMOS-Technik.

Die Aufteilung von integrierten Schaltungen in Standard-Schaltungen und in kundenspezifische Schaltungen ist fließend. Als Standard-Schaltungen werden IC bezeichnet, die jedem Anwender zugänglich sind und ohne weitere Abänderung verwendet werden können. Kundenspezifische Schaltungen sind IC, die im Auftrag von Anwendern auf der Grundlage spezieller technischer Vorgaben und Konzepte realisiert werden.

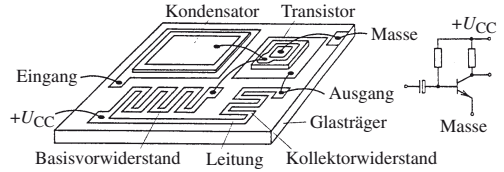


**Bild XI-8** Hybrid-Dünnschicht-Schaltkreis und realisierte Schaltung

Integrierte Schaltkreise in *Hybrid-Technik* (hybrid = gemischt) werden bei geringen Stückzahlen für kundenspezifische Schaltungen eingesetzt. Wenn eine Schaltung zu viele passive Schaltelemente (Kondensatoren) enthält, so dass eine monolithisch integrierte Schaltung nicht angezeigt erscheint, setzt man diese Technologie ebenfalls ein. Dabei werden die passiven Bauelemente auf eine isolierende Trägerplatte aus Glas oder Keramik aufgebracht. Sie existieren als Schicht auf der Oberfläche, Widerstände, zum Beispiel in Mäanderform. Transistoren und integrierte Halbleiterschaltkreise werden in Form von Chips auf die Trägerplatte gebracht und durch dünne Gold- und Silberdrähte mit den anderen Teilen der Schaltung verbunden. Bei der Gesamtherstellung ist zwischen der Dickschicht- und Dünnschichttechnologie zu unterscheiden. Erstere benutzt man für kleinere Serien, letztere für große Stückzahlen mit festen Schaltungsfunktionen. Dünnschichtschaltungen lassen sich für fast alle Anwendungsbereiche bis hin zur Höchstfrequenztechnik herstellen. Bild XI-8 zeigt als Beispiel einen Hybrid-Dünnschicht-Schaltkreis, der die dargestellte konventionelle Schaltung nachbildet.

## 2 SMD-Technik

Auch bei den Schaltkreisen mit diskreten Bauelementen geht der Trend zu kleineren Schaltungsaufbauten mit höherer Bestückungsdichte und zur Automatisierung der Fertigung. In gedanklicher Fortentwicklung der Hybrid-Technologie kommt man von der Einsteck- zur Oberflächenmontage. Dazu mussten neue Gehäuseformen entwickelt werden. Oberflächenmontierbare Bauelemente nennt man SMD (surface mounted devices). Die Fertigungstechniken zur Verarbeitung solcher Bauelemente nennt man SMT (surface mounted technology).

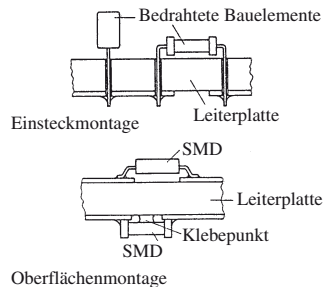


**Bild XI-9** Einsteck- und Oberflächenmontage



Die oberflächenmontierbaren Bauelemente werden auf der gleichen Seite der Platine aufgebracht, auf der sich die Leiterbahnen befinden. Deshalb lassen sie sich auf beiden Platinenseiten montieren (Bild XI-9), was bei der Einsteckmontage nur mit großem Aufwand zu bewerkstelligen ist. Die Bauelemente haben keine oder nur sehr kurze Anschlussdrähte und sind in ihren Abmessungen relativ klein. Die Platine muss nicht mit Bohrlöchern für die Bestückung versehen werden. Es sind alle Leiterplattenmaterialien geeignet; sowohl Keramiksubstrate als auch flexible Träger werden eingesetzt. Die Leiterplatten können verkleinert werden, und es ergeben sich verbesserte Hochfrequenzeigenschaften.

Als Gesamtvorteile werden genannt: Miniaturisierung und Rationalisierung bei höherer und gleichmäßiger Qualität sowie Zuverlässigkeit.

Allerdings werden sehr hohe Anforderungen an die Positioniergenauigkeit und Zuverlässigkeit der Bestückungsautomaten und die Löt-(Klebe-)verfahren gestellt.

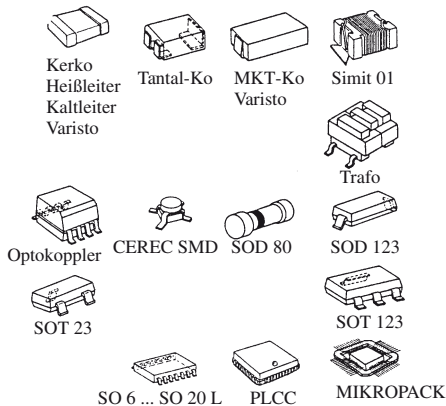


**Bild XI-10** Gebräuchliche SMD-Gehäuse

Die neuentwickelten Gehäuseformen müssen den Anforderungen hinsichtlich geringer Abmessungen, geeigneter Lötanschlüsse, hoher Lötwärmebeständigkeit, automatengerechter Verpackung und automatischer Bestückbarkeit gerecht werden. Bild XI-10 zeigt einige bei der Fa. Siemens gefertigte SMD-Gehäuseformen. Nahezu alle diskreten aktiven und passiven Bauelemente sowie zahlreiche integrierte Schaltungen gibt es mittlerweile in SMD-Gehäusen. Als Verpackungsart setzt sich zunehmend der Gurt gegenüber dem Magazin durch. Einige Magazinformen zeigt Bild XI-11.

Für die SMD-Technik mussten neue Layoutregeln entwickelt werden, in denen berücksichtigt wird, wie die Platine gefertigt, geprüft, repariert und gewartet werden soll.

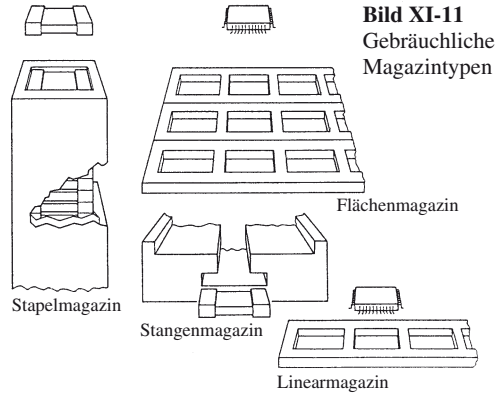


**Bild XI-11**  
Gebräuchliche  
Magazintypen

Bei den geringen Abmessungen der Bauteile und der großen Packungsdichte wirken sich Löt- und Klebefehler oder Unregelmäßigkeiten im Lötvorgang besonders gravierend aus. Hier müssen Lötverfahren und Klebverfahren sorgfältig ausgesucht werden.

Da zum Beispiel beim Wellenlöten die Platine mit dem Bauteil kopfunter liegt, muss der Klebepunkt das Bauteil sicher fixieren. Liegt zuviel Kleber unter dem Bauteil, verschiebt es sich eventuell. Liegt zuwenig Klebemittel an, hält das Bauteil beim Lötvorgang die Position nicht ein, zumal die SMD-Bauteile vom Lötmedium voll umflutet werden und der hohen Temperatur des Bades ausgesetzt sind. Es muss also nach dem Grundsatz „so wenig wie möglich, aber so viel wie nötig“ verfahren werden.

Bei Verwendung von Keramiksubstraten mit einem Reflow-Lötverfahren kann auf Kleber ganz verzichtet werden. Hier wird zunächst Lötpaste auf die Lötflächen aufgebracht, anschließend werden die Lötanschlüsse der Bauelemente in die Paste gedrückt und schließlich die Paste durch Wärmeeinwirkung aufgeschmolzen.

Bestückungsautomaten haben die Probleme der Kleberdosierung und der Lötungen praktisch gelöst. Zusätzliche Anforderungen an den Bestückungsautomaten müssen von Fall zu Fall entschieden und gelöst werden. So sollten möglichst alle Bauelemente mit einem Bestückkopf bestückbar und eine genaue Platzierung der Bauelemente gewährleistet sein. Auch sollte der Bestückungsautomat keine Auswirkung auf das Layout haben.

Welche Bestückungsautomaten eingesetzt werden, hängt vor allem von der Zahl der zu bestückenden Platinen und der Häufigkeit des Platinenwechsels ab. Bei der Pick-and-Place-Methode wird ein Bauelement nach dem anderen aufgesetzt, bei der Simultan-Methode dagegen werden mehrere Bauelemente gleichzeitig erfasst und auf der Platine gleichzeitig abgesetzt, was hohe Stückzahlen ermöglicht. Bei einem Platinenwechsel werden dann aber hohe Rüstzeiten erforderlich.

## XII Optoelektronik

### 1 Grundsätzliche Überlegungen

Alle Halbleitermaterialien werden bei Energiezufuhr von außen in Form von Wärme oder Licht niederohmiger, da neue Ladungsträgerpaare gebildet werden, die die Eigenleitfähigkeit erhöhen. Die Zahl der durch das auftreffende Licht freigesetzten Elektronen wird um so größer, je größer die Beleuchtungsstärke ist, weil erhöhte Lichteinstrahlung eine Energiezufuhr bedeutet. Dieser Vorgang wird als „Innerer fotoelektrischer Effekt“ bezeichnet.

Trifft Licht auf eine pn-Sperrschicht, werden infolge der Energiezufuhr Kristallbindungen aufgerissen. Es entstehen bewegliche Ladungsträger-Paare, die infolge des vorhandenen elektrischen Feldes sofort abfließen. Dabei wandern die Löcher in die p-Schicht und die Elektronen in die n-Schicht. Ohne angelegte äußere Spannung wird die p-Schicht zum Pluspol und die n-Schicht zum Minuspol einer Spannungsquelle.

Licht ist physikalisch gesehen eine elektromagnetische Strahlung in einem bestimmten Frequenzbereich. Dabei wird sichtbares Licht von unsichtbarem Licht unterschieden. Das natürliche weiße Sonnenlicht ist eine Mischung von elektromagnetischen Schwingungen der verschiedensten Wellenlängen. Wellenlänge und Frequenz sind zueinander umgekehrt proportional. Die Energie der Lichtstrahlung ist der Frequenz proportional.

Die Farbanteile des Lichtes werden als Spektralfarben bezeichnet. Das unsichtbare Infrarotlicht (IR) hat eine Wellenlänge  $\lambda$  von 780 nm bis etwa 1000 nm. Rotes, sichtbares Licht (780 nm bis 630 nm) schließt sich an, geht in orangefarbenes Licht (630 nm bis 590 nm) über, während gelbes Licht (590 nm bis 560 nm) den farblichen Übergang zum Grünbereich (560 nm bis 490 nm) bildet. Über den Anteil an blauem Licht (490 nm bis 440 nm) und violetter Spektralfarbe (440 nm bis 380 nm) endet der sichtbare Teil und geht in den unsichtbaren Teil (380 nm bis 10 nm), dem ultravioletten Licht (UV) über.

### 2 Optoelektronische Bauelemente

Bauelemente zur Umwandlung elektrischer Größen in optische Strahlung und umgekehrt werden als *optoelektronische Bauelemente* bezeichnet. Man unterscheidet dabei zwischen lichtemittierenden (lichtabstrahlenden) und lichtabsorbierenden (lichtaufnehmenden) Bauelementen.

Bei einigen, im sichtbaren Licht arbeitenden Fotohalbleitern führt auch die vom Auge nicht wahrgenommene infrarote Strahlung zu einer Änderung der Leitfähigkeit. Hier werden für bestimmte Anwendungen optische Filter verwendet, um deren Einflüsse gering zu halten.

### 2.1 Fotowiderstand (LDR – light dependent resistor)

Fotowiderstände bestehen aus Halbleiter-Mischkristallen als Basismaterial. LDR können sowohl an Gleichspannung wie auch an Wechselspannung betrieben werden, da sie ohne pn-Sperrschicht sind. Der Widerstandswert von Fotowiderständen wird mit zunehmender Beleuchtungsstärke kleiner. Ein LDR hat bei einer bestimmten Lichtwellenlänge seine größte Empfindlichkeit.

Für die Herstellung von LDR, deren spektrale Empfindlichkeit im Bereich des sichtbaren Lichtes liegt, werden als Halbleitermaterialien Cadmiumsulfid (CdS) und Cadmiumselenid (CdSe) verwendet.

Die spektrale Empfindlichkeit von LDR aus Bleisulfid (PbS) und Indiumantimonid (InSb) liegt dagegen im Infrarotbereich; die spektrale Empfindlichkeit von Germanium und Silizium liegt zwischen 800 nm und 1600 nm.

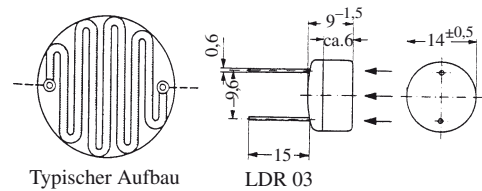


**Bild XII-1** Typischer Aufbau und Bauform eines LDR

Fotowiderstände haben die höchste Lichtempfindlichkeit unter den fotoelektronischen Halbleiterbauelementen. Bild XII-1 zeigt den typischen mäanderförmigen Aufbau eines LDR.

Die wichtigsten Kennwerte von LDR sind der Dunkelwiderstand und der Hellwiderstand, der in den Datenblättern meistens für eine Beleuchtungsstärke von 100 Lux angegeben wird.

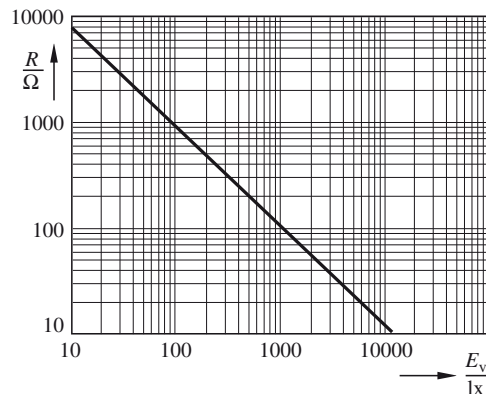


**Bild XII-2** Kennlinie des LDR 03

Die Kennlinie des LDR 03 zeigt Bild XII-2. Seine maximale Versorgungsspannung betragt  $U_B = 150\text{ V}$  und seine maximale Verlustleistung  $P_{\text{tot}} = 100\text{ mW}$ . Dunkelwiderstand  $R_0 =$  Widerstandswert nach 1 Minute volliger Abdunkelung;  $R_0 > 10\text{ M}\Omega$   
Hellwiderstand  $R_H =$  Widerstandswert bei 100 Lux oder 1000 Lux;  $R_{H100} = 500\ \Omega \dots 50\text{ k}\Omega$   
Beim praktischen Einsatz von Fotowiderstanden muss beachtet werden, dass der Widerstandswert einer anderung der Beleuchtungsstarke mit einer relativ hohen Tragheit folgt. Bild XII-3 zeigt prinzipiell die Einstelltragheit eines Silizium-LDR.

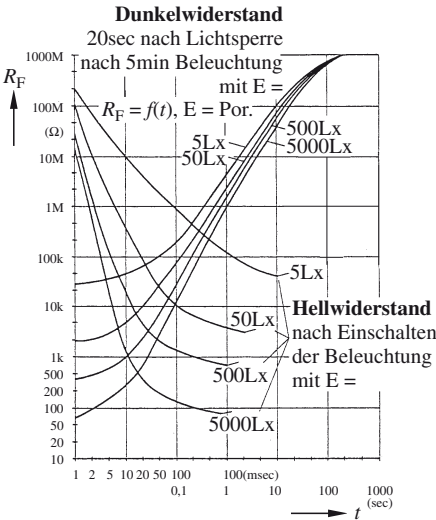


**Bild XII-3** Einstelltragheit eines Silizium-LDR

Fotowiderstande sind daher nicht besonders gut fur einen Einsatz geeignet, bei dem schnelle anderungen der Beleuchtungsstarke erfasst werden mussen. Bei  $E = 50\text{ Lx}$  benotigt dieser LDR eine Zeit von 100 ms, um seinen Widerstandswert  $R_F$  von 100 M $\Omega$  auf 10 k $\Omega$  zu mindern; bei  $E = 500\text{ Lx}$  noch eine Zeit von 15 ms.

Fotodioden werden in Sperrichtung an einer ueren Spannung betrieben; damit ist zu ihrem Betrieb nach Bild XII-4 ein Vorwiderstand und eine Betriebsspannung erforderlich.

**2.2 Fotodiode und Fotoelement**

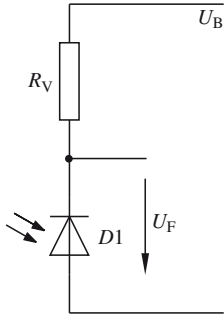


**Bild XII-4**  
Fotodiode  
mit Vorwiderstand

Ohne Beleuchtung fliet durch die pn-Sperrschicht einer Fotodiode wie bei jeder normalen Diode ein Sperrstrom, der bei den Fotodioden meistens als Dunkelstrom  $I_{R_0}$  bezeichnet wird. Als Folge der Beleuchtung tritt ein zusatzlicher Fotostrom  $I_{\text{Fot}}$  auf, der

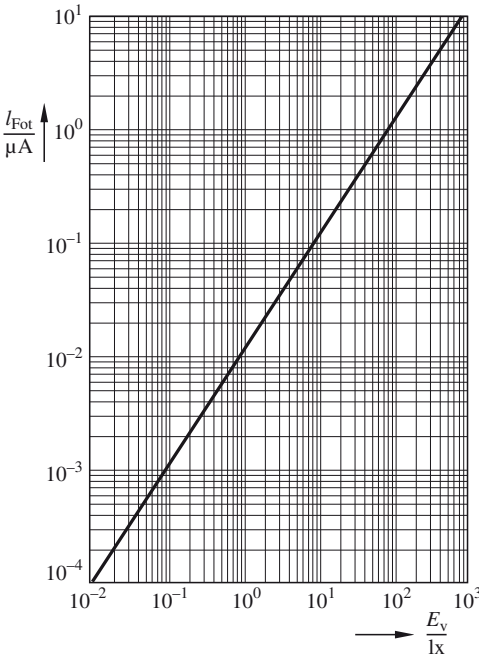


**Bild XII-5** Zusammenhang zwischen Fotostrom und Beleuchtungsstarke

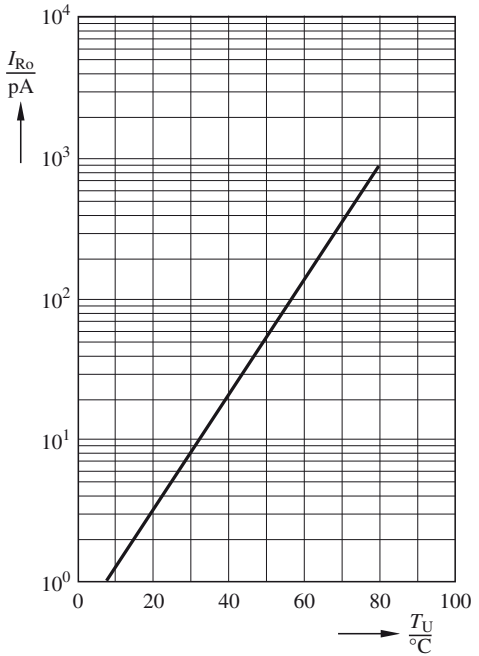


**Bild XII-6** Temperaturabhangigkeit einer Fotodiode

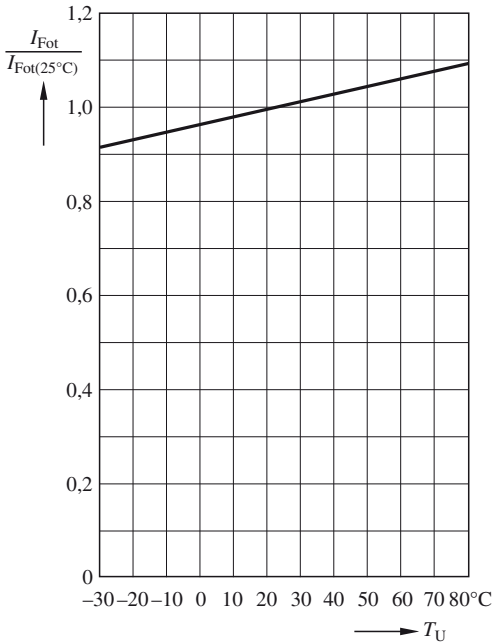


**Bild XII-7** Normierte Darstellung der Temperaturabhängigkeit einer Fotodiode

linear mit der Beleuchtungsstärke ansteigt. Bild XII-5 zeigt den Zusammenhang zwischen Fotostrom und Beleuchtungsstärke.

Wie jedes Halbleiter-Bauelement hat auch die Fotodiode eine deutliche Temperaturabhängigkeit (Bild XII-6). Besser zu erkennen ist diese Abhängigkeit im Bild XII-7, deren Kennlinie das Verhältnis normiert darstellt. Bei einer Änderung der Temperatur kann der Korrekturfaktor abgelesen werden, mit dem der bezogene Fotostrom multipliziert wird.

Wie alle lichtempfindlichen Bauelemente haben auch die Fotodioden eine spektrale Empfindlichkeit. Für die Fotodiode BPW 32 ist die relative spektrale Empfindlichkeit in Bild XII-8 dargestellt. Die größte Empfindlichkeit dieser Fotodiode liegt bei einer Wellenlänge von  $\lambda \sim 800$  nm, was etwa einer Farbe zwischen Dunkelrot und Infrarot entspricht.

Dies ist auch bei den meisten anderen Typen von Silizium-Fotodioden der Fall. Zu unterscheiden ist zwischen den pn-Fotodioden und den pin-Fotodioden.

Der großflächige pn-Übergang bei den Fotodioden hat eine große Sperrschichtkapazität zur Folge. Daher liegen die Schaltzeiten von pn-Fotodioden im Bereich von Mikrosekunden.

Um die Sperrschichtkapazität zu verkleinern, wurden die pin-Fotodioden entwickelt, deren Schaltzeiten im Nanosekunden-Bereich liegen (Abschnitt II.4.4). Bild XII-9 zeigt den technologischen Aufbau von pin-Fotodioden, bei denen sich zwischen den sehr dünnen p- und n-Schichten eine breite Intrinsic-Schicht befindet. Wegen der daraus resultierenden hohen Feldstärke in dieser Schicht werden die bei

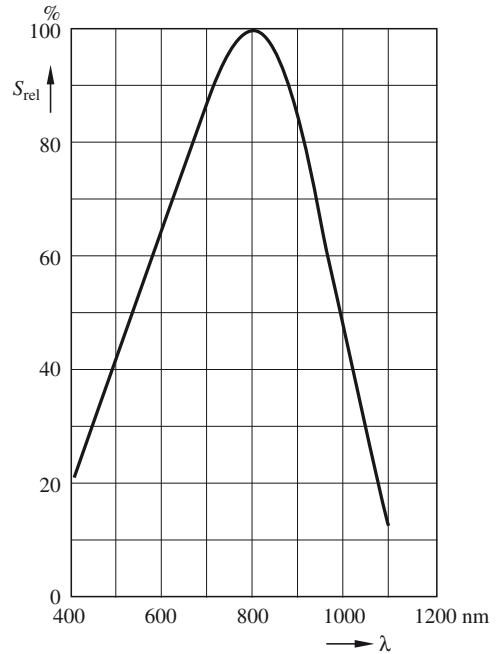


**Bild XII-8** Relative spektrale Empfindlichkeit der Fotodiode BPW 32

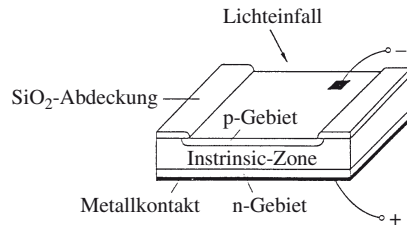


**Bild XII-9** Technologischer Aufbau einer pin-Fotodiode

Beleuchtung erzeugten Ladungsträger-Paare viel schneller als bei den pn-Fotodioden in die p- beziehungsweise n-Schicht abgesaugt. Diese größere Beweglichkeit der Ladungsträger verbessert das Schaltverhalten. Infolge der relativ breiten i-Schicht haben pin-Fotodioden wesentlich höhere Sperrspannungen. Sie liegen bei  $U_R \sim 50$  V bis 100 V. Die Fotoströme sind bei den pin-Fotodioden nur etwa halb so groß wie bei den pn-Fotodioden.

In den letzten Jahren haben pin-Fotodioden eine steigende Bedeutung erlangt. Sie werden zum Beispiel aufgrund ihrer hohen Empfindlichkeit im Infrarotbereich und wegen ihrer kurzen Schaltzeiten bei der Fernsteuerung mit moduliertem Infrarotlicht eingesetzt.

Fotodioden können wegen des gleichartigen technologischen Aufbaues und des gleichen Funktionsprinzips auch als Fotoelemente betrieben werden. Sie arbeiten dann im IV. statt im III. Quadranten des

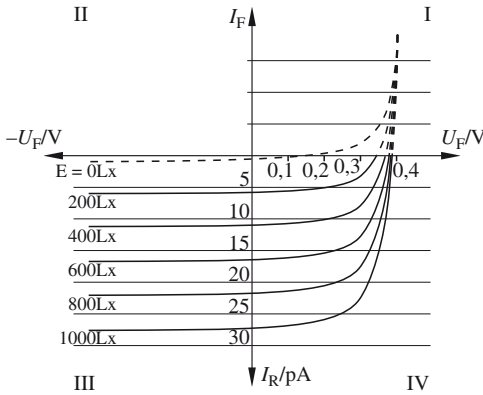


**Bild XII-10** Vier-Quadranten-Kennlinienfeld einer Fotodiode

Kennlinienfeldes (Bild XII-10). Infolge der Ladungstrennung in der pn-Schicht durch das einfallende Licht und mit Unterstützung der Diffusionsspannung bildet sich eine Spannung in Durchlassrichtung, dass heißt, es ist keine äußere Betriebsspannung notwendig. Legt man einen Widerstand an die Kontaktierung der p- und n-Schichten, fließt ein Strom, der in bezug auf die Spannung negativ zu sehen ist. Damit hat man eine Spannungsquelle, die Licht direkt in elektrische Energie umwandelt (Fotoelement, Solarzelle). Fotoelement und Solarzelle unterscheiden sich nur dadurch, dass eine Solarzelle zur Erzeugung höherer Leistungen vorgesehen ist.

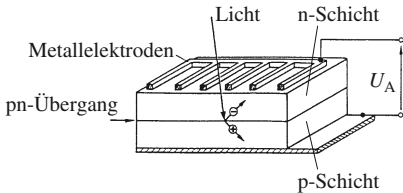


**Bild XII-11** Schnitt durch ein Fotoelement

Eine typische Solarzelle ist 10 cm × 10 cm groß und besteht aus kristallinem Silizium. Der interne Aufbau und die Kontaktierung der Anschlüsse ist in Bild XII-11 erkennbar. Die Oberfläche ist mit einer „Anti-

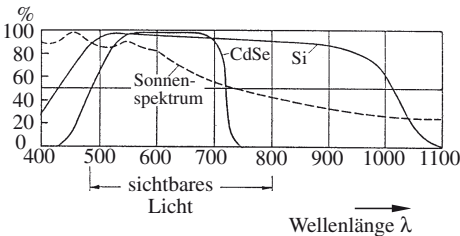
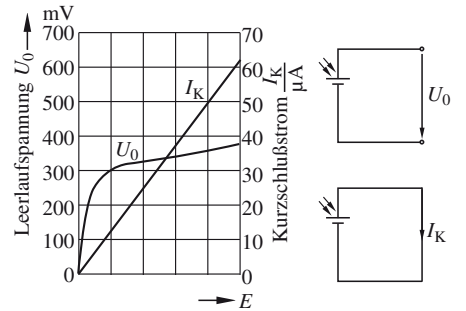


**Bild XII-12** Strahlungsspektrum des Sonnenlichtes und Spektralempfindlichkeit von Solarelementen

reflex-Schicht“ (schwarzblaue Oberfläche) versehen, damit möglichst viel Licht eindringen kann. Zur Erzeugung höherer Leistungen werden solche Zellen parallel und in Reihe zusammengeschaltet. Hundert solcher Solarzellen erbringen eine elektrische Leistung von 100 W unter der Bedingung, dass die Strahlungsleistung der Sonne 1000 W/m<sup>2</sup> beträgt. Der Wirkungsgrad liegt folglich bei 10 %. Zur Energieumwandlung trägt bei Verwendung von Silizium nicht nur das sichtbare Licht bei, sondern nach Bild XII-12 auch Licht mit höherer Wellenlänge. Die Kennwerte von Fotoelementen, wie Leerlaufspannung  $U_0$  und Kurzschlussstrom  $I_K$  lassen sich mit den Messschaltungen nach Bild XII-13 ermitteln.



Kennlinien eines Fotoelements      Meßschaltungen

**Bild XII-13** Kennlinie und Messschaltung eines Fotoelementes

Solarzellen werden in zunehmendem Maße für die Energieversorgung ortsfester Verbraucher mit niedrigem Verbrauch, wie zum Beispiel Leuchtbojen, Sendeanlagen, Parkscheinautomaten in Großstädten, kleinere Wochenendhäuser, verwendet.

## 2.3 Fototransistoren

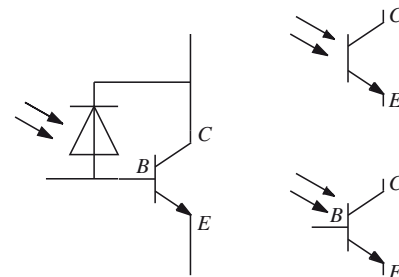


**Bild XII-14** Ersatzschaltbild und Schaltzeichen von Fototransistoren

Wie jeder Transistor enthält auch der Fototransistor zwei pn-Übergänge, die lichtempfindlich sind, weshalb normale Transistoren in lichtundurchlässige Gehäuse gegossen werden. Hier wird die Kollektor-Basis-Sperrschicht als lichtempfindliche Schicht benutzt. Die Wirkungsweise und damit das Ersatz-

schaltbild nach Bild XII-14 entspricht einer Fotodiode parallel zur CB-Strecke. Der durch die freigesetzten Ladungsträger hervorgerufene Strom wirkt wie ein Basisstrom. Die Lichtempfindlichkeit ist um den Verstärkungsfaktor  $B$  des Transistors größer als die der Fotodiode. Der Basisanschluss kann herausgeführt sein, was die Einstellung eines Arbeitspunktes erleichtert und die Steuermöglichkeiten vergrößert.

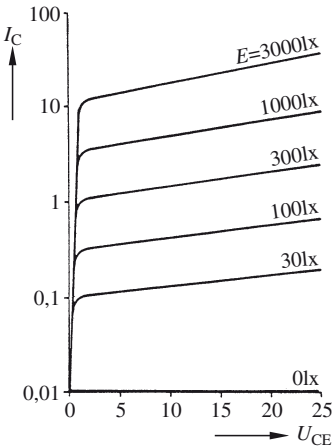


**Bild XII-15**  
Kennlinienfeld eines  
Fototransistors

Das Ausgangskennlinienfeld des Transistors nach Bild XII-15 hat nicht mehr den Basisstrom  $I_B$  als Parameter, sondern die Beleuchtungsstärke  $E$ . Bei  $E = 0$  lx fließt praktisch kein Kollektorstrom  $I_C$ . Mit größer werdender Beleuchtungsstärke steigt der Strom an. Die  $I_C$ -Achse im Kennlinienfeld ist meistens logarithmisch eingeteilt, da sich der Kollektorstrom um mehrere Zehnerpotenzen ändert. Die Schaltgeschwindigkeiten von Fototransistoren liegen zwischen  $2 \mu\text{s}$  bis  $100 \mu\text{s}$  und sind damit kleiner als die der Fotodioden. Die Schaltgeschwindigkeit ist um so niedriger, je kleiner der Lastwiderstand und je größer die Amplitude des Lichtimpulses ist. Um die Lichtempfindlichkeit weiter zu erhöhen, kann der Transistor auch als Darlington-Fototransistor ausgeführt werden.

### 2.4 Lumineszenzioden und Flüssigkristalle

In den *lichtemittierenden Fotohalbleitern* wird elektrische Energie in Strahlungsenergie umgewandelt. Das geschieht im Bereich einer dünnen pn-Sperrschicht. Hierbei wandern etwa gleich viele Elektronen von der n-Schicht in die p-Schicht wie Löcher von der p-Schicht in die n-Schicht. Die n-Schicht ist jedoch deutlich stärker dotiert als die p-Schicht. Dies führt dazu, dass der Strom durch die Sperrschicht fast vollständig ein Elektronenstrom ist. Die in die p-Schicht gelangenden Elektronen rekombinieren mit den dort vorhandenen Löchern. Dabei wird Energie frei, die je nach Ausgangsmaterial der Diode als sichtbares Licht oder als Infrarotstrahlung nach außen tritt.

Technisch benutzt wird dieser Effekt in der Leuchtdiode, die auch als Lumineszenzdiode (LED = light emitting diode) bezeichnet wird. LED's werden grundsätzlich in Durchlassrichtung betrieben.

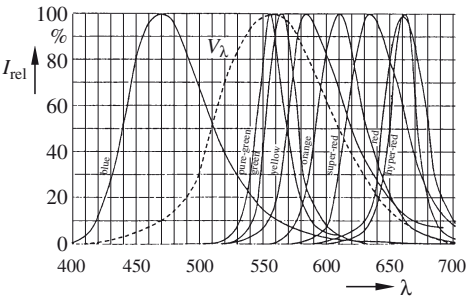


**Bild XII-16** Spektralkennlinien und  
Strahlungsmaxima einiger LED's

Grundmaterial für Leuchtdioden sind *Gallium-Verbindungen* mit unterschiedlichen Dotierungen. Für den Bereich des sichtbaren Lichtes werden grün-, gelb-, orange-, rot- und blauleuchtende LED's geliefert. Für den unsichtbaren Infrarotbereich werden verschiedene IRED (infrared emitting diode) angeboten. In allen Fällen erstreckt sich das erzeugte Lichtspektrum jeweils nur über einen schmalen Bereich (monochromatische Leuchtquellen). Bild XII-16 zeigt die Strahlungsmaxima und die Spektralkennlinien einiger LED's. Tabelle XII-1 gibt eine Übersicht über die Zusammensetzung einiger LED's mit den zugehörigen Gallium-Verbindungen und Dotierungsstoffen. Als Fremdatome dienen Zinkdampf ( $\text{Zn} + \text{O}$ ), Stickstoff (N), Phosphor (P) oder Silizium (Si).

In der Prinzipschaltung nach Bild XII-17 ist der zur Strombegrenzung und Spannungseinstellung erforderliche Widerstand  $R_V$  enthalten. Die erzeugte Lichtstärke  $I_V$  wird bei LED's für den sichtbaren Lichtbereich meistens in Millicandela (mcd) angegeben. Sie hängt nahezu linear von der Größe des Durchlassstroms  $I_F$  ab. Für den praktischen Betrieb von LED's ist der Zusammenhang zwischen  $I_F$  und  $U_F$  von Bedeutung. Kennwerte einer Leuchtdiode sind die Leuchtfläche, die Strahlungsleistung (Licht-

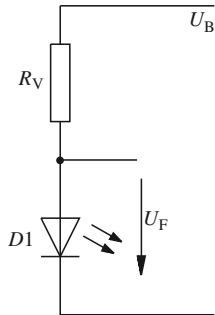
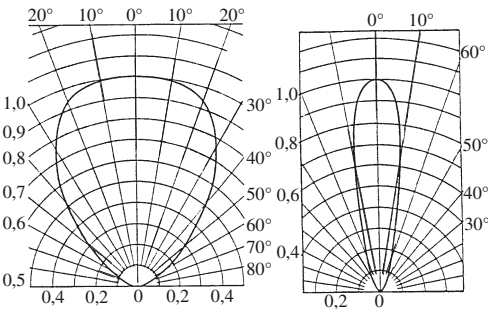


**Bild XII-17**  
LED mit Vorwiderstand



Tabelle XII-1 Übliche Zusammensetzung von LED's und IRED's

| Werkstoff          | SiC  | GaP         | GaP           | GaAsP         | GaAs    | GaAsP  | GaAs     | GaAs     |
|--------------------|------|-------------|---------------|---------------|---------|--------|----------|----------|
| Schleusenspannung  |      | 2,7 V       | 2,4 V         | 2,2 V         |         | 1,6 V  | 1,4 V    |          |
| Dotierung          | SiC  | stark mit N | schwach mit N | schwach mit N | mit P   | Zn + O | Zn       | Si       |
| Wellenlänge λ (nm) | 480  | 565         | 590           | 625           | 650     | 700    | 900      | 930      |
| Farbe              | blau | grün        | gelb          | orange        | hellrot | rot    | infrarot | infrarot |



Richtcharakteristiken von LEDs

Bild XII-18 Richtcharakteristiken von LED's

strom) und die Lichtstärke (Helligkeit). Die Schleusenspannung ist aufgrund anderer Ausgangsmaterialien höher als bei Silizium-Dioden.

Grenzwerte:

$U_{R\max} = 5\text{ V}$  ,  $I_{F\max} = 50\text{ mA}$  ,  
 $P_{\text{tot}} = 100\text{ mW}$  ,  $\vartheta_{J\max} = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$

Durch entsprechende Form der aufgesetzten Kunststoffkörper ist es möglich, den LED's unterschiedliche Richtcharakteristiken zu geben. In den Bildern XII.18a und XII.18b sind die Richtcharakteristiken für zwei Standardausführungen mit Öffnungswinkeln von 60° (breit) und 25° (gebündelt) angegeben.

Die Lebensdauer von LED's und IRED's liegt bei normalen Betriebsbedingungen bei 100000 h. Geringer Spannungs- und Strombedarf (je nach Typ 5 mA, 10 mA oder 20 mA), kleine Abmessungen, einfache Montage und hohe Packungsdichte geben ihnen einen sehr breiten Anwendungsbereich.

Da LED's Schaltzeiten von 5 ns bis 20 ns haben, können sie auch zur Abstrahlung von sich sehr schnell ändernden Lichtsignalen verwendet werden, zum Beispiel in Optokopplern (siehe Abschnitt XII.4).

Bei den Laser-Dioden (engl.: light amplification by stimulated emission of radiation) wird das im pn-Übergang erzeugte monochrome Licht im Inneren des Kristalls an den inneren Flächen verspiegelt und tritt an der Stirnfläche mit relativ schmalen Ausstrittswinkel, aber großer Lichtstärke aus. Bild XII-19

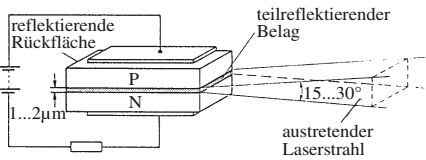


Bild XII-19 Prinzipieller Aufbau einer Laserdiode

zeigt den grundsätzlichen Aufbau einer Laserdiode als Kantenstrahler. Wird das Licht impulsartig abgestrahlt, sind mit diesen Bauelementen Leistungen bis ungefähr 100 W möglich. Sie eignen sich zur Nachrichten- und Datenübermittlung in Lichtwellenleitern. Zur Abtastung von CD-Plattenspielen und als Lesestift in Scannergeräten werden sie ebenfalls benutzt. Laser höherer Leistung sind zum Beispiel aus der Medizin (optisches Skalpell) nicht mehr wegzudenken.

Eine interessante und zukunftssträchtige Variante zur Anzeige von Informationen stellen die Flüssigkristalle (engl.: liquid crystal) dar. Flüssigkristalle sind glasklare Flüssigkeiten, deren Moleküle einen regelmäßigen einkristallinen Aufbau aufweisen. Sie befinden sich in einem speziellen Aggregatzustand, in dem Stoffe aus dem flüssigen in den festen Zustand übergehen. Flüssigkristallwerkstoffe zeigen bei Einwirkung eines elektrischen Feldes Veränderungen ihrer Kristallstruktur.

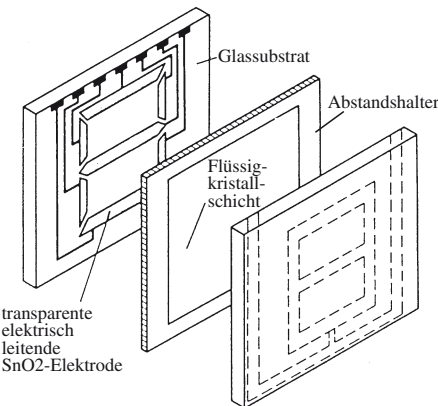


Bild XII-20 Prinzipaufbau einer LCD-Anzeige



Je nach Grundsubstanz gehen sie entweder vom durchsichtigen in den weitgehend undurchsichtigen Zustand über (wird meist verwendet) oder umgekehrt. Dieses geschieht dadurch, dass ihre Moleküle sich in bestimmter Weise ausrichten.

Nach Abschalten des elektrischen Feldes stellt sich der ursprüngliche Zustand wieder ein. Flüssigkristalle leuchten nicht. Einfallendes Fremdlicht wird an den undurchsichtigen Bereichen reflektiert und macht damit die flächenmäßige Form der Elektroden des elektrischen Feldes sichtbar. Mit Unterstützung von Polarisationsfiltern und geschickt angebrachten Lichtquellen kann der Prinzipaufbau nach Bild XII-20 vollendet werden. LCD-Anzeigen (liquid crystal display) werden in Uhren, Taschenrechnern und zahlreichen anderen Geräten verwendet. Bei wirksamen Spannungen von 1,5 V bis 3 V und einem Strom in der Größenordnung von 1  $\mu$ A werden Anzeigen mit sehr geringen elektrischen Leistungsanforderungen erreicht.

### 3 Anzeigeeinheiten

Bild XII-21 zeigt eine einfache Schaltung zur Kontrollanzeige der Betriebsspannung mit einer LED. Eine Umpolung der LED macht die Schaltung zur Anzeige einer negativen Betriebsspannung fähig. Soll eine solche Anzeige für Wechselspannung installiert werden, muss die LED vor der hohen Sperrspannung geschützt werden.

Eine antiparallel geschaltete normale Diode übernimmt diesen Schutz, da sie eine Sperrspannung von 0,7 V hat und darum die Sperrspannung an der LED unter 5 V hält. Die beiden LED's in Bild XII-22

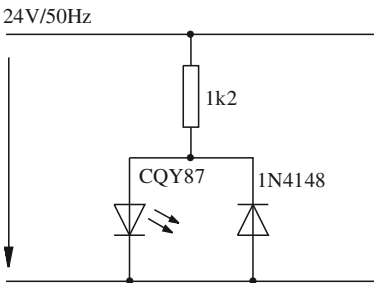


**Bild XII-21**  
Betriebsspannungsanzeige

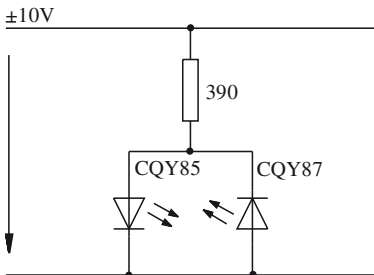


**Bild XII-22**  
Farbige Polaritätsanzeige mit LED's

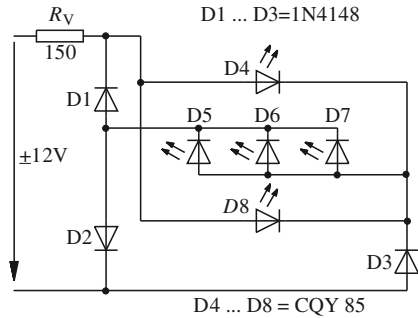


**Bild XII-23** Polaritätsanzeige mit Symbolen

haben unterschiedliche Farbabstrahlungen, übernehmen den gegenseitigen Schutz und zeigen die jeweilige Polarität farblich verschieden an.

Bild XII-23 zeigt eine Schaltung, bei der LED's so geschaltet sind, dass sie die Polarität in Symbolen anzeigt. Ist zum Beispiel die Betriebsspannung positiv, so sind die Dioden D1 und D3 in Sperrrichtung geschaltet. Auf diese Weise kann der Strom nur den Weg über alle LED's und die Diode D2 nehmen. Ist dagegen die Betriebsspannung negativ, so fließt der Strom über die dann in Durchlassrichtung liegenden Dioden D1 und D3 sowie über die LED's D5 bis D7.

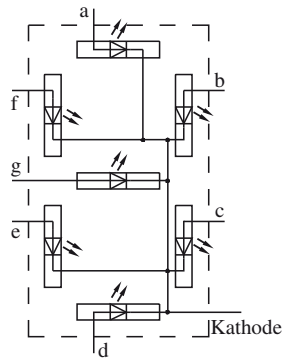


**Bild XII-24**  
7-Segment-Anzeige mit Leuchtdioden

Zur Darstellung einer beliebigen Dezimalziffer kann man 7-Segment-Anzeigen nach Bild XII-24 verwenden. Für jedes Segment ist ein Anschluss (a bis g) nach außen geführt, im vorliegenden Bild zusätzlich der Anschluss für die gemeinsame Kathode. Bei manchen 7-Segment-Anzeigen wird die gemeinsame Anode herausgeführt, so dass die Anzeige mit negativen Spannungen angesteuert werden kann. In den Segmenten sind LED's angeordnet, deren Licht über Lichtleiter nach außen geführt wird. Bild XII-25 zeigt eine 7-Segment-Anzeige in ihrer mechanischen Ausführung. Erhöht man die Anzahl der Segmente auf sechzehn, können außer Ziffern auch Buchstaben und Sonderzeichen dargestellt werden. Diese Sechzehnsegment-Anzeigen nach Bild XII-26 bezeichnet man als alpha-

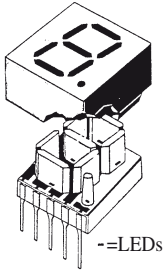


**Bild XII-25**  
7-Segment-Anzeige mit  
Dezimalpunkt und LED's

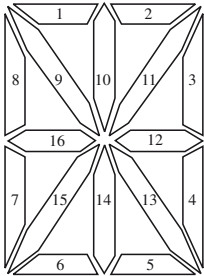


**Bild XII-26**  
Darstellung der Segmente  
einer alphanumerischen  
Anzeigeeinheit

numerische Anzeigeeinheit. Diese Anzeigen werden auch mehrstellig angeboten und können zu langen Zeilen erweitert werden.

Bei der Realisierung solcher Anzeigen mit LED's stößt man auf ein gewichtiges Problem. Diese Dioden haben eine Stromaufnahme von ca. 20 mA und vervielfachen sich mit der Anzahl der verwendeten LED's. Mehrstellige Anzeigen lassen die Stromversorgung für kleine Geräte nahezu unlösbar werden.

Baut man sowohl die 7-Segment-Anzeigen wie auch die alpha-numerischen Anzeigen mit Flüssigkristallen auf, lassen sich sehr komplexe Anzeigeeinheiten mit zahlreichen Zeilen und Stellen aufbauen, die infolge ihrer geringen Leistungsaufnahme direkt an digitalen IC mit hoher Integrationsdichte betrieben werden können.

## 4 Signalübertragung mit Optokoppler

Optokoppler sind *optoelektronische Koppellemente* zur Signalübertragung bei galvanischer Trennung von Ein- und Ausgang. Als Sender dient eine IR-Diode, die über einen Lichtleiter direkt auf einen Empfänger strahlt. Als Empfänger dienen überwiegend Fotodioden, Fototransistoren mit und ohne herausgezogene Basis und Fototriacs. Die Schaltungen nach Bild XII-27 zeigen den prinzipiellen Aufbau einiger Optokoppler. Zwischen Eingangs- und Ausgangsseite dürfen, je nach Bauform, Potentialdifferenzen bis zu einigen kV bestehen.

In Optokopplern werden elektrische Signale in optische Signale umgewandelt und über eine Isolationsstrecke übertragen. Im Anschluss daran wird das optische Signal wieder in ein elektrisches Signal umgewandelt. Der Optokoppler ist durch das System der Signalübertragung absolut rückwirkungsfrei.

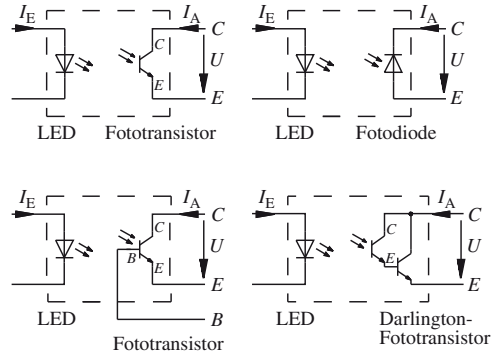


**Bild XII-27** Prinzipschaltbilder einiger Optokoppler

Die wichtigsten Kenngrößen sind das *Stromübertragungsverhältnis* CTR (current transfer ratio), dass das Verhältnis von Ausgangsstrom zu Eingangsstrom beschreibt, und die *Grenzfrequenz*  $f_g$ , bei der der AC-CTR-Wert auf 50 % des DC-CTR-Wertes abgesunken ist. Bild XII-28 zeigt einige Optokoppler der Fa. Siemens mit Pin-Belegung, Bauform und innerer Schaltung.

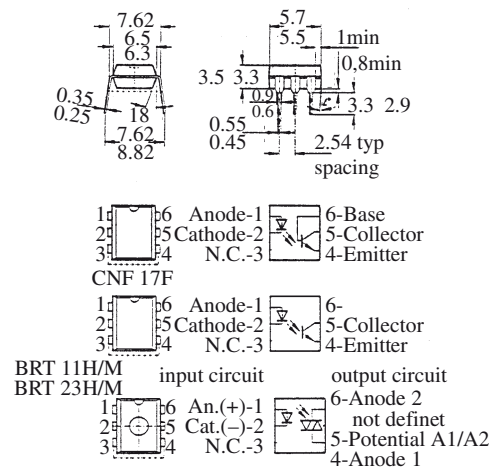


**Bild XII-28** Optokopplertypen (Fa. Siemens)

Bei Optokopplern mit Fotodioden ergibt sich ein CTR-Wert von ca. 1 %, bei Fototransistoren kann der CTR-Wert 100 % betragen. Werden im Optokoppler Darlington-Transistoren verwendet, steigt der CTR-Wert auf bis zu 500 %. Manche Optokoppler verfügen über eine Grenzfrequenz nahe bei 10 MHz. Bei Optokopplern mit einem Fototransistor als Empfänger ergeben sich Schaltzeiten von ungefähr 3  $\mu$ s. Bei LED's als Sender macht sich eine alterungsbedingte Abnahme ihrer Strahlungsleistung über einen längeren Zeitraum durch eine Verringerung des CTR-Wertes bemerkbar. Hohe Ströme und/oder hohe Umgebungstemperaturen sind der Grund dafür und sollten vermieden werden.

Optokoppler lassen sich sehr günstig in Verbindung mit Digitalschaltungen verwenden. Sie werden in *Interface-Schaltungen* verwendet, um zum Beispiel eine *Potentialtrennung* zwischen der Zentraleinheit eines Computers und seinen Peripheriegeräten herbeizuführen.

Wird die optische Kopplung zwischen Lichtsender und Lichtempfänger nicht im Inneren des Bauelementes, sondern über äußere Reflexstellen vorgenommen, spricht man von Lichtschranken. Nur wenn das Licht an einer geeigneten, dafür vorgesehenen Stelle reflektiert wird, gelangt es an den Empfänger. Derartige Bauelemente werden auch *Reflexsensoren* genannt.

In die Gruppe der Lichtschranken gehören auch die *Gabellichtschranken*, bei denen Lichtsender und -empfänger in getrennten Holmen eines U-förmigen Gehäuses integriert sind. Der *Lichtstrahl* kann durch einen dazwischengeschobenen Gegenstand unterbrochen werden.

Gabellichtschranken werden zur Prozessüberwachung verwendet, aber auch in Alarmanlagen, Positionsmeldern, zur Drehzahlüberwachung oder zur Informationsübernahme in Beleglesern (Scanner).

## 5 Faseroptische Übertragungsmittel

Die *optische Nachrichtenübertragung* über Lichtwellenleiter (LWL) gewinnt ständig an Bedeutung. Um hohe Frequenzen realisieren zu können, wird als Strahlungsquelle eine IR- oder eine Laserdiode und als Empfänger eine Fotodiode verwendet.

Medien für die optische Übertragung sind Glas oder Plastik. Zur Nachrichtenübertragung mit hohen Übertragungsraten bei großen Entfernungen werden bevorzugt Glasfasern verwendet. Plastikfasern dagegen sind für niedrige Übertragungsraten im lokalen Bereich und zur Lösung vielfältiger Anwendungen in der Steuer- und Regelungstechnik verwendbar.

Bedingt durch die gegenwärtige Fasertechnologie werden die aktiven LWL-Bauteile für die Wellenlän-

gen um 850 nm ausgelegt. Vorteile dieser Technik liegen in der Unempfindlichkeit gegenüber elektromagnetischen Störungen und in der eindeutigen galvanischen Trennung zwischen Sender und Empfänger.

Bild XII-29 zeigt das Schema eines optischen Übertragungssystems für den lokalen Bereich, hier eine Schnittstelle zwischen einer TTL-Technologie und einer ECL-Technologie.

Die Anbindung der LWL an die LWL-Bauteile und die optomechanische Verbindung der LWL miteinander sind die eigentlichen Probleme dieser Technologie, die sich aber durch hohe Präzision bei der Montage bewältigen lassen.

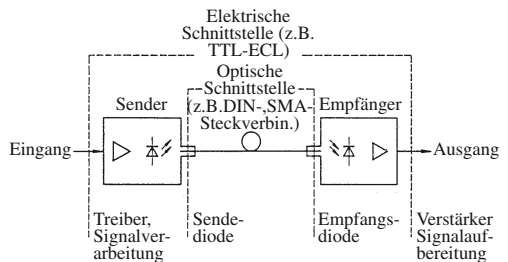


**Bild XII-29** LWL-Übertragungsstrecke (Fa. Siemens)

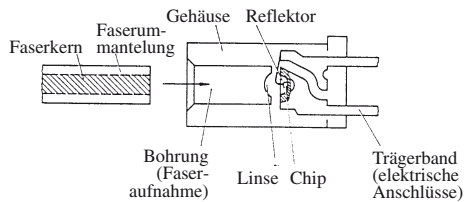


**Bild XII-30** Empfängisdioden für Plastik-LWL (Fa. Siemens)

## XIII Analog-Digital-Wandler

### 1 Grundlagen

Häufig werden physikalische Größen (Temperatur, Druck, Längen, Drehzahl, u.a.) dezentral erfasst und zentral ausgewertet, dargestellt und bearbeitet. Mit Hilfe entsprechender Sensoren erhält man die Messgröße meist in analoger Form als Stromstärke oder als Spannung. Ein digitales Signal lässt sich aber besser über größere Entfernungen ohne Signalwertfälschung übertragen. Außerdem kann mit bestimm-

ten Verfahren der Nachrichten- und Datentechnik (Multiplexverfahren) eine Übertragungsleitung mehrfach ausgenutzt werden.

Um vorhandene analoge Signale in verwertbare digitale Signale umzuwandeln, benötigt man Analog-Digital-Wandler.

Eine digitale Messung lässt sich als Zählvorgang begreifen. Also kann man die analoge Größe in eine Impulsreihe mit bestimmter Frequenz umformen und diese Impulse dann in einer bestimmten Zeiteinheit zählen.

## 2 Spannungs-Frequenz-Wandler

Zur Umformung einer Signalspannung in eine der Spannung proportionale Frequenz verwendet man einen Spannungs-Frequenz-Umsetzer (-Wandler) nach Bild XIII-1. Der Operationsverstärker N1 ist hier als Integrator geschaltet, der die Spannung  $u_e$  über die Zeit integriert und damit eine negative Sägezahnspannung  $u_a$  bewirkt. Je größer die Eingangsspannung ist, desto steiler ist der Anstieg der Ausgangsspannung.

Die Spannung  $U_e$  vergleicht der Operationsverstärker N2 (Komparator) mit der negativen Spannung  $U_V$  des Spannungsteilers aus R2 und R3. Sobald  $u_a$  den Wert  $U_V$  erreicht, kippt der Komparator N2 und steuert den Transistor V1 durch. Der leitende Transistor hebt die Vergleichsspannung auf nahezu 0 V an. Gleichzeitig entlädt sich der Kondensator C1 über den Transistor, bis die Ausgangsspannung  $u_a = 0$  V wird.

Dieser Vorgang führt dazu, dass der Komparator erneut seine Ausgangsspannung umkehrt und nun den Transistor sperrt. Damit beginnt der Integrationsvorgang der Messgröße  $u_e$  erneut.

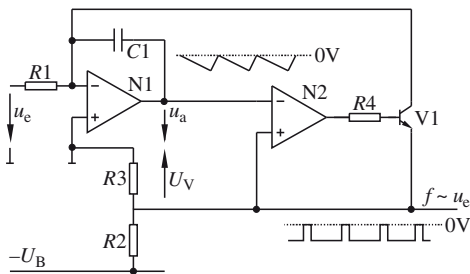


Bild XIII-1 Spannungs-Frequenz-Umsetzer

Am Ausgang der Schaltung erhält man Impulse, deren Frequenz vom Wert der Eingangsspannung abhängt. Die Frequenz  $f$  ist proportional zur Spannung  $u_e$ .

Da sich der Kondensator nur in einer endlichen Zeit entlädt, kommt hier ein systematischer Messfehler zum Tragen.

$$\text{Erzeugte Frequenz } f \approx \frac{u_e}{U_V \cdot R_1 \cdot C_1} \quad (\text{XIII.1})$$

unter der Bedingung für die Rückstellzeit

$$t_R \Rightarrow \frac{\Delta u_a \cdot R_2 \cdot C_1}{U_B} \ll R_1 \cdot C_1$$

Schaltet man hinter diesen Umsetzer einen digitalen Frequenzmesser, so wird die Gesamtschaltung zu einem digitalen Spannungsmesser.

Für  $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 700 \Omega$ ,  $R_3 = 800 \Omega$ ,  $C_1 = 1,25 \text{ nF}$ ,  $U_B = -15 \text{ V}$  und  $u_e = 10 \text{ V}$  ergibt sich nach Gleichung XIII.1 eine Frequenz von 10 kHz. Da die Rückstellzeit nicht berücksichtigt ist, liegt der tatsächliche Wert niedriger. Der Spitzenwert von  $u_a$  und  $U_V$  liegt bei  $-8 \text{ V}$ .

## 3 Sägezahnverfahren

Beim Sägezahnverfahren wird die analoge Spannung  $u_e$  mit einer linear ansteigenden Sägezahnspannung nach Bild XIII-2 verglichen. Die Komparatoren N1 und N2 vergleichen die Messgröße und die Sägezahnspannung miteinander. Sobald die Sägezahnspannung  $\geq 0 \text{ V}$  wird, beginnt der Vergleich, denn nun liegt der eine Eingang des EXCLUSIV-ODER-Gatters (N3) auf „H“, das UND-Gatter (N4) ist vorbereitet, und die Impulse des Rechteckgenerators (Oszillators) gelangen an den Ausgang A der Schaltung.

Wenn die Sägezahnspannung den Wert der Messgröße  $u_e$  erreicht, kippt der Komparator N1 am Ausgang von „L“ auf „H“. Der Ausgang des EXCLUSIV-ODER-Gatters (N3) verändert sich auf „L“, und das UND-Gatter (N4) sperrt weiteren Impulsen des Rechteckgenerators den Durchgang zum Ausgang.

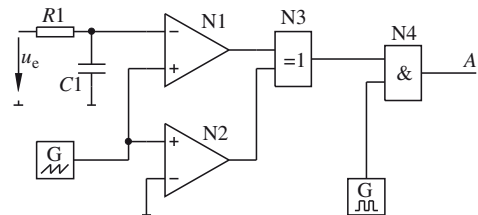


Bild XIII-2 Schaltung zum Sägezahnverfahren

Die beiden Schaltpunkte der Komparatoren N1 und N2 begrenzen also die Zeitdauer  $\Delta t$ , während der die Impulse gezählt werden. Bei linearer Sägezahnspannung ist  $\Delta t$  der Messgröße  $u_e$  direkt proportional, und die Anzahl der Impulse entspricht der Höhe der Eingangsspannung. Nach jeder Messung muss der Zähler auf Null zurückgesetzt werden. Das letzte Zählergebnis kann mit einem Anzeigespeicher bis zur Vorlage des nächsten Zählergebnisses festgehalten werden, um eine ruhende Anzeige zu ermöglichen.

Es lassen sich Messgenauigkeiten von etwa 0,1 % des Endwertes erreichen. Um Oberwellen der Messgröße aus dem Messergebnis herauszuhalten, ist ein Tiefpassfilter am Eingang vorteilhaft.

## 4 Dual-Slope-Verfahren

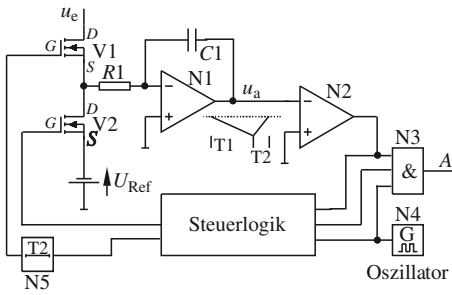
Beim „Doppelintegrationsverfahren“ (dual-slope-converter) erfolgt die Umwandlung in zwei aufeinander folgenden Schritten.

Die Messgröße  $u_e$  wird während der konstanten vorgegebenen Zeit  $T_1$  integriert. Die Ausgangsspannung  $u_a$  (Sägezahnspannung) ändert sich entsprechend der Gleichung XIII.2.

Ausgangsspannung

$$u_a(t) = -\frac{1}{R_1 \cdot C_1} \cdot u_e \cdot T_1 \quad (\text{XIII.2})$$

Bei konstanter Integrationszeit wird der Höchstwert der Ausgangsspannung  $u_a$  durch den Wert der Eingangsspannung  $u_e$  bestimmt.



### Bild XIII-3 Dual-Slope-Verfahren

Im zweiten Schritt wird der Kondensator C1 über die Konstantspannungsquelle entladen. Die Ausgangsspannung  $u_a$  des Integrators N1 in der Schaltung nach Bild XIII-3 ändert sich linear, bis der Komparator N2 den Spannungswert Null feststellt. Die Entladezeit T2 richtet sich ausschließlich nach der vorher im 1. Schritt aufgenommenen Ladungsmenge, also nach dem Höchstwert von  $u_a$ .

Diese Entladezeit wird genutzt, um die Digitalisierung der Messgröße  $u_e$  zu bewirken, indem der Oszillator N4 während der Entladezeit T2 seine Impulse auf den Ausgang gibt.

Die Zählzeit  $T_2$  und die konstante Oszillatorfrequenz bestimmen die Anzahl der Impulse.

$$\text{Zählzeit T2} = \frac{u_e}{U_{\text{ref}}} \cdot \text{T1} \quad (\text{XIII.3})$$

Der Steuerlogik-Baustein bildet die Integrationszeit durch Frequenzteilung aus dem Oszillator N4, hält den FET-Transistor V1 für die Integrationszeit T1 leitend und den FET-Transistor V2 gesperrt. Nach Ablauf der Integrationszeit T1 gibt die Steuerlogik ein „H“-Signal auf das UND-Gatter N3 und schaltet die Transistoren um, so dass sich der Kondensator über die Konstantspannungsquelle  $U_{ref}$  entlädt. Während dieser Zeit T2 gibt auch der Komparator N2 ein „H“-Signal an das UND-Gatter N3, so dass die Impulse des Oszillators an den Ausgang gelangen. Der Zählvorgang beziehungsweise die Zeit T2 ist beendet, sobald sich der Kondensator auf  $u_c = 0\text{ V}$  entladen hat und der Komparator N2 ein „L“-Signal an das UND-Gatter N3 gibt, womit er weitere Impulse unterdrückt.

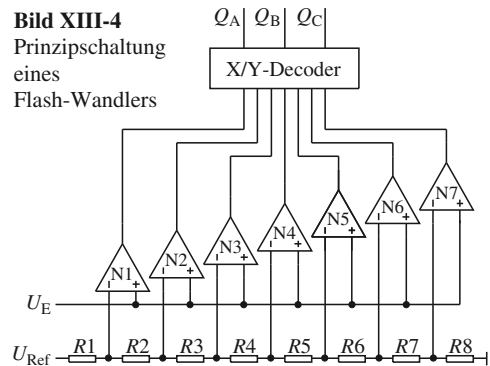
Es lassen sich Messgenauigkeiten von etwa 0,01 % des Endwertes erreichen, wenn die Integrierzeit  $T_I$  durch Frequenzteilung von der Oszillatorfrequenz bestimmt wird. Die mittlere Umsetzungszeit liegt bei etwa 5 ms. AD-Wandler nach diesem Prinzip haben eine große Verbreitung gefunden.

## 5 Flash-Wandler

Beim Verfahren mit parallelen Komparatoren nach Bild XIII-4 wird die angelegte Messspannung  $U_E$  mit genau festgelegten Referenz- und Teilreferenzspan-

nungen verglichen. Der hier dargestellte 3-Bit-AD-Umsetzer macht 7 Komparatoren und ebensoviele Vergleichsspannungen erforderlich, die über einen Spannungsteiler erzeugt werden. Solange die angelegte Messspannung  $U_E$  kleiner ist als die über R8 abfallende Vergleichsspannung, zeigt der Ausgang des Komparators N7 eine logische „0“ an, die in eine logische „1“ übergeht, sobald die angelegte Messspannung  $U_E$  größer wird als die über R8 abfallende Vergleichsspannung. Dieser Trend setzt sich mit größeren Messspannungen  $U_E$  entsprechend fort. Ist die angelegte Messspannung  $U_E$  größer als die Spannungssumme über den Widerständen R5 bis R8, aber kleiner als die Spannungssumme über den Widerständen R4 bis R8, zeigt der Ausgang des Komparators N4 eine logische „1“ an, während der Ausgang des Komparators N3 eine logische „0“ verzeichnet.

**Bild XIII-4**  
Prinzipschaltung  
eines  
Flash-Wandlers



Der X/Y-Dekoder ermittelt zunächst den Komparator, bei dem die Vergleichsspannung erstmalig größer ist als die Messspannung. Das wird durch eine UND-Verknüpfung eines jeden Komparators mit dem nächsten erfolgen. Mit weiteren Codierstufen erhält man hier das 3-Bit-Ausgangssignal an den Ausgängen  $Q_A$  bis  $Q_C$ . Für einen 8-Bit-AD-Wandler sind 255 Komparatoren mit den entsprechenden Vergleichsspannungen aufzuwenden.

AD-Umsetzer nach diesem Verfahren mit parallelen Komparatoren ermöglichen Umsetzfrequenzen von mehr als 100 MHz. Diese Umsetzer werden als Flash-Wandler bezeichnet. Es gibt sie als IC-Bausteine (8- und 12-Bit-Umsetzer).

## 6 Wandler nach dem Wägeverfahren

Das Wägevorgang ist ein Vergleichsvorgang, bei dem die digitale Aussage an die gegebene analoge Eingangsgröße durch schrittweise Annäherung (sukzessive Approximation) ermittelt wird.

Die digitale Ausgangsgröße wird über einen Operationsverstärker, der als bewerteter Addierer geschaltet ist, in die analoge Form (Treppenspannung) zurückversetzt und dann über einen Komparator mit der analogen Messgröße verglichen. Dabei wird zunächst das höchste Bit des Speichers auf „1“ gesetzt.

**Tabelle XIII-1** Zahlenbeispiel zur schrittweisen Umsetzung

|            |                               |           |     |
|------------|-------------------------------|-----------|-----|
| 1. Schritt | $128 < 165$                   | $Q_7 = 1$ | 128 |
| 2. Schritt | $165 - 128 = 37$<br>$64 > 37$ | $Q_6 = 0$ | 0   |
| 3. Schritt | $32 < 37$                     | $Q_5 = 1$ | 32  |
| 4. Schritt | $37 - 32 = 5$<br>$16 > 5$     | $Q_4 = 0$ | 0   |
| 5. Schritt | $8 > 5$                       | $Q_3 = 0$ | 0   |
| 6. Schritt | $4 < 5$<br>$5 - 4 = 1$        | $Q_2 = 1$ | 4   |
| 7. Schritt | $2 > 1$                       | $Q_1 = 0$ | 0   |
| 8. Schritt | $1 = 1$                       | $Q_0 = 1$ | 1   |

 $\Sigma 165$ 

Das Zahlenbeispiel (Tabelle XIII-1) soll die schrittweise Umsetzung des Wertes 165 bei einem 8-Bit-AD-Wandler verdeutlichen.

Das Umsetzungsverfahren benötigt zwar viele Schritte, arbeitet aber insgesamt wesentlich schneller als ein Wandler nach dem Integrationsverfahren. Die mittlere Umsetzungszeit beträgt für einen 10-Bit-AD-Wandler etwa 10  $\mu\text{s}$ .

## 7 Integrierte Wandler

Analog-Digital-Umsetzer sind als integrierte CMOS-Schaltungen für vielfältige Anwendungen verfügbar. Je nach der vorgesehenen weiteren Verwendung der digitalen Ausgangsgrößen werden diese ICs mit dual-

codierten Ausgängen, parallelen BCD-Ausgängen oder n-Digit-BCD-Multiplexausgängen unterschieden.

BCD-Ausgänge werden für die Ansteuerung von digitalen Anzeigeeinheiten verwendet, während dual codierte Parallelausgänge für die digitale Datenverarbeitung mit Computern benötigt werden.

Alle Wandler sind durch zwei wesentliche Kenngrößen charakterisiert: die Auflösung und die Umsetzzeit. Die Auflösung sagt aus, wie fein ein Analogwert von dem Wandler in einen Digitalwert umgesetzt wird. Sie wird in Bit angegeben. 4 Bit entsprechen einer Genauigkeit von ca. 7 %, während 8 Bit eine Genauigkeit von 0,4 % bieten und dem Standard entsprechen. Die Umsetzzeit gibt an, wieviel Zeit der Wandler benötigt, um den Wert der anliegenden Spannung in ein Digitalwort umzusetzen. Bei der digitalen Bildverarbeitung werden extrem kurze Zeiten verlangt, während sie bei anderen Gelegenheiten eher von untergeordneter Bedeutung sind. Je nach gewünschter Umsetzzeit werden die verschiedenen Verfahren eingesetzt.

Mit sukzessiver Approximation arbeiten die AD-Wandler der ADC-08xx-Familie. Sie haben eine Auflösung von 8 Bit, eine Umsetzzeit von 100  $\mu\text{s}$  und eine Zugriffszeit von 135 ns bei einer einfachen Versorgungsspannung von 5 V. Die Referenzspannung ist wählbar. Der Wandler ist für den direkten Anschluss an den Mikroprozessor 8080 und seine Verwandten konzipiert worden.

Der von der Fa. Datel hergestellte ADC 847 hat bei einer Auflösung von 8 Bit eine Umsetzzeit von 9  $\mu\text{s}$ .

Der MAX132 der Fa. Maxim ist ein relativ langsamer 18-Bit-AD-Wandler mit seriellem Ausgang, der nach dem Multi-Slope-Verfahren arbeitet. Es können bis zu 100 Wandlungen pro Sekunde erfolgen. Er eignet sich besonders für den Einsatz in Datenerfassungssystemen, Waagen und Schalttafel-Instrumenten.

# XIV Digital-Analog-Wandler

## 1 Grundlagen

Um vorhandene digitale Signale in verwertbare analoge Signale umzuwandeln, benötigt man Digital-Analog-Wandler. Diese Wandler stellen das unverfälschte analoge Signal wieder her und ermöglichen seine analoge Weiterverarbeitung (zum Beispiel Verstärkung).

Voraussetzung ist in den meisten Anwendungsfällen, dass das digitale Signal ein parallel anstehendes Datenwort ist, das eine mehrstellige Binärzahl darstellt.

## 2 D/A-Wandler-Varianten

Eine einfache Schaltung eines 3-Bit-DA-Wandlers mit Operationsverstärker zeigt Bild XIV-1. Es handelt sich hierbei um einen invertierenden OP, bei dem die Eingangswiderstände entsprechend der Wertigkeit der digitalen Stelle mit nachgeschalteter Umkehrstufe gewählt werden müssen.

Das 3-Bit-Eingangssignal  $Q_A$  bis  $Q_C$  liegt an den Eingängen  $E_1$  bis  $E_3$ , so dass  $R_1 = R$ ,  $R_2 = R/2$  und  $R_3 = R/4$  gewählt werden müssen. Ein weiterer Ein-



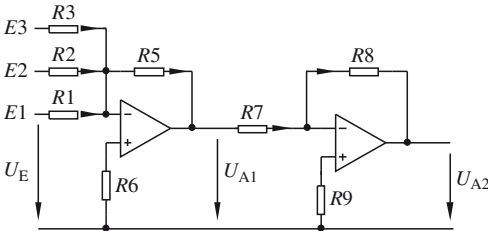


**Bild XIV-1** Schaltung eines 3-Bit-DA-Wandlers mit OP

gang E4 mit einem Eingangswiderstand  $R_4 = R/8$  erweitert diesen Wandler zu einem 4-Bit-DA-Wandler. Dieser 3-Bit-DA-Wandler wandelt ein 3-Bit-Datenwort in eine analoge Treppenspannung  $U_{A2}$  nach Bild XIV-2 am Ausgang um.

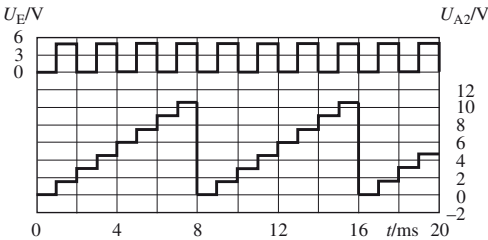


**Bild XIV-2** Liniendiagramm zur Schaltung nach Bild XIV-1

Der 4-Bit-DA-Wandler lässt sich für weitere Dekaden nach dem 8-4-2-1-BCD-Code erweitern. Für jede weitere Dekade sind vier Widerstände erforderlich, deren Widerstandswerte um den Faktor 0,1 je Dekade kleiner werden. Diese Art der Erweiterung kann theoretisch beliebig erweitert werden.

Die Anforderungen an die Genauigkeit der Widerstände werden bei den Stellen höchster Wertigkeit sehr groß und lassen sich kaum noch erfüllen. Darum benutzt man ein Schaltungsprinzip, bei dem die verwendeten Widerstände in derselben Größenordnung liegen. Im Prinzip wird in der Schaltung nach Bild XIV-1 eine Summation der bewerteten Einzelströme durchgeführt. Das lässt sich auch mit einem Kettenleiter oder  $R-2R$ -Netzwerk für einen 4-Bit-Wandler nach Bild XIV-3 bewerkstelligen.

Entsprechend dem logischen Zustand der digitalen Eingänge  $Q_A$  bis  $Q_D$  werden die Umschalter entweder auf Masse gelegt oder auf den invertierenden Eingang des OP geschaltet, so dass der bewertete Strom im Addierer summiert wird (oder gegen 0-Potential abfließt) und als Ausgangsspannung  $U_a$  erscheint. Die Umschalter werden durch elektronische Schalter realisiert. Der Gegenkopplungswiderstand  $R_g$  lässt sich je nach gewünschter analoger Ausgangsspannung  $U_a$  berechnen, da durch ihn der Summenstrom fließt. Integrierte Schaltkreise der Industrie enthalten zusätzlich oft einen Speicher für das digitale Datenwort. Üblich sind 8-Bit-DA-Wandler.

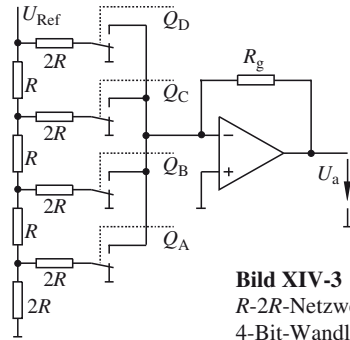
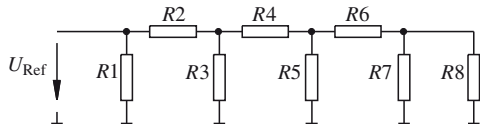


**Bild XIV-3**  
 $R-2R$ -Netzwerk für einen 4-Bit-Wandler

Die Schaltung nach Bild XIV-4 soll die Grundlage für den Einstieg in eine knappe Netzwerkberechnung bieten. Die Widerstände  $R_7$  und  $R_8$  liegen zueinander parallel, haben also insgesamt den Widerstand  $R$ . Als Reihenschaltung mit  $R_6$  ergibt sich wieder der Wert  $2R$ . Der Widerstand  $R_5$  mit  $2R$  liegt nun parallel zum Ersatzwiderstand der bisher berechneten Widerstände  $R_6$ ,  $R_7$  und  $R_8$ .



$$R_2 = R_4 = R_6 = R$$

$$R_1 = R_3 = R_5 = R_7 = R_8 = 2R$$

**Bild XIV-4** Schaltung zur Netzwerkberechnung

Das Netzwerk hat einen Gesamtersatzwiderstand von  $R$ . Die Referenzspannungsquelle  $U_{ref}$  wird also mit  $R$  belastet. Der ihr entnommene Strom teilt sich auf  $R_1$  und  $R_2$  zu gleichen Teilen auf, was sich an allen Knoten wiederholt.

Durch die senkrecht gezeichneten Widerstände des Netzwerkes nach Bild XIV-4 fließen Ströme, deren Werte sich jeweils halbieren (von der Spannungsquelle aus betrachtet), aber in allen Schaltumständen konstant bleiben.

### 3 Integrierte Wandler

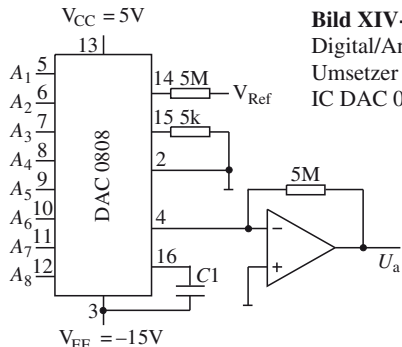


**Bild XIV-5**  
Digital/Analog-Umsetzer mit dem IC DAC 0808



Der DAC 0808 ist ein monolithischintegrierter Digital/Analog-Wandler mit einer Einstellzeit von 150 ns für Vollaussteuerung des Ausgangsstroms. Die digitalen Eingänge sind TTL- und CMOS-kompatibel. Bei einer Versorgungsspannung von  $\pm 5$  V werden maximal 33 mW aufgenommen. Einen Digital/Analog-Umsetzer für eine Ausgangsspannung von 10 V zeigt die Schaltung nach Bild XIV-5.

*Ausgangsspannung*

$$U_a = 10 \text{ V} \cdot \left( \frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{4} + \dots + \frac{A_8}{256} \right) \quad (\text{XIV.1})$$

Als Operationsverstärker lässt sich der LM741 verwenden. Für den Kondensator C1 reichen 0,1  $\mu\text{F}$  aus. Als digitale Eingänge stehen die Anschlüsse  $A_1$  bis  $A_8$  zur Verfügung.

# Technische Kommunikation/Technisches Zeichnen

## I Grundlagen der zeichnerischen Darstellung

### 1 Zeichengeräte

Eine *Technische Zeichnung* muss nach DIN 6774 Teil 1 in der Weise angefertigt werden, dass sie *übersichtlich, unmissverständlich, auch in verkleinertem Maßstab lesbar* bleibt, kostengünstig reproduzierbar und dauerhaft archivierbar ist. Zu dem Zweck benötigt man entsprechendes Papier und angepasstes Zeichengerät.

Für die *Entwurfzeichnung* verwendet man Bleistifte, heute in der Form *nachfüllbarer Feinminenhalter* mit *Minen definierter Härte* und *Linienbreite*.

Buchstaben kennzeichnen die Härtegrade von Minen:

B = schwarz (weich)  
H = hart  
HB = hart, schwarz (mittelhart)  
F = fest.

Ziffern verweisen auf feinere Abstufungen der Härtegrade.

Zirkel, Lineale und *Schablonen erleichtern und beschleunigen die Zeichenarbeit*. Zur Erstellung der endgültigen Zeichnung werden *Tuschefüller* und *Schrift-* sowie *Schreibschablonen* verwendet, die der *Prüf-*

**Tabelle I-1** Auswahl wichtiger Normen für das technische Zeichnen

|                   |                                                       |
|-------------------|-------------------------------------------------------|
| DIN EN ISO 128    | Linien                                                |
| DIN EN ISO 3098   | Normschrift                                           |
| DIN EN ISO 5455   | Blattgröße, Maßstäbe                                  |
| DIN EN ISO 5457   | Faltungen von Technischen Zeichnungen                 |
| DIN 6771          | Schriftfelder und Stücklisten                         |
| DIN 6774          | Ausführungsrichtlinien                                |
| DIN ISO 5455      | Maßstäbe                                              |
| DIN 6789          | Zeichnungssystematik                                  |
| DIN ISO 286       | Allgemeine Toleranzen                                 |
| DIN ISO 1302      | Oberflächenangaben                                    |
| DIN ISO 5456      | Dreidimensionale Projektion                           |
| DIN ISO 128       | Ansichten, Schnittdarstellung                         |
| DIN 406           | Arten und Regeln der Maßeintragung                    |
| DIN ISO 6410      | Darstellung von Gewinde                               |
| DIN 461           | Graphische Darstellungen                              |
| DIN EN 61082      | Schaltungsunterlagen, graf. Symbole für Schaltpläne   |
| DIN EN 61082 T. 1 | Schaltungsunterlagen, Begriffe, Einteilung            |
| DIN EN 61082 T. 2 | Regeln für Stromlaufpläne, Funktions- und Schaltpläne |
| DIN EN 61082 T. 3 | Verbindungspläne und -listen, Geräteverdrahtungspläne |
| DIN 40719 T. 2    | Kennzeichnung von Betriebsmitteln                     |
| DIN IEC 60971     | Stromrichterbenennungen und -kennzeichen              |
| DIN VDE 0281/0293 | Leitungen                                             |
| DIN EN 60617      | Schaltzeichen für Schaltungsunterlagen                |
| DIN EN 60617-6    | Elektrische Maschinen                                 |
| DIN EN 60617-11   | Messgeräte, Zähler, Anzeigen, Messgrößenumformer      |
| DIN VDE 0530      | Anschlussbezeichnungen und Drehsinn                   |
| DIN 40717         | Schaltpläne, Installationspläne                       |
| DIN 40712         | Veränderbarkeit, Einstellbarkeit, Widerstände         |
| DIN 40713         | Schaltglieder, Antriebe, Auslöser                     |
| DIN 40714         | Transformatoren, Drosselspulen, Wandler               |
| DIN 40719 T9      | Ausführung von Anschlussplänen                        |
| DIN 40719 T10     | Ausführung von Anordnungsplänen                       |
| DIN 40719 T11     | Zeitablaufdiagramme – Schaltfolgediagramme            |
| DIN 66001         | Informationsverarbeitung                              |
| IEC 617-12        | Computertechnik                                       |
| DIN 46199         | Anschlussbezeichnungen                                |

norm DIN 6775 entsprechen. Sie können für das *normgerechte Zeichnen und Beschriften nach DIN 15* Teil 1 und 2 verwendet werden.

Auf die Geräte und Maschinen, die beim *computer-gestützten Zeichnen* (CAD = computer aided design) Verwendung finden, soll in Abschn. 4 eingegangen werden.

*Zeichenpapier* ist meist *dicker als normales Schreibpapier* und für die Verwendung von Tuschefüllern geeignet. Häufig wird festes, durchscheinendes *Transparentpapier* verwendet, das für das *Lichtpausverfahren* geeignet ist.

Die *Blattgröße*, sprich das Papier-Format, ist nach *DIN 6771 T6 festgelegt*. Diese Normreihe ist so gestaltet, dass durch fortgesetztes Falten bzw. Schneiden des Blattes in der Mitte jeweils das nächst kleinere Format entsteht. Das Ausgangsformat ist gleich der metrischen Flächeneinheit, d.h., A0 entspricht der Größe  $1 \text{ m}^2$ .

Alle Zeichenblattgrößen können in der Hoch- oder Querlage verwendet werden. Bevorzugt sind die Formate A4 bis A0 zu verwenden. Bei A4-Format wird die Hochlage bevorzugt.

## 2 Normen für Technische Zeichnungen

Die moderne Produktion ist gekennzeichnet durch eine extreme Arbeitsteilung. Die *Technische Zeichnung* ist hierbei als *Informationsträger über Planungsvorgaben, die Vorbereitung und Ausführung von Anlagen und Geräten* zu betrachten. Es handelt sich um Beschreibungen, die vollständig alle Fakten wiedergeben, aber keine unnötigen Angaben enthalten. Die *Darstellung* ist *weitestgehend symbolhaft* mit

einem Minimum an Textangaben, was die internationale Kooperation vereinfacht.

Die *Übersichtlichkeit und Eindeutigkeit von Technischen Zeichnungen* wird durch das *strikte Einhalten von vereinbarten Regeln* erreicht. Diese Regeln werden als Zeichnungsnormen vom Deutschen Institut für Normung (DIN) herausgegeben, wobei diese die Normen und Empfehlungen der Internationalen Normenorganisation (ISO = International Organization for Standardization) zur weltweiten Vereinheitlichung berücksichtigen.

Eine Auswahl wichtiger *Normen für das technische Zeichnen*, hier besonders für die Elektrotechnik, sind in Tabelle I-1 zusammengefasst.

## 3 Normteile und Konstruktionselemente

Nach DIN 57100/IEC 364-4-41/VDE 0100 Teil 410 sind Schutzmaßnahmen gegen gefährliche Körperströme zu treffen. Zum Schutz gegen direktes Berühren von aktiven Teilen elektrischer Betriebsmittel können die aktiven Teile als solche isoliert werden oder der Schutz kann durch Abdeckungen oder Umhüllungen, sprich Gehäuse, bewirkt werden. Es handelt sich also um konstruktive Maßnahmen.

Im Zusammenhang mit dem Schutz gegen gefährliche Körperströme werden die elektrischen Betriebsmittel (Geräte und Anlagen) nach VDE 0100 in Schutzklassen, z.B. Schutzklasse II (Schutzisolierung) eingeteilt. Bei der Schutzisolierung werden elektrisch nichtleitende Materialien zur Herstellung der Gehäuse verwendet, so dass aktive Teile räumlich und elektrisch vom Benutzer bzw. Anwender völlig

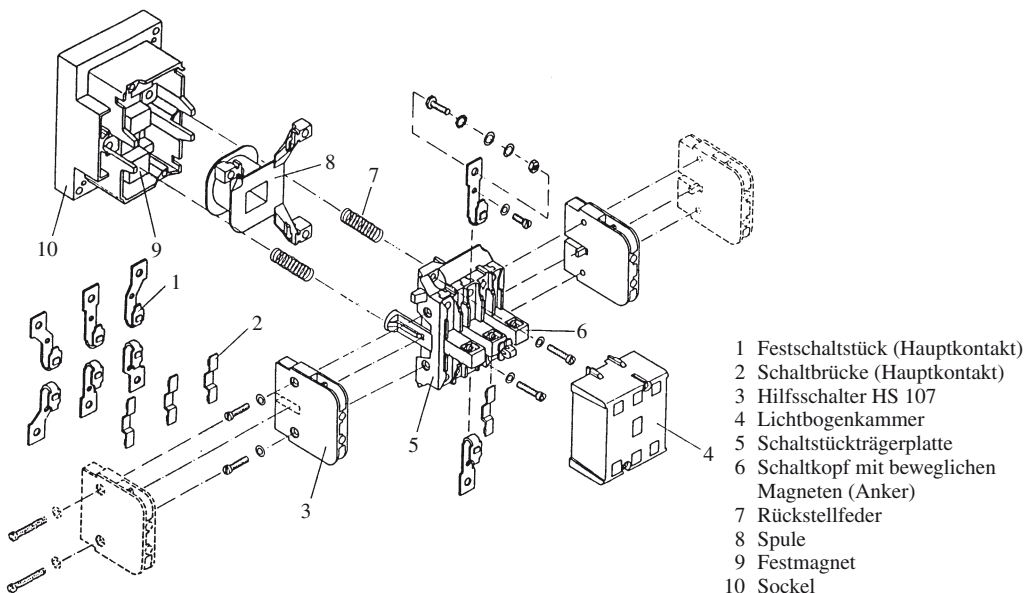


**Bild I-1** Explosionszeichnung als Serviceplan

**Tabelle I-2** Schutzarten nach IEC 529/DIN 40050

|   | Schutzumfang IP xx                            |                                              |
|---|-----------------------------------------------|----------------------------------------------|
|   | Berührungs- und Fremdkörperschutz             | Wasserschutz                                 |
| 0 | kein Schutz gegeben                           | kein Schutz gegeben                          |
| 1 | Schutz gegen Fremdkörper $d > 50 \text{ mm}$  | Schutz gegen senkrecht fallendes Tropfwasser |
| 2 | Schutz gegen Fremdkörper $d > 12 \text{ mm}$  | Schutz gegen schräg fallendes Tropfwasser    |
| 3 | Schutz gegen Fremdkörper $d > 2,5 \text{ mm}$ | Schutz gegen Sprühwasser                     |
| 4 | Schutz gegen Fremdkörper $d > 1 \text{ mm}$   | Schutz gegen Spritzwasser                    |
| 5 | Schutz gegen Staubablagerung                  | Schutz gegen Strahlwasser                    |
| 6 | Schutz gegen Staubeintritt                    | Schutz bei Überflutung                       |
| 7 | –                                             | Schutz beim Eintauchen                       |
| 8 | –                                             | Schutz beim Untertauchen                     |

getrennt sind. Gehäuse aus elektrisch leitfähigen Materialien werden mit einem Anschluss für den Schutzleiter PE/PEN versehen.

Die Einteilung der Betriebsmittel in Schutzarten hat eine andere Bedeutung. Nach IEC 529 (1976)/DIN 40050 (1980) werden mechanische Eigenschaften eines Betriebsmittels festgelegt, nämlich die Abdichtung, sprich Kapselung, gegen feste Fremdkörper und gegen Wasser. Die jeweils gültige Schutzart wird durch ein Kurzzeichen angegeben, das aus den Buchstaben IP (engl.: international protection) und zwei Kennziffern nach Tabelle I-2 besteht. Die erste Kennziffer gibt den Berührungs- und Fremdkörperschutz und die zweite Kennziffer den Wasserschutz an.

Aus Betriebsgründen notwendige Gehäuseöffnungen (z.B. Steckverbindungen oder zur Kühlung erforderliche Öffnungen) müssen so beschaffen sein, dass mit dem „IEC-Prüffinger“ nach DIN 57470/VDE 0470 keine aktiven Teile berührt werden können.

Kunststoff-Leergehäuse für die Aufnahme von Schaltern und Schützen werden nach IP 54, IP 55 oder IP 65 ausgefertigt. Aus Kostengründen ist die Schutzart nicht zu hoch anzusetzen.

Zusätzliche Schutzarten nach VDE 0170/171 betreffen den Schlagwetter- und Explosionsschutz.

Die Leitungseinführung in die Gehäuse erfolgt über Kabeltüllen bzw. Kabelverschraubungen nach DIN 43620 mit normierten Bohrungen mit Pg-Gewinde oder Vorprägungen im Gehäuse.

Für die Errichtung von Verteileranlagen in Schaltanlagen gilt die Norm DIN VDE 0660/IEC 947, EN 60947, für die Errichtung von Installationsverteilem und Zählerplätze gilt DIN VDE 0603.

Die Gehäuse können Schnellbefestigungsschienen (Hutschiene u.ä.) für Kleinschütze, Schmelzsicherungen, Zeitrelais, LS-Automaten und weitere Klein-

geräte nach DIN 46277/EN 50022 enthalten. Für Gehäuseabmessungen sollte das 25 mm Rastergrundmaß nach DIN 43660 verwendet werden, also z.B. 150 mm, 175 mm, 187,5 mm, 225 mm, ... 750 mm.

Schalter sind Betriebsmittel, die elektrische Geräte oder Anlagen von anderen Anlagen oder Geräten in der Weise trennen, dass sie Strompfade verbinden, unterbrechen oder trennen. Schalter werden nach VDE 0660 unterschieden hinsichtlich ihrer Bauform, ihrem mechanischen Verhalten in den Schaltstellungen, nach der Betätigungsart, nach dem Schaltvermögen, nach dem Verwendungszweck und nach der Art der Lichtbogenlöschung.

Tabelle I-3 gibt die wichtigsten grundlegenden Schaltzeichen nach DIN 40900/IEC 617 für die Darstellung von Schaltern und Schaltgeräten wieder. Nicht alle Schaltereigenschaften sind durch Schaltzeichen darstellbar.

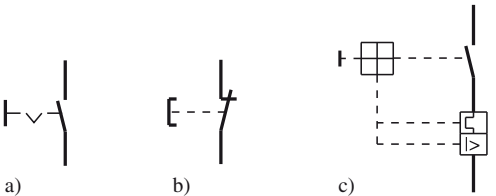
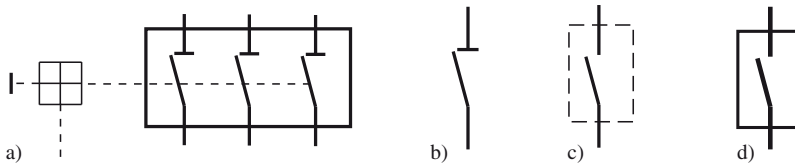


**Bild I-2** Schaltglieder mit verschiedenen Antrieben  
a) Schließer als Rastschalter mit Handantrieb  
b) Öffner als Tastschalter, Betätigung durch Drücken  
c) einpoliger Schlossschalter mit elektrothermischer und -magnetischer Auslösung

**Tabelle I-3** Schaltglieder, Antriebe und Schaltgeräte nach DIN 40900/IEC 617

| Benennung                                                     |                                                                                       | DIN 40900/IEC 617 |  | Antriebe                                             | Steuergeräte                                                                        |                                                                                                |
|---------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|--|------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Schaltglieder                                                 |                                                                                       |                   |  |                                                      |                                                                                     |                                                                                                |
| Schließer                                                     |    |                   |  | Handantrieb, allgemein                               |    | Druckschalter (nicht rastend)                                                                  |
| Öffner                                                        |    |                   |  | Betätigung durch Drücken                             |    | Tastschalter mit Schließer und Öffner, handbetätigt durch Drücken                              |
| Wechsler mit Unterbrechung                                    |    |                   |  | Betätigung durch Ziehen                              |    | Tastschalter mit Raststellung und 1 Schließer, handbetätigt durch Drücken                      |
| Voreilender Schließer eines Kontaktsatzes                     |    |                   |  | Betätigung durch Drehen                              |    | Tastschalter mit Raststellung und 1 Öffner, handbetätigt durch Schlagen (z.B. Pilzdrucktaster) |
| Nacheilender Öffner eines Kontaktsatzes                       |    |                   |  | Betätigung durch Schlüssel                           |    | Grenz-/Endschalter                                                                             |
| Schließer, schließt verzögert bei Betätigung                  |    |                   |  | Betätigung durch Rolle, Fühler                       |    | Schließer                                                                                      |
| Öffner, schließt verzögert bei Rückfall                       |    |                   |  | Kraftantrieb allgemein                               |    | Öffner                                                                                         |
| Antriebe elektromechanisch, elektromagnetisch                 |                                                                                       |                   |  | Schaltchloß mit mechanischer Freigabe                |    | Näherungsschalter induktiv, Schließer-verhalten                                                |
| Elektromechanischer Antrieb, allgemein, Relaispule, allgemein |    |                   |  | Betätigung durch Motor                               |    | Druckwächter, öffnend                                                                          |
| Antrieb mit besonderen Eigenschaften, allgemein               |    |                   |  | Notschalter                                          |    | Schwimmerschalter, schließend                                                                  |
| Elektromechanischer Antrieb mit Ansprechverzögerung           |   |                   |  | Betätigung durch elektromagnetischen Überstromschutz |  |                                                                                                |
| Elektromechanischer Antrieb mit Rückfallverzögerung           |  |                   |  |                                                      |                                                                                     |                                                                                                |

| Elektromechanischer Antrieb mit Ansprech- und Rückfallverzögerung                   | Betätigung durch thermischen Überstromschutz                                      | 3poliger Leistungsschalter                                                        | Schaltgeräte                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|                                                                                     |  |  |  |
|                                                                                     |  |  |  |

**Bild I-3** Schaltgeräte (VDE 0660)

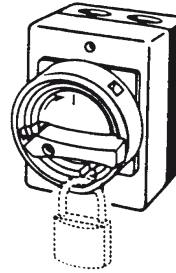
- a) dreipoliger Leistungstrenner  
b) Trennschalter, Lastschalter, Leistungsschalter

Die Schaltglieder nach Tabelle I-3 können einzeln oder in Gruppen beliebig kombiniert werden. Der Antrieb der Schaltglieder kann per Hand, durch Motor, elektromagnetisch oder elektromechanisch erfolgen. Die Antriebssymbole können je nach Funktionsabsicht den Schaltgliedern zugeordnet werden. Während bei Rastschaltern das Schaltglied in der jeweiligen Schaltstellung bleibt, kehrt das Schaltglied von Tastschaltern bei Aufhebung des Tastdruckes selbsttätig in die Ausgangsstellung zurück. Schlossschalter nach Bild I-2 sind Schalter mit Rückstellkraft und mechanischer Sperre, wobei eine Freiauslösung integriert ist. Die Freigabe der Sperre kann per Hand erfolgen, aber auch, wie hier dargestellt, durch elektrothermische und elektromagnetische Überstromauslösung.

Die gestrichelte Wirklinie wird häufig weggelassen, wenn die Funktion eindeutig zugeordnet ist. Mehrpolige Schlossschalter nach Bild I-3 werden nach DIN 40900/IEC 617 auch als Schaltgeräte bezeichnet.

Die Einteilung der Schalter nach ihrem Schaltvermögen erfolgt nach VDE 0660. Leerschalter bzw. Trennschalter dienen ausschließlich zum fast stromlosen Schalten von Stromkreisen. Sie sollten nur als NH-Sicherungstrenner vor einem Leistungsschalter verwendet werden.

Leistungsschalter haben ein Einschalt- und Ausschaltvermögen in Höhe der möglichen Kurzschlussströme, während Motorschalter zum Schalten von Motoren geeignet sind und für den Anlaufstrom der Motore bemessen sind. Leistungsschalter werden vornehmlich an Netzschaltstellen mit Dauereinschaltung oder geringer Schalzhäufigkeit verwendet. Sie können nach VDE 0113 auch als Hauptschalter verwendet werden,

**Bild I-4**

„Abschliessbarer“ Hauptschalter als Reparaturschalter

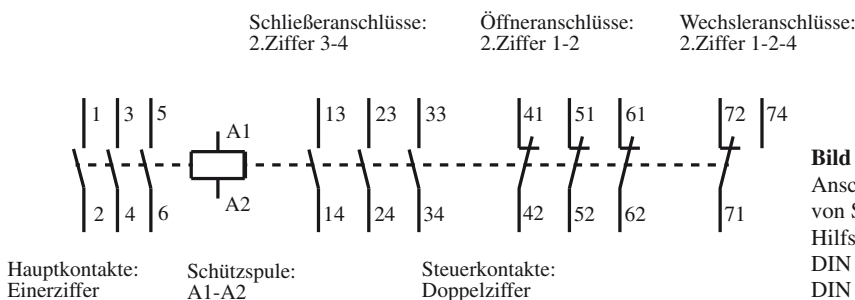
den, die für Be- und Verarbeitungsmaschinen vorgeschrieben sind und im Reparaturfall eine Maschine gänzlich vom Netz trennt. Es werden häufig Nockenschalter mit abschließbarem Antrieb nach Bild I-4 verwendet. Ein einfaches Einhängebügelschloss bringt hier Sicherheit.

Lastschalter haben ein Schaltvermögen bis etwa zum doppelten Nennstrom.

VDE 0660 beschreibt auch Hilfsstromschalter, die vornehmlich in Steuerstromkreisen als Taster, Steuerkontakte an Schützen und Hilfsschalter verwendet werden. An die Kontakte werden nur geringe Leistungsanforderungen gestellt.

Haupt- oder Leistungsschütze verfügen über Kontakte für große Leistungen und zusätzliche sogenannte Hilfskontakte, während Hilfsschütze ohne Leistungskontakte gebaut werden, da sie ausschließlich zu Steuerungszwecken gebaut werden.

Nach DIN EN 50005 und DIN EN 50011/50012 erfolgt die Anschlusskennzeichnung von Schützen und Hilfsschützen gemäß Bild I-5. Die Schützspule hat die Anschlusskennung A1-A2, die Hauptkontakte haben die Einerziffern 1–2/3–4/5–6 während die

**Bild I-5**

Anschlusskennzeichnung von Schützen und Hilfsschützen nach DIN EN 50005 und DIN EN 50011/50012



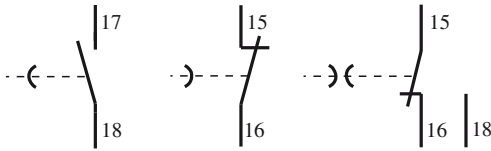


**Bild I-6** Kennzeichnung von zeitverzögerten Steuerkontakten

Steuerkontakte mit Doppelziffern gekennzeichnet sind. Mit der 1. Ziffer werden die Kontakte fortlaufend nummeriert (Ordnungszahl) während die 2. Ziffer einen Öffner, Schließer oder Wechsler (Funktionsziffer) kennzeichnet.

Zeitrelais haben eine Kontaktkennung nach DIN EN 50042 gemäß Bild I-6, während die Kontaktkennung für die Wechsler an thermischen Überstromauslösern (z.B. Motorschutzrelais) nach Bild I-7 erfolgt.

Steckvorrichtungen sind zweiteilige Schaltgeräte zum Verbinden von ortsfesten Betriebsmitteln mit beweglichen Geräten oder Leitungen. Sie bestehen aus Stecker und Steckdose bzw. Kupplung innerhalb eines Leitungszuges. Es werden Steckvorrichtungen mit und ohne Schutzleiter verwendet sowie zweipolige und vielpolige Steckvorrichtungen für vielfältige Aufgaben zum Einsatz gebracht.

Steckverbinder (Mess- und Federleisten), Steckverbinderleisten nach DIN 41612 und andere (z.B. HF- und NF-Steckverbinder nach DIN 47284) werden als Steckerbuchse(n) und Steckerstift(e) nach DIN 40713 gemäß Bild I-8 gezeichnet.

Damit die elektrischen Geräte verschiedener Hersteller von der Konstruktion her kompatibel sind, wurde mit DIN 41494 eine einheitliche „Bauweise für elektronische Einrichtungen“ erstellt. Diese Norm

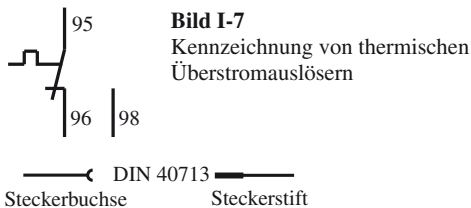


**Bild I-7**  
Kennzeichnung von thermischen Überstromauslösern

DIN 40717

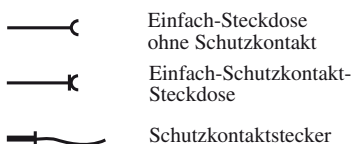


**Bild I-8** Einfache Steckverbindungen nach DIN 40713 und DIN 40717

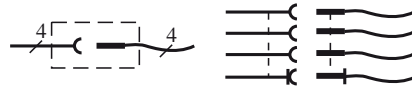


**Bild I-9** Dreipoliger Steckverbinder mit Schutzkontakt

entspricht der sog. „19-Zoll“-Bauweise. Das hierbei bevorzugte Leiterplattenformat für die Messerleisten ist die sog. „Europakarte“. Normal ist, dass die Federleiste beim Einbau dem Gestell, sprich Gehäuse, zugeordnet ist.

Als zweipolige Steckvorrichtung mit Schutzleiter wird in Deutschland das sog. „Schuko®-System“ mit Steckgeräten gemäß DIN 49440 verwendet. Die zeichnerische Darstellung erfolgt nach DIN 40717 gemäß Bild I-8. Dreipolige Steckverbinder mit Schutzkontakt werden nach Bild I-9 gezeichnet.

Für die Herstellung von mehrpoligen Industriesteckvorrichtungen, bekannt unter der nicht mehr gültigen Norm CEE 17, gelten VDE 0623 Teil 1 und Teil 20, die den Normen IEC 309-1 und IEC 309-2 (ab 1995 allein gültig) entsprechen. Industriesteckvorrichtungen haben ein rundes Profil gemäß Bild I-10b mit einer Unverwechselbarkeitsnut bzw. -nase, die der Sicherstellung der richtigen Einstecklage des Steckers dient. Die Buchsen bzw. Stifte sind auf einem Kreis (Teilkreis) angeordnet. Die Schutzkontakte müssen beim Einführen des Steckers früher Kontakt geben und sich später trennen als die den Betriebsstrom führenden Kontakte. Die Lage der Buchsen und Stifte für die genormten Netzspannungen nach DIN IEC 38 stellt Bild I-10a dar. Hier wird die Unverwechselbarkeit zusätzlich durch die Lage der Kontakte gewährleistet.

Sogenannte Pilotkontakte nach Bild I-10b sorgen bei Bedarf dafür, dass die Steckverbindung nur im spannungslosen Zustand betätigt werden kann. Diese Kontakte schließen beim Einstecken nach den übrigen Kontakten bzw. öffnen beim Herausziehen vor den übrigen Kontakten, so dass z.B. nach Bild I-11 eine Schützschaltung die Leitung spannungslos schalten kann.

*Elektronische Bauelemente* werden nach ihrer technischen Funktion und Leistung unter Berücksichtigung ihrer individuellen Grenz- und Kennwerte ausgewählt. Zusätzlich werden sie aber auch nach dem Grad ihrer klimatischen und mechanischen Beanspruchung und hinsichtlich ihrer Zuverlässigkeit, sprich ihrer Ausfallrate bestimmt.

Nach DIN 40040 werden die „Anwendungsklassen und Zuverlässigkeitsangaben für Bauelemente der Nachrichtentechnik und Elektronik“ bestimmt und gekennzeichnet. Tabelle I-4 bietet eine Übersicht. Zur Kennzeichnung der Anwendungsklassen werden drei bis achtstellige Buchstabenkombinationen verwendet, die entsprechend dem Schlüssel nach Tabelle I-5 zusammengefügt werden:



| Pos. und Bild | I in A | Strom-art | Netzspannung in V   | C              |
|---------------|--------|-----------|---------------------|----------------|
| a             | 16     | E         | 220 bis 240         | 6 <sup>h</sup> |
| b             | 32     |           | 380 bis 415         | 9 <sup>h</sup> |
| c             |        | D         | 220/380 bis 240/415 | 6 <sup>h</sup> |
| d             | 63     | E         | 220 bis 240         | 6 <sup>h</sup> |
| e             |        |           | 380 bis 415         | 9 <sup>h</sup> |
| f             | 125    | D         | 3× 380 bis 415      | 6 <sup>h</sup> |
| g             |        |           | 220/380 bis 240/415 | 6 <sup>h</sup> |

C Code für die Lage der Schutzleiterbuchse als Uhrzeigerstellung („Uhrzeit“);  
E Einphasen-Wechselstrom;  
D Drehstrom

**Bild I-10** Beispiele von Steckdosen für die genormten Netzspannungen nach DIN IEC 38

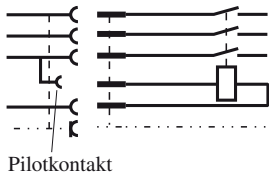


**Bild I-11** Steckverbinder mit Pilotkontakt

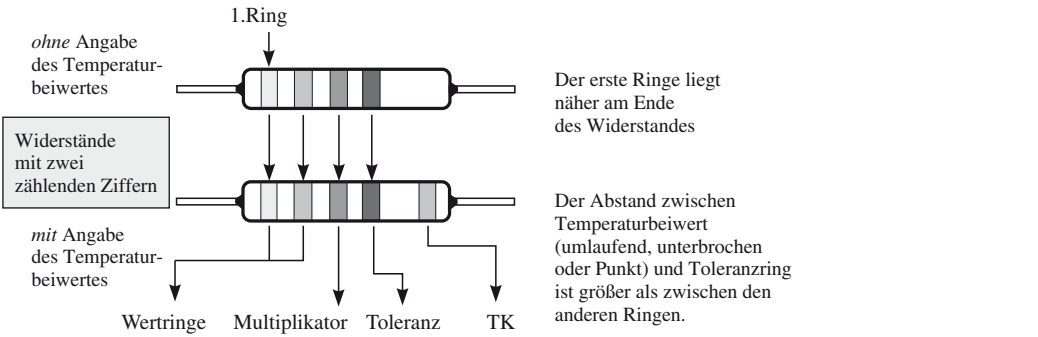
Über Stellen, die den *Kennbuchstaben X* tragen, werden *keine Angaben* gemacht. Der *Kennbuchstabe Z* weist auf *Einzelbestimmungen* hin, die den Herstellerangaben direkt zugeordnet werden müssen. Widerstände und Kondensatoren werden als einstellbare (im Wert variierbare) Bauteile hergestellt, aber auch als Festwiderstände bzw. Festkondensatoren.

Die Kennzeichnung erfolgt durch Farbcode nach DIN 41429 oder durch Zahlen und Buchstaben nach DIN 40825. Bei DIN 41429 kann die Codierung mit zwei oder drei zählenden Ziffern erfolgen. In Bild I-12 ist die Kennzeichnung von Widerständen in der ersten Version hinsichtlich der Leserichtung und der Codierung gemäß Farbauswahl dargestellt.

Da bei der Herstellung von Widerständen und Kondensatoren bei großer Serien- und Massenfertigung die ausgewiesenen Nennwerte ohne erhöhte Kosten nicht genau eingehalten werden können, erhalten diese unter Berücksichtigung ihrer Funktion und der erforderlichen Genauigkeit maximal zugelassene Abweichungen, Toleranzen. Von festgelegten Toleranzen ausgehend werden nach DIN 41426 Staffelnwerte für sogenannte E-Reihen (Internationale Normreihen) berechnet als geometrische Reihen.

**Tabelle I-5** Buchstabenkombination und ihre Bedeutung

|           |                        |                              |
|-----------|------------------------|------------------------------|
| 1. Stelle | Untere Grenztemperatur | Klimatische Anwendungsklasse |
| 2. Stelle | Obere Grenztemperatur  |                              |
| 3. Stelle | Feuchtebeanspruchung   |                              |
| 4. Stelle | Ausfallquotient        | Zuverlässigkeitsangabe       |
| 5. Stelle | Beanspruchungsdauer    |                              |
| 6. Stelle | Mechan. Beanspruchung  | Mechan. Anwendungsklasse     |
| 7. Stelle | Luftdruck              |                              |
| 8. Stelle | Sonderbeanspruchung    |                              |



| Kennfarbe | Wertziffer | Multiplikator                               | Toleranz      | Temperaturbeiwert $\alpha_R$<br>$10^{-6} \text{ K}^{-1}$ | Bemerkungen                                                                                                                                                                                                              |
|-----------|------------|---------------------------------------------|---------------|----------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| keine     | –          | –                                           | $\pm 20$      | –                                                        | Die Farben gold und silber sind leitend und deshalb nicht immer verwendbar.<br>Ausweichmöglichkeiten:<br>statt gold: für $10^{-1}$ weiß<br>für $\pm 5\%$ grün<br>statt silber: für $10^{-2}$ grau<br>für $\pm 10\%$ weiß |
| silber    | –          | $\times 10^{-2} \Omega = 0,01 \Omega$       | $\pm 10$      | –                                                        |                                                                                                                                                                                                                          |
| gold      | –          | $\times 10^{-1} \Omega = 0,1 \Omega$        | $\pm 5$       | –                                                        |                                                                                                                                                                                                                          |
| schwarz   | 0          | $\times 10^0 \Omega = 1,0 \Omega$           | –             | $\pm 200$                                                |                                                                                                                                                                                                                          |
| braun     | 1          | $\times 10^1 \Omega = 10 \Omega$            | $\pm 1$       | $\pm 100$                                                |                                                                                                                                                                                                                          |
| rot       | 2          | $\times 10^2 \Omega = 100 \Omega$           | $\pm 2$       | $\pm 50$                                                 |                                                                                                                                                                                                                          |
| orange    | 3          | $\times 10^3 \Omega = 1 \text{ k}\Omega$    | –             | $\pm 15$                                                 |                                                                                                                                                                                                                          |
| gelb      | 4          | $\times 10^4 \Omega = 10 \text{ k}\Omega$   | –             | $\pm 25$                                                 |                                                                                                                                                                                                                          |
| grün      | 5          | $\times 10^5 \Omega = 100 \text{ k}\Omega$  | $\pm 0,5 \%$  | –                                                        |                                                                                                                                                                                                                          |
| blau      | 6          | $\times 10^6 \Omega = 1 \text{ M}\Omega$    | $\pm 0,25 \%$ | –                                                        |                                                                                                                                                                                                                          |
| violett   | 7          | $\times 10^7 \Omega = 10 \text{ M}\Omega$   | $\pm 0,1 \%$  | –                                                        |                                                                                                                                                                                                                          |
| grau      | 8          | $\times 10^8 \Omega = 100 \text{ M}\Omega$  | –             | –                                                        |                                                                                                                                                                                                                          |
| weiß      | 9          | $\times 10^9 \Omega = 1000 \text{ M}\Omega$ | –             | –                                                        |                                                                                                                                                                                                                          |

Bild I-12 Kennzeichnung von Widerständen durch Farbcode (Auszug)

| E-Reihen (Auszug)                                              |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | Nach DIN 41426 |      |      |      |      |     |      |     |
|----------------------------------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|----------------|------|------|------|------|-----|------|-----|
| E6                                                             | 1,0  |      |      | 1,5  |      |      | 2,2  |      |      | 3,3  |      |      | 4,7  |      |      | 6,8  |                |      |      |      |      |     |      |     |
| E12                                                            | 1,0  |      | 1,2  | 1,5  | 1,8  | 2,2  | 2,7  | 3,3  | 3,9  | 4,7  | 5,6  | 6,8  | 8,2  |      |      |      |                |      |      |      |      |     |      |     |
| E24                                                            | 1,0  | 1,1  | 1,2  | 1,3  | 1,5  | 1,6  | 1,8  | 2,0  | 2,2  | 2,4  | 2,7  | 3,0  | 3,3  | 3,6  | 3,9  | 4,3  | 4,7            | 5,1  | 5,6  | 6,2  | 6,8  | 7,5 | 8,2  | 9,1 |
| E48                                                            | 1,00 |      | 1,21 |      | 1,47 |      | 1,78 |      | 2,15 |      | 2,61 |      | 3,16 |      | 3,83 |      | 4,64           |      | 5,62 |      | 6,81 |     | 8,25 |     |
|                                                                | 1,05 |      | 1,27 |      | 1,54 |      | 1,87 |      | 2,26 |      | 2,74 |      | 3,32 |      | 4,02 |      | 4,87           |      | 5,90 |      | 7,15 |     | 8,66 |     |
|                                                                | 1,10 |      | 1,33 |      | 1,62 |      | 1,96 |      | 2,37 |      | 2,87 |      | 3,48 |      | 4,22 |      | 5,11           |      | 6,19 |      | 7,50 |     | 9,09 |     |
|                                                                | 1,15 |      | 1,40 |      | 1,69 |      | 2,05 |      | 2,49 |      | 3,01 |      | 3,65 |      | 4,42 |      | 5,36           |      | 6,49 |      | 7,87 |     | 9,53 |     |
| DIN-Reihe                                                      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | Nach DIN 323   |      |      |      |      |     |      |     |
| R5                                                             | 1,00 |      |      | 1,60 |      |      | 2,50 |      |      | 4,00 |      |      | 6,30 |      |      |      |                |      |      |      |      |     |      |     |
| R10                                                            | 1,00 |      | 1,25 |      | 1,60 |      | 2,00 |      | 2,50 |      | 3,15 |      | 4,00 |      | 5,00 |      | 6,30           |      | 8,00 |      |      |     |      |     |
| R20                                                            | 1,00 | 1,12 | 1,25 | 1,40 | 1,60 | 1,80 | 2,00 | 2,24 | 2,50 | 2,80 | 3,15 | 3,55 | 4,00 | 4,50 | 5,00 | 5,60 | 6,30           | 7,10 | 8,00 | 9,00 |      |     |      |     |
| R40                                                            | 1,00 | 1,12 | 1,25 | 1,40 | 1,60 | 1,80 | 2,00 | 2,24 | 2,50 | 2,80 | 3,15 | 3,55 | 4,00 | 4,50 | 5,00 | 5,60 | 6,30           | 7,10 | 8,00 | 9,00 |      |     |      |     |
|                                                                | 1,06 | 1,18 | 1,32 | 1,50 | 1,70 | 1,90 | 2,12 | 2,36 | 2,65 | 3,00 | 3,35 | 3,75 | 4,25 | 4,75 | 5,30 | 6,00 | 6,70           | 7,50 | 8,50 | 9,50 |      |     |      |     |
| Bei jeder Reihe können die üblichen Toleranzen gewählt werden. |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |                |      |      |      |      |     |      |     |

Bild I-13 E-Reihen und DIN-Reihen (Auszüge)

| Schicht-Festwiderstände                                                    |                                                                                                                                     |                                                                                                                                    |                                                                                                                                    |                                                          |                                                                                  |                                                    |                                                |
|----------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| Schichtmaterial                                                            | Kohle                                                                                                                               |                                                                                                                                    |                                                                                                                                    | Kohle-<br>gemisch                                        | Metall                                                                           | Metall-<br>oxid                                    | Metall-<br>glasur                              |
| Anforderungen                                                              | allgemein                                                                                                                           | erhöht                                                                                                                             | erhöht                                                                                                                             | allgemein                                                | erhöht                                                                           | erhöht                                             | erhöht                                         |
| DIN                                                                        | 44051 (983)                                                                                                                         | 44052 (9.83)                                                                                                                       | 44055 (9.83)                                                                                                                       | 44054 (9.83)                                             | 44061 (9.83)                                                                     | 44063 (9.83)                                       | 44064 (9.83)                                   |
| Anwendungsklasse                                                           | FKF (FHF)                                                                                                                           | FKF                                                                                                                                | FKF                                                                                                                                | FKF                                                      | FKF                                                                              | FHF<br>FZF                                         | FHF                                            |
| Widerstandswertereihe                                                      | E24                                                                                                                                 | E24                                                                                                                                | E24                                                                                                                                | E24                                                      | E24                                                                              | E24                                                | E24                                            |
| Widerstands-<br>abweichung<br>bei Anlieferung                              | $\pm 2 \%$<br>$\pm 5 \%$                                                                                                            | $\pm 2 \%$<br>$\pm 5 \%$                                                                                                           | $\pm 1 \%$<br>$\pm 2 \%$                                                                                                           | $\pm 2 \%$<br>$\pm 10 \%$                                | $\pm 0,5 \%$<br>$\pm 1 \%$<br>$\pm 2 \%$                                         | $\pm 2 \%$<br>$\pm 5 \%$                           | $\pm 0,5 \%$<br>$\pm 1 \%$<br>$\pm 2 \%$       |
| Temperatur-<br>koeffizient in<br>$10^{-6}/K$ (zwischen<br>20 °C und 70 °C) | -150 bis -1500                                                                                                                      |                                                                                                                                    |                                                                                                                                    | $\pm 1300$                                               | B <sup>1)</sup> : $0 \pm 100$<br>C: $0 \pm 50$<br>D: $0 \pm 25$<br>E: $0 \pm 15$ | $\pm 250$                                          | B <sup>1)</sup> : $0 \pm 100$<br>C: $0 \pm 50$ |
| $\Delta R_{zul}$ nach 1000 h<br>Dauerprüfung bei $P_{70}$                  | $\leq \pm(5 \% \cdot R + 0,1 \Omega)$<br>bis 1 M $\Omega$<br>$+10 \% \cdot R$<br>$-5 \% \cdot R$<br>über 1 M $\Omega$               | $\leq \pm(2 \% \cdot R + 0,05 \Omega)$<br>bis 1 M $\Omega$<br>$+4 \% \cdot R$<br>$-2 \% \cdot R$<br>über 1 M $\Omega$              | $\leq \pm(1 \% \cdot R + 0,05 \Omega)$<br>bis 1 M $\Omega$<br>$+2 \% \cdot R$<br>$-1 \% \cdot R$<br>über 1 M $\Omega$              | $\leq \pm 4 \% \cdot R$<br>$-2 \cdot R$<br>$+0,1 \Omega$ | $\leq +1 \% \cdot R$<br>$-0,5 \% \cdot R$<br>$+0,05 \Omega$                      | $\leq \pm 2 \% \cdot R$<br>$+0,1 \Omega$           | $\leq \pm 1 \% \cdot R$<br>$+0,1 \Omega$       |
| $\Delta R_{zul}$ nach 8000 h<br>Dauerprüfung bei $P_{70}$                  | $\leq (+10 \% \cdot R - 1 \% \cdot R + 0,1 \Omega)$<br>bis 1 M $\Omega$<br>$+20 \% \cdot R$<br>$-5 \% \cdot R$<br>über 1 M $\Omega$ | $\leq (+4 \% \cdot R - 2 \% \cdot R + 0,05 \Omega)$<br>bis 1 M $\Omega$<br>$+8 \% \cdot R$<br>$-2 \% \cdot R$<br>über 1 M $\Omega$ | $\leq (+2 \% \cdot R - 1 \% \cdot R + 0,05 \Omega)$<br>bis 1 M $\Omega$<br>$+4 \% \cdot R$<br>$-1 \% \cdot R$<br>über 1 M $\Omega$ | $\leq (+4 \% \cdot R - 15 \% \cdot R + 0,1 \Omega)$      | $\leq (+2 \% \cdot R - 0,5 \% \cdot R + 0,05 \Omega)$                            | $\leq (+4 \% \cdot R - 3 \% \cdot R + 0,1 \Omega)$ | $\leq (+2 \% \cdot R + 0,1 \Omega)$            |

<sup>1)</sup> Diese Buchstaben sind der 2. Kennbuchstabe der Baugrößebeziehung.

Bild I-14 Übersicht über Schicht-Festwiderstände

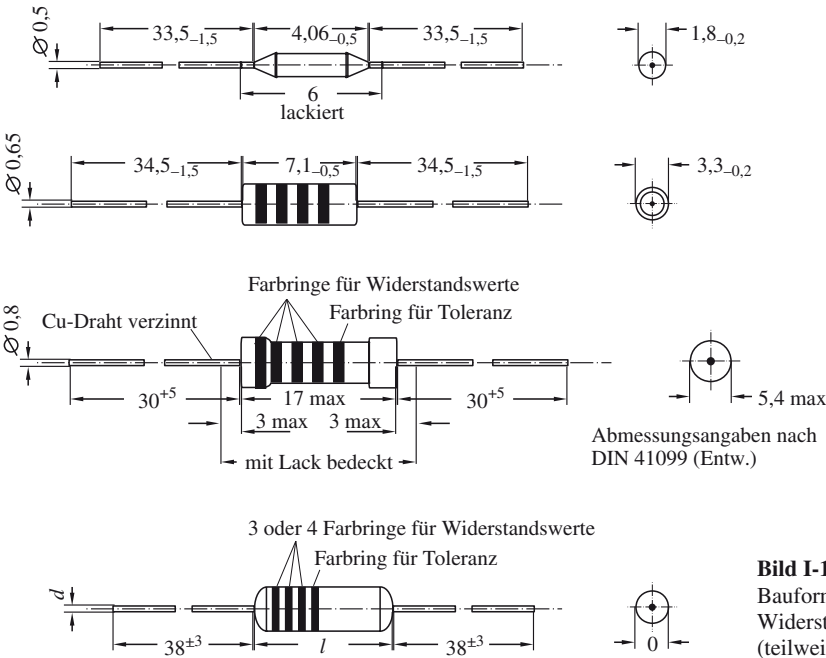
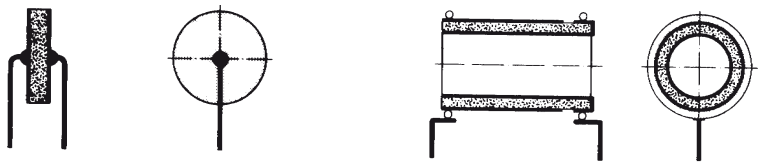
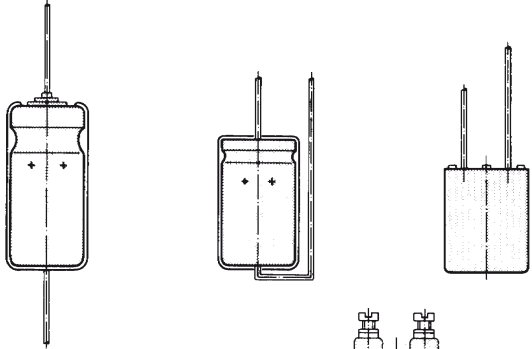


Bild I-15  
Bauformen von  
Widerständen  
(teilweise genormt)



a)



b)

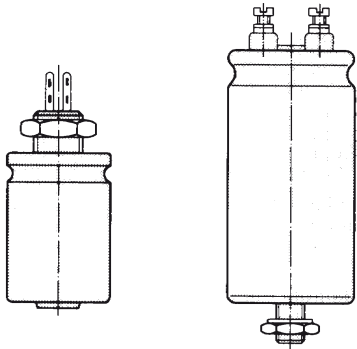
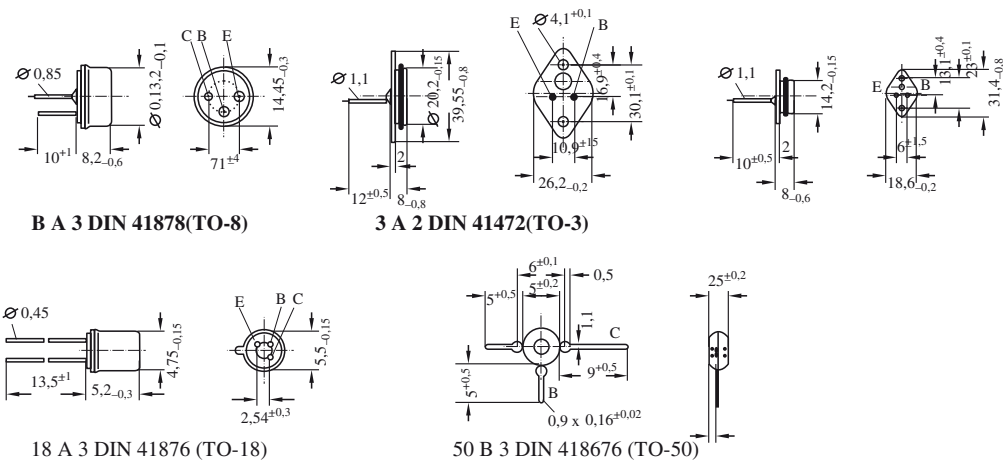
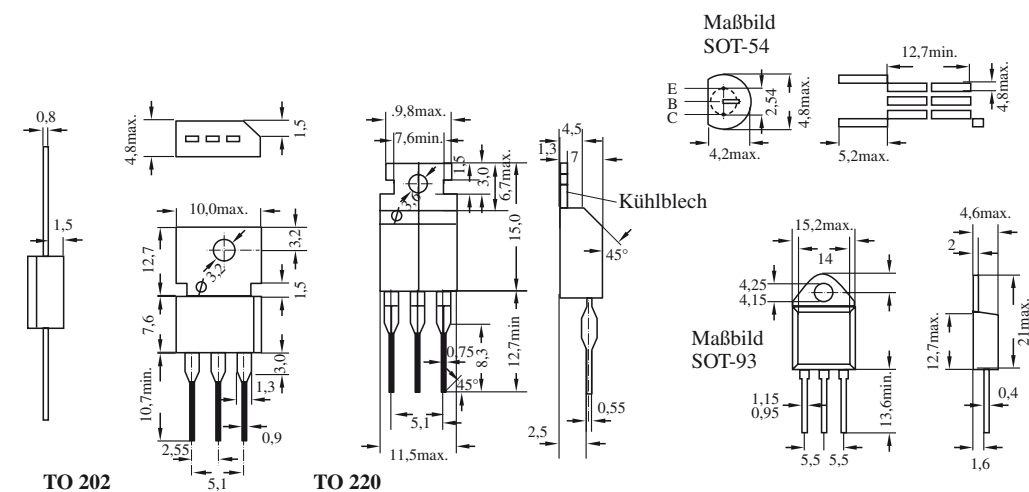


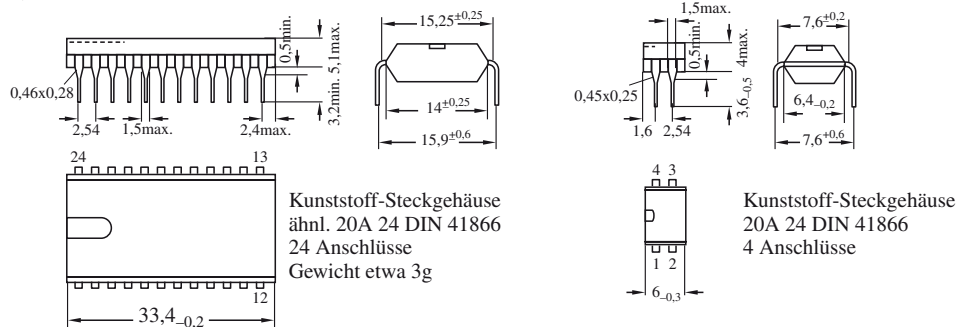
**Bild I-16**  
Auswahl an Kondensator-Bauformen  
(teilweise genormt)



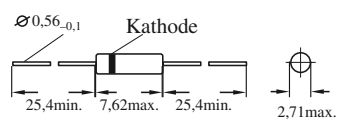
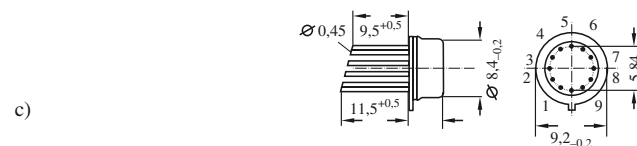
a)



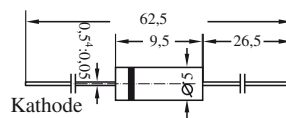
b)



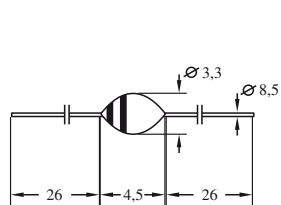
c)



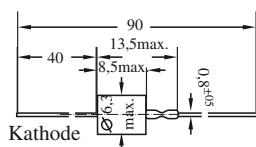
## Glasgehäuse DO-7



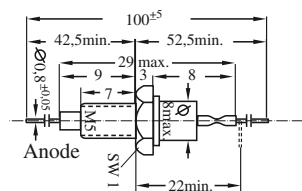
## Kunststoffgehäuse DO-13



## Sinterglasgehäuse DOM 22



## Metallgehäuse DO-13



Metallgehäuse 101 A 2

d)

**Bild I-17** Bauformen von Dioden, Transistoren und ICs (teilweise genormt)



Es sind folgende E-Reihen genormt:

- E6 = ± 20 %;     E12 = ± 10 %;     E24 = ± 5 %;
- E48 = ± 2 %;     E96 = ± 1 %;     E192 = ± 0,5 %;

Außer nach E-Reihen sind Widerstandswerte ebenfalls nach sog. (DIN-)R-Reihen gemäß DIN 323 genormt. Bild I-13 stellt Auszüge aus E- und DIN-Reihen dar.

Eine Übersicht über Schicht-Festwiderstände auf der Basis des bisher gesagten liefert Bild I-14. Die Bauformen von Widerständen nach Bild I-15 sind nur teilweise genormt. Dies gilt auch für Kondensatoren nach Bild I-16, wobei hier die Anzahl aufgrund der verwendeten Materialien größer ist.

Halbleiter-Bauelemente wie Dioden, Transistoren und ICs sind ebenfalls nur z.T. genormt. Bei den ICs und den Bausteinen aus dem Computerbau ist die Normung der Bauformen am weitesten fortgeschritten, was die Kompatibilität von Mikrochips erheblich erhöht. Die Übersicht nach Bild I-17 zeigt nur eine Auswahl an genormten und nicht genormten Bauformen, wobei zu beachten ist, dass zahlreiche Bauformen das Rastermaß von 2,54 mm einhalten, was die Layouterstellung vereinfacht.

4 Nutzen der Normung

Die *Technische Zeichnung als Informationsträger* dient bei einem Fertigungs- bzw. Erstellungsauftrag als Verständigungsmittel zwischen der Planungs- bzw. Projektierungsstelle und der Werkstatt bzw. der Montagestelle. Durch das durchgängige Verwenden der Zeichnungsnormen wird die *Zeichenarbeit erleichtert* und eine *klare Darstellung des Werkstückes bzw. der Anlage* erreicht.

Die Normung stellt durch Vereinheitlichung eine zweckdienliche Ordnung von Erzeugnissen und Verfahren her. Sie legt die Form, Größe und Ausführung gleichartiger Erzeugnisse fest, so dass eine beliebige Austauschbarkeit von Teilen herbeigeführt wird. Dieser Umstand ermöglicht die Serien- und Massenfertigung und die damit verbundene Automatisierung. Normen sind bewährte Lösungen für häufig wiederkehrende Aufgaben.

Technische Fortschritte können immer nur mit zeitlichem Verzug eingearbeitet werden, so dass die Normen eher konservativ denn innovativ sind.

II Schaltungsunterlagen

Beim Zeichnen von Schaltplänen werden alle zugehörigen Maschinen, Geräte, Schaltteile und Leitungen nicht maßstabsgetreu und der tatsächlichen Ausführung ähnlich gezeichnet, sondern durch *genormte graphische Symbole* dargestellt.

Bei der Erstellung von *Schaltungsunterlagen für die Elektrotechnik* sind zusätzlich zur rein zeichnerischen Darstellung die einschlägigen *elektrotechnischen Vorschriften und Normen*, insbesondere DIN 57100/ VDE 0100, zu beachten.

Tabelle II-1 Wichtige VDE-Bestimmungen

| Wichtige VDE-Bestimmungen |                                                                                                                                                                                |
|---------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>VDE 0100</b>           | Bestimmungen für das Errichten von Starkstromanlagen bis 1000 V                                                                                                                |
| VDE 0101                  | Bestimmungen für das Errichten von Starkstromanlagen über 1 kV                                                                                                                 |
| VDE 0102                  | Leitsätze für die Berechnung der Kurzschlussströme                                                                                                                             |
| VDE 0105                  | VDE-Bestimmungen für den Betrieb von Starkstromanlagen                                                                                                                         |
| VDE 0107                  | Bestimmungen für elektrische Anlagen in medizinisch genutzten Räumen                                                                                                           |
| VDE 0108                  | Bestimmungen für das Errichten und den Betrieb von Starkstromanlagen in Versammlungsstätten, Waren- und Geschäftshäusern, Hochhäusern, Beherbergungsstätten und Krankenhäusern |
| VDE 0128                  | Vorschriften für Leuchtröhrenanlagen mit Spannungen von 1000 V und darüber Merkblatt für den Betrieb elektrischer Anlagen in landwirtschaftlichen Betrieben                    |
| VDE 0132                  | Merkblatt für die Bekämpfung von Bränden in elektrischen Anlagen                                                                                                               |
| VDE 0134                  | Anleitungen zur Ersten Hilfe bei Unfällen (VDE-Druckschrift)                                                                                                                   |
| VDE 0141                  | Bestimmungen und Richtlinien für Erdungen in Wechselstromanlagen für Nennspannungen über 1 kV                                                                                  |
| VDE 0160                  | Bestimmungen für die Ausrüstung von Starkstromanlagen mit elektronischen Betriebsmitteln                                                                                       |
| VDE 0165                  | Bestimmungen für die Errichtung elektroscher Anlagen in explosionsgefährdeten Betriebsstätten                                                                                  |
| VDE 0168                  | Bestimmungen für das Errichten und den Betrieb elektrischer Anlagen in Tagebauen, Steinbrüchen und ähnlichen Betrieben                                                         |
| VDE 0190                  | Bestimmungen für das Einbeziehen von Rohrleitungen in Schutzmaßnahmen von Starkstromanlagen mit Nennspannungen bis 1000 V                                                      |
| VDE 0193                  | Richtlinien für den Anschluss und die Anbringung von Elektroden-Durchlauferhitzern                                                                                             |

Tabelle II-1 Fortsetzung

| Wichtige VDE-Bestimmungen |                                                                                                                               |
|---------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>VDE 0210</b>           | Bestimmungen für den Bau von Starkstrom-Freileitungen über 1 kV                                                               |
| VDE 0211                  | Bestimmungen für den Bau von Starkstrom-Freileitungen mit Nennspannungen bis 1000 V                                           |
| VDE 0228                  | VDE-Bestimmungen für Maßnahmen bei Beeinflussung von Fernmeldeanlagen durch Starkstromanlagen                                 |
| <b>VDE 0410</b>           | Regeln für elektrische Messgeräte                                                                                             |
| VDE 0411                  | VDE-Bestimmungen für elektronische Messgeräte und Regler                                                                      |
| VDE 0413                  | Bestimmungen für Geräte zum Prüfen der Schutzmaßnahmen in elektrischen Anlagen                                                |
| VDE 0414                  | Bestimmungen für Messwandler                                                                                                  |
| VDE 0426                  | Bestimmungen für einpolige Spannungssucher bis 250 V Wechselspannung gegen Erde                                               |
| <b>VDE 0510</b>           | Bestimmungen für Akkumulatoren und Akkumulatoren-Anlagen                                                                      |
| VDE 0530                  | Bestimmungen für umlaufende elektrische Maschinen                                                                             |
| VDE 0532                  | Bestimmungen für Transformatoren und Drosselspulen                                                                            |
| VDE 0541                  | Bestimmungen für Stromquellen zum Lichtbogenschweißen mit Wechselstrom                                                        |
| VDE 0550                  | Bestimmungen für Kleintransformatoren                                                                                         |
| <b>VDE 0612</b>           | BDE-Bestimmungen für Baustromverteiler für Nennspannungen bis 380 V Wechselspannung und für Ströme bis 630 A                  |
| VDE 0620                  | Vorschriften für Steckvorrichtungen bis 750 V 100 A                                                                           |
| VDE 0660                  | Bestimmungen für Niederspannungsschaltgeräte                                                                                  |
| VDE 0675                  | Leitsätze für den Schutz elektrischer Anlagen gegen Überspannungen                                                            |
| VDE 0680                  | Bestimmungen für Schutzbekleidung, Schutzvorrichtungen und Werkzeuge zum Arbeiten an unter Spannung stehenden Betriebsmitteln |
| <b>VDE 0701</b>           | Bestimmungen für die Instandsetzung, Änderung und Prüfung gebrauchter elektrischer Verbrauchsmittel (Geräte)                  |
| VDE 0710                  | Vorschriften für Leuchten mit Betriebsspannungen unter 1000 V                                                                 |
| VDE 0712                  | Bestimmungen für Entladungslampenzubehör mit Nennspannungen bis 1000 V                                                        |
| <b>VDE 0800</b>           | Bestimmungen für Errichtung und Betrieb von Fernmeldeanlagen einschließlich Informationsverarbeitungsanlagen                  |
| VDE 0855                  | Bestimmungen für Antennenanlagen                                                                                              |
| VDE 0860                  | Bestimmungen für netzbetriebene Rundfunk- und verwandte elektronische Geräte                                                  |
| VDE 0871                  | Bestimmungen für die Funk-Entstörung von Hochfrequenzgeräten und -anlagen                                                     |
| VDE 0874                  | VDE-Leitsätze für Maßnahmen zur Funk-Entstörung                                                                               |
| VDE 0875                  | Bestimmungen für die Funk-Entstörung von Geräten, Maschinen und Anlagen für Netzfrequenzen von 0 bis 10 kHz                   |
| VDE 0877                  | Leitsätze für das Messen von Funkstörungen                                                                                    |

Normen werden erstellt und publiziert von der Internationalen Elektrotechnischen Kommission (IEC) in *IEC-Publikationen* und vom Europäischen Komitee für elektrotechnische Normung (CENELEC) in *Europäischen Normen (EN)* für nahezu alle europäischen Länder, z.B. in DIN EN 50005 „Industrielle Niederspannungsgeräte, Anschlussbezeichnungen und Kennzahlen“ oder in sog. Harmonisierungsdokumenten, z.B. HD 21 als DIN 57281/VDE 0281 „VDE-Bestimmungen für Starkstromleitungen“.

Für nationale Normung ist die Deutsche Elektrotechnische Kommission im DIN und VDE (*Verband Deutscher Elektrotechniker*) zuständig, wobei möglichst IEC-Publikationen mit eingearbeitet

oder übernommen werden bzw. auch umgekehrt.

Eine Auswahl der wichtigsten VDE-Bestimmungen zeigt Tabelle II-1.

*Schaltungsunterlagen sind Schaltpläne, Tabellen, Diagramme und Beschreibungen, die Angaben für das Fertigen, Errichten und die Erhaltung elektrischer Anlagen vermitteln.*

Die Norm DIN 40719 legt die *Einteilung von Schaltungsunterlagen* und die entsprechenden Begriffe, wie sie in der Elektrotechnik üblich sind, fest. Schaltungsunterlagen werden in zwei Gruppen eingeteilt und zwar nach dem Zweck und der Art der Darstellung.

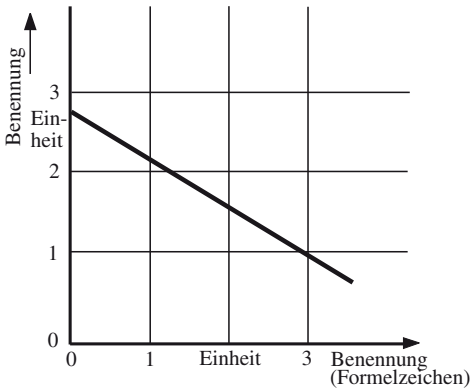


**Bild II-1** Diagrammdarstellung nach DIN 461 und DIN 40719

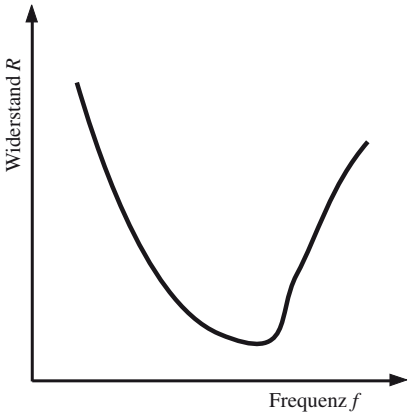


**Bild II-2** Diagramm im kartesischen Koordinatensystem

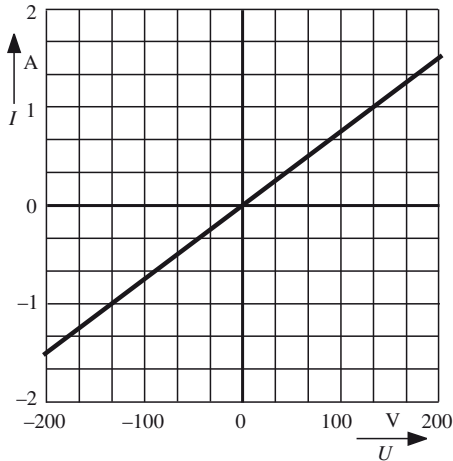


**Bild II-3** Diagramm mit linearer Einteilung

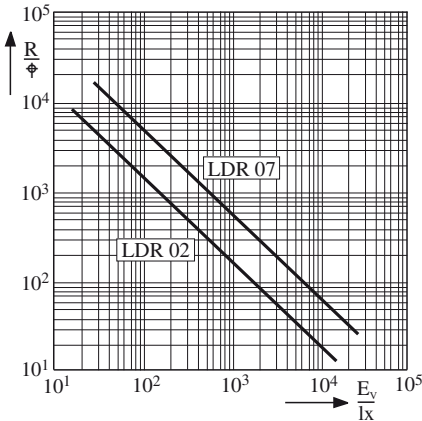


**Bild II-4** Diagramm mit doppelt-logarithmischer Einteilung

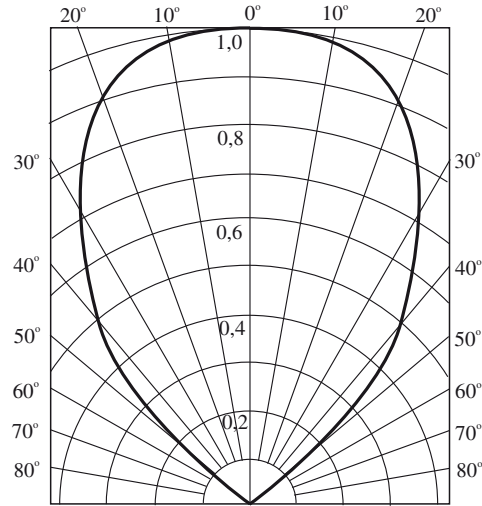


**Bild II-5** Diagramm im Polarkoordinatensystem

Ein *Schaltplan* (engl.: *diagram*) zeigt die Art, in der die verschiedenen elektrischen Betriebsmittel zueinander in Beziehung stehen und miteinander verbunden sind.

Ein *Diagramm* (engl.: *chart*) ist die graphische Darstellung errechneter oder gemessener Werte und sollte nach DIN 461 dargestellt werden. Die Linienbreiten werden nach DIN 15 etwa im Verhältnis Netz zu Achsen zu Kurve wie 1:2:4 gewählt in der Darstellung nach Bild II-1.

Prinzipiell unterscheidet man *Diagramme im kartesischen Koordinatensystem* (Bilder II-2, II-3 und II-4), *Diagramme im Polarkoordinatensystem* nach Bild II-5, *Flächendiagramme* nach Bild II-6 und *Nomogramme* nach Bild II-7.

Das Übersichtsdiagramm (z.B. charakteristische Darstellung) nach Bild II-2 wird ohne Achseneinteilung gezeichnet; auf eine nichtlineare Teilung ist hinzuweisen.

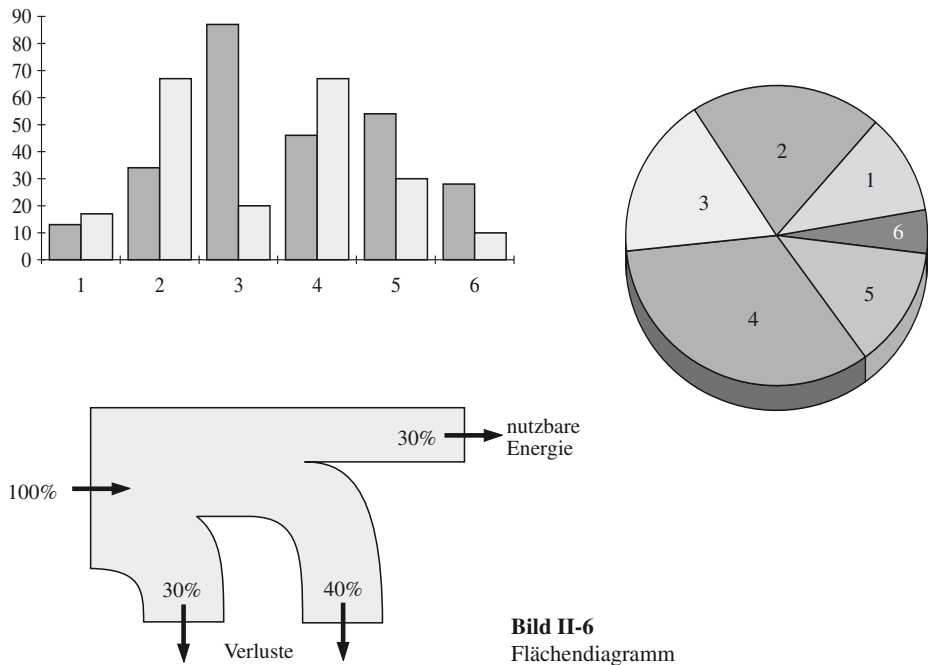


**Bild II-6**  
Flächendiagramm

Diagramme zur quantitativen Darstellung erhalten an den Achsen eine bezifferte Teilung, wobei jeder negative Wert mit dem entsprechenden Vorzeichen zu versehen ist. Mindestens der erste und der letzte Teilstrich ist mit dem Wert der Einteilung zu versehen. Die *Einteilung kann linear* nach Bild II-3, *doppelt-logarithmisch* nach Bild II-4 erfolgen oder auch in *linear-logarithmischer* Einteilung. Die *Einheit* darf nicht in Klammern gesetzt werden. Bei mehreren Kurven nach Bild II-4 werden an jede Kennlinie der Parameter oder andere Hinweise mit evtl. näherer Erläuterung in der Bildunterschrift verwendet.

### 1 Schaltzeichen nach DIN

In DIN 40700 bis DIN 40717, letztere teilweise ersetzt durch DIN 40900, sind die Schaltzeichen als „Graphische Symbole für Schaltungsunterlagen“ der Elektrotechnik mit ihrer Benennung und Bedeutung festgelegt. DIN 40900 Teil 1 bis Teil 13, „Graphische Symbole für die Elektrotechnik“, liegt in der harmonisierten Fassung IEC 617 Teil 1 bis Teil 13 der Internationalen Elektrotechnischen Kommission (IEC) als Norm vor.

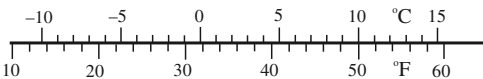


**Bild II-7** Nomogramm

Betriebsmittel einer Schaltung werden durch genormte Schaltzeichen dargestellt. Es muss das Schaltzeichen gewählt werden, das für eine beabsichtigte Aussage gerade ausreichend ist, also ist das Schaltzeichen so einfach wie möglich zu halten. Ein gewähltes Schaltzeichen sollte durchgängig in der Zeichnung verwendet werden. Schaltzeichen setzen sich aus Symbolelementen und Grundelementen wie in Bild II-8 zusammen. Blocksymbole nach Bild II-9 sind vereinfachte Darstellungen von Funktionseinheiten oder Baueinheiten durch

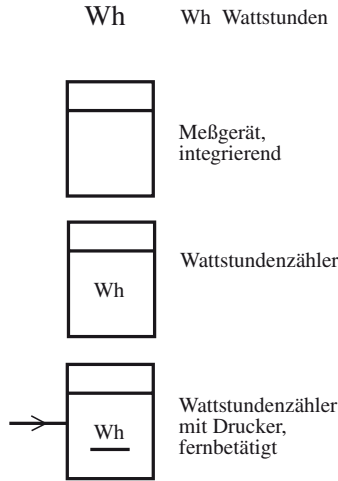


**Bild II-8** Schaltzeichen aus Symbol- und Grundelementen

**Tabelle II-2** Schaltzeichen nach DIN 40900 (Auszug)

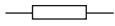
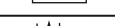
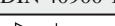
| <b>Schaltzeichen (Auszug)</b>                    |                                                                                     |
|--------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Passive Bauelemente</b>                       | DIN 40900 Teil 4                                                                    |
| Widerstand, allgemein                            |    |
| Widerstand, veränderbar, allgemein               |    |
| Widerstand mit Schleifkontakt                    |    |
| Widerstand, spannungsabhängig<br>Varistor        |    |
| Widerstand, temperaturabhängig<br>Heißleiter     |    |
| Kondensator, allgemein                           |    |
| Kondensator, gepolt, z.B. Elektrolyt-Kondensator |    |
| Kondensator, veränderbar                         |    |
| Spule, Wicklung, Induktivität                    |    |
| Spule mit Magnetkern                             |    |
| Piezoelektrischer Kristall, Schwingquarz         |    |
| <b>Halbleiter-Bauelemente</b>                    | DIN 40900 Teil 5                                                                    |
| Halbleiterdiode, allgemein                       |    |
| Z Diode,<br>Esaki-Diode                          |    |
| Kapazitätsdiode                                  |    |
| Tunneldiode                                      |    |
| Zweirichtungsdiode, Diac                         |    |
| Thyristortriode, Kathode gesteuert               |   |
| Thyristortriode, bidirektional<br>Triac          |  |
| NPN-Transistor                                   |  |

Tabelle II-2 (Fortsetzung)

| Schaltzeichen (Auszug)                                            |                  |
|-------------------------------------------------------------------|------------------|
| Halbleiter-Bauelemente                                            | DIN 40900 Teil 5 |
| Unijunction Transistor, Basis N-Typ                               |                  |
| Sperrschicht-FET mit N-Kanal (JFET)                               |                  |
| Isolierschicht-FET, Anreicherungstyp mit N-Kanal (IGFET, MOS-FET) |                  |
| Isolierschicht-FET, Verarmungstyp mit N-Kanal (IGFET, MOS-FET)    |                  |
| Hall-Generator                                                    |                  |
| Fotoelektrische Bauelemente                                       | DIN 40900 Teil 5 |
| Fotowiderstand                                                    |                  |
| Fotodiode                                                         |                  |
| Fotoelement Fotozelle                                             |                  |
| Fototransistor NPN-Typ                                            |                  |
| Leuchtdiode                                                       |                  |
| Optokoppler                                                       |                  |

ein einzelnes Schaltzeichen. Wenn für ein konkretes Betriebsmittel kein genormtes Schaltzeichen existiert, so kann durch die Kombination von Grundsymbolen, Symbolelementen, Kennzeichen oder Schaltzeichen eine neues Schaltzeichen entworfen werden.

Die Lage, in der Schaltzeichen in den Normblättern dargestellt sind, ist nicht die einzig gültige. Schaltzeichen dürfen nach Bild II-10 gedreht oder gespiegelt werden, wenn ihre Bedeutung dadurch nicht verän-



Bild II-9 Blocksymbol als Funktionseinheit

dert wird. Werden Schaltzeichen verkleinert oder vergrößert, so sollen ihre Proportionen wie in Bild II-11 erhalten bleiben.

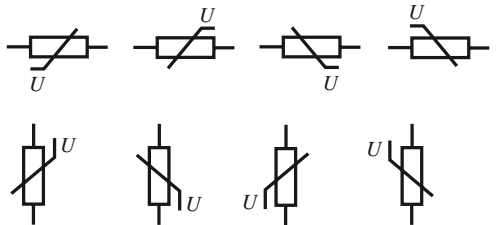


Bild II-10 Variable Lage von Schaltzeichen im Schaltplan



**Bild II-11** Darstellungsgrößen von Schaltzeichen

Anlage  
Art, Zählnummer  
Ort

= 2K  
-K8  
+M4

13  
14

**Bild II-12**  
Lage der  
Betriebsmittel-  
kennzeichnung  
im Plan

2 Elektrische Betriebsmittel

Die Kennzeichnung von Betriebsmitteln erfolgt nach IEC 750 (1983)/DIN 40719 Teil 2 (1978) und stellt die Beziehung her zwischen dem Betriebsmittel in der Anlage und den verschiedenen Schaltungsunterlagen, wie z.B. Schaltplänen, Stücklisten, Stromlaufplänen und Anweisungen. Sie erfolgt in Kennzeichnungsblöcken mit Vorzeichen zur sicheren Unterscheidung der Blöcke.  
Bei senkrechtem Leitungsverlauf nach Bild II-12 steht die Betriebsmittelkennzeichnung links und die

Anschlusskennzeichnung rechts; bei waagerechtem Verlauf dagegen steht die Betriebsmittelkennzeichnung unten.  
Kann auf die Kennzeichnung der Anlage und des Ortes verzichtet werden, so kann die Kennzeichnung der Betriebsmittel und der Anschlüsse nach Bild II-13 erfolgen. In den meisten Fällen reicht der Kennzeichnungsblock 3 aus.  
Die Kennzeichnung der Funktion in Kennzeichnungsblock 3 kann entfallen, wird sie jedoch vorgenommen, so sind die Kennbuchstaben nach Tabelle II-5 entsprechend DIN 40719 zu verwenden.

**Tabelle II-3** Kennzeichnungsblöcke nach DIN 40719

| Kennzeichnung elektrischer Betriebsmittel (DIN 40719)                                                                                                                                                                                       |           |            |          |            |          |                           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|------------|----------|------------|----------|---------------------------|
| Kennzeichnungsblock                                                                                                                                                                                                                         |           |            |          | Vorzeichen | Beispiel | Erklärung zum Beispiel    |
| 1                                                                                                                                                                                                                                           | Anlage    |            |          | =          | = B3     | Anlage B3                 |
| 2                                                                                                                                                                                                                                           | Ort       |            |          | +          | + D4     | Stockwerk D, Raum 4       |
| 3                                                                                                                                                                                                                                           | Art       | Zählnummer | Funktion | –          | –K2T     | Schütz, Nr. 2, Zeitrelais |
| 4                                                                                                                                                                                                                                           | Anschluss |            |          | :          | : 12     | Anschluss Nr. 12          |
| <ul style="list-style-type: none"><li>Nur zur Kennzeichnung erforderliche Blöcke angeben</li><li>Vorzeichen kann entfallen, wenn Verwechselung des Blockes ausgeschlossen ist</li><li>Mindestangabe in Block 3 ist die Zählnummer</li></ul> |           |            |          |            |          |                           |

**Tabelle II-4** Kennbuchstaben für die Art der Betriebsmittel

| Kennbuchstaben für die Art der Betriebsmittel |                                                                     |                                                                                                      |
|-----------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Kennbuchstabe                                 | Art des Betriebsmittels                                             | Beispiele                                                                                            |
| A                                             | Baugruppen, Teilbaugruppen                                          | Verstärker, Magnetverstärker                                                                         |
| B                                             | Umsetzer von nichtelektrischen auf elektrische Größen und umgekehrt | Messumformer, thermoelektrische Fühler, Thermozellen, Mikrofon, u.ä.                                 |
| C                                             | Kondensatoren                                                       |                                                                                                      |
| D                                             | Verzögerungseinrichtungen, Speichereinrichtungen, binäre Elemente   | Plattenspeicher, Magnetbandgeräte, Verzögerungsleitungen                                             |
| E                                             | Verschiedenes                                                       | Beleuchtungseinrichtungen, Heizeinrichtungen; Einrichtungen, die ansonsten hier nicht benannt werden |
| F                                             | Schutzeinrichtungen                                                 | Sicherungen, Schutzrelais, Trennsicherungen, Überspannungsableiter                                   |
| G                                             | Generatoren, Stromversorgungen                                      | Rotierende Generatoren, Batterie                                                                     |

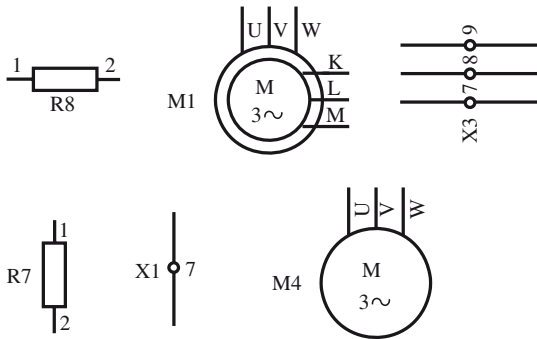


**Tabelle II-4** Fortsetzung

| Kennbuchstaben für die Art der Betriebsmittel |                                                                        |                                                                       |
|-----------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| Kennbuchstabe                                 | Art des Betriebsmittels                                                | Beispiele                                                             |
| H                                             | Meldeeinrichtungen                                                     | Optische und akustische Meldegeräte                                   |
| K                                             | Relais, Schütze                                                        | Leistungsschütze, Hilfsschütze, Zeitrelais                            |
| L                                             | Induktivitäten                                                         | Drosselspulen                                                         |
| M                                             | Motoren                                                                |                                                                       |
| N                                             | Verstärker, Regler                                                     | Operationsverstärker                                                  |
| P                                             | Messgeräte, Prüfeinrichtungen                                          | Anzeigende, schreibende und zählende Messeinrichtungen, Uhren         |
| Q                                             | Starkstrom-Schaltgeräte                                                | Leistungsschalter, Schutzschalter, Motorschutzschalter                |
| R                                             | Widerstände                                                            | Einstellbare Widerstände, Heißeleiter                                 |
| S                                             | Schalter, Wähler                                                       | Taster, Endschalter, Steuerschalter                                   |
| T                                             | Transformatoren                                                        | Spannungswandler, Stromwandler                                        |
| U                                             | Modulatoren, Umsetzer                                                  | Diskriminator, Frequenzwandler, Umformer, Wechselrichter              |
| V                                             | Röhren, Halbleiter                                                     | Elektronenröhren, Dioden, Transistoren, Thyristoren                   |
| W                                             | Übertragungswege, Hohlleiter, Antennen                                 | Schaltdrähte, Sammelschienen, Dipole                                  |
| X                                             | Klemmen, Stecker, Steckdosen                                           | Trennstecker und -steckdosen, Prüfstecker, Lötleisten, Klemmenleisten |
| Y                                             | Elektrisch betätigte mechanische Einrichtungen                         | Bremsen, Kupplungen, Ventile                                          |
| Z                                             | Abschluss, Ausgleichseinrichtungen, Filter, Begrenzer, Gabelanschlüsse | Kabelnachbildungen                                                    |

**Tabelle II-5** Kennbuchstaben für die allgemeine Funktion

| Kennbuchstaben für die allgemeine Funktion |                     |               |                                          |
|--------------------------------------------|---------------------|---------------|------------------------------------------|
| Kennbuchstabe                              | Allgemeine Funktion | Kennbuchstabe | Allgemeine Funktion                      |
| A                                          | Hilfsfunktion       | N             | Messung                                  |
| B                                          | Bewegungsrichtung   | P             | Proportional                             |
| C                                          | Zählung             | O             | Zustand (Stop, Start, Begrenzung)        |
| D                                          | Differenzierung     | R             | Rückstellen, Löschen                     |
| F                                          | Schutz              | S             | Speichern, aufzeichnen                   |
| G                                          | Prüfung             | T             | Zeitmessung, verzögern                   |
| H                                          | Meldung             | V             | Geschwindigkeit (beschleunigen, bremsen) |
| J                                          | Integration         | W             | Addieren                                 |
| K                                          | Tastbetrieb         | X             | Multiplizieren                           |
| L                                          | Leiterkennzeichnung | Y             | Analog                                   |
| M                                          | Hauptfunktion       | Z             | Digital                                  |

**Bild II-13**

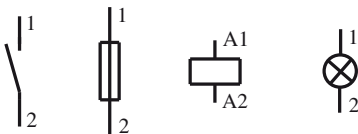
Vereinfachte Betriebsmittelkennzeichnung

Für die Kennzeichnung der Anlage und des Ortes benennt DIN 40719 weitere Kennbuchstaben, die hier aber nicht aufgeführt werden sollen.

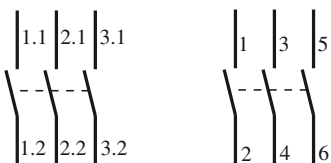
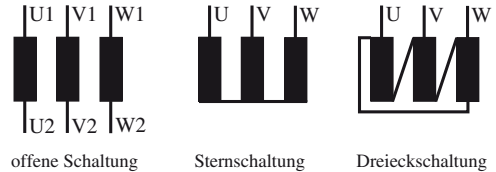
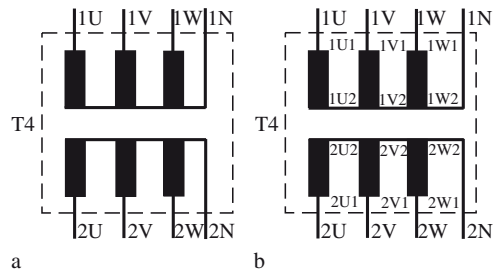
### 3 Schaltungsunterlagen der Energietechnik

Bei der *Ausfertigung elektrischer Schalt- und Verdrahtungspläne* genügt oft eine einzige Linienbreite nach DIN 15. Für A4 und A3 Formate ist die Linienbreite 0,5 günstig.

Stromwege werden geradlinig und möglichst kreuzungsfrei dargestellt. Die Verbindungslinien verlaufen parallel zu den Rändern der Zeichnung. Die Anschlussstellen an Betriebsmittel werden nicht besonders dargestellt, sie werden aber gemäß DIN 42400 mit einer Anschlusskennzeichnung versehen nach Bild II-14. Zusammengehörige Anschlüsse werden mit 1 und 2 gekennzeichnet. Von der Energieseite her gesehen gilt 1 = Eingang und 2 = Ausgang.

**Bild II-14** Kennzeichnung der Anschlussstellen von Betriebsmitteln

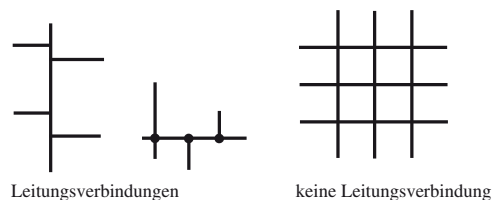
Hat ein Betriebsmittel nach Bild II-15 mehrere Anschlüsse, so wird fortlaufend numeriert. Die Anschlüsse von Drehstrommotoren werden nach Bild II-16 gekennzeichnet, während die Anschlüsse von Drehstromtransformatoren gemäß Bild II-17a ge-

**Bild II-15** Anschlussnumerierung mehrpoliger Betriebsmittel (allgemein)**Bild II-16** Anschlusskennzeichnung von Drehstrommotoren**Bild II-17** Anschlusskennzeichnung von Drehstromtransformatoren

kennzeichnet werden, wobei unter Umständen auch die Innenanschlüsse nach Bild II-17b zu kennzeichnen sind.

Leitungsverbindungen ohne Klemmpunkt nach Bild II-18 sind für zu plottende Zeichnungen vorgesehen; sie werden auch mit ausgefülltem Punkt dargestellt. Leitungskreuzungen haben keine elektrische Verbindung.

Bei der Art der Darstellung von Schaltungsunterlagen unterscheidet DIN 40719 zwischen ein- oder mehrpo-

**Bild II-18** Leitungsverbindungen mit/ohne Klemmpunkt

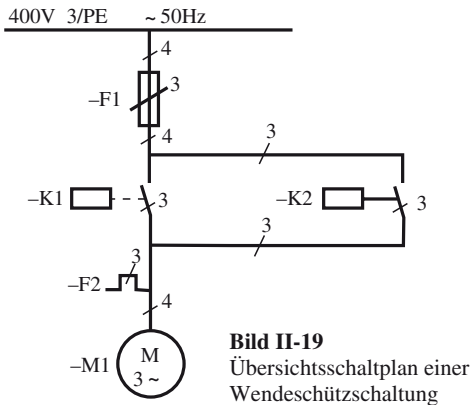


**Bild II-19**  
Übersichtsschaltplan einer  
Wendeschützschaltung

liger Darstellung. Bei der *einpoligen Darstellung* (engl.: *single-line representation*) werden zwei oder mehr Leiter durch eine einzige Linie mit entsprechender symbolhafter Ergänzung dargestellt. Mehrere gleiche Geräte oder Bauelemente können durch ein einziges Schaltzeichen dargestellt werden.

Bei *mehrpoliger Darstellung* (engl.: *multiline representation*) wird jedes Betriebsmittel durch ein Schaltzeichen dargestellt.

Bezüglich der Darstellung der Schaltzeichen kann eine weitere Unterscheidung vorgenommen werden. Bei der *zusammenhängenden Darstellung* (engl.: *assembled representation*) werden alle Schaltzeichen eines Betriebsmittels (z.B. Relais mit Schaltkontakten) zusammenhängend gezeichnet. Bei der *aufgelösten Darstellung* (engl.: *detached representation*) werden Schaltzeichen für elektrische Betriebsmittel (z.B. Relais mit Schaltkontakten) getrennt gezeichnet und so angeordnet, dass jeder Stromweg (Strompfad) geradlinig verläuft und somit gut zu verfolgen ist.

Ein *Übersichtsschaltplan* (engl.: *block diagram*) nach DIN 40719 ist die vereinfachte Darstellung einer Schaltung, wobei nur die wesentlichen Teile zur Gliederung elektrischer Einrichtungen und ihrer Systembeschreibung berücksichtigt werden. Im Beispiel nach Bild II-19 ist der einpolige Übersichtsschaltplan einer Wendeschützschaltung ohne Steuerleitungen dargestellt.

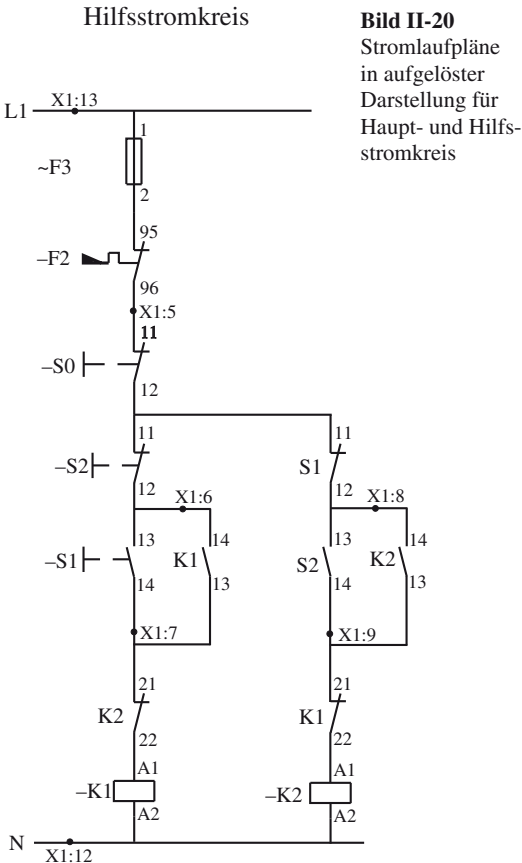
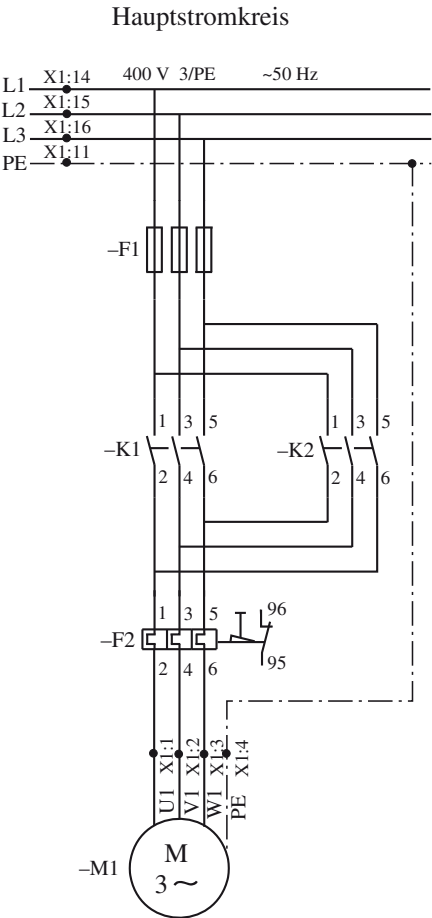
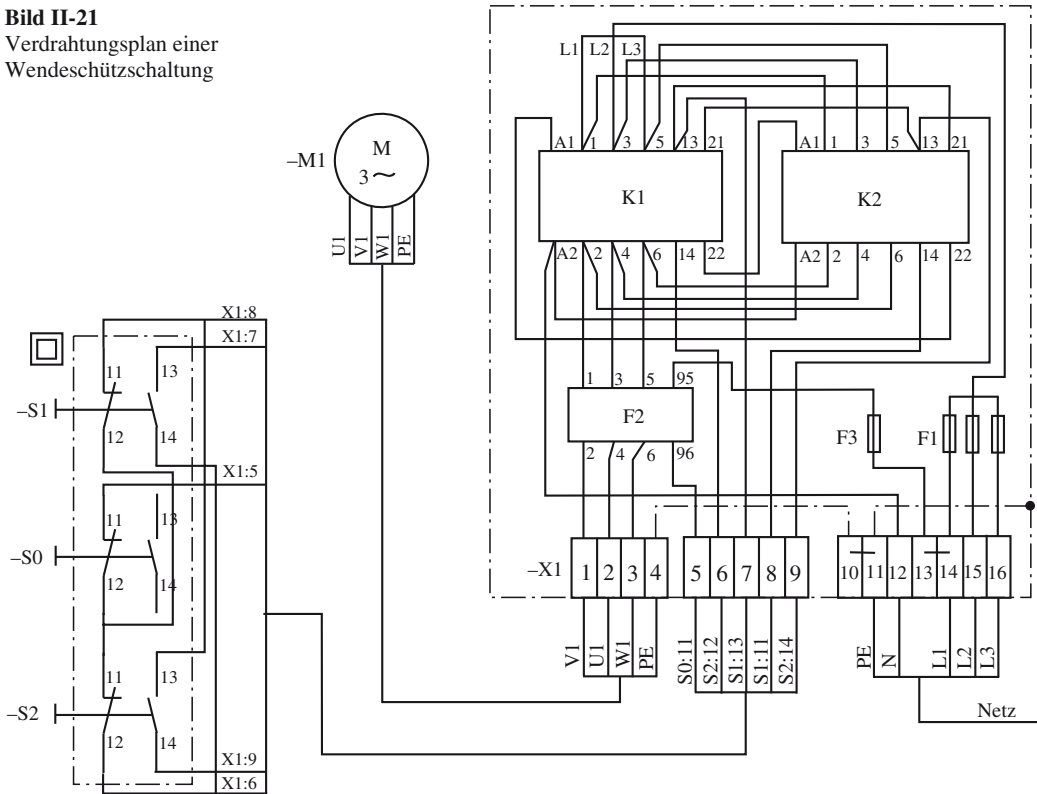


**Bild II-20**  
Stromlaufpläne  
in aufgelöster  
Darstellung für  
Haupt- und Hilfs-  
stromkreis

**Bild II-21**

Verdrahtungsplan einer  
Wendeschützschaltung



Ein *Stromlaufplan* (engl.: *circuit diagram*) ist die ausführliche Darstellung einer Schaltung mit ihren Einzelteilen. Er zeigt die Arbeitsweise einer elektrischen Einrichtung. Er kann in aufgelöster und zusammenhängender Darstellung zur Anwendung kommen. Bild II-20 zeigt die *Stromlaufpläne in aufgelöster Darstellung* für den Hauptstromkreis und die Steuerung einer Wendeschützschaltung. Die Kontaktbelegungspläne der Schütze fehlen im Steuerstromkreis, aber die Anschlussbezeichnungen für die Klemmleisten sind integriert. Diese Form der Stromlaufpläne ist die meist verwendete Darstellungsform. Aus ihm wird der Verdrahtungsplan entwickelt.

*Verdrahtungspläne* (engl.: *wiring diagrams*) zeigen die inneren und/oder äußeren Verbindungen zwischen elektrischen Betriebsmitteln, ohne Aufschluss über die Wirkungsweise zu geben. Verdrahtungspläne können durch entsprechende Tabellen ersetzt werden. Der Verdrahtungsplan nach Bild II-21 gibt die Schaltungen nach Bild II-19 und II-20 wieder. Die Schütze K1 und K2 werden wie auch das Motorschutzrelais F2 durch ein Rechteck dargestellt.

Die Verbindungsleitungen können einzeln oder zusammengefasst gezeichnet werden. Die Anschlussstellen werden nach Bild II-22 mit Leitungsnummern oder mit den Zielbezeichnungen versehen, d.h., am Ende einer Verbindungsleitung wird angegeben, mit

welcher Anschlussklemme das andere Leitungsende verbunden ist. Der Verdrahtungsplan dient als Unterlage für die Fertigung und Montage und wird bei umfangreichen Anlagen unterteilt in Geräteverdrahtungspläne, Verbindungspläne und Anschlusspläne.

Die Verbindungen innerhalb eines Gerätes stellt der Geräteverdrahtungsplan (engl.: *unit wiring diagram*) dar, während der Verbindungsplan (engl.: *interconnection diagram*) die Verbindungen zwischen den verschiedenen Geräten einer Anlage darstellt.

Ein Anschlussplan (engl.: *terminal diagram*) zeigt die Anschlusspunkte einer elektrischen Einrichtung und die daran angeschlossenen inneren und äußeren leitenden Verbindungen. Der Anschlussplan nach Bild II-23 zeigt die Belegung der Klemmleiste X1. Die zum Motor M1 am Planort T4 abgehende Leitung W2 ist vom Typ NYY 4×2,5.

Ein Ersatzschaltplan (engl.: *equivalent circuit diagram*) ist eine besondere Ausführung eines erläuternden Schaltplanes für die Analyse und Berechnung von Stromkreiseigenschaften.

Ein Ablaufdiagramm oder eine Ablaufabelle (engl.: *sequence chart* or *table*) zeigt Arbeitsvorgänge in einer festgelegten Reihenfolge, während Zeitablaufdiagramme (engl.: *time sequence chart* or *table*) zusätzlich die Zeitabstände zwischen aufeinanderfolgenden Arbeitsvorgängen zeigen.

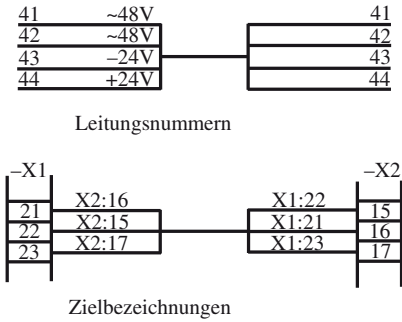


**Bild II-22** Kennzeichnung von Verbindungsleitungen mit  
a) Leitungsnummern oder  
b) Zielbezeichnungen

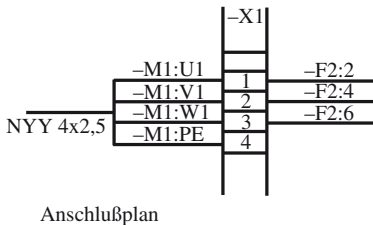


**Bild II-23** Anschlussplan der Klemmenleiste X1

Gerätelisten schlüsseln die für eine Fertigung erforderlichen Konstruktionselemente, Geräte, elektrischen Einrichtungen und Leitungen auf nach Anzahl, Typ und auch Bestellnummern der Hersteller.

Im Installationsplan nach DIN 40719 Teil 5 werden die Betriebsmittel mit Schaltzeichen in einpoliger Darstellung annähernd lagerichtig in den Gebäudegrundriss eingezeichnet. Bild II-24 zeigt den Elektro-Installationsplan für eine Wohnung mit mehreren Installationsbereichen nach VDE 0100. DIN 18015 Teil 1 legt sowohl Installationszonen als auch die Leitungsführung und die räumliche Lage der meisten Betriebsmittel fest.

Im Übersichtsplan nach Bild II-25 werden die Stromkreise festgelegt und die Nennwerte der Betriebsmittel eingetragen. Nach DIN 57100/VDE 0100 ergibt sich auch die Verwendung entsprechender Leitungen und Schutzmaßnahmen, z.B. FI-Schutzschalter.

#### 4 Schaltungsunterlagen der Elektronik

Ersatzschaltpläne, bzw. Ersatzschaltbilder sind nach DIN 40719 besondere Ausführungen eines erläuterten Schaltplanes für die Analyse und Berechnung von Schaltkreisen und realen Bauteileigenschaften im Vergleich zu „idealen“ Bauelementen.

So hat z.B. jeder Kondensator außer der gewünschten Kapazität noch weitere elektrische Eigenschaften, die sich als Komponenten in einem Ersatzschaltbild nach Bild II-26 darstellen und analysieren lassen. Die Serieninduktivität  $L$  ergibt sich als Folge der Wirkung der Anschlussdrähte bei höheren Frequenzen und der Serienwiderstand  $R_s$  als Kontaktwiderstand an den Anschlüssen. Die Kondensator-Kapazität  $C$  ist die gewünschte Größe, während der Parallelwiderstand  $R_{is}$  als Isolationswiderstand des Dielektrikums zu verstehen ist, der bei bestimmten Kondensatoren für die Selbstentladung des Kondensators verantwortlich ist.

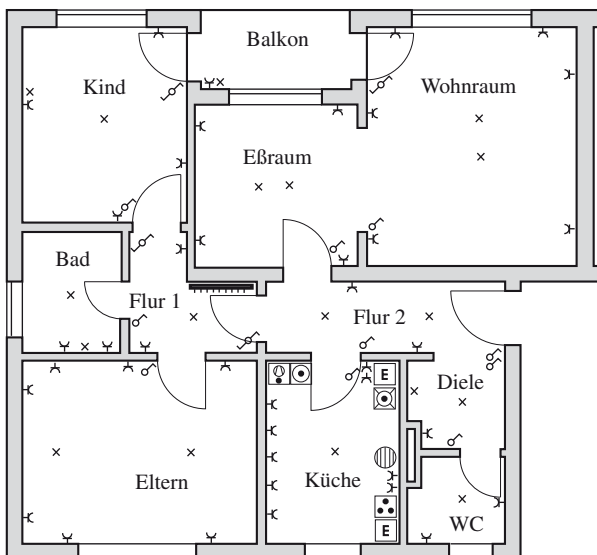


**Bild II-24**

Elektro-Installationsplan einer Wohnung

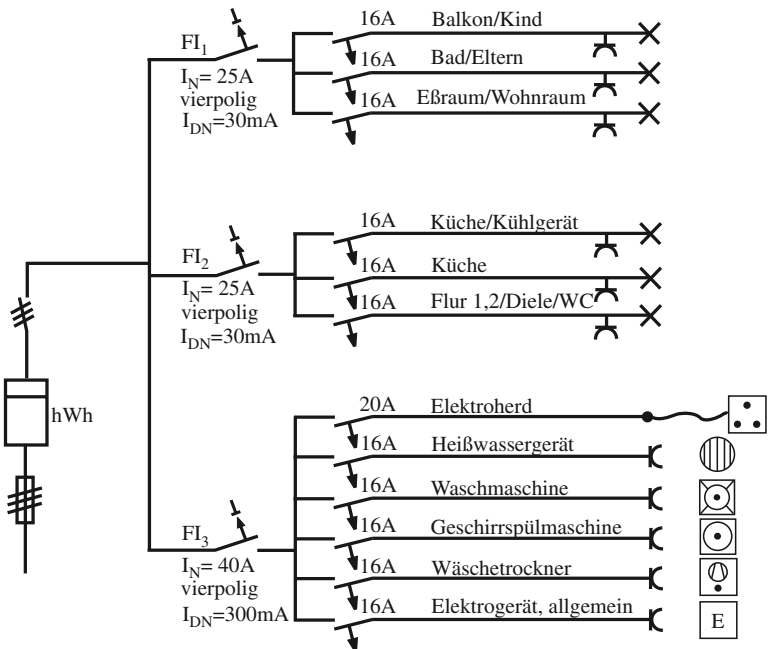


**Bild II-25**  
Übersichtsplan zum  
Installationsplan

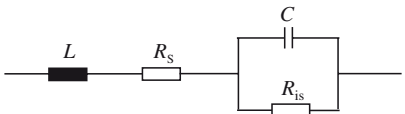


**Bild II-26** Ersatzschaltbild eines Kondensators  
(reales Verhalten)

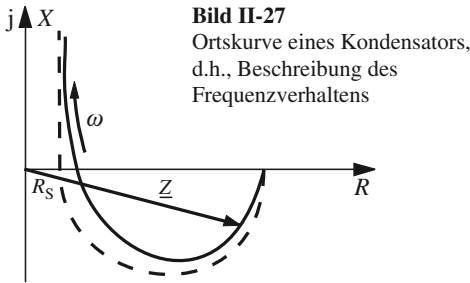


**Bild II-27**  
Ortskurve eines Kondensators,  
d.h., Beschreibung des  
Frequenzverhaltens

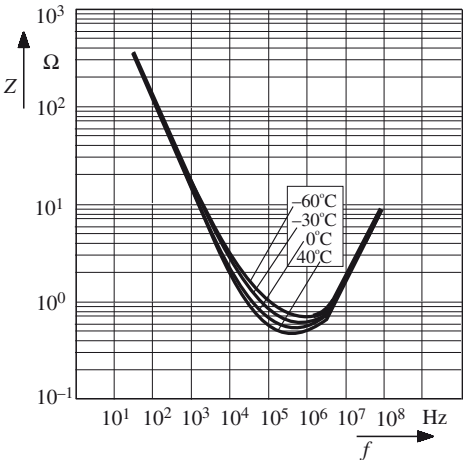


**Bild II-28** Scheinwiderstand eines Kondensators  
in Abhängigkeit von der Temperatur

Die Frequenzabhängigkeit eines realen Kondensators lässt sich mit entsprechenden Ortskurve nach Bild II-27 darstellen, während sich z.B. die Temperaturabhängigkeit mit einem doppeltlogarithmischen Diagramm ( $Z = f(f)$  mit der Temperatur  $\vartheta$  als Parameter) nach Bild II-28 darstellen lässt.

**4.1 Allgemeines**

Die Darstellung logischer Elemente und Verknüpfungen wird in Katalogen und Datenbüchern unterschiedlich gehandhabt. Bild II-29 zeigt daher eine

Gegenüberstellung der logischen Grundfunktionen, die noch häufig anzutreffen sind. Die Darstellung der Schaltzeichen nach DIN 40900 setzt sich aber immer weiter durch.

**4.2 Schaltzeichen nach DIN 40900 Teil 12  
Binäre Elemente**

**Symbolaufbau:**  
Ein Symbol besteht aus einer Kontur, dem Block, oder aus Kombinationen von Konturen und den

|       | DIN 40900 | DIN alt | USA |
|-------|-----------|---------|-----|
| NICHT |           |         |     |
| UND   |           |         |     |
| ODER  |           |         |     |
| NAND  |           |         |     |
| NOR   |           |         |     |

Bild II-29 Schaltsymbolvergleich

Funktionskennzeichen. Das Seitenverhältnis der Konturen ist ohne Bedeutung. Die Eingangsleitungen werden nach Bild II-30 links und die Ausgangsleitungen rechts angeordnet. Die Funktionskennzeichen nach Bild II-31 beschreiben die logische Funktion der Schaltung.

Besitzt eine Schaltung einen oder mehrere Eingänge, die zu mehr als einem Element der Schaltung führen, kann ein Steuerblock nach Bild II-32 benutzt werden (siehe auch Anwendungsbeispiele).

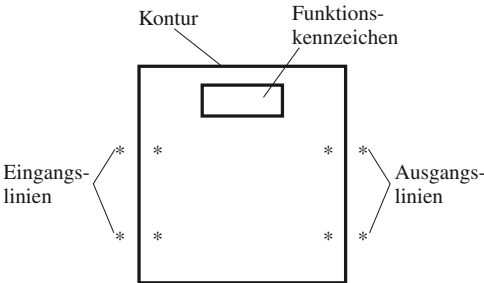


Bild II-30 Kontur

| Zeichen  | Bedeutung                                    |
|----------|----------------------------------------------|
| &        | UND-Verknüpfung                              |
| $\geq 1$ | ODER-Verknüpfung                             |
| $= 1$    | Exklusiv-ODER-Verknüpfung                    |
| $\Sigma$ | Summierer                                    |
| COMP     | Komparator                                   |
| CTR      | Zähler                                       |
| DIV      | Teiler                                       |
| MUX      | Multiplexer                                  |
| P-Q      | Subtrahierer                                 |
| SRG      | Schieberegister                              |
| X/Y      | Codierer oder Codecumsetzer                  |
| $\Pi$    | Schmitt-Trigger                              |
|          | Monostabile Kippstufe (allgemein)            |
|          | Monostabile Kippstufe (nicht nachtriggerbar) |
|          | Astabile Kippstufe (allgemein)               |

Bild II-31 Funktionskennzeichen

| Symbol | Beschreibung       |
|--------|--------------------|
|        | Element-Kontur     |
|        | Steuerblock-Kontur |

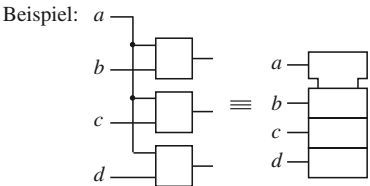


Bild II-32 Steuerblock-Kontur

*Ein- und Ausgänge:*

Die Symbole der Ein- und Ausgänge nach Bild II-33 legen die Beziehungen zwischen den internen und externen Logikzuständen fest. Die Negation am Ein- und Ausgang kann unterschiedlich dargestellt werden. DIN 40900 empfiehlt auf nationaler Ebene den Negationskreis zu verwenden. In Datenbüchern findet man häufig die zweite Darstellungsweise.

| Symbol | Beschreibung                  |
|--------|-------------------------------|
|        | Negierter Eingang             |
|        | Negierter Ausgang             |
|        | Negierter Eingang             |
|        | Negierter Ausgang             |
|        | Eingang mit Hysterese         |
|        | Ausgang mit offenem Kollektor |
|        | 3-state-Ausgang               |
|        | Freigabeeingang               |
|        | Schiebeeingang rechts         |
|        | Schiebeeingang links          |
|        | aktiv bei ansteigender Flanke |
|        | aktiv bei abfallender Flanke  |

Bild II-33 Kennzeichnung von Ein- und Ausgängen

*Abhängigkeitsnotation:*

Mit Hilfe der Abhängigkeitsnotation werden Zusammenhänge zwischen Eingängen, Ausgängen oder Ein- und Ausgängen angegeben, ohne interne Elemente und Zwischenverbindungen im einzelnen genau darzustellen. Somit lassen sich kompakte und aussagekräftige Symbole herstellen. Bild II-34 gibt eine Übersicht über Arten der Abhängigkeit und zeigt einige Beispiele hierzu. Die Adressen-Abhängigkeit (A) kennzeichnet Adresseneingänge eines Speichers. Die Steuer-Abhängigkeit (C) kennzeichnet Zeitsteuer- oder Takteingänge. Das Kennzeichen ist häufig bei Flipflops zu sehen.



Anwendungsbeispiele:

Bei Anwahl eines Eingangs über die Abhängigkeitsnotation *G* nimmt der interne Logikzustand des Ausgangs den internen Zustand des Eingangs an. Liegt an den drei Eingängen beispielsweise „1“, „1“, „1“ wird der Eingang 7 zum Ausgang geschaltet. Mit dem Eingang EN kann der Multiplexer aktiviert werden (low-aktiv).

Die gesteuerten Eingänge des Richtungstreiber sind UND-verknüpft. Die freigewählte Zahl (hier 3) wird neben dem Buchstaben *G* geschrieben und an jedem weiteren UND-verknüpften Eingang (EN). 1 und 2 des Freigabeeingangs geben jeweils in Verbindung mit dem Verstärker die Richtung an, wie sie die Zahlenfolge am 3-state-Ausgang zuordnet.

Über die Steuereingänge *M* wird die Betriebsart wie links schieben, rechts schieben oder paralleles Laden dargestellt. Den Einfluss des Takteingangs *C* wird durch die entsprechende Zahl und die Schieberichtung durch zusätzliche Pfeile gekennzeichnet. Über die Eingänge 4,5D werden anstehende Daten mit der ansteigenden Flanke an C5 parallel geladen.

Über den Steuereingang C3 kann der BCD-Zähler die 3D-Eingänge parallel laden. Die Betriebsart: Zählrichtung (vorwärts „+“, rückwärts „-“) erfolgt über den Eingang M2 und mit G1 erfolgt die Zählfreigabe. Mit dem Rücksetzeingang *R* wird der Zähler rückgesetzt. Nach jeder erneuten Zählung liefert der Ausgang PIN 7 einen negativen Impuls.

| Kennbuchstabe und Abhängigkeitsform | Wirkung bei „1“ am Eingang                        | Wirkung bei „0“ am Eingang                              |
|-------------------------------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| A Adresse                           |                                                   |                                                         |
| C Steuerung                         | Erlaubt die Funktion                              | Verhindert die Funktion                                 |
| EN Freigabe                         | Erlaubt die Funktion                              | Verhindert Zugriff der Eingänge<br>V Ausgänge hochohmig |
| G UND                               | Erlaubt die Funktion                              | Ausgang „0“                                             |
| M Modus                             | Erlaubt die Funktion<br>bei gewählter Betriebsart | Verhindert die Funktion                                 |
| N Exklusiv-ODER                     |                                                   |                                                         |
| R Rücksetzen                        |                                                   |                                                         |
| S Setzen                            |                                                   |                                                         |

Beispiele:

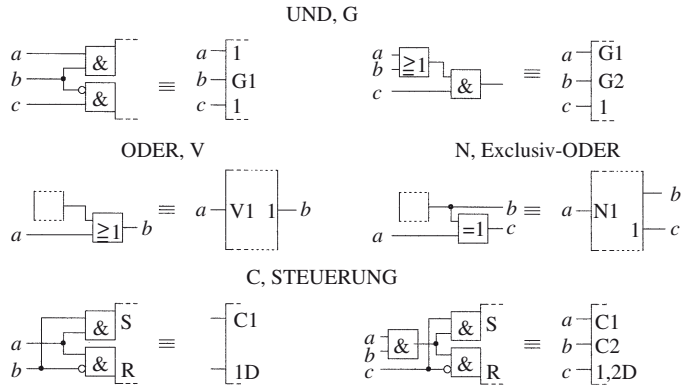


Bild II-34 Abhängigkeitsnotation

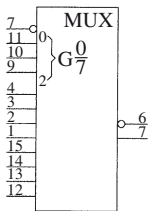


Bild II-35  
Multiplexer

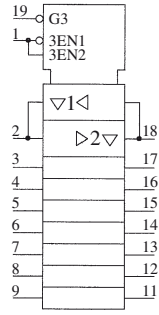
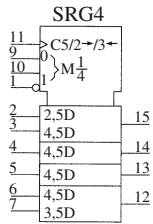


Bild II-36  
Richtungstreiber



Betriebsart (MODE)

| M   |                   |
|-----|-------------------|
| 0 0 | Halt              |
| 0 1 | rechts schieben → |
| 1 0 | links schieben ←  |
| 1 1 | paralleles Laden  |

**Bild II-37**  
Schieberegister

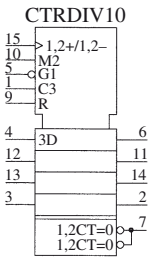


**Bild II-38**  
Zählerbaustein

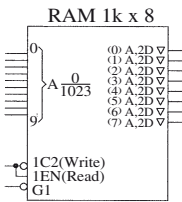


**Bild II-39**  
RAM  
(random access memory)

Bei Speichern können die Speicherstellen durch Adresseingänge (Kennzeichen A) angewählt werden. Der dargestellte Speicher besitzt 1024 Speicherstellen (1 k) mit den Adressen 0 bis 1023. Die Daten können am Ausgang ((0)A ... (7) A, 8 Bit) mit „H“ am Steuereingang gelesen und mit „L“ über die mit 2D gekennzeichneten Leitungen eingeschrieben werden.

## 4.3 Entwurf von Schaltungen

### 4.3.1 Verdrahtungsplan mit Universalplatinen

Kleinere elektronische Einzelschaltungen lassen sich mit geringem Aufwand durch Universalplatinen realisieren. Solche Platinen sind Lochrasterplatten aus einem meist 1,5 mm starkem Isoliermaterial (Hartpapier oder Pertinax) mit Bohrungen im 1/10"-Raster (2,54 mm) und 1 mm Durchmesser oder sie bestehen aus einem Isolierstoff mit Längsleiterbahnen oder Lötäugen aus Kupfer (Auflage 35 µm) mit einem Rastermaß 1/10" und einem gleichmäßigen Rastermaß mit Löchern von ebenfalls 1 mm Durchmesser.

Außer Streifen- und Punktrasterplatten sind Printplatten mit zusätzlich verschiedenen Steckerleistenanschlüssen nach DIN 41612 im Angebot der Herstellerfirmen. Die gebräuchliche Europlatine hat die Abmessungen 160 · 100 mm. Tabelle II-6 führt gängige Maße von Printplatinen auf.

**Tabelle II-6** Maße von Printplatinen

|                 |                    |
|-----------------|--------------------|
| Plattenstärke   | 1 mm, 1,5 mm, 2 mm |
| Lochdurchmesser | 0,8 mm, 1 mm       |
| Rastermaße      | 2,54 mm, 5,08 mm   |
| Leiterbreite    | >0,8 mm            |
| Leiterabstand   | >0,8 mm            |
| Kupferauflage   | 35 µm, 70 µm       |

Ausgangslage zur Schaltungsrealisierung ist in allen Fällen der Schaltplan und die Stückliste aller benötigten Bauelemente. Die Bauelemente sollten steckbar sein und müssen in das 1/10"-Raster passen. Nach Festlegung der Platinengröße wird eine Lageskizze (Entwurf) mit der Lage der Bauelemente und den notwendigen Verbindungen erstellt. Bei der Bauelementepositionierung kann für einen übersichtlichen Aufbau der Eingang links und der Ausgang rechts vorgesehen werden oder alle Anschlüsse werden auf eine Leiterplattenseite gelegt. Die Verbindungen sollte kurze Wege aufweisen und Kreuzungen nach Möglichkeit nicht vorhanden sein.

Bei Verwendung einer Lochrasterplatine werden die Bauelemente lagerichtig auf die Platine gesteckt und auf der Unterseite mit Silberdraht verlötet.

Wird eine Platine mit vorhandenen Leiterbahnen eingesetzt, sollte der Entwurf die notwendigen Unterbrechungen und Brücken aufweisen.

### 4.3.2 Entwurf und Herstellung gedruckter Schaltungen

Gedruckte Schaltungen sind heute Bestandteil der meisten elektronischen Geräte. Ihr Vorteil liegt in der computergesteuerten Fertigung und der schnellen Austauschbarkeit im Servicefall.

Zur Herstellung gedruckter Schaltungen verwendet man heute vorwiegend fotobeschichtete Platinen aus Hartpapier oder Epoxyd-Hartgewebe als Trägermaterial. Sie können einseitig oder beidseitig fotobeschichtet sein. Ihre Kupferauflage ist meist 35 µm und die Platinengröße unterschiedlich (Beispiele: 60 · 100 mm, 250 · 250 mm). Die Bauelemente werden abschließend über Verbindungsleitungen aus Kupfer miteinander verbunden. Das folgende Bild II-40 zeigt die notwendigen Schritte bei der Herstellung eines Labormusters bis zur fertigen Platine und Bild II-41 wählt als Beispiel die Schaltung eines Rechteckgenerators zur Erläuterung der Arbeitsabläufe.

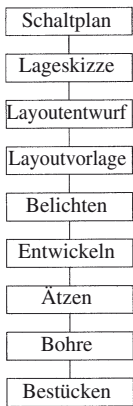


**Bild II-40**  
Arbeitsschritte zur Herstellung eines Labormusters

Die Anordnung der Leiterbahnen auf der Platine nennt man *Layout*. Zur Layouterstellung benötigt man transparentes 1/10"-Rasterspapier, eine Folie, Klebesymbole, Leiterstreifen und Lötäugen. Von der *Lageskizze* werden auf einem ersten Blatt entsprechende der Größe die Lage der Bauelemente und ihre Anschlüsse übertragen. Anschließend wird ein zweites Blatt über das erste gelegt und die Verbindungsleitungen eingezeichnet. Dieses Blatt dient als Vorlage für alle Klebematerialien. Zunächst werden alle Lötäugen aufgebracht, danach die Leiterbahnen. Das völlig lichtundurchlässige Layout wird unter die fotobeschichtete Platine nach Bild II-42 gelegt und von unten ca. 2 Min. mit ultraviolett Licht (UV-Licht) bestrahlt, um die Leiterbahnen auf die Fotoschicht zu übertragen. Die Platine wird daraufhin in ein Entwicklerbad gegeben, wo die belichteten Stellen von einer Schutzschicht (Fotolack) entfernt werden. Beim anschließenden Ätzen werden alle Kupferflächen, die nicht zum Layout gehören, entfernt.

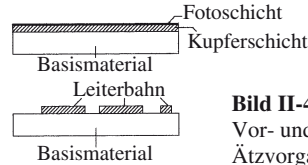


**Bild II-42**  
Vor- und nach dem Ätzzvorgang

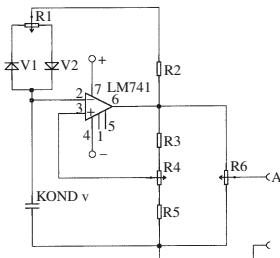
Der Ätzzvorgang dauert bei Verwenden von Eisen-III-Chlorid und einer Temperatur von 40 °C etwa 10 bis 20 Minuten. Die Platine wird gewässert, um Ätzmittelreste abzuspielen und mit einem Lösungsmittel (Azeton) kann der Abdecklack entfernt werden.

Als Ätzmittel wird häufig Eisen-III-Chlorid ( $\text{FeCl}_3$ ), Ätznatron ( $\text{NaOH}$ ) oder Ammoniumsulfat ( $(\text{NH}_4)_2\text{S}_2\text{O}_8$ ) verwendet. Aus Sicherheitsgründen sollten bei Umgang mit allen Chemikalien Handschuhe und Schutzbrille getragen werden. Desweiteren ist eine sachgerechte Entsorgung zu gewährleisten. Der Ätzzvorgang selbst hängt von der Konzentration des Ätzmittels, der Temperatur und der Ätzeit ab. Bei zu langer Ätzeit oder zu hoher Ätzkonzentration kommt es zu Unterätzungen.

Leiterbahnen werden vor Oxidation geschützt, wenn sie mit Zinn, Silber oder Gold überzogen oder mit Lötack eingesprüht werden.

Die Breite der Leiterbahnen sollte in Abhängigkeit der durchfließenden Ströme gewählt werden, damit keine unzulässigen Erwärmungen (i.d.R. max. 65 °C) auftreten. Ein Leiter von 35 µm Dicke kann bei 1 bis 2 mm Breite mit etwa 1,5 bis 2 A belastet werden. Hierbei tritt eine Temperaturerhöhung von 10 K auf. Um Spannungsüberschläge zu vermeiden dürfen Leiterbahnen nicht beliebig eng zueinander verlegt werden.

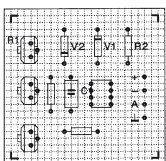
Schaltung



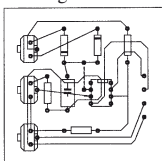
Stückliste

| Name | Bezeichnung            | Type/Wert |
|------|------------------------|-----------|
| R1   | Trimmwiderstand        | 100k      |
| R2   | Kohleschichtwiderstand | 10k       |
| R3   | Kohleschichtwiderstand | 100k      |
| R4   | Trimmwiderstand        | 100k      |
| R5   | Kohleschichtwiderstand | 10k       |
| R6   | Trimmwiderstand        | 4,7k      |
| C1   | Kunststoffkondensator  | 0,01µF    |
| V1   | Siliziumdiode          | 1N4001    |
| V2   | Siliziumdiode          | 1N4001    |
| IC   | Operationsverstärker   | uA741     |

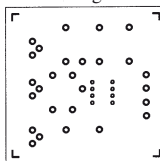
Anordnung der Bauelemente



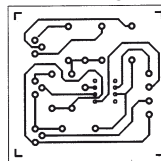
Lageskizze



Aufbringen der Lötäugen



Herstellen der Verbindungen



Lageplan

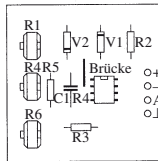


**Bild II-41** Arbeitsschritte am Beispiel eines Rechteckgenerators

Nach der Platinenherstellung werden die Löcher in den Lötäugen mit einer Ständerbohrmaschine mit Hartmetallbohrern gebohrt. Anschließend kann die Bestückung erfolgen. Diese so von Hand erstellten Layouts haben den Nachteil, dass Fehler nie ganz ausgeschlossen werden können.

## 5 Projektierung

Werden technische Geräte oder Schaltungen entwickelt und konstruiert ist eine umfangreiche Planung erforderlich. Zunächst muss das Problem definiert werden mit den jeweiligen Forderungen an die Schaltung und ihren Eigenschaften. Bei komplexen Aufgaben empfiehlt es sich im Team zu arbeiten und nach Lösungsmöglichkeiten mit den auftretenden Vor- und Nachteilen zu suchen. Ist eine Entscheidung getroffen, werden Aufgaben und Prioritäten aufgelistet und Verantwortlichkeiten zugewiesen. Ein festgelegter Zeitplan ist genau so einzuhalten wie die Obergrenze der zugestandenen Geldmittel. Nach Durchführung der Arbeit erfolgt eine Auswertung.

### ■ *Beispiel:* Universal-Eingabeplatine für einen Einplatinencomputer

**Definition:** Platine mit Stromversorgung, Eingangsbuchsen für den Analog-Digitalteil und Ausgangsbuchsen für den Digital-Analogteil.

**Ziel:** Die Schaltung soll innerhalb einer Woche erstellt und getestet sein. Die Einzelteile sollen weniger als 50,00 DM kosten. Vorhanden ist eine veränderbare Gleichspannungsquelle 2 bis 15 V/2 A.

Die konstruierte Schaltung muss zur Verfügung stellen:

- + 5 V stabil für die Computerplatine
- + 12 V für externe Versuchsschaltungen
- 2 DA-Ausgänge
- 4 AD-Eingänge

### *Durchführungsplan:*

- Entwurf der Schaltung
- Beschaffung der Materialien
- Aufbau des Prototyps auf einer Steckplatine
- Herstellung der Platine
- Erprobung der Platine

Die Schaltung (Bild III-3) wird unter III-2 beschrieben und unter Kapitel IV die Realisierung der Platine.

## III Schaltungssynthese und -analyse

### 1 Beispiele aus der Elektrotechnik

Für die Schaltungssynthese wie auch die -analyse ist die Kenntnis der Schaltzeichen, der Kennzeichnung von Betriebsmitteln und der Anschlusskennzeichnung notwendig. Auch die umfangreichsten und komplexesten Schaltungsaufgaben setzen sich aus der Kombination bzw. Verknüpfung einiger Grundschaltungen zusammen. Weil das Problem einer zu planenden Steuerung in der Regel durch die Darstellung einer Schaltung in einem Stromlaufplan gelöst wird, ist dieser besonders wichtig und darum im Beispiel nach Bild III-1 dargestellt.

Im Schriftfeld der Zeichnung werden unten rechts die Blattnummer und die Anzahl der Blätter für eine Anlage angegeben, hier also Blatt 5 von 7 Blättern. Darüber im Schriftfeld angeordnet steht mit einem Gleichheitszeichen als Vorzeichen der Kennzeichnungsblock „Anlage“ (hier = 2B4.D3) und mit einem Pluszeichen als Vorzeichen der Kennzeichnungsblock „Einbauort“ (hier Schaltschrank +2E4). Diese Kennzeichnung gilt für alle auf diesem Blatt dargestellten Betriebsmittel und müssen auf diesem Blatt folglich nicht mehr angegeben werden.

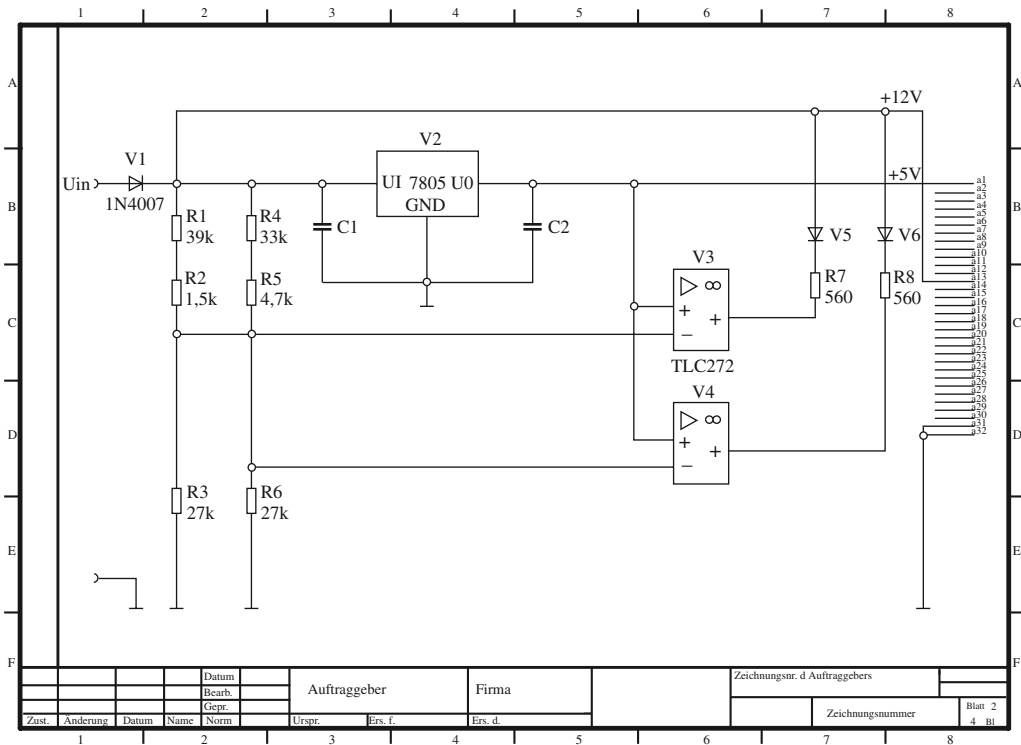
Der Motor ist am Aufstellungsort +T4 installiert, während die Tasterkombination im Schaltpult +3P4 integriert ist. Der Hinweis auf ein anderes Blatt wird nach einem Schrägstrich, der Planabschnitt nach einem Punkt geschrieben; die Hauptstromversorgung kommt also von Blatt 4 (= .D3/4.; 2B4-Anlage mit Funktionsgruppe *D* = Leistungskreis) und geht nach Blatt 6 (= .D4/6.), um dort in Planquadrat 1 (= .D4/... 1) fortgeführt zu werden. Die Steuerspannung kommt von Blatt 2 aus Planquadrat 3.

Für die Wartung und Instandhaltung sind zusätzliche Informationen einzufügen, wie z.B. die Nennstromwerte für Sicherungen und Auslösbereich der Motorschutzschalter bzw. -relais. Die Reihenklemmenanschlüsse für den Motor (X1: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) und die Tasterkombination (X1: 11, 12, 13) sind ebenfalls angegeben.

### 2 Beispiele aus der Elektronik

Schaltungen in der Elektronik werden so dargestellt, dass sich der Signalfluss von links nach rechts ergibt. Dies bezieht sich auch auf die Nummerierung der Bauelemente.





### Bild III-3 Stromversorgung für einen Einplatinencomputer

■ **Beispiel 1:** Bild III-2 zeigt beispielhaft die Schaltung eines Kopfhörerverstärkers.

Die Eingangsspannung wird über R1 eingespeist. Dieser Widerstand dient auch zur Lautstärkeeinstellung. Über den Operationsverstärker wird das Signal verstärkt und gelangt über C2 zur Komplementärendstufe. Diese besteht aus einem npn- und pnp-Transistor der jeweils die negative oder positive Signalhalbwelle über C3 dem Kopfhöreranschluss zuführt. Beide Transistoren arbeiten in Kollektorgrundschalung. Ihre Basisspannung und damit ihr Ruhestrom wird über zwei in Durchlassrichtung betriebene Dioden V1 und V2 eingestellt. Ohne V1 und V2 würden Übernahmeverzerrungen entstehen.

Die Schaltung ist für eine unsymmetrische Spannung ausgelegt. Sie benötigt daher R3 und R4, um den invertierenden Eingang auf die halbe Betriebsspannung zu legen.

■ **Beispiel 2:** Bild III-1 zeigt die Stromversorgung für einen Einplatinencomputer. Die Schaltung selbst wird mit einer Gleichspannung betrieben. V1 dient zur Vermeidung einer falschen Polung. Die notwendigen 5 V für den Computer werden mit dem Stabilisierungs-IC 7805 erreicht. Die 12 V-Spannung dient zur Spannungsversorgung zusätzlicher Versuchsschaltungen. Um ohne Messgerät auszukommen wurden zwei Komparatoren eingesetzt, die über Leuchtdioden die gewünschte Spannung anzeigen (LED grün) oder bei zu hoher Spannung warnen (LED rot)

## IV CAD-Technik

### 1 Allgemeines

Unter CAD (Computer Aided Design) versteht man ganz allgemein computergestütztes konstruieren. Hierbei steht die Erstellung technischer Unterlagen im Vordergrund. Für die Elektrotechnik und Elektronik sind dies einmal Stromlauf- und Funktionspläne, Verdrahtungspläne, Lagepläne oder Layouts zur Herstellung gedruckter Schaltungen und zum Anderen Simulationsprogramme, die Entwicklungsarbeiten erheblich verkürzen.

Vorteile beim Einsatz dieser Technik liegen in der schnellen Korrigierbarkeit von Fehlern.

### 2 Hardware und Software

Unter Hardware versteht man alle Geräte die zu einer Computeranlage gehören. Hierbei unterscheidet man Eingabegeräte wie Tastatur, Maus, Grafiktablett mit Lupe und Scanner. Ausgabegeräte sind Bildschirm, Drucker und Plotter.

Die Zeichnungen werden häufig mit Hilfe der Maus durchgeführt. Hierbei werden die Bewegungen der Rollkugel in Signale umgewandelt und von einem Maustreiber (spezielles Programm) ausgewertet. Der Scanner wird eingesetzt, um über eine Optik Punkt für Punkt ganze Bilder einzulesen. Neben dem Drucker wird als Pheripheriegerät zur Ausgabe von Grafiken der Plotter eingesetzt. Mit seinem Schreibstift kann direkt auf Papier oder Folie geschrieben werden. Beim Fotoplotter belichtet ein Lichtstrahl das Papier.

Oft arbeiten CAD-Systeme mit zwei Bildschirmen, wobei der eine als Grafik- und der andere als Textbildschirm genutzt wird. Grundvoraussetzung vieler CAD-Programme sind Rechner ab 486 mit 16 MB-RAM. Beispiele für Zeichenprogramme sind AUTOCAD, AUTOSKETCH und besonders auf die Bedürfnisse in der Elektrotechnik und Elektronik abgestellt ORCAD und WSCAD. Zur Layouterstellung wird häufig EAGLE eingesetzt und im Bereich der Simulationsprogramme sind PSPICE und MICROCAP und für den Ausbildungsbereich ELECTRONIC WORKBENCH zu nennen.

Um CAD-Systeme richtig und effektiv einzusetzen bedarf es einer gründlichen Einarbeitung.

### 3 Erstellen von Schaltplänen

Bei der Erstellung technischer Zeichnungen am Bildschirm können Fehler schnell korrigiert werden. Häufig verwendete Symbole sind in Bibliotheken gesammelt und können dort abgerufen werden. Sie lassen sich beim Laden beliebig platzieren und können gedreht oder gespiegelt werden. Nachträgliches Verschieben von Baugruppen, Bauteilen,

Leitungen oder Schriften ermöglichen eine optimale Darstellung. Mit Hilfe von Bauteileeditoren können Bauteilebibliotheken selbst erweitert werden. Eigene Symbole lassen sich somit herstellen und Vergrößerungen und Verkleinerungen sind problemlos durchzuführen. Da Zeichnungen reproduziert werden können sind auch nachträgliche Änderungen möglich. Die Zeichnungsausgabe erfolgt auf einem Drucker oder Plotter. CAD-Zeichnungen lassen sich abspeichern und in andere Programme wie beispielsweise Textverarbeitungsprogramme einfügen. Der Einsatz von CAD bedeutet eine erhebliche Zeitersparnis gegenüber Arbeiten am konventionellen Zeichenbrett.

### 4 Erstellen von Layouts

EAGLE ist ein bekanntes und weitverbreitetes CAD-Programm und für den Entwurf von Platinenlayouts optimiert. Die Ausgabe der Layouts kann über Matrixdrucker, Plotter, Fotoplotter, Laserdrucker und Bohrmaschinen erfolgen. Mit dem Layout-Editor lassen sich beliebige Leiterbahnbreiten, Lötaugenformen und -durchmesser herstellen. Er kann für konventionelle und SMD-Technik eingesetzt werden.

Schaltpläne können auch mit anderen CAD-Programmen beispielsweise mit ORCAD gezeichnet werden. Die im Anschluss an die Zeichenarbeit erstellte Netzliste kann in EAGLE-Script-Dateien konvertiert werden. In der Netzliste (Netlist) befinden sich alle verwendeten Bauelemente und ihre Verbindung untereinander.

#### ■ **Beispiel:** Entwurf einer gedruckten Schaltung mit dem Programm EAGLE

Mit dem EDIT-Befehl wird der Schaltplan (Schematic) und mit USE-Befehl die gewünschte Bibliothek (Library) geöffnet. Aus dieser kann das entsprechende Bauteil gewählt und in einem zuvor gewählten Rahmen (Frames) platziert werden. Der Schaltplan nach Bild IV-1 kann mit den Befehlen „Schieben (MOVE), Löschen (DELETE) und Drehen (ROTATE)“ korrigiert und geändert werden. Bauelemente werden mit Namen (NAME) und Wert (VALUE) eindeutig gekennzeichnet. Mit dem NET-Befehl lassen sich die entsprechenden Verbindungen zeichnen und Verbindungspunkte mit einem Lötunkt (JUNCTION) versehen.

Der Befehl ERC (Electrical Rule Check) ermöglicht eine Überprüfung der Verbindungen auf Kurzschlüsse. Mit dem Speicherbefehl (WRITE) wird die Schaltung abgespeichert.

Der BOARD-Befehl lässt auf dem Bildschirm eine Leerplatine erscheinen mit allen Bauelementen des Schaltplans nach Bild IV-2. Die dem Bauelement im Schaltplan zugeordnete Bauform erscheint automatisch. Man braucht sich beispielsweise keine Gedanken mehr zu machen, ob das IC TLC272 mit 8 oder 14 PINs (Anschlüsse) versehen ist. Die Bauelemente sind durch Luftlinien (Gummileitungen) miteinander so verbunden, wie der Schaltplan dies vorgegeben hat.



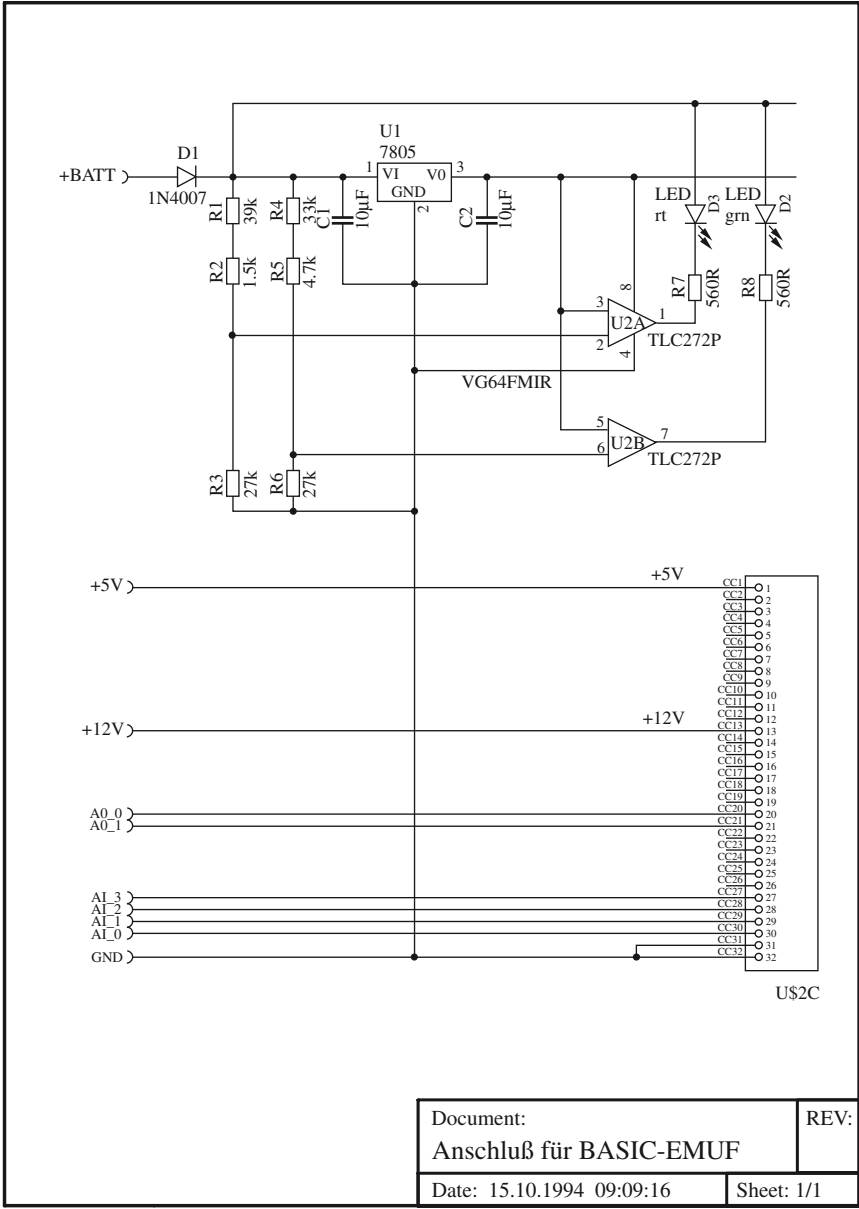


**Bild IV-1**  
Schaltplan

Die Elemente können nach den Wünschen des Entwicklers verschoben und auf die vorgegebene Leerplatine platziert werden (Bild IV-3). Mit dem Befehl AUTO erfolgt ein automatisches Routen (Herstellen des Layouts, Leiterplattenentflechtung) oder mit dem Befehl ROUTE ein manuelles. Am BOARD lassen sich anschließend auch noch Korrekturen durchführen. Dies ist in der Praxis not-

wendig, nicht weil Verbindungen falsch gelegt oder vergessen worden sind, sondern weil beispielsweise Versorgungsspannungsleitungen breiter ausgelegt werden sollen. Nach Abschluss der Designarbeit erzeugt das Programm die verschiedenen Daten zur Platinenherstellung. Hierzu gehören Layout, Lötmaske, Lageplan und Stücklisten. Bild IV-4 zeigt den Lagenplan und Bild IV-5 das entsprechende Layout.

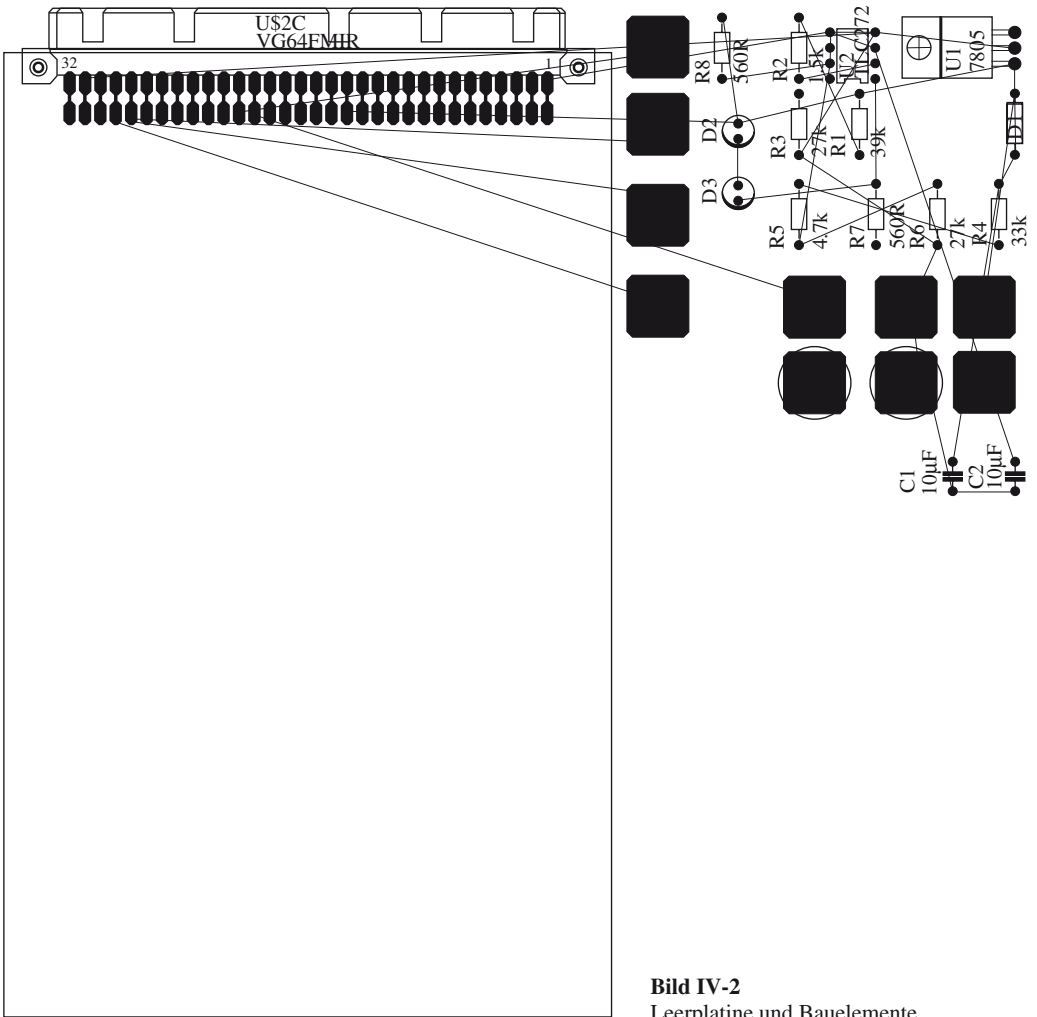


**Bild IV-2**  
Leerplatine und Bauelemente

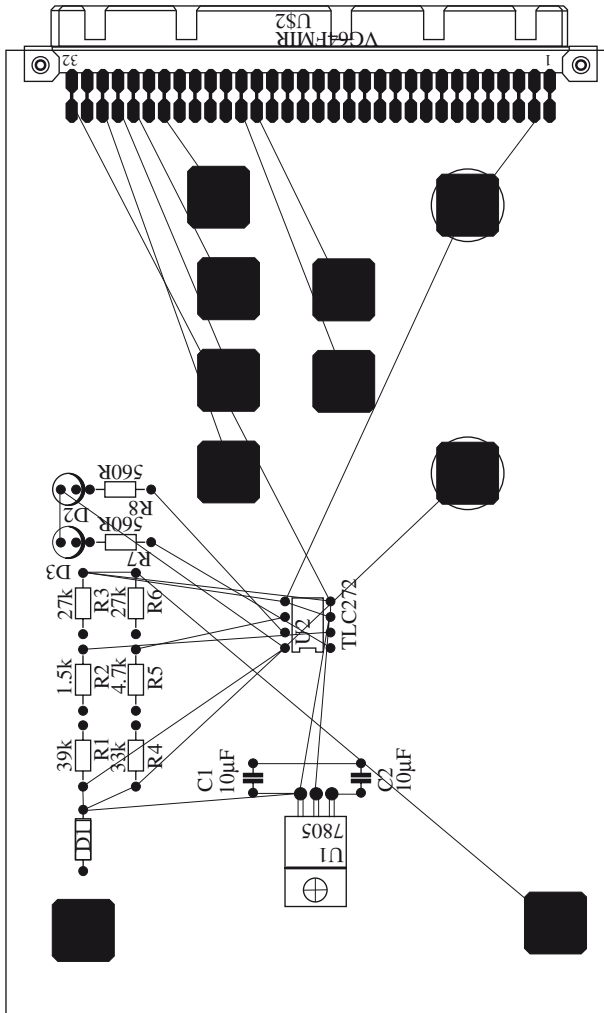


**Bild IV-3**  
Anordnung der Bauelemente  
auf der Platine

Von Hand erstellte Layouts haben den Nachteil, dass Fehler nie ganz ausgeschlossen werden können. Bei CAD-Systemen treten keine Fehler mehr auf, wenn das Programm richtig bedient wird.

## 5 Anwendungen in der Elektronik

- Elektronische Schaltungen
- Schaltungsentwurf
- Entwurf gedruckter Schaltungen
- Layout
- Leiterplattenentflechtung
- Stücklistenenerstellung
- Bestückungsplan

## 6 Auswahl von CAD-Systemen

- Entwurf gedruckter Schaltungen
- Richtlinien zum Entwurf
  - Herstellung gedruckter Schaltungen
  - Stromlaufplan
  - Layouterstellung (Freihand, CAD)
  - Bestückungsliste
  - Stückliste
  - Maske für Lötstoplack
  - Bearbeitungszeichnung

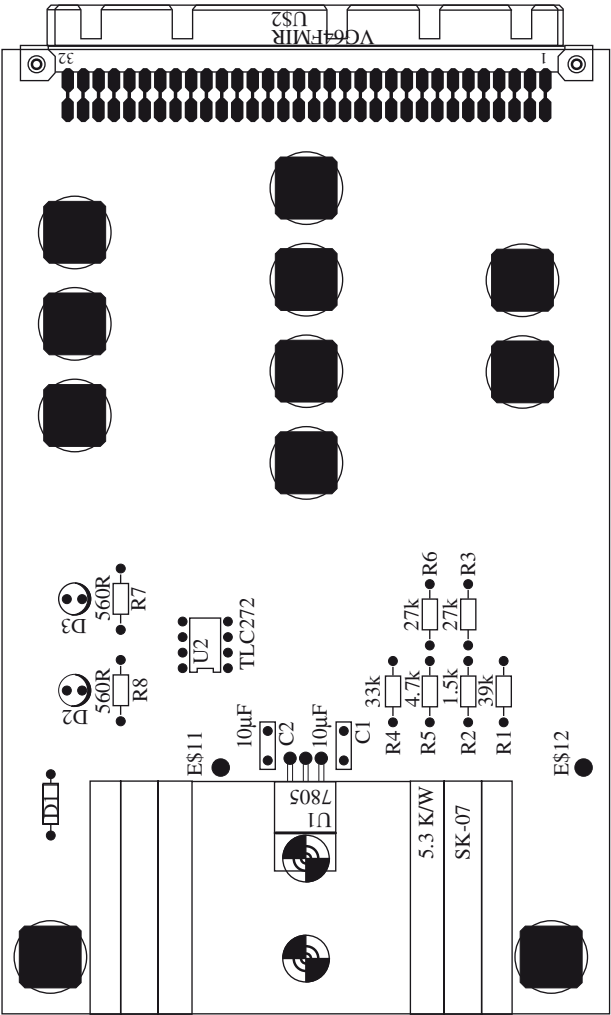


**Bild IV-4**  
Lageplan

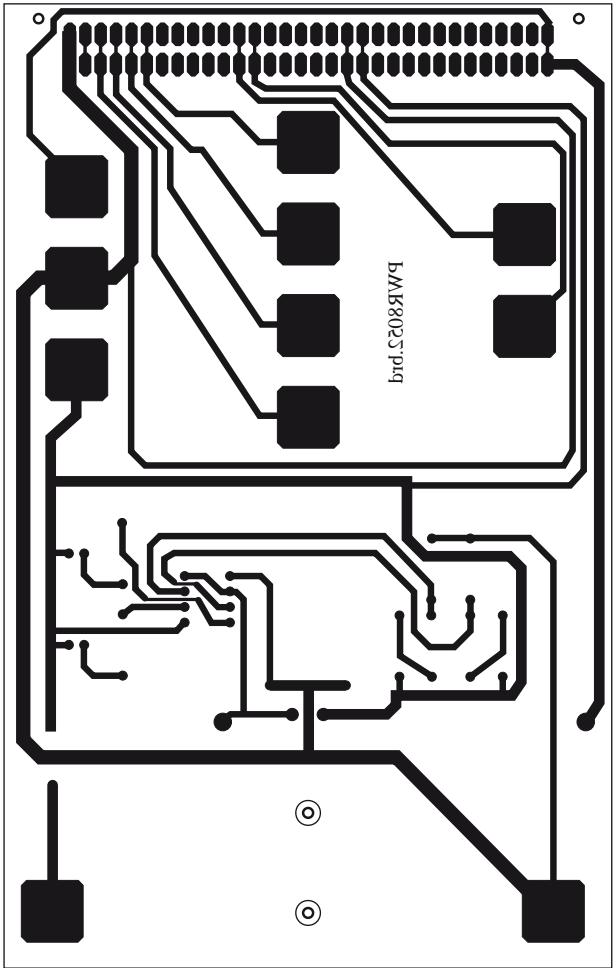


**Bild IV-5**  
Layout

# Datentechnik

## I Digitaltechnik

### 1 Grundbegriffe der Digitaltechnik

Als Teilgebiet der Elektronik, Automatisierungs-, Nachrichten- und Datenverarbeitungstechnik kann mit Hilfe der Digitaltechnik eine große Zahl technischer Probleme gelöst und das Verständnis komplexer Systeme gefördert werden. Im Gegensatz zu analogen Schaltungen, wo Werte über einen Bereich kontinuierlich ausgegeben werden, können Ein- und Ausgangssignale digitaler Schaltungen nur zwei mögliche stabile Zustände annehmen. Man spricht daher von einem *binären System*, das aufgrund der Zweiwertigkeit logische Entscheidungen ermöglicht. Die Schaltungen selber nennt man logische Schaltungen. Hierbei sind die binären Zustände zwei Spannungswertbereichen (Pegeln) zugeordnet. Der niedrigere Spannungsbereich (näher an minus unendlich) wird mit LOW und der positivere Spannungsbereich (näher an plus unendlich) wird mit HIGH bezeichnet. Die genauen Werte sind von der schaltungstechnischen Realisierung abhängig. Soll technologieunabhängig gearbeitet werden, also ohne auf die besonderen Bedingungen zu achten, mit denen die Schaltung später vielleicht realisiert werden soll, werden die binären Zustände mit den Zeichen „0“ und „1“ beschrieben. Je nach gewähltem Bezugspunkt wird zwischen positiver und negativer Logik unterschieden. Dabei entspricht bei positiver Logik die „1“ dem H- und die „0“ dem L-Pegel; bei negativer Logik dagegen die „0“ dem H- und die „1“ dem L-Pegel (Bild I-1). Die Zeichen „0“ und „1“ heißen *Bits*. Das *Bit* (Binary Digit = Binärzeichen) ist die kleinste Informationseinheit. Vier Bits ergeben eine Tetrade oder Nibble, und 2 Tetraden ergeben ein Byte. Die nachfolgend größeren Informationseinheiten sind mit Potenzen zur Basis 2 festgelegt (Bild I-2). Ein Byte nennt man in 8-Bit-Systemen auch „*Wort*“. Allgemein kann aber ein „*Wort*“ auch aus mehreren Bytes zusammengesetzt sein. Die höchste und niederwertigste Stelle eines Wortes wird besonders gekennzeichnet. Man spricht vom MSB (Most Significant Bit) und vom LSB (Least Significant Bit).

Die Grundelemente digitaler Schaltungen sind logische Grundbausteine. Sie besitzen voneinander unabhängige Eingänge und einen Ausgang, dessen Ausgangsvariable jeweils von Eingangsvariablen abhängt. Bausteine mit solchen Grundverknüpfungen nennt man *Gatter*. Jede Verknüpfung kann durch ein Schaltzeichen, eine Wertetabelle (Wahrheitstabelle, Funktionstabelle), eine Gleichung oder einen Impulszeitplan (Funktionszeitplan) dargestellt werden. Die grafische Darstellung mit Schaltzeichen wird verwendet, um größere Zusammenhänge aufzuzeigen.

Die Wertetabelle drückt in übersichtlicher Weise aus, welche Ausgangszustände sich bei allen möglichen Eingangszuständen ergeben. Der Impulszeitplan stellt den Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangssignalen dar und erlaubt damit den Zugang zu den Messtechniken.

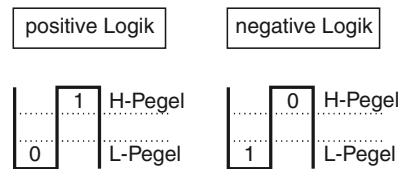


**Bild I-1** Pegelzuordnung

| Informationseinheiten     |                |
|---------------------------|----------------|
| 1 Bit                     | ("0" oder "1") |
| 1 Byte = 2                | = 8 Bit        |
| 1 kByte = 2 <sup>10</sup> | = 1024 Bit     |
| 1 MByte = 2 <sup>20</sup> | = 1048576 Bit  |

| Begriffe |     |     |     |         |     |     |     |
|----------|-----|-----|-----|---------|-----|-----|-----|
| 1        | 0   | 1   | 1   | 0       | 1   | 1   | 0   |
| Bit      | Bit | Bit | Bit | Bit     | Bit | Bit | Bit |
| Tetrade  |     |     |     | Tetrade |     |     |     |
| Byte     |     |     |     |         |     |     |     |

**Bild I-2** Informationseinheiten und Begriffe

Gleichungen sind Hilfsmittel, um mit dem Einsatz der Schaltalgebra vereinfachte Schaltungen zu finden. Die Aussage jeder dieser genannten Darstellungsformen ist dabei dieselbe. Alle logischen Zusammenhänge in der Digitaltechnik lassen sich durch die drei Grundverknüpfungen beziehungsweise Grundfunktionen NICHT (Negation), UND (Konjunktion) und ODER (Disjunktion) beschreiben. Weitere abgeleitete Verknüpfungen vereinfachen die Realisierung digitaler Schaltungen. Es handelt sich dabei um die Funktionen: NAND, NOR, Exklusiv ODER (Antivalenz) und Exklusiv NOR (Äquivalenz).

Als Übersicht zeigt Bild I-3 die Schaltzeichen aller Grundverknüpfungen mit einer Funktionsbeschreibung in Form einer Wertetabelle, eines Impulszeitplans und einer Funktionsgleichung. Besitzt eine Verknüpfung nur einen Eingang, sind zwei Eingangs-

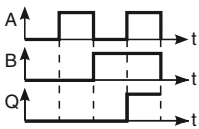
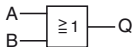
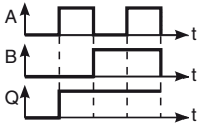
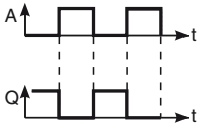
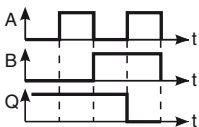
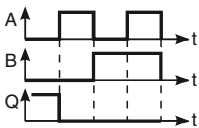
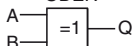
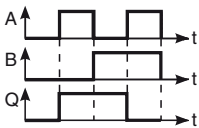
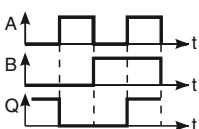
| Schaltzeichen                                                                                                    | Wertetabelle                                                                                                                                                                                                       | Impulszeitplan | Funktionsgleichung |   |   |   |   |                                                                                   |               |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                     |                              |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|--------------------|---|---|---|---|-----------------------------------------------------------------------------------|---------------|---|---|---|---|---|---|---|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| <div>UND<br/></div>             | <table><tr><td>B</td><td>A</td><td>Q</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table> | B              | A                  | Q | 0 | 0 | 0 | 0                                                                                 | 1             | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |    | $Q = A \wedge B$             |
| B                                                                                                                | A                                                                                                                                                                                                                  | Q              |                    |   |   |   |   |                                                                                   |               |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                     |                              |
| 0                                                                                                                | 0                                                                                                                                                                                                                  | 0              |                    |   |   |   |   |                                                                                   |               |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                     |                              |
| 0                                                                                                                | 1                                                                                                                                                                                                                  | 0              |                    |   |   |   |   |                                                                                   |               |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                     |                              |
| 1                                                                                                                | 0                                                                                                                                                                                                                  | 0              |                    |   |   |   |   |                                                                                   |               |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                     |                              |
| 1                                                                                                                | 1                                                                                                                                                                                                                  | 1              |                    |   |   |   |   |                                                                                   |               |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                     |                              |
| <div>ODER<br/></div>            | <table><tr><td>B</td><td>A</td><td>Q</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table> | B              | A                  | Q | 0 | 0 | 0 | 0                                                                                 | 1             | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |    | $Q = A \vee B$               |
| B                                                                                                                | A                                                                                                                                                                                                                  | Q              |                    |   |   |   |   |                                                                                   |               |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                     |                              |
| 0                                                                                                                | 0                                                                                                                                                                                                                  | 0              |                    |   |   |   |   |                                                                                   |               |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                     |                              |
| 0                                                                                                                | 1                                                                                                                                                                                                                  | 1              |                    |   |   |   |   |                                                                                   |               |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                     |                              |
| 1                                                                                                                | 0                                                                                                                                                                                                                  | 1              |                    |   |   |   |   |                                                                                   |               |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                     |                              |
| 1                                                                                                                | 1                                                                                                                                                                                                                  | 1              |                    |   |   |   |   |                                                                                   |               |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                     |                              |
| <div>NICHT<br/></div>           | <table><tr><td>A</td><td>Q</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table>                                                                                                             | A              | Q                  | 0 | 1 | 1 | 0 |  | $Q = \bar{A}$ |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                     |                              |
| A                                                                                                                | Q                                                                                                                                                                                                                  |                |                    |   |   |   |   |                                                                                   |               |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                     |                              |
| 0                                                                                                                | 1                                                                                                                                                                                                                  |                |                    |   |   |   |   |                                                                                   |               |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                     |                              |
| 1                                                                                                                | 0                                                                                                                                                                                                                  |                |                    |   |   |   |   |                                                                                   |               |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                     |                              |
| <div>NAND<br/></div>            | <table><tr><td>B</td><td>A</td><td>Q</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table> | B              | A                  | Q | 0 | 0 | 1 | 0                                                                                 | 1             | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |    | $Q = \overline{A \wedge B}$  |
| B                                                                                                                | A                                                                                                                                                                                                                  | Q              |                    |   |   |   |   |                                                                                   |               |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                     |                              |
| 0                                                                                                                | 0                                                                                                                                                                                                                  | 1              |                    |   |   |   |   |                                                                                   |               |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                     |                              |
| 0                                                                                                                | 1                                                                                                                                                                                                                  | 1              |                    |   |   |   |   |                                                                                   |               |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                     |                              |
| 1                                                                                                                | 0                                                                                                                                                                                                                  | 1              |                    |   |   |   |   |                                                                                   |               |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                     |                              |
| 1                                                                                                                | 1                                                                                                                                                                                                                  | 0              |                    |   |   |   |   |                                                                                   |               |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                     |                              |
| <div>NOR<br/></div>             | <table><tr><td>B</td><td>A</td><td>Q</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table> | B              | A                  | Q | 0 | 0 | 1 | 0                                                                                 | 1             | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |    | $Q = \overline{A \vee B}$    |
| B                                                                                                                | A                                                                                                                                                                                                                  | Q              |                    |   |   |   |   |                                                                                   |               |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                     |                              |
| 0                                                                                                                | 0                                                                                                                                                                                                                  | 1              |                    |   |   |   |   |                                                                                   |               |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                     |                              |
| 0                                                                                                                | 1                                                                                                                                                                                                                  | 0              |                    |   |   |   |   |                                                                                   |               |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                     |                              |
| 1                                                                                                                | 0                                                                                                                                                                                                                  | 0              |                    |   |   |   |   |                                                                                   |               |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                     |                              |
| 1                                                                                                                | 1                                                                                                                                                                                                                  | 0              |                    |   |   |   |   |                                                                                   |               |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                     |                              |
| <div>Exklusiv ODER<br/></div> | <table><tr><td>B</td><td>A</td><td>Q</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table> | B              | A                  | Q | 0 | 0 | 0 | 0                                                                                 | 1             | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |   | $Q = A \veebar B$            |
| B                                                                                                                | A                                                                                                                                                                                                                  | Q              |                    |   |   |   |   |                                                                                   |               |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                     |                              |
| 0                                                                                                                | 0                                                                                                                                                                                                                  | 0              |                    |   |   |   |   |                                                                                   |               |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                     |                              |
| 0                                                                                                                | 1                                                                                                                                                                                                                  | 1              |                    |   |   |   |   |                                                                                   |               |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                     |                              |
| 1                                                                                                                | 0                                                                                                                                                                                                                  | 1              |                    |   |   |   |   |                                                                                   |               |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                     |                              |
| 1                                                                                                                | 1                                                                                                                                                                                                                  | 0              |                    |   |   |   |   |                                                                                   |               |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                     |                              |
| <div>Exklusiv NOR<br/></div>  | <table><tr><td>B</td><td>A</td><td>Q</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table> | B              | A                  | Q | 0 | 0 | 1 | 0                                                                                 | 1             | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |  | $Q = \overline{A \veebar B}$ |
| B                                                                                                                | A                                                                                                                                                                                                                  | Q              |                    |   |   |   |   |                                                                                   |               |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                     |                              |
| 0                                                                                                                | 0                                                                                                                                                                                                                  | 1              |                    |   |   |   |   |                                                                                   |               |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                     |                              |
| 0                                                                                                                | 1                                                                                                                                                                                                                  | 0              |                    |   |   |   |   |                                                                                   |               |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                     |                              |
| 1                                                                                                                | 0                                                                                                                                                                                                                  | 0              |                    |   |   |   |   |                                                                                   |               |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                     |                              |
| 1                                                                                                                | 1                                                                                                                                                                                                                  | 1              |                    |   |   |   |   |                                                                                   |               |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                     |                              |

**Bild I-3**  
Logische Verknüpfungen

kombinationen, bei zwei Eingängen vier verschiedene Eingangskombinationen möglich. Bei n-Eingängen gibt es  $2^n$  verschiedene Eingangskombinationen.

## 2 Logische Grundschaltungen

### 2.1 Grundverknüpfungen

Einfache Schaltungen aus Leuchtdiode und Schalter, bei der die Eingangsgröße der Schalter mit den Zuordnungen: Schalter offen = „0“ und Schalter geschlossen = „1“, und die Ausgangsgröße die Leuchtdiode mit den Zuordnungen: LED leuchtet nicht = „0“ und LED leuchtet = „1“ ist, verdeutlichen die jeweilige Funktion (Bild I-4).

#### 2.1.1 NICHT-Verknüpfung

Die NICHT-Verknüpfung (NOT) hat nur eine Eingangsvariable. Da die Ausgangsvariable immer den entgegengesetzten Wert der Eingangsvariablen annimmt, spricht man auch von einem *Inverter*. Ist der Schalter geöffnet („0“), kann Strom durch die Leuchtdiode fließen und sie leuchtet („1“). Bei geschlossenem Schalter („1“) ist die Diode kurzgeschlossen. Damit fließt durch die Leuchtdiode kein Strom und sie leuchtet nicht („0“).

#### 2.1.2 UND-Verknüpfung

Eine UND-Verknüpfung (AND) besitzt mindestens zwei Eingangsvariable. Der Ausgang wird nur „1“, wenn alle Eingänge „1“ sind, wenn also A UND B



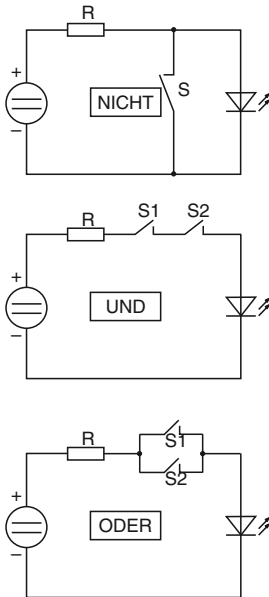


**Bild I-4**  
Grundverknüpfungen

UND n gleichzeitig 1 ist. Die Schaltung zeigt, dass die Diode nur leuchten kann („1“ ergibt), wenn der eine UND der andere Schalter geschlossen ist (also „1“ aufweist).

### 2.1.3 ODER-Verknüpfung

Eine ODER-Verknüpfung (OR) erhält am Ausgang dann eine „1“, sobald eine Eingangsvariable „1“ ist, wenn also ein ODER zwei ODER n-Eingänge „1“ sind. In der Schaltung leuchtet die Diode („1“), sobald einer der Schalter geschlossen („1“) ist.

## 2.2 Realisierungsmöglichkeiten logischer Verknüpfungen

Logische Verknüpfungen lassen sich durch Mechanik (Schalter, Schütze), Elektronik oder Software reali-

sieren. In der Elektronik werden Schalter durch Dioden und Transistoren ersetzt. Bild I-5 zeigt Grundverknüpfungen solcher Bauelemente. Man spricht auch von Dioden-Widerstandslogik oder Transistor-Diodenlogik. Ihr Einsatz ist so heute nicht mehr üblich. Die Schaltungen dienen lediglich zum Grundverständnis logischer Schaltungen.

Der Eingang ist jeweils mit A beziehungsweise B und der Ausgang mit Q gekennzeichnet. Bei der UND-Schaltung stellt sich beispielsweise nur die Spannung +5 V („1“) am Ausgang ein, wenn A und B an +5 V („1“) liegen, weil dann beide Dioden gesperrt sind. In den drei möglichen anderen Fällen ergibt sich eine Spannung von ca. 0,7 V („0“) am Ausgang.

Bei der ODER-Schaltung reicht es, wenn A oder B auf +5 V liegt, um am Ausgang ungefähr 5 V („1“) zu erzeugen.

Liegt bei der NICHT-Schaltung A auf Masse („0“), ist der Transistor gesperrt, und die Ausgangsspannung nimmt den Betriebsspannungswert +5 V („1“) an. Der Transistor schaltet nur durch, wenn der Eingang A mit +5 V („1“) verbunden wird. Die Ausgangsspannung beträgt in diesem Fall etwa 0,2 V („0“).

Heute setzt man *integrierte Standardbausteine* ein. Die angebotenen Logikfamilien unterscheiden sich durch unterschiedliche Pegel, durch Verlustleistungen und Laufzeiten. Die Bausteine selbst besitzen oft mehrere Gatter (Bild I-6).

Ihre PIN- oder Anschlussbelegung können aus den entsprechenden Datenbüchern entnommen werden. Bei Betrachtung des IC's von oben (On Top) ist die Zählrichtung immer von links oben nach rechts oben. Bei der Darstellung von Funktionsplänen werden die Betriebsspannungsanschlüsse nicht mit gezeichnet. Als Beispiel dient ein Baustein mit vier NAND-Gattern. Weitere Beispiele sind in den Kapiteln „Integrierte Schaltungen“ und „Programmierbare Logikbausteine“ zu finden.

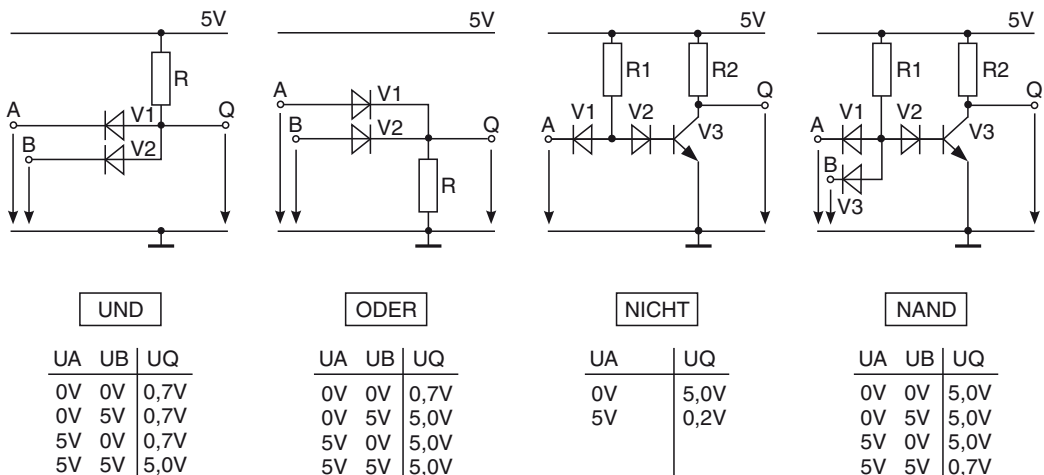


**Bild I-5** Dioden- und Transistorlogik

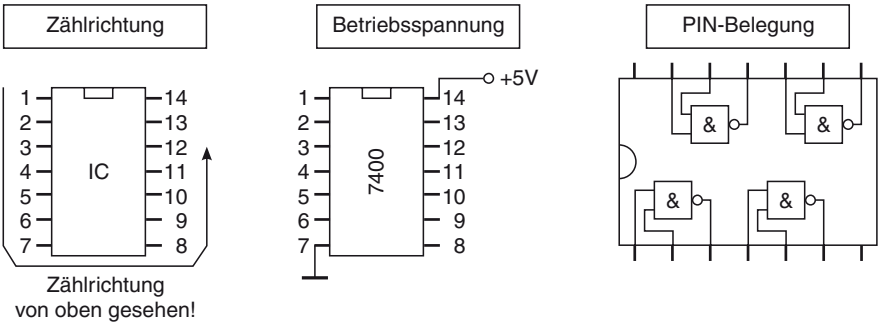


**Bild I-6** Standardbaustein mit NAND-Gattern  
Schaltalgebra

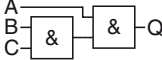
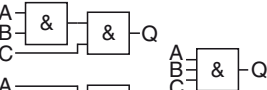
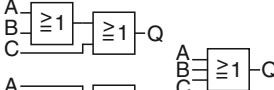
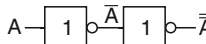
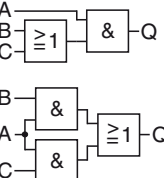
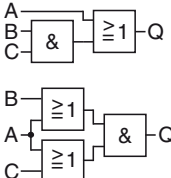
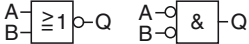
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                         |              |              |             |      |        |     |            |         |       |  |  |           |           |     |          |          |              |              |                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                         |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|--------------|-------------|------|--------|-----|------------|---------|-------|--|--|-----------|-----------|-----|----------|----------|--------------|--------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <div>Symbole für Verknüpfungszeichen</div> <table><tr><td>UND</td><td><math>\wedge</math></td><td><math>\circ</math></td><td><math>A \wedge B</math></td><td><math>A \circ B</math></td></tr><tr><td>ODER</td><td><math>\vee</math></td><td><math>+</math></td><td><math>A \vee B</math></td><td><math>A + B</math></td></tr><tr><td>NICHT</td><td></td><td></td><td><math>\bar{A}</math></td><td><math>\bar{A}</math></td></tr><tr><td>XOR</td><td><math>\nabla</math></td><td><math>\oplus</math></td><td><math>A \nabla B</math></td><td><math>A \oplus B</math></td></tr></table> | UND                                                                                                                                      | $\wedge$                                                                                                                                                                                                                | $\circ$      | $A \wedge B$ | $A \circ B$ | ODER | $\vee$ | $+$ | $A \vee B$ | $A + B$ | NICHT |  |  | $\bar{A}$ | $\bar{A}$ | XOR | $\nabla$ | $\oplus$ | $A \nabla B$ | $A \oplus B$ | <div>Vorrangregel</div> $Q = A \vee B \wedge C$ $Q = A \vee (B \wedge C)$  | <div>Verknüpfung mit einer Konstanten</div> $A \text{ -- } \boxed{\&} \text{ -- } Q = A$ $A \text{ -- } \boxed{\&} \text{ -- } Q = 0$ $A \text{ -- } \boxed{\geq 1} \text{ -- } Q = 1$ $A \text{ -- } \boxed{\geq 1} \text{ -- } Q = A$ |
| UND                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | $\wedge$                                                                                                                                 | $\circ$                                                                                                                                                                                                                 | $A \wedge B$ | $A \circ B$  |             |      |        |     |            |         |       |  |  |           |           |     |          |          |              |              |                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                         |
| ODER                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | $\vee$                                                                                                                                   | $+$                                                                                                                                                                                                                     | $A \vee B$   | $A + B$      |             |      |        |     |            |         |       |  |  |           |           |     |          |          |              |              |                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                         |
| NICHT                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                         | $\bar{A}$    | $\bar{A}$    |             |      |        |     |            |         |       |  |  |           |           |     |          |          |              |              |                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                         |
| XOR                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | $\nabla$                                                                                                                                 | $\oplus$                                                                                                                                                                                                                | $A \nabla B$ | $A \oplus B$ |             |      |        |     |            |         |       |  |  |           |           |     |          |          |              |              |                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                         |
| <div>Erweiterung</div> $Q = A \wedge A \wedge A$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | $Q = A \vee A \vee A$                                   |                                                                                                                                                                                                                         |              |              |             |      |        |     |            |         |       |  |  |           |           |     |          |          |              |              |                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                         |
| <div>Kommutativgesetz</div> $A \wedge B = B \wedge A$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | $A \vee B = B \vee A$                                 | <div>Verknüpfung mit dem Komplement</div> $A \text{ -- } \boxed{\&} \text{ -- } Q = 0$ $A \text{ -- } \boxed{\geq 1} \text{ -- } Q = 1$                                                                                 |              |              |             |      |        |     |            |         |       |  |  |           |           |     |          |          |              |              |                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                         |
| <div>Assoziativgesetz</div> $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$               | <div>Doppelnegation</div> $\bar{\bar{A}} = A$                                                                                        |              |              |             |      |        |     |            |         |       |  |  |           |           |     |          |          |              |              |                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                         |
| <div>Distributivgesetz</div> $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$  | <div>Abgeleitete Regeln</div> $A \wedge (\bar{A} \vee B) = A \wedge B$ $A \wedge (A \vee B) = A$ $A \wedge \bar{B} \vee \bar{A} \wedge B = A \nabla B$ $A \vee (\bar{A} \wedge B) = A \vee B$ $A \vee (A \wedge B) = A$ |              |              |             |      |        |     |            |         |       |  |  |           |           |     |          |          |              |              |                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                         |
| <div>De Morgansche Gesetz</div> $A \wedge B = \bar{\bar{A} \vee \bar{B}}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | $\bar{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$             | <div>Bild I-7</div> <div>Regeln und Gesetze</div>                                                                                                                                                                       |              |              |             |      |        |     |            |         |       |  |  |           |           |     |          |          |              |              |                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                         |

**Bild I-7**  
Regeln und Gesetze der Schaltalgebra

### 3 Schaltalgebra

#### 3.1 Allgemeines

Die Schaltalgebra ist ein Hilfsmittel zur mathematischen Beschreibung logischer Funktionen. Mit ihren Regeln und Gesetzen können Gleichungen umgeformt, vereinfacht und so Schaltungen optimal realisiert werden (Synthese von Schaltungen). Für die Verknüpfungszeichen von Variablen existieren unterschiedliche Darstellungen. Die beiden in der Digitaltechnik häufig angewandten Formen sind in der Übersicht (Bild I-7) mit aufgeführt.

In der Schaltalgebra muss eine bestimmte Rangfolge der Operationen eingehalten werden. Sie besagt, dass NICHT-Verknüpfungen vor UND- und ODER-Verknüpfungen durchzuführen sind (Vorrangregel). Das *Kommutativgesetz* wird auch Vertauschungsgesetz genannt. Danach können die einzelnen Eingangsvariablen vertauscht werden. So darf beispielsweise nach Bild I-4 bei der UND-Verknüpfung zuerst S1 und dann S2 oder umgekehrt geschaltet werden. Die Reihenfolge der Schalter hat keinen Einfluss auf die Funktion der Gesamtschaltung. Dasselbe gilt auch für die Parallelschaltung der Schalter bei der ODER-Verknüpfung.

Mit dem *Assoziativgesetz* werden Variable einer UND- oder einer ODER-Verknüpfung zusammengefasst. Weil das Assoziativgesetz Variable durch Klammern verbindet, heißt das Gesetz auch *Verbindungsgesetz*. Klammern können hierbei gesetzt oder fortgelassen werden. Wird für eine Schaltung eine festgelegte Anzahl von Eingängen benötigt, lässt sich die Aufgabe mit diesem Gesetz lösen.

Das *Distributiv-* oder *Verteilungsgesetz* ist aus der Algebra bekannt. Hiermit kann eine gemeinsame Variable ausgeklammert werden.

Das *De Morgansche Gesetz* hilft bei der Umsetzung der Grundfunktionen in NOR- und NAND-Technik. Eine NAND-Verknüpfung der Variablen A und B kann durch Negierung dieser Variablen in eine ODER-Verknüpfung umgewandelt werden, und bei einer NOR-Verknüpfung ist durch Negieren der Variablen ein Ersatz durch UND möglich (siehe auch Bild I-11). Da alle Grundfunktionen durch NAND oder NOR nachgebildet werden können (Bild I-12), lässt sich die Lagerhaltung durch den Einsatz dieser Techniken verkleinern.

Im Bild I-7 sind die Verknüpfungen mit einer Konstanten und wichtige abgeleitete Regeln zusammengefasst. Sind beispielsweise Doppelnegierungen bei einer Variablen vorhanden, so heben sich diese praktisch auf. Eine Erweiterung mit einer einmal vorhandenen Variablen darf immer durchgeführt werden, weil hiermit das Resultat nicht beeinflusst wird.

Vom *Absorptionsgesetz* spricht man, wenn eine der Variablen keine Auswirkung auf das Ergebnis hat. Bei der *Analyse* logischer Schaltungen können mit Hilfe der Schaltalgebra Schaltfunktionen in die entsprechende Wertetabelle umgesetzt werden. Erfolgt die Programmierung in der SPS mit nicht grafikfähigen Programmiergeräten, sind ebenfalls Kenntnisse der Schaltalgebra zur richtigen Programmierung notwendig.

#### 3.2 Normalform einer binären Funktion

##### 3.2.1 Disjunktive Normalform

Geht man von der Wertetabelle im Bild I-8 aus, kann für jede Zeile dieser Tabelle ein Funktionsterm geschrieben werden. Für Zeile 1 zum Beispiel:  $A/B/C$  (sprich: A nicht UND B nicht UND C nicht). Die so durch UND verknüpften Funktionsterme nennt

| Wertetabelle |   |   |   | Minterme                                |                                         | Maxterme                            |                               |
|--------------|---|---|---|-----------------------------------------|-----------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------|
| C            | B | A | Q |                                         |                                         |                                     |                               |
| 0            | 0 | 0 | 1 | $\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge \bar{C}$ | $\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge \bar{C}$ | $\bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C}$ |                               |
| 0            | 0 | 1 | 1 | $\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge C$       | $\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge C$       | $\bar{A} \vee \bar{B} \vee C$       |                               |
| 0            | 1 | 0 | 0 | $\bar{A} \wedge B \wedge \bar{C}$       |                                         | $\bar{A} \vee B \vee \bar{C}$       | $\bar{A} \vee B \vee \bar{C}$ |
| 0            | 1 | 1 | 0 | $A \wedge B \wedge \bar{C}$             |                                         | $\bar{A} \vee B \vee C$             | $\bar{A} \vee B \vee C$       |
| 1            | 0 | 0 | 1 | $A \wedge \bar{B} \wedge \bar{C}$       | $A \wedge \bar{B} \wedge \bar{C}$       | $A \vee \bar{B} \vee \bar{C}$       |                               |
| 1            | 0 | 1 | 0 | $A \wedge B \wedge C$                   |                                         | $A \vee \bar{B} \vee C$             | $A \vee \bar{B} \vee C$       |
| 1            | 1 | 0 | 1 | $A \wedge B \wedge \bar{C}$             | $A \wedge B \wedge \bar{C}$             | $A \vee B \vee \bar{C}$             |                               |
| 1            | 1 | 1 | 0 | $A \wedge B \wedge C$                   |                                         | $A \vee B \vee C$                   | $A \vee B \vee C$             |

##### Gleichungen

##### Konjunktive Normalform

$$Q = \bar{A} \wedge \bar{B} \wedge \bar{C} \vee \bar{A} \wedge \bar{B} \wedge C \vee A \wedge \bar{B} \wedge \bar{C} \vee A \wedge B \wedge \bar{C} \quad (I-1)$$

$$\bar{Q} = \bar{A} \wedge B \wedge \bar{C} \vee \bar{A} \wedge B \wedge C \vee A \wedge \bar{B} \wedge C \vee A \wedge B \wedge C \quad (I-2)$$

$$\bar{Q} = Q \quad (I-3)$$

##### Disjunktive Normalform

$$Q = (\bar{A} \vee B \vee \bar{C}) \wedge (\bar{A} \vee B \vee C) \wedge (A \vee \bar{B} \vee C) \wedge (A \vee B \vee C) \quad (I-4)$$

##### Bild I-8

Disjunktive und konjunktive Normalform

man *Minterme*. Von Interesse ist, wann die Funktion „1“ ist. Sie soll nach der Wertetabelle den Wert „1“ erhalten in der Zeile 0, ODER in Zeile 1, ODER in Zeile 4, ODER in Zeile 6. Damit lässt sich die Gleichung (I.1) für Q aufstellen. Man spricht von der *disjunktiven* (ODER-) *Normalform* (DNF). Sind in einer Wertetabelle die Anzahl der „0“-Funktionen für Q geringer, ist es günstiger, die Gleichung für /Q aufzustellen und anschließend das Ergebnis zu invertieren.

### 3.2.2 Konjunktive Normalform

Die *konjunktive* (UND-) *Normalform* (KNF) erhält man, wenn die *Maxterme*, also alle ODER-Verknüpfungen, die Q = „0“ ergeben, UND-verknüpft werden (I.4). Jede Schaltung lässt sich durch eine Gleichung in disjunktiver oder konjunktiver Normalform beschreiben.

### 3.2.3 Umwandeln der Gleichung in Schaltzeichen

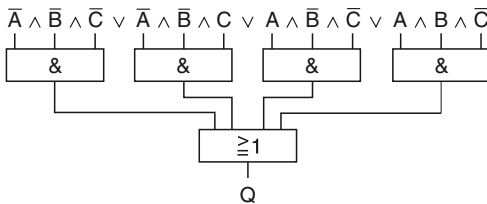


**Bild I-9** Umsetzung einer Gleichung in eine Schaltung

Gleichungen lassen sich in die genormte Darstellung umwandeln, indem die entsprechenden Schaltzeichen

der Verknüpfungen gezeichnet werden, wie das beispielhaft für die Gleichung (I.1) im Bild I-9 gezeigt wird.

Oft sind keine negierten Eingänge wie /A, /B, /C vorhanden. Dann heißen die Eingänge A, B und C, und die notwendige Invertierung wird durch ein NICHT-Gatter realisiert. Bild I-10 verdeutlicht dies an der Umsetzung der Gleichungen (I.1) und (I.4), wobei die Eingangsinverter durch die Invertierungszeichen dargestellt sind.

### 3.2.4 Schaltungsminimierung mit Hilfe der Schaltalgebra

Mit Hilfe der Schaltalgebra lassen sich die Gleichungen vereinfachen und in eine digitale Schaltung umsetzen. Bild I-11 zeigt die Vereinfachung der Gleichung (I.1).

Mit dem Distributivgesetz erhält man eine ODER-Verknüpfung mit dem Komplement der Variablen. Da dies „1“ ergibt, kann die entsprechende Variable aufgrund der UND-Verknüpfung mit dieser Konstante entfallen. Das Ergebnis bildet die Gleichung (I.5). Zur besseren Übersicht werden bei den Gleichungen die UND-Zeichen fortgelassen.

### 3.2.5 Umsetzung in NAND- oder NOR-Technik

Jede Grundfunktion lässt sich nach Bild I-12 durch NAND- oder NOR-Funktionen ersetzen.

Besteht nun der Wunsch, die Schaltung nach Gleichung (I.4) nur aus NAND- oder NOR-Bausteinen aufzubauen, werden die Bausteine entsprechend eingesetzt, und man erhält eine funktionsfähige Schaltung. Treten hierbei Doppelnegierungen auf, dürfen

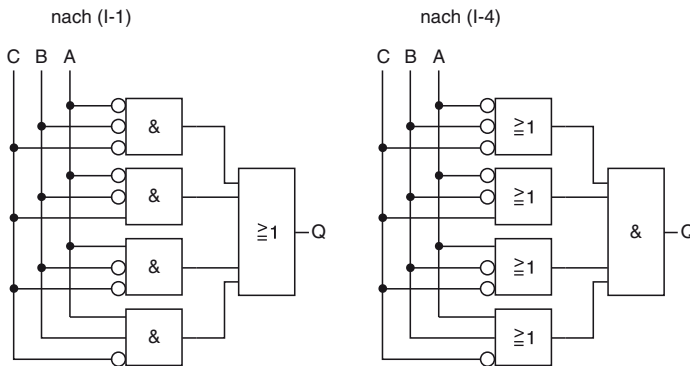


**Bild I-10**  
Schaltungen aus den Gleichungen (I.1) und (I.4)

$$\begin{aligned}
 Q &= \bar{A} \wedge \bar{B} \wedge \bar{C} \vee \bar{A} \wedge \bar{B} \wedge C \vee A \wedge \bar{B} \wedge \bar{C} \vee A \wedge B \wedge \bar{C} \\
 Q &= \bar{A} \bar{B} \bar{C} \vee \bar{A} \bar{B} C \vee A \bar{B} \bar{C} \vee A B \bar{C} \\
 Q &= \bar{A} \bar{B} (\bar{C} \vee C) \vee A \bar{C} (\bar{B} \vee B) \\
 Q &= \bar{A} \bar{B} \wedge 1 \quad A \bar{C} \wedge 1 \\
 Q &= \bar{A} \bar{B} \vee A \bar{C}
 \end{aligned}$$

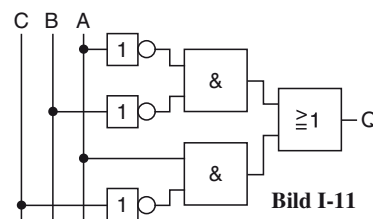


**Bild I-11**  
Schaltungsminimierung

| Grundfunktion | Ersatz durch NAND | Ersatz durch NOR |
|---------------|-------------------|------------------|
|               |                   |                  |
|               |                   |                  |
|               |                   |                  |
|               |                   |                  |
|               |                   |                  |

**Bild I-12**  
Ersatz der Grundfunktionen durch NAND- und NOR-Technik

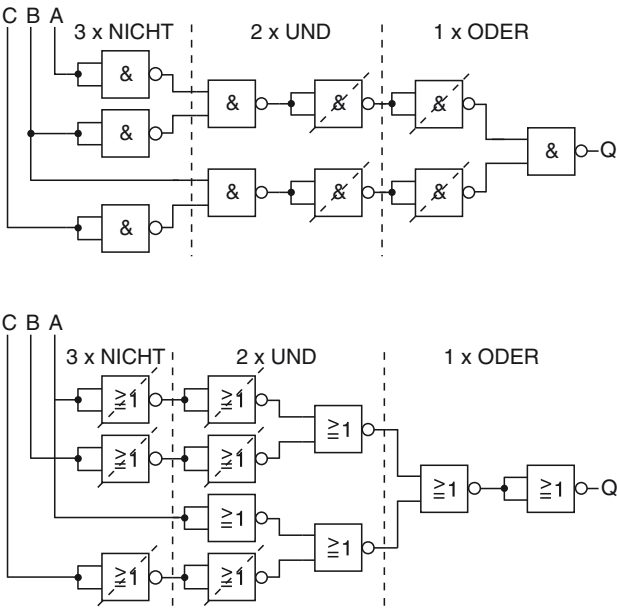


**Bild I-13**  
Umsetzung einer Schaltung in NAND- und NOR-Technik

Gatter entfallen, wie dies im Bild I-13 am Beispiel der Umsetzung in NAND- und NOR-Technik gezeigt wird. Die Gesamtschaltung benötigt dann eine geringere Anzahl an Gattern. Das umständliche Verfahren, andere Grundfunktionen so durch NAND zu ersetzen, kann umgangen werden, wenn die Ausgangsgleichung sofort nach de Morgan umgewandelt wird. Hierbei wird bei Änderung des Verknüpfungszeichens (aus UND wird

ODER und umgekehrt) eine Negierung über beide Variable aufgetrennt. Bild I-14 weist dies in Form einer Tabelle nach. Die eigentliche Umwandlung kann ganz formal erfolgen (Bild I-15). Gleichung (I.5) wird zweimal negiert. Dadurch ändert sich die Gleichung nicht. Nun wird, unter Ersatz des ODER-Zeichens durch das UND-Zeichen, die untere Invertierung überall dort, wo sich das ODER-Zeichen befindet, unterbrochen. Jede Invertierung wird dann zu einem NAND erweitert.

| A | B | $\overline{A \wedge B}$ | $A \vee \overline{B}$ | $\overline{A \vee B}$ | $\overline{A}$ | $\overline{B}$ | $\overline{A \vee B}$ | $\overline{A \wedge B}$ | $\overline{\overline{A \wedge B}}$ |
|---|---|-------------------------|-----------------------|-----------------------|----------------|----------------|-----------------------|-------------------------|------------------------------------|
| 0 | 0 | 1                       | 0                     | 1                     | 1              | 1              | 1                     | 1                       | 0                                  |
| 0 | 1 | 1                       | 1                     | 0                     | 1              | 0              | 1                     | 0                       | 1                                  |
| 1 | 0 | 1                       | 1                     | 0                     | 0              | 1              | 1                     | 0                       | 1                                  |
| 1 | 1 | 0                       | 1                     | 0                     | 0              | 0              | 0                     | 1                       | 1                                  |

**Bild I-14**  
Umwandlung  
nach de Morgan

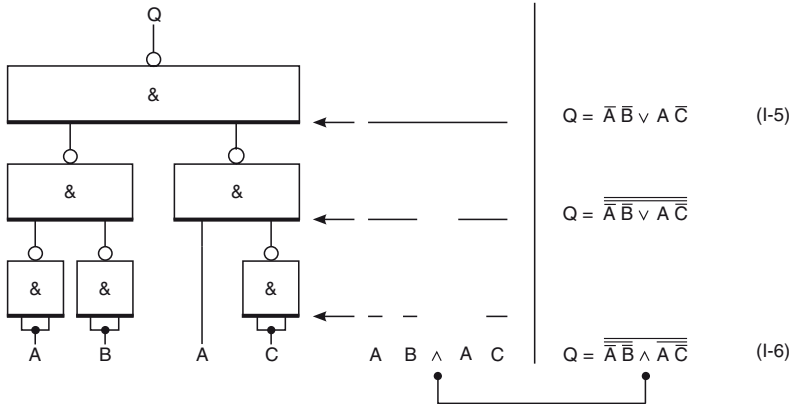


**Bild I-15**  
Umsetzung  
nach NAND

Der Vorteil in diesem Verfahren liegt darin, dass man in der Gleichung (I.6) schon die Schaltung „sehen“ kann.

Tritt die Forderung nach NAND mit nur zwei Eingängen auf, werden die entsprechenden Doppelnegierungen in eine Gleichung eingefügt. Die Umsetzung der Gleichung (I.7) in NAND-Technik zur NAND-Form Gleichung (I.8) und der Ergebnisbildung Gleichung (I.9) werden im Bild I-16 verdeutlicht.

Eine aus dieser Gleichung erstellte Schaltung ist recht aufwendig. Sie kann rationeller hergestellt werden, wenn vorhandene Verknüpfungen mehrmals genutzt

werden, wie das in Bild I-17 aus der Entwicklung der Gleichung I.7 dargestellt ist. Man spricht dann von einer *Vermaschung*.

$$\overline{A} \overline{B} C D \vee \overline{A} \overline{B} \overline{C} D \vee \overline{A} \overline{B} C \overline{D} \quad (I-7)$$

$$\overline{\overline{A} \overline{B} C D} \vee \overline{\overline{A} \overline{B} \overline{C} D} \vee \overline{\overline{A} \overline{B} C \overline{D}} \quad (I-8)$$

$$\overline{\overline{\overline{A} \overline{B} C D}} \vee \overline{\overline{\overline{A} \overline{B} \overline{C} D}} \vee \overline{\overline{\overline{A} \overline{B} C \overline{D}}} \quad (I-9)$$

**Bild I-16** NAND-Umwandlung für zwei Eingänge

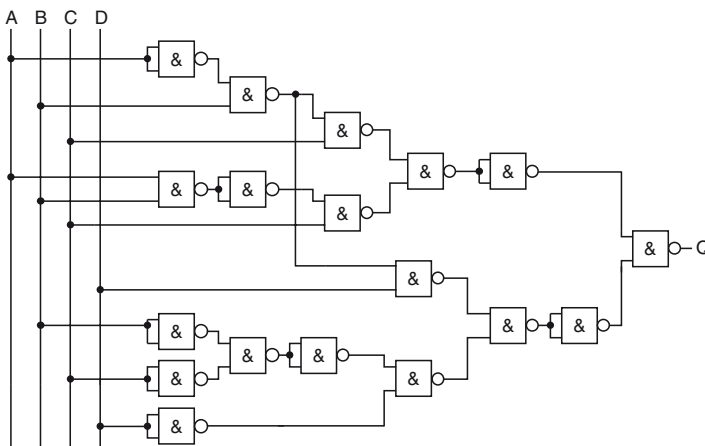
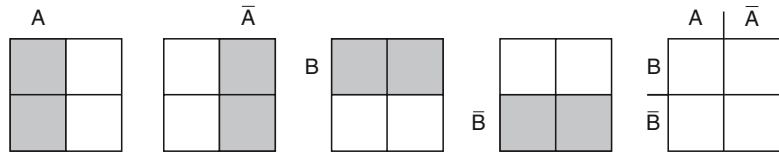


**Bild I-17**  
Vermaschung

Wertetabelle

| Zeile | B | A |
|-------|---|---|
| 0     | 0 | 0 |
| 1     | 0 | 1 |
| 2     | 1 | 0 |
| 3     | 1 | 1 |

Aufteilung der Variablen



Zuordnung der Zeilen

| Zeile | B | A |                                      |
|-------|---|---|--------------------------------------|
| 0     | 0 | 0 | $\rightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$ |
| 1     | 0 | 1 | $\rightarrow \bar{A} \wedge B$       |
| 2     | 1 | 0 | $\rightarrow A \wedge \bar{B}$       |
| 3     | 1 | 1 | $\rightarrow A \wedge B$             |

|           | A                  | $\bar{A}$                |
|-----------|--------------------|--------------------------|
| B         | $A \wedge B$       | $\bar{A} \wedge B$       |
| $\bar{B}$ | $A \wedge \bar{B}$ | $\bar{A} \wedge \bar{B}$ |

|           | A | $\bar{A}$ |
|-----------|---|-----------|
| B         | 3 | 2         |
| $\bar{B}$ | 1 | 0         |

Vereinfachung

| Zeile | B | A | Q |
|-------|---|---|---|
| 0     | 0 | 0 | 1 |
| 1     | 0 | 1 | 0 |
| 2     | 1 | 0 | 1 |
| 3     | 1 | 1 | 0 |

|           | A | $\bar{A}$ |
|-----------|---|-----------|
| B         |   | 1         |
| $\bar{B}$ |   | 1         |

$$Q = \bar{A} \wedge B$$

$$Q = \bar{A} \wedge \bar{B}$$

$$Q = \bar{A} \wedge B \vee \bar{A} \wedge \bar{B} = \bar{A}$$

|           | A | $\bar{A}$ |
|-----------|---|-----------|
| B         |   | 1         |
| $\bar{B}$ |   | 1         |

$$Q = \bar{A}$$

**Bild I-18** Entwicklung der KV-Tabelle

### 3.2.6 KV-Tabelle

Das von *Karnaugh* und *Veitch* entwickelte Verfahren ist praktisch eine besondere Art, eine Wertetabelle zu schreiben. Jedem Kästchen des Diagramms ist eine Zeile der Wertetabelle zugeordnet. Damit ergibt sich die Anzahl der Felder aus der Zahl der Eingangskombinationen. Die Anordnung erfolgt so, dass sich jeweils von Feld zu Feld nur eine Variable ändern darf (Bild I-18).

Im Bild sind die entsprechenden Felder schraffiert und die Zuordnung der Zeilen zu den Feldern gekennzeichnet. Vergleicht man zwei benachbarte Felder und verknüpft die dafür stehenden konjunktiven (UND-) Verknüpfungen disjunktiv (ODER), wie in der Gleichung dargestellt, dann lässt sich erkennen, dass nach einer Vereinfachung nur eine Variable das Ergebnis bildet. Damit sind Vereinfachungen durch Schleifenbildung möglich. Bild I-19 zeigt verschiedene Darstellungen von KV-Tafeln für 2 bis 5 Variable.

Verknüpft, d.h. zu Schleifen zusammengefasst, werden dürfen immer nur 2, 4, 8 ..., also  $2^n$  Variable in senkrecht oder waagrecht nebeneinander liegenden benachbarten Feldern. Die Randfelder gelten ebenfalls als benachbart.

Bild I-20 zeigt hierzu Beispiele mit den sich hieraus ergebenden Gleichungen. Alle Schleifen sind durch

UND verbunden. Für die Ergebnisbildung muss jede dieser Schleifen durch ODER verknüpft werden. Eine teilweise gegenseitige Überdeckung der Schleifen ist hierbei zulässig. Es sollten möglichst viele Variable in die Schleifenbildung einbezogen werden, um so den Gesamtausdruck der Gleichung zu verkleinern. Damit reduzieren sich die benötigten Bauelemente einer Schaltung unter Umständen erheblich. Können bestimmte Eingangskombinationen nicht auftreten, dann darf dies in der KV-Tafel gekennzeichnet werden (z.B. durch ein x). Für eine optimale Lösung werden diese Felder mit in die Schleifenbildung einbezogen.

### 3.2.7 Analyse logischer Schaltungen

Soll eine Übersicht über alle möglichen Ausgangszustände in Abhängigkeit der jeweiligen Eingänge erstellt werden, ist die Wertetabelle eine geeignete Darstellungsform. Wird sie aus einer Schaltung ermittelt, spricht man von der *Analyse* einer digitalen Schaltung.

Bild I-21 zeigt beispielhaft einen Lösungsweg auf. An die Ausgänge der Gatter werden die entsprechenden Verknüpfungsgleichungen (hier Q0 bis Q4) geschrieben und mit ihren jeweiligen Zuständen „1“ beziehungsweise „0“ in eine Tabelle eingeordnet. Der



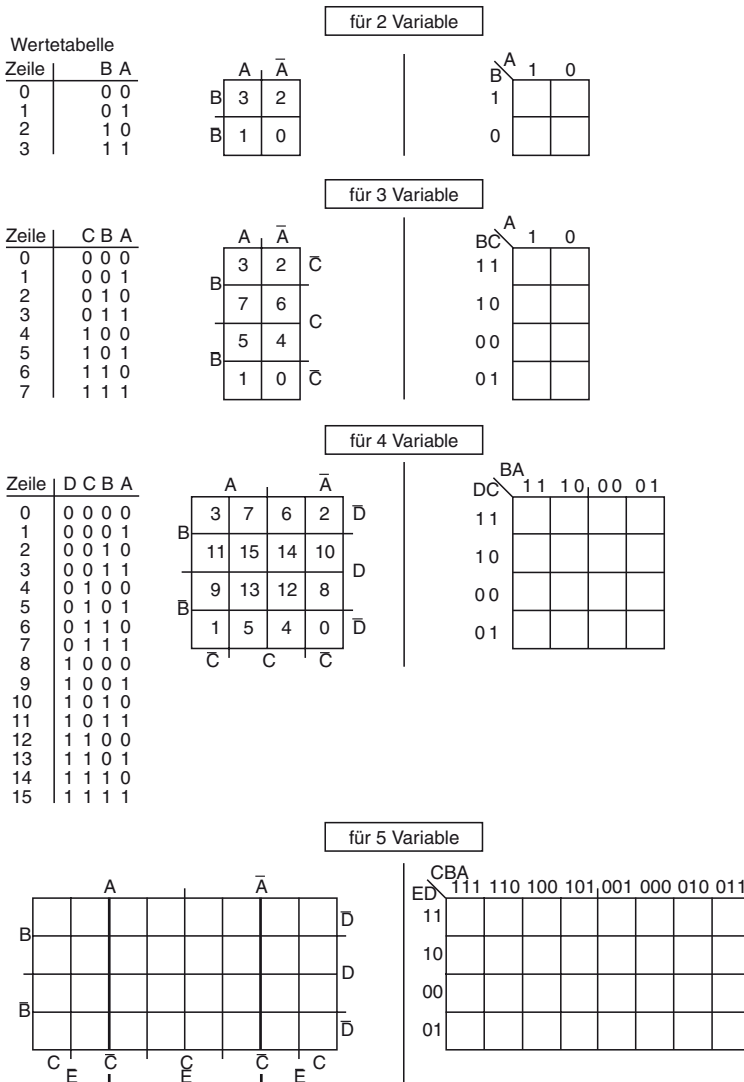


**Bild I-19**  
KV-Diagramme  
für 2 bis 5 Variable

Ausgang  $Q = Q_2 \vee Q_3 \vee Q_4$  beinhaltet dann die eigentliche Lösung. Es kann eine Überprüfung der gefundenen Gleichung vorgenommen werden, wenn die Lösungsgleichung mit den Regeln der Schaltalgebra vereinfacht wird.

### 3.2.8 Synthese logischer Schaltungen

Soll eine Schaltung *entworfen* werden, spricht man von der Synthese einer Schaltung. Das meist in verbaler Form vorliegende Problem wird skizziert, und Variable und Ausgänge werden entsprechend zugeordnet. Über eine Wertetabelle werden bei allen möglichen Eingangskombinationen die gewünschten oder geforderten Ausgangskombinationen beschrieben. Anschließend erfolgt die Umsetzung der Wertetabelle in eine Gleichung, die dann gegebenenfalls

vereinfacht wird. Über diese Gleichung wird die Schaltung gezeichnet. Anschließend wählt man die entsprechenden Standardbausteine zur Realisierung der Schaltung aus.

■ **Beispiel 1:** Eine Anlage soll von drei Temperatursensoren überwacht werden. Überschreitet die Temperatur einen vorgegebenen Wert, soll eine Meldung durch eine Anzeige erfolgen. Dies ist immer dann der Fall, wenn mindestens zwei der Sensoren „1“ melden. Die Schaltung soll mit dem Standardbaustein 7400 realisiert werden. Bild I-22 zeigt das Technologieschema, die Wertetabelle und eine mögliche Lösung.

■ **Beispiel 2:** Konzeption eines Dual-Gray-Codierers. Ziel der Schaltung ist es, eine anliegende 4-Bit-Dualzahl in den Graycode umzuwandeln. Die Schaltung besitzt jeweils 4 Ein- und Ausgänge. Zur Lösung der Aufgabe empfiehlt es sich, zunächst wieder die Wertetabelle aufzustellen (Bild I-23).

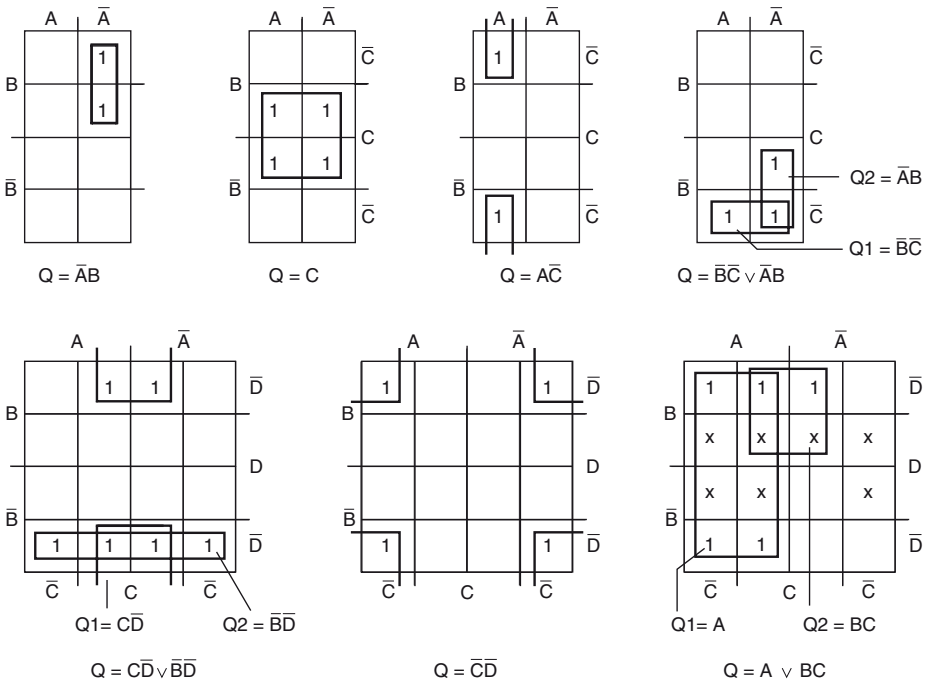
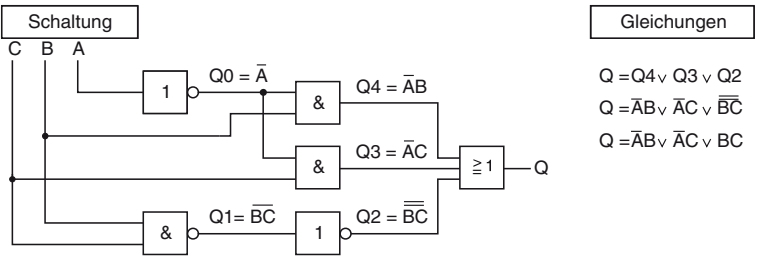


Bild I-20 Beispiele für Schleifenbildung



Gleichungen

$Q = Q4 \vee Q3 \vee Q2$   
 $Q = \bar{A}B \vee \bar{A}C \vee \bar{B}C$   
 $Q = \bar{A}B \vee \bar{A}C \vee BC$

Tabelle:

| C B A | $Q0 = \bar{A}$ | $Q1 = \bar{B}C$ | $Q2 = \bar{B}\bar{C}$ | $Q3 = \bar{A}C$ | $Q4 = \bar{A}B$ | $Q = Q2 \vee Q3 \vee Q4$ |
|-------|----------------|-----------------|-----------------------|-----------------|-----------------|--------------------------|
| 0 0 0 | 1              | 1               | 0                     | 0               | 0               | 0                        |
| 0 0 1 | 0              | 1               | 0                     | 0               | 0               | 0                        |
| 0 1 0 | 1              | 1               | 0                     | 0               | 1               | 1                        |
| 0 1 1 | 0              | 1               | 0                     | 0               | 0               | 0                        |
| 1 0 0 | 1              | 1               | 0                     | 1               | 0               | 1                        |
| 1 0 1 | 0              | 1               | 0                     | 0               | 0               | 0                        |
| 1 1 0 | 1              | 0               | 1                     | 1               | 1               | 1                        |
| 1 1 1 | 0              | 0               | 1                     | 0               | 0               | 1                        |

Nachweis:

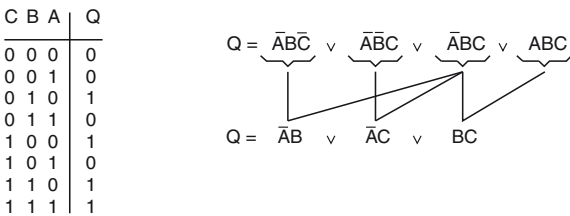


Bild I-21  
Analyse einer Schaltung

## Technologieschema



## Wertetabelle

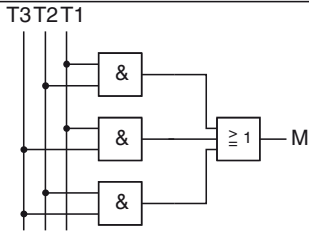
| T3 | T2 | T1 | M |
|----|----|----|---|
| 0  | 0  | 0  | 0 |
| 0  | 0  | 1  | 0 |
| 0  | 1  | 0  | 0 |
| 0  | 1  | 1  | 1 |
| 1  | 0  | 0  | 0 |
| 1  | 0  | 1  | 1 |
| 1  | 1  | 0  | 1 |
| 1  | 1  | 1  | 1 |

## Gleichung

$$M = T1 \bar{T2} T3 \vee T1 \bar{T2} T3 \vee T1 T2 T3 \vee T1 T2 T3$$

$$M = T1 T2 \vee T1 T3 \vee T2 T3$$

## Schaltung aus der Gleichung



## Umwandlung nach NAND

$$M = T1 T2 \vee T1 T3 \vee T2 T3$$

$$M = T1 T2 \vee T1 T3 \vee T2 T3$$

## Zuordnung der PIN-Belegung

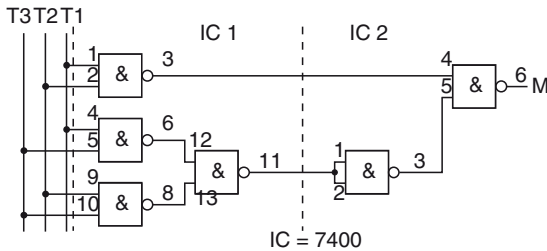


Bild I-22

Synthese einer Schaltung

## 4 Zahlensysteme in der Digital- und Datenverarbeitung

Zahlen in der Digitaltechnik werden in *binärer* Form dargestellt. In der Datenverarbeitung sind das Dualsystem und das Hexadezimalsystem von Bedeutung. Jedes Zahlensystem besteht aus einer Anzahl von Ziffern zu einer Basis. Der Exponent bestimmt den Stellenwert, also die Wertigkeit der Ziffer. Die Ziffern selbst sind die Faktoren der Stellenwerte. Beim Dualsystem liegt die Basis 2 mit den Zeichen „0“ und „1“ und beim Hexadezimalsystem die Basis 16 mit den Zeichen „0“ bis „F“ zugrunde. Das Dezimalsystem mit der Basis 10 besitzt einen Ziffernvorrat von „0“ bis „9“, also 10 Zeichen oder Ziffern. Bild I-24 zeigt die drei Zahlensysteme im Vergleich.

### 4.1 Dualsystem

#### 4.1.1 Bildung der Dualzahlen und Umwandlung in Dezimalzahlen

Im Dualsystem (Zweiersystem) werden nur die Ziffern „0“ und „1“ verwendet. Die Dualzahlen werden vom Prinzip her wie die Dezimalzahlen gebildet. Der Wert der Dualzahl ist die Summe der Produkte von Ziffer und Stellenwert. An zwei Beispielen wird dies durch Umwandlung einer Dual- in eine Dezimalzahl verdeutlicht (Bild I-25).

#### 4.1.2 Umwandlung dezimal nach dual

Die Dualzahl aus der Dezimalzahl erhält man, indem die Dezimalzahl jeweils durch zwei dividiert wird. Treten Restbeträge auf, wird dies durch „1“, sonst

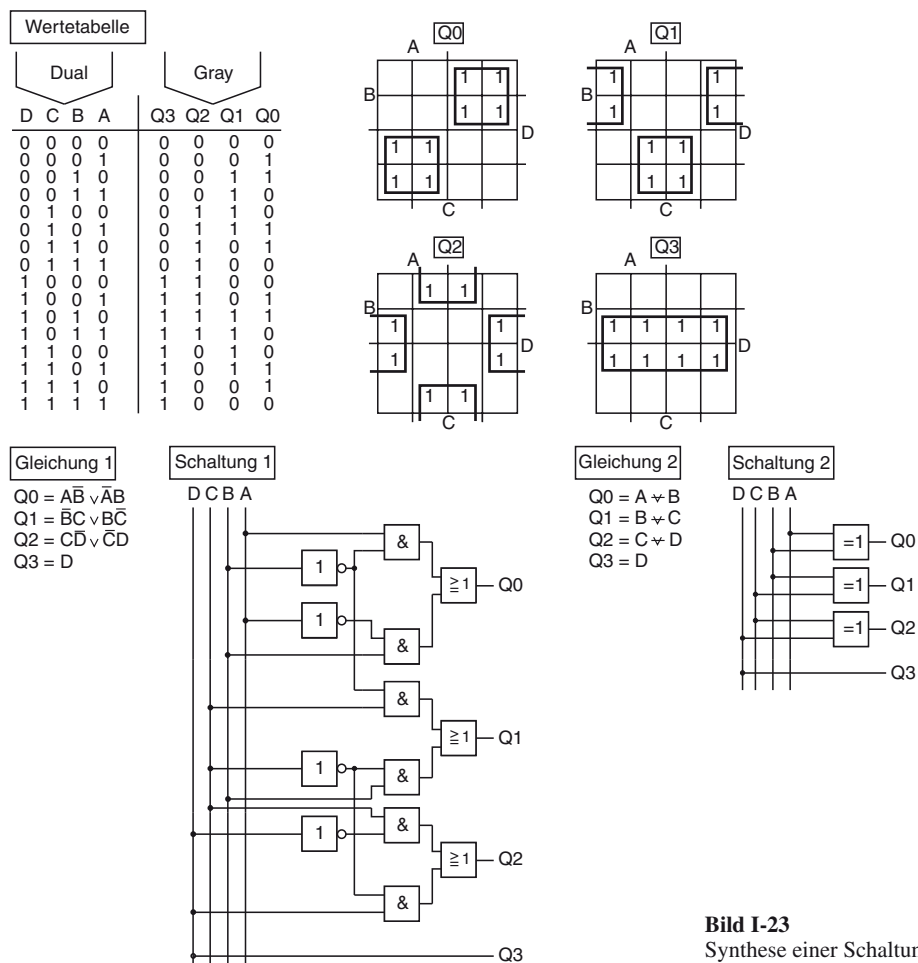


**Bild I-23**  
Synthese einer Schaltung

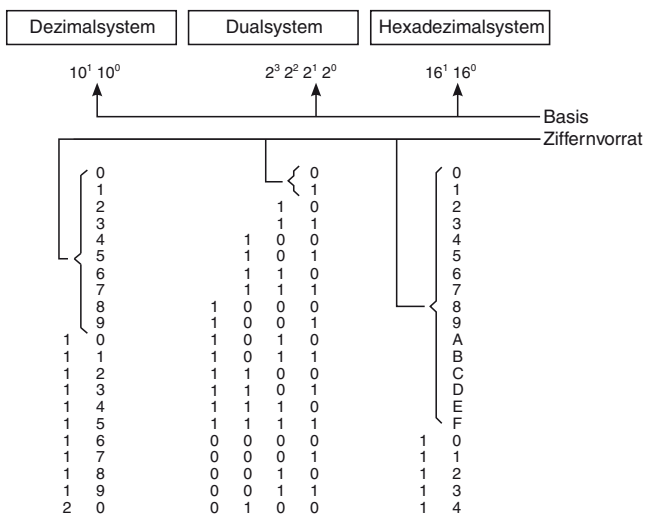


**Bild I-24**  
Zahlensysteme

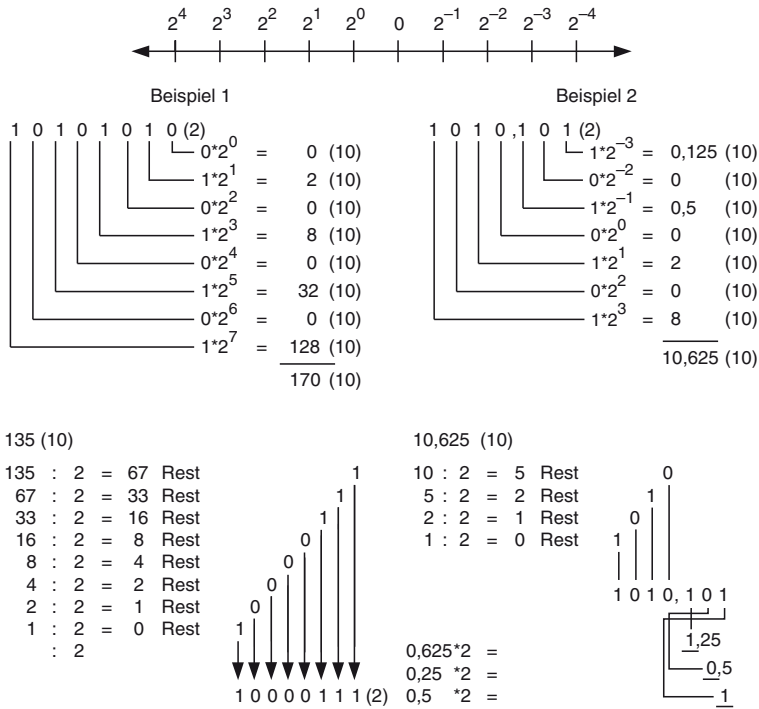


**Bild I-25**  
Umwandlung von Dual- in Dezimalzahlen

**Bild I-26**  
Umwandlung von Dezimal- in Dualzahlen

durch „0“ gekennzeichnet. Die Folge der sich ergebenden 0- und 1-Werte entspricht dann der Dualzahl. Man sucht also die in der Dezimalzahl enthaltenen Zweierpotenzen. Zahlen hinter dem Komma werden mit 2 multipliziert und das Vorkommaergebnis jeweils hinter das Komma der Dualzahl übertragen (Bild I-26).

## 4.2 Hexadezimalsystem

Für die Darstellung der dezimalen Zahlen 10 bis 15 werden im Hexadezimalsystem die zusätzlichen Zeichen A, B, C, D, E und F verwendet. Bei großen Zahlenwerten benötigen Dualzahlen sehr viele Ziffern. Sie werden unübersichtlich lang und damit unhandlich. Man verwendet daher Hexadezimalzahlen, die sich auf einfache Weise aus Dualzahlen bilden lassen. Jeder Tetrade wird eine Hexadezimalzahl zugeordnet. Die Umwandlung einer Hexadezimalzahl in eine Dezimalzahl und umgekehrt erfolgt vom Prinzip her wie die Umwandlung beim Dualsystem. Bild I-27 führt ein Beispiel auf.

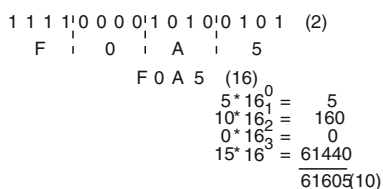


**Bild I-27** Bildung und Umwandlung von Hexadezimalzahlen

## 4.3 Rechnen mit Dualzahlen

Bild I-28 zeigt die Grundregeln für zweistellige Dualzahlen und Beispiele für mehrstellige Dualzahlen, wo die jeweilige Dezimalzahl im Vergleich mit angegeben ist. Bei der Addition entsteht bei der Summenbildung 1 + 1 ein Übertrag, der zur nächsthöheren Stelle addiert werden muss. Bei der Subtraktion 0 - 1 muss eine Zahl von der nächsthöheren Stelle geholt (geborgt) werden. Die Multiplikation erfolgt wie bei den Dezimalzahlen durch Teilproduktbildung mit anschließender Addition. Bei der Division wird festgestellt, wie oft der Dividend im Divisor enthalten ist. Dies geschieht wie bei dem Dezimalsystem durch Subtraktion.

## 4.4 Zahlen in Rechenanlagen

### 4.4.1 Darstellung von Zahlen

In Rechenanlagen unterscheidet man die Darstellung als *Festpunkt-* oder *Gleitpunktzahl*. Bei den Festpunktzahlen erfolgt die Kennzeichnung einer positiven Zahl mit dem MSB = „0“ (MSB = Most Significant Bit = Höchstwertigstes Bit), und die negative Zahl besitzt „1“ als MSB (Bild I-29). Da die negative Zahl im *Zweierkomplement* dargestellt ist, setzt dies voraus, dass eine bestimmte Wortbreite  $n$  festliegt. Damit ist auch der Zahlenbereich bei nur positiven Zahlen ( $Z$ ) mit  $Z_{\min} = 0$  und  $Z_{\max} = 2^n$  und bei positiver und negativer Zahlendarstellung mit  $Z_{\min} = -2^{(n-1)}$  und  $Z_{\max} = 2^{(n-1)} - 1$  begrenzt. Das Beispiel führt bei unterschiedlichen Wortbreiten die kleinste und größte

## Addition von Dualzahlen

## Addition zweier Dualzahlen

$$\begin{array}{r}
 A \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\
 +B \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\
 \hline
 S \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\
 \end{array}$$

↑ +1 Übertrag

## Addition mehrstelliger Dualzahlen

$$\begin{array}{r}
 A = 67 = 1000011 \\
 +B = 33 = 100001 \\
 \hline
 S = 100 = 1100100
 \end{array}$$

Übertrag

## Subtraktion von Dualzahlen

## Subtraktion zweier Dualzahlen

$$\begin{array}{r}
 A \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\
 -B \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\
 \hline
 D \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\
 \end{array}$$

↑ -1 Übertrag

## Subtraktion mehrstelliger Dualzahlen

$$\begin{array}{r}
 A = 67 = 1000011 \\
 -B = 33 = 100001 \\
 \hline
 D = 100 = 0100010
 \end{array}$$

Übertrag

## Multiplikation von Dualzahlen

## Multiplikation zweier Dualzahlen

$$\begin{array}{r}
 A \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\
 *B \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\
 \hline
 P \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1
 \end{array}$$

## Multiplikation mehrstelliger Dualzahlen

$$\begin{array}{r}
 A = 13 \quad 1101 \\
 B = 3 \quad 0011 \\
 \hline
 A * B = 39 \quad 100111
 \end{array}$$

## Division von Dualzahlen

## Division zweier Dualzahlen

$$\begin{array}{r}
 A \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\
 :B \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\
 \hline
 Q \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1
 \end{array}$$

## Division mehrstelliger Dualzahlen

$$\begin{array}{r}
 A = 44 \quad 101100 \\
 B = 4 \quad 100 \\
 \hline
 A : B = 11 \quad 100
 \end{array}$$

Bild I-28  
Rechnen mit Dualzahlen

## Format

| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
|----|----|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|    |    |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |

0 ----- positive Zahl Bit

1 ----- negative Zahl

----- Vorzeichen-Bit (MSB)

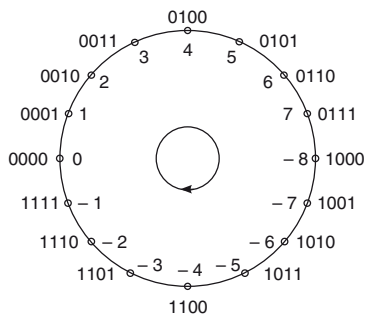
## Beispiel

| n  | Zmin   | Zmax  |
|----|--------|-------|
| 4  | -8     | 7     |
| 8  | -128   | 127   |
| 16 | -32768 | 32767 |

| dual | dezimal |
|------|---------|
|------|---------|

|          |    |
|----------|----|
| MSB<br>↓ |    |
| 0111     | 7  |
| 0110     | 6  |
| 0101     | 5  |
| 0100     | 4  |
| 0011     | 3  |
| 0010     | 2  |
| 0001     | 1  |
| 0000     | 0  |
| 1111     | -1 |
| 1110     | -2 |
| 1101     | -3 |
| 1100     | -4 |
| 1011     | -5 |
| 1010     | -6 |
| 1001     | -7 |
| 1000     | -8 |

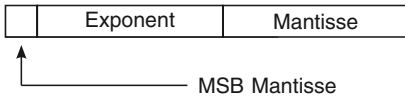
## Zahlenkreis

Bild I-29  
Festpunktzahlen

darstellbare Zahl auf und zeigt in Form einer Tabelle und am Zahlenkreis die Zahlen -8 bis +7 bei einer Wortbreite von  $n = 4$ .

Bei der Gleitpunktzahldarstellung ist das MSB wie bei den Festpunktzahlen dem Vorzeichen vorbehalten, es folgen Binärstellen für den Exponent und für die Mantisse. Der darstellbare Zahlenbereich hängt vom Exponenten ab. Häufig werden Doppelworte, wie z.B. zwei 16-Bit-Worte benutzt. Bild I-30 beschreibt das Format dualer Gleitpunktzahlen auch anhand eines Beispiels.

Format



Beispiel:

| Festpunktzahl | Gleitpunktzahl                                                                                                                      | Dualzahl |
|---------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| 10,625        | $0,10625 \cdot 10^2$                                                                                                                | 1010,101 |
|               | <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <span>Mantisse</span> <span>Exponent</span> </div> |          |

| Dualzahl | duale Gleitpunktzahl                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1010,101 | $01010101 \cdot 2^4$<br><div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: flex; align-items: center;"> <span style="font-family: monospace; font-size: 0.8em;">0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0 1</span> <span style="margin-left: 10px;">...</span> <span style="font-family: monospace; font-size: 0.8em;">0</span> </div> |

**Bild I-30**  
Gleitpunktzahlen

#### 4.4.2 Einer- und Zweierkomplement

Das **Zweierkomplement** ZK einer Zahl Z ist deren Ergänzung zur nächsthöheren Wertigkeit  $B^n$ , wobei  $n$  die Stellenanzahl und  $B$  Basis des Zahlensystems ist. Dagegen ist das **Einerkomplement** EK die Ergänzung der Zahl Z zur nächsthöheren Wertigkeit  $B^n - 1$ . Dies sollen die in Bild I-31 aufgeführten Beispiele in Form einer Tabelle an Dezimal- und an Dualzahlen verdeutlichen.

| Z + ZK = $B^n$ |      |          |    |   |       | Z + EK = $B^n - 1$ |      |          |           |
|----------------|------|----------|----|---|-------|--------------------|------|----------|-----------|
| Z              | ZK   | $\Sigma$ | B  | n | $B^n$ | Z                  | EK   | $\Sigma$ | $B^n - 1$ |
| 22             | 78   | 100      | 10 | 2 | 100   | 22                 | 77   | 99       | 99        |
| 635            | 365  | 1000     | 10 | 3 | 1000  | 635                | 364  | 999      | 999       |
| 101            | 011  | 1000     | 2  | 3 | 1000  | 101                | 101  | 111      | 111       |
| 1010           | 0110 | 10000    | 2  | 4 | 10000 | 1010               | 1010 | 1111     | 1111      |

**Bild I-31**  
Bildung des Komplements

Bei den Dualzahlen erhält man das Einerkomplement der Zahl Z durch Invertierung aller Stellen der Zahl und das Zweierkomplement einer Zahl Z durch die Addition des Einerkomplements mit „1“.

#### Beispiele:

|           |          |    |          |
|-----------|----------|----|----------|
| Dualzahl: | 01010101 | EK | 10101010 |
| EK:       | 10101010 |    |          |
|           |          |    | +1       |
|           |          | ZK | 10101011 |

#### 4.4.3 Subtraktion mit Hilfe des Komplements

Mit Hilfe des Zweierkomplements lassen sich Subtraktionen durchführen. Der Rechner führt diese Subtraktion praktisch auf eine Addition zurück. Er bildet zunächst das Zweierkomplement der zu sub-

trahierenden Zahl durch Invertieren der Zahl (EK) und führt anschließend eine Addition mit „1“ durch. Werden Festpunktzahlen mit beliebigen Vorzeichen addiert, muss der Rechner das Ergebnis auf seine Korrektheit überprüfen. Das Ergebnis ist falsch, wenn die Operanden gleiches Vorzeichen besitzen und das Ergebnis ein davon verschiedenes Vorzeichen.

#### Beispiele:

|            |              |            |               |
|------------|--------------|------------|---------------|
| A = 10     | = 00001010   | A = 2      | = 00000010    |
| B = -2     | = 11111110   | B = -10    | = 11110110    |
| A + (-B) = | 00001000 = 8 | A + (-B) = | 11111000 = -8 |





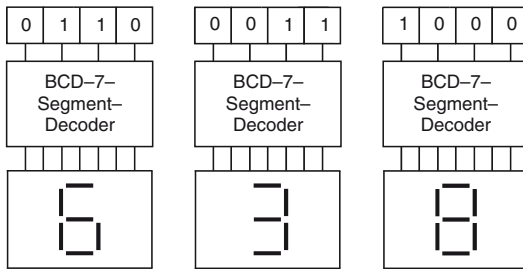


**Bild I-33**  
Ansteuerung mit BCD-Code

| BCD-Code       |                |                |                | 7-Segment-Code |   |   |   |   |   |   |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|---|---|---|---|---|---|
| 2 <sup>3</sup> | 2 <sup>2</sup> | 2 <sup>1</sup> | 2 <sup>0</sup> | g              | f | e | d | c | b | a |
| 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0              | 0              | 0              | 1              | 0              | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0              | 0              | 1              | 0              | 0              | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0              | 0              | 1              | 1              | 1              | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0              | 1              | 0              | 0              | 1              | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0              | 1              | 0              | 1              | 1              | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0              | 1              | 1              | 0              | 1              | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0              | 1              | 1              | 1              | 0              | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1              | 0              | 0              | 0              | 1              | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1              | 0              | 0              | 1              | 1              | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

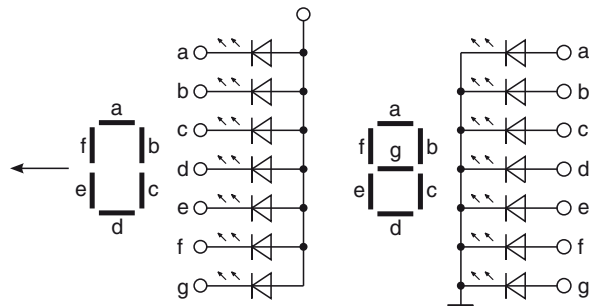


**Bild I-34** 7-Segmentanzeigen und Ansteuerung

schen  $4_{10}$  und  $5_{10}$ . Beim Rechnen sind Korrekturen notwendig.

■ **Beispiel**

$$\begin{array}{r}
 A = 15 = 0100\ 1000 \\
 B = 17 = 0100\ 1010 \\
 \hline
 1000\ 0010 \\
 1101\ 0011\ \text{Korrektur}
 \end{array}$$

$$A + B = 32 = 0110\ 0101$$

Bei diesem Code können gerade und ungerade Zahlen durch die letzte Stelle leicht unterschieden werden und eine Komplementbildung ist durch Vertauschen von „0“ und „1“ ebenfalls einfach auszuführen.

### 5.3.3 Aiken-Code

Der Aiken-Code ist ein *symmetrischer* Code mit der Bewertung 2421.

■ **Beispiel:**

Wertigkeit: 2 4 2 1  
Dualzahl: 1 1 0 1 =  $1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 2 + 4 + 1 = 7$

Ungerade und gerade Zahlen sind wie beim 3-Excess-Code durch die letzte Stelle leicht erkennbar. Dieser Code benötigt beim Rechnen keine Korrekturen.

### 5.4 Gray-Code

Der Gray-Code lässt sich für jede Wortbreite realisieren. Er ist ein *unbewerteter* oder *ungewichteter* Code und unterscheidet sich von dem vorherigen und nachfolgenden Bitmuster jeweils nur um ein Bit. Man spricht auch von einem *einschrittigen* Code. Er wird oft zur Umwandlung analoger Größen in eine digitale Information umgesetzt, wie beispielsweise die Be-

stimmung einer Position auf einer Wegstrecke. Bild I-35 veranschaulicht dies an einem Codelineal, das von Sensoren abgetastet wird. Mögliche Fehljustierungen beschränken bei diesem Code den Fehler auf ein Bit. Bei Einsatz des Dual-Codes würden sich beim Übergang von der Zahl 3 nach 4 drei Stellen verändern und bei Fehljustierung der Sensoren einen erheblichen Fehler erzeugen.

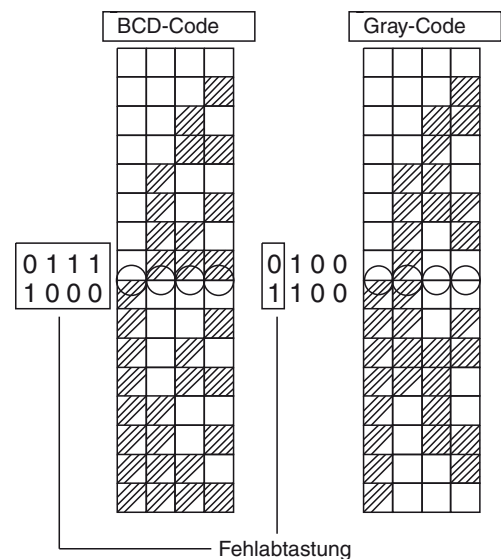


**Bild I-35** Abtastung und Fehljustierung

### 5.5 Codierung alphanumerischer Zeichen

Der ASCII-Code (ASCII = American Standart Code of Information Interchange = Amerikanischer Standardcode zum Datenaustausch) (Bild I-36, Tabelle I-2) ist genormt nach DIN 6603.

|         | 0 <sub>00</sub> | 0 <sub>01</sub> | 0 <sub>10</sub> | 1 <sub>00</sub> | 0 <sub>11</sub> | 1 <sub>01</sub> | 1 <sub>10</sub> | 1 <sub>11</sub> |
|---------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 0 0 0 0 | NUL             | DLE             |                 | 0               | @               | P               |                 | p               |
| 0 0 0 1 | SOH             | DC1             |                 | 1               | A               | Q               | a               | q               |
| 0 0 1 0 | STX             | DC2             | "               | 2               | B               | R               | b               | r               |
| 0 0 1 1 | ETX             | DC3             | #               | 3               | C               | S               | c               | s               |
| 0 1 0 0 | EOT             | DC4             | \$              | 4               | D               | T               | d               | t               |
| 0 1 0 1 | ENQ             | NAK             | %               | 5               | E               | U               | e               | u               |
| 0 1 1 0 | ACK             | SYN             | &               | 6               | F               | V               | f               | v               |
| 0 1 1 1 | BEL             | ETB             |                 | 7               | G               | W               | g               | w               |
| 1 0 0 0 | BS              | CAN             | (               | 8               | H               | X               | h               | x               |
| 1 0 0 1 | HT              | EM              | )               | 9               | I               | Y               | i               | y               |
| 1 0 1 0 | LF              | SUB             | *               | :               | J               | Z               | j               | z               |
| 1 0 1 1 | VT              | ESC             | +               | :               | K               |                 | k               |                 |
| 1 1 0 0 | FF              | FS              | <               | L               |                 |                 | l               |                 |
| 1 1 0 1 | CR              | GS              | =               | M               |                 |                 | m               |                 |
| 1 1 1 0 | SO              | RS              | >               | N               |                 |                 | n               |                 |
| 1 1 1 1 | SI              | US              | /               | ?               | O               | -               | o               | DEL             |

Bit 7 6 5 4 3 2 1

ASCII-CODE

**Bild I-36** ASCII-Code

Er ist ein 7-Bit-Code, mit dem man  $2^7 = 128$  Zeichen codieren kann. Außer den Ziffern 0 bis 9 und den Buchstaben a bis z beinhaltet dieser Code Sonder- und Steuerzeichen. Bild I-36 beschreibt die Möglichkeit der Zeichenzuordnung zu den jeweiligen Binärzeichen. Benötigt man beispielsweise den Code für A, dann lässt sich der über die Bitfolge Bit7, Bit6, Bit5 mit 100 und Bit4, Bit3, Bit2 und Bit1 mit 0001 finden (A = 1000001). Die häufig benötigten Zahlen und Buchstaben sind in Hex-Darstellung unter der Tabelle I-1 zusammengefasst. Bei Übertragungen wird ein 8. Bit (Parity-Bit = Paritäts-Bit) zur Fehlererkennung mit übertragen.

■ **Beispiel** für die Codierung: R                      O                      M  
1010010    1001111    1001101

**Tabelle I-1** Zahlen und Buchstaben im ASCII-Code

|   |    |   |    |   |    |
|---|----|---|----|---|----|
| 0 | 30 | A | 41 | a | 61 |
| 1 | 31 | B | 42 | b | 62 |
| 2 | 32 | C | 43 | c | 63 |
| 3 | 33 | D | 44 | d | 64 |
| 4 | 34 | E | 45 | e | 65 |
| 5 | 35 | F | 46 | f | 66 |
| 6 | 36 | G | 47 | g | 67 |
| 7 | 37 | H | 48 | h | 68 |
| 8 | 38 | I | 49 | i | 69 |
| 9 | 39 | J | 4A | j | 6A |
|   |    | K | 4B | k | 6B |
|   |    | L | 4C | l | 6C |
|   |    | M | 4D | m | 6D |
|   |    | N | 4E | n | 6E |
|   |    | O | 4F | o | 6F |
|   |    | P | 50 | p | 70 |
|   |    | Q | 51 | q | 71 |
|   |    | R | 52 | r | 72 |
|   |    | S | 53 | s | 73 |
|   |    | T | 54 | t | 74 |
|   |    | U | 55 | u | 75 |
|   |    | V | 56 | v | 76 |
|   |    | W | 57 | w | 77 |
|   |    | X | 58 | x | 78 |
|   |    | Y | 59 | y | 79 |
|   |    | Z | 5A | z | 7A |

**Tabelle I-2** Bedeutung der Abkürzungen im ASCII-Code

|     |                       |                           |
|-----|-----------------------|---------------------------|
| NUL | NULL                  | Null                      |
| SOH | START OF HEADING      | Beginn der Kopfzeile      |
| STX | START OF TEXT         | Textbeginn                |
| ETX | END OF TEXT           | Textende                  |
| EOT | END OF TRANSMISSION   | Übertragungsende          |
| ENQ | ENQUIRE               | Anfrage für Übertragung   |
| ACK | ACKNOWLEDGE           | Antwort bejahend          |
| BEL | BELL                  | Klingelzeichen            |
| BS  | BACK SPACE            | Rückschritt               |
| HT  | HORIZONTAL TABULATION | Tabellierung (horizontal) |
| VT  | VERTICAL TABULATION   | Tabellierung (vertikal)   |
| LF  | LINE FEED             | Zeilenvorsprung           |
| FF  | FORM FEED             | Seitenvorschub            |

Tabelle I-2 (Fortsetzung)

|         |                           |                         |
|---------|---------------------------|-------------------------|
| CR      | CARRIAGE RETURN           | Wagenrücklauf           |
| SO      | SHIFT OUT                 | Dauerumschaltung        |
| SI      | SHIFT IN                  | Rückschaltung           |
| DLE     | DATA LINK ESCAPE          | Datenumschaltung        |
| DC1...4 | DEVICE CONTROL            | Steuersignale           |
| NAK     | NEGATIVE ACKNOWLEDGE      | Antwort verneinend      |
| SYN     | SYNCHRON                  | Synchronisation         |
| ETB     | END OF TRANSMISSION BLOCK | Übertragungsblockende   |
| EM      | END OF MEDIUM             | Aufzeichnungsende       |
| ESC     | ESCAPE                    | Umschaltung             |
| FS      | FILE SEPARATOR            | Trennzeichen            |
| GS      | GROUP SEPARATORS          | Gruppentrennzeichen     |
| RS      | RECORD SEPARATOR          | Untergruppenkennzeichen |
| US      | UNIT SEPARATOR            | Teilgruppentrennzeichen |
| DEL     | DELETE                    | Löschen                 |

5.6 Fehlererkennung und Redundanz

Um einen Fehler bei der Übertragung digitaler Informationen zu erkennen, müssen außer den eigentlichen Daten weitere Zeichen übertragen werden. Ein Maß für diese zusätzlichen Zeichen ist die *Redundanz* (Weitschweifigkeit).

■ **Beispiel:** Wird ein 4-Bit-Wort übertragen, ergeben sich  $2^4 = 16$  Kombinationsmöglichkeiten. Daraus folgt, dass mit  $n$ -Bits  $2^n = Z$  Kombinations möglich sind. Um beispielsweise die Ziffern 0 bis 9 darzustellen, sind nur 10 Zeichen notwendig. Die gesuchte Anzahl  $n$ , die zur Darstellung dieser Zeichen notwendig ist, lässt sich über den Logarithmus zur Basis 2 (Log. dualis) finden (Gleichung I.1).

$$\text{ld } Z = \frac{\ln Z}{\ln 2} = \frac{\ln 10}{\ln 2} = 3,3219 \tag{I.1}$$

Dies bedeutet, dass 3,2.. Bit eigentlich nur notwendig sind. Da zur Darstellung dieser Zeichen aber 4 Bit benutzt werden, ist die Redundanz  $R$  nach der Gleichung (I.2) 0,68 Bit.

$$R = n - \text{ld } Z = 4 \text{ Bit} - 3,32 = 0,68 \text{ Bit} \tag{I.2}$$

Beim ASCII-Code beträgt demnach die Redundanz mit  $n = 8$ :  $R = 8 \text{ Bit} - 7 = 1 \text{ Bit}$ . Der Dual- und Gray-Code enthält keine Redundanz, da hier alle Codewörter benutzt werden.

5.6.1 Einfache Prüfung auf Parität

Wird ein Bit der eigentlichen Information zur Fehlererkennung zugefügt, spricht man von einem Paritätsbit. Es kann das Wort auf eine gerade Anzahl von „1“sen (even parity check) oder ungerade Anzahl von „1“sen (odd parity check) ergänzen (Bild I-37).

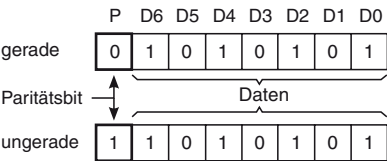
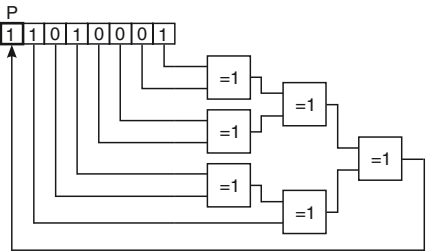


Bild I-37 Paritätsbit

Erzeugt werden kann das Paritätsbit (gerade Parität) mit Hilfe von EXOR-Verknüpfungen. Bild I-38 zeigt eine mögliche Schaltung zu Erzeugung gerader Parität und die Überprüfung eines Datenwortes. Soll eine ungerade Parität erzeugt werden, ist ein zusätzlicher Inverter nötig. Eine nicht korrekte Datenübertragung wird durch Paritätsprüfung im Empfänger erkannt. Die genaue Ortung des Fehlers ist allerdings so nicht möglich.

Erzeugung des Paritätsbit



Überprüfung des Paritätsbit

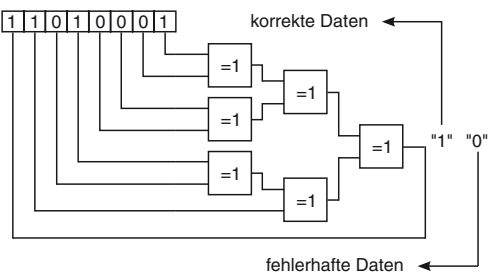


Bild I-38 Erzeugung und Überprüfung des Paritätsbits

### 5.6.2 Kreuzsicherungsprüfung

Eine weitere Möglichkeit, Fehler zu erkennen und eine Korrektur vorzunehmen, ist die Kreuzsicherungs- oder *Kreuzparitätsprüfung*. Hierbei wird ein Datenblock mit Paritätsbits für die Reihen und mit einem Paritätswort für die Spalten des Übertragungsblockes versehen. Im Bild I-39 wurde der aus sieben

4-Bit-Worten bestehende Datenblock mit zusätzlichen Paritätsbits übertragen. Im Empfänger erfolgt anschließend eine Prüfung auf Parität. Fehlerhafte Daten werden erkannt, da die Ortung durch den Kreuzungspunkt (im Bild gekennzeichnet) erfolgt. Durch Invertierung kann eine Korrektur erfolgen. Mehrfachfehler können auf diese Weise allerdings nicht korrigiert werden.

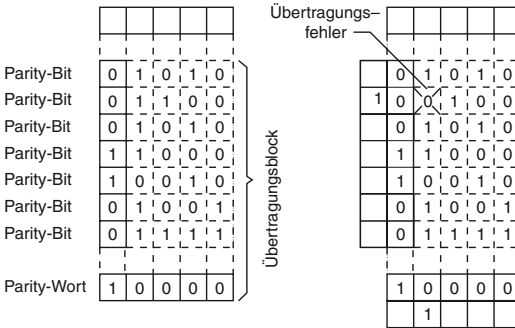


**Bild I-39**  
Kreuzparitätsprüfung

### 5.6.3 Hamming-Code

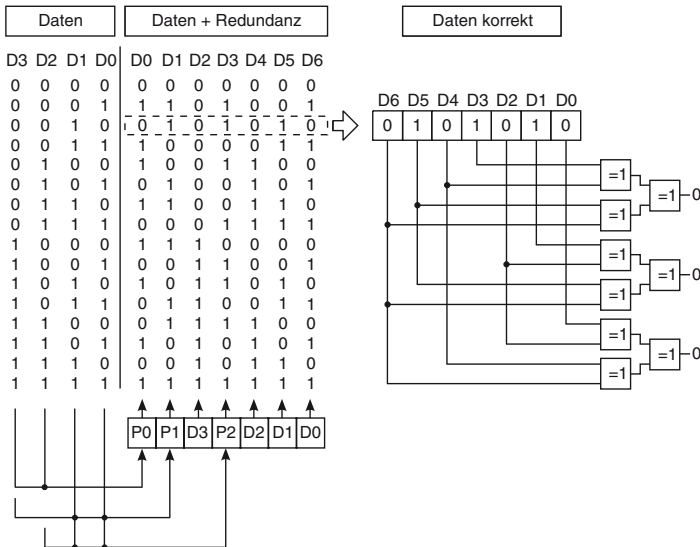
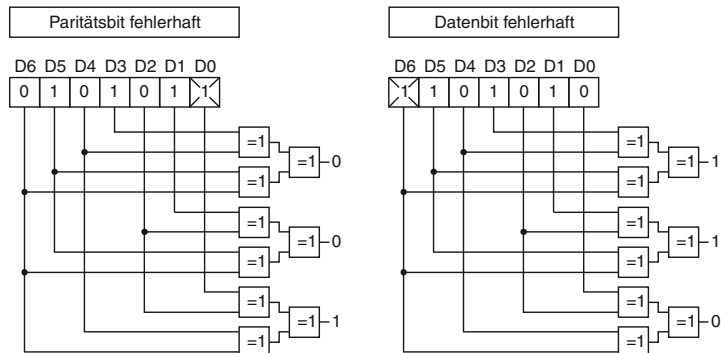


**Bild I-40**  
Bildung des Übertragungswortes  
beim Hamming-Code

**Bild I-41**  
Fehlerermittlung



Mit Hilfe des Hamming-Codes ist es möglich, fehlerhafte Bits genau zu bestimmen und danach zu korrigieren. Hierzu werden mehrere Prüfbits übertragen, wobei die Anzahl der Prüfbits von der Informationswortbreite abhängt. Den Zusammenhang zwischen Informationswortbreite und Anzahl der Redundanzbits nennt man auch *Hamming-Distanz*. Nachfolgend sind in Tabelle I-3 für übliche Wortbreiten die Anzahl der Datenbits und Prüfbits angegeben.

**Tabelle I-3** Daten- und Prüfbits

| Wortbreite | 8 | 16 | 32 | 64 |
|------------|---|----|----|----|
| Datenbits  | 4 | 11 | 26 | 57 |
| Prüfbits   | 4 | 5  | 6  | 7  |

■ **Beispiel** zur Bildung des Übertragungswortes (Bild I-40): P1 wird aus D3, D2 und D0 gebildet. Für die gerade Parität steht „0“ und für ungerade Parität „1“. Die Quersumme der „1“-sen aus a, b und c ergibt mit dem Prüfbit immer eine gerade Parität. Für eine 4-Bit-Information werden 3 Prüfbits benötigt. Damit wird das Datenwort 7 Bit breit. Nach dem Beispiel werden die Daten mit D2, D4, D5 und D6 ohne Änderung übertragen. Die entsprechenden Prüfbits P0(D0), P1(D1) und P2(D3) werden jeweils in Abhängigkeit der durch Pfeile gekennzeichneten Daten gebildet: a = P0, D0, D2 und D3; b = P1, D0, D1 und D3; c = P2, D0, D1 und D2 und nach Zusammensetzung des zu übertragenden Datenwortes: a = D0, D6, D4 und D2; b = D1, D6, D5 und D2; c = D3, D6, D5 und D4.

Die Prüfung der Daten erfolgt so, dass ein Prüfbit mit mindestens zwei Datenbits in Verbindung gebracht wird. Je nach 3-Bit-Ausgangswort ist das fehlerhafte Bit, Datenbit oder Paritätsbit, erkannt und kann durch Invertierung korrigiert werden. Die Prüfung nach der Datenübertragung zeigt an, dass alle Daten korrekt übertragen wurden, weil das Prüfausgangswort 0 0 0<sub>2</sub> ergibt. Bei fehlerhafter Datenübertragung wird dies durch das Prüfausgangswort in der Weise angezeigt, dass es mindestens zwei „1“-sen beinhaltet. Wurde das Paritätsbit selber fehlerhaft übertragen, wird dies nur durch eine „1“ mitgeteilt. Da die Bitkombinationen den entsprechenden Daten- beziehungsweise Paritätsbits zugeordnet sind, kann der Fehler erkannt und behoben werden. Bild I-41 veranschaulicht mögliche Fehlerkombinationen. Im ersten Fall ist D0 (Paritätsbit) fehlerhaft und im zweiten Fall das Datenbit D6.

## 6 Digitale Grundschaltungen

### 6.1 Allgemeines

Digitale Schaltungen können nach Schaltnetzen und Schaltwerken unterschieden werden. Schaltnetze sind Schaltungen, deren Ausgänge eindeutig von den

Eingangsvariablen bestimmt werden (kombinatorische Schaltungen). Schaltwerke sind Schaltnetze, die ein zusätzliches Speicherverhalten aufweisen können (sequentielle Schaltungen). Die meisten Grundschaltungen brauchen nicht aus einzelnen Gattern aufgebaut werden, sondern werden von den Herstellern als komplexe digitale Schaltung für universelle Einsätze angeboten oder können durch zusätzliche äußere Beschaltung den individuellen Wünschen angepasst werden. In diesem Zusammenhang spielen programmierbare Digitalbausteine wie PAL's und Gal's eine immer größere Rolle. Sie werden in der Automatisierungs-, Mess- und Datentechnik eingesetzt oder sind Teilbausteine größerer hochintegrierter Schaltungen.

### 6.2 Schaltnetze

Logische (kombinatorische) Schaltungen, deren Ausgänge eindeutig von den Eingangsvariablen bestimmt werden, bezeichnet man als Schaltnetze. In diesen Schaltungen befinden sich keine Speicherelemente.

#### 6.2.1 Rechenetze

Eine der wesentlichen Rechenschaltungen ist der *Addierer*, weil die Recheneinheit des Prozessors viele Rechenoperationen auf Additionen zurückführt.

##### 6.2.1.1 Halbaddierer

Halbaddierer addieren zwei binäre Werte und zeigen die Summe und den Übertrag an (Bild I-42).

##### 6.2.1.2 Volladdierer

Sollen n-stellige Zahlen addiert werden, wird für jede Binärstelle ein Addierwerk benötigt. Ein Halbaddierer ist mit seinen zwei Eingängen hierzu nicht geeignet, weil eventuelle Überträge der niederwertigeren Stelle auch verarbeitet werden müssen. Schaltungen, die den Eingangsübertrag mit verarbeiten können, nennt man Volladdierer. Bild I-43 zeigt dies beispielhaft.

Ein Volladdierer lässt sich aus Halbaddierern aufbauen, wenn die Summe A + B eines Halbaddierers einem zweiten Halbaddierer zugeführt und dort mit dem Übertrag der niederwertigen Stelle addiert wird. Der Übertragsausgang muss über ein ODER-Gatter gesondert herausgeführt werden (Bild I-44). Der

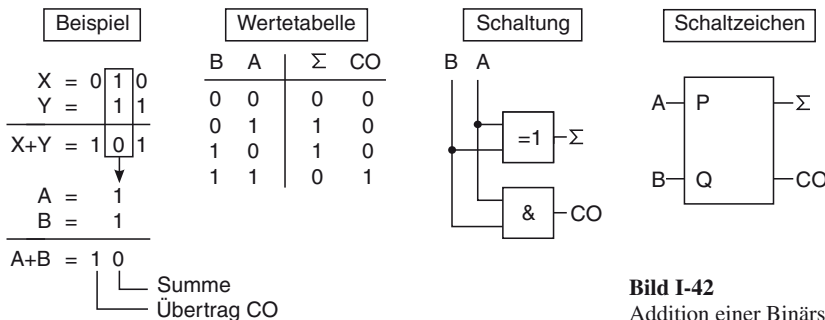
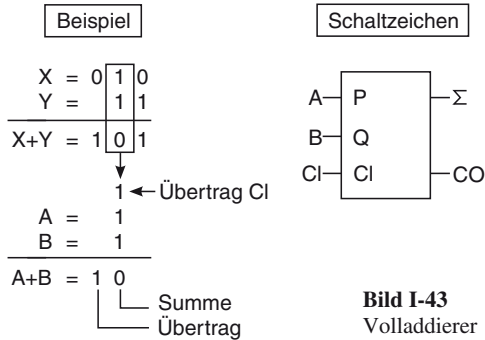


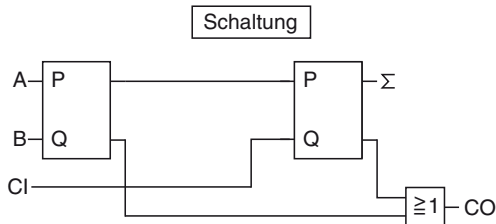
**Bild I-42**

Addition einer Binärstelle und Halbaddierer

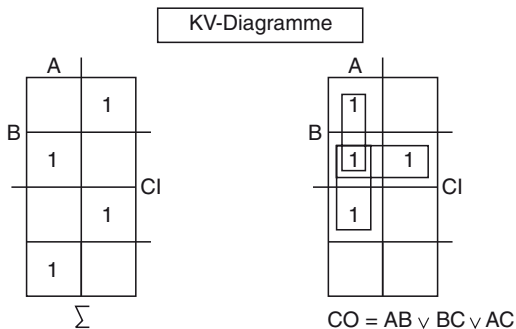


Eingang für den Eingangsübertrag wird mit  $CI = \text{Carry In}$  und der Übertragsausgang mit  $CO = \text{Carry Out}$  abgekürzt.

Die Realisierung eines Volladdierers kann auch über die Wertetabelle vorgenommen werden, wie Bild



| Wertetabelle |   |   |          |    |  |
|--------------|---|---|----------|----|--|
| CI           | B | A | $\Sigma$ | CO |  |
| 0            | 0 | 0 | 0        | 0  |  |
| 0            | 0 | 1 | 1        | 0  |  |
| 0            | 1 | 0 | 1        | 0  |  |
| 0            | 1 | 1 | 0        | 1  |  |
| 1            | 0 | 0 | 1        | 0  |  |
| 1            | 0 | 1 | 0        | 1  |  |
| 1            | 1 | 0 | 0        | 1  |  |
| 1            | 1 | 1 | 1        | 1  |  |

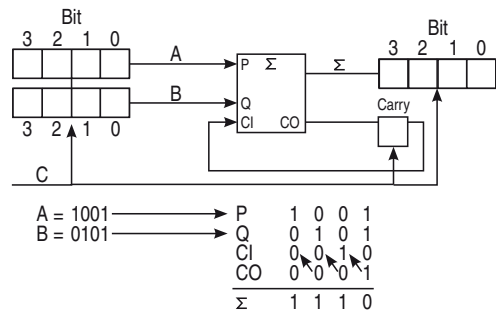


### Bild I-45 Volladdierer aus Grundgattern

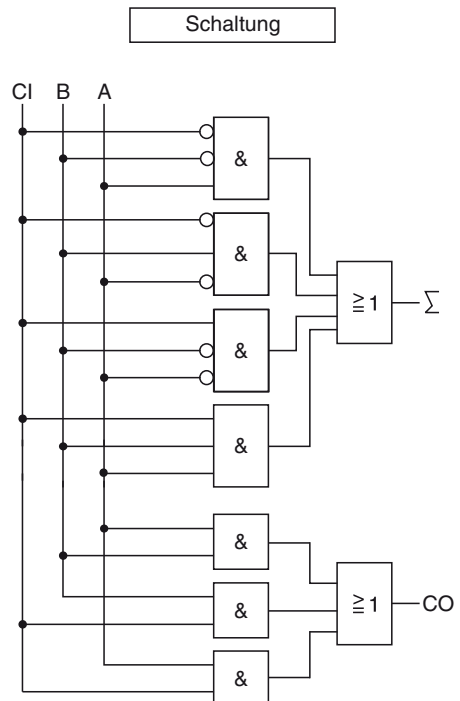
I-45 zeigt. Die Gleichung für den Übertrag lässt sich vereinfachen.

### 6.2.1.3 Serieller n-Bit-Addierer

Führt man den Addierer nacheinander taktweise die Zahlen A und B zu und verarbeitet eventuell auftretende Überträge, die beim nachfolgenden Takt addiert werden müssen, dann ergibt sich aus den Einzelsummen die Gesamtsumme nach n-Takten. Das Beispiel Bild I-46 zeigt das Prinzip für zwei 4-Bit-Zahlen. Für die Ein- und Ausgabe werden hier Schieberegister benötigt, die taktsynchron gesteuert werden müssen. Im dargestellten Beispiel steht die Summe nach dem vierten Takt in einem Speicher zur Verfügung.



### Bild I-46 Serielle Addition





6.2.1.4 Paralleler n-Bit-Addierer

Da der Aufbau eines parallelen n-Bit-Addierers über die Wertetabelle zu aufwendig ist, wird er aus Voll-addierern hergestellt. Für jede zu addierende Bitstelle ist hierbei ein Volladdierer vorzusehen. Da bei der niedrigsten Stelle kein Eingangsübertrag anfällt, würde hier ein Halbaddierer ausreichen. In der Praxis baut man Addierer nur aus Volladdierern auf und legt den Eingangsübertragseingang der niederwertigsten Stelle auf „0“ (Masse). Das Prinzip eines 4-Bit-Voll-addierers und ein Standardbaustein sind im Bild I-47 dargestellt.

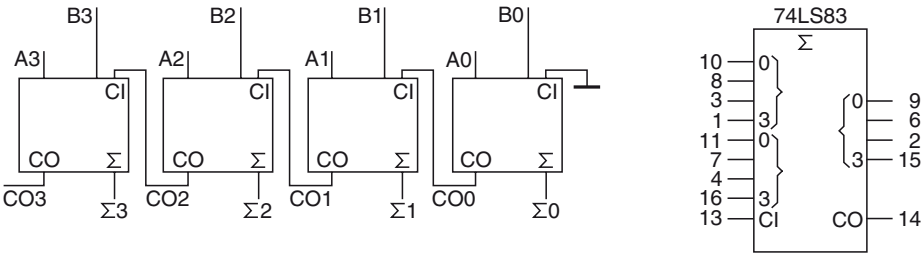


Bild I-47 Paralleler 4-Bit-Volladdierer und Standardbaustein

Die Rechenzeit der Schaltung ist gegenüber der eines einzelnen Volladdierers größer, da die Summe bei diesem erst gebildet werden kann, wenn die Überträge den nachfolgenden Stufen zugeführt wurden. Ergibt sich beispielsweise bei der niederwertigsten Stufe ein Übertrag, wirkt sich dies auf alle folgenden Stufen aus. Die benötigte Zeit wird auch als *Mindest-additionszeit* (Add Time) bezeichnet. Kürzere Rechenzeiten erhält man mit speziellen Rechenbausteinen (Carry Look Ahead). Hier wird der Übertrag durch Verknüpfungsschaltungen „vorausschauend“ direkt aus den Eingangswerten ermittelt. In Bild I-48 ist noch einmal die Wertetabelle und die Gleichung für den Übertrag angegeben. Setzt man die Gleichung für beliebige Stellen um, so ergibt sich die Gleichung für  $c_i + 1$ . Diese Gleichung teilt man auf in die Variable  $g_i$  (Carry Generate), die angibt, ob ein Übertrag auftreten wird und  $p_i$  (Carry Propagate), die in Verbindung mit  $c_0$  den Übertrag weiterleiten muss. Das Bild zeigt die Entwicklung einer Stelle und die Gleichungen für einen 4-Bit-Addierer. Mit steigender

| A | B | $c_i$ | $c_{i+1}$ |
|---|---|-------|-----------|
| 0 | 0 | 0     | 0         |
| 0 | 0 | 1     | 0         |
| 0 | 1 | 0     | 0         |
| 0 | 1 | 0     | 0         |
| 0 | 1 | 1     | 1         |
| 1 | 0 | 0     | 0         |
| 1 | 0 | 1     | 1         |
| 1 | 1 | 0     | 1         |
| 1 | 1 | 1     | 1         |

$c_i = C$

$$c_i + 1 = \bar{A}\bar{B}C \vee \bar{A}B\bar{C} \vee A\bar{B}\bar{C} \vee ABC$$
$$= C(\bar{A}\bar{B} \vee \bar{A}B \vee A\bar{B} \vee AB)$$
$$= C(A \oplus B) \vee AB$$
$$c_i + 1 = c_i \wedge p_i \vee g_i$$

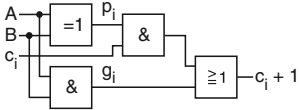
Gleichungen für einen 4-Bit-Addierer

$c_1 = g_0 \vee p_0 c_0$

$c_2 = g_1 \vee p_1 c_1 = g_1 \vee p_1 (g_0 \vee p_0 c_0) = g_1 \vee p_1 g_0 \vee p_1 p_0 c_0$

$c_3 = g_2 \vee p_2 c_2$

$c_4 = g_3 \vee p_3 c_3$



Stellenzahl erhöht sich der Schaltungsaufwand erheblich, aber die Zeit bleibt auf zwei Gatterlaufzeiten begrenzt. Als Standardbaustein bietet sich Look ahead Carry Generator 74182 an.

6.2.1.5 Subtrahierer

Subtrahierer können mit Hilfe von Volladdierern realisiert werden, indem der Eingangsübertragsanschluss CI auf „1“ (+U) gelegt wird und der Subtrahend invertiert wird. Diese Vorgehensweise entspricht der Addition mit dem *Zweierkomplement* (Bild I-49).

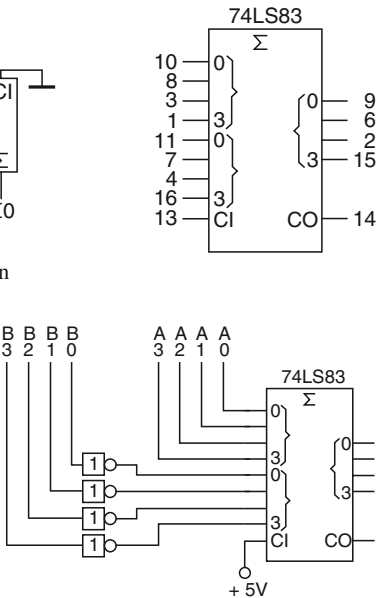


Bild I-49 4-Bit-Subtrahierer

Ändert man die Schaltung nach Bild I-50, erhält man ein universelles Additions-Subtraktionsnetz. Die Eingänge S0 bis S4 sind Steuereingänge, mit denen entsprechende Operationen durchgeführt werden können. S0 und S1 dienen zum Durchschalten der Zahlen A und B, und mit S2 und S3 kann jeweils eine Invertierung vorgenommen werden, um das Einer-Komplement zu bilden. Mit S4 wird nach Wunsch

Bild I-48 Carry-Look-Prinzip

zusätzlich „1“ addiert, um in Verbindung mit S2 beziehungsweise S3 das Zweier-Komplement zu erhalten. Soll die Operation  $A - B$  durchgeführt werden, muss S0 und S1 auf „1“, S2 auf „1“, S3 auf „0“ und S4 auf „1“ liegen

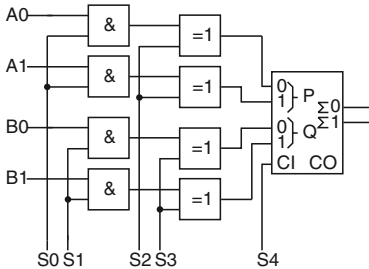


**Bild I-50**  
Einfaches  
Rechenwerk

Beispiel

|            |            |
|------------|------------|
| A = 9 =    | 1001       |
| B = 4 =    | 0100       |
| A+B = 13 = | 1101       |
| Korrektur  | + 0110     |
| Übertrag   | 1 0011 = 3 |

Schaltung

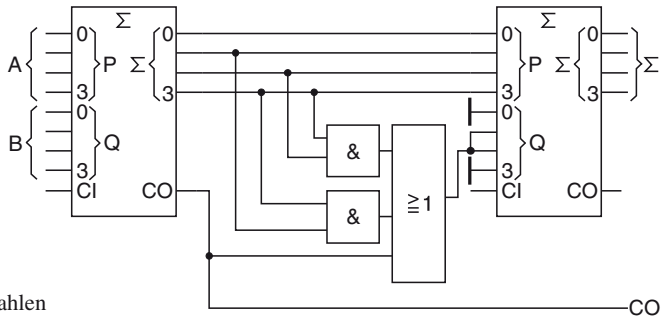


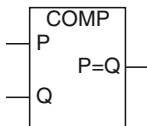
**Bild I-51** Addierer für BCD-Zahlen

Einfache Komparatoren

Wertetabelle

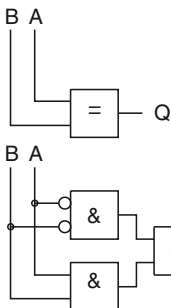
| B | A | Q0 |
|---|---|----|
| 0 | 0 | 1  |
| 0 | 1 | 0  |
| 1 | 0 | 0  |
| 1 | 1 | 1  |

Schaltzeichen

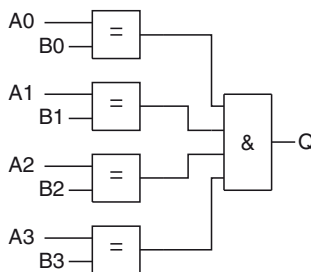


Schaltung

1-Bit-Komparator



4-Bit-Komparator



Standardbaustein

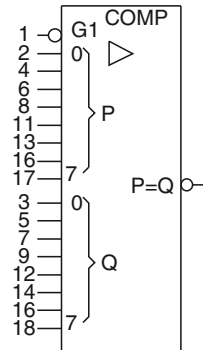


**Bild I-52**  
Einfache Komparatoren

sind, wird der Ausgang Q = „1“ (Wertetabelle). Diese Aufgabe erfüllen die dargestellten Schaltungen. Für n-Bit bietet sich eine einfache Erweiterung durch eine Äquivalenzschaltung für jede Bitstelle und anschließender UND-Verknüpfung an, wie das Beispiel für den 4-Bit-Komparator zeigt. Als Standardbaustein bietet sich der 8-Bit-Komparator 74HC688 an.

6.2.2.2 Komparator mit Größer- und Kleiner-Vergleich

Weitergehende Komparatoren vergleichen zusätzlich nach den Gesichtspunkten  $A < B$  und  $A > B$ . Bild I-53 zeigt die entsprechende Wertetabelle für den 1-Bit-Vergleich, die Schaltung und das Schaltzeichen.

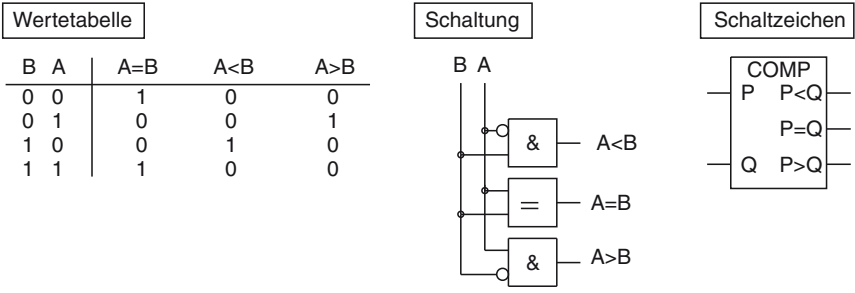


Bild I-53  
1-Bit-Komparator

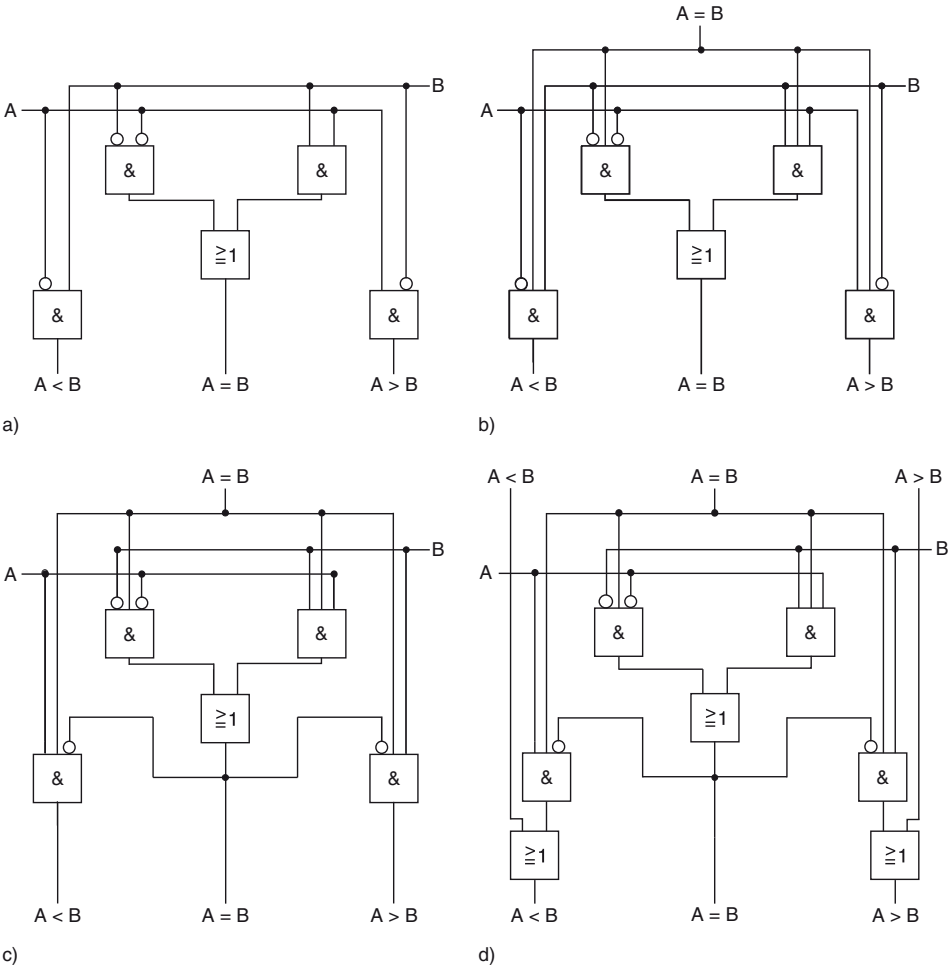


Bild I-54 Universalkomparator

Ein Komparator für n-Bitstellen wird durch Zusammenschalten mehrerer Universalkomparatoren erstellt. Die Bilder a) bis d) im Bild I-54 zeigen die Entwicklung dieses Komparators auf.

Außer den Eingängen für die Vergleichbits besitzt der Universalkomparator drei zusätzliche Eingänge, um bei einem Vergleich mehrerer Binärstellen die einzelnen Stufen miteinander zu verbinden. Der Eingang  $A = B = „1“$  hat die Aufgabe, die Schaltung so zu

aktivieren, dass ein Bitvergleich möglich wird. Bei  $A > B$  wird mit dem Ausgang  $A = B$  die nächstniederwertigste Stelle gesperrt und die Meldung  $A > B$  über die nachfolgende ODER-Verknüpfung sofort dem Ausgang gemeldet. Weil der Vergleich bei der Stelle mit der höchsten Wertigkeit beginnt, wird die dafür zuständige Stufe nach Bild I-55 beschaltet. Die Eingänge  $A > B$  und  $A < B$  liegen auf „0“ (Masse) und der Eingang  $A = B$  auf „1“ (+U).

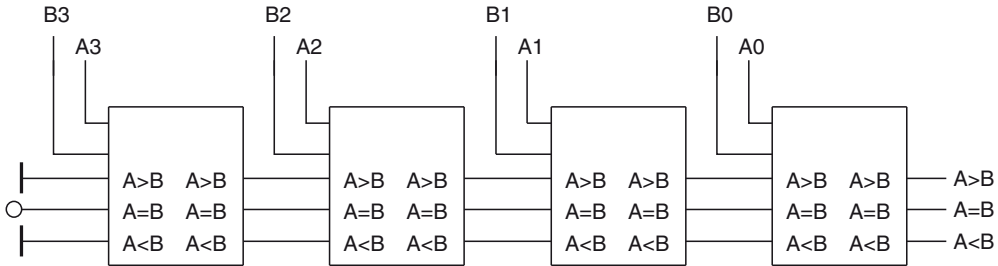


Bild I-55 Komparator für 4 Bit

## 6.2.3 Codewandler und Decoder

### 6.2.3.1 Codewandler

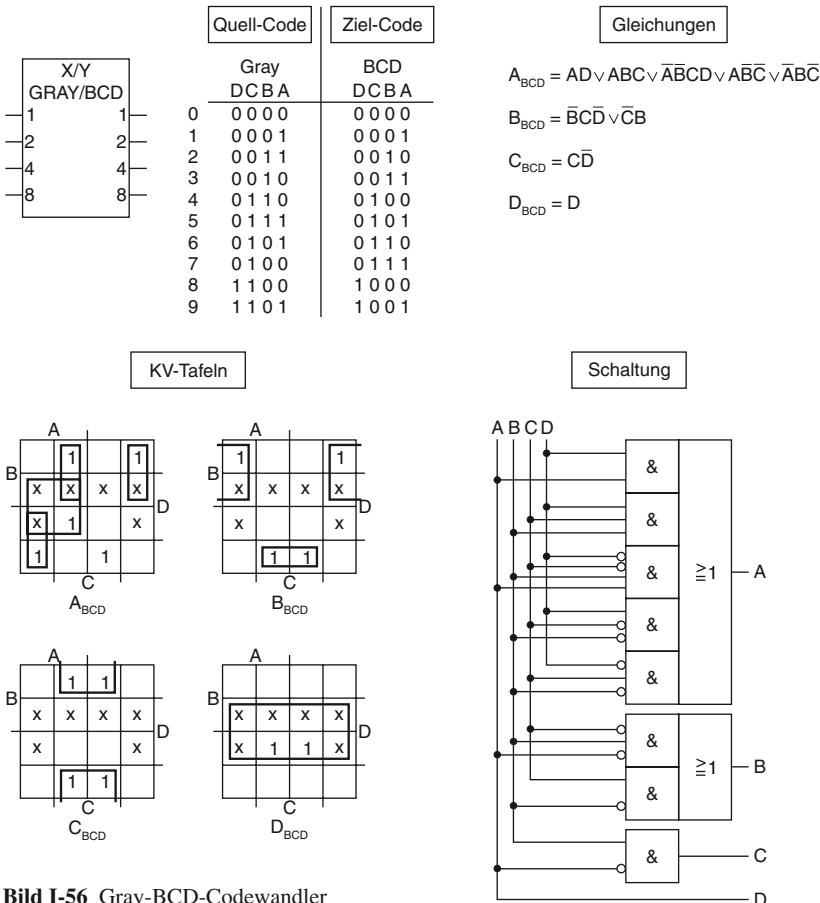


Bild I-56 Gray-BCD-Codewandler

Ein Codewandler (Codierer) ordnet einen Code einem anderen Code zu. Er setzt einen Quellcode in einen Zielcode um, er ist praktisch ein „Übersetzer“.

■ **Beispiel:** Um einen Gray/BCD-Codierer zu entwerfen, wird Quell- und Zielcode in einer Wertetabelle gegenübergestellt. Für jede Stelle muss dann ein KV-Diagramm benutzt und die Gleichung ermittelt werden. Anschließend ist aus der Gleichung die Schaltung zu zeichnen (Bild I-56).

### 6.2.3.2 1-aus-n-Decoder

Wie aus der Wertetabelle (Bild I-57) hervorgeht, erhält jeweils ein zugewiesener Ausgang „1“ in Abhängigkeit einer dualen Eingangsinformation. Q1 schaltet beispielsweise bei der Eingangskombination A = „1“ und „B“ = 0 auf „1“. Hierbei kann die Schaltung um einen zusätzlichen Freigabeeingang erweitert werden. Ein Steuersignal kann dann den Baustein aktivieren. Ist der Freigabeeingang F = „0“, sind auch alle Ausgänge „0“. Mit Decodern lassen sich z.B. verschiedene Speicherbausteine oder Baugruppen anwählen.

### 6.2.4 Multiplexer und Demultiplexer

Multiplexer und Demultiplexer sind „elektronische Schalter“, die Eingangsinformationen verschiedener Datenleitungen auf einen Ausgang (Multiplexer) oder eine Eingangsinformation auf verschiedene Ausgangsdatenleitungen (Demultiplexer) schalten. Welche Leitungen durchgeschaltet werden, bestimmt die Steuerung des „Schalters“ (Bild I-58).

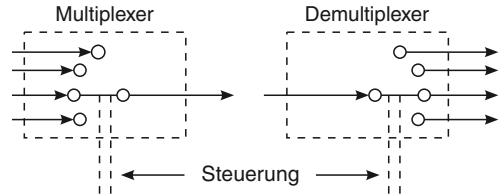
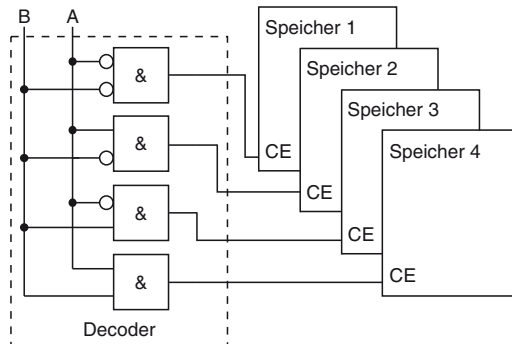


Bild I-58 Prinzip

Aufgabe dieser Bausteine kann es sein, die parallel anliegenden Daten eines Sendebausteins über eine Leitung zu übertragen und im Empfängerbaustein die Daten wieder parallel anliegen zu lassen. Dies geschieht mittels *Zeitmultiplexverfahren*, wobei die ent-

| B | A | Funktion             |
|---|---|----------------------|
| 0 | 0 | Speicher 1 angewählt |
| 0 | 1 | Speicher 2 angewählt |
| 1 | 0 | Speicher 3 angewählt |
| 1 | 1 | Speicher 4 angewählt |



| Wertetabelle |   |    |    |    |    |
|--------------|---|----|----|----|----|
| B            | A | Q0 | Q1 | Q2 | Q3 |
| 0            | 0 | 1  | 0  | 0  | 0  |
| 0            | 1 | 0  | 1  | 0  | 0  |
| 1            | 0 | 0  | 0  | 1  | 0  |
| 1            | 1 | 0  | 0  | 0  | 1  |

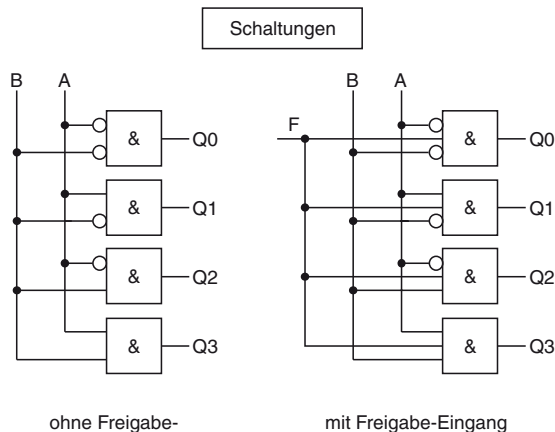
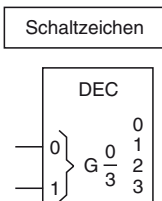


Bild I-57 1-aus-4-Decoder und Anwendungsbeispiel

sprechenden Datenleitungen zeitlich nacheinander und synchron durchgeschaltet werden.

### 6.2.4.1 Multiplexer

Multiplexer verteilen die Daten D verschiedener Eingänge, die durch Adressen angewählt werden, auf einen Ausgang Q (Bild I-59). Soll beispielsweise das Datenbit von D0 zum Ausgang Q gelangen, muss A0 mit „0“ und A1 mit „0“ angewählt werden. Dies wird auch aus der Gleichung deutlich. Die Anzahl der notwendigen Adressleitungen ist von der Anzahl der gewünschten Dateneingänge abhängig.

Nach Bild I-60 kann die Schaltung zusätzlich mit einem Freigabeeingang versehen werden. Bei FE = „1“ gelangt das angewählte Datenbit zum Ausgang Q. Standardbausteine besitzen häufig einen 3-state-Ausgang.

Ein Anwendungsbeispiel für Multiplexer zeigt das Prinzip des gemultiplexten Adress-Datenbusses (Bild I-61) auf. Einige Prozessoren und Controller besitzen, um Anschlussleitungen einzusparen, so einen Bus. Hierbei werden Adressen und Daten zeitlich nacheinander auf das Bussystem geschaltet. Die Steuerung nimmt die CPU vor.

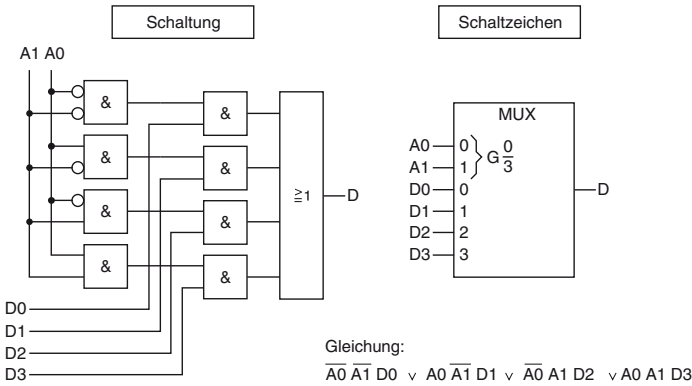


**Bild I-59**  
Multiplexer

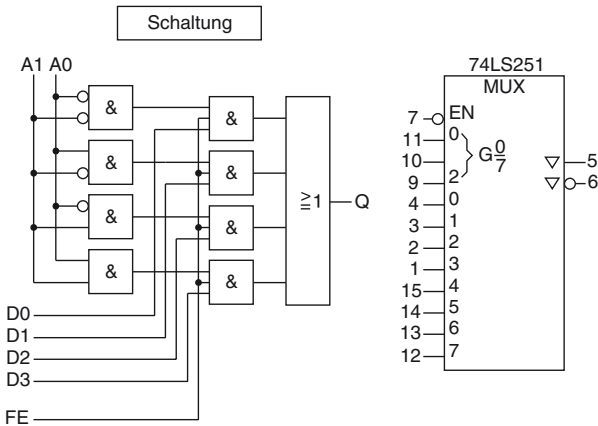


**Bild I-60**  
Multiplexer mit Freigabeeingang und Standardbaustein

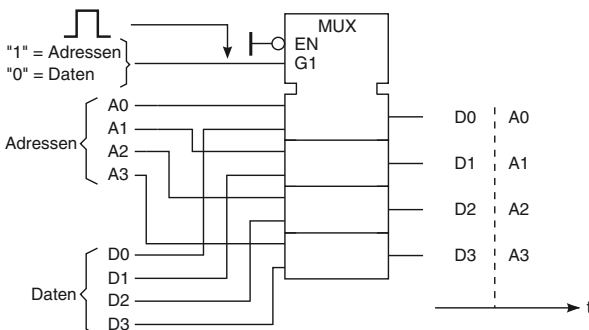


**Bild I-61**  
Gemultiplexer Adress-Datenbus

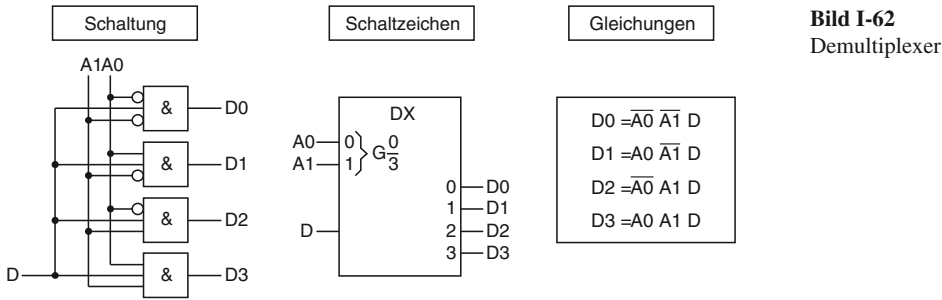


**Bild I-62**  
Demultiplexer

6.2.4.2 Demultiplexer

Mit Hilfe von Demultiplexern kann eine Eingangs- information auf verschiedene Ausgänge verteilt werden (Bild I-62). Die erforderlichen Auswahlleitungen (Adressen) sind abhängig von der Anzahl der Aus- gangs-Datenleitungen.

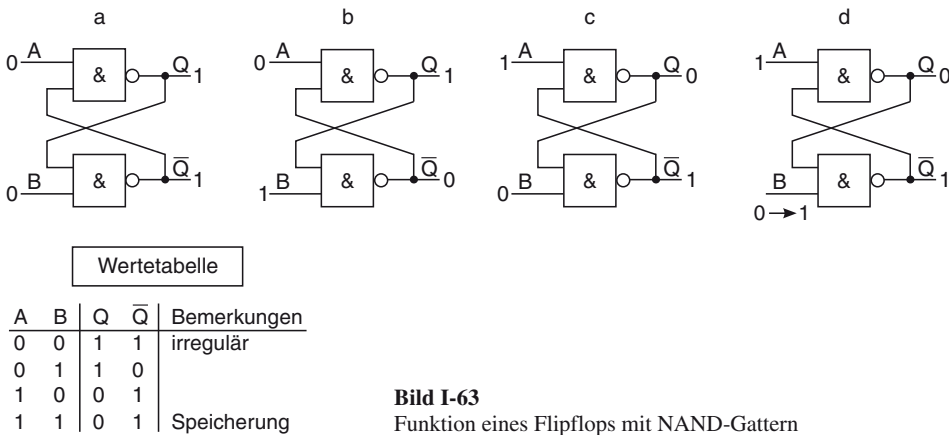
6.3 Schaltwerke

Schaltwerke (Sequentielle Logik) sind Schaltnetze mit einem Speicherverhalten. Die wichtigste Grund- schaltung ist das *Flipflop* (bistabile Kippstufe).

6.3.1 Speicherbausteine

6.3.1.1 Allgemeines Flipflop

Unter Flipflops versteht man Schaltungen, deren zwei Ausgänge immer *komplementäre stabile Zustände* aufweisen. Das Ausgangsverhalten selbst wird über zwei Eingänge beeinflusst. Damit ist die Speicherung einer binären Information möglich. Bei den, durch einen Takt gesteuerten Flipflops, wird nach *taktzu- stands*gesteuerten und *taktflankengesteuerten* Flip- flops unterschieden. Flipflops lassen sich mit NAND- und NOR-Gattern realisieren.



Wertetabelle

| A | B | Q | NOT Q | Bemerkungen |
|---|---|---|-------|-------------|
| 0 | 0 | 1 | 1     | irregulär   |
| 0 | 1 | 1 | 0     |             |
| 1 | 0 | 0 | 1     |             |
| 1 | 1 | 0 | 1     | Speicherung |

**Bild I-63**  
Funktion eines Flipflops mit NAND-Gattern

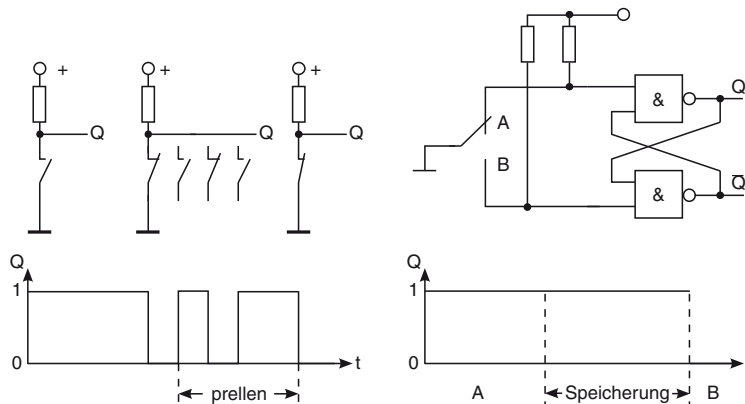


**Bild I-64**  
Prinzip des Prellens und entprellter Schalter



■ **Beispiel:** Flipflop aus NAND-Gattern

Ein NAND erzeugt am Ausgang immer eine „1“, wenn mindestens ein Eingang mit „0“ belegt ist. Damit ergeben sich die Ausgangszustände Bild I-63 a bis c.

Die Wertetabelle fasst alle Schaltzustände zusammen.  $Q1 = „1“$  und  $Q2 = „1“$  entspricht nicht der Funktion eines Flipflops. Diese Eingangskombination, die diesen Ausgangszustand hervorruft, ist daher logisch „verboten“, sie ist irregulär. Sind die Eingangspegel komplementär (ein Eingang „0“ und der andere „1“ oder umgekehrt), schaltet das Flipflop. Bei „1“ an beiden Eingängen bleibt der vorherige Zustand erhalten; man spricht dann vom Speicherzustand. Oft werden Schalter oder Taster als Eingabe von digitalen Systemen eingesetzt. Hierbei kann es zu Prellen kommen. Der Kontakt öffnet sich kurzzeitig wieder, und die konkrete Schaltung erkennt mehrere Impulse. Durch Pull-up-Widerstände an den Eingängen ist die Eingangskombination  $A = „0“$  und  $B = „0“$  nicht möglich. Sobald der Taster gedrückt ist, wird der Zustand gespeichert. Bild I-64 zeigt das Prinzip des Prellens und Abhilfe durch ein Flipflop.

### 6.3.1.2 RS-Flipflop

Beim RS-Flipflop ( $R = \text{Reset} = \text{Rücksetzen}$ ,  $S = \text{Set} = \text{Setzen}$ ) folgt der Ausgang  $Q$  immer dem Eingang  $S$ . Die Eingangszustände  $S = R = „1“$  sind „verboten“, und die Speicherung erfolgt bei  $S = R = „0“$ . RS-FF's

lassen sich aus NAND- oder NOR-Gattern aufbauen (Bild I-65).

### 6.3.1.3 Flipflops mit dominierenden Eingängen

Bei Flipflops mit dominierenden Eingängen (Bild I-66) können aufgrund der Eingangsbeschaltung irreguläre Zustände an den Ausgängen nicht auftreten. Das *R-Flipflop* ist ein RS-FF mit dominierendem R-Eingang, weil ein Rücksetzen immer bei  $R = „1“$  erfolgt, unabhängig vom Zustand an  $S$ . Das *S-Flipflop* ist ein RS-FF mit dominierendem Setzeingang. Unabhängig vom Zustand am R-Eingang wird das Flipflop bei  $S = „1“$  gesetzt. Das *E-Flipflop* speichert bei gleichen Eingangszuständen  $R = S$  immer.

### 6.3.1.4 D-Flipflop

Mit dem D-Flipflop (Data Latch) lässt sich eine binäre Information speichern, solange  $C = „1“$  ist. Irreguläre Zustände treten nicht auf. Bild I-67 zeigt ein D-Flipflop aus NAND-Gattern mit der zugehörigen Wertetabelle und dem Schaltzeichen.

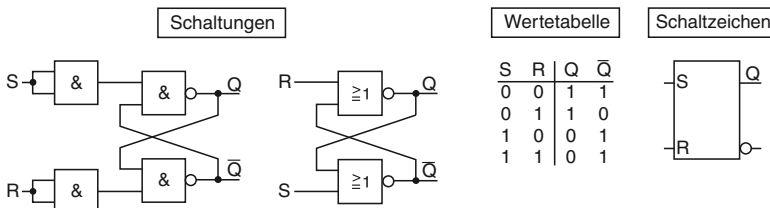


**Bild I-65**

RS-Flipflop aus NAND- und NOR-Gattern mit Wertetabelle und Schaltzeichen

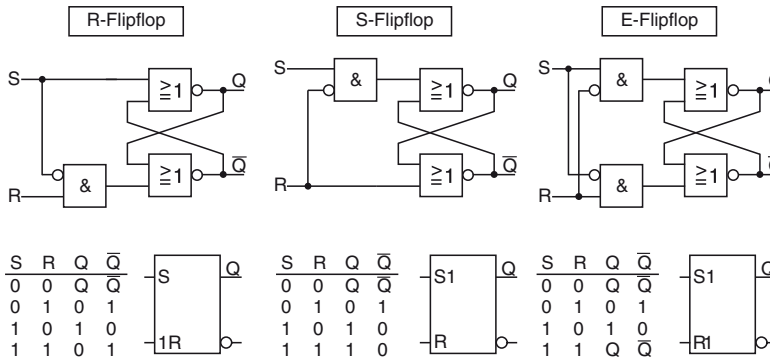


**Bild I-66**

Flipflop mit dominierenden Eingängen

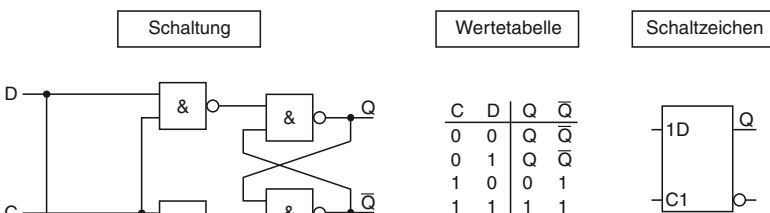


**Bild I-67**

D-Flipflop

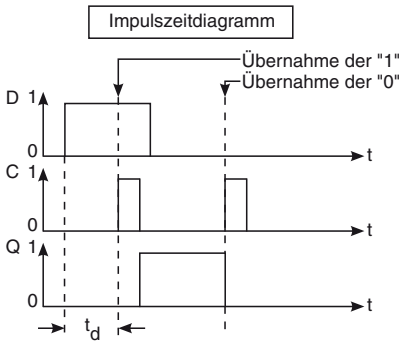


**Bild I-68** Impulsdiagramm

Da das Flipflop das Eingangssignal verzögert, spricht man auch von einem *Delay-Flipflop* (siehe Impulsdiagramm Bild I-68). Soll der Zustand vom Dateneingang in Abhängigkeit einer Flanke übernommen werden, spricht man vom *einflankengesteuerten* D-Flipflop. Der Eingangswert kann mit der an-

steigenden oder abfallenden Flanke des Clock- beziehungsweise Taktsignals übernommen werden. Von einem taktzustandsgesteuerten Flipflop spricht man, wenn die Daten nur bei  $C = „1“$  oder  $C = „0“$  übernommen werden. D-Flipflops werden für kurzzeitige Speicheroperationen eingesetzt. Hierbei werden die an den D-Eingängen anliegenden Informationen mit dem Takt übernommen. Der Takt bestimmt damit den Zeitpunkt der Datenübernahme (Bild I-69).

### 6.3.1.5 JK-Flipflop

Erweitert man das RS-FF nach Bild I-70 durch zwei UND-Gatter und entsprechender Rückkopplung, werden unzulässige Eingangskombinationen verhindert. Die entgegengesetzten Zustände an den Eingängen J und K werden beim nächsten Takt übernommen. Ist  $J = K = „0“$ , ändert sich der Ausgang nicht, und bei  $J = K = „1“$  schaltet das Flipflop mit jedem Takt um. Hierbei wirkt das Flipflop dann wie ein T-Flipflop.

### 6.3.1.6 Master-Slave-JK-Flipflop

Das Master-Slave-JK-Flipflop (Bild I-71) ist ein *zweiflankengesteuertes* Flipflop, weil es bei ansteigender oder abfallender Flanke die Eingangsinformation aufnimmt und speichert und mit der zur Eingangsübernahme komplementären Flanke die Information zum Ausgang weiter schaltet. Es besteht immer aus zwei JK-Flipflops, dem *Master* (Herr) und dem *Slave* (Diener). Das Zeichen an den Ausgängen deutet einen *retardierenden* Ausgang an. Dies bedeutet nach DIN 40700, dass der Zustandswechsel des Flipflops an den Ausgängen erst dann wirksam wird, wenn die Eingangsvariable zu ihrem ursprünglichen Wert zurückgekehrt ist.

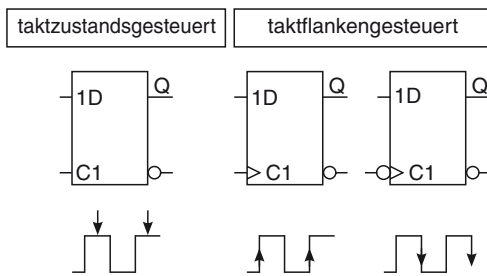


**Bild I-69** Taktgesteuerte Flipflops

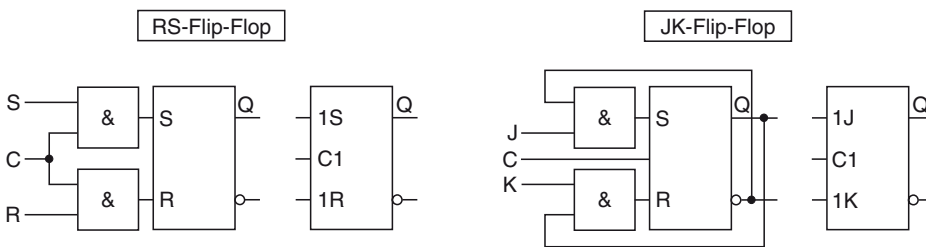


**Bild I-70** JK-Flipflop

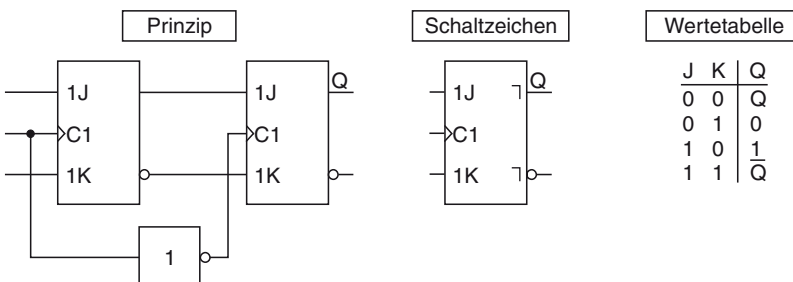


**Bild I-71**  
Master-Slave-Prinzip

Bild I-72 beschreibt die Funktion und zeigt die Auswirkung der Eingangsbeschriftung auf den Ausgang Q. Das Master-Slave-Flipflop übernimmt bei der ansteigenden Flanke die Eingangsinformation. Während dieser Zeit ist der Slave gesperrt und gibt bei abfallender Flanke die Information – hier sperrt das Master-FF – an den Slave weiter.

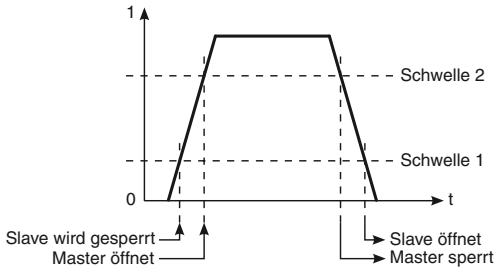


**Bild I-72** Zeitverhalten des Master-Slave-JK-Flipflop

Betrachtet man die Auswirkung des Clock-Signals in einer zeitlichen Reihenfolge, so ergeben sich die dargestellten Zustände im Master-Slave-JK-FF. Jeweils beim Überschreiten der Schwelle 1 und 2 laufen die dargestellten Reaktionen ab. Mit der ansteigenden Flanke wird der Slave gesperrt, und der Master kann die Eingangsinformation übernehmen, um sie mit der abfallenden Flanke zum Slave zu bringen. Während dieser Zeit ist der Master gesperrt. Bild I-73 verdeutlicht diesen Zusammenhang mit dem Impulszeitdiagramm, und Bild I-74 zeigt die Anschlussbelegung von drei gängigen Standardbausteinen.

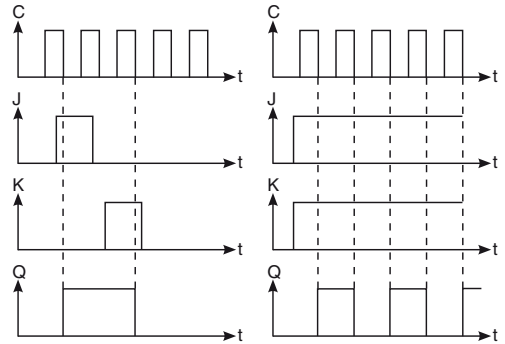


**Bild I-73** Impulsdiagramm

### 6.3.1.7 T-Flipflop

Das T-Flipflop (Trigger-Flipflop, Toggle-Flipflop) ist flankengesteuert und besitzt nur den Takteingang. Es schaltet wie das JK-Flipflop bei der Eingangskombination  $J = „1“$  und  $K = „1“$  jeweils mit der Taktflanke die Ausgangszustände um (Bild I-75). T-Flipflops werden in Zähler- und Teilerschaltungen eingesetzt.

## 6.3.2 Grundsaltungen aus Speicherbausteinen

### 6.3.2.1 Register

Register sind aus Speicherbausteinen zusammengesetzte Einheiten. Man unterscheidet hierbei *allgemeine Register*, die zur kurzzeitigen Speicherung kleiner Datenmengen wie 8-, 16- oder 32-Bit-Datenworte dienen, und *Schieberegister*, die die gespeicherte Information jeweils mit einem Takt weitergeben. Mit

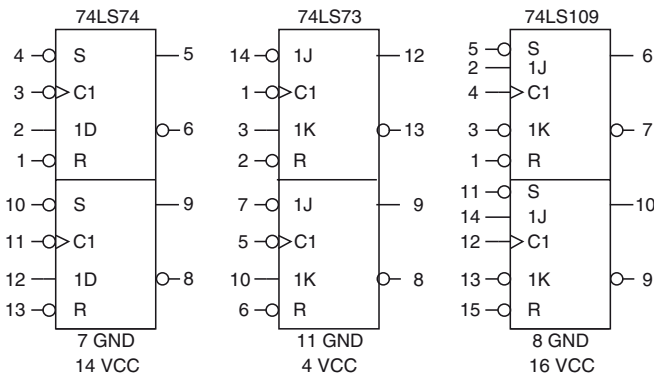


**Bild I-74**  
Standardbausteine

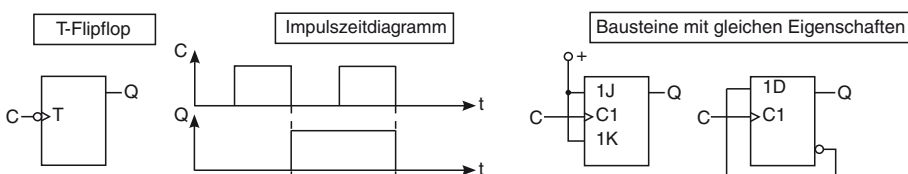


**Bild I-75** T-Flipflop mit Impulsdiagramm und funktionsgleiche Bausteine

dem Taktsignal ( $C = \text{Clock}$ ) werden die Daten in das Register eingegeben, und mit OE (Output Enable) können die gespeicherten Daten freigegeben werden.

6.3.2.2 Schieberegister

Schieberegister bestehen aus hintereinander geschalteten D-Flipflops oder JK-Flipflops mit untereinander verbundenen Takteingängen. Sie geben die gespeicherte Information jeweils mit einem Takt von Flipflop zu Flipflop weiter. Bild I-76 zeigt eine mögliche Schaltung und beschreibt die Funktion mit dem Impulszeitdiagramm.

Zur Verdeutlichung sind die Pegel-Ausgänge  $Q_0$  bis  $Q_3$  gesondert herausgeführt. Das Datenbit liegt am Eingang D an und wird mit dem 1. Takt übernommen. Damit wird  $Q_0$  „1“. Mit dem nächsten Takt wird „0“ von D übernommen, und die „1“ von  $Q_0$  gelangt nach  $Q_2$ . Nach dem 5. Takt ist das Schieberegister „leer“. Man unterscheidet Schieberegister nach ihrer Länge und ihrer Betriebsart. Je nach Datenein- und -ausgabe (seriell, parallel) und Schieberichtung (links, rechts)

unterscheiden sich die Betriebsarten der Schieberegister. Ist ein Ausgang mit dem Eingang verbunden, spricht man vom *Ringschieberegister*. Im Bild I-77 ist ein Schieberegister für die parallele Eingabe dargestellt. S und R sind zusätzliche Vorbereitungseingänge. Die Ansteuerung verhindert das gleichzeitige Anstehen von Setz- und Rücksetzsignal und lässt die parallelen Daten nur mit dem Freigabeeingang zu. Register mit seriellem Dateneingang und parallelen Datenausgängen bezeichnet man auch als *Serien-Parallel-Umsetzer* und Register mit parallelen Eingängen und seriellem Datenausgang als *Parallel-Serienumsetzer*.

Im Bild I-78 sind zwei Standardbausteine für eine serielle Übertragung zusammengeschaltet. Die anliegenden parallelen Daten werden geladen und mit jedem Takt über *eine* Leitung dem Baustein 74164 zugeführt. Dieser Baustein stellt nach 8 Takten das eingegebene Datenwort wieder zur Verfügung. In der Mikroprozessortechnik sind solche parallel/seriell- und seriell/parallel-Wandler Bestandteile von Interfaceschaltungen.

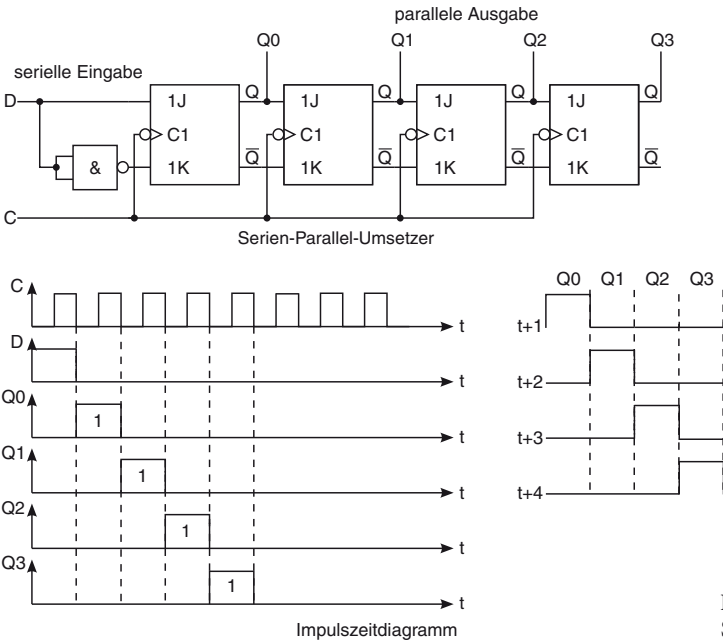


Bild I-76  
Schieberegister

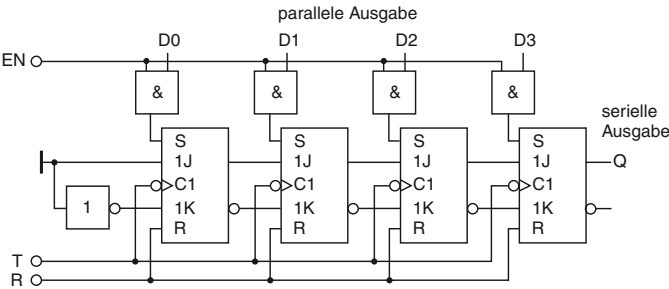


Bild I-77  
Parallel-Serien-Register

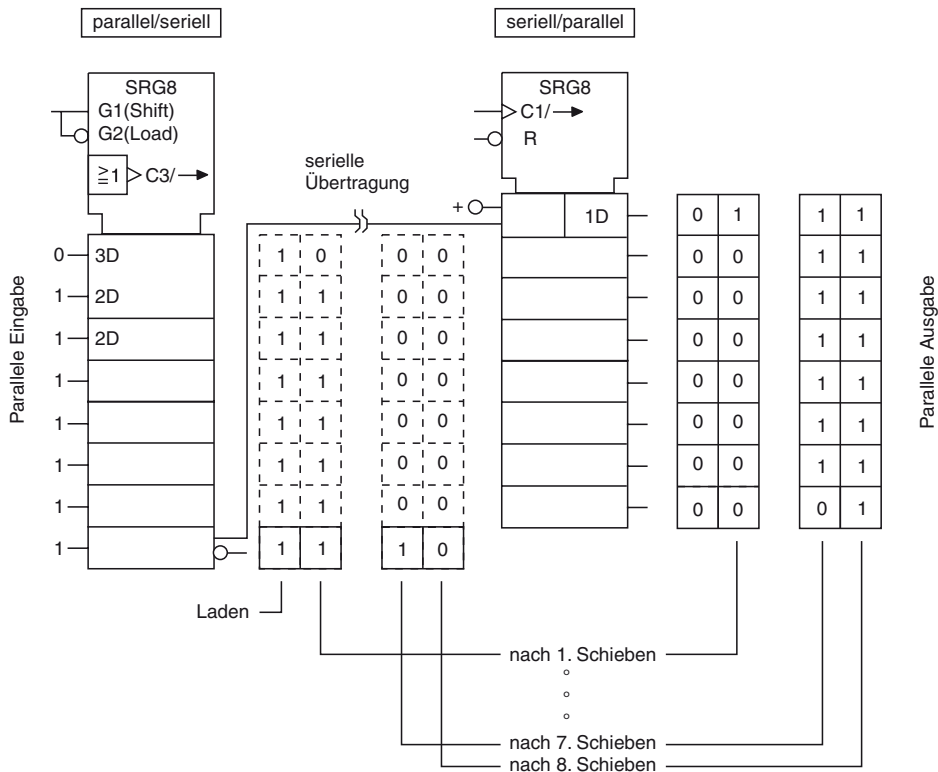


Bild I-78 Schieberegisteranwendung

6.3.2.3 Frequenzteiler

Frequenzteiler erzeugen nach  $z$  Impulsen an ihrem Eingang *einen* Ausgangsimpuls und teilen somit die Eingangsfrequenz durch  $z$ . Sie bestehen aus Flipflops, die hintereinander geschaltet sind und deren Ausgang  $Q$  jeweils das nachfolgende Flipflop ansteuert. Jedes Flipflop teilt im Verhältnis 2:1. Mit vier Flipflops lässt sich ein Teilverhältnis von  $2^4 = 16$  realisieren. Zähler und Teiler bestehen aus gleicher Hardware mit unterschiedlicher Signalauswertung. Der Teiler besitzt immer einen Eingang und einen seriellen Ausgang, während der Zähler seine Information als paralleles Wort ausgibt. Durch entsprechende Verknüpfungen lassen sich ungeradzahlige Teilverhältnisse realisieren. Daher wird auch nach *geradzahligen* und *ungeradzahligen Teilern* unterschieden. Bild I-79 gibt die Schaltung eines 5 zu 1-Teilers wieder. Nach dem 5. Impuls erfolgt eine Rücksetzung über das NAND-Gatter, um mit Rückstellung aller Flipflops neu zu beginnen. Will man das Impulspausenverhältnis gleich machen, dann muss am Ausgang  $D$  ein zusätzliches Flipflop eingesetzt werden. Ein Anwendungsbeispiel ist in Bild I-80 dargestellt. Aus einem Rechteckgenerator gewinnt man durch zwei Teilerbausteine unterschiedliche Frequenzen.

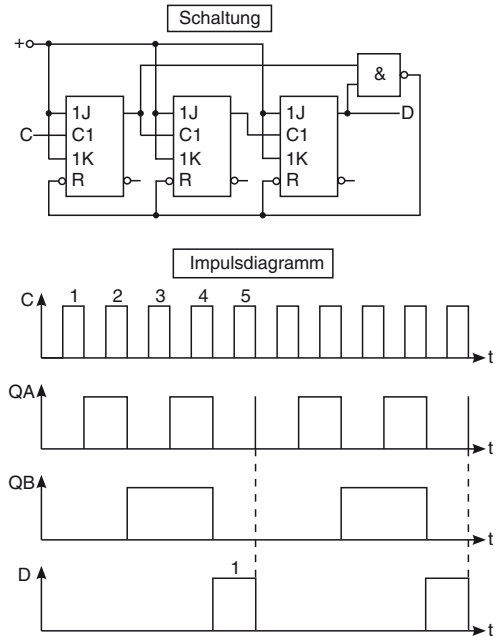


Bild I-79 Frequenzteiler 5:1

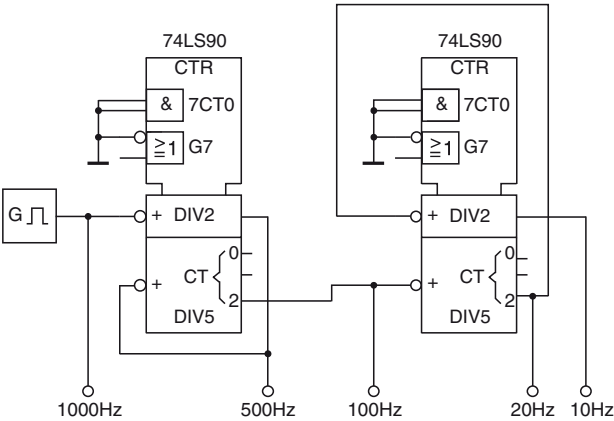


**Bild I-80**  
Zählerbausteine als Frequenzteiler

**6.3.2.4 Zähler**

Zähler gehören zu den Grundbausteinen der Digital-technik. Sie werden z.B. zum Zählen von Stückzahlen, Zählen von Umdrehungen eines Motors oder Zählen einer Zeiteinheit eingesetzt. Die Impulse zur Ansteuerung des Zählers liefert eine Zeitbasis oder unterschiedliche Sensoren. Die Eigenschaft des Zählers, zu addieren oder zu subtrahieren (immer 1) und zu speichern, lässt sich mit Flipflops erreichen. Die gezählten Impulse erscheinen an einem Parallel- ausgang. Die Zählerkapazität ist von der Anzahl  $n$  der Flipflops abhängig. Dabei gilt als maximale Zählerkapazität  $K_{\max} = 2^n$ . Ein Zähler aus 4 Flipflops hat somit  $K_{\max} = 16$ . Er erreicht nach 16 Zählimpulsen wieder Null. Man spricht von einem „Modulo-16-

Zähler“. Ist nach dem  $n$ -Zählimpuls der Zustand Null erreicht, bezeichnet man den Zähler allgemein als „Modulo- $n$ -Zähler“. Zähler lassen sich nach der *Zählrichtung* als Vorwärts- oder Rückwärtszähler, nach der *Zahlendarstellung*, z.B. als BCD- oder Dualzähler und nach *Art der Taktansteuerung* als Asynchron- oder Synchronzähler einteilen. Bild I-81 zeigt einen universellen Standardbaustein.

**6.3.2.4.1 Asynchroner Zähler**

Bei einem Asynchronzähler wird der Takt nur dem ersten Flipflop zugeführt. Die nachfolgenden Stufen werden jeweils von der Vorstufe gesteuert. Im Bild I-82 wurden zum Aufbau eines *Vorwärtszählers* JK-Flipflops eingesetzt. Die Arbeitsweise der Flipflops

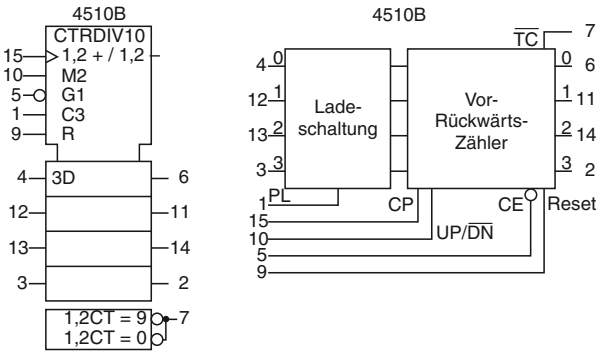


**Bild I-81**  
Universalzähler

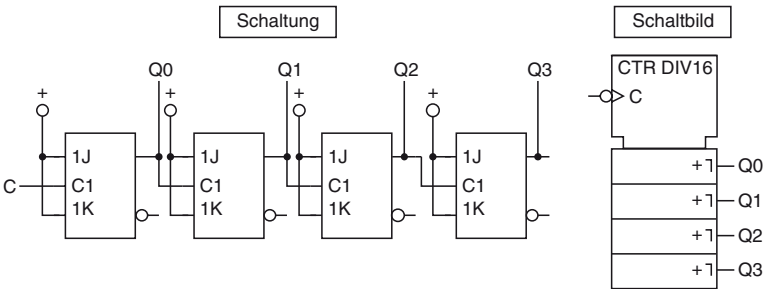


**Bild I-82**  
Asynchronzähler

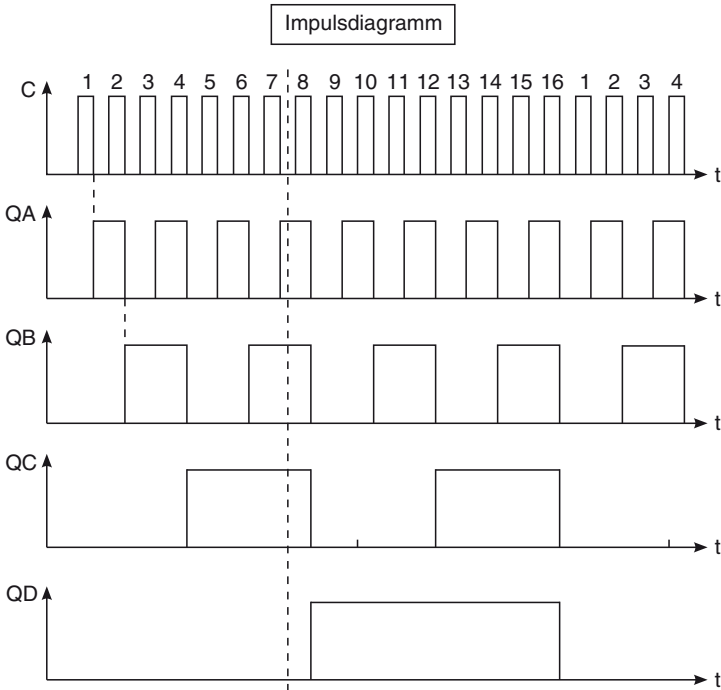


**Bild I-83**  
Impulsdiagramm  
des Asynchronzählers

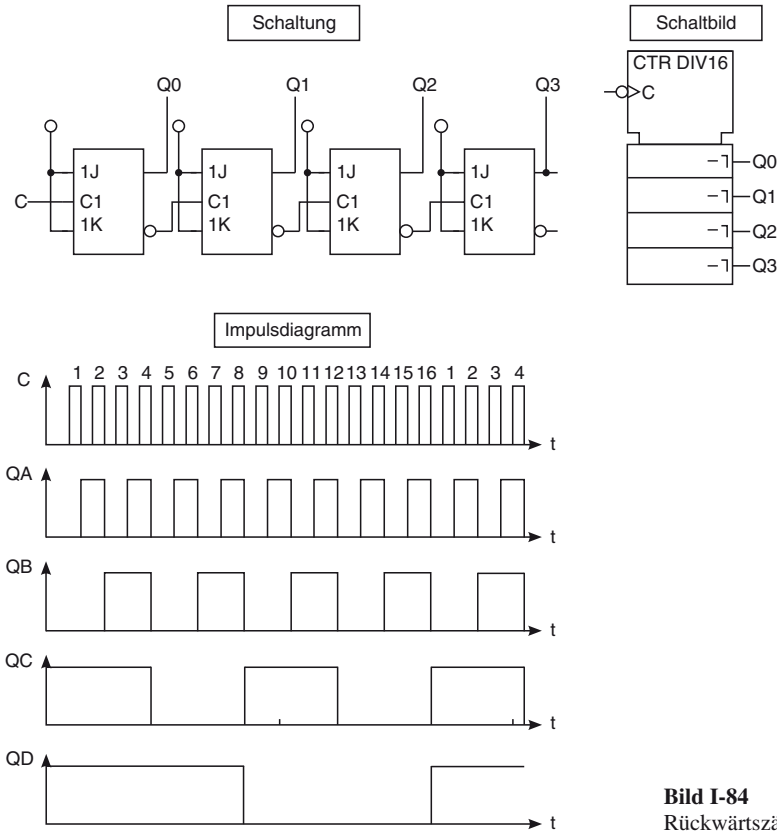


**Bild I-84**  
Rückwärtszähler und Impulsdiagramm





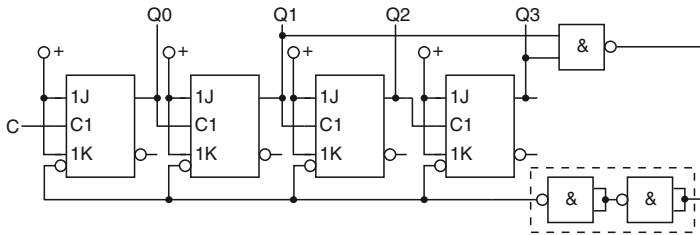


**Bild I-87**  
Asynchroner  
BCD-Vorwärtszähler

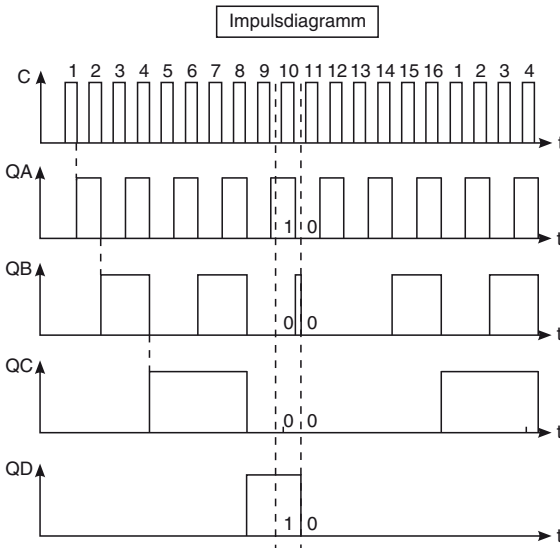


**Bild I-88**  
Impulsdiagramm des BCD-  
Zählers

#### 6.3.2.4.3 Synchroner Dual-Vorwärts-1-Zähler

Bei den synchronen Zählern werden die Takteingänge aller FFs *gleichzeitig* (synchron) angesteuert, und alle Ausgangszustände ändern sich ebenfalls gleichzeitig. Sie sind daher gegenüber Asynchronzählern schneller. Bei der Realisierung mit JK-Flipflops werden die Vorbereitungseingänge entsprechend ge-

schaltet. Hilfreich ist es hierzu, die Zustände der Flipflops vor und nach dem Taktimpuls zu betrachten und jeweils das Flipflop an der Stelle zu kennzeichnen, wo eine Umschaltung erfolgen muss. Mit dieser Überlegung kann dann durch Verknüpfung entschieden werden, ob  $J = K = „1“$ , das heißt das Flipflop durch den Eingangstakt schalten soll. Bild I-89 zeigt eine Tabelle mit der entsprechenden Kennzeichnung durch Pfeile.

Da das FF1 hiernach mit jedem Takt umschalten muss, wird  $J = K$  auf „1“ gelegt. Das FF2 muss jedesmal schalten, wenn auch  $Q_0$  schaltet. Alle Gleichungen sind nachfolgend aufgeführt. Das schaltungstechnische Umsetzen der nachfolgenden Gleichungen führt zur Schaltung Bild I-90.

Gleichungen:

für FF1:  $J = K = 1$

für FF2:  $J = K = Q_0$

für FF3:  $J = K = Q_0 Q_1$

für FF4:  $J = K = Q_0 Q_1 Q_2$

| Q3   Q3+1 | Q2   Q2+1 | Q1   Q1+1 | Q0   Q0+1 |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 0   0     | 0   0     | 0   0     | 0 → 1     |
| 0   0     | 0   0     | 0 → 1     | 1 → 0     |
| 0   0     | 0   0     | 1   1     | 0 → 1     |
| 0   0     | 0 → 1     | 1   0     | 1 → 0     |
| 0   0     | 1   1     | 0   0     | 0 → 1     |
| 0   0     | 1   1     | 0 → 1     | 1 → 0     |
| 0   0     | 1   1     | 1   1     | 0 → 1     |
| 0   0     | 1 → 0     | 1 → 0     | 1 → 0     |
| 1   1     | 0   0     | 0   0     | 0 → 1     |
| 1   1     | 0   0     | 0 → 1     | 1 → 0     |
| 1   1     | 0   0     | 1   1     | 0 → 1     |
| 1   1     | 0 → 1     | 1 → 0     | 1 → 0     |
| 1   1     | 1   1     | 0   0     | 0 → 1     |
| 1   1     | 1   1     | 0 → 1     | 1 → 0     |
| 1   1     | 1   1     | 1   1     | 0 → 1     |
| 1   1     | 1 → 0     | 1 → 0     | 1 → 0     |

**Bild I-89** Tabelle zur Realisierung des Synchronzählers

#### 6.3.2.4.4 Zähler für mehrere Decaden

Sollen mehrere BCD-Zähler zusammengeschaltet werden, kann das asynchron oder synchron vorgenommen werden. In der Praxis bevorzugt man die

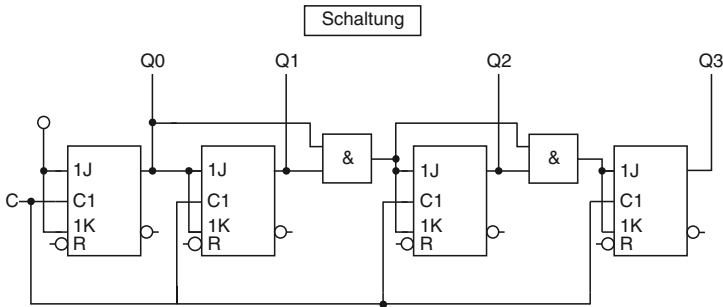


**Bild I-90**  
Synchronzähler

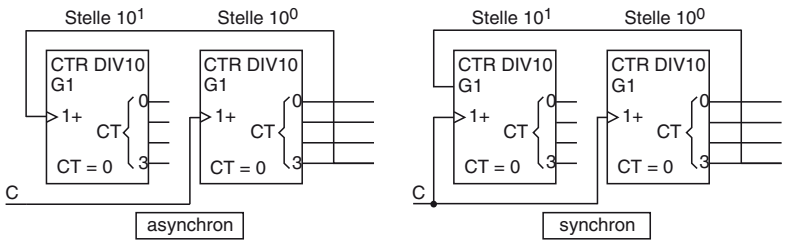


**Bild I-91**  
Asynchroner und  
synchroner Zähler für  
zwei Stellen

synchrone Zusammenschaltung, weil hier keine Zwischenzustände auftreten können. Im Beispiel Bild I-91 ist einmal die asynchrone und die synchrone Zusammenschaltung dargestellt. Bei der synchronen Zusammenschaltung werden beide Zählerbausteine gleichzeitig vom Takt angesteuert. Mit G1 = „0“ ist der Zähler jeweils gesperrt.

**6.4 Sonderschaltungen**

**6.4.1 Monoflops**

Monostabile Kippstufen oder Monoflops besitzen eine stabile Lage und können durch einen Steuerimpuls für eine bestimmte Zeit  $t_i$  in eine instabile Lage versetzt werden und an einem Ausgang einen Impuls liefern. Hierbei kann je nach Schaltungsdimensionierung eine Impulsverlängerung oder Impulskürzung erfolgen (Bild I-92). Der Ausgangsimpuls ist nur von den Daten des Monoflops und nicht von der Dauer des Steuerimpulses abhängig.  
Im Bild I-93 sind zwei Monoflops als Beispiel mit unterschiedlichen Grundgattern aufgeführt. Das NAND-Monoflop verlässt seine stabile Lage bei einer kurzen

Ansteuerung mit einem L-Pegel. Dieser erzeugt einen H-Impuls am Ausgang G1 und – weil C zunächst als Kurzschluss wirkt (der Kondensator ist nicht geladen) – damit einen L-Pegel am Ausgang G2. Nach Öffnen des Tasters wird dieser Zustand solange beibehalten, bis der Kondensator C sich aufgeladen und am Eingang von G2 L-Pegel anliegt. Damit erhält der Ausgang G2 H-Pegel und der Ausgang G1 wieder L-Pegel. Die stabile Lage ist wieder erreicht. Die Zeitdauer des L-Pegels am Ausgang G2 entspricht der Zeit  $t_i$  und hängt von der Zeitkonstanten  $R \cdot C$  ab. Die stabile Lage des NOR-Monoflops wird durch einen kurzen H-Impuls unterbrochen. Da der Kondensator C zuvor nicht geladen war (der Ausgang G1 führte H-Pegel und der Eingang G2 über R1 ebenfalls), ergibt der H-Impuls am Eingang ein L am Ausgang G1 und damit ebenfalls am Eingang G2. Der H-Impuls im Rückkopplungszweig hält diesen Zustand solange aufrecht, bis der Kondensator C über R1 aufgeladen die Schaltspannung erreicht hat und am Ausgang wieder einen L-Pegel erzeugt. Die Ansteuerung von Monoflops erfolgt über Differenzierglieder. Das Bild I-93 zeigt zwei Beispiele, die je nach gewünschter Steuerflanke gewählt werden können.

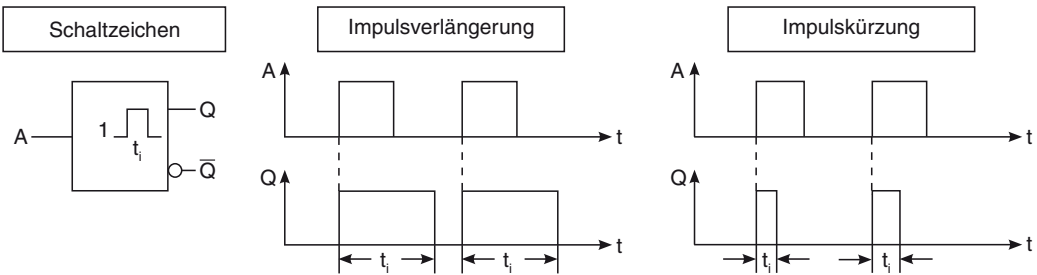


**Bild I-92** Monoflop und Betriebsarten

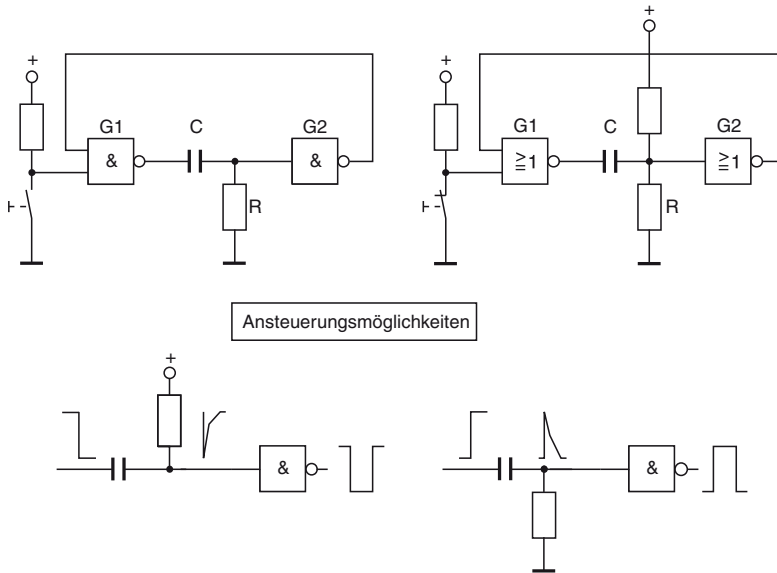


**Bild I-93**  
Monoflops aus Grundgattern und Ansteuerungsmöglichkeiten

In der Praxis setzt man integrierte Bausteine ein (Bild I-94). Die entsprechende Zeit  $t_i$  wird durch externe Beschaltung mit einem Widerstand  $R$  und einem Kondensator  $C$  festgelegt, wobei die Werte den Datenbüchern der Hersteller entnommen werden können. Durch die vorhandenen Eingänge sind unterschiedliche Triggermöglichkeiten vorhanden. Man unterscheidet *nichtrettriggerbare* und *rettriggerbare* Monoflops. Bei der nichtrettriggerbaren Stufe ergeben sich bei erneuter Ansteuerung durch einen Impuls während der aktiven Zeit  $t_i$  keine Ausgangsänderungen. Der Baustein 4528B besitzt zwei rettriggerbare und rücksetzbare Monoflops.

#### 6.4.2 Astabile Kippstufen

Astabile Kippstufen sind Rechteckgeneratoren und Bestandteil vieler digitaler Schaltungen. Sie dienen als Zeitbasis digitaler Messgeräte, als Taktoszillator für ein Controller- oder Prozessorsystem oder werden als Baudratengenerator eingesetzt. Sie können mit Hilfe von Gatterschaltungen aufgebaut werden. Bild I-95 zeigt eine Schaltung mit einem Schmitt-Trigger, dem zugehörigen Impulsdiagramm und zwei weitere mögliche Schaltungen. Liegt am Ausgang L-Pegel, kann sich der Kondensator über  $R$  entladen. Bei Unterschreiten der Einschaltsschwelle am Eingang des Schmitt-Triggers nimmt der Ausgang  $Q$  H-Pegel an,

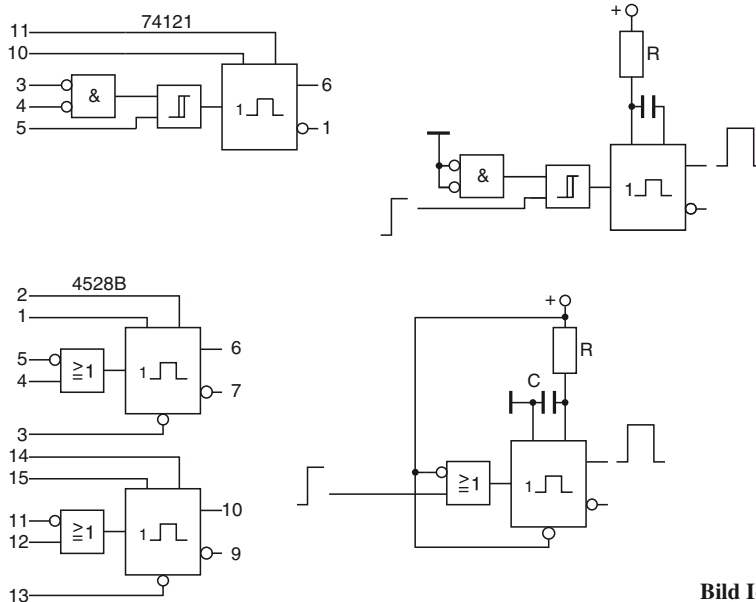


**Bild I-94** Integrierte Monoflops

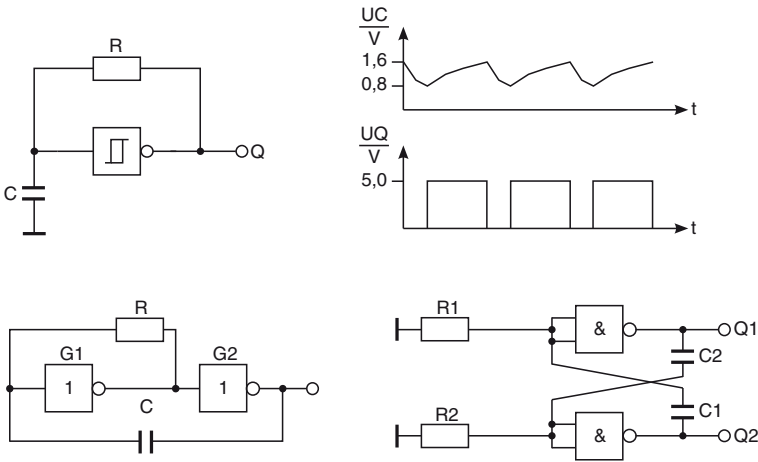
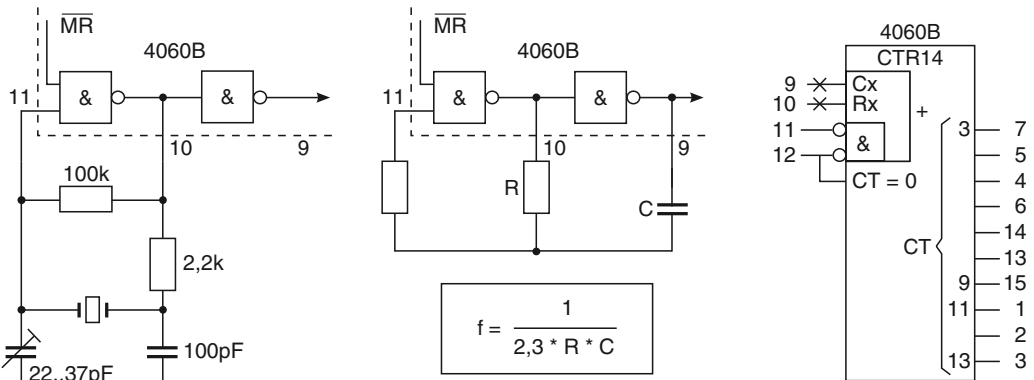


**Bild I-95**  
Generatorschaltungen

und C kann über R wieder aufgeladen werden, bis die Ausschaltsschwelle erreicht ist, um an Q wieder einen L-Pegel zu erzeugen. Die Frequenz der Ausgangsspannung ist von der Zeitkonstante  $\tau = R \cdot C$  abhängig. Zum Einsatz kommen auch hier integrierte Schaltungen.

gen. Als Beispiel dient der Baustein 4060B. Er besteht aus einem Generator und einem sich anschließenden Teiler. Zu seiner Funktion brauchen nur wenige externe Bauelemente zugefügt werden (Bild I-96). Seine Oszillatorfrequenz lässt sich bis 214 teilen. Dies hängt vom gewählten Ausgang ab.



nach Datenbuch der Firma Philips

**Bild I-96** Standardbaustein mit Taktgenerator

## II Integrierte Schaltkreise der Digitaltechnik

### 1 Allgemeines

Integrierte Schaltkreise (Integrated Circuit, IC) bestehen aus einer großen Anzahl von Transistorfunktionen, die auf einem Halbleiterkristall (Chip) integriert sind. Der Chip ist in einem Kunststoff- oder Keramikgehäuse eingebaut. Über Anschlüsse (Pin's) erfolgt die Verbindung zur Schaltung. Mit Hilfe moderner Herstellungsverfahren wird die Integrationsdichte dieser Schaltungen immer größer und die entsprechenden Chips kleiner, leistungsfähiger und

kostengünstiger. IC's lassen sich nach Kriterien wie Integrationsdichte, Funktion und Technologie einordnen. Bei der Integrationsdichte wird beispielsweise nach SSI (Small Scale Integration), MSI (Medium Scale Integration), LSI (Large Scale Integration) und VLSI (Very Large Scale Integration) unterschieden. Die Grenzen zwischen den Gruppen sind fließend und nicht einheitlich festgelegt. Digitalschaltungen (Logik- und Speicherschaltungen) werden in *bipolarer* oder *unipolarer Technik* hergestellt. Bei den bipolaren Logikschaltungen wird nach

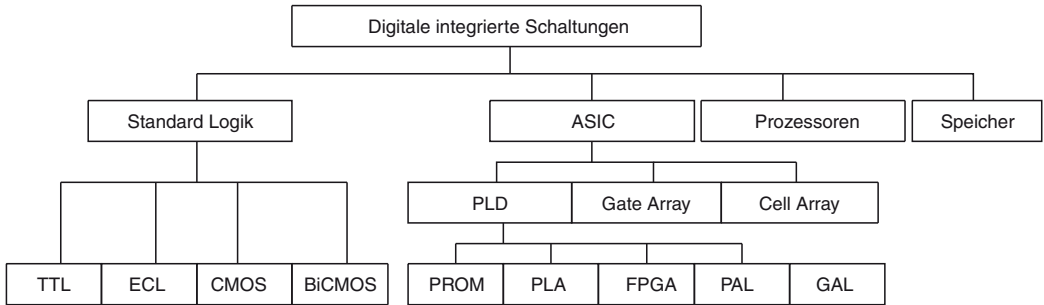


Bild II-1 Übersicht: Integrierte digitale Schaltungen

TTL (Transistor-Transistor-Logic) und ECL (Emitter Coupled Logic) unterschieden, bei den unipolaren Logikschaltungen nach MOS (Metal Oxide Silicon) und CMOS-Typen (Complementary MOS). Sind beide Technologien auf einem Chip realisiert, spricht man von *BiCMOS*-Technik.

Außer den zuvor genannten Standardschaltungen bieten die Hersteller anwendungsspezifische Schaltungen (ASIC = Application Specific IC) an, die sich nach vollkundenspezifischen (full custom) und halbkundenspezifischen (semi custom) Schaltungen unterscheiden. Hierunter versteht man vor allem Gate Arrays, Cell Arrays und PLD's (PLD = Programmable Logic Device). Unter einem Array versteht man allgemein eine Matrix, die verknüpft werden kann.

Bild II-1 zeigt eine Übersicht digitaler integrierter Schaltkreise. Speicher und Prozessoren sind in gesonderten Kapiteln aufgeführt.

## 2 Umgang mit integrierten Schaltungen

IC's sind elektrostatisch gefährdete Bauelemente (EGB). Sie müssen daher geschützt werden. Der Hersteller versieht diese Bauteile mit einem besonderen Kennzeichen (Hand als Piktogramm). Bei MOS-Schaltungen ist eine Schutzschaltung häufig integriert. Trotzdem kann es zur Zerstörung der Bauteile bei Berührung der Bausteinanschlüsse durch elektrostatische Entladungen kommen, wenn nicht besondere Regeln beim Umgang mit diesen Bauelementen beachtet werden. Hierzu zählen Schutzmaßnahmen am Arbeitsplatz wie hochohmig leitende

Fußbodenbeläge und ein Handgelenkband mit Erdung über einen Ableitwiderstand. Die Werkzeuge müssen ebenfalls aus einem antistatischen Material bestehen bzw. leitend sein. Alle Geräte für Reparaturzwecke sind zu erden. Dies gilt beispielsweise auch für einen Lötkolben, dessen Erdung über einen Widerstand durchgeführt wird. Bei hoher Arbeitsfrequenz der Bauelemente gelangen beim Umschalten Stromspitzen auf die Betriebsspannungsleitung. Bei der Schaltungsentwicklung muss daher gesorgt werden, dass alle Spannungsversorgungen direkt am Versorgungsanschluss des IC's durch einen Kondensator abgeblockt sind. Um die Einkopplung von Fremdsignalen zu vermeiden, ist es weiterhin notwendig, dass keine langen Leiterbahnen bei der Entwicklung eines Layouts verlegt werden.

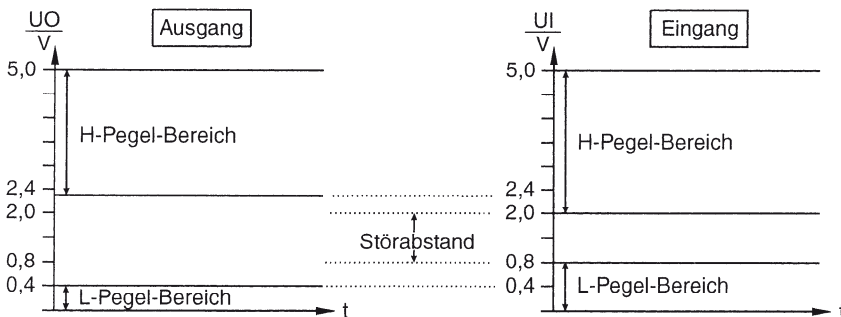
## 3 Daten und Begriffe der Logikschaltungen

### 3.1 Grenz- und Kenndaten

Grenzdaten sind absolute Grenzwerte. Bei Überschreitung dieser Werte kann die integrierte Schaltung zerstört werden. Kenndaten sind Mittelwerte, die durch Angabe eines garantierten Streubereiches (worst case) ergänzt wurden.

### 3.2 Pegel

H- und L-Pegel sind bestimmten Spannungsbereichen zugeordnet, die eingehalten werden müssen, um die logische Funktion zu gewährleisten. Für Ein- und

Bild II-2  
Pegelwerte und  
Störabstand

Ausgang einer Schaltung gelten unterschiedliche Pegelwerte. Bild II-2 veranschaulicht dies am Beispiel eines Standard-TTL-Bausteins. Die Schaltung erkennt „L“ von 0 ... 0,8 V ( $U_{IL}$ ) und „H“ von 2 V ... 5 V ( $U_{IH}$ ). Liefern muss die Schaltung für „L“ 0 ... 0,4 V ( $U_{OL}$ ) und für „H“ 2,4 V ... 5 V ( $U_{OH}$ ) (siehe auch Tabelle II-1). Der Bereich zwischen „L“ und „H“ ist nicht definiert. Man spricht hier auch von dem „verbotenen Bereich“.

In Datenbüchern wird häufig die Übergangskennlinie, also die Abhängigkeit der Spannung  $U_O$  ( $U$  Output) von  $U_I$  ( $U$  Input), angegeben (Bild II-3). Die Schraffierung kennzeichnet hier den verbotenen Bereich. Mit der angegebenen Messschaltung kann diese Kennlinie statisch aufgenommen werden.

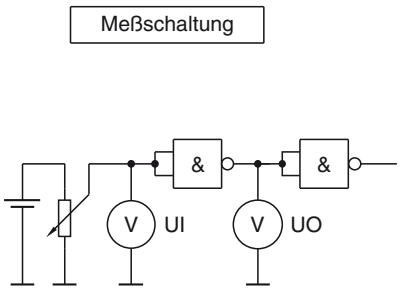
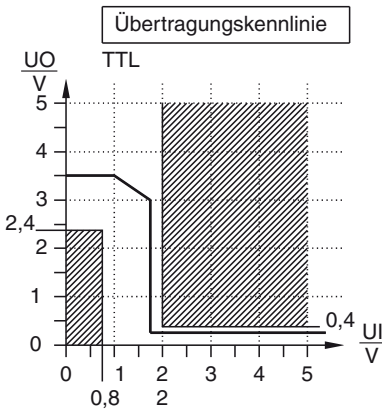


Bild II-3  
Übertragungskennlinie und Meßschaltung

3.3 Störsicherheit

Unter *statischer* Störsicherheit versteht man die Sicherheit gegen eingekoppelte Störspannungen, deren Einwirkung zeitlich größer als die Gatterlaufzeit ist. Man spricht hier auch vom *Störabstand*. Störspannungen bis zur Größe des Störspannungsabstandes haben keinen Einfluss auf die logische Funktion der Schaltung. Bei Standard-TTL beträgt der statische Störspannungsabstand 1,2 V (siehe Bild II-2). Unter *dynamischer* Störsicherheit versteht man die Sicherheit gegen Störspannungen mit kürzeren Zeiten als die Gatterlaufzeit. Die Werte des dynamischen Störabstandes sind von der Dauer des Störimpulses, der Temperatur und der jeweiligen Schaltung abhängig.

3.4 Lasteinheit

Um die Pegelwerte einhalten zu können, darf das Gatter nur vorgegebenen Belastungen ausgesetzt sein. Jeder Eingang eines Gatters belastet das vorherige Gatter. Bei Standard-TTL fließt bei L ein maximaler Strom von 1,6 mA aus dem Gatter ( $I_{IL} = -1,6 \text{ mA}$ ). Diese Stromgröße wird mit Fan IN = 1 (Eingangslastfaktor FI) bezeichnet. Bei H fließt ein max. Strom von 40  $\mu\text{A}$  in das Gatter ( $I_{IH} = 40 \text{ } \mu\text{A}$ ). Die Stromrich-

tung zwischen zwei Gattern bei unterschiedlichen Pegeln ist in Bild II-4 deutlich hervorgehoben. Häufig liegen die gemessenen Stromwerte weit unter den maximal zulässigen Werten. Da  $I_{QL \text{ max}}$  16 mA beträgt, dürfen unter worst case-Bedingungen höchstens 10 Gattereingänge einen Ausgang belasten. Die Ausgangsbelastung (Ausgangslastfaktor) nennt man *Fan Out*. Hiermit wird ausgesagt, mit wieviel Lasteinheiten ein Ausgang belastet werden darf. Für Standard-TTL gilt ein Fan out von 10 und für CMOS ein Fan out von 50. Sollen mehr als 10 Eingänge an einen Standard-TTL-Ausgang angeschlossen werden, müssen Treiberstufen eingesetzt werden.

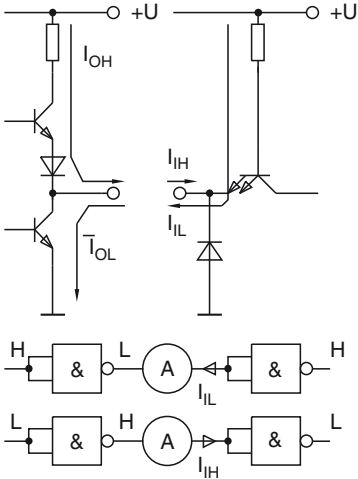


Bild II-4 Stromrichtung zwischen den Gattern und Kennzeichnung der Ströme

3.5 Temperaturbereich

Bei der Angabe des Temperaturbereichs wird zwischen *Lagerungstemperatur* und zulässiger *Umgebungstemperatur im Betrieb* unterschieden. So liegt



beispielsweise die Lagerungstemperatur bei IC's mit Kunststoffgehäusen zwischen 55 °C bis 125 °C, die zulässige Umgebungstemperatur im Standardbereich bei der 74LS-Serie von 0 °C bis 70 °C und bei den MOS-Typen der 4000B-Serie von -40 °C bis 85 °C.

### 3.6 Gatterlaufzeit

Ändert man den Eingangspegel einer Gatterschaltung, z.B. eines Inverters, von L nach H, so dauert es eine gewisse Zeit, bis der Ausgang auf die Eingangsänderung reagiert. Das Zeitverhalten gibt die Gatterlaufzeit ( $t_{pd}$  = propagation delay time) wieder, wobei die Angabe sich auf die Differenz der Ein- und Ausgangsflanke in 50%iger Höhe bezieht. Bei Aufbau von Schaltungen mit *Mehrebenen* können durch unterschiedliche Laufzeiten fehlerhafte und unerwünschte Verhaltensweisen wie kurzzeitige Impulse (Glitches) am Ausgang auftreten. Im Bild II-5 durchlaufen die Signale A und B drei Gatter, während C zwei und D nur ein Gatter durchläuft. Durch Umorganisation der Schaltung kann erreicht werden, dass die Eingangssignale gleiche Zeiten durchlaufen. Oft wird auch statt der Signallaufzeit die maximale Schaltfrequenz angegeben.

Für kurze Impulse kann die Gatterlaufzeit, wie dargestellt ist, ausgenutzt werden. Das Zeitliniendiagramm beschreibt die Pegel an den einzelnen Gattern. Der Ausgang B ist zunächst „H“, da der Eingang A L-Pegel führt. Nimmt A H-Pegel an, schaltet B nach der Verzögerungszeit auf L. C schaltet nach L und der nachfolgende Inverter G3 gibt den Impuls mit der Impulszeit einer Verzögerungszeit heraus. Wünscht man Impulszeiten mehrerer Gatterlaufzeiten, sind zusätzlich jeweils zwei Inverter zwischen G1 und G2 einzusetzen.

### 3.7 Verlustleistung

Bei digitalen Schaltungen wird häufig die Verlustleistung pro Gatter angegeben. Hierbei handelt es sich um einen Mittelwert, der davon ausgeht, dass der Gatterausgang abwechselnd L- und H-Pegel führt. Bei den einzelnen Familien gibt es erhebliche Unterschiede, wie auch dem Bild II-6 entnommen werden kann. Vergleicht man ferner die Stromaufnahme eines Standard-TTL-Bausteins, sind auch deutliche Unterschiede der Stromwerte zu erkennen, wenn alle Ausgänge einmal L- und einmal H-Pegel führen. Die größte Verlustleistung tritt im dynamischen Betrieb

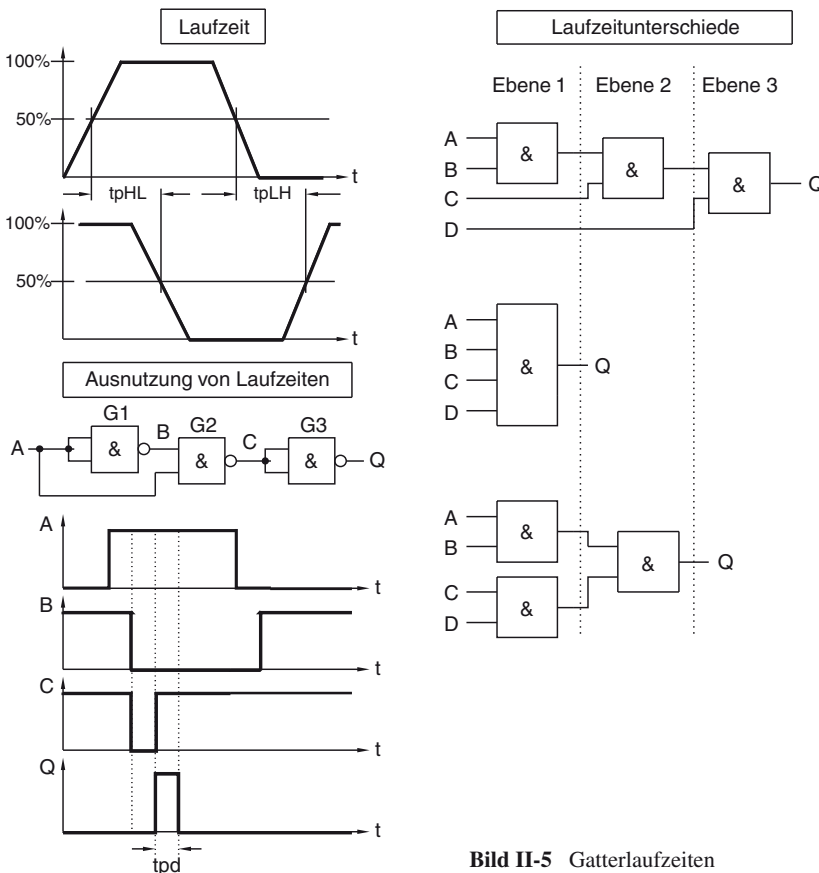


Bild II-5 Gatterlaufzeiten

bei hohen Frequenzen auf. Der Schaltungsentwickler sollte beim Einsatz digitaler Schaltungen darauf achten, dass die Verlustleistung der eingesetzten Bausteine möglichst gering ist. Hierdurch können die Netzteile klein und kompakt dimensioniert werden, und die geringere Wärmeentwicklung der Bauelemente erspart aufwendige Kühlmaßnahmen. Ein Beispiel hierfür ist die 3,3 V-Technologie. In diesem Zusammenhang ist auch der Begriff *Speed-Power-Product* zu nennen, der das Produkt aus Geschwindigkeit und Leistungsaufnahme eines Gatters in Verbindung mit Energiebilanzen angibt.

4 TTL-Familie

4.1 Eigenschaften und Kenndaten

Bild II-6 zeigt die Mitglieder-TTL-Familie im Vergleich von Gatterlaufzeit und Verlustleistung. In Tabelle II-1 sind ihre Kenndaten aufgelistet.

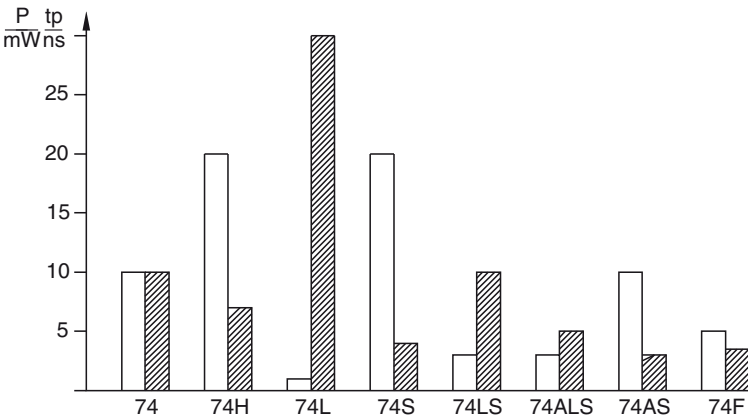


Bild II-6  
Verlustleistung und  
Gatterlaufzeit

Die Bausteine der einzelnen Untergruppen sind *PIN-kompatibel* (gleiche Funktion und Anschlussbelegung) und besitzen als gemeinsame Kenndaten die Betriebsspannung, Pegelwerte und den Temperaturbereich. Unterschiede bestehen vor allem in der Gatterlaufzeit und der Verlustleistung. Bei der Low-Power- und High-Speed-Untergruppe sind die internen Widerstandswerte gegenüber Standard verändert, um die Leistungsaufnahme geringer zu machen (Low) und die Geschwindigkeit zu erhöhen (High). Die beiden Eigenschaften verlaufen allerdings gegensätzlich. Weitverbreitet sind die Low-Power-Schottky-Typen mit ihrer gegenüber Standard-TTL geringeren Leistungsaufnahme und etwa gleicher Geschwindigkeit. Bild II-7 zeigt einige LS-Bausteine aus dem umfangreichen Herstellerangebot mit ihren Anschlussbelegungen. Advanced-Schottky und Advanced-Low-Power-Schottky sind verbesserte Nachfolgetypen sowie die FAST-Serie, die gegenüber der LS-Serie ihre Gatterdurchlaufzeit erhöhen konnte.

Tabelle II-1 Kennwerte ausgewählter TTL-Serien

| Kennwerte                | 74  | 74S | 74LS | 74ALS | 74F |
|--------------------------|-----|-----|------|-------|-----|
| Betriebsspannung (V) ±5% | 5   | 5   | 5    | 5     | 5   |
| UIL (V) <                | 0,8 | 0,8 | 0,8  | 0,8   | 0,8 |
| UIH (V) >                | 2   | 2   | 2    | 2     | 2   |
| UOL (V) <                | 0,4 | 0,5 | 0,5  | 0,5   | 0,5 |
| UOH (V) >                | 2,4 | 2,7 | 2,7  | U-2V  | 2,7 |
| IOL (mA) max             | 16  | 8   | 20   | 30    | 24  |
| tp (ns)                  | 10  | 9   | 3    | 5     | 3   |
| P (mW)                   | 10  | 2   | 20   | 1,2   | 4   |

nach Unterlagen der Firma Philips  
Abkürzungen: UIL Eingangsspannung für L-Pegel; UIH Eingangsspannung für H-Pegel; UOL Ausgangsspannung für L-Pegel; UOH Ausgangsspannung für H-Pegel; IOL Ausgangsstrom bei L-Pegel

4.2 Standard-TTL

Bei den Standardbausteinen der TTL-Familien haben sich folgende Funktionseinheiten herausgebildet:

- Grundgatter wie z.B. NICHT (Inverter), UND, ODER, NOR und XOR
- Flipflops wie z.B. RS-Flipflop, D-Flipflop und JK-Flipflop
- Multiplexer und Datenselektoren
- Demultiplexer und Decoder
- Rechenschaltungen wie z.B. Addierer
- Komparatoren
- Zähler und Frequenzteiler
- Schieberegister
- Treiber
- Sonderschaltungen wie z.B. Schmitt-Trigger und Zeitglieder

Schaltungen der Standardserie (Bezeichnung 74xx) bestehen aus *bipolaren Transistoren*, die als Schalter arbeiten. Sie sind so dimensioniert, dass sie beim Durchschalten *übersteuert* werden und so voll in den Sättigungsbereich gelangen (gesättigte Logik). Die TTL-Familie ist die Weiterentwicklung der DTL (Dioden-Transistor-Logik) und RTL (Widerstands-

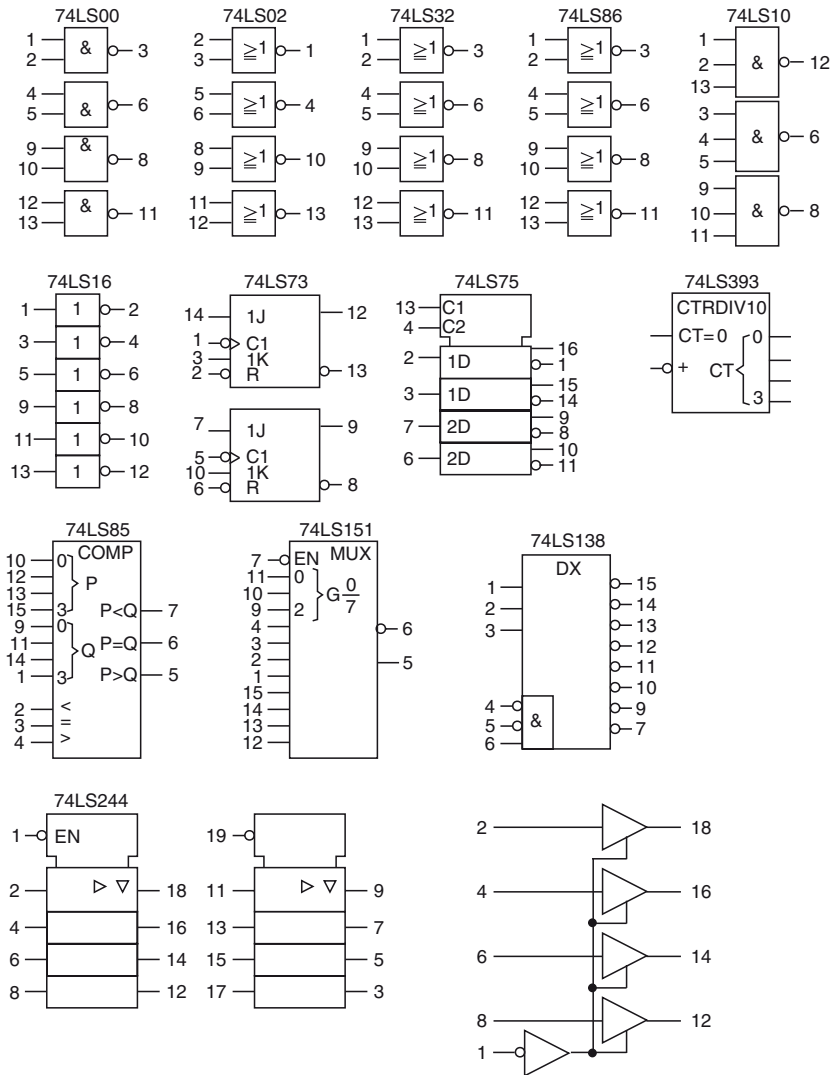


**Bild II-7**  
Digitalbausteine mit  
Anschlussbelegung

Transistor-Logik). Drei typische Vertreter der Standardserie dienen als Beispiel.

■ **Beispiel 1:** Baustein IC 7400

Bild II-8 zeigt die Innenschaltung des 14poligen IC's und den Aufbau eines NAND-Gatters. Hier erkennt man die Merkmale der weitverbreiteten Logik mit einem *Multimitter-Transistor* im Eingang (V1) und einer Gegentaktendstufe (Totem-Pol-Stufe) am Ausgang (V3, V4). Von der Funktion her lässt sich diese Schaltung als Weiterentwicklung der RTL (Widerstands-Transistor-Logik) und der DTL (Dioden-Transistor-Logik) ansehen.

Wenn jetzt ein oder beide Eingänge der Schaltung auf Masse liegen (L-Pegel), kann der Transistor V2 nicht durchschalten. Damit ist auch V4 gesperrt, und V3 schaltet durch und erzeugt einen H-Pegel am Ausgang. Liegen beide Eingänge auf +5 V (H-Pegel), schaltet V2 durch, und am Ausgang entsteht ein L-Pegel, da auch V3 durchschaltet. Transistor V4 ist dann gesperrt.

An dieser Schaltung erkennt man auch die Auswirkung offener Eingänge auf den Ausgang der Schaltung. Werden beide Eingänge offen gelassen, fließt über die Basis-Kollektor-Diode des Multiemitter-Transistors Strom in den Transistor V2 und schaltet die-

sen und auch V4 durch. Offene Eingänge wirken wie anliegende H-Pegel. Man legt daher bei NAND- und UND-Gattern die nichtbenötigten Eingänge auf +5 V und bei ODER- und NOR-Gattern auf 0 V.

Müssen Ausgänge verschiedener Gatter logisch miteinander verknüpft werden, ist dies mit *Totem-pole*-Schaltungen nicht möglich. Gatter mit solchen Gegentaktendstufen dürfen an ihren Ausgängen nicht parallel geschaltet werden, da ein Kurzschluss entstehen kann, wenn ein Gatterausgang „L“ und der andere „H“ liefert. Abhilfe schaffen Gatter mit offenem Kollektor (Open Collector, o. C., siehe Beispiel 2).

■ **Beispiel 2:** Baustein IC 7401

Im Bild II-9 sind die Innenschaltung des Baustein 7401 und der Aufbau eines Gatters dargestellt. Ein Lastwiderstand  $R_L$  muss extern eingebaut werden, da der Ausgang ohne Lastwiderstand keinen Pegel ausgeben kann.

Stufen mit offenem Kollektor (o. C.) lassen am  $R_L$  Betriebsspannungen von 15 V oder 30 V zu. TTL-Treiber können damit Kleinverbraucher direkt ansteuern. Gatter mit o. C. dürfen mit ihren Ausgängen parallel geschaltet werden. Der Ausgang erreicht nur dann H-Pegel, wenn alle Eingänge auf H-Pegel lie-

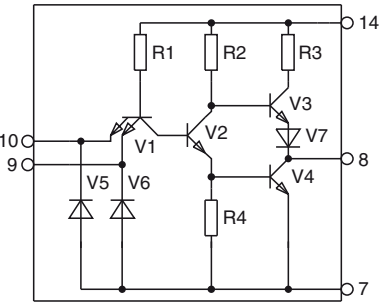
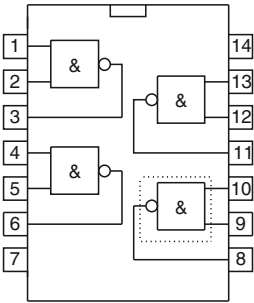


**Bild II-8**  
Baustein 7400

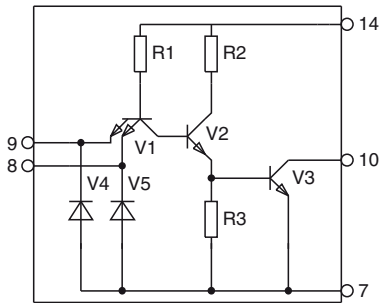
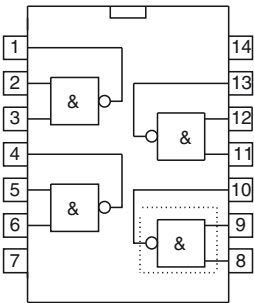


**Bild II-9**  
Baustein 7401

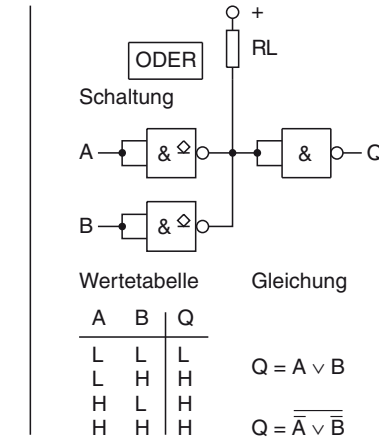
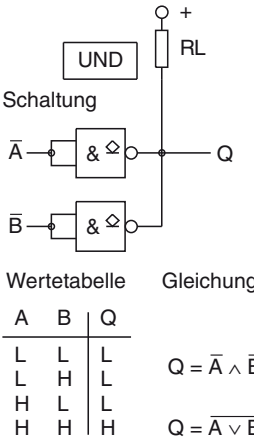


**Bild II-10**  
Verdrahtete UND- und  
ODER-Schaltung

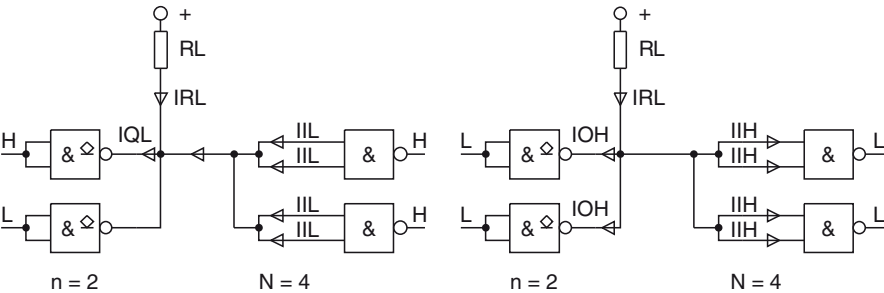


**Bild II-11** Stromrichtung und -größe bei unterschiedlichen Ansteuerungen

gen; ansonsten liegt L-Pegel am Ausgang an. Man spricht von einer *verdrahteten UND-Schaltung* (Wired AND). Wird der Ausgang mit einem nachfolgenden Inverter verbunden, ergibt sich eine *verdrahtete ODER-Verknüpfung* (Wired OR). Bild II-10 zeigt die beiden genannten Schaltungen und verdeutlicht die Funktion anhand der Wertetabelle und der Gleichungen.

Der Wert des Kollektorwiderstandes lässt sich für eigene Bedürfnisse berechnen oder man nutzt für Standardanwendungen die Tabellen der Hersteller (Tabelle II-3). Das Berechnungsbeispiel bezieht sich auf die Schaltung Bild II-11.

$$RL > \frac{U_{\max} - U_{OL}}{I_{OL_{\max}} - N \cdot I_{IL}}$$

$$RL < \frac{U_{\min} - U_{OH}}{n \cdot I_{OH} + N \cdot I_{IH}}$$

(II.1)

$$RL > \frac{5,25 \text{ V} - 0,4 \text{ V}}{16 \text{ mA} - 4 \cdot 1,6 \text{ mA}}$$

$$RL < \frac{4,75 \text{ V} - 2,4 \text{ V}}{2 \cdot 250 \text{ uA} + 4 \cdot 40 \text{ uA}}$$

$$RL > 505 \text{ Ohm}$$

$$RL < 3560 \text{ Ohm}$$

■ **Beispiel 3:** Baustein IC 7402

Liegt an beiden Eingängen der Schaltung Bild II-12 ein L-Pegel, wird V3 und V4 gesperrt und damit auch V6. V5 schaltet durch und erzeugt einen H-Pegel am Ausgang. Bei Anliegen eines H-Pegels an nur einem der Eingänge entsteht am Ausgang ein L-Pegel. Die Schaltung erfüllt damit die NOR-Funktion.

Tabelle II-3 Ermittlung des Kollektorwiderstandes

|   | RL <sub>max</sub> |      |      |      |      |      |      | RL <sub>min</sub> |
|---|-------------------|------|------|------|------|------|------|-------------------|
|   | N                 |      |      |      |      |      |      |                   |
| n | 1                 | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    |                   |
| 1 | 8100              | 4350 | 2970 | 2260 | 1820 | 1520 | 1310 | 337               |
| 2 | 7120              | 4050 | 2830 | 2170 | 1760 | 1480 | 1280 | 379               |
| 3 | 6350              | 3790 | 2700 | 2100 | 1710 | 1450 | 1250 | 433               |
| 4 | 5730              | 3560 | 2580 | 2020 | 1660 | 1410 | 1230 | 505               |
| 5 | 5220              | 3350 | 2470 | 1950 | 1620 | 1380 | 1200 | 607               |
| 6 | 4790              | 3170 | 2370 | 1890 | 1570 | 1350 | 1180 | 758               |
| 7 | 4430              | 3010 | 2280 | 1830 | 1530 | 1320 | 1150 | 1110              |
| 8 | 4120              | 2860 | 2190 | 1780 | —    | —    | —    | 1515              |
| 9 | 3850              | —    | —    | —    | —    | —    | —    | 3030              |

nach Datenbuch der Firma ITT

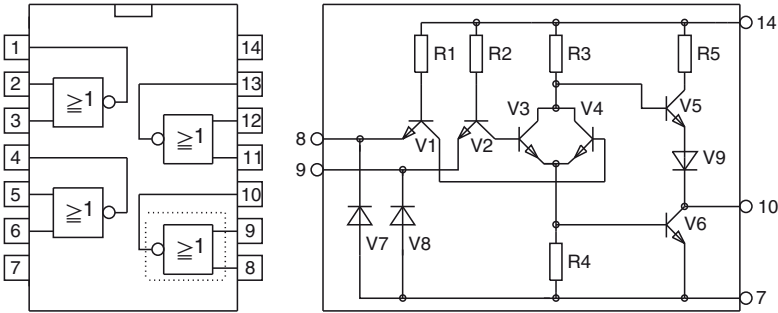


Bild II-12  
Baustein IC 7402

4.3 Schaltungen mit 3-state

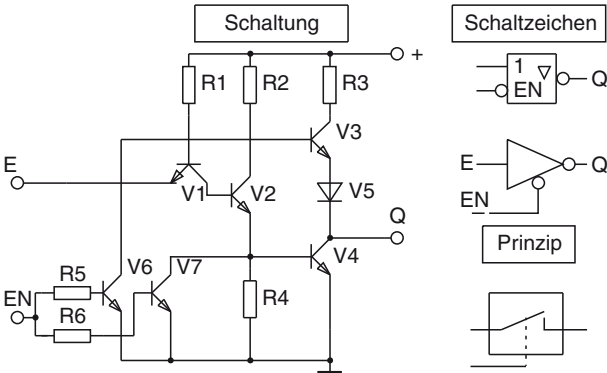


Bild II-13  
3-state-Gatter

Tristate-Schaltungen besitzen außer den Pegelausgaben L und H noch eine dritte Möglichkeit. Sie sind in der Lage, mit einem Steuereingang (EN Enable = Freigabe) einen Ausgang hochohmig zu schalten. Damit können diese Schaltungen in parallelen Bussystemen eingesetzt werden. In der Hauptsache handelt es sich bei Einsatz dieser Schaltungen um Leistungstreiber, Richtungstreiber, Zwischenspeicher und Speicherschaltungen. In der Prinzipdarstellung (Bild II-13) schaltet ein H-Pegel am Eingang EN die Transistoren V6 und V7 durch und sperrt damit die beiden Endstufentransistoren V3 und V4. Der Ausgang Q besitzt damit keinen definierten H- oder L-Pegel mehr. Er ist praktisch abgeschaltet; man spricht auch davon, dass der Ausgang hochohmig ist.

4.4 Schottky-TTL und Low-Power-Schotky

Schottky-Dioden besitzen einen Metall-Halbleiterübergang und Schwellspannungen, die zwischen denen von Germanium- und Silizium-Dioden bei ca. 0,4 V liegen. Ein Schottky-TTL-Gatter besitzt wesentlich kürzere Schaltzeiten als ein Standardgatter; es hat aber den Nachteil, dass die Leistungsaufnahme sehr hoch (20 mW) ist. Weitverbreitet sind heute die Bausteine der LS-Serie (Low-Power-Schotky) wegen der geringeren Leistungsaufnahme von etwa 2 mW pro Gatter und des höheren Fan out gegenüber Standard Typen. Die Schaltzeiten dieser Serie liegen bei 9 ns. Bild II-14 zeigt ein Gatter der Schottky-TTL-Serie.

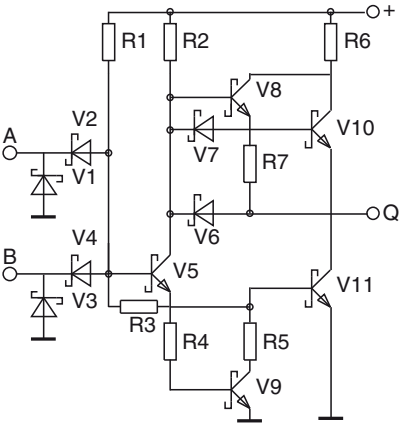


Bild II-14 Low-Power-Schottky-Gatter

5 Emitttergekoppelte Logik

Kennzeichen der emitttergekoppelten Logik (Emitter Coupled Logic) ist der Differenzverstärker im Eingang und die Auskopplung über den Emitter (Bild II-15). Aufgrund des technologischen Aufbaus können ECL-Schaltungen auch zwei Ausgänge führen, deren Pegel invers zueinander sind. Man spricht dann

von einem AND/NAND-Gatter oder OR/NOR-Gatter. Bausteine der ECL-Familie sind bedeutend schneller als andere Bausteinfamilien. Sie erreicht Schaltzeiten von kleiner 1 ns. Der Grund ist die Konstantstromquelle des Differenzverstärkers, der die Transistoren nicht in die Sättigung kommen lässt (ungesättigte Logik). Ein weiterer Vorteil ist der relativ hohe Ausgangslastfaktor von 25. Nachteil dieser Technik sind hohe Verlustleistungen bis 40 mW. Auffallend sind die drei Betriebsspannungen UEE, UCC1 und UCC2. UCC1 dient als Hilfsspannung für Abschlusswiderstände. Häufig werden aber die beiden Anschlüsse UCC1 und UCC2 gemeinsam auf Masse zusammengelegt. Tabelle II-4 fasst die Kenndaten dieser Baugruppe zusammen.

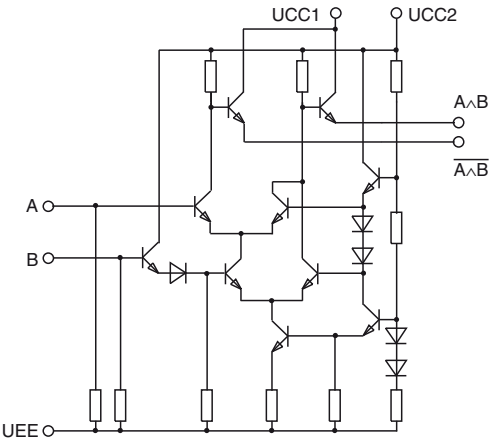


Bild II-15 ECL-Gatter mit zwei Ausgängen

Tabelle II-4 Kenndaten

|                      | 10K-Reihe | 100k-Reihe |
|----------------------|-----------|------------|
| Betriebsspannung (V) | – 5,2     | – 4,5      |
| Low-Pegel (V) <      | – 0,81    | – 0,88     |
| High-Pegel (V) >     | – 1,85    | – 1,81     |
| Ausgangsstrom (mA)   | –50       | –55        |
| tp (ns)              | 2         | 0,80       |
| P (mW)               | 25        | 40         |

6 Integrierte MOS-Schaltungen

Der Vorteil gegenüber Schaltungen in bipolarer Technik ist der geringere Leistungsbedarf, der allerdings mit zunehmender Frequenz steigt. MOS-Schaltungen (MOS = Metal Oxide Semiconductor) sind sehr hochohmig und nehmen praktisch nur im dynamischen Betrieb Leistung auf. Weiter lassen sich hohe Packungsdichten erreichen, und es werden weniger Einzelschritte bei der Herstellung benötigt. Der Nachteil liegt in der Verarbeitungsgeschwindigkeit durch stets vorhandene Streukapazitäten. MOS-Schaltungen sind somit viel langsamer als Standard-

TTL-Schaltungen. Auch hier haben sich unterschiedliche Familien ausgebildet.

6.1 NMOS- und PMOS-Technik

Kennzeichen dieser Schaltungstechnik ist, dass sie entweder nur mit NMOS- oder nur mit PMOS-Typen aufgebaut sind. Das Einsatzgebiet der MOS-Technik liegt bei hochintegrierten Schaltungen wie z.B. der Speichertechnologie. Bild II-16 zeigt das Prinzip eines P- und NMOS-Schalters als Inverter mit der jeweiligen Wertetabelle. Der n-Kanal-Type leitet bei Ansteuerung mit einem H-Pegel und der p-Kanal-Type bei Ansteuerung mit einem L-Pegel.

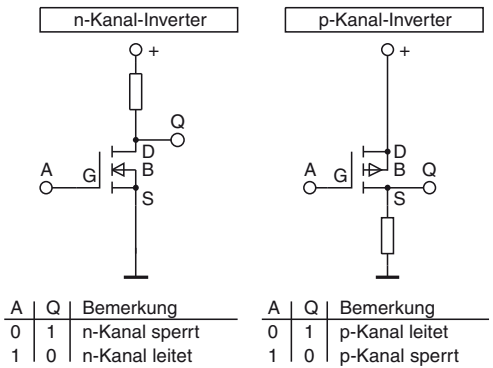


Bild II-16 n-Kanal- und p-Kanal-Schalter

6.2 CMOS

Die CMOS-(Complementary MOS-)Logikfamilie besteht aus N- und P-Kanal-MOS-Transistoren. Bild II-17 verdeutlicht die Funktion am Beispiel eines Inverters. Je nach Ansteuerung ist immer einer der beiden Transistoren leitend. Bei Ansteuerung mit „L“ leitet der p-Kanal V1 und bei Ansteuerung mit „H“ der n-Kanal V2. CMOS-Gatter nehmen praktisch nur im dynamischen Betrieb Leistung auf. Die statische Verlustleistung ist nahezu Null, weil stets einer der beiden Transistoren gesperrt ist und damit kein Strom mehr durch die Schaltung fließt.

Die Betriebsspannung kann zwischen 2 und 15 V liegen.

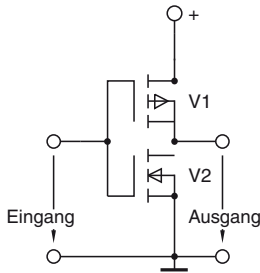


Bild II-17 CMOS-Inverter

Gegenüber MOS-Schaltkreisen ist die Leistungsaufnahme bei verbesserten Schaltzeiten und größerem Störspannungsabstand wesentlich kleiner. Gegenüber bipolarer Technik ist die höhere Integrationsfähigkeit hervorzuheben. Die Pegeländerungen von H nach L und umgekehrt liegen genau bei halber Betriebsspannung. Aufgrund des sehr hohen Eingangswiderstandes werden CMOS-Schaltungen gegen statische Aufladungen mit Schutzschaltungen versehen (Dioden im Ein- und Ausgang). Da die FET's direkt zwischen Betriebsspannung und Masse liegen, wirkt der durchgeschaltete Transistor immer als Lastwiderstand. CMOS-Schaltungen besitzen einen großen Spannungsversorgungsbereich (2 V bis 15 V) und damit je nach Betriebsspannung einen großen Störabstand. Aufgrund der niedrigen Leistungsaufnahme sind CMOS-Schaltungen auch für den Batteriebetrieb gut einsetzbar.

6.2.1 4000-Serie

Bei den CMOS-Typen der 4000-Familie unterscheidet man die ungepufferte Serie A (ältere Serie) und die gepufferte Serie B. Die Ausgänge der B-Serie sind mit Puffern, die aus Doppelinverter bestehen, versehen. Bild II-18 zeigt ein NOR-Gatter beider Typen. Sobald ein Eingang H-Pegel besitzt, wird V1 oder V2 gesperrt und ergibt für den Ausgang Q einen L-Pegel. Nur wenn beide Eingänge mit einem L-Pegel angesteuert werden, leitet V1 und V2, während V3 und V4 gesperrt sind. In diesem Fall führt der Ausgang H-Pegel.

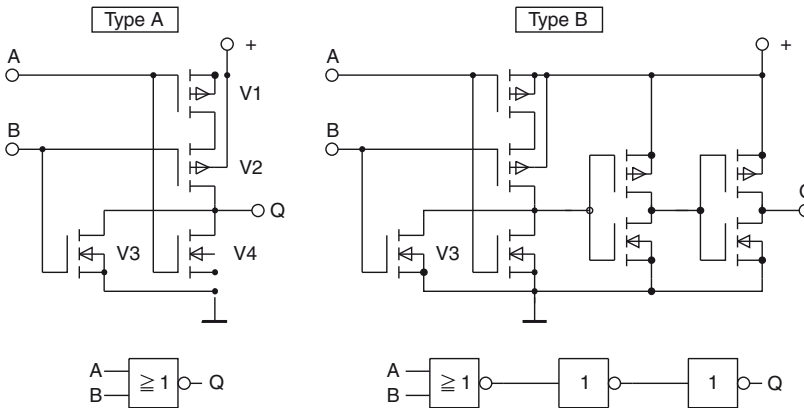


Bild II-18 CMOS-NOR



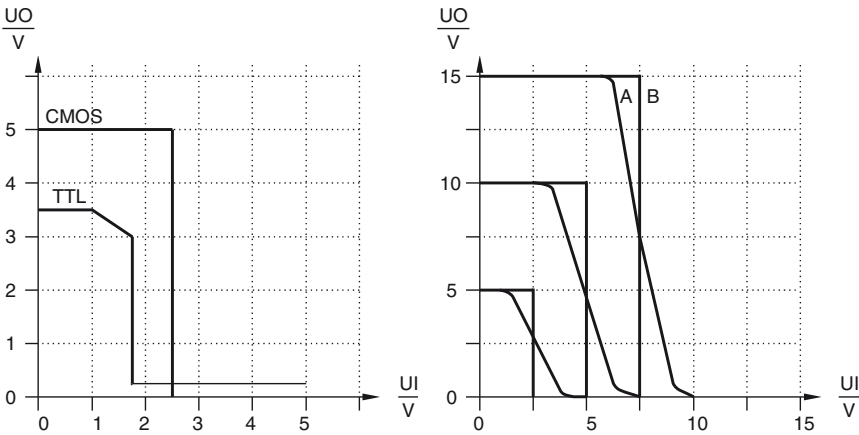


**Bild II-19** Übertragungskennlinie

Bild II-19 vergleicht die Übertragungskennlinien eines Inverters beider Serien bei unterschiedlichen Betriebsspannungen. Das steile Schaltverhalten der B-Serie ist deutlich zu erkennen.

Die Leistungsaufnahme bei unterschiedlichen Frequenzen beschreibt Bild II-20. Erst ab etwa 1 MHz erreichen diese Bauelemente die Verlustleistung von LS-Typen.

Tabelle II-5 gibt die Kenndaten der CMOS-Familie wieder. Bei positiver Logik liegt die Betriebsspannung zwischen +3 V und +15 V. Die Spannung für den H-Pegel muss mindestens 70% und für den L-Pegel mindestens 30% der Betriebsspannung betragen. Offene Eingänge sind nicht zulässig, und unbenutzte Eingänge müssen auf Masse (0) oder Betriebsspannung (1) liegen. CMOS-Gatter dürfen mit ihren Ausgängen nicht parallel geschaltet werden, weil sich je nach Ansteuerung ein undefinierter Ausgangszustand ergibt.

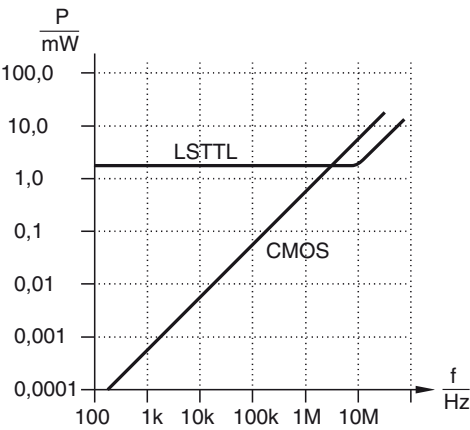


**Bild II-20** Leistungsaufnahme

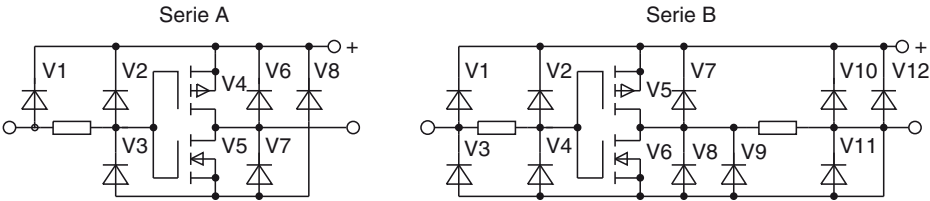


**Bild II-21** Schaltung mit Schutzdioden

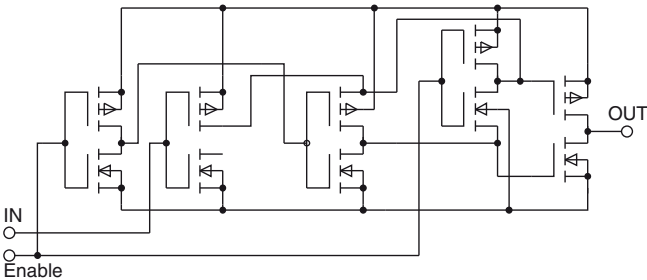


**Bild II-22**  
Schaltung mit 3-state

**Tabelle II-5** Daten der CMOS-Familie

| Betriebsspannung           | 4000B<br>3–15 V | LSTTL<br>5 V ± 5% | HC<br>2–6 V | HCT<br>5 V ± 10% |
|----------------------------|-----------------|-------------------|-------------|------------------|
| Verlustleistung (statisch) | 1 µW            | 2 mW              | 2,5 nW      | 2,5 nW           |
| Verlustleistung (100 kHz)  | 100 µW          | 2 mW              | 75 µW       | 75 µW            |
| Gatterlaufzeit             | 94 ns           | 10 ns             | 8 ns        | 8 ns             |
| max. Taktfrequenz          | 4 MHz           | 33 MHz            | 55 MHz      | 55 MHz           |
| Ausgangstreiberstrom       | 0,5 mA          | 8 mA              | 4 mA        | 4 mA             |

Die Ein- und Ausgänge dieser Schaltungen sind mit Schutzdioden gegen statische Überspannungen gesichert (Bild II-21).

Sollen mehrere Bausteine trotzdem eine gemeinsame Signalleitung bekommen, müssen, wie bei den TTL-Bausteinen, 3-state-Schaltungen benutzt werden. Nach Bild II-22 wird die Schaltung bei EN = L in den hochohmigen Zustand versetzt. Ist EN = H, wird der anliegende Eingangspegel (L oder H) zum Ausgang Q übertragen.

**6.2.2 CMOS-Schalter**

Der bilaterale CMOS-Schalter besteht aus einem p- und n-Kanal-MOS. Durch einen L-Pegel am Steueranschluss E0 werden beide Transistoren mit den Anschlüssen Y0 und Z0 leitend. Durch einen

anliegenden H-Pegel sperren beide Transistoren. Der Schalter kann für analoge und digitale Signale eingesetzt werden. Eingang und Ausgang können beliebig zugeordnet werden. Eine Signalverstärkung erfolgt allerdings nicht. Bild II-23 zeigt als Beispiel den Baustein IC 4016 mit seiner Anschlussbelegung und den Aufbau eines der vier Schalter.

CMOS-Schaltungen müssen aufgrund der extrem hohen Eingangswiderstände (>100 MOhm) gegen statische Aufladungen geschützt werden. Sie besitzen daher im Eingang Schutzschaltungen, die je nach Typ und Hersteller unterschiedlich sind. Wie schon bei der TTL-Familie, bieten auch hier die Hersteller unterschiedliche Bausteine an. Bild II-24 zeigt eine kleine Auswahl gebräuchlicher IC's.

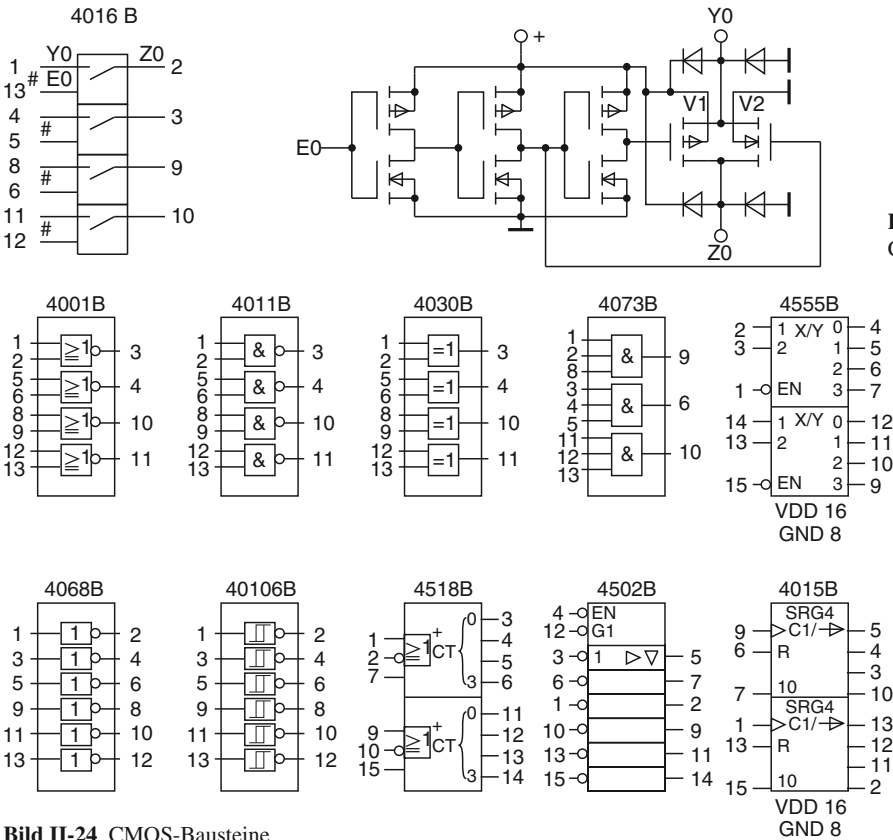


**Bild II-23**  
CMOS-Schalter

**Bild II-24** CMOS-Bausteine

6.2.3 High-Speed-CMOS

Die HC/HCT-Logikreihe (High-Speed-CMOS/HC-TTL kompatibel) verbindet die Vorteile der bipolaren Technik mit ihrer hohen Schaltgeschwindigkeit und die geringere Leistungsaufnahme der Standard-CMOS-Serie (Tabelle II-3). Dadurch sind diese Bausteine den 74LS- und 4000-Typen überlegen. Die 74HCT-Serie ist TTL-kompatibel und kann bei einer Betriebsspannung von 5 V jeden LS-Typ ersetzen, da eine zusätzliche Kompatibilität der Spannungspegel vorliegt (Tabelle II-6). Zu beachten ist aber, dass der Ausgangstreiberstrom nur die Hälfte des LSTTL beträgt. Die 40xxHC/HCT-Serie ist pinkompatibel zur 4000-Serie. Bild II-25 zeigt die Eingangsschaltung einer HCT-Version und die Übertragungskennlinien bei einer Betriebsspannung von 5 V.

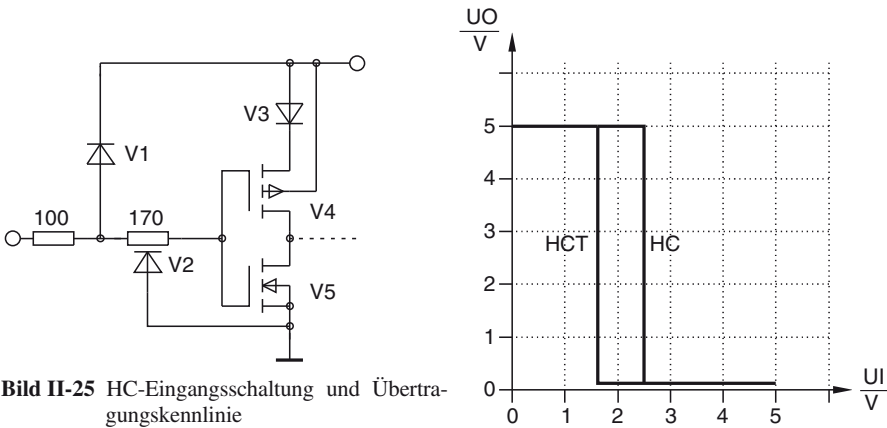


Bild II-25 HC-Eingangsschaltung und Übertragungskennlinie

Die beiden Widerstände im Eingang und V1 und V2 dienen als Schutzschaltung bei elektrostatischen Entladungen. Im Gegensatz zu LS-Typen besitzen HC-Typen einen größeren Versorgungsspannungsbe-

reich (4 V bis 6 V). Für die Übergänge von „L“ nach „H“ und umgekehrt liegen die Schaltspannungen bei 30% bzw. 70% der Betriebsspannung. Bild II-26 vergleicht die Betriebsspannung und die Pegelbereiche der gängigsten Typen.

6.2.4 BICMOS

BICMOS (Bipolar CMOS) vereinigen bipolare mit CMOS-Technik. Durch die CMOS-Technik wird die Leistungsaufnahme wesentlich gesenkt und durch die bipolare Technik die Geschwindigkeit erhöht. Zu dieser Serie zählen die Bausteine 74BCxx und 74ABTxx. Während bei den BC-Typen die Gatterlaufzeiten bei einer Betriebsspannung von 5 V bei 3,8 ns liegen, bewegen sich die Gatterlaufzeiten bei ABT unter 3 ns. Die Bauelemente sind funktions-

und pinkompatibel zu LS-TTL oder FAST (74F/74S/74HC). Relativ neu ist die Entwicklung und das Angebot von Niederspannungsschaltkreisen; sogenannte 3,3 V-Logikschaltkreise (Low Voltage).

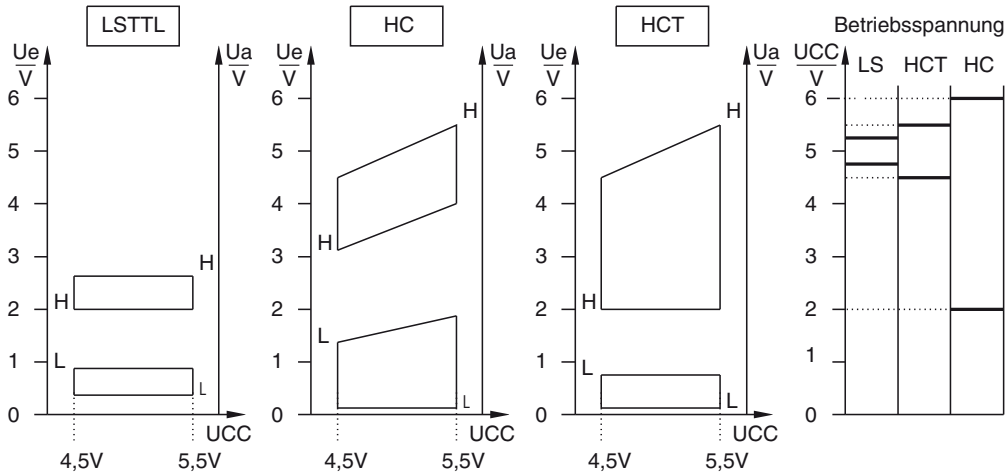


Bild II-26 Betriebsspannungen und Pegelbereiche

Die Verlustleistung dieser Bausteine gegenüber der 5 V-Technik ist etwa um 1/3 niedriger.

7 Interfaceschaltungen

Interfaceschaltungen passen die Logikfamilien untereinander an. Das ist bei unterschiedlichen Pegelwerten notwendig. Sie verbinden auch Logikschaltungen mit weiteren elektronischen Systemen. Die Verbindung von CMOS zu TTL lässt sich über Puffer realisieren und von TTL nach CMOS über einen Pull-up-Widerstand realisieren. Bei 5 V Betriebsspannung ist auch eine direkte Kopplung möglich (Tabelle II-6). Bild II-27 zeigt Beispiele, bei denen die Logikfamilien mit unterschiedlichen Betriebsspannungen betrieben werden.

Der Pull-up-Widerstand  $R_p$  beträgt 2 bis 10 k $\Omega$ m bei der Umsetzung von TTL nach Standard-CMOS. Für die Umsetzung von Standard-CMOS mit einer Betriebsspannung von 6 V bis 15 V nach 74HC ist ein zusätzlicher Umsetzer (4049/50B) beispielhaft eingesetzt. Das 74HC-Standard-CMOS-Interface wurde zum einen mit einem Transistor und zum anderen mit einem Umsetzer (TC5020BP) erreicht.

8 Anwendungsspezifische integrierte Schaltungen

8.1 Allgemeines

Um eine gewünschte Schaltung zu realisieren, kann bei der Entwicklung digitaler Systeme auf Standard-

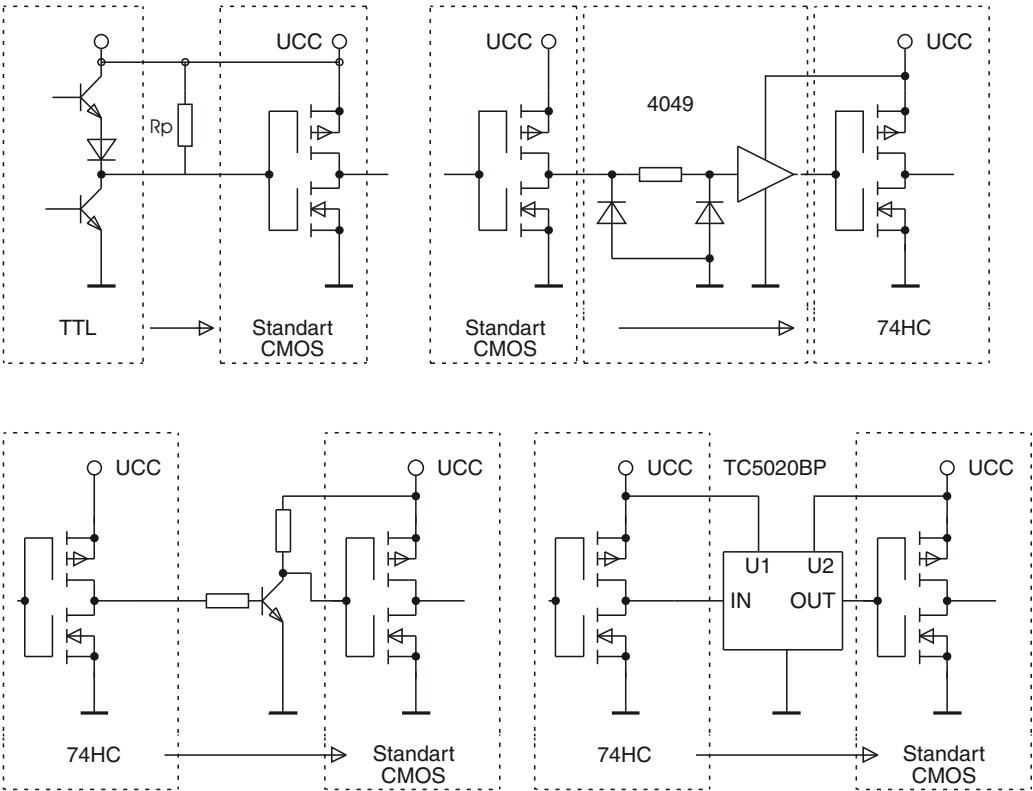


Bild II-27 Interface-Schaltungen

Nach Datenblatt der Firma Toshiba

Tabelle II-6 Anpassung unterschiedlicher Familien bei 5V Betriebsspannung

| von          | zu | 74HC/5 V           | 74HCT  | 4000B/5 V          | 4000B/6–15 V | TTL    |
|--------------|----|--------------------|--------|--------------------|--------------|--------|
| 74HC/5 V     |    | direkt             | direkt | direkt             | Puffer       | direkt |
| 74HCT        |    | direkt             | direkt | direkt             | Puffer       | direkt |
| 4000B/5 V    |    | direkt             | direkt | direkt             | Puffer       | direkt |
| 4000B/6–15 V |    | Puffer             | Puffer | Puffer             | direkt       | Puffer |
| TTL          |    | Pull-up-Widerstand | direkt | Pull-up-Widerstand | Puffer       | direkt |

bausteine der unterschiedlichen Logikfamilien zurückgegriffen werden. Mit ihnen werden Baugruppen geschaffen, deren Bausteine durch Signalverbindungen jeweils miteinander verbunden sind. Jeder Baustein benötigt eine eigene Spannungsversorgung. Die Größe der Baugruppe ist jeweils von der Komplexität ihrer Aufgabe abhängig. Soll der Platzbedarf reduziert werden, werden *anwendungsspezifische integrierte Schaltungen* (ASIC's = Application Specific IC) gewählt. Sie besitzen eine höhere Integrationsdichte und bei Reduzierung der Systemverlustleistung eine geringere Ausfallrate in Verbindung mit hoher Flexibilität. Anwendungsspezifische integrierte Schaltungen können in zwei Hauptgruppen unterteilt werden, zum einen in die Gruppe der *kundenspezifischen IC's* (Custom IC) mit den Bereichen der *halbkundenspezifischen* (Semi Custom) und den *vollkundenspezifischen* (full custom) Schaltungen und zum anderen in die Gruppe der programmierbaren Logikbausteine (PLD = Programmable Logic Device). Das für den Anwendungsfall notwendige Systemwissen wird vom Anwender selbst eingebracht oder er nutzt Hersteller-Design-Zentren, die durch Beratung und gezielte Unterstützung eine optimale Lösung anstreben.

8.2 Kundenspezifische IC's

Bei den kundenspezifischen IC's wird nach Full-custom- und Semi-custom-Bausteinen unterschieden. Der Full-custom-Baustein wird vom Hersteller nach den Kundenanforderungen entwickelt und hergestellt.

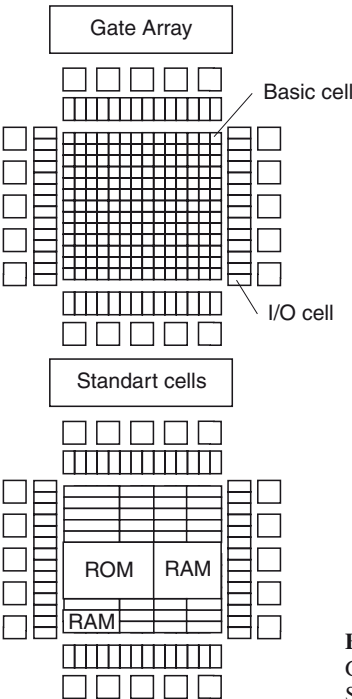


**Bild II-28**  
Gate-Array und  
Standard Cells

Bei einer relativ langen Entwicklungszeit von über einem Jahr und dem hohen Fertigungsaufwand sind solche Bausteine nur für Großkunden mit großen Produktionsmengen wirtschaftlich. Semi-custom-Bausteine umfassen die Typen *Gate-Arrays* und *Cell-Arrays* oder *Standard Cells* (Bild II-28). Sie sind von den Herstellern als Gruppen von Gatterbausteinen und Logikzellen aufgebaut.

Ausgangsbasis der Gate-Arrays sind vorgefertigte Grundbausteine aus vielen P- und N-Kanal-MOS-Transistoren, die als Gatter aufgefasst werden können. Nach Wünschen des Kunden werden die Basiszellen zu einer Logikschaltung entsprechend verdrahtet. Erste Muster für den Kunden sind schon nach wenigen Wochen verfügbar, so dass die Entwicklungskosten gegenüber den vollkundenspezifischen Schaltungen deutlich niedriger liegen. Der Silizium-Ausnutzungsgrad bei einem beliebigen Layout liegt bei etwa 40%. Bei den Cell-Arrays bedient sich der Entwickler beim Schaltungsentwurf der Zellbibliotheken, die gewünschte Funktionen wie Zähler,

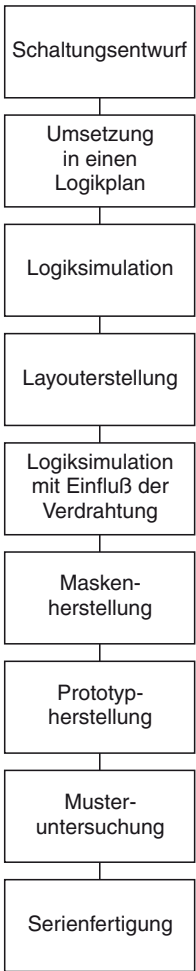


**Bild II-29**  
Array-Entwicklung

Multiplexer oder Speicher beinhalten. Im Gegensatz zu den Gate-Arrays, wo Grundfunktionen erstellt werden, sind diese „Basiszellen“ mit größeren Teilaufgaben vorgefertigt. Der Entwicklungsaufwand dieser Bausteine ist größer als bei den Gate-Arrays. Da jedoch die Anordnung der Zellen und auch die Zellbreite vom Entwickler gewählt werden, ergibt sich eine optimal genutzte Chipfläche, die bei hohen Stückzahlen Kostenvorteile mit sich bringen kann. Bild II-29 zeigt den Ablaufplan einer Cell-Array-Entwicklung.

### 8.3 Programmierbare Logikbausteine

**Programmierbare Logikbausteine** (PLD = Programmable Logic Device) sind Standardbausteine, deren Funktion erst durch Software hergestellt wird. Ihre innere Struktur besteht je nach Type aus einer programmierbaren UND- und ODER-Matrixschaltung für Ein- und Ausgänge unter Einbeziehung weiterer Logikbausteine wie beispielsweise Flipflops, Register und Treiberstufen. Der universelle Einsatz *derselben* Bausteine für *unterschiedliche* Funktionen ist möglich. Hinzu kommt, dass die Gesamtschaltung in einem IC-Baustein untergebracht werden kann, wozu sonst mehrere TTL- oder CMOS-Standardbausteine nötig wären. Hieran erkennt man den Vorteil programmierbarer Bausteine gegenüber diskreten Logikbausteinen. Ihre Integration ist höher, sie sind flexibler zu handhaben, und die Schaltungsentwicklung erfolgt durch Software. Damit ergeben sich kurze Entwicklungszeiten bei niedrigen Kosten. Je nach Hersteller existieren unterschiedliche Bezeichnungen programmierbarer Schaltkreise. FPGA (Field programmable Gate Array) sind für Logikschaltungen mit bis zu 10000 Gattern pro Array universell einsetzbar und schnell umzuprogrammieren. Ihre Versorgungsspannung beträgt 5 V. PLA (Programmable Logic Array) eignen sich für Logikschaltungen bis zu 300 Gattern pro Array. Ihr Betriebsspannungsbereich geht von 2 V bis 6 V und ihr Stromverbrauch liegt bei 8 mA. EPLD (Erasable PLD) und EEPLD (Electrically EPLD) sind weitere Bezeichnungen für programmierbare Schaltkreise.

Bekannte Vertreter dieser Bausteine sind PAL's und GAL's. Im Gegensatz zu den Gate-Arrays kann der Anwender ihre Funktion durch Programmierung mit

entsprechenden Programmiergeräten selbst bestimmen. Hierzu muss die Information in einer JEDEC Datei vorliegen. Während GAL's mehrmals programmiert werden können, kann dies bei PAL's nur einmal durchgeführt werden. Die Grundstruktur und die Programmierung der unterschiedlichen PLD-Typen sind einander sehr ähnlich.

### 8.3.1 PROM

PROM-Bausteine (Programmable Read Only Memory) werden unter dem Kapitel Speicherbausteine beschrieben. An dieser Stelle soll nur auf die von anderen PLD's verschiedene Grundstruktur hingewiesen werden. Das AND-Array (UND-Matrix) ist bei diesen Bausteinen festverdrahtet, während das OR-Array (ODER-Matrix) einmal programmiert werden kann. PLA's besitzen eine programmierbare UND- und ODER-Matrix und PAL's nur eine programmierbare UND-Matrix (Bild II-30).

### 8.3.2 PAL

PAL (Programmable Array Logik) sind Bauelemente, die eine Logikmatrix enthalten und vom Anwender programmiert werden können. Mit ihnen können mehrere kleinere Logikschaltungen in einem Gehäuse untergebracht werden. PAL's enthalten eine Matrix (Verbindungen aus Zeilen und Spalten) und logische Funktionsbausteine wie NICHT, UND, ODER und Flipflops. Während sich im Eingang eine *programmierbare Matrix* befindet, ist die nachfolgende *ODER-Matrix* fest verdrahtet. Bild II-31 zeigt eine UND-Matrix mit intakten Sicherungen.

Da der UND-Baustein das invertierte und nichtinvertierte Signal erhält, ist  $Q = „0“$ . Dies wird auch durch die angegebene Gleichung deutlich. Eine programmierte Matrix erkennt man an den defekten Sicherungen. Nicht programmierte (intakte) Brücken (Fuse = Sicherung) sind an dem Kreuz im Schnittpunkt zu erkennen. Im nichtprogrammierten Zustand ist der Ausgang der UND-Verknüpfung immer „0“. Die Verknüpfungsausgänge der UND-Matrix (Produktlinien) werden dann der ODER-Matrix zugeführt und bei einigen PAL-Bausteinen mit dem Ausgang verbunden. Bild II-32 zeigt hierzu Beispiele.

Die Bausteine 10L8 und 14L8 zeigen, dass die Ausgänge auch invertiert sein können. Bei den PAL-

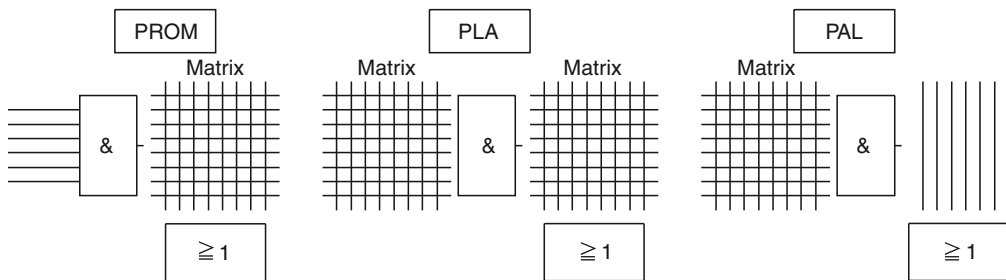


**Bild II-30** Strukturen unterschiedlicher PLD's

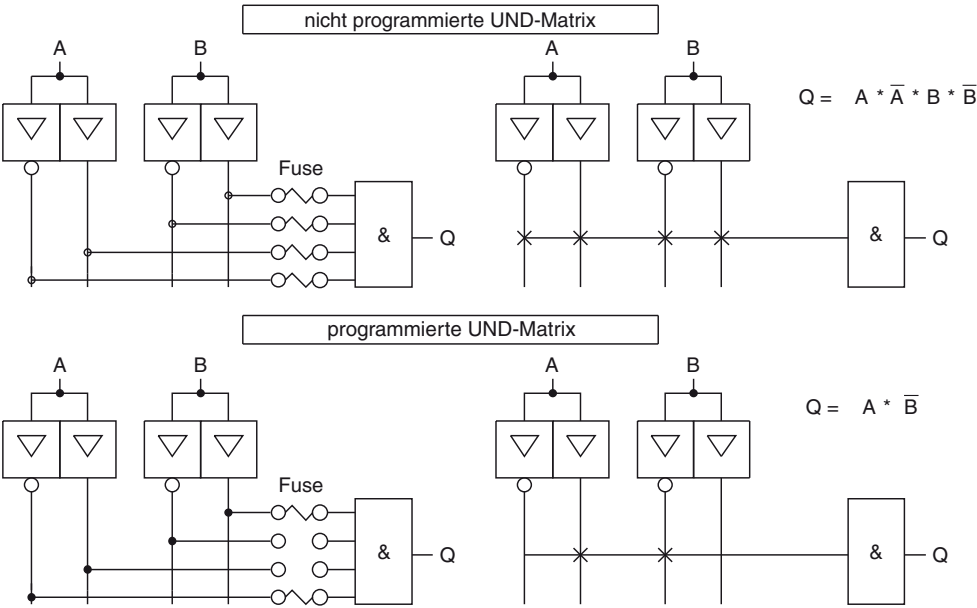


Bild II-31 Prinzip und vereinfachte Darstellung der Matrix

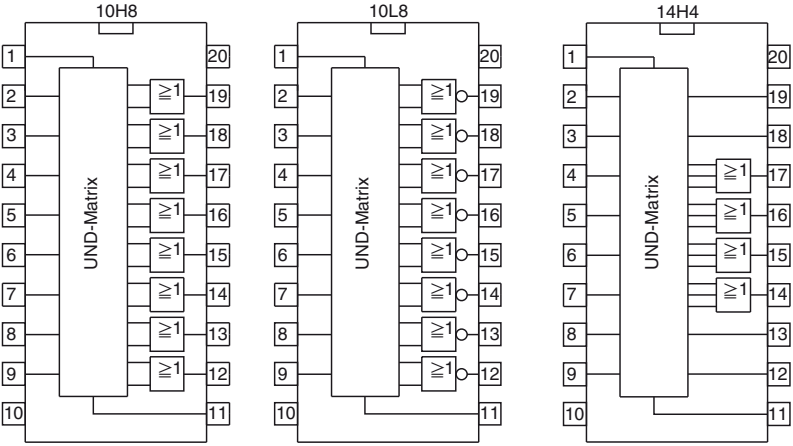


Bild II-32 Einfache PAL-Bausteine

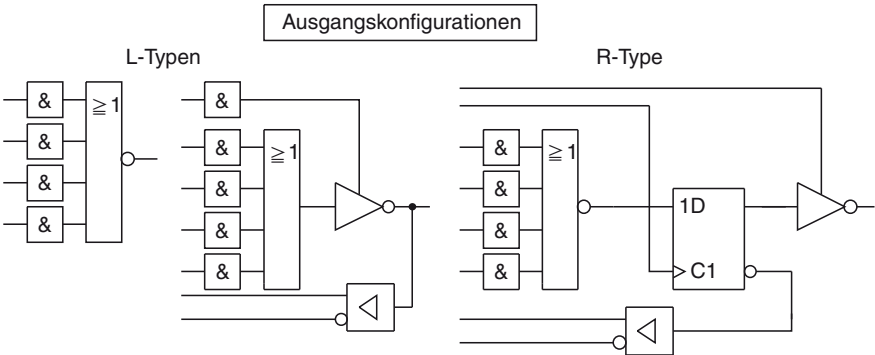


Bild II-33 Ausgangskonfigurationen

Typen können verschiedene Ausgangskonfigurationen bei einer allen gemeinsamen UND-Matrix im Eingang unterschieden werden (Bild II-33). Man findet die gewünschten Bauteile anhand der Typenbezeichnung (Tabelle II-7). Der Typenname beschreibt die Anzahl der Ein- und Ausgänge durch jeweils eine Zahl, während der Buchstabe die interne Funktion und Struktur des PAL angibt. Die Zahl nach dem Buchstaben gibt die Anzahl der Ausgänge an.

**Tabelle II-7** PAL-Typen und Bezeichnungen

- H: UND-ODER (High aktiv)  
L: UND-NOR (Low aktiv)  
C: UND-ODER  
R: UND-ODER-Inverter-Register  
X: UND-ODER-EXODER-Register

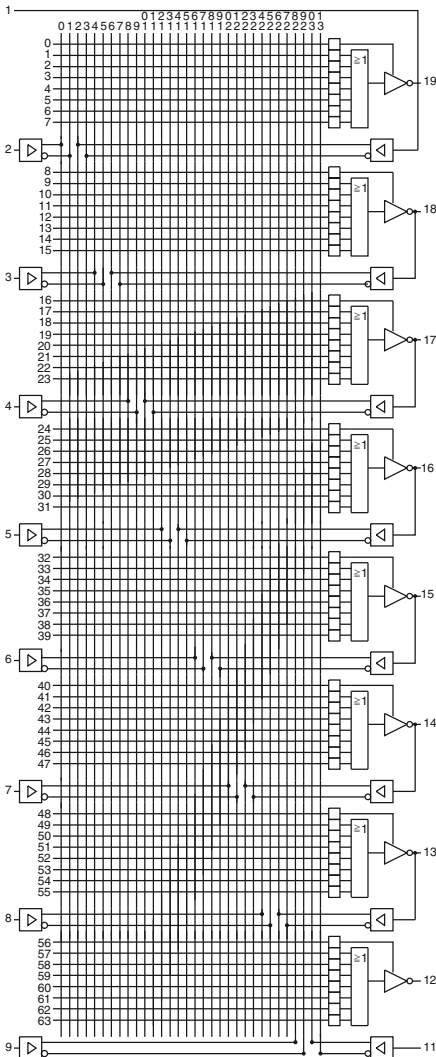


**Bild II-34** PAL 16L8

Bild II-34 zeigt am Beispiel des Bausteins 16L8 die Grundstruktur von PAL-Bausteinen. Die UND-Matrix besteht aus einunddreißig Spalten. Sieben Zeilen werden jeweils der ODER-Verknüpfung zugeführt und eine Zeile dem Ausgangs-3-state-Treiber.

Um die Programmierung durchzuführen, wird eine JEDEC-Datei (JEDEC = Joint Device Engineering Council, Komitee für Standards in der Datentechnik) erzeugt und einem Programmiergerät zugeführt. Die jeweiligen Verbindungen werden durch die Programmierung aufgetrennt. Eine Zerstörung der sogenannten „Security Fuse“ verhindert das Auslesen des PAL's. Die Schaltungsbeschreibung selbst erfolgt mit Booleschen Gleichungen, Wahrheitstabellen, Status-(State-)Diagrammen, Grafiken oder in einer höheren Programmiersprache. Normalerweise kann jeder übliche Editor eingesetzt werden. Bei der Schreibweise gibt es je nach Anwendungsprogramm unterschiedliche Darstellungsformen. Darstellungsformen für Verknüpfungen:

| Funktion | Darstellung |
|----------|-------------|
| NICHT    | /           |
| UND      | *           |
| ODER     | +           |
|          | !           |
|          | &           |
|          |             |
|          | #           |

Viele Hersteller bieten hierzu Entwicklungskits an, die außer Programmierungsmöglichkeiten zusätzliche Simulationsprogramme beinhalten. Damit lässt sich bereits statisch feststellen, ob der Baustein die gewünschten Funktionen auch tatsächlich, wie geplant, durchführt.

Zwei Beispiele sollen das Programmieren von PAL's veranschaulichen.

■ **Beispiel 1:** Ein Decoder soll zur Auswahl dreier Speicher so konzipiert werden, wie das die Schaltskizze Bild II-35 zeigt. Zur Verfügung steht ein PAL 12L6. Die Zuordnung der Eingänge und der Ausgänge mit frei wählbaren Namen zu den Anschlüssen des PAL-Bausteins ist beliebig. Damit kann das Platinenlayout je nach Wunsch und Notwendigkeit angepasst werden. Hier wurde die Zuordnung festgelegt.

Zuordnung der Eingangssignale zu den PAL-Anschlüssen:

Programm: Adressdecoder

CS = pin 1; Freigabeanschluss des Decoders

A11 = pin 2; Anschlüsse an den Adressbus

A12 = pin 3

A13 = pin 4

A14 = pin 5

A15 = pin 6

3-state-Ausgang:

CE1.OE = CS

CE2.OE = CS

CE3.OE = CS

Gleichungen:

!CE1 = A15 & A14 & A13 & A12 & !A11

!CE2 = A15 & A14 & !A13 & A12 & A11

!CE3 = A15 & A14 & !A13 & !A12 & !A11

Mit einem Compiler wird eine JEDEC-Datei erzeugt, aus der ersichtlich ist, an welcher Stelle jeweils eine



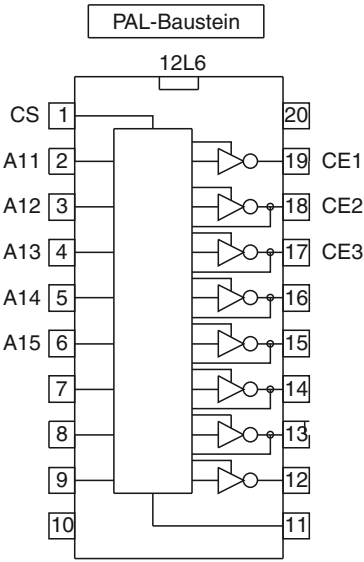
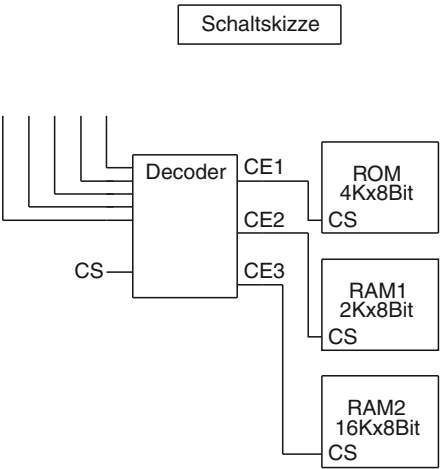


**Bild II-35** PAL-Baustein als Decoder

Sicherung des PAL-Bausteins zerstört bzw. nicht zerstört wurde. Die „0“ gibt die intakte und die „1“ die unterbrochenen Fuse an. Man kann sich auch vorstellen, es sei nur noch dort, wo sich die „0“ befindet, eine Verbindung mit einem Eingang. Bild II-36 zeigt einen Auszug aus der JEDEC-Datei ab Adresse 0000. Die Adressen 0032 bis 0063 sind gesondert herausgezogen. Hier sind auch die intakten Sicherungen in den Spalten 1, 4, 8, 12 und 16 gekennzeichnet. Sie stellen die jeweiligen Verbindungen zu den Eingängen dar und sind UND-verknüpft. Mit dem CS-Anschluss wird der Decoder freigegeben (Steuerung der 3-state-Ausgänge). Bild II-37 zeigt dies im Zusammenhang mit den Eingängen für einen Ausgang.

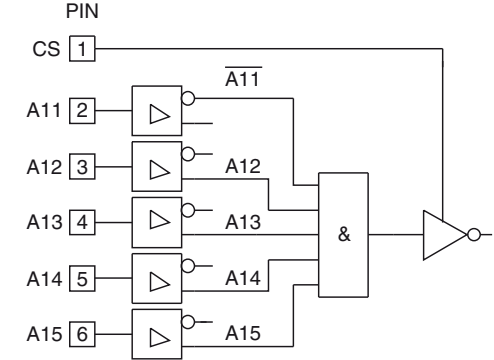


**Bild II-37** Umsetzung der Gleichung für CE1

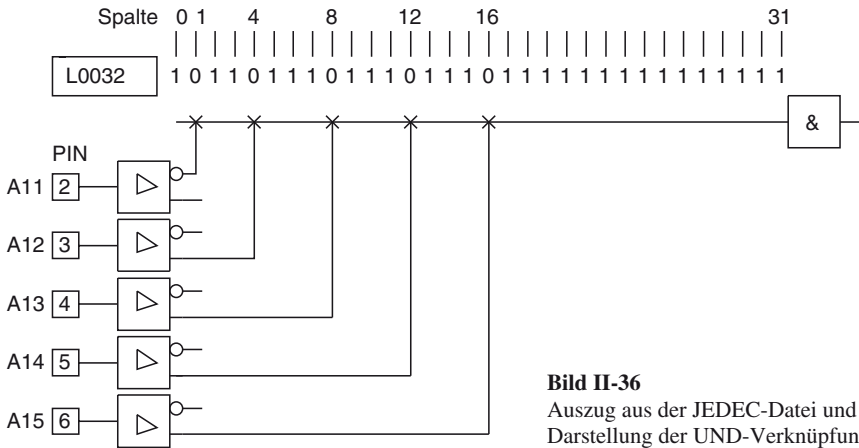


**Bild II-36**  
Auszug aus der JEDEC-Datei und  
Darstellung der UND-Verknüpfung

Die Funktionsbeschreibung einer Schaltung kann auch mit einer Wertetabelle erfolgen (Beispiel 2). Zur Überprüfung können Testvektoren zugefügt werden. Die mit

einem Compiler erzeugte JEDEC-Datei wird daraufhin softwaremäßig mit einem Simulator getestet. Allen programmierten Zeilen ist eine Adresse zugeordnet.

■ **Beispiel 2:** Mit dem PAL 16L8 soll eine 7-Segmentanzeige zur Darstellung in hexadezimaler Form genutzt werden. Im Gegensatz zum Beispiel 1 erfolgt die Eingabe hier mit einer Wertetabelle.

Programm: HEX-Decoder mit 7-Segmentanzeige

Zuordnung der Eingangssignale zu den PAL-Anschlüssen:

A = pin 2

B = pin 3

C = pin 4

D = pin 5

Ausgangssignale des Decoders:

a = pin 19

b = pin 18

c = pin 17

d = pin 16

e = pin 15

f = pin 14

g = pin 13

Wertetabelle:

| D | C | B | A | : | a | b | c | d | e | f | g |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | : | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | : | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | : | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | : | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | : | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | : | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | : | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | : | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | : | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | : | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | : | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | : | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | : | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | : | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | : | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | : | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Bild II-38 zeigt einen Auszug aus der JEDEC-Datei und Bild II-39 einen Auszug aus der Fuse-Map. Die Fuse-Map oder Fuse-Matrix, die ebenfalls vom Compiler erzeugt wird, dient zur Dokumentation und zur Kontrolle. Sie beschreibt das logische Verhalten des Bausteins. Die Reihen und Spalten sind wie bei der Bausteinbeschreibung durchnummeriert. 8 Reihen führen jeweils über das ODER-Gatter zum Ausgang. Die Eingänge steuern die Spalten von 0 bis 31.

Die Kreuze in der Fuse-Map kennzeichnen hierbei die Verbindungen zwischen Reihen und Spalten. Nimmt man beispielsweise den Bereich der Reihen 0 bis 7 für den Ausgangsanschluss des Segments „a“, PIN 19, kommt man zu folgender Gleichung:

$$a = /B \cdot /C \cdot D + B \cdot C + /D \cdot C + /D \cdot B + /A$$

Hierbei gilt folgende Zuordnung:

A = Spalte 0

/A = Spalte 1

B = Spalte 4

/B = Spalte 5

C = Spalte 8

/C = Spalte 9

D = Spalte 12

/D = Spalte 13

Zum gleichen Ergebnis für das Segment „a“ kommt man, wenn die Gleichung aus der Wertetabelle mit Hilfe einer KV-Tabelle vereinfacht wird. Die Soft-

```

*L0000 11011111111111111111111111111111
*L0032 11111011101101111111111111111111
*L0064 11110111011111111111111111111111
*L0096 11111110111101111111111111111111
*L0128 11110111111101111111111111111111
*L0160 10111111111111111111111111111111
*L0256 11011111111111111111111111111111
*L0288 01110111111101111111111111111111
*L0320 01111011111101111111111111111111
*L0352 10111111011111111111111111111111
*L0384 11111111011101111111111111111111
*L0512 11011111111111111111111111111111
*L0544 11111111011011111111111111111111
*L0576 11111111011101111111111111111111
*L0608 01111011111111111111111111111111
*L0640 01111111111101111111111111111111
*L0672 11111011111101111111111111111111
*L0768 11011111111111111111111111111111
*L0800 01110111101111111111111111111111
*L0832 11111011111101111111111111111111
*L0864 10111111011111111111111111111111
*L0896 11111011011111111111111111111111
*L0928 10111111111101111111111111111111
*L1024 11011111111111111111111111111111
*L1056 11111111011101111111111111111111
*L1088 11110111111101111111111111111111
*L1120 10110111111111111111111111111111
*L1152 10111111011111111111111111111111
*L1280 11011111111111111111111111111111
*L1312 11111011011101111111111111111111
*L1344 11110111111101111111111111111111
*L1376 11111111011011111111111111111111
*L1408 10111111011111111111111111111111
*L1440 10111011111111111111111111111111
*L1536 11011111111111111111111111111111
*L1568 11111011011101111111111111111111
*L1600 01111111111101111111111111111111
*L1632 11111111011011111111111111111111
*L1664 10110111111111111111111111111111
*L1696 11110111011111111111111111111111
*C9B81
*V1 N0000NNNNNNNNHLLLLLN
*V2 N1000NNNNNNNNHHHLLHN
*V3 N0100NNNNNNNNLHLLHLLN
*V4 N1100NNNNNNNNLHLLHLLN

```

**Bild II-38** Auszug aus der JEDEC-Datei (Beispiel 2)

ware setzt damit nicht nur die Wertetabelle um, sie vereinfacht auch gleichzeitig.

### 8.3.3 GAL

GAL's (Generic Array Logic) sind von der Firma Lattice Semiconductor entwickelt worden. Sie können als eine Weiterentwicklung der PAL's aufgefasst werden. Diese Bausteine können PAL's ersetzen und bis zu 100mal elektrisch gelöscht und neu programmiert werden. Nach Lattice wird ein Datenerhalt von 20 Jahren garantiert. Die CMOS-Bausteine besitzen TTL-kompatible Ein- und Ausgänge, und die Verzögerungszeiten liegen je nach Type zwischen 10 und 35 ns. Unbenutzte Eingänge sind wie bei allen MOS-Bausteinen mit +UCC oder GND zu verbinden. Die Programmierung erfolgt mittels geeigneter Programmiergeräte. Das Auslesen der GAL-Funktion kann mit Hilfe einer programmierten Sicherheitszelle verhindert werden (Kopierschutz). GAL's besitzen ge-

|    | 0123 | 4567 | 8901 | 11   | 1111 | 1111 | 2222 | 2222 | 2233 |        |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|--------|
|    | 0123 | 4567 | 8901 | 2345 | 6789 | 0123 | 4567 | 8901 |      |        |
| 0  | --X- | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | OE   |        |
| 1  | ---  | X--  | X--  | X--  | ---- | ---- | ---- | ---- | +    |        |
| 2  | ---  | X--  | X--  | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | +    |        |
| 3  | ---  | X--  | ---- | X--  | ---- | ---- | ---- | ---- | +    | !pin19 |
| 4  | ---  | X--  | ---- | X--  | ---- | ---- | ---- | ---- | +    |        |
| 5  | -X-- | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | +    |        |
| 6  | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | +    |        |
| 7  | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | +    |        |
| 8  | --X- | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | OE   |        |
| 9  | X--  | X--  | ---- | X--  | ---- | ---- | ---- | ---- | +    |        |
| 10 | X--  | X--  | ---- | X--  | ---- | ---- | ---- | ---- | +    | !pin18 |
| 11 | -X-- | ---- | X--  | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | +    |        |
| 12 | ---  | ---- | X--  | X--  | ---- | ---- | ---- | ---- | +    |        |
| 13 | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | +    |        |
| 14 | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | +    |        |
| 15 | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | +    |        |
| 16 | --X- | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | OE   |        |
| 17 | ---  | ---- | X--  | X--  | ---- | ---- | ---- | ---- | +    |        |
| 18 | ---  | ---- | X--  | X--  | ---- | ---- | ---- | ---- | +    | !pin17 |
| 19 | X--  | X--  | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | +    |        |
| 20 | X--  | ---- | ---- | X--  | ---- | ---- | ---- | ---- | +    |        |
| 21 | ---  | X--  | ---- | X--  | ---- | ---- | ---- | ---- | +    |        |
| 22 | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | +    |        |
| 23 | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | +    |        |
| 24 | --X- | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | OE   |        |
| 25 | X--  | X--  | X--  | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | +    |        |
| 26 | ---  | X--  | X--  | X--  | ---- | ---- | ---- | ---- | +    | !pin16 |
| 27 | -X-- | ---- | X--  | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | +    |        |
| 28 | ---  | X--  | X--  | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | +    |        |
| 29 | ---  | ---- | X--  | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | +    |        |
| 30 | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | +    |        |
| 31 | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | +    |        |
| 32 | --X- | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | OE   |        |
| 33 | ---  | ---- | X--  | X--  | ---- | ---- | ---- | ---- | +    |        |
| 34 | ---  | X--  | ---- | X--  | ---- | ---- | ---- | ---- | +    | !pin15 |
| 35 | -X-- | X--  | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | +    |        |
| 36 | -X-- | ---- | X--  | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | +    |        |
| 37 | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | +    |        |
| 38 | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | +    |        |
| 39 | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | +    |        |
| 40 | --X- | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | OE   |        |
| 41 | ---  | X--  | X--  | X--  | ---- | ---- | ---- | ---- | +    |        |
| 42 | ---  | X--  | ---- | X--  | ---- | ---- | ---- | ---- | +    | !pin14 |
| 43 | ---  | ---- | X--  | X--  | ---- | ---- | ---- | ---- | +    |        |
| 44 | -X-- | ---- | X--  | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | +    |        |
| 45 | -X-- | X--  | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | +    |        |
| 46 | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | +    |        |
| 47 | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | +    |        |
| 48 | --X- | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | OE   |        |
| 49 | ---  | X--  | X--  | X--  | ---- | ---- | ---- | ---- | +    |        |
| 50 | ---  | ---- | X--  | X--  | ---- | ---- | ---- | ---- | +    | !pin13 |
| 51 | ---  | ---- | X--  | X--  | ---- | ---- | ---- | ---- | +    |        |
| 52 | -X-- | X--  | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | +    |        |
| 53 | ---  | X--  | X--  | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | +    |        |
| 54 | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | +    |        |
| 55 | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | +    |        |
| 56 | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | OE   |        |
| 57 | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | +    | !pin12 |
| 58 | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | +    |        |
| 59 | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | +    |        |
| 60 | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | +    |        |
| 61 | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | +    |        |
| 62 | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | +    |        |
| 63 | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | XXXX | +    |        |

pin2

3

4

5

6

7

8

9

pin1

18

17

16

15

14

13

11

Bild II-39 Auszug aus der Fuse-Map (Beispiel 2)

genüber PAL's eine programmierbare Ausgangszelle (OLMC = Output Logic Macro Cell). Bild II-40 zeigt die innere Struktur dieses Bausteins mit seiner Anschlussbelegung. Die programmierbare UND-Matrix ist wie bei den PAL-Bausteinen aufgebaut. Für jeden Ausgang ist eine programmierbare Ausgangszelle vorgesehen.

Bild II-41 zeigt eine der OLMC's im Zusammenhang und ihre Programmiermöglichkeiten. Je nach zugeführtem Kontrollwort ergibt sich eine der aufgeführten Ausgangskonfigurationen.

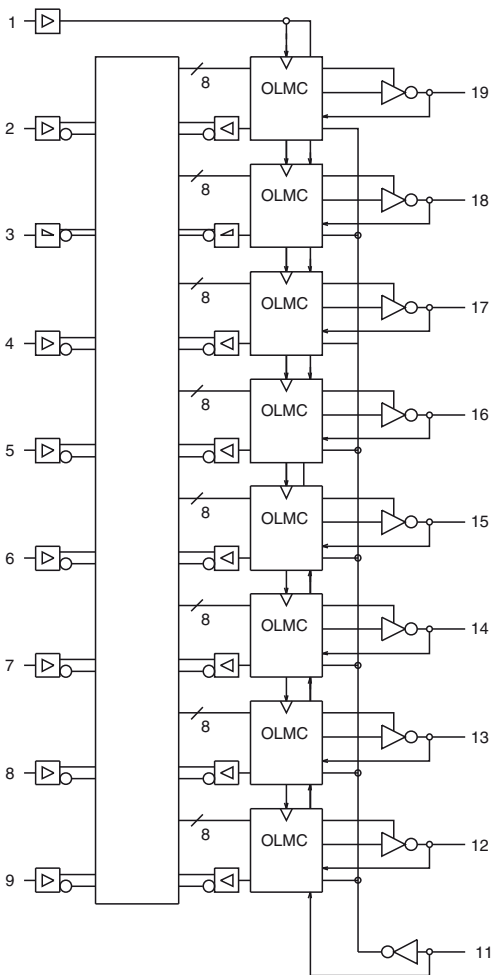


Bild II-40 GAL 16V8

Zur Programmierung von GAL-Bausteinen sind Programmiergeräte erforderlich. Ihre Handhabung ist einfach, da sie nur an einem Computer angeschlossen werden. Der Schaltungsentwurf hängt vor allem von den Möglichkeiten der zugehörigen Software ab. Die eigentliche Programmierung erfolgt wie bei den PAL-Bausteinen. Nach der Eingabe von Boole'schen Gleichungen oder von Wertetabellen mit einem Editor erzeugt ein GAL-Assembler die erforderliche JEDEC-Datei. Die Anschlussbelegung für den Programmierbetrieb unterscheidet sich vom Arbeitsbetrieb nach Bild II-42. An den Anschlüssen RAG0 bis RAG5 erfolgt die Adressierung der 64 Zeilen des Bausteins. Die Daten werden seriell mit dem Anschluss CLK dem Dateneingang SDIN zugeführt und zu Kontrollzwecken (verify) dem Datenausgang SDOUT entnommen.

Bild II-43 zeigt das Prinzip mit der Zuordnung der Adressen. Am Anschluss P, /V wird dem Baustein mitgeteilt, ob programmiert oder ob Daten ausgelesen

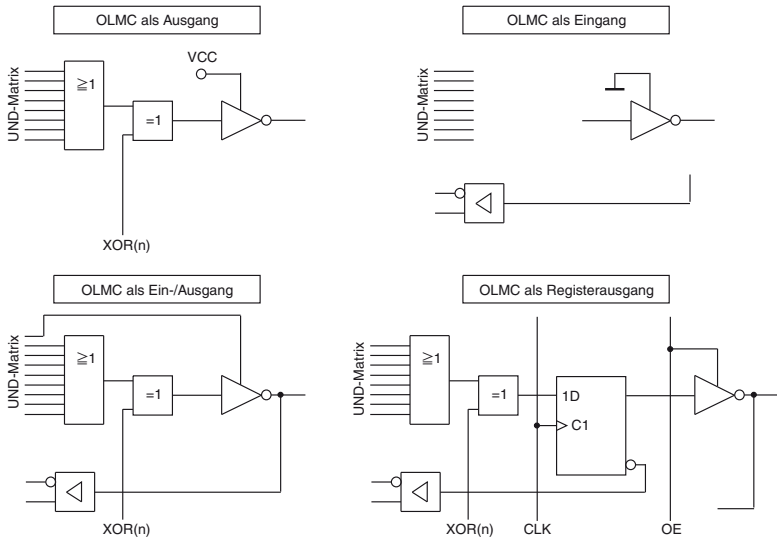


**Bild II-41**  
OLMC und ihre  
Programmier-  
möglichkeiten

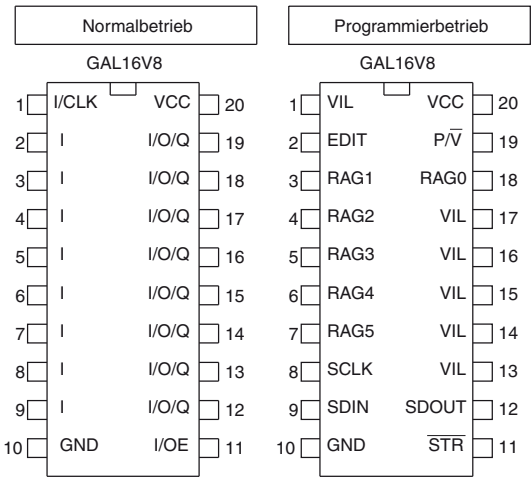


**Bild II-42**  
Anschlussbelegung im Arbeits- und  
Programmierbetrieb

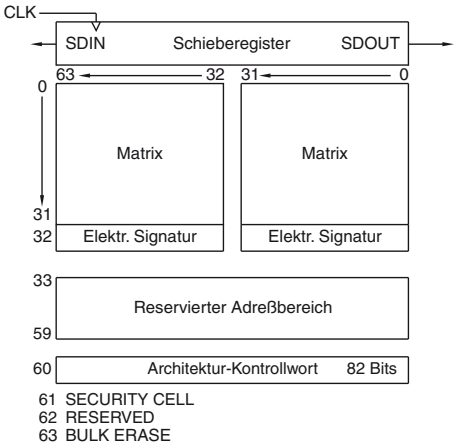


**Bild II-43**  
Interne Struktur des GAL 16V8

werden sollen. Im Programmierbetrieb muss dem Anschluss EDIT eine Spannung von 16,5 V zugeführt werden.

8.3.4 pLSI, ispLSI

pLSI- (programmable Large Scale Integration-)Bausteine und ispLSI (in-system pLSI)-Bausteine der Firma Lattice gehören zu den PLD's, mit denen auch komplexere Schaltungen realisiert werden können. Im Bild II-44 ist die Struktur dieser Bausteine beispielhaft dargestellt. Tabelle II-6 gibt eine Übersicht über die Familienmitglieder.

Im GRP (Global Routing Pool) liegen die Verbindungen zu den GLB's (Generic Logic Blocks) und zu den Ein- und Ausgängen. Das Prinzip eines GLB beschreibt Bild II-45. Über 18 Eingänge können 20 Produktterme gebildet und den Ausgängen kombinatorisch über AND, OR oder XOR oder über Register zugeführt werden. Bei den Registern kann man zwischen D-, T- und JK-Registern wählen. Zur Programmierung der ispLSI-Bausteine ist kein externes Programmiergerät erforderlich. Die Pro-

grammierdaten werden dem Baustein über ein Interface von der Druckerschnittstelle des PC zugeführt.

pLSI- und ispLSI-Familie:

| Type             | 1016    | 1024    | 1032    | 1048     |
|------------------|---------|---------|---------|----------|
| $f_{\max}$ (MHz) | 80      | 80      | 80      | 70       |
| tpd (ns)         | 15      | 15      | 15      | 20       |
| GLB's            | 16      | 24      | 32      | 48       |
| Register         | 96      | 144     | 192     | 288      |
| I/O              | 36      | 54      | 72      | 106      |
| Pin/Ge-<br>häuse | 44/PLCC | 68/PLCC | 84/PLCC | 120/PQFP |

■ **Beispiel:** Schalter ispGDS22

Es handelt sich hierbei um programmierbare Schalter (GDS = General Digital Switch) der Firma Lattice Semiconductor. Sie ersetzen die bekannten mechanischen DIP-Schalter. Die Bezeichnung isp (in-system programmable) bedeutet, dass es sich um einen im System programmierbaren Baustein handelt. Weitere Bausteine dieser Serie sind die IC's ipsGD18 und ipsGD14. Sie unterscheiden sich nur in der Zahl der Anschlüsse und damit der Anzahl der programmierbaren Schalter.

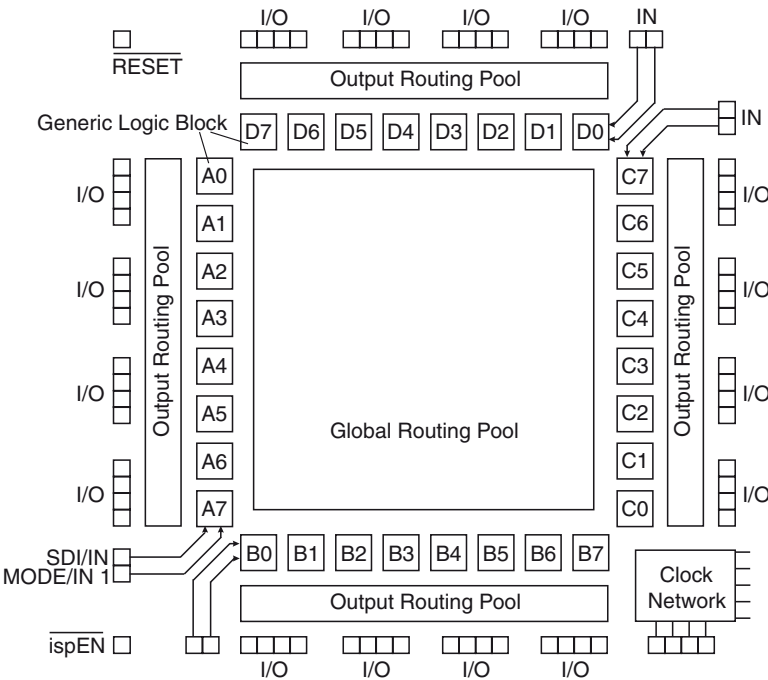


Bild II-44 Baustein 1032

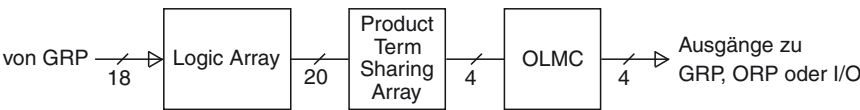
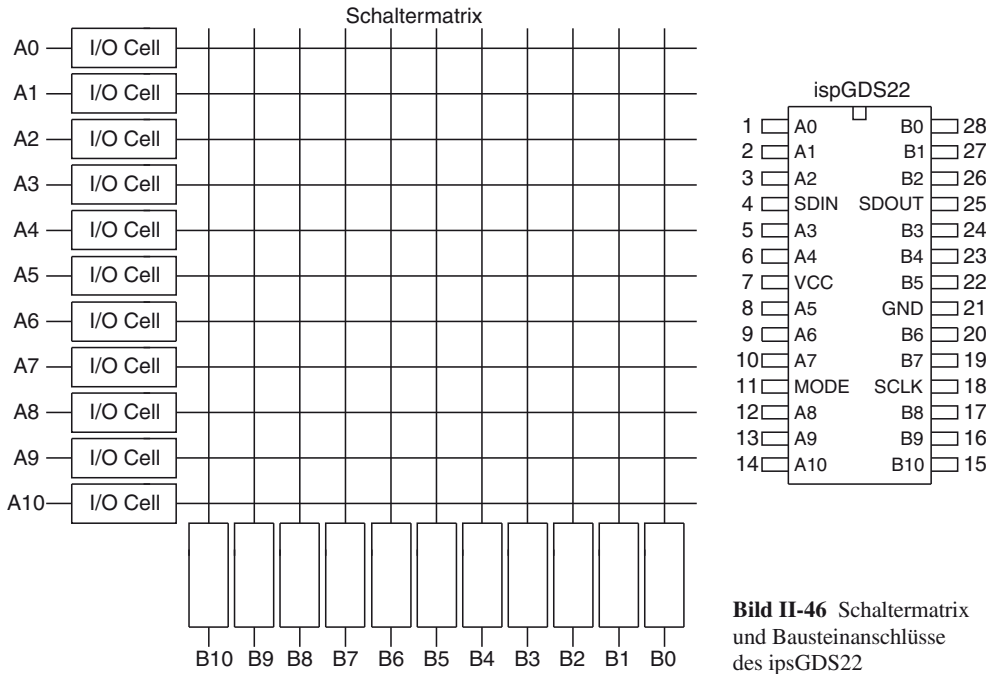


Bild II-45 Prinzip GLB



Über eine programmierbare Schaltermatrix (Bild II-46) können jeweils Schalterverbindungen von Ax nach Bx hergestellt werden. Hierbei ergeben sich nach Bild II-47 verschiedene Konfigurationsmöglichkeiten. Der Baustein erlaubt Signallaufzeiten von 7,5 ns und benötigt einen Strom im Stand-by-Betrieb von 25 mA.

In der Funktionstabelle sind die verschiedenen Programmiermöglichkeiten aufgeführt. Beispielsweise ist der Schalter S nur geschlossen, wenn C0 H-Pegel

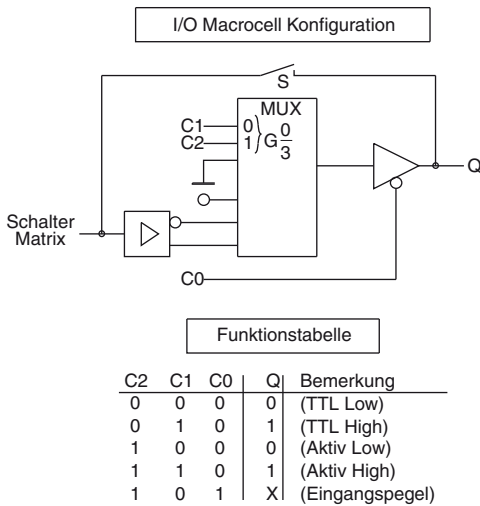


**Bild II-47** Konfigurationsmöglichkeiten

und C1 L-Pegel besitzt. Durch C0 = „0“ wird der 3-state-Treiber, der das Signal vom Multiplexer erhält, gesperrt.

Die Programmierung des Bausteins kann beispielsweise über eine parallele Schnittstelle eines Mikrocontrollersystems oder über den PC und ein Interface direkt erfolgen. Hierbei sind jeweils nur 4 Zuleitungen nötig (Bild II-48). Die Programmierdaten müssen mit Hilfe eines Taktes (CLK) seriell am Bausteinanschluss SDIN eingelesen werden. Die Betriebsart wird am Anschluss MODE durchgeführt, und die Kontrolle erfolgt durch Lesen der Daten am PIN SDOUT.

Bild II-49 beschreibt über das State-Diagramm die notwendigen Programmierzustände. Die Pegelzustände sind für die Signale MODE und SDIN beschrieben. Um beispielsweise die Identifikationsnummer des Bausteins lesen zu können, wird der

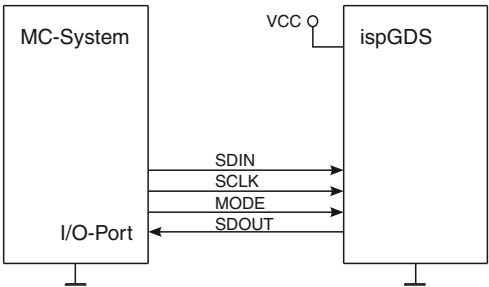


**Bild II-48** Anschluss an ein MC-System



Nach Aufruf des Assemblers erscheint die nachfolgende Meldung:

GASM: ispGDS Assembler

copyright © 1992 Lattice Semiconductor, written by Guy Townsend

Reading Source File

Fuse Checksum =

JEDEC file successfully written to disk

DOC file successfully written to disk

Der JEDEC file gibt Aufschluss über die jeweiligen Verbindungen, die an der „0“ zu erkennen sind.

JEDEC file for ispGDS18, created on 1/4/1994

Created by GASM v1.0

## 9 Gehäuse

Die Hersteller bieten digitale Schaltungen in unterschiedlichen Gehäusen an. Bei den Standardbausteinen verwendet man hauptsächlich das DIL-(Dual-In-Line-)Gehäuse. Der PIN-Abstand beträgt hierbei 1/10 Inch (2,54 mm). Bei Prozessoren und Controllern werden PLCC-(Plastic Leadless Chip Carrier-) Gehäuse eingesetzt. Das nachfolgende Bild II-50 gibt eine Übersicht gängiger Gehäuseformen mit ihren Bezeichnungen.

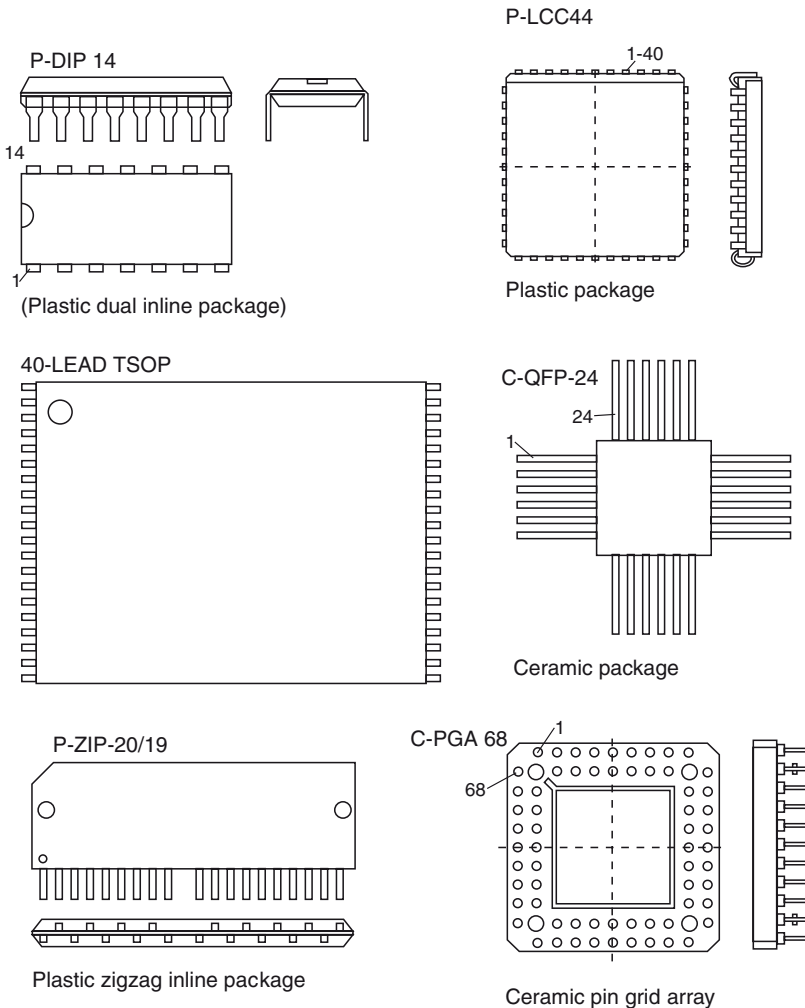


**Bild II-50**  
Gehäuseformen



### III Mikrocomputertechnik

#### 1 Komponenten eines Mikrocomputers

Mikrocomputer (Bild III-1) bestehen aus hochintegrierten Funktionseinheiten wie der *Zentraleinheit* (CPU = Central-Process-Unit), dem eigentlichen Mikroprozessor, *Speichereinheiten*, wie ROM (Read Only Memory = Nur-Lese-Speicher) und RAM (Random-Access Memory = Schreib-Lese-Speicher), die das auszuführende Programm in Maschinensprache enthalten sowie *Ein- beziehungsweise Ausgabeeinheiten*, die die Verbindung mit peripheren Geräten wie Steuer- und Messeinrichtungen oder Bildschirm, herstellen.

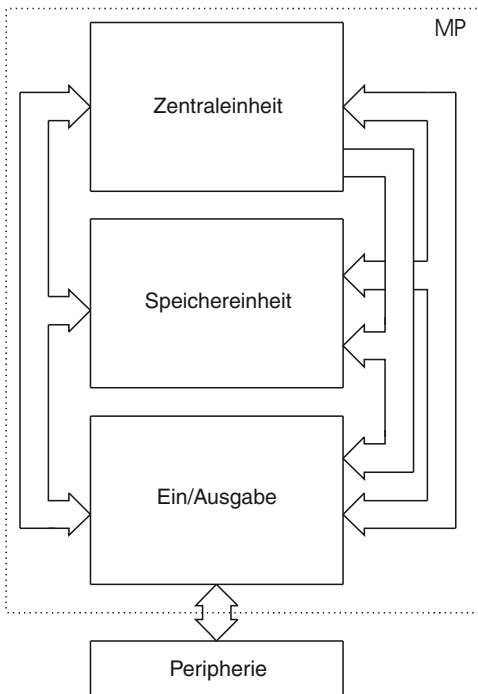


**Bild III-1** Mikrocomputersystem

Ein- und Ausgabeeinheiten werden auch als Schnittstellen (Interfaces) bezeichnet. CPU, Speicher und E/A-Einheit ergeben die *Hardware* des Mikrocomputers. Untereinander verbunden sind die Hardwarekomponenten durch Leitungen, denen unterschiedliche Aufgaben zugeordnet sind. Die jeweils parallel liegenden Leitungen werden auch *Bussystem* genannt. Man unterscheidet daher nach *Daten-*, *Adress-* und *Steuerbus*. Damit der Mikroprozessor Funktionen ausführen kann, ist außerdem *Software* erforderlich, wie beispielsweise das Betriebs- oder Startprogramm.

#### 2 Mikroprozessoren

##### 2.1 Allgemeines

Man unterscheidet nach der Architektur der CPU *CISC-Prozessoren* (Complex Instruction Set Computer), *RISC-Prozessoren* (Reduced Instruction Set Computer) und *Signalprozessoren*. Das RISC-Konzept unterscheidet sich von der in PC's (Personal Computer) eingesetzten CISC-CPU, die viele Befehle mit komplexen Funktionen und damit mehreren Maschinenzyklen besitzt, im wesentlichen durch einen gekürzten, einfacheren Befehlssatz und durch eine schnellere Befehlsabarbeitung, da die meisten Befehle nur einen Maschinenzklus benötigen. Während RISC- und CISC-Prozessoren nach dem Prinzip der Rechnerarchitektur arbeiten, wie sie von *Von Neumann* entwickelt wurde, besitzen digitale *Signalprozessoren* eine Architektur, bei der die Bussysteme für Daten und Programme getrennt sind. Alle Befehle, die von der CPU ausgeführt werden können, stellen den Befehlssatz (Instruction Set) des Prozessors dar. Der Mikroprozessor kann nur Befehle ausführen, die in binärer Form vorliegen (Maschinensprache). Der von den Prozessoren angesprochene mögliche Adressraum ist von der Anzahl seiner Adressleitungen abhängig. Hieraus ergibt sich die mögliche Informationsmenge (Speicherkapazität), die der Prozessor verarbeiten kann. Der *Adressbus* ist *unidirektional* ausgelegt, da die Adressen nur von der CPU aus übertragen werden, während der *Datenbus*, über den der gesamte Datenverkehr abgewickelt wird, *bidirektional* ausgelegt ist, weil Daten von der CPU und zur CPU gelangen müssen. Eine wichtige Kenngröße ist die Breite des Datenbusses. Man unterscheidet je nach Datenverarbeitungsbreite 8-Bit-, 16-Bit-, 32-Bit- und 64-Bit-Prozessoren. Die Leistungsfähigkeit von Prozessoren wird durch die Zahl möglicher Befehle pro Sekunde (MIPS = Million Instructions Per Second) bestimmt. Dies hängt wesentlich von der Taktfrequenz ab, mit der das System arbeitet. Mit dem *Steuerbus* bestimmt die CPU, mit welchen Baugruppen (z.B. Speicher oder E/A-Bausteine) eine Kommunikation stattfinden soll.

##### 2.2 Architektur

Mikroprozessoren besitzen weitgehend gleiche Grundfunktionseinheiten wie *Steuerwerk*, *Rechenwerk* und *Speicher- oder Registerwerk*. Über ein internes Bussystem (Adressen-, Daten- und Steuerbus) erhält der Prozessor Zugang zu den Einheiten des Mikrocomputers. Das Steuerwerk holt einen Befehl von einer externen Speicherstelle zur CPU und decodiert ihn im Befehlsregister. Unter eventueller Einbeziehung von Rechen- und Registerwerk veranlasst das Steuerwerk dann die Ausführung des Befehls. Der

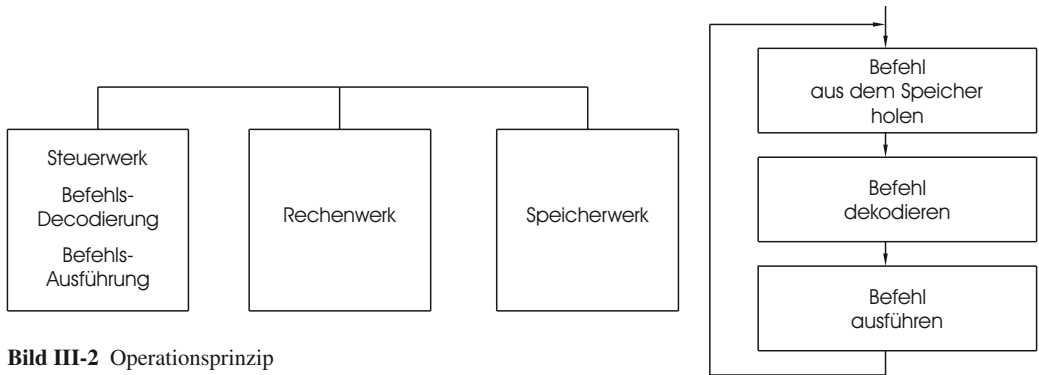


Bild III-2 Operationsprinzip

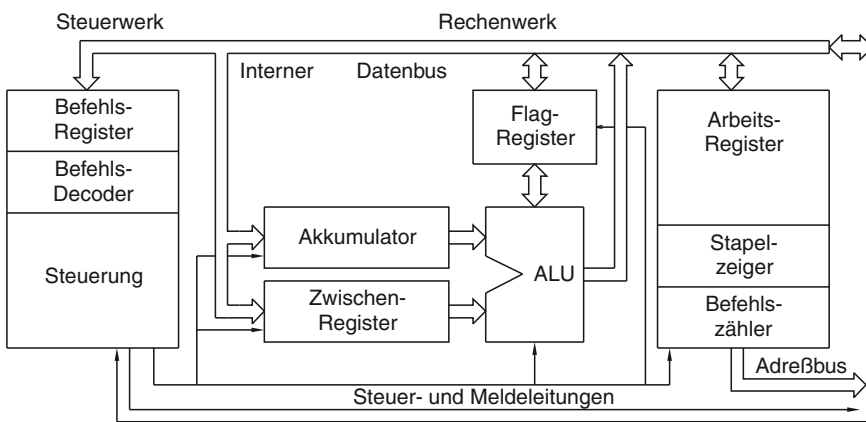


Bild III-3 Blockbild einer CPU

Mikroprozessor arbeitet dabei in zyklischen Zeitabläufen. Er liest einen Befehl (Fetch), führt die Operation durch (Execute) und holt den nächsten Befehl (Von Neumann Architektur und Operationsprinzip) (Bild III-2).

Die Aufgabe des *Steuerwerkes* besteht in der Befehlsannahme durch ein Befehlsregister (Instruction-Register), der anschließenden Decodierung und der Steuerung zur Durchführung des Befehls. Bei der Decodierung wird die eingehende Bit-Folge in ein Mikroprogramm umgewandelt. Ferner muss das Steuerwerk auf externe Signale reagieren. Beispielsweise muss nach einem RESET der Anfangszustand der CPU erreicht werden. Bild III-3 zeigt schematisch die wesentlichen Bestandteile eines Prozessors, die nachfolgend beschrieben und am Beispiel der 8-Bit-Prozessoren 8085 und Z80 konkretisiert werden.

Das *Rechenwerk* mit dem Akkumulator und dem Zwischenregister, in denen sich die Operanden befinden, kann arithmetische und logische Operationen mit Hilfe der *ALU* (Arithmetic-Logic-Unit) durchführen. Die ALU besteht im Prinzip aus einem Paralleladdierwerk und einer logischen Einheit, mit der die Verknüpfungen NICHT, UND, ODER und XOR

durchgeführt werden können. Das *Kennzeichen-, Status- oder Flagregister* gibt Aufschluss über die Ergebnisse der Operationen, beispielsweise ob das Ergebnis Null (Zero) war oder ob ein Übertrag (Carry) aufgetreten ist. Es wird so möglich, in Abhängigkeit der Zustandsbits Sprünge zu programmieren (siehe auch Abschnitt Maschinensprache). Dem Rechenwerk ist ein *Speicherwerk* angeschlossen. Dort befinden sich allgemeine *Register* (Arbeitsregister), in denen vorübergehend Zwischenergebnisse abgespeichert werden können. Ein Register besitzt meist eine auf ein Datenwort beschränkte Kapazität (8-, 16- oder 32-Bit).

Register mit bestimmten Aufgaben sind der *Befehlszähler* (Program-Counter) und der *Stapelzeiger* (Stackpointer). Der Befehlszähler zeigt immer auf die nächstfolgende Adresse, die der Prozessor abarbeiten soll. Er erhöht sich nach jedem Adressenaufruf automatisch jeweils um 1 und legt damit die Reihenfolge der Operationen fest. Speicherstelle für Speicherstelle wird somit nacheinander abgearbeitet (Bild III-4).

Nur bei Sprungbefehlen, Unterprogrammaufrufen oder Unterbrechungsanforderungen wird der Befehlszähler auf einen neuen Wert gesetzt.

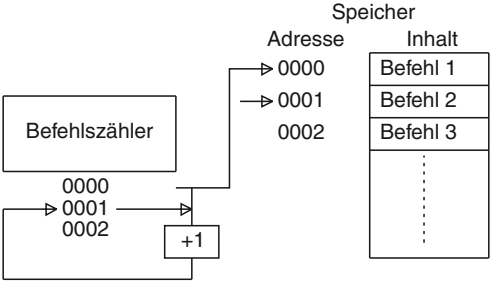


Bild III-4 Prinzip Befehlszähler

Der Stapelzeiger (siehe auch Abschnitt Maschinensprache) ist ein besonderer Adressenzeiger, der immer auf die Adresse des Stapelspeichers zeigt, in der die letzte Eingabe erfolgte (Ende des Stack). Als Stapelspeicher (Stack oder Kellerspeicher) kann jeder beliebige Teil des Arbeitsspeichers (RAM) verwendet werden. Bei jeder Dateneingabe wird der Stapelzeiger *decrementiert* (erniedrigt), so dass sich der „Stapel“ von einer vorgegebenen Adresse zu immer niedrigeren Adressen aufbaut. Die Daten werden in der Reihenfolge, in der sie eintreffen, auf den Stack gebracht und müssen in umgekehrter Reihenfolge zurückgeholt werden (Bild III-5). Man bezeichnet ihn daher auch als *LIFO-Speicher* (Last In, First Out). Aufgabe des Stack ist es, bei *Interrups* (Unterbre-

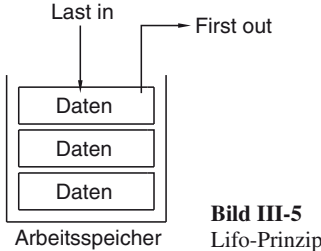


Bild III-5 Lifo-Prinzip

chungsanforderungen) oder Unterprogrammaufrufen die Hauptprogrammadresse zu speichern, um nach Rückkehr in das Hauptprogramm bei richtiger Adresse mit dem Programm fortfahren zu können (siehe auch Abschnitt Maschinensprache). Außerdem dient er zur Datensicherung der Arbeitsregister des Hauptprogramms, wenn einzelne Register im Unterprogramm benötigt werden. Um die genaue zeitliche Folge der Vorgänge (Timing) durchführen zu können, benötigt der Prozessor einen quartzesteuerten Taktgenerator. Dieser liefert das Bezugssignal für alle Abläufe in einem Mikroprozessorsystem und bestimmt damit die Arbeitsgeschwindigkeit des Mikrocomputers. Bei einigen Prozessoren ist der Generator integriert, so dass nur noch ein externer Quarz angeschlossen werden muss.

2.3 Übersicht gängiger Mikroprozessoren

Tabelle III-1 zeigt Beispiele gängiger Mikroprozessoren mit möglichem Adressraum, Daten- und Adressbusbreite und Taktfrequenz. Die Mikroprozessoren einer Familie mit weitergehenden Eigenschaften können Maschinenprogramme ihrer Vorgängertypen ausführen, sie sind also *aufwärtskompatibel*.)

2.4 8-Bit-Mikroprozessoren

2.4.1 8085-CPU

Bild III-6 zeigt die Pinbelegung (Anschlussbelegung) und den Registerplan, Bild III-7 die Architektur des Prozessors. Tabelle III-2 gibt die Bedeutung der Anschlüsse wieder. Der Prozessor 8085 ist mit den 8-Bit-Arbeitsregistern B, C, D, E, H und L und den 16-Bit-Registern Stapelspeicher, Befehlszähler und Adressenzwischenspeicher ausgestattet. Die Arbeitsregister B/C, D/E und H/L stehen für die Datenspeicherung und bei der Durchführung von Befehlsoperationen zur Verfügung.

Tabelle III-1 Übersicht gängiger Mikroprozessoren

| Typ   | Adreßraum | Datenbus<br>Adreß-/Datenbus | Adreßbus    | Taktfrequenz |
|-------|-----------|-----------------------------|-------------|--------------|
| 6502  | 64 kByte  | D0 ... D7                   | A0 ... A15  | 4 MHz        |
| Z80   | 64 kByte  | D0 ... D7                   | A0 ... A15  | 4 MHz        |
| 8080  | 64 kByte  | AD0 ... AD7                 | A8 ... A15  | 4 MHz        |
| 8085  | 64 kByte  | AD0 ... AD7                 | A8 ... A15  | 4 MHz        |
| 8086  | 1 MByte   | AD0 ... AD15                | A16 ... A19 | 10 MHz       |
| 68000 | 16 MByte  | D0 ... D15                  | A0 ... A23  | 16 MHz       |
| 80286 | 16 MByte  | D0 ... D15                  | A0 ... A23  | 16 MHz       |
| 68020 | 4 GByte   | D0 ... D31                  | A0 ... A31  | 16 MHz       |
| 80386 | 4 GByte   | D0 ... D31                  | A0 ... A31  | 16 MHz       |
| 80486 | 4 GByte   | D0 ... D31                  | A0 ... A31  | 25 MHz       |

<sup>1)</sup> Die Entwicklung führt zu immer schnelleren Prozessoren. Der z.Zt. in PC's eingesetzte Pentium besitzt eine Busbreite von 64 Bit und arbeitet mit über 200 MHz (66 MHz extern).

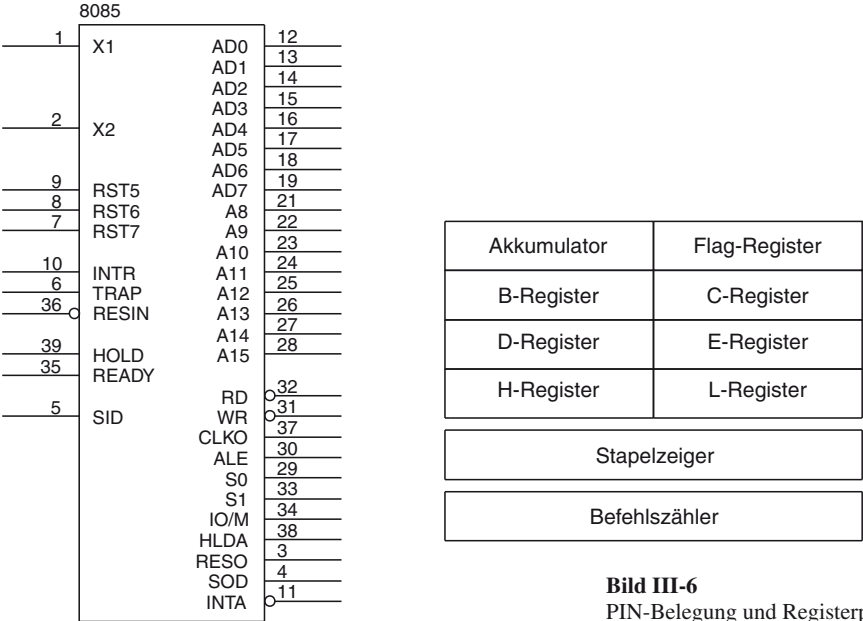


**Bild III-6**  
PIN-Belegung und Registerplan der 8085 CPU

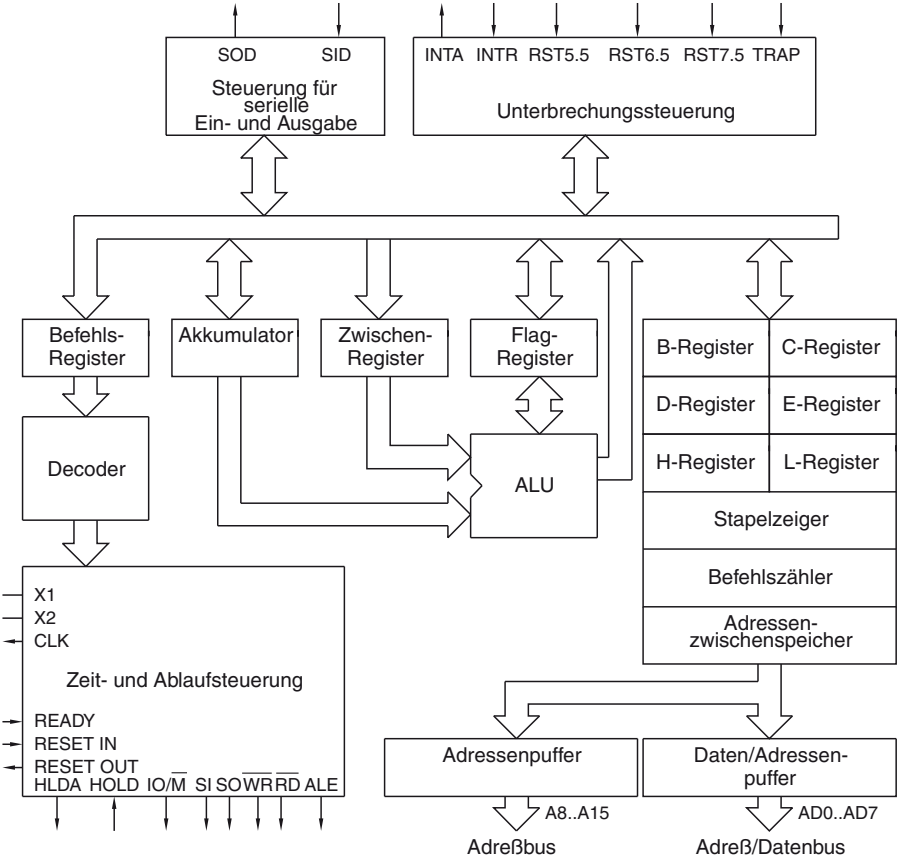


**Bild III-7** 8085-Prozessor

Tabelle III-2 Bedeutung der Anschlüsse

|                        |                                                                            |
|------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| AD0 ... AD7            | Adress-/Datenbus                                                           |
| A8 ... A15             | Adressbus                                                                  |
| /RD                    | Ausgangssignal zum Lesen einer Speicherstelle oder eines Portbausteins     |
| /WR                    | Ausgangssignal zum Schreiben einer Speicherstelle oder eines Portbausteins |
| ALE                    | Steuersignal zur Adressenzwischenspeicherung des L-Adressbytes             |
| X1, X2                 | Quarzanschluss                                                             |
| IO/M                   | E/A-Bausteine und Speicherunterscheidung                                   |
| S0, S1                 | Kontrollsignale und Statussignale                                          |
| Trap                   | Interrupteingänge mit festen Verzweigungsadressen                          |
| RST7.5, RST6.5, RST5.5 | Interrupteingänge mit festen Verzweigungsadressen                          |
| INTR                   | Interrupteingang mit vereinbarter Verzweigungsadresse                      |
| /INTA                  | Interruptbestätigung von INTR                                              |
| SID                    | Serieller Eingang                                                          |
| SOD                    | Serieller Ausgang                                                          |
| HOLD                   | Eingang zur Abkopplung der CPU (Aufruf externer Geräte)                    |
| HLDA                   | Bestätigung von HOLD durch die CPU                                         |
| /RESET IN              | Rücksetzen (ADR 0000)                                                      |
| RESET OUT              | Quittung auf RESET IN                                                      |
| READY                  | Wartezustand der CPU                                                       |

Akkumulator, Zwischenregister und ALU mit Flag-register und Befehlsregister sind ebenfalls für die Aufnahme von 8 Bit konstruiert. Die Arbeitsregister B/C, D/E und H/L können als Registerpaare (RP) zusammengefasst werden, um 16 Bit aufnehmen zu können.

Die Funktionen innerhalb des Prozessors werden durch die Zeit- und Ablaufsteuerung bestimmt. Der Baustein besitzt hierzu einen internen Generator, der nur von einem zusätzlichen Quarz beschaltet werden muss. Eine Taktgeberschaltung erzeugt die entsprechenden Taktsignale. Der Ausgang CLK gibt die halbe Quarzfrequenz aus (Bild III-8).

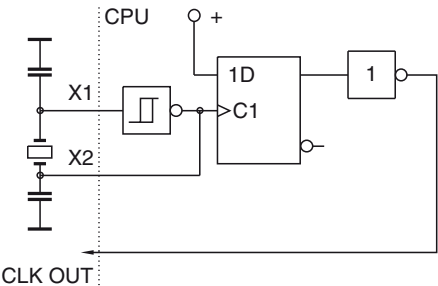


Bild III-8 Takterzeugung

Der Adressbus ist 16 Bit breit. A0 bis A7 (niederwertiges Adressbyte) wird über den Daten-/Adressbus AD0 bis AD7 im *Zeitmultiplexbetrieb* übertragen. Mit Hilfe der Steuerleitung ALE (Address Latch Enable) können die Adressen zwischengespeichert werden (Bild III-9). Die Anschlüsse A8 bis A15 entsprechen dem höherwertigen Adressbyte des Adressbusses. Mit 16 Adressleitungen wird der mögliche Adressraum  $2^{16} = 65\,536$

= 16 kByte groß. Da der zeitliche Verlauf der Daten und Adressen bei Darstellung jeder Bit-Position unübersichtlich wird, werden hier Daten- und Adressen-inhalte schematisch in einem Liniendiagramm zusammengefasst. Bild III-10 verdeutlicht dies an einem Beispiel.

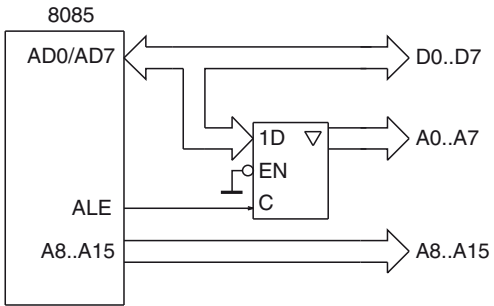


Bild III-9 Adressenzwischenspeicher

Während die Adressen A8 bis A15 konstant bleiben, werden die Adressen A0 ... A7 und Daten D0 bis D7 umgeschaltet. Adressen und Dateninhalte werden immer in hexadezimaler Form angegeben. Die Darstellung des Zusammenwirkens aller Signale auf dem Bussystem bezeichnet man als *Bustiming*. Bild III-11 zeigt die beteiligten Signale während eines Speicherschreib- und Lesezugriffs. In Datenbüchern findet man häufig zusätzlich Pfeile im Zeitliniendiagramm, die gegenseitige Abhängigkeiten kennzeichnen. Sind weder Daten noch Adressen vorhanden, ist der Bus im Ruhezustand; er ist hochohmig. Dies ist durch die gestrichelte Linie bei den Signalen AD0 ... AD7 im Lesezyklus dargestellt. Beim Lesezyklus gibt die CPU zunächst die 16-Bit-

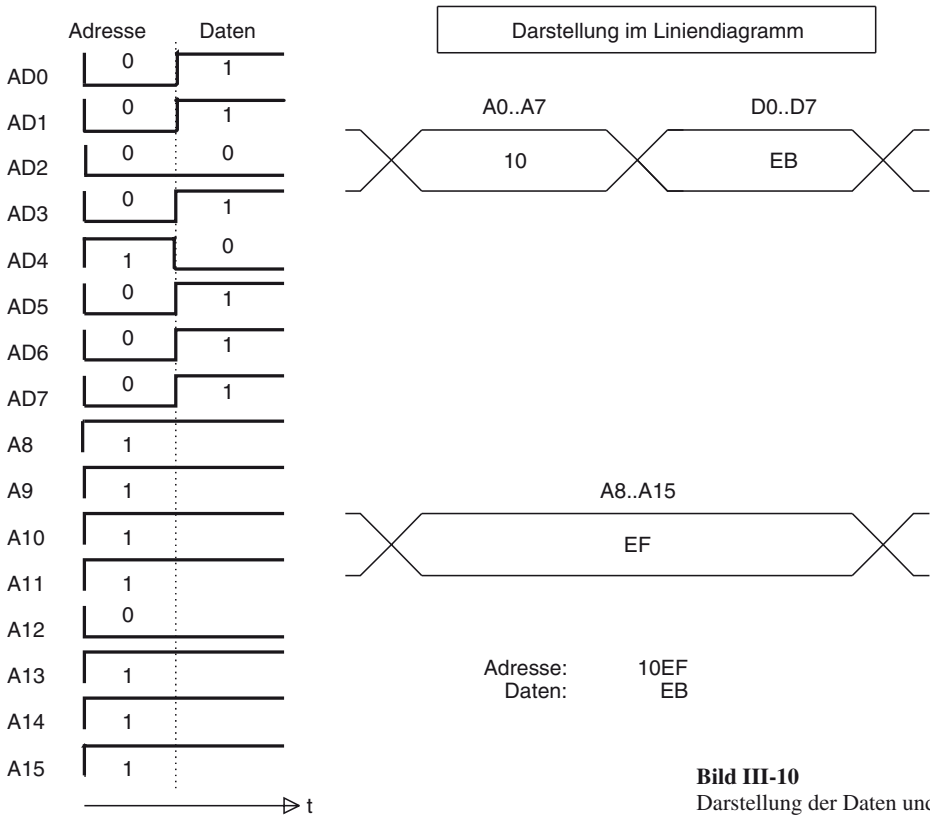


**Bild III-10**  
Darstellung der Daten und Adressen

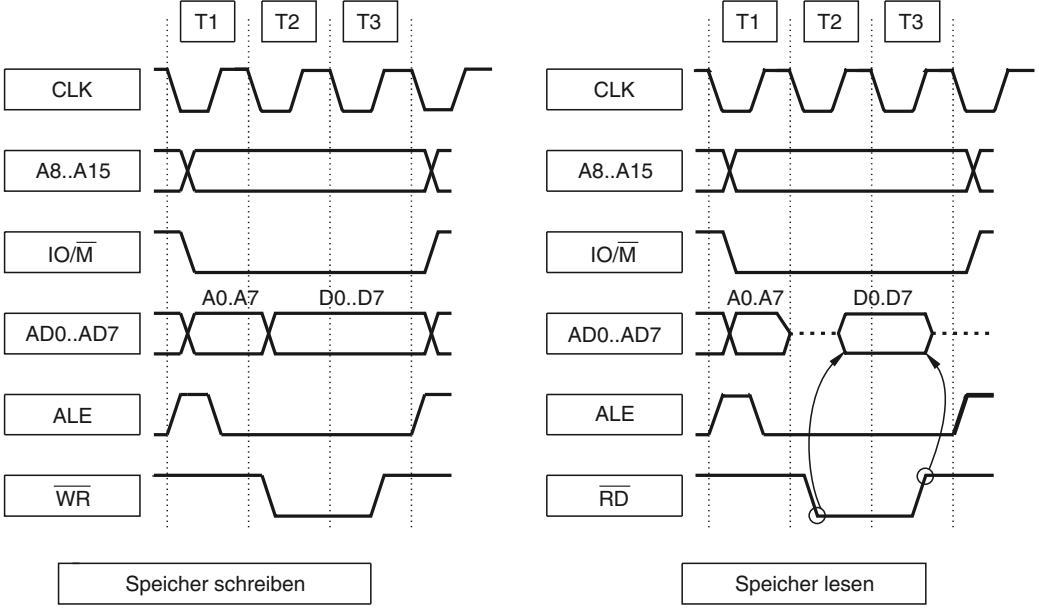


**Bild III-11** Bustiming



Die CPU unterscheidet zwischen folgenden Zeitabläufen: Operationsholzyklus, Speicherlese- und -schreibzyklus, E/A-Lese- und Schreibzyklus, Interruptquittung und Bus-Ruhezustand. Allgemein spricht man von Maschinenzyklen, die in unterschiedlichen Verbindungen einen *Befehlszyklus* beschreiben. Der Maschinenzyklus selbst besteht wieder je nach Aufgabe aus einer unterschiedlichen Anzahl von *Taktzyklen*. In Bild III-13 ist der Zusammenhang zwischen Takt-, Maschinen- und Befehlszyklus an einem Beispiel aufgezeichnet.

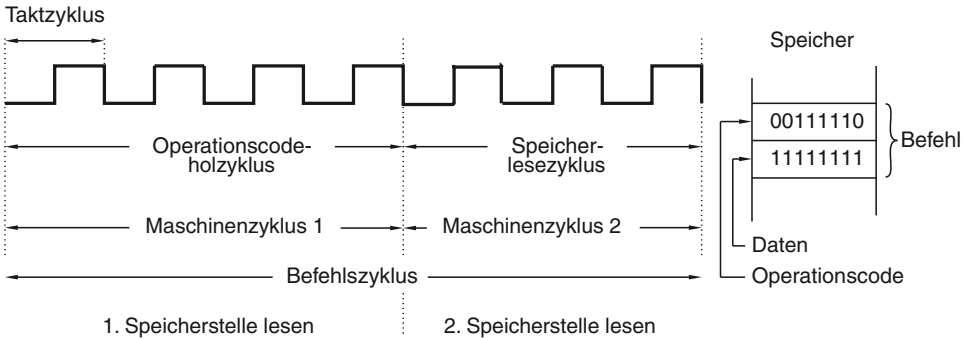


**Bild III-13** Takt-, Maschinen- und Befehlszyklus

Der erste Maschinenzyklus ist immer ein *Operationscodeholzyklus*. In ihm ist der Operationscode (OP-Code), und damit alle Steuerungsvorgänge für den Prozessor, enthalten. Ob weitere Maschinenzyklen folgen, hängt von dem entsprechenden Befehl ab. Obwohl der Operationscodeholzyklus auch vom Prinzip her ein Speicherlesezyklus ist, besitzt er im Gegensatz hierzu einen Taktzyklus mehr, weil während dieser Zeit die Decodierung im Befehlsregister erfolgen muss. Im aufgeführten Beispiel bekommt der Prozessor mit dem OP-Code (Maschinenzyklus 1), der aus dem Speicher geholt und zur Decodierung dem Befehlsregister zugeführt wird, gesagt, dass er den Inhalt der nachfolgenden Speicherstelle in den Akkumulator laden soll. Folglich befördert der nächste Maschinenzyklus (Maschinenzyklus 2) die Daten zum Akkumulator. Die *Prozessor-Kontrollsignale* geben Aufschluss über bestimmte Zustände des Prozessors oder geben eine bestimmte Meldung an die CPU. Hierzu gehören die Anschlüsse: S0, S1, RESET IN, RESET OUT, READY. S0 und S1 geben Aufschluss über den Zustand der CPU bei der Befehlsbearbeitung (Tabelle III-4).

**Tabelle III-4** Statussignale

| S0 | S1 | Funktion                     |
|----|----|------------------------------|
| 0  | 0  | Bus-Ruhezustand              |
| 0  | 1  | CPU liest (Speicher, E/A)    |
| 1  | 0  | CPU schreibt (Speicher, E/A) |
| 1  | 1  | CPU liest Operationscode     |

Mit RESET IN wird der Programmzähler auf die Adresse 0000 gesetzt, und die Interrupteingänge werden gesperrt. Eine Bestätigung wird an RESET OUT durchgeführt. Damit können weitere Bausteine zurückgesetzt werden. In Bild III-21 ist eine übliche RESET-Schaltung mit dargestellt. Beim Einschalten wirkt der Kondensator C als Kurzschluss und ermöglicht durch „L“ einen RESET. Die Diode V sorgt für ein schnelles Entladen des Kondensators, so dass bei kurzzeitigem Aus- und Einschalten des Systems RESET wieder wirksam wird.

Bei READY „L“ geht die CPU in den Wartezustand, bis READY wieder „H“ wird. Dieser Anschluss dient zur Steuerung externer Geräte, die langsamer als die CPU sind. Der READY-Eingang kann auch zur schrittweisen Überprüfung von Programmen genutzt werden. *Bus-Kontrollsignale* ermöglichen einem anderen Prozessor oder auch Massenspeichern Zugriff auf das CPU-eigene Bussystem (DMA, Direct Memory Access = direkter Speicherzugriff). Das Bussystem wird von der CPU abgekoppelt. Hierzu zählen die Anschlüsse HOLD und HLDA. Bild III-14 zeigt das Prinzip. Wünscht der MP2 (Mikroprozessor) einen Speicherzugriff, so gibt er eine Meldung „H“ an den Anschluss HOLD des MP1. Dadurch wird das interne Bussystem des Prozessors vom externen Bussystem getrennt (hochohmig). Der MP2 erhält gleichzeitig eine Quittung über die Leitung HLDA mit „H“, um sein internes Bussystem an den externen Bus anzuschließen. In der Praxis werden hier DMA-Kontroller eingesetzt, die externen Geräten das direkte Arbeiten mit dem CPU-eigenen Arbeitsspeicher ermöglichen. Ein Prozessor muss auf äußere Ereignisse (Impulse, Pegel), wie auf die Meldung von Sensoren, Tastern oder externer Geräte reagieren können. Bei deren Ansprache muss ein Programm eine gewünschte Reaktion auslösen. Eine Möglichkeit besteht darin, alle Sensoren und Geräte softwaremäßig nacheinander abzufragen. Man spricht dann von der *Polling-Methode*. Dies ist allerdings sehr zeitintensiv. Effektiver ist der Aufruf eines Unterprogramms bei der



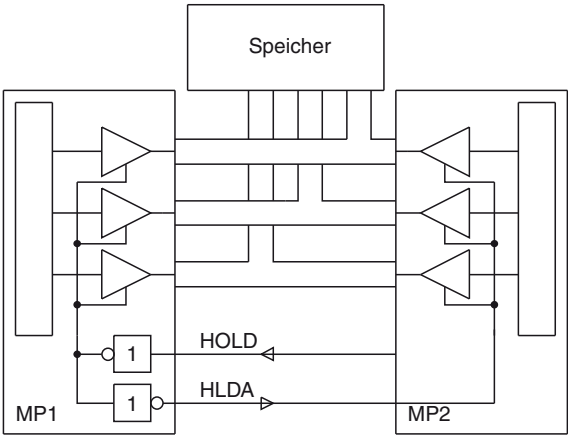
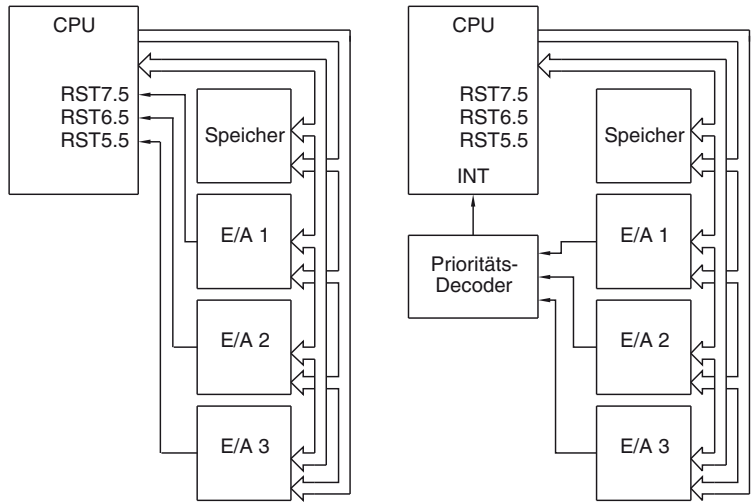


Bild III-14 Prinzip DMA

Reaktion eines Sensors. Erreichen kann man das durch eine Programmunterbrechung (Interrupt). Hierunter versteht man den direkten Zugriff externer Geräte auf die CPU. Wird ein Interrupteingang aktiviert, bearbeitet der Prozessor noch den gerade begonnenen Befehl und verzweigt dann in die Interrupt-routine, zum Interrupt-Programm, um auf die Anforderung des Interrupts einzugehen. Der 8085 besitzt fünf Interrupteingänge. Zu den Unterbrechungs-Kontrolleleitungen gehören die Unterbrechungseingänge (Interrupteingänge) TRAP, RST7.5, RST6.5, RST 5.5 mit unterschiedlicher Priorität, um bei gleichzeitiger

Aktivierung aller Eingänge eindeutige Zuordnungen zu gewährleisten, und der Eingang INTR mit dem Quittungssignal INTA. Da gleichzeitige Anforderungen mehrerer Geräte vermieden werden müssen, ist bei vielen Prozessoren ein *Prioritätsdecoder* oder *Interruptcontroller* erforderlich, weil sie nur einen Interrupteingang besitzen. Bild III-15 zeigt für den 8085 beide Möglichkeiten auf. Beim 8085 ist die Priorität hardwaremäßig festgelegt. Tabelle III-5 führt die Hardwareinsprungsadressen und die Prioritäten auf.



| Name   | Priorität | Adresse | Eigenschaft      | Triggerung                  |
|--------|-----------|---------|------------------|-----------------------------|
| TRAP   | 1         | 24      | nicht maskierbar | ┐ und H bis Abfrage         |
| RST7.5 | 2         | 3C      | maskierbar       | H bis Abfrage (Speicherung) |
| RST6.5 | 3         | 34      | maskierbar       | H bis Abfrage               |
| RST5.5 | 4         | 2C      | maskierbar       | H bis Abfrage               |
| INTR   | 5         |         |                  |                             |

Bild III-15 Interruptmöglichkeiten

Tabelle III-5 Interrupt

| Name   | Prioritätenfolge | Einsprungadresse | Eigenschaft      | Triggerung |
|--------|------------------|------------------|------------------|------------|
| TRAP   | 1                | 24               | nicht maskierbar | „L“ → „H“  |
| RST7.5 | 2                | 3C               | maskierbar       | „H“        |
| RST6.5 | 3                | 34               | maskierbar       | „H“        |
| RST5.5 | 4                | 2C               | maskierbar       | „H“        |

Desweiteren ist der Tabelle zu entnehmen, mit welchem Pegel der Interrupteingang angesprochen werden muss (Triggenderung) und welche Interrupteingänge softwaremäßig abgeschaltet werden können. Die Eingänge RST6.5, RST5.5 und INTR müssen mit Pegeln angesprochen werden. Bis zur Annahme durch die CPU muss der Pegel bei den genannten Eingängen anliegen. Der Eingang RST7.5 reagiert auf die ansteigende Flanke und speichert die Anforderung in einem Flipflop.

Von der Softwareseite besteht für einige Interrupts die Möglichkeit, diese zu maskieren. Hierunter versteht man, Interrupts zu sperren oder zuzulassen. Die Programmierung läuft über den Inhalt des Akkumulators in Verbindung mit dem Befehl SIM (Set Interrupt Mask) ab. Bild III-16 zeigt die vom Hersteller angegebenen Bitpositionen.

Mit den Befehlen EI (Enable Interrupt) können alle Interrupts zugelassen und mit DI (Disable Interrupt)

alle gesperrt werden (Ausnahme: TRAP). Das Prinzip verdeutlicht Bild III-17 am Beispiel des RST7.5-Eingangs. Nur wenn durch den Befehl SIM die Maske für RST7.5 gesetzt und durch den Befehl EI die Zulassung der Interrupts ermöglicht wurde, kann bei anliegendem Signal an RST7.7 eine Interruptannahme durch die CPU erfolgen, und der Programmzähler ruft die Adresse 3C auf.

Der Interruptvorgang wird in Bild III-18 erläutert. Tritt im laufenden Hauptprogramm ein Interrupt auf, wird der gerade begonnene Befehl noch bearbeitet. Der Programmzählerinhalt wird zum Stack gebracht, und der Programmzähler zeigt auf die festgelegte Einsprungadresse, um das Interrupt-Programm ausführen zu können. Das Interrupt-Programm selbst befindet sich im Arbeitsspeicher, da sich zwischen den Interrupteinsprungadressen – hier steht in der Regel nur ein Sprungbefehl zum Arbeitsspeicher – nur wenige freie Speicherplätze befinden (siehe auch

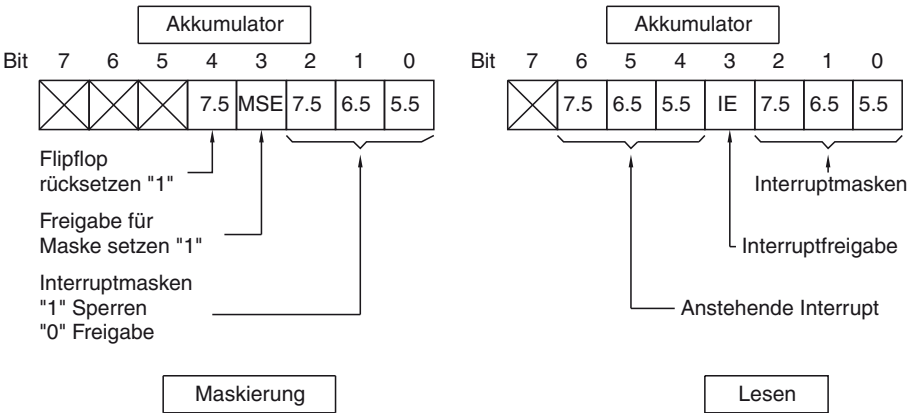


Bild III-16 Interruptmaske setzen und lesen

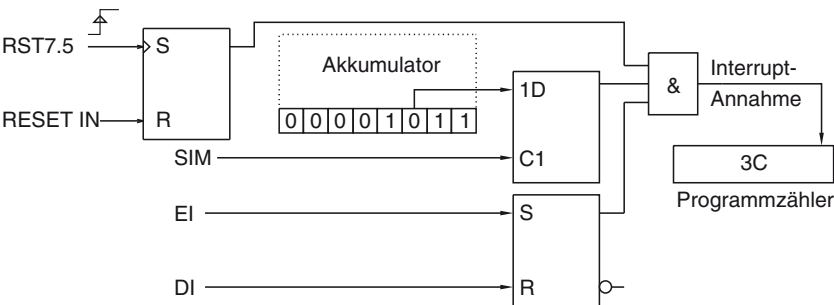


Bild III-17  
RST7.5

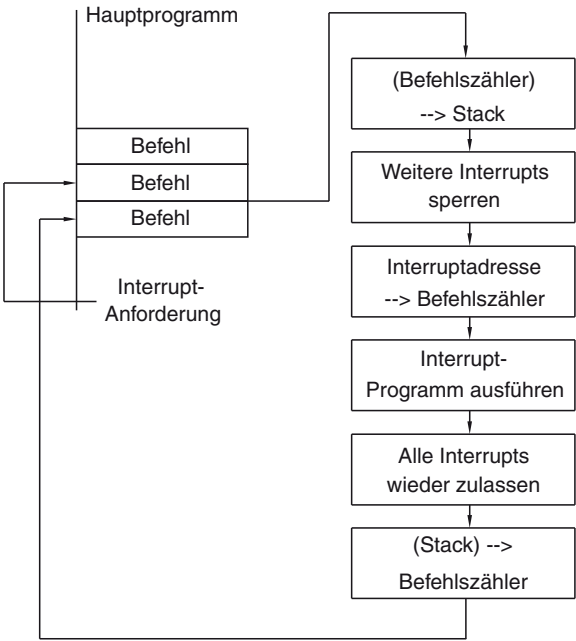


**Bild III-18**  
Interruptvorgang

Tabelle III-7). Ein Interrupt-Programm ist wie ein Unterprogramm zu behandeln. Registerinhalte sind zu „retten“ und auf den Stack zu bringen. Den Abschluss bildet der Befehl RET (Return). (Programmbeispiele siehe Abschnitt Maschinensprache.)

Für die serielle Datenübertragung besitzt der Prozessor 8085 einen eigenen Ein- und Ausgang (SID = Seriell In Data, SOD = Seriell Out Data). Hierbei wird die Information Bit für Bit zeitlich nacheinander übertragen. Die Steuerung erfolgt über ein Programm und der serielle Datenfluss über den Akkumulator.

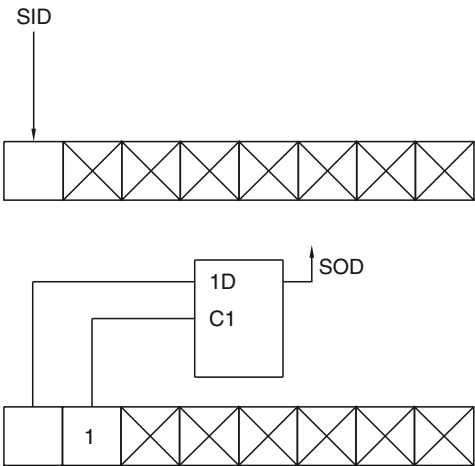


**Bild III-19** Bitposition im Akkumulator für den seriellen Ein- und Ausgang

Mit dem Befehl RIM gelangt das Bit am SID-Anschluss nach Bit 7 des Akkumulators. Von dort ist eine weitere Verarbeitung möglich. Zur Datenausgabe wird ebenfalls Bit 7 des Akkumulators benutzt. Hierzu muss der Ausgang SOD mit dem Befehl SIM freigegeben worden sein (Bild III-19).

Um das Zusammenwirken mit Peripheriebausteinen darzustellen, ist in Bild III-20 ein 8085-Minimalsystem mit einem RAM (256 Bytes), EPROM (2 kByte), Zeitgeber und E/A-Ports abgebildet. Die Speicherkapazität der Bausteine lässt sich aus der Anzahl der Adressleitungen ermitteln. Die Auswahl der Bausteine erfolgt mit den Adressleitungen A11 und A12, so dass ein Speicherplan aufgestellt werden kann (Bild III-21). Die Portadressen können mit Hilfe der Beschreibung der Bausteine 8755 und 8156 (siehe Peripheriebausteine) gefunden werden.

**2.4.2 Beispiel Z80 CPU**

Der Z80 besitzt die 6 Arbeitsregister B, C, D, E, H, L, die jeweils 8-Bit-Operationen oder als Registerpaare BC, DE und HL 16-Bit-Operationen ermöglichen, einen Akkumulator und das Flagregister als Hauptregister-Block. Die gleiche Anzahl Register sind als Zweitregister-Block vorhanden (Bild III-22). Außer Befehlszähler und Stapelzeiger sind die Spezialregister IX und IY als Indexregister, das I-Register (Interrupt-Vektor) und R-Register (Refresh-Speicher), der ein direktes Arbeiten mit dynamischen Speichern ohne zusätzlichen Bausteinan Aufwand ermöglicht, vorhanden. Die 16-Bit-Index-Register dienen zur Bearbeitung von Tabellen und Datenverschiebungen im Arbeitsspeicher.

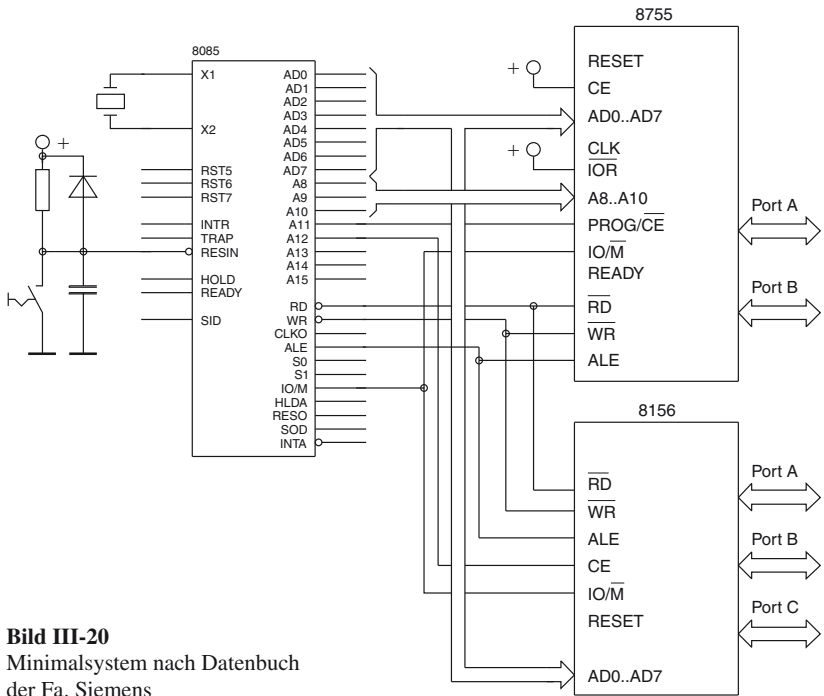


**Bild III-20**  
Minimalsystem nach Datenbuch  
der Fa. Siemens

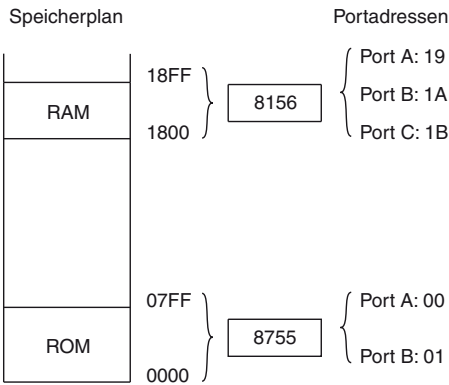


**Bild III-21**  
Adressen der Bausteine 8156 und 8755

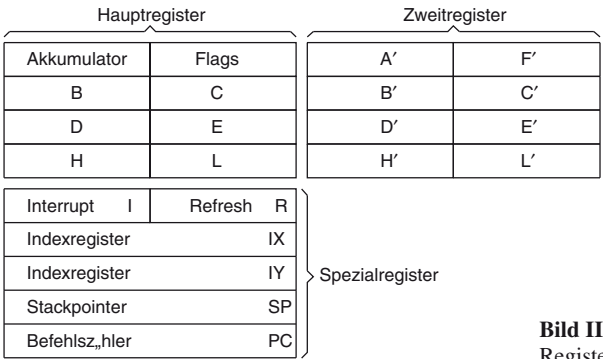


**Bild III-22**  
Registerplan der Z80 CPU

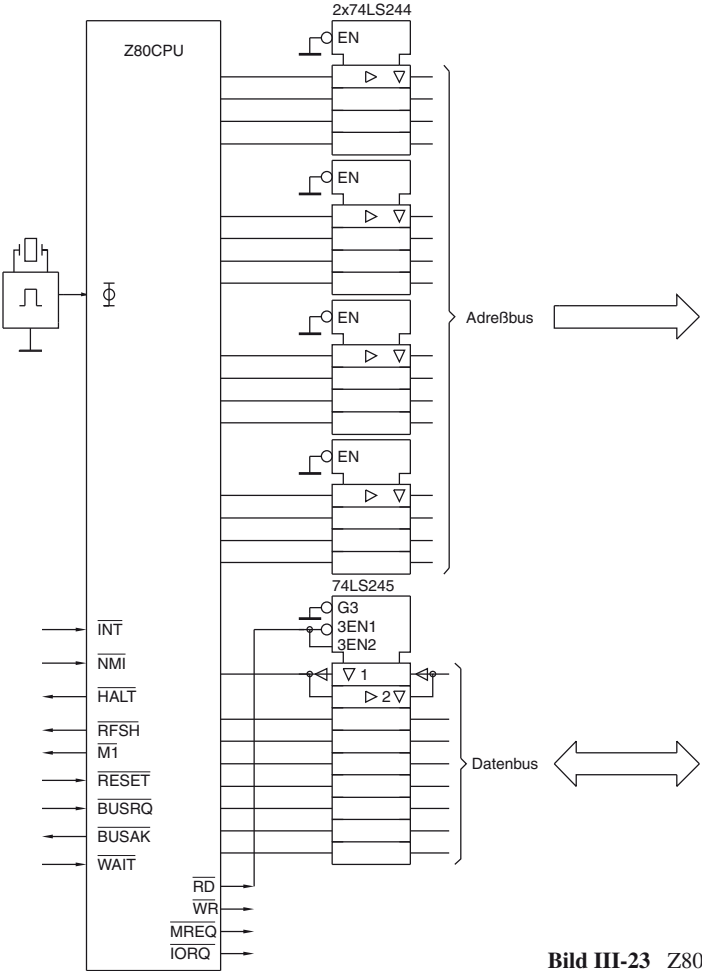


Bild III-23 Z80-System

Tabelle III-6 Bedeutung der Anschlüsse

|            |                                                                                                                                                                   |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| A0 ... A15 | Adressbus                                                                                                                                                         |
| D0 ... D7  | Datenbus                                                                                                                                                          |
| /RD        | Lesen                                                                                                                                                             |
| /WR        | Schreiben                                                                                                                                                         |
| /RFSH      | A0 ... A7 führen Refreshadresse (für dynamische Speicher)                                                                                                         |
| /HLT       | Software-Halt, die CPU wartet auf ein Interruptsignal                                                                                                             |
| /WAIT      | Wartesignal (CPU beginnt mit Wartezyklen)                                                                                                                         |
| /INT       | Interrupteingang                                                                                                                                                  |
| /NMI       | Nicht maskierbarer Interrupt (ADR 0066)                                                                                                                           |
| /MREQ      | Speicheranforderung. Bei „L“ an diesem Anschluss steht auf dem Adressbus eine Adresse für einen Speicherzugriff an.                                               |
| /IOREQ     | E/A-Bausteinanforderung                                                                                                                                           |
| /BUSRQ     | Busanforderung externer Geräte. Das interne Bussystem wird in den hochohmigen Zustand gebracht, damit externe Geräte Adress-, Daten- und Steuerbus nutzen können. |
| /BUSAK     | Busanforderungsbestätigung. Hiermit wird externen Geräten bestätigt, dass Adress-, Daten- und Steuerbus benutzt werden darf.                                      |
| /RESET     | Rücksetzen                                                                                                                                                        |
| /M1        | Statusleitung (Maschinenzyklus 1)                                                                                                                                 |

Als Taktgenerator wird ein externer Oszillator eingesetzt. Bild III-23 zeigt die Z80 CPU und deren Anschlussbelegung mit Taktgenerator und Treiberstufen. Im Gegensatz zur 8085 CPU sind 16 Adressleitungen und 8 Datenleitungen herausgeführt. In Tabelle III-6 werden die Funktionen der jeweiligen Anschlüsse des Prozessors beschrieben.

Der Z80 verfügt über den Befehlssatz des 8085 hinaus über weitere Befehle und zusätzliche Adressierungsarten wie indizierte und relative Adressierung (siehe auch Abschnitt Maschinensprache). Der Operationscode ist mit dem Code der 8085 CPU identisch. Unterschiede bestehen in der Mnemonik (Assembler).

**Tabelle III-7** Peripheriebausteine für ein Z80-System

|         |                                       |
|---------|---------------------------------------|
| Z80-PIO | Parallel-E/A-Baustein                 |
| Z80 CTC | Zähler und Zeitgeberbaustein          |
| Z80 DMA | Baustein für direkten Speicherzugriff |
| Z80 SIO | Serieller E/A-Baustein                |

**2.5 16-Bit-Prozessoren**

In Personalcomputern ist die 8086-Familie sehr verbreitet (8086, 80286, 80386, 80486).

**2.5.1 8086/80286**

Die Prozessoren besitzen einen gemultiplexten Daten-Adressbus (AD0 ... AD15) und die Adressleitungen A16 ... A19. Damit steht ein Adressbereich von 1 MByte ( $2^{20} = 1048576$ ) zur Verfügung. Der 8086 kann in den Betriebsarten *MIN-* und *MAX-Mode* eingesetzt werden. Die Auswahl erfolgt mit dem Anschluss MN/MX. Im MIN-Mode werden die Steuersignale für Speicher und E/A-Bausteine vom Prozessor erzeugt, und im MAX-Mode werden komplexere Systeme mit einem zusätzlichen Steuerbaustein zur Systemsteuerung (Buscontroller) betrieben. Bild III-24 zeigt die Pinbelegung beider Prozessoren und Tabelle III-8 die Bedeutung der Anschlüsse. Tabelle III-9 und III.10 beschreiben Steuerfunktionen.

Das Prinzip des Prozessors beschreibt Bild III-25, und der Registersatz ist im Bild III-26 wiedergegeben.

| 8086 |       |      |    | 80286 |            |       |    |
|------|-------|------|----|-------|------------|-------|----|
| 19   | CLK   | AD0  | 16 | 36    | D0         | A0    | 34 |
|      |       | AD1  | 15 | 38    | D1         | A1    | 33 |
|      |       | AD2  | 14 | 40    | D2         | A2    | 22 |
| 22   | READY | AD3  | 13 | 42    | D3         | A3    | 28 |
| 21   | RESET | AD4  | 12 | 44    | D4         | A4    | 27 |
|      |       | AD5  | 11 | 46    | D5         | A5    | 26 |
| 31   | HOLD  | AD6  | 10 | 48    | D6         | A6    | 25 |
| 30   | HLDA  | AD7  | 9  | 50    | D7         | A7    | 24 |
|      |       | AD8  | 8  | 37    | D8         | A8    | 23 |
| 18   | INTR  | AD9  | 7  | 39    | D9         | A9    | 22 |
|      |       | AD10 | 6  | 41    | D10        | A10   | 21 |
| 17   | NMI   | AD11 | 5  | 43    | D11        | A11   | 20 |
|      |       | AD12 | 4  | 45    | D12        | A12   | 19 |
| 23   | TEST  | AD13 | 3  | 47    | D13        | A13   | 18 |
|      |       | AD14 | 2  | 49    | D14        | A14   | 17 |
| 33   | MN/MX | AD15 | 39 | 51    | D15        | A15   | 16 |
|      |       | AD16 | 38 |       |            | A16   | 15 |
|      |       | AD17 | 37 |       |            | A17   | 14 |
|      |       | AD18 | 36 |       |            | A18   | 13 |
|      |       | AD19 | 35 |       |            | A19   | 12 |
|      |       |      |    |       |            | A20   | 11 |
|      |       | DEN  | 26 |       |            | A21   | 10 |
|      |       | DT/R | 27 |       |            | A22   | 8  |
|      |       | M/IO | 28 | 31    | CLK        | A23   | 7  |
|      |       |      |    | 63    | READY      |       |    |
|      |       | ALE  | 25 | 64    | HOLD       | BHE   | 1  |
|      |       | INTA | 24 | 57    | INTR       | S0    | 5  |
|      |       |      |    | 59    | NMI        | S1    | 4  |
|      |       | BHE  | 34 | 61    | PREQM/IO*  |       | 67 |
|      |       | RO   | 32 | 54    | BUSC/INTA* |       | 66 |
|      |       | WR   | 29 | 53    | ERROR LOCK |       | 68 |
|      |       |      |    | 29    | RESET      | HLDA  | 65 |
|      |       |      |    | 52    | CAP        | PEACK | 6  |

**Bild III-24**  
CPU 8086 und 80286

Tabelle III-8 Bedeutung der Anschlüsse

|              |                              |                                   |
|--------------|------------------------------|-----------------------------------|
| AD0 ... AD15 | Adress-/Datenbus             | Lesen                             |
| RD           | Read                         | Schreiben                         |
| WR           | Write                        | AdresszwischenSpeicherung         |
| ALE          | Adress Latch Enable          | Interruptabfrage                  |
| INTR         | Interrupt Request            | Interruptbestätigung              |
| INTA         | Interrupt Acknowledge        | Nicht maskierbarer Interrupt      |
| NMI          | Non Mascable Interrupt       | Überprüfung des Wartezyklus       |
| TEST         | Test                         | Rücksetzen                        |
| RESET        | Reset                        | Takt                              |
| CLK          | Clock                        | Minimum-/Maximum-Mode             |
| MN/MX        | Min/Max                      | Freigabe von L- oder H-Adressteil |
| BHE/S7       | Bus High Enable/Status       | Busfreigabe (Datenübertragung)    |
| DEN          | Data Enable                  | Datenübertragung/-empfang         |
| DT/R         | Data Transmit/Receive        | Speicher und E/A-Zugriff          |
| M/IO         | Memory/IO                    |                                   |
| HOLD         | Aufruf externer Geräte (DMA) |                                   |
| HLDA         | Bestätigung auf HOLD (DMA)   |                                   |
| LOCK         | Angabe über Sperrung der CPU |                                   |
| S0, S1, S2   | Statusinformation            |                                   |

Tabelle III-9 Steuerfunktionen

| BHE | A0 | Funktion                    |
|-----|----|-----------------------------|
| 0   | 0  | Gesamtes Wort               |
| 0   | 1  | Oberes Byte von/zu Adresse  |
| 1   | 0  | Unteres Byte von/zu Adresse |
| 1   | 1  | keine Funktion              |

Tabelle III-10 Statusinformation

| S2 | S1 | S0 | Funktion             |
|----|----|----|----------------------|
| 0  | 0  | 0  | Interruptbestätigung |
| 0  | 0  | 1  | E/A-Lesen            |
| 0  | 1  | 0  | E/A-Schreiben        |
| 0  | 1  | 1  | Halt                 |
| 1  | 0  | 0  | Codezugriff          |
| 1  | 0  | 1  | Speicher lesen       |
| 1  | 1  | 0  | Speicher schreiben   |
| 1  | 1  | 1  | Passiv               |

die Steuerung der Busschnittstelle. In der Befehlseinheit werden die von der Befehlswarteschlange (Instruction Queue) gelieferten Befehle decodiert. Bei Befehlsausführung kann die Befehlswarteschlange parallel mit dem nachfolgenden Maschinencode geladen werden.

Damit steuert diese Einheit alle Vorgänge des Systems. Hauptbestandteil der Ausführungseinheit ist die aus 8-Bit-Systemen bekannte ALU.

Die vier Hauptregister der Execution Unit A, B, C und D sind aus je zwei 8-Bit-Registern (L = Low und

Memory Interface

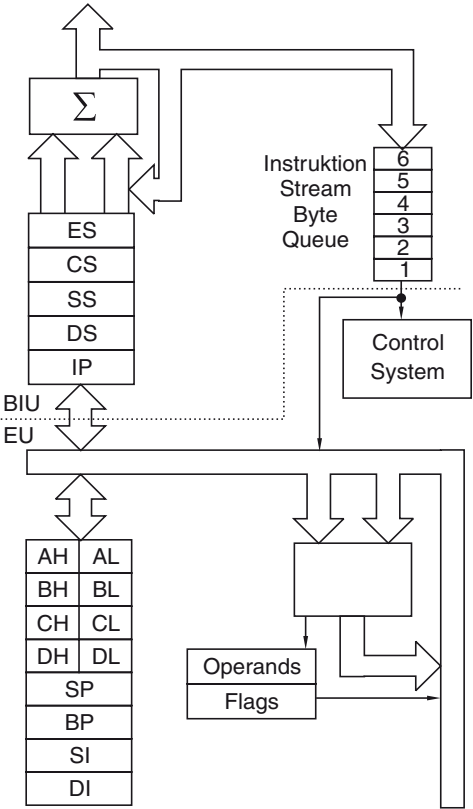
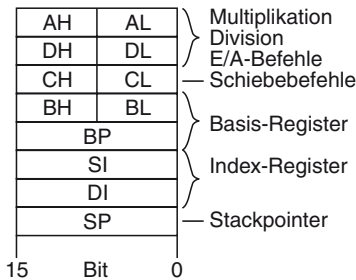


Bild III-25 Blockbild der 8086 CPU

Allgemeine Registerkarte



Segment Register

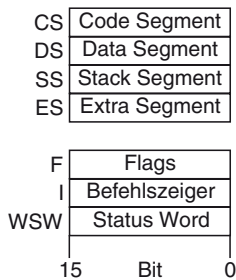


**Bild III-26**  
Registersatz und Funktion

H = High) zusammengesetzte 16-Bit-Register. Sie dienen zur Aufnahme von arithmetischen und logischen Operanden. Die Breite der übrigen Register beträgt 16 Bit. Das SP-Register (Stack Pointer) und BP-Register (Base Pointer) können für Stack- und 16-Bit-Operationen verwendet werden. SI- und DI-Register sind Indexregister (Source Index = Quelle, Destination = Ziel).

**2.5.2 Adressenbildung**

In der BIU befinden sich die Segmentregister ES (Extra-Segment), CS (Code-Segment), SS (Stack Segment) und DS (Daten-Segment). Ihre Aufgabe ist es, den Speicherbereich über Segmente in vier Bereiche bis zu 64 KByte zu verwalten (Real Mode). Die Anfangsadressen stehen jeweils in den Segment-

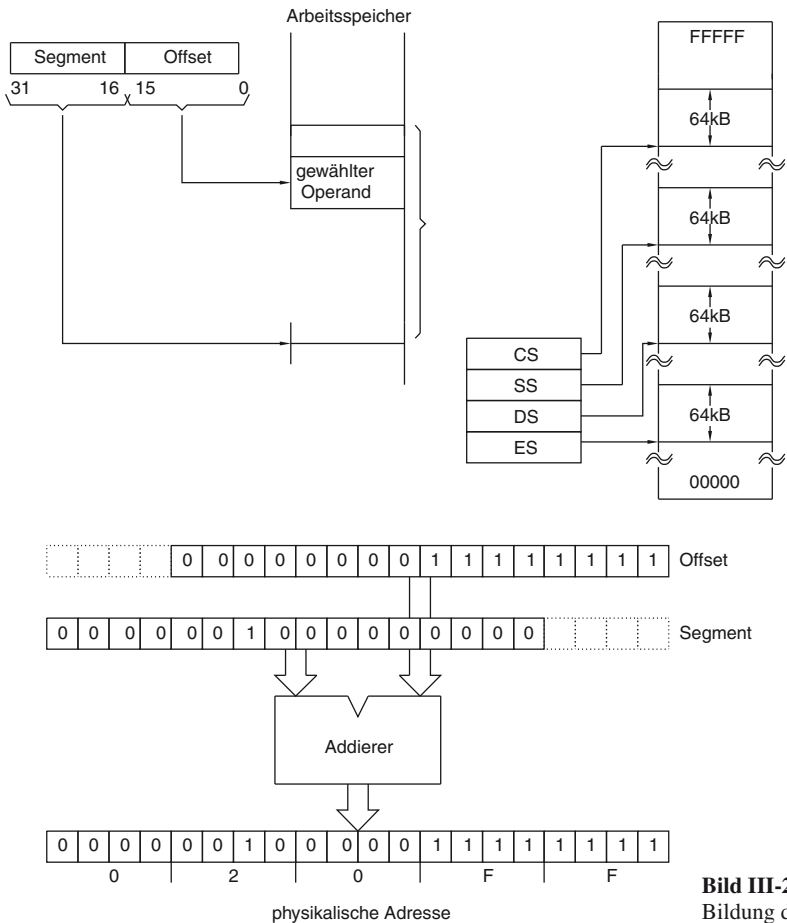


**Bild III-27**  
Bildung der physikalischen Adresse



registern. Mit ihrer Hilfe und dem Befehlszeiger IP (Offset) wird die physikalische Adresse (absolute Adresse) nach Bild III-27 gebildet. Hierbei wird die 16-Bit Offsetadresse als L- und die 16-Bit-Segmentadresse als H-Teil einer fiktiven 20-Bit-Adresse angesehen. Das gewählte Segment gibt die Anfangsadresse des Segments an, und der Offset zeigt auf den gewählten Operanden. Ihre Addition ergibt somit die physikalische 20-Bit-Adresse.

Ein Mikroprozessorsystem mit 16-Bit-Prozessoren besitzt außer den bekannten Speicher- und Ein- und Ausgabeeinheiten spezielle Peripheriebausteine, die jeweils eine besondere Aufgabe übernehmen, wie beispielsweise der Buscontroller (siehe auch Peripheriebausteine). Bild III-28 zeigt schematisch ein 8086-System. Der Transceiver ist vergleichbar mit dem Zweirichtungstreiber in 8-Bit-Systemen. Über den Eingang T wird die Datenrichtung festgelegt, und mit /OE kann der BUS hochohmig geschaltet werden.

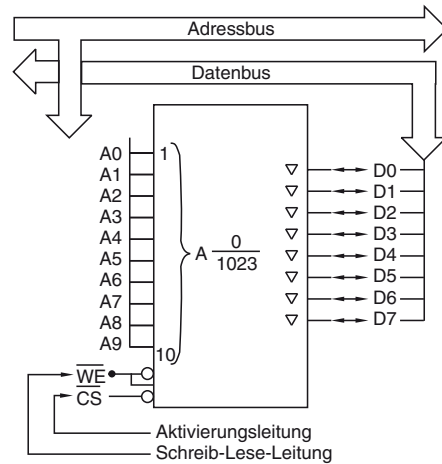


Bild III-29 Anschlüsse an einem Speicherbaustein

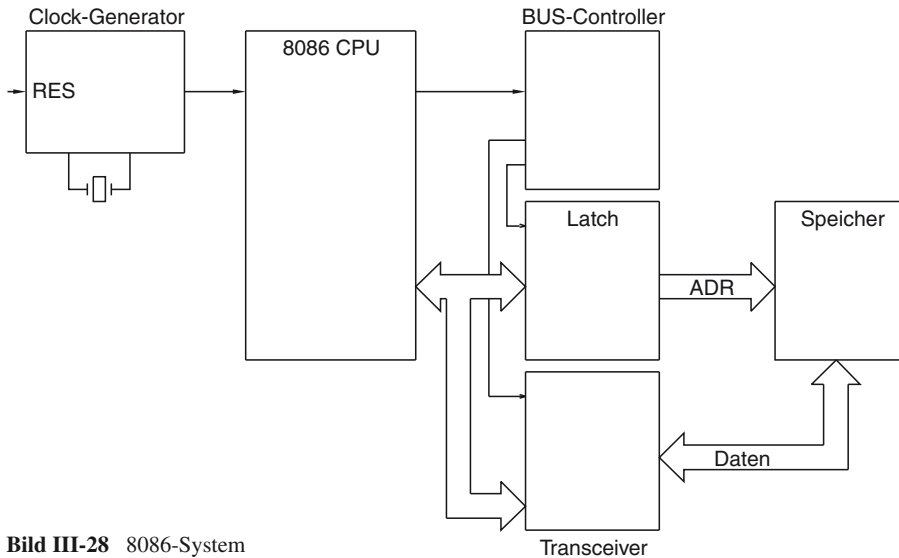


Bild III-28 8086-System

### 3 Halbleiterspeicher

#### 3.1 Allgemeines

Speicher dienen zur Speicherung und Sicherung von Daten und Programmen. Der Speicherbaustein muss den Prozessor mit Daten beliefern, und der Prozessor muss Daten darin ablegen können. Zur Auswahl eines bestimmten Speicherplatzes, einer Adresse, werden dem Baustein Adressleitungen zugeführt. Die Daten gelangen über den Datenbus zum und vom Speicher, wenn der Prozessor die Schreib-Lese-Leitung aktiviert und die Speicherzelle ausgewählt wurde. Um eine Unterscheidung verschiedener Speicher durchführen zu können, besitzt der Baustein Aktivierungs- oder Auswahleingänge. Bild III-29 zeigt die Anschlüsse eines  $1\text{ K} \times 8\text{ Bit}$ -Schreib-Lese-Speichers.

#### 3.2 Kenndaten und Technologie

Wichtige Kenndaten eines Speichers sind die Speicherkapazität (Capacity) in Verbindung mit der Angabe über die Speicherorganisation, die Zugriffszeit (Access Time), die von der Ansprache des Speichers vergeht bis zur Verfügbarkeit der Daten und die Leistungsaufnahme im aktiven und Ruhe-Betrieb (Standby). Die Speicherkapazität gibt die Informationsmenge an, die der Speicher aufnehmen kann. Sie wird üblicherweise in Kbit, KByte oder MByte angegeben. Die Kenndaten selbst sind von der Technologie, also dem Herstellungsverfahren des Speichers, abhängig. Hier unterscheidet man bipolare Speicher, deren Grundelemente der TTL- oder ECL-Technologie entsprechen, von unipolaren Speichern, deren Grundelemente in MOS-Technologie gefertigt sind.

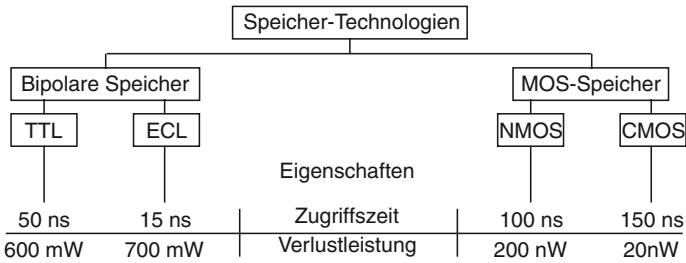


**Bild III-30**  
Speichertechnologien und  
Eigenschaften

Bipolare Speicher besitzen zwar eine geringere Zugriffszeit, haben aber eine höhere Leistungsaufnahme sowie eine geringere Integrationsdichte als unipolare Speicher, (siehe Bild III-30). Die heutigen großen Speicherkapazitäten werden mit CMOS-Speichern erreicht. Für den Entwickler spielt das Preis-Leistungsverhältnis und notwendige zusätzliche Steuerbausteine noch eine bedeutende Rolle.

3.3 Bedeutung der Anschlüsse

Tabelle III-11 fasst die Anschlussbedeutungen, die bei Speichern auftreten, zusammen.

Tabelle III-11 Anschlussbedeutungen

|                  |                                                                                                                                |
|------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| A0 ... An        | Adressleitungen; über diese Leitungen wird der Speicherplatz angewählt.                                                        |
| D0 ... Dn        | Datenleitungen; über diese Leitungen gelangen Daten vom oder zum Speicher.                                                     |
| CE, CE1, CE2, CS | Chip Enable, Chip Select; über diese Leitung(en) kann der Speicherbaustein angewählt werden.                                   |
| WE, WR           | Write Enable, Write; diese Leitung wird von der CPU aktiviert, wenn Daten in den Speicher geschrieben werden sollen.           |
| RD               | Read; diese Leitung wird von der CPU aktiviert, wenn Daten vom Speicher gelesen werden sollen.                                 |
| O0 ... On        | Output, Datenausgänge                                                                                                          |
| OE               | Output Enable; mit dieser Leitung werden die Ausgänge eines Speichers freigegeben.                                             |
| ALE              | Adress Latch Enable; an diesem Anschluss kann die CPU bei einem gemultiplexten Adress-/Datenbus die Adresse zwischenspeichern. |
| RAS              | Row Adress Select, Zeilenauswahlleitung                                                                                        |
| CAS              | Column Adress Select, Spaltenauswahlleitung                                                                                    |
| Vpp              | Programming Voltage; an diesem Anschluss wird die Programmierspannung angelegt.                                                |
| VCC              | Betriebsspannungsanschluss                                                                                                     |
| GND              | Ground, Masseanschluss                                                                                                         |

3.4 Organisation und Aufbau

Die Speicherzellen in einem Speicherbaustein sind matrixförmig angeordnet, um die Anzahl der Auswahlleitungen möglichst gering zu halten. Die Ansprache der Speicherzelle ist nur möglich, wenn jeweils gleichzeitig eine Zeilenleitung und eine Spaltenleitung, oder auch X- und Y-Leitung, aktiv sind. Durch die Anordnung innerhalb der Matrix ist jede Speicherstelle eindeutig bestimmt. Die Auswahl der Speicherstelle in der Matrix erfolgt über einen Zeilen- und Spaltendecoder, der jeweils über Adressleitungen angesteuert wird. Die Anzahl der Adressleitungen ist von der Anzahl der Speicherstellen abhängig.

- **Beispiel:** Für einen 16-Bit Speicher (siehe Bild III-31) sind normalerweise 16 Auswahlleitungen erforderlich. Durch den matrixförmigen Aufbau reduzieren sich die Auswahlleitungen auf 8, da 4 Zeilen- und 4 Spaltenleitungen benötigt werden. Mit Hilfe jeweils eines 4-aus-1-Decoders können die 4 Leitungen von zwei Adressen angesprochen werden. Damit ergeben sich für den 16-Bit Speicher insgesamt 4 Adressleitungen. Um n-Speicherstellen zu adressieren, benötigt man 2<sup>n</sup> Adressleitungen.
- **Beispiel:** Ein Speicher mit der Organisation 4 K × 8 Bit besitzt 4096 Speicherstellen mit einer Wortbreite von 8 Bit. Damit sind 12 Adressleitungen nötig.

$$\text{Adressleitungen} = \frac{\ln \text{Speicherkapazität}}{\ln 2} = \frac{\ln 4096}{\ln 2} = 12 \quad \text{(III.1)}$$

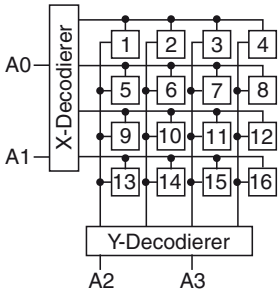
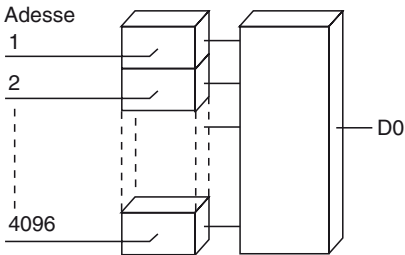


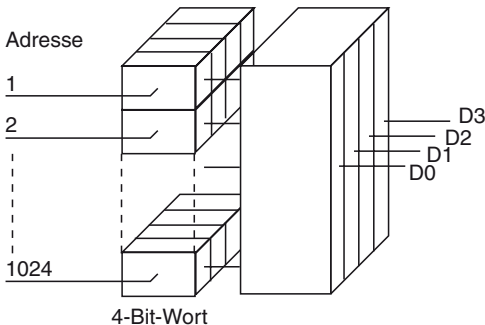
**Bild III-31** Speichermatrix

3.4.1 Bitorganisierter und wortorganisierter Speicher

Der *bitorganisierte* Speicher speichert pro Adresse nur ein Bit. Er ist somit unabhängig von der Datenwortbreite. Beim *wortorganisierten* Speicher steht in jeder Adresse ein Datenwort. Damit sind n-Bitstellen gemeint, die gleichzeitig von einer Adresse angesprochen werden. Wortorganisierte Speicher, deren Wortbreite der Datenbreite des Mikroprozessors entsprechen, werden häufig für Arbeitsspeicher bei kleineren Mikroprozessor- oder Mikrocontrollersystemen eingesetzt (z.B. 8-Bit-Systemen). Ein Speicher mit der Kapazität von 4096 Bit kann als bitorganisierter Speicher ( $4\text{ K} \times 1\text{ Bit}$ ) (Bild III-32) oder als wortorganisierter Speicher ( $1\text{ K} \times 4\text{ Bit}$ ) (Bild III-33) aufgebaut sein ( $1\text{ K Bit} = 2^{10}\text{ Bit}$ ). Beim bitorganisierten Speicher ist jeder Speicherzelle eine



Adresse zugeordnet, während der wortorganisierte Speicher pro Wort eine Adresse besitzt. Legt man die Anzahl der Speicherstellen zugrunde, dann besitzen beide dargestellten Speicher die gleiche Speicherkapazität.



Ist beim bitorganisierten Speicher eine bestimmte Wortbreite erforderlich, müssen verschiedene Speicher mit der gleichen Adresse angesprochen werden. Für ein 4-Bit-Datenwort müssen 4 Speicherbausteine adressenmäßig parallel geschaltet und mit /CS und /WE gleichzeitig angesprochen werden (Bild III-34). Zur Aus- und Eingabe von Daten ist eine interne Steuerschaltung notwendig, die je nach Speicher unterschiedlich sein kann. Sie erfolgt über die Steuer-

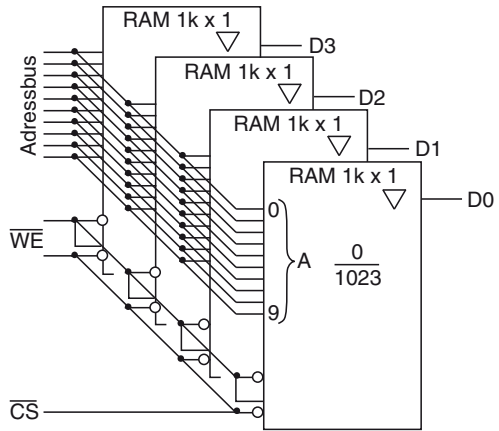


Bild III-34 Vom bit- zum wortorganisierten Speicher

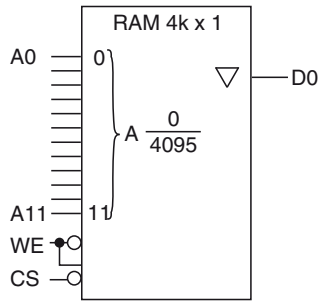


Bild III-32 Prinzip und Schaltbild eines bitorganisierten Speichers

eingänge WE (Write Enable = Schreibfreigabe) und CS (Chip Select = Bausteinauswahl) und ist häufig „Low“-aktiv (Bild III-35). Mit /CS oder /CE wird der einzelne Speicherbaustein ausgewählt. Beschrieben und ausgelesen wird er

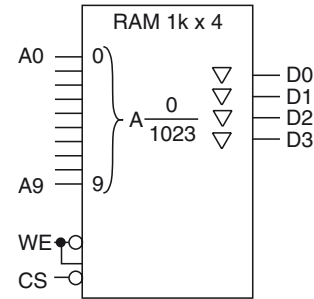
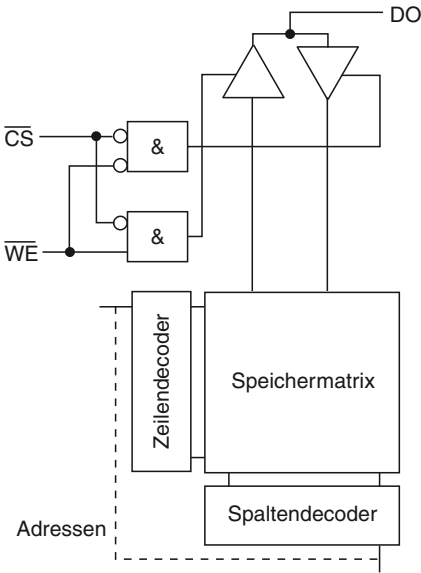


Bild III-33 Prinzip eines wortorganisierten Speichers und Schaltbild

durch Pegelumschaltung am WE- oder RD- und /WR-Eingang.

3.4.2 Speicher mit Adressenzwischenspeicher

Außer Schreib-Leseeingang und Bausteinauswahl gibt es Speicher, die einen weiteren Steuereingang ALE (Address-Latch-Enable) besitzen und damit ein internes Adressenzwischenregister. Sie können direkt an den gemultiplexten Daten-Adressbus eines Mikro-



| CS | WE | Funktion               |
|----|----|------------------------|
| 0  | 0  | Einschreiben der Daten |
| 0  | 1  | Auslesen der Daten     |
| 1  | x  | Baustein hochohmig     |

Bild III-35 Prinzip der Datensteuerung

controllers oder Mikroprozessors angeschlossen werden. Speicher und Prozessor sparen so Anschlussleitungen. Die Adressen und Daten werden hier zeitlich nacheinander auf gleichen Leitungen übertragen. Mit ALE übergibt der Prozessor seine Adresse einem Adressenzwischenspeicher im Speicherbaustein und liefert oder holt anschließend die Daten. Speicher ohne Adressenzwischenregister können von einem Prozessor mit gemultiplextem Daten-Adressbus nur über ein externes Zwischenregister angesteuert werden. Im Bild III-36 ist ein Speicher mit und ohne Steuereingang ALE an einem Mikroprozessor angeschlossen.

3.5 Zeitverhalten

Damit der Speicher seine Funktion durchführt, muss der Prozessor über den Steuerbus zeitliche Bedingungen einhalten (Bild III-37). Beispielsweise muss zunächst die gewünschte Adresse auf dem Adressbus anliegen, dann muss der Baustein, der diese Adresse besitzt, mit dem Auswahlsignal /CS angewählt werden. Desweiteren müssen Daten vom Datenbus angeboten werden, um sie danach mit dem Schreibsignal in den Speicher zu bringen.

Damit die gewünschten Daten den Speicher oder die Daten des Speichers den Prozessor erreichen, müssen bestimmte zeitliche Bedingungen eingehalten werden. Zwischen dem Anliegen der Adresse ( $t_{WC} = \text{Write Cycle Time}$ ) und dem Einschreiben der Daten ist eine Zeitspanne  $t_{AS}$  (Adress Setup Time) erforder-

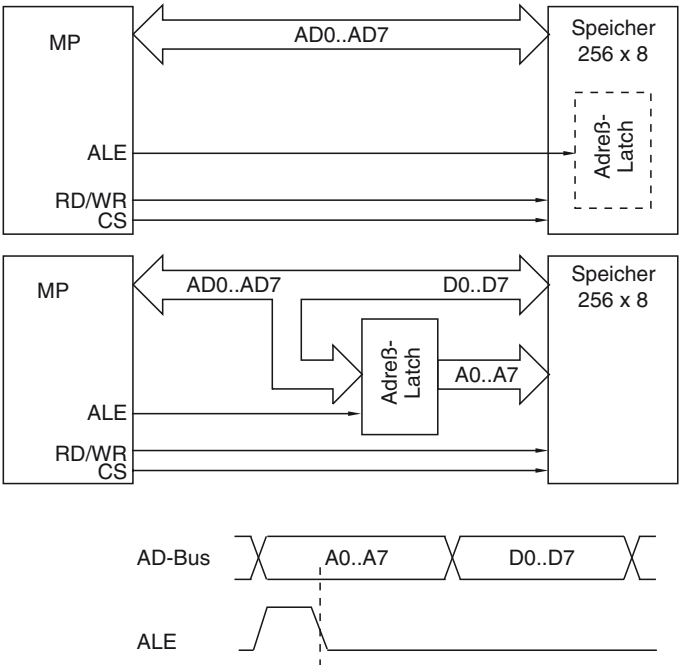


Bild III-36 Speicher mit und ohne Adressenzwischenspeicher

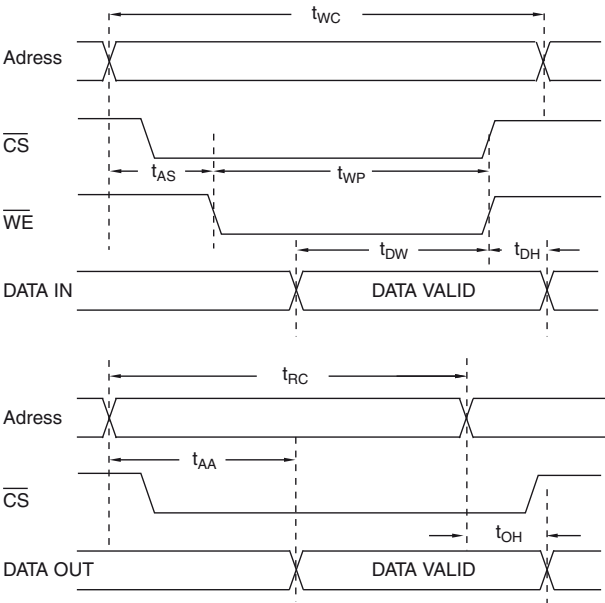


**Bild III-37**  
Zeitverhalten auf den Bus- und Steuerleitungen

lich, weil sonst die Daten eine falsche Speicherstelle erreichen. Die Zeit, die benötigt wird, um das Einschreiben der Daten in den Speicher zu gewährleisten, ist die Mindestdauer des Schreibimpulses ( $\overline{WE}$ ) und wird  $t_{WP}$  (Write Pulse Width) genannt. Zur korrekten Datenübertragung müssen die Daten auf dem Datenbus stabil sein. Diese Zeit, in der sich die Daten auf dem Datenbus (Data Valid = Daten gültig) eingependelt haben, nennt man  $t_{DW}$  (Data Valid Time). Mit  $t_{DH}$  (Data Hold Time) wird die Zeit nach Ablauf des Schreibimpulses bezeichnet, solange noch Daten und Adressen anliegen. Beim Lesezyklus  $t_{RC}$  (Read Cycle Time) stabilisieren sich die Adressen auf dem Bus in der Zugriffszeit  $t_{AA}$  (Address Access Time). Anschließend können die Daten gelesen werden.

3.6 Speichertypen

Es werden zwei Hauptgruppen von Speichertypen unterschieden: Schreib-Lesespeicher und Festwertspeicher. Während Schreib-Lesespeicher als Arbeitsspeicher dienen, liegen in Festwertspeichern häufig benötigte konstante Daten vor, wie beispielsweise Tabellen oder Teile eines Betriebssystems (Firmware).

3.6.1 Festwertspeicher

ROM (Read Only Memory = Nur-Lese-Speicher) sind Speicher, die im Normalbetrieb nicht beschrieben, sondern nur ausgelesen werden. Es sind *Festwertspeicher* (Nonvolatile Read-Only-Memory = nicht

| Festwertspeicher ROM                 |                                                     |                                                |
|--------------------------------------|-----------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| Type                                 | Programmierung                                      | Löschverfahren                                 |
| ROM<br>Read only Memory              | Wird vom Hersteller mit Hilfe einer Maske gefertigt | nicht löschar                                  |
| PROM<br>Programmable ROM             | Durch Einsatz von Programmiergeräten (elektrisch)   | nicht löschar                                  |
| EEPROM<br>ELectrically PROM          | Durch Einsatz von Programmiergeräten (elektrisch)   | Durch UV_Licht nur völlig löschar              |
| EEPROM<br>Electrically Erasable PROM | elektrisch in der Schaltung programmierbar          | Durch elektrische Impulse gezielt löschar      |
| Flash-EPROM                          | elektrisch in der Schaltung programmierbar          | elektrisch in der Schaltung nur völlig löschar |

**Bild III-38**  
Festwertspeicher

flüchtige Speicher), da sie ihre Information ohne anliegende Betriebsspannung beibehalten. Daten und Programme gehen bei Ausfall der Spannungsversorgung nicht verloren. Bild III-38 gibt eine Übersicht über Festwertspeicher.

3.6.1.1 Masken-ROM

Für Standardanwendungen kann der Hersteller ROM-Bausteine mit Hilfe einer Maske fertigen. Man spricht dann von einem Masken-ROM. Der Inhalt des Speichers ist nicht mehr veränderbar. Bild III-39 zeigt das Schaltbild eines ROM und die vereinfachte Darstellung.

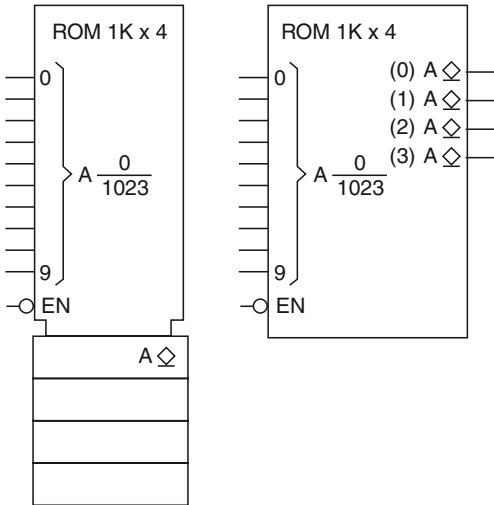


Bild III-39 Schaltbild eines ROM und vereinfachte Darstellung

3.6.1.2 PROM

ROM, die mit Hilfe von Programmiergeräten programmiert werden können, sind PROM (Programmable Read Only Memory) oder *fusible* PROM (Sicherungs-PROM). Der Hersteller oder Anwender kann diese Bausteine nach eigenem Wunsch programmieren. Aufgebaut sind solche Festwertspeicher in Form einer Dioden- oder Transistormatrix (Bild III-40). Beim Programmiervorgang werden durch einen Stromstoß leitende Verbindungen abgeschmolzen. Einmal programmierte PROM behalten ihre Daten und sind nicht mehr löschar.

Die Ausgänge D0 ... D4 können in Abhängigkeit der Adresse die einprogrammierten Daten ausgeben. Die Leitungen X0 ... X3 nennt man Wortleitungen, die Leitungen Y0 ... Y3 werden Bit-Leitungen genannt. Mit 2 Adressleitungen lassen sich 4 Wortleitungen ansprechen. Der Eingang CS (Chip Select) dient zur Anwahl des Speichers, und mit OE (Output Enable) werden die Ausgangstreiber aktiviert.

3.6.1.3 EPROM

Ein EPROM (Erasable PROM) ist ein programmierbarer und löscharer Festwertspeicher. Der Speicherinhalt kann durch Löschen und erneutes Beschreiben geändert werden. Beim Abschalten der Betriebsspannung gehen die Daten nicht verloren. Die Funktion einer Speicherzelle beruht auf Veränderung der Leitfähigkeit eines MOS-Transistors mit einem schwebenden (nicht angeschlossenen) Gate (FAMOS = Floating Gate Avalanche Injection MOS). Im nicht programmierten Zustand sperrt der Transistor. Leitend wird der Transistor durch den Programmiervorgang, bei dem dem Gate mit Hilfe des Lawineneffekts (Avalanche-) eine Ladung aufgebracht wird.

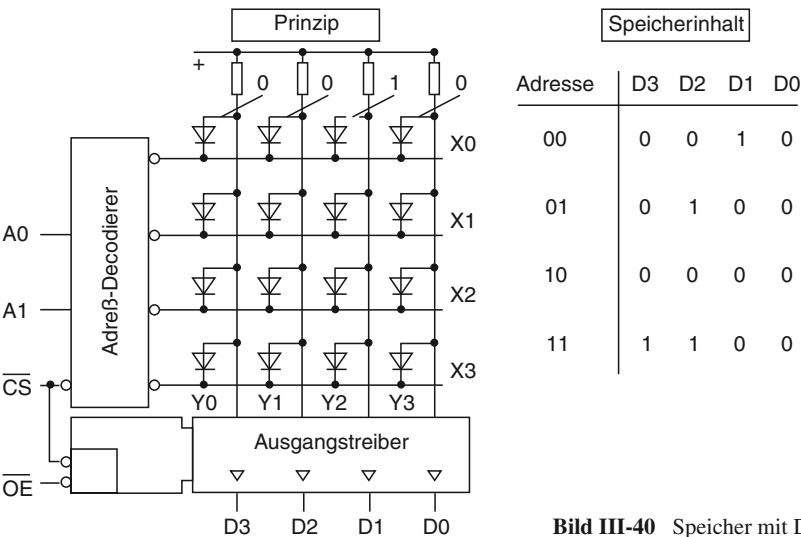


Bild III-40 Speicher mit Diodenmatrix

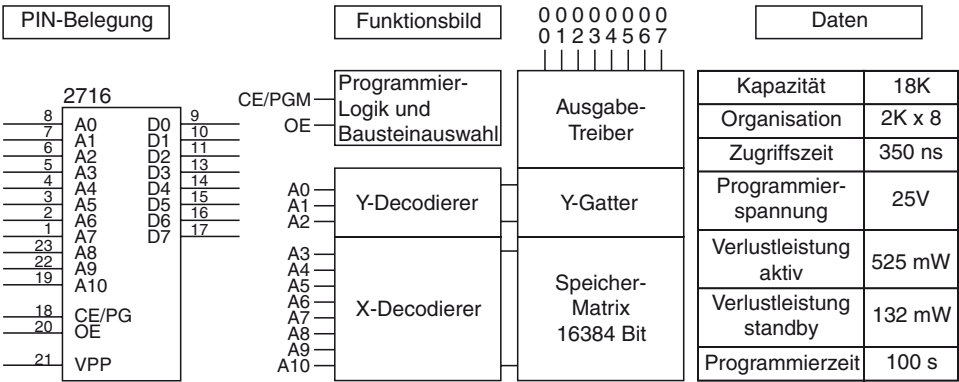


Bild III-41 EPROM

EPROM-Bausteine besitzen auf ihrer Oberseite ein Glasfenster, um ein Löschen zu ermöglichen. Dies geschieht durch Bestrahlung mit UV-Licht mit definierter Wellenlänge und Strahlungsdichte. Die Dauer der Bestrahlung ist vom Bausteintyp abhängig (ca. 30 Min.). Der Löschvorgang löscht den gesamten Speicherinhalt. Eine unprogrammierte oder gelöschte Speicherstelle besitzt immer „1“ als Information.

Zur Programmierung werden entsprechende Programmiergeräte benötigt. Die notwendige Programmiervoltage ist vom Bausteintyp abhängig und höher als die Betriebsspannung (Tabelle III-12). Nach dem Programmiervorgang ist das Löschenfenster zuzukleben, um kein Außenlicht eindringen zu lassen.

- *Standby*  
Im nicht aktiven Zustand (standby) werden interne Stufen des Bausteins abgeschaltet. Dadurch vermindert sich die Verlustleistung. Der Wartezustand wird durch eine „1“ am Eingang CE erreicht. Die Ausgänge sind in dieser Betriebsart hochohmig, unabhängig vom Eingang OE.
- *Löschen*  
Das Löschen geschieht mit ultravioletter Bestrahlung. Nach dem Löschen liegt in jeder Speicherzelle die Information „1“.
- *Programmieren*  
Die Adresse der Speicherstelle, die programmiert werden soll, muss anliegen. Mit OE (Output Enable) werden dann die Ausgangstreiber gesperrt und die Programmiervoltage von 25 V angelegt. Während sich die Daten auf dem Datenbus befinden, wird über den Eingang CE/PGM (Chip Enable) der Programmierimpuls zugeleitet. Die Einhaltung der Adressenreihenfolge ist nicht notwendig. Allerdings müssen gewisse zeitliche Bedingungen wie die Impulslänge am Eingang CE eingehalten werden.

Tabelle III-12 EPROM-Beispiele

| Type                | Kapazität | Organisation | Zugriffszeit | Leistungsaufnahme |        |
|---------------------|-----------|--------------|--------------|-------------------|--------|
| Programmierspannung |           |              |              |                   |        |
| 2716                | 16 K      | 2 K × 8      | 350 ns       | 500/125 mW        | 25 V   |
| 2732                | 32 K      | 4 K × 8      | 250 ns       | 625/175 mW        | 21 V   |
| 2764                | 64 K      | 8 K × 8      | 250 ns       | 500/200 mW        | 21 V   |
| 27C256              | 256 K     | 32 K × 8     | 120 ns       | 150/0,5 mW        | 12,5 V |
| 27C512              | 512 K     | 64 K × 8     | 120 ns       | 150/0,5 mW        | 12,5 V |
| 27C100              | 1 M       | 128 K × 8    | 120 ns       | 150/0,5 mW        | 12,5 V |

(Nach Datenblatt der Firma INTEL)

Nachteil: Es ist nur möglich, den Gesamtbaustein zu löschen. Dazu muss er aus der Schaltung herausgenommen werden.

Beschreibung der Betriebsarten:

- *Lesezyklus*  
Nach dem Anlegen einer gültigen Adresse wird der Baustein mit CE = „0“ aktiviert. Anschließend kann mit OE = „0“ der Dateninhalt der Adresse auf die Datenleitungen geschaltet werden. Danach wird mit OE = „1“ und CE = „1“ der Datenausgang hochohmig.

able) werden dann die Ausgangstreiber gesperrt und die Programmiervoltage von 25 V angelegt. Während sich die Daten auf dem Datenbus befinden, wird über den Eingang CE/PGM (Chip Enable) der Programmierimpuls zugeleitet. Die Einhaltung der Adressenreihenfolge ist nicht notwendig. Allerdings müssen gewisse zeitliche Bedingungen wie die Impulslänge am Eingang CE eingehalten werden.

Bild III-42 zeigt das Impulsdigramm der Programmierung mit anschließender Lesekontrolle. Nach der

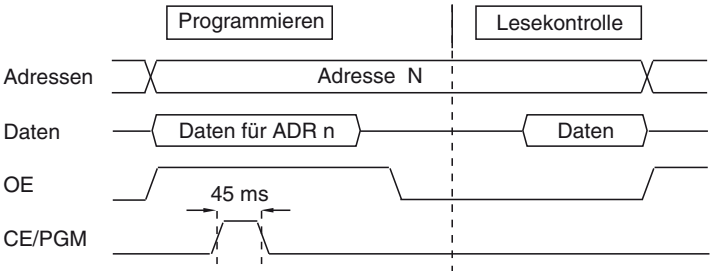


**Bild III-42**  
Programmierzklus

| 27512 | 27128 | 2754 | 2732 | 2716 |  | 2716 | 2732 | 2754 | 27128 | 27512 |
|-------|-------|------|------|------|--|------|------|------|-------|-------|
| A15   | Vpp   | Vpp  |      |      |  | VCC  | VCC  | VCC  | VCC   | VCC   |
| A12   | A12   | A12  |      |      |  | PGM  | PGM  | PGM  | PGM   | A14   |
| A7    | A7    | A7   | A7   | A7   |  | NC   | A8   | A8   | A13   | A13   |
| A6    | A6    | A6   | A6   | A6   |  | A8   | A8   | A8   | A8    | A8    |
| A5    | A5    | A5   | A5   | A5   |  | A9   | A9   | A9   | A9    | A9    |
| A4    | A4    | A4   | A4   | A4   |  | A11  | A11  | A11  | A11   | A11   |
| A3    | A3    | A3   | A3   | A3   |  | OE   | OE   | OE   | OE    | OE    |
| A2    | A2    | A2   | A2   | A2   |  | A10  | A10  | A10  | A10   | A10   |
| A1    | A1    | A1   | A1   | A1   |  | CE   | CE   | CE   | CE    | CE    |
| A0    | A0    | A0   | A0   | A0   |  | 07   | 07   | 07   | 07    | 07    |
| 00    | 00    | 00   | 00   | 00   |  | 06   | 06   | 06   | 06    | 06    |
| 01    | 01    | 01   | 01   | 01   |  | 05   | 05   | 05   | 05    | 05    |
| 02    | 02    | 02   | 02   | 02   |  | 04   | 04   | 04   | 04    | 04    |
| GND   | GND   | GND  | GND  | GND  |  | 03   | 03   | 03   | 03    | 03    |

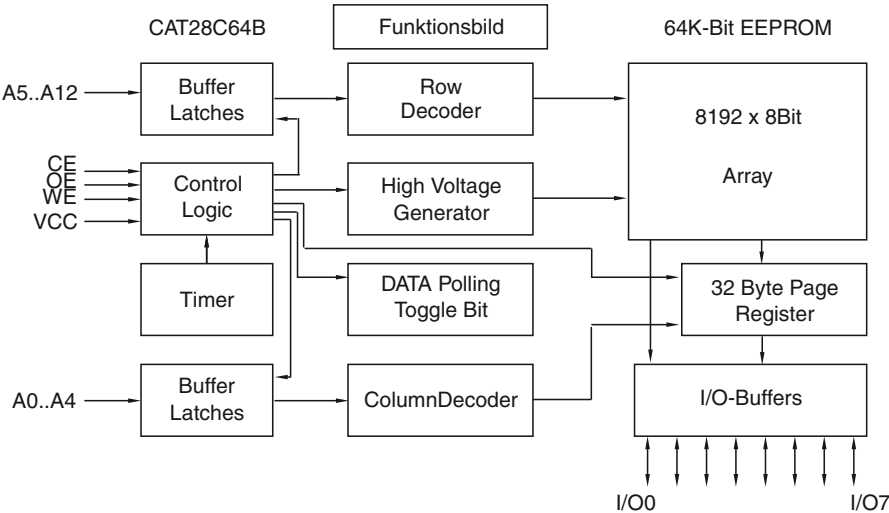
**Bild III-43** Anschlüsse verschiedener EPROM-Typen

Programmierung eines Datenwortes sollte immer eine Kontrolle der programmierten Bits erfolgen, um festzustellen, ob die gewünschten Daten im Speicher vorhanden sind (Verify Check). Hierbei darf bei diesem Baustein die Spannung am Anschluss  $V_{pp} = 25\text{ V}$  angeschaltet bleiben.

EPROM-Programmiergeräte können, da die Speicherbausteine standardisiert sind, sowohl 24polige als auch 28polige EPROMs aufnehmen (Bild III-43).

**3.6.1.4 EEPROM**

EEPROM (Electrically Erasable PROM), oft auch als  $E^2$ PROM bezeichnet, haben eine geringere Speicherdichte als EPROM's. Ihr Speicherprinzip beruht, wie bei den EPROM-Typen, auf dem „Floating Gate“ eines MOS-Transistors. EEPROM's können Wort für Wort elektrisch gelöscht und neu programmiert werden. Allerdings ist die Zahl der möglichen Lös-



Nach Datenblatt der Firma CATALYST

**Bild III-44** Funktionsbild eines EEPROM



und Programmiervorgänge (ca. 10000 Programmierzyklen) begrenzt. War der Datenerhalt vor einiger Zeit noch mit bis zu 10 Jahren angegeben, so liegen heutige Angaben bei bis zu 100 Jahren. EEPROM's verlieren ihre Daten bei Betriebsspannungsausfall nicht. Der Vorteil gegenüber EPROM's liegt darin, dass die Daten der einzelnen Speicherstellen gezielt in der Schaltung verändert werden können, ohne den Baustein zu entnehmen. Der schnelle Löschvorgang innerhalb weniger Millisekunden ist ein weiterer Vorteil. Ein EEPROM benötigt eine Programmierspannung von 5 V. Dies stimmt allerdings nur für die externe Zuführung. Im Inneren des Bausteins befindet sich ein Spannungsgenerator, der die Programmierspannung erheblich erhöht.

EEPROM's werden als parallele oder serielle Speicher mit verschiedenen Betriebsspannungen wie 1,8 V, 2,5 V, 2,7 V und 5 V angeboten. Tabelle III-13 führt einige Typen mit unterschiedlichen Kapazitäten auf. Bild III-44 zeigt das Funktionsbild eines EEPROM.

Tabelle III-13 EEPROM-Beispiele

| Type      | Kapazität | Organisation | Zugriffszeit |
|-----------|-----------|--------------|--------------|
| HN58064   | 64 K      | 8K × 8       | 250 ns       |
| HN58C256  | 256 K     | 32K × 8      | 200 ns       |
| HN58C1001 | 1 M       | 28K × 8      | 200 ns       |

(Nach Datenblatt der Firma Hitachi)

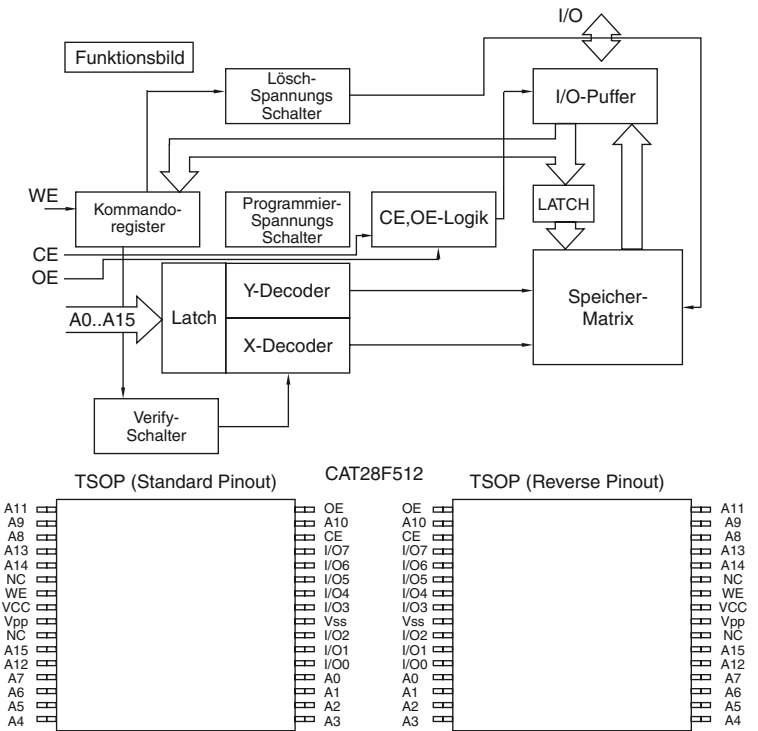


Bild III-45  
Pin-Belegung und Funktionsbild eines Flash-Bausteins

3.6.1.5 Flash-EPROM

Flash-EPROM (Flash-Memory) verbinden die Eigenschaften eines RAM, EPROM und EEPROM. Im Gegensatz zur EPROM's, die nur durch UV-Licht gelöscht werden können, sind Flash-EPROM's elektrisch und in der Schaltung löscherbar. Der Baustein kann insgesamt oder sektorweise gelöscht werden. Alle Bits müssen – abgesehen von neueren Typen – vor dem Löschen zuerst auf „0“ gesetzt werden. Die gelöschten Speicherstellen besitzen „1“ als Information. Bei der Programmierung verhalten sich Flash-EPROM's wie EEPROM's. Sie können in der Schaltung Byte für Byte beschrieben werden. Allerdings erlauben diese Bausteine eine höhere Zahl von Programmierzyklen (bis zu 100000 Zyklen). Die Programmierzeit liegt etwa bei 1/10 der Zeit eines EPROM. Die längste Programmierzeit benötigen EEPROM's. Adressen und Daten werden zwischengespeichert (Address Latch, Data Latch). Die gewünschten Betriebsarten wie Löschen und Program-

mieren realisiert man über ein Kommandoregister. Im Signature Mode (Hersteller-Kennzeichnung) befindet sich unter der Adresse  $0000_{16}$  der Hersteller-Code und unter Adresse  $0001_{16}$  der Baustein-Code. Die Hersteller geben in der Regel den Lösch- und Programmier-Algorithmus in den entsprechenden Datenbüchern mit an. Flash-EPROM lassen sich kostengünstiger als EEPROM herstellen. Bild III-45 zeigt als Beispiel das Funktionsbild und die Anschlussbelegung eines  $512\text{ K} \times 1$  Bit-CMOS-Flash-Speichers. Mit den beiden TSOP-Gehäusevarianten lassen sich Platinenlayouts vereinfachen.

3.6.2 Schreib-Lesespeicher

Die Daten dieses Speichers können über eine Adresse beliebig oft gelesen oder eingeschrieben werden.

Beim Ausfall der Betriebsspannung sind die Daten des Speichers allerdings verloren. Man spricht daher auch von flüchtigen Speichern (Volatile RAM). Eine Übersicht verschiedener Schreib-Lese-Speicher zeigt Bild III-46.

3.6.2.1 SRAM

Statische RAM werden in bipolarer oder MOS-Technik ausgeführt. Sie arbeiten nach dem Prinzip einer bistabilen Kippstufe (Bild III-47). SRAM werden mit unterschiedlicher Kapazität und Organisation angeboten (Tabelle III-14). Aus der Tabelle ist zu erkennen, dass diese Speicher mit ihrer kurzen Zugriffszeit recht schnell sind.

Bild III-48 zeigt das Funktionsbild eines Schreib-Lese-Speichers. Die Auswahl der 4-Bit-Speicher-

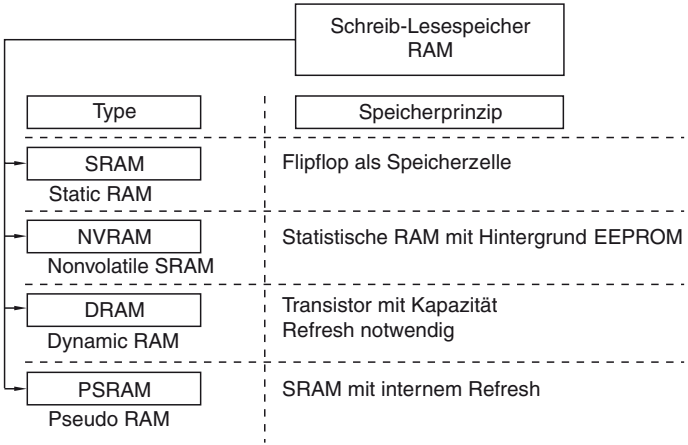


Bild III-46  
Schreib-Lesespeicher

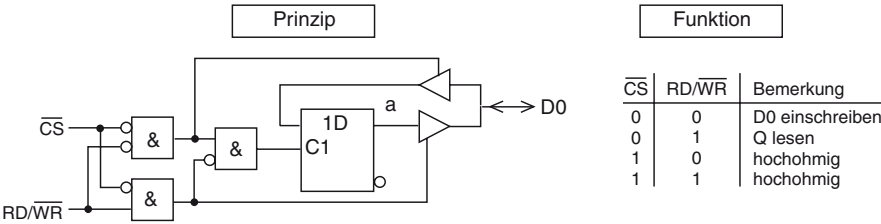


Bild III-47 Prinzip einer Speicherzelle

Tabelle III-14 SRAM-Beispiele

| Type     | Kapazität | Organisation | Zugriffszeit |
|----------|-----------|--------------|--------------|
| HM6287P  | 64 K      | 64 K × 1     | 70 ns        |
| HM6264   | 64 K      | 8 K × 8      | 150 ns       |
| HM6207   | 256 K     | 256 K × 1    | 45 ns        |
| HM6208   | 256 K     | 64 K × 4     | 45 ns        |
| HM62256  | 256 K     | 32 K × 8     | 150 ns       |
| HM621100 | 1 M       | 1 M × 1      | 35 ns        |
| HM628128 | 1 M       | 128 K × 8    | 120 ns       |
| HM621664 | 1 M       | 64 K × 16    | 25 ns        |
| HM621400 | 4 M       | 1 M × 4      | 35 ns        |

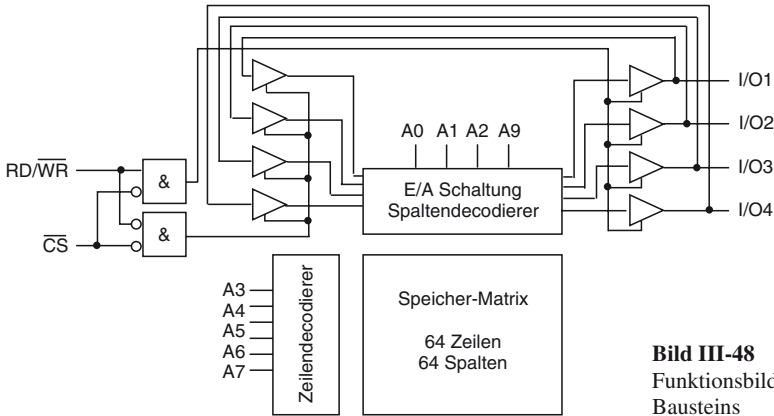


**Bild III-48**  
Funktionsbild eines SRAM-Bausteins

stelle erfolgt über die Matrix. Bei einer 64 × 64-Speichermatrix wird die Spaltenmatrix in 16 × 4 Spalten zur Ansteuerung unterteilt. Damit ergeben sich für den Spaltendecoder 4 Adressleitungen. Die Verbindung zum Datenbus erfolgt über die Ein- und Ausgabeschaltung. Die Steuerung der Bausteinauswahl geschieht hier über den Steuereingang /CS. Mit RD, /WR kann die Steuerung für Lesen oder Schreiben erfolgen. Datenein- und Datenausgabe erfolgt über *Tristate-Treiber*, über die es möglich ist, den Ausgang hochohmig zu schalten.

3.6.2.2 NVRAM

Das NVRAM (Nonvolatile SRAM) ist ein statisches RAM mit der Fähigkeit, über die Steuerleitung *STORE* seine Daten in ein spiegelbildgleiches EEPROM zu kopieren. Damit sind die Daten nicht mehr flüchtig. Sie bleiben bei Ausfall der Betriebsspannung erhalten. Die EEPROM-Daten können jederzeit über die Steuerleitung *RECALL* in das SRAM zurückgeholt werden. Bild III-49 zeigt das Funktionsbild eines NVRAM, und Bild III-50 erläutert die Steuerung der beiden unterschiedlichen Betriebsarten.

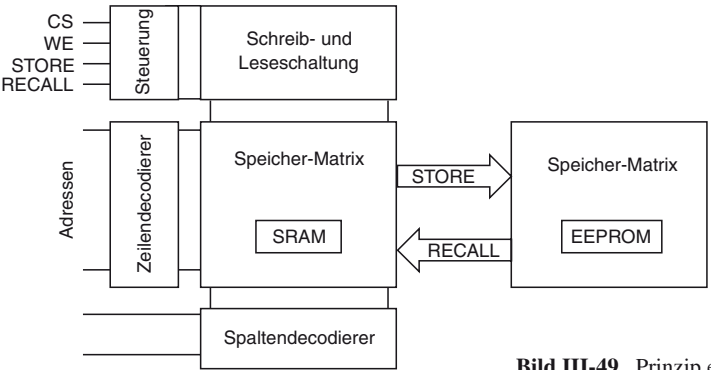


**Bild III-49** Prinzip eines NVRAM

| CAT22C10                       |                                 | Betriebsarten               |                               |                                 |                                |
|--------------------------------|---------------------------------|-----------------------------|-------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|
| <input type="checkbox"/> NC    | <input type="checkbox"/> VCC    | <input type="checkbox"/> CS | <input type="checkbox"/> WE   | <input type="checkbox"/> RECALL | <input type="checkbox"/> STORE |
| <input type="checkbox"/> A4    | <input type="checkbox"/> NC     | <input type="checkbox"/> A0 | <input type="checkbox"/> I/O1 | <input type="checkbox"/> I/O0   | <input type="checkbox"/> WE    |
| <input type="checkbox"/> A3    | <input type="checkbox"/> A5     | <input type="checkbox"/> A1 | <input type="checkbox"/> I/O2 | <input type="checkbox"/> I/O3   | <input type="checkbox"/> STORE |
| <input type="checkbox"/> A2    | <input type="checkbox"/> I/O3   | <input type="checkbox"/> A2 | <input type="checkbox"/> I/O2 | <input type="checkbox"/> I/O1   | <input type="checkbox"/> I/O0  |
| <input type="checkbox"/> A1    | <input type="checkbox"/> I/O2   | <input type="checkbox"/> A3 | <input type="checkbox"/> I/O3 | <input type="checkbox"/> I/O4   | <input type="checkbox"/> I/O5  |
| <input type="checkbox"/> A0    | <input type="checkbox"/> I/O1   | <input type="checkbox"/> A4 | <input type="checkbox"/> I/O4 | <input type="checkbox"/> I/O6   | <input type="checkbox"/> I/O7  |
| <input type="checkbox"/> CS    | <input type="checkbox"/> I/O0   | <input type="checkbox"/> A5 | <input type="checkbox"/> I/O5 | <input type="checkbox"/> I/O8   | <input type="checkbox"/> I/O9  |
| <input type="checkbox"/> VSS   | <input type="checkbox"/> WE     | <input type="checkbox"/> A6 | <input type="checkbox"/> I/O6 | <input type="checkbox"/> I/O10  | <input type="checkbox"/> I/O11 |
| <input type="checkbox"/> STORE | <input type="checkbox"/> RECALL | <input type="checkbox"/> A7 | <input type="checkbox"/> I/O7 | <input type="checkbox"/> I/O12  | <input type="checkbox"/> I/O13 |

**Bild III-50**  
NVRAM und Betriebsarten

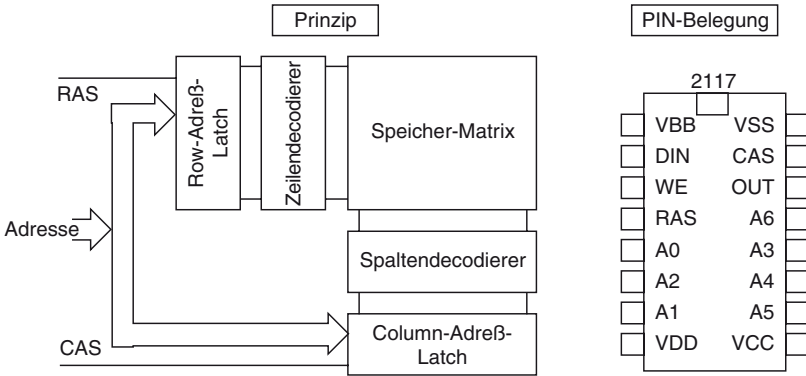


**Bild III-51**  
Prinzip eines DRAM

**3.6.2.3 DRAM**

Dynamische RAM-Speicherzellen (Dynamic RAM's) bestehen im Prinzip aus einem Transistor und einer Kapazität. Dadurch ergeben sich kleine Verlustleistungen bei großen Integrationsdichten. Der Transistor ist der Schalter, der die Kapazität auflädt oder entlädt, um den Informationszustand „1“ oder „0“ zu erhalten. Da sich die Kapazitäten in kurzer Zeit über Sperrschichten und Dielektrikum entladen, verliert der Speicher seine Information, und in bestimmten Zeitabständen muss ein Auffrischzyklus erfolgen. Beispielsweise kann nach 2 ms der gesamte Speicher aufgefrischt werden (Block-refresh). Ein zusätzlicher Takt leitet den Zyklus ein. Während dieser Zeit kann die CPU nicht auf den Speicher zugreifen. Die Refreshzeiten (refresh = auffrischen) der einzelnen Speicher sind unterschiedlich. Der Betrieb dynamischer RAM's hat eine besondere Adressierung, wie das folgende Beispiel zeigt.

Der Speicher 2117 besitzt eine Speicherkapazität von  $16\text{ K} \times 1\text{ Bit}$ . Die Speichermatrix selbst ist in Reihen und Spalten angeordnet. Um alle Speicherplätze anzusprechen, werden 14 Adressleitungen benötigt. Damit man dennoch mit einem 14-DIL-Gehäuse auskommt, werden die Adressen in zwei Gruppen aufgeteilt (Zeilendresse = Row-Adress und Spaltenadresse = Column-Adress), die zeitlich nacheinander mit den jeweiligen Steuerleitungen RAS (Row Address Strob = Reihenadressenzugriff) und CAS (Column Address Strobe = Spaltenadressenzugriff) den Baustein ansprechen. Zunächst wird dem Baustein über den Adressbus die Zeilenadresse zugeführt und im Latch gespeichert. Anschließend gelangt die Spaltenadresse zum Column-Latch. Den zeitlichen Zusammenhang eines Lese- und Schreibzyklus beschreibt Bild III-52. DRAM-Speicher sind deutlich langsamer als SRAM-Speicher, wie aus der nachfolgenden Tabelle III-15 hervorgeht. Überlegen sind sie statischen Speichern allerdings durch eine höhere Integrationsdichte und geringerer Verlustleistung.

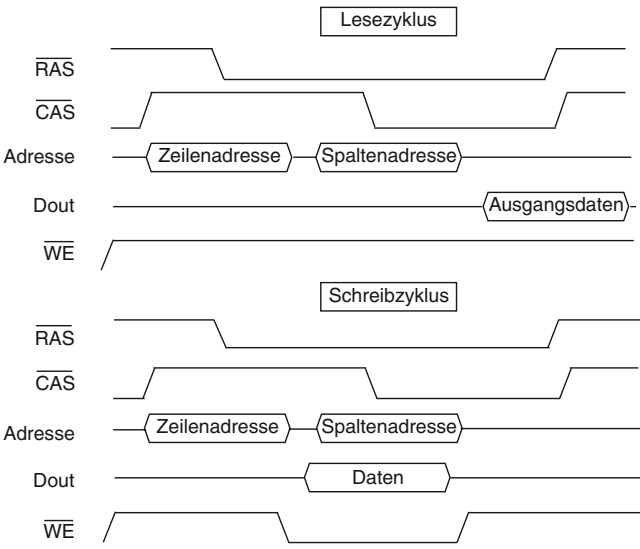


**Bild III-52**  
Lese- und Schreibzyklus eines DRAM

Tabelle III-15 DRAM-Beispiele

| Type  | Kapazität | Organisation | Zugriffszeit |
|-------|-----------|--------------|--------------|
| 21256 | 256 K     | 256 K × 1    | 150 ns       |
| 21464 | 256 K     | 64 K × 4     | 150 ns       |
| 21010 | 1 M       | 1 M × 1      | 130 ns       |
| 21044 | 4 M       | 1 M × 4      | 130 ns       |

(Nach Datenblatt der Firma INTEL)

Tabelle III-16 PSRAM-Beispiele

| Type     | Kapazität | Organisation | Zugriffszeit |
|----------|-----------|--------------|--------------|
| HM65256  | 256 K     | 32 K × 8     | 150 ns       |
| HM658128 | 1 M       | 128 K × 8    | 120 ns       |
| HM658512 | 4 M       | 512 K × 8    | 120 ns       |

(Nach Datenblatt der Firma Hitachi)

3.6.2.4 PSRAM

PSRAM (Pseudo SRAM) sind nach außen hin wirkende statische RAM-Bausteine mit einer inneren Struktur und notwendigen Hilfsschaltungen eines dynamischen RAM. Die Refreshschaltung ist in diesem Baustein integriert.

3.7 Speichererweiterung

Der Zentralspeicher oder Hauptspeicher eines Mikrocomputers besteht aus mehreren Speicherbausteinen (RAM, ROM). Die Erweiterung des Speicherraumes wird durch Parallelschalten aller Daten- und Adressleitungen erreicht. Um das gleichzeitige Ansprechen mehrerer Bausteine zu verhindern, sind Auswahlbedingungen erforderlich.

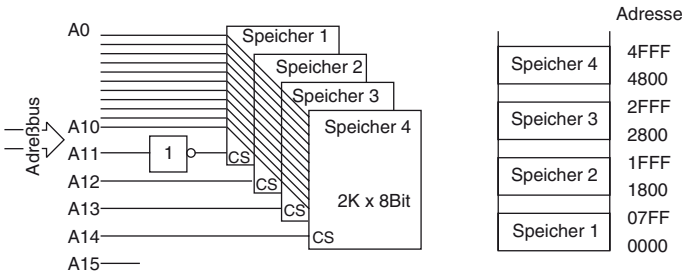


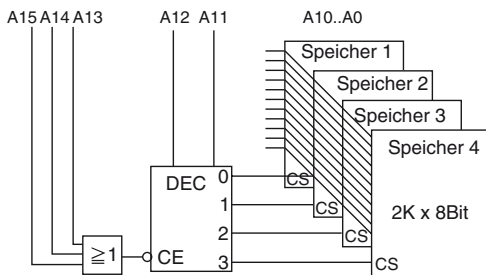
Bild III-53  
Unvollständige Decodierung  
und Speicherplan

Tabelle III-17

| Adreßleitung                                                                                                                                                                                           |     |     |     |     |     |     |    |    |    |                                    |    |    |    |    |    |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|------------------------------------|----|----|----|----|----|----|
|                                                                                                                                                                                                        | A15 | A14 | A13 | A12 | A11 | A10 | A9 | A8 | A7 | A6                                 | A5 | A4 | A3 | A2 | A1 | A0 |
| Speicher 1                                                                                                                                                                                             | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0  | 0  | 0  | 0                                  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
|                                                                                                                                                                                                        | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0  | 0  | 0  | 0                                  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  |
|                                                                                                                                                                                                        | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 1   | 1  | 1  | 1  | 1                                  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| Speicher 2                                                                                                                                                                                             | 0   | 0   | 0   | 0   | 1   | 0   | 0  | 0  | 0  | 0                                  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
|                                                                                                                                                                                                        | 0   | 0   | 0   | 0   | 1   | 0   | 0  | 0  | 0  | 0                                  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  |
|                                                                                                                                                                                                        | 0   | 0   | 0   | 0   | 1   | 1   | 1  | 1  | 1  | 1                                  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| Speicher 3                                                                                                                                                                                             | 0   | 0   | 0   | 1   | 0   | 0   | 0  | 0  | 0  | 0                                  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
|                                                                                                                                                                                                        | 0   | 0   | 0   | 1   | 0   | 0   | 0  | 0  | 0  | 0                                  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  |
|                                                                                                                                                                                                        | 0   | 0   | 0   | 1   | 0   | 1   | 1  | 1  | 1  | 1                                  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| Speicher 4                                                                                                                                                                                             | 0   | 0   | 0   | 1   | 1   | 0   | 0  | 0  | 0  | 0                                  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
|                                                                                                                                                                                                        | 0   | 0   | 0   | 1   | 1   | 0   | 0  | 0  | 0  | 0                                  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  |
|                                                                                                                                                                                                        | 0   | 0   | 0   | 1   | 1   | 1   | 1  | 1  | 1  | 1                                  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> |     |     |     |     |     |     |    |    |    |                                    |    |    |    |    |    |    |
|                                                                                                                                                                                                        |     |     |     |     |     |     |    |    |    | Grundbereich                       |    |    |    |    |    |    |
|                                                                                                                                                                                                        |     |     |     |     |     |     |    |    |    | Codierung                          |    |    |    |    |    |    |
|                                                                                                                                                                                                        |     |     |     |     |     |     |    |    |    | Speicher 1 bis 4                   |    |    |    |    |    |    |
|                                                                                                                                                                                                        |     |     |     |     |     |     |    |    |    | Deaktivierung des Zentralspeichers |    |    |    |    |    |    |
|                                                                                                                                                                                                        |     |     |     |     |     |     |    |    |    | bei Adressen > 1FFF                |    |    |    |    |    |    |

■ **Beispiel 1** (siehe Bild III-53): An einem 8-Bit-Prozessor sollen 4 Speicher mit einer Kapazität von  $2\text{ K} \times 8\text{ Bit}$  angeschlossen werden. Da alle Speicher mit ihren Adressleitungen A0 bis A10 an dem Adressbus liegen, würden alle Speicher bei Ausgabe einer Adresse im Bereich bis  $07\text{FF}_{16}$  gleichzeitig angesprochen werden. Um dies zu verhindern, wird mit Hilfe der Auswahleingänge CS jedem Speicher ein bestimmter Speicherbereich zugeordnet. Es werden dazu die Adressleitungen benutzt, die nicht zu den Adressleitungen gehören, die an den Speichern angeschlossen sind. Da bei diesem Verfahren nicht alle Adressleitungen des Systems in Gebrauch sind, können Speicher mit mehreren Adressen angesprochen werden. Beispielsweise wird mit der ADR  $8000\text{H}$  dieselbe Speicherstelle wie mit der ADR  $0000_{16}$  angesprochen. Man spricht auch von *unvollständiger Decodierung*.

Häufig werden *Decodierer* zur Unterscheidung der Speicher eingesetzt (Bild III-54). Der Decodierer wird dann von Adressleitungen, die nicht an die einzelnen Speicher angeschlossen sind, gesteuert. Um eine Mehrfachansprache von Speicherstellen zu vermeiden, sollte ein Decodierer gewählt werden, der einen Auswahleingang besitzt. Mit Hilfe einer einfachen Logik können alle Adressen in die Decodierung mit einbezogen werden. Man spricht dann von *vollständiger Decodierung* (Tabelle III-17). Die Anfangs- und Endadressen der einzelnen Speicher werden jeweils aufgeführt. Da die Speicher eine Speicherkapazität von  $2\text{ K} \times 8\text{ Bit}$  besitzen, sind jeweils 11 Adressleitungen (A0 ... A10) vorhanden ( $2^{11} = 2048 = 2\text{ K}$ ). Zur Unterscheidung der Speicher (Decodierung) werden die zwei nachfolgenden Adressleitungen A12 und A13 benutzt. Alle übrigen Adressleitungen werden über eine ODER-Verknüpfung zur Deaktivierung bzw. Aktivierung des Decoders eingesetzt. Damit sind die Speicherplätze eindeutig bestimmt und ergeben den in Bild III-54 dargestellten Speicherplan.



■ **Beispiel:** Ein Zentralspeicher für einen 8-Bit-Prozessor soll mit seinem  $64\text{ K}$ -Speicherraum voll ausgenutzt werden. Als Speicherbausteine stehen  $16\text{ K} \times 8\text{-Bit}$ -Speicher zur Verfügung. Zu jedem Speicher gehen somit 14 Adressleitungen (A0 ... A13). Die Adressleitungen A14 und A15 können dann zur Decodierung der vier Speicherbausteine herangezogen werden.

Der Zentralspeicher eines PC mit 8086/80286 CPU und seinem  $1\text{ MB}$ -Adressbereich ist physikalisch in zwei Speicherblöcke mit je  $512\text{ kB}$  aufgeteilt (Bild III-55). Die Auswahl wird über die Adresse A0 (Bank 0) und die Steuerleitung/BHE (Bank 1) vorgenommen. Die Datenleitungen sind so aufgeteilt, dass D0 bis D7 Bank 0 und D8 bis D15 Bank 1 verbinden, während die Adressleitungen A1 bis A19 an beiden Speicherblöcken anliegen.

Der Adressbereich ist in einen RAM- und ROM-Bereich unterteilt. Dem eigentlichen Arbeitsspeicher sind max.  $640\text{ KByte}$  zugeordnet und dem Bildschirmspeicher die nachfolgenden  $128\text{ KByte}$ . Das BIOS (Basic Input/Output Services) liegt mit ebenfalls  $128\text{ KByte}$  bis zur Adresse  $\text{FFFF}_{16}$ . Der zwischen Bildschirmspeicher (Video-RAM) und BIOS liegende Bereich ist für ROM-Erweiterungen wie beispielsweise das BIOS des Festplattenkontrollers reserviert. Aus diesem Speicherbereich werden ebenfalls  $64\text{ KByte}$  als Expansionspeicher (EMS) verwendet, um über *Bank-Switching* die Adressierung eines größeren Speicherbereiches zuzulassen. Prozessoren ab 80286 können mehr als  $1\text{ MByte}$  adressieren. Der Speicher oberhalb  $1\text{ Mbyte}$  wird *Extended Memory* genannt und kann durch zusätzliche Speicherkarten realisiert werden (Erweiterungsspeicher). Mit Hilfe initialisierbarer Steuerprogramme kann dieser Speicherbereich zum Speichern von Daten oder zur Verwendung von Programmen genutzt werden.

| Adresse    |  |
|------------|--|
| 1FFF       |  |
| Speicher 4 |  |
| 1800       |  |
| 17FF       |  |
| Speicher 3 |  |
| 1000       |  |
| 0FFF       |  |
| Speicher 2 |  |
| 0800       |  |
| 07FF       |  |
| Speicher 1 |  |
| 0000       |  |

**Bild III-54**  
Vollständige Decodierung

### 3.8 Zentralspeicher

Der Zentralspeicher eines Mikroprozessorsystems ist sein Hauptspeicher. Soll ein solcher Zentralspeicher für ein Mikroprozessorsystem entworfen werden, muss die Größe des gewünschten Speichers bekannt sein. Anschließend können gängige Speicherbausteine ausgewählt, ein Speicherplan aufgestellt und der Adressdecodierer geplant werden.

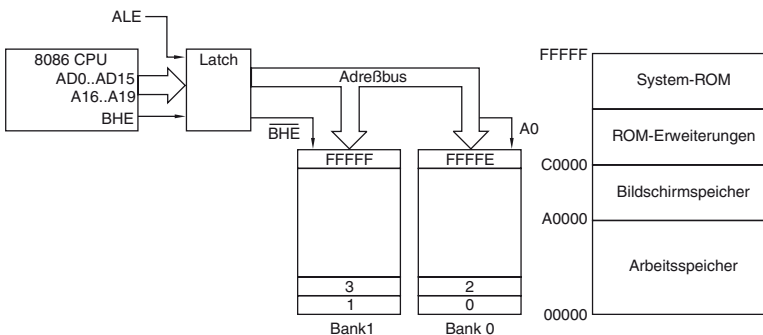


**Bild III-55**  
Blockbild eines  
 $1\text{ MByte}$ -Speichers  
und Speicherorga-  
nisation

## 4 Peripheriebausteine

### 4.1 Allgemeines

Peripheriebausteine sind *Schnittstellenbausteine*, die periphere Geräte wie Monitor, Tastatur, Drucker oder Disketten-Laufwerke mit dem Bussystem des Prozessors verbinden. Man unterscheidet einfache (nicht-programmierbare) Bausteine, die ihre Funktion durch die hardwaremäßige Beschaltung in Verbindung mit den Ein- und Ausgabebefehlen des Prozessors durchführen und *programmierbare* Bausteine, die zunächst durch Software initialisiert werden müssen. Bausteine mit besonderen Aufgaben sind Treiberstufen, Taktgeneratoren, Zeitgeberbausteine (TIMER) und Steuerbausteine für den direkten Speicherzugriff (DMA = Direct Memory Access).

Die *Schnittstelle* wird *Interface* genannt. Sie passt die Signale der Schnittstellenbausteine an die Signale, die der Prozessor liefern oder empfangen kann, an. Damit ergibt sich für jeden Baustein eine Bus- und eine Geräte-Schnittstelle.

Generell kann die Datenein- und -ausgabe mit dem Lesen und Beschreiben eines Speicherbausteins verglichen werden. Hat die Adresse den gleichen Aufbau wie die Speicheradresse, spricht man von „*Memory-mapped-Adressierung*“. Der E-/A-Baustein wird hierbei als Teil des Speichers angesehen. Um Speicher und E-/A-Baustein zu unterscheiden, schafft man mit Adressdecodern unterschiedliche Adressbereiche. Bei einem 16 Bit breiten Adressbus liegen dann E-/A-Baustein und Speicher in einem Adressbereich von 0000 bis FFFF.

Wird die Unterscheidung zu den Speichern mit Signalen wie IO/M oder IORQ des Steuerbusses durchgeführt, spricht man von „*I/O-mapped-Adressierung*“. Hierbei wird bei IN-Befehlen oder OUT-Befehlen eine 8-Bit-Adresse auf dem Low-Adressbus übertragen. Unter Ausnutzung aller Adressen ergibt sich hierbei ein Adressbereich von 00 bis FF. Bild III-56 stellt die beiden Adressierungen gegenüber.

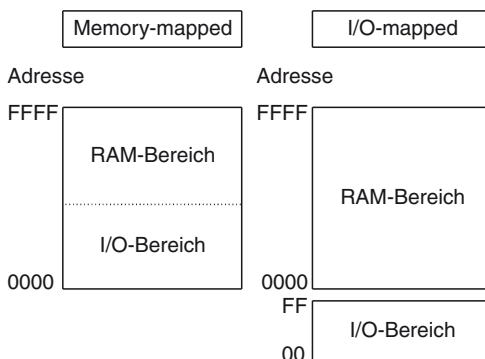


**Bild III-56**

Adressierungsarten und Adressenaufteilung

### 4.2 BUS-Treiber

Jeder Bausteineingang, der an die CPU angeschlossen ist, belastet die CPU-Ausgänge. Dabei wird zwischen statischem und dynamischem Lastverhalten unterschieden. Beim dynamischen Lastverhalten spielen die parasitären Kapazitäten, also die Eigenkapazität der Bauteile und Kapazitäten, die durch den Schaltungsaufbau bedingt sind, eine große Rolle, weil hierdurch Signale verformt werden. Da auch die statische Belastbarkeit der CPU gering ist, dürfen nicht beliebig viele Bauelemente an den Prozessor angeschlossen werden. Um ein Fehlverhalten der CPU auszuschließen, werden BUS-Treiber zur Lastenerweiterung und Signalformung eingesetzt. Handelsüblich sind Einrichtungs- (unidirektional) und Zweirichtungstreiber (bidirektional). Ihr Einsatz ist abhängig von der Datenflussrichtung. Während Einrichtungstreiber beispielsweise als Adressenbustreiber eingesetzt werden, dienen Zweirichtungstreiber zur Datenübertragung. Mit einem Eingang (OE = Output Enable) können die Treiber in einen hochohmigen Zustand (Tristate, siehe auch Abschnitt Integrierte Schaltungen) versetzt werden. Der Zweirichtungstreiber besitzt neben diesem Freigabeeingang einen weiteren Eingang zur Umschaltung der Datenflussrichtung (DIR = Direction). Bild III-57 zeigt einen Mikroprozessor mit Treiberstufen und erläutert über eine Funktionstabelle das Prinzip der Umschaltung des Zweirichtungstreibers. Mit dem Eingang OE = „0“ wird der Baustein aktiviert. Bei DIR = „1“ gelangen die Daten von A0 nach B0; bei DIR = „0“ von B0 nach A0. Eine „1“ am Steuereingang des Tristatetreibers veranlasst diesen durchzuschalten, ansonsten ist der Ausgang hochohmig.

### 4.3 Einfache E-/A-Bausteine für den parallelen Betrieb

E-/A-Bausteine nennt man auch Portbausteine, da sie das „Tor“ zur Außenwelt sind. Sie werden direkt an den Datenbus angeschlossen und können als Ein- oder Ausgabebaustein funktionieren. Zur Auswahl der Bausteine ist ein Adressdecoder nötig, der aus einer simplen Logik aufgebaut sein kann. Bringt man die Steuersignale WR und RD mit in die Decodierung des Adressdecoders ein, kann die gleiche Adresse für Ein- und Ausgabeport benutzt werden, weil ein Zugriff mit RD nur lesend und mit WR nur schreibend erfolgt. Mit dem Eingabebefehl gelangen die Daten vom Eingabeport zum Akkumulator und mit dem Ausgabebefehl vom Akkumulator zum Ausgabeport. Der Datenfluss läuft immer über den Akkumulator. Da die Eingabedaten für den Portbaustein nur kurzzeitig anliegen brauchen, um von der CPU angenommen zu werden, lassen sich auch Tristate-Treiber als Eingabebausteine benutzen. Anwendungen für die Eingabe sind von Hand oder durch Maschinen betätigte Schalter, Taster oder Optokoppler. Mechanische Taster prellen oft. Der Prozessor er-

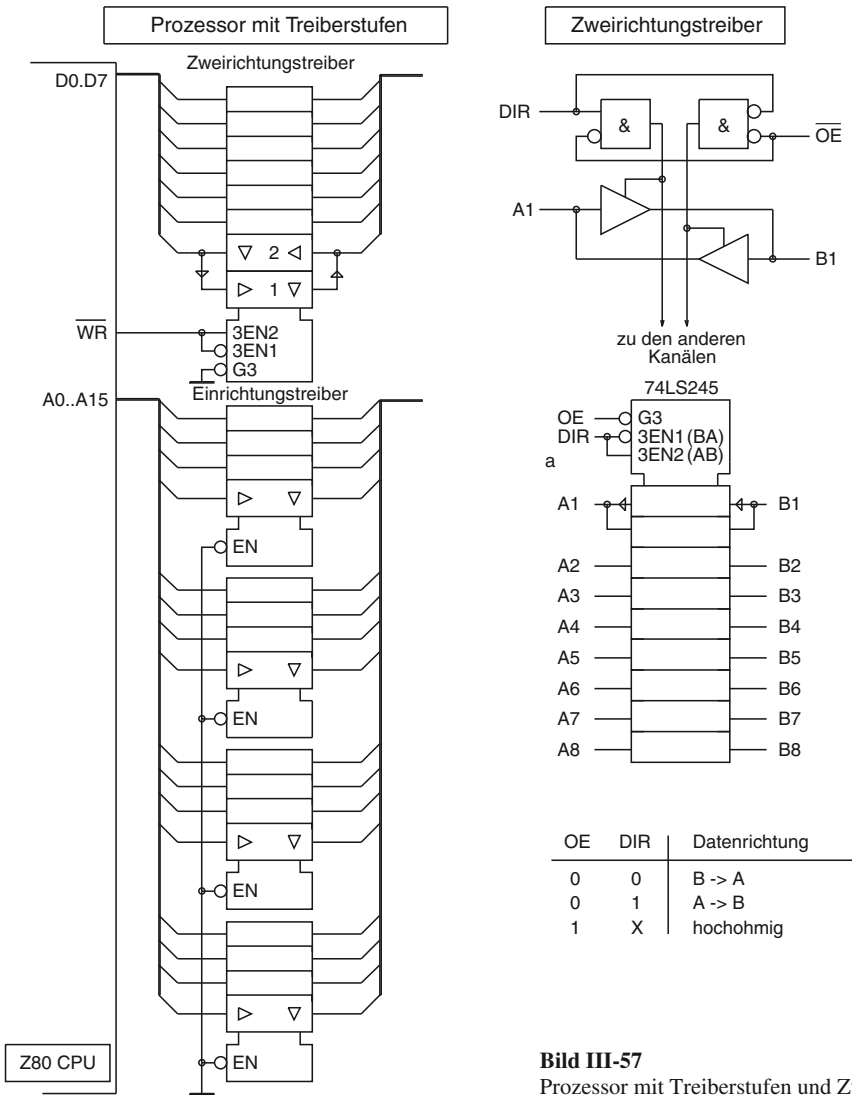


**Bild III-57**  
Prozessor mit Treiberstufen und Zweirichtungstreiber

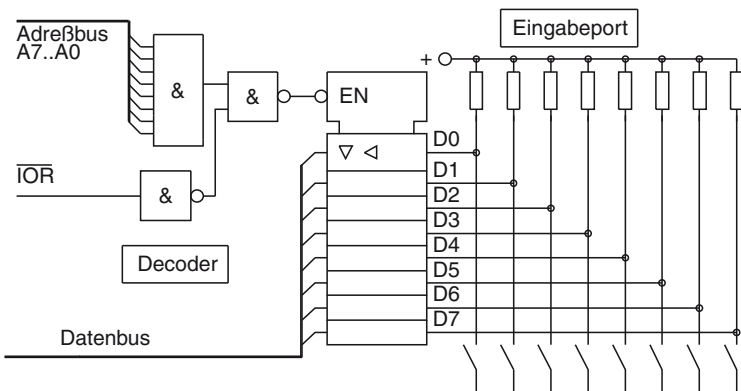


**Bild III-58**  
Einfaches Eingabeport  
mit Decoder



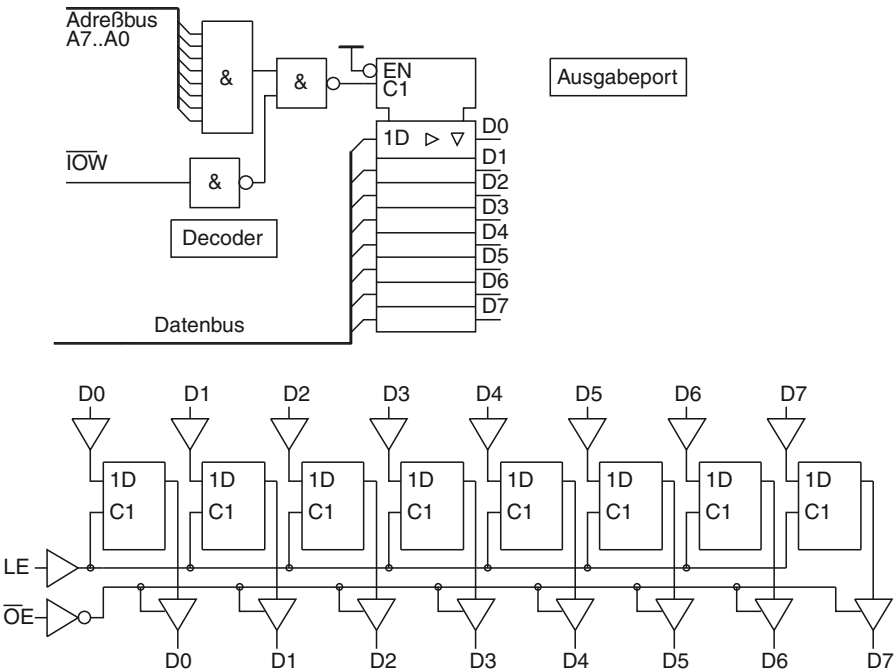


**Bild III-59** Ausgabeport mit Decodierer und Portbaustein

kennt dann unter Umständen mehrere Impulse. Dies muss durch Software oder Hardware ausgeschlossen werden.

Um einen eindeutigen H-Pegel bei geöffneten Schaltern zu erhalten, sind jeweils Widerstände gegen +UCC gelegt (Pull-up-Widerstände). Ihre Werte liegen üblicherweise zwischen 1 kOhm und 10 kOhm. Die Ausgabedaten stehen nur kurzzeitig während des Ausgabe-Befehls an der Peripherie an. Da die Daten bis zur nächsten Ausgabe anstehen sollen, müssen sie gespeichert werden. Dies erreicht man mit D-Flip-flops. Bild III-58 zeigt als Beispiel einen Eingabebaustein mit Decoder. Mit dem Befehl „IN FF“ gelangen die anliegenden Daten zum Akkumulator.

Bild III-59 zeigt die Innenschaltung des Ausgabebausteins mit dem entsprechenden Adressdecodierer. Mit dem Befehl „OUT FF“ werden die Daten des Akkumulator zum Ausgangsport kopiert.

#### 4.4 Programmierbare Schnittstellenbausteine

Ein Kennzeichen dieser Bausteine (Bild III-60) sind 16 bzw. 24 programmierbare Ein-/Ausgabeleitungen, wobei 8 Leitungen jeweils zusammengefasst ein Port darstellen.

Die Funktion dieser Bausteine ist nicht allein hardwaremäßig festgelegt. Über ein *Kommando-* oder

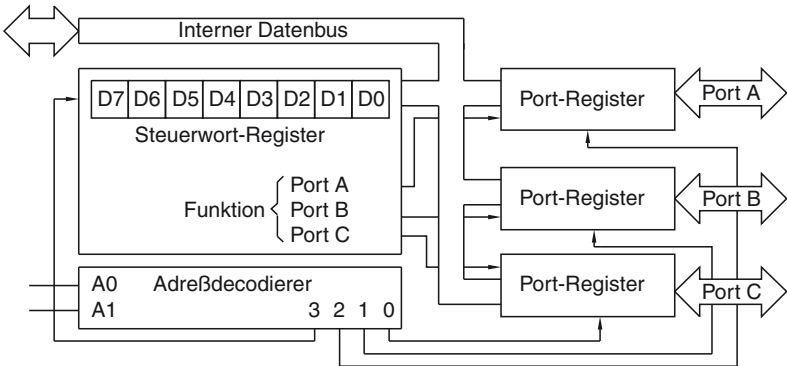


**Bild III-60** Prinzip eines programmierbaren Portbausteins

*Steuerwortregister* kann die gewünschte Funktion und Betriebsart softwaremäßig eingegeben werden. Damit können Ports als Eingabe- oder Ausgabeports arbeiten. Desweiteren können Betriebsarten gewählt werden, bei denen Portleitungen als Steuer- oder Meldeleitungen definiert sind. Die einmal gewählte Funktion bleibt solange erhalten, bis der Inhalt des Steuerwortregisters überschrieben wird oder eine Rückstellung erfolgt.

Ports und Steuerwortregister können über Adressen angesprochen werden. Besitzt ein Baustein ein zusätzliches Zustands- oder Statusregister, über das Zustände der Ports abgefragt werden, kann seine Adresse mit der Adresse des Kommandoregisters übereinstimmen. Die Unterscheidung der beiden Register erfolgt dann über die Steuerleitungen /RD und /WR. Um den Baustein zu initialisieren und die gewünschte Funktion zu speichern, muss zunächst das Steuerwort in das Steuerwortregister gebracht werden. Komplexere Bausteine, wie der 8156, besitzen zusätzlich einen Zeitgeber und Speicher. Sie benötigen dann mehr als zwei Adressleitungen.

Häufig eingesetzte Bausteine sind der 8255 von INTEL und Z80-PPIO von ZILOG. Die Adressierung dieser Bausteine erfolgt wie bei den Speichern über einen Auswahleingang /CS (Chip Select). Das Signal für CS kann im einfachsten Fall aus dem Signal IO/M bzw. IORQ und einem Adresssignal gebildet werden. Häufiger findet man Adressdecoder aus Vergleicherstufen. Der Ausgang dieser Stufen wird nur dann „1“, wenn die Bitmuster am Eingang A mit denen an Eingang B übereinstimmen. Mit Hilfe von Jumpfern (Steckbrücken) oder DIL-Schaltern ist dann jede Adresse von 00 bis FF wählbar. Bild III-61 stellt ein Beispiel für einen Adressdecoder dar. Die Anschlussbelegung des Portbausteins erkennt man im Bild III-62. Bild III-63 zeigt das Funktionsbild des 8255.

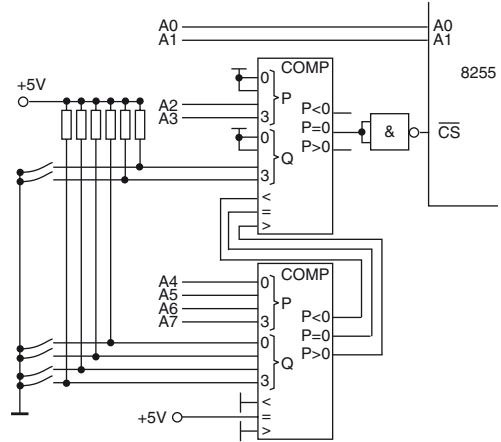


Bild III-61 Adressdecoder für I/O-Bausteine

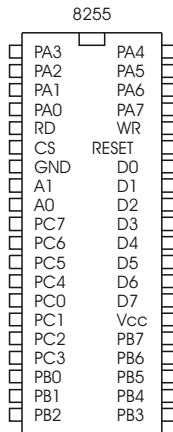


Bild III-62  
PIN-Belegung des 8255

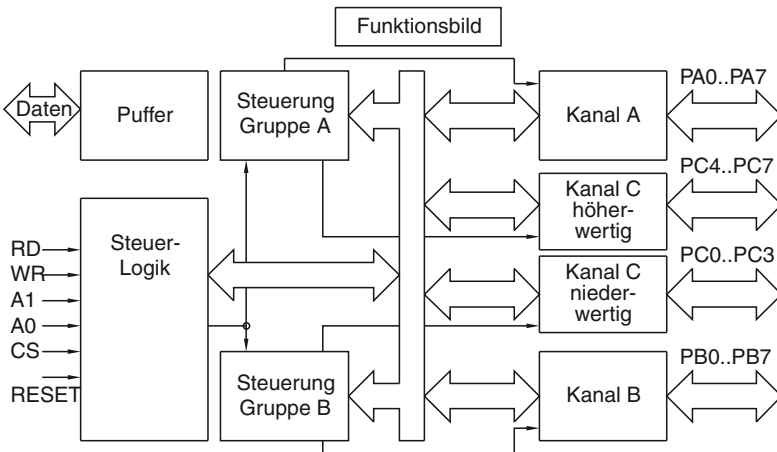


Bild III-63 Funktionsbild des 8255

Tabelle III-18 Bedeutung der Anschlüsse

| Anschlüsse  | Funktion              |
|-------------|-----------------------|
| D0 ... D7   | Datenbus              |
| RESET       | Rücksetzeingang       |
| CS          | Bausteinauswahl       |
| RD          | Leseeingang           |
| WR          | Schreibeingang        |
| A0, A1      | Adreßleitungen        |
| PA0 ... PA7 | Port A                |
| PB0 ... PB7 | Port B                |
| PC0 ... PC7 | Port C                |
| VCC         | +5 V Betriebsspannung |

Der Baustein besitzt 3 TTL-kompatible Ports mit je 8 Leitungen oder Kanälen. Port C kann in 2 Gruppen zu je 4 Leitungen unterteilt werden. Hierbei gibt es allerdings nur die Möglichkeit, die L-Bits, das sind die Leitungen PC0 bis PC3, und die H-Bits mit den Leitungen PC4 bis PC7 zusammenzufassen. Die Steuerlogik bestimmt mit dem Kommando- oder Steuerwort, ob ein Port als Eingabe- oder Ausgabeport arbeitet. Das Format dieses Steuerwortes sehen Sie im Bild III-64. Hierbei kommt jeder Bitstelle eine bestimmte Bedeutung zu. D1 entscheidet beispielsweise über Ein- oder Ausgabe von Port B, und D4 ordnet die Eigenschaften dem Port A zu.

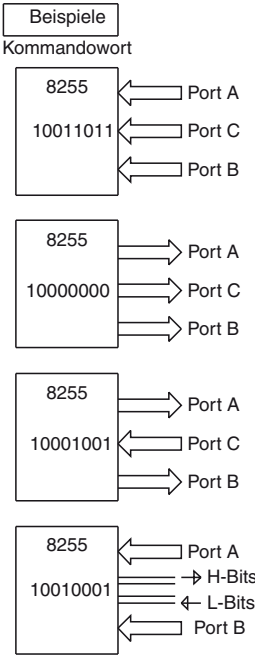
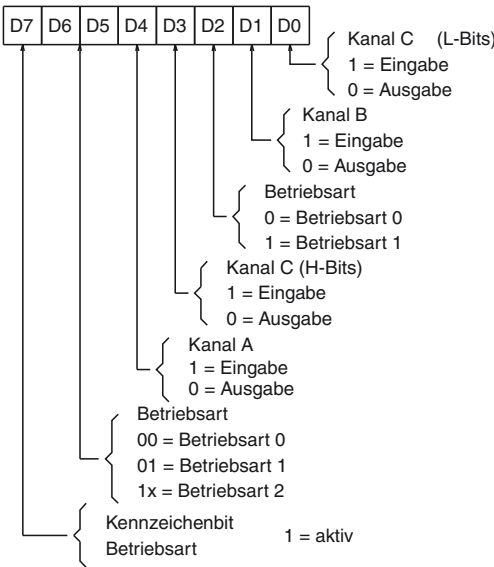


Bild III-64 Format des Steuerwortes und Beispiele

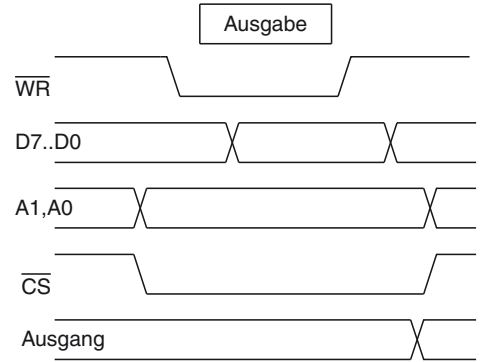
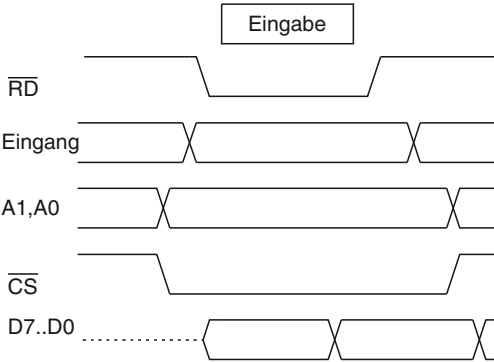


Bild III-65 Impulsdiagramm für die Betriebsart 0

Der 8255 unterscheidet die Betriebsarten 0, 1 und 2. In der Betriebsart 0 können die Ports jeweils als Ein- oder Ausgabe programmiert werden, wobei das Port C noch in zwei 4-Bit-Leitungsgruppen unterteilt ist. Die Eingabedaten gelangen ohne Zwischenspeicherung zum Datenbus, während bei der Ausgabe der Daten eine Zwischenspeicherung erfolgt. Die im Bild III-64 aufgeführten Beispiele gelten für diese Betriebsart. Das zeitliche Zusammenwirken der Signale für die Ein- und Ausgabe gibt Bild III-65 wieder. Mit einem L-Pegel am Eingang /WR können Daten oder Steuerworte in den Baustein geschrieben und mit einem L-Pegel am Eingang RD können Daten vom Baustein gelesen werden. Während dieser Zeit muss die gültige Adresse an A0 und A1 anliegen. Angewählt wird der Baustein mit der Bausteinauswahlleitung /CS. Ein H-Pegel am Eingang RESET setzt alle internen Register zurück. Bei der Betriebsart 1 (getastete Ein-Ausgabe) kann Port A oder Port B als Eingabe oder Ausgabe benutzt

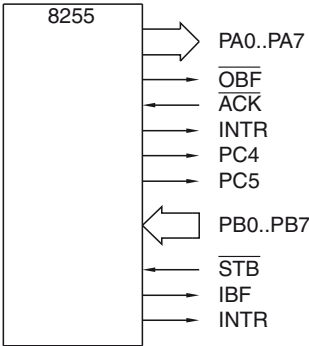


Bild III-66 Steuerleitungen für die getastete Ein-Ausgabe

werden. Das Port C dient mit je drei Leitungen zur Steuerung (Bild III-66). In dieser Betriebsart ist *Handshake-Betrieb* möglich (Bild III-67). Diese Betriebsart wird verwendet, wenn Geräte, die nicht synchronisiert sind, Daten austauschen sollen. Sobald die Eingabedaten den Portbaustein erreicht haben, kann über ein Interrupt der CPU eine Meldung gemacht werden. Über eine Interruptroutine werden die Daten eingelesen. Die genaue Funktion verdeutlicht das Prinzip im Bild III-68 in Verbindung mit dem gleichzeitig dargestellten Impulsdigramm. Input Buffer Full (IBF) ist zunächst „0“. Damit wird dem Eingabegerät ein Zugang zu dem Eingabebaustein ermöglicht. Der Baustein 8255 zeigt an, dass er Daten aufnehmen kann. Stellt das Eingabegerät nun Daten zur Verfügung, wird dies dem Baustein durch STB = „0“ mitgeteilt, und die Daten werden übernommen. Gleichzeitig wird IBF = „1“ gesetzt und dem Eingabegerät signalisiert, dass keine weiteren Daten übertragen werden. Über INTRB = „1“ wird die Meldung von der Ankunft der Daten an die CPU übermittelt und kann über eine Interruptroutine von ihr bearbeitet werden. Beim Lesen der Daten werden INTRB und IBF wieder auf „0“ gesetzt. Sind die Ausgabedaten vom Ausgabegerät übernommen worden, kann dies wiederum über ein Interrupt der CPU mitgeteilt werden. Die CPU sendet Daten zum Baustein und gibt eine Meldung über OBF = „0“ zum Ausgabegerät, um die Ankunft neuer Daten mitzuteilen. Das Ausgabegerät kann die Daten übernehmen und mit ACKA = „0“ bestätigen und anschließend über INTRA neue Daten von der CPU anfordern. Bei der Betriebsart 2 erfolgt der Datenaustausch nur über einen gemeinsamen Datenbus. Die Adressen steuern in Verbindung mit /WR und /RD die Auswahl der Ports oder des Steuerwortregisters.

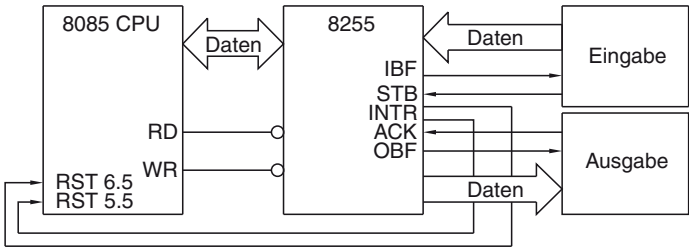
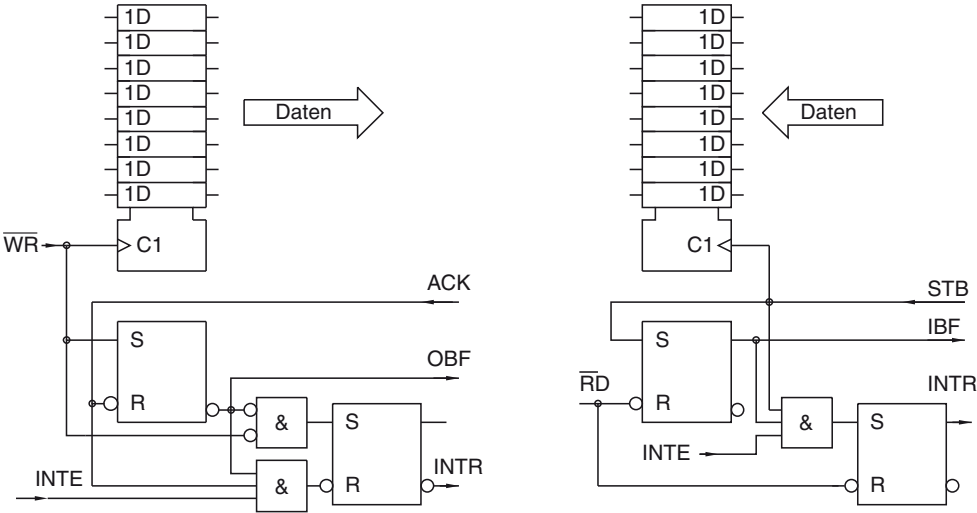


Bild III-67  
8255 in der Betriebsart 1

Tabelle III-19 Definition der Steuersignale in der Betriebsart 1 und 2

|      |                    |                                                                    |
|------|--------------------|--------------------------------------------------------------------|
| STB  | Strobe             | „0“ ermöglicht es, Daten in den Eingangszwischenspeicher zu laden. |
| IBF  | Input Buffer Full  | „1“ zeigt an, dass Daten geladen wurden.                           |
| OBF  | Output Buffer Full | wird „0“, wenn Daten geschrieben wurden                            |
| ACK  | Acknowledge        | Quittungseingang                                                   |
| INTR | Interrupt          | Unterbrechungsanforderung                                          |



Impulssdiagramm für die Betriebsart 1

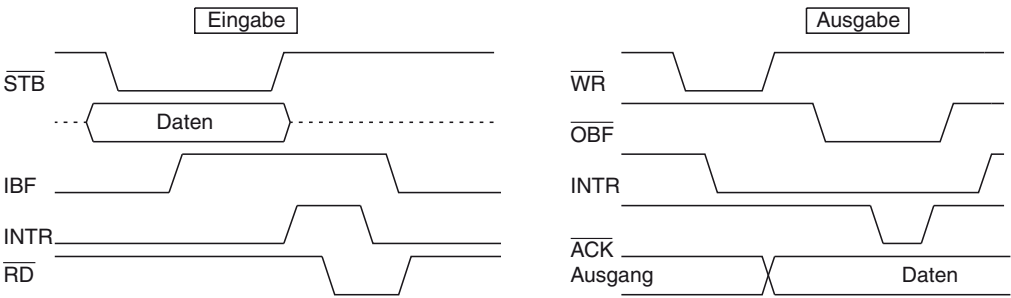


Bild III-68 Funktionsprinzip der Betriebsart 1

Tabelle III-20

| /CS | /RD | /WR | A1 | A0 | Funktion               |
|-----|-----|-----|----|----|------------------------|
| 0   | 0   | 0   | 0  | 0  | Kanal A → Datenbus     |
| 0   | 0   | 0   | 0  | 1  | Kanal B → Datenbus     |
| 0   | 0   | 0   | 1  | 0  | Kanal C → Datenbus     |
| 0   | 1   | 1   | 0  | 0  | Datenbus → Kanal A     |
| 0   | 1   | 1   | 0  | 1  | Datenbus → Kanal B     |
| 0   | 1   | 1   | 1  | 0  | Datenbus → Kanal C     |
| 0   | 1   | 1   | 1  | 1  | Datenbus → Steuerlogik |
| 1   | 0   |     | ×  | ×  | hochohmig              |
| 0   | ×   | ×   | 1  | 1  | ungültige Bedingung    |
| 0   | 1   | 1   | ×  | ×  | hochohmig              |

Voraussetzung für die Programmierung des Bausteins sind Kenntnisse der Registeradressen und der Steuerlogik. Tabelle III-20 zeigt die Zusammenarbeit der Steuersignale und Adressen mit ihrer Auswirkung auf die Datenrichtung. Zur Verdeutlichung sind die Adressen der Register zusätzlich extra aufgeführt. Die Initialisierung erfolgt immer so, dass zunächst das entsprechende Kommandowort in den Akkumulator geladen und anschließend der Inhalt des Akkumulators über einen OUT-Befehl mit Angabe der Steuerwortadresse zum Kommandoregister kopiert wird. Danach können die Ports mit ihren Adressen angesprochen werden. Arbeitsregister für Ein- und Ausgabe ist immer der Akkumulator. Das nachfolgende Programm zeigt beispielhaft eine einfache Byteeingabe in der Betriebsart 0 (siehe auch Abschnitt Maschinensprache).

■ **Beispiel:** Im Hauptprogramm wird über das C-Register bestimmt, von welchem Port die Daten geholt werden sollen. Die eingelesenen Daten sollen dann zu der Adresse gebracht werden, auf die das HL-Register zeigt. Das nachfolgende Listing zeigt eine mögliche Lösung:

```

; Unterprogramm DATIN für 8255 und 8085 CPU
; Byte-Eingabe über ein Port in Abhängigkeit des C-Registers
; Das gewünschte Port wird im Hauptprogramm über das Register C angewählt:
; Ist der Inhalt des Registers C = 00, dann wird Port A gewählt
; Ist der Inhalt des Registers C = 01, dann wird Port B gewählt
; Ist der Inhalt des Registers C = 02, dann wird Port C gewählt
; Die Eingabedaten werden zu der Adresse gebracht, auf die das HL-Register zeigt
;
; Programmbeginn ist die Adresse 8100
;
;*****
ORG 8100
ADRPA EQU 00      ;Adresse Port A
ADRPB EQU 01      ;Adresse Port B
ADRPC EQU 02      ;Adresse Port C
ADRRK EQU 03      ;Adresse Kommandoregister
KW EQU 9B         ;Kommandowort

8100 F5 DATIN: PUSH PSW ;(AF) zum Stack
8101 C5 PUSH B ;(BC) zum Stack
8102 3E 9B MVI A,KW ;8255 initialisieren
8104 D3 03 OUT ADRRK ;
8106 79 MOV C,A ;Wahl zum Akkumulator
8107 FE 01 CPI 01 ;(A) - 1, Flag setzen
8109 FA 15 81 JM PORTA ;→ Port A
810C CA 1A 81 JZ PORTB ;→ Port B
810F DB 02 IN ADRPC ;Port C Eingabe
8111 C3 1C 81 JMP RUECK ;
8114 DB 00 PORTA: IN ADRPA ;Port A Eingabe
8116 C3 1C 81 JMP RUECK ;
8119 DB 01 PORTB: IN ADRPB ;Port B Eingabe
811B 77 RUECK: MOVE M,A ;(A) → (@HL)
811C C1 POP B ;Stack → BC
811D F1 POP PSW ;Stack → AF
811E C9 RET ;zum Hauptprogramm zurück
    
```

## 4.5 Zeitgeberbausteine

Zeitgeberbausteine (TIMER) dienen zur Anpassung zeitbedingter Programmabläufe zwischen dem Prozessor und peripheren Geräten. Sie enthalten meist voneinander unabhängige Zähler und können wie ein programmierbarer E/A-Baustein über ein Steuerwortregister für verschiedene Betriebsarten programmiert werden.

■ **Beispiel:** Der 8253 besitzt zur Steuerung die Signaleingänge /WR, /RD und /CS. Als Adressleitungen sind A0 und A1 zugeführt. Der Datenbus D0 bis D7 ist 8 Bit breit. Der Baustein verfügt über drei voneinander unabhängige Zähler mit jeweils drei externen Anschlüssen: Signalausgang OUT, Takteingang CLK und Steuereingang GATE (Bild III-69).

Die Adressleitungen A0 und A1 sind häufig direkt mit dem Adressbus des MP-Systems verbunden. Mit ihrer Hilfe erfolgt die Auswahl eines der Zähler und die Adressierung des Steuerwort-Registers zur Betriebsart-Auswahl (MODE). Angewählt wird der Baustein über die Auswahlleitung /CS. Dieser Anschluss wird zur Adressenbildung über einen Adressdecodierer gesteuert (Bild III-70). Tabelle III-21 beschreibt die Datenrichtung in Abhängigkeit von Adress- und Steuersignalen.

Die einzelnen Zähler sind voreinstellbare Abwärtszähler für eine 16-Bit-Wortbreite, die mit dem Signal des CLK-Eingangs getaktet werden. Die Taktfrequenz darf max. 2 MHz betragen. Bild III-71 zeigt das Prinzip eines der Zähler.

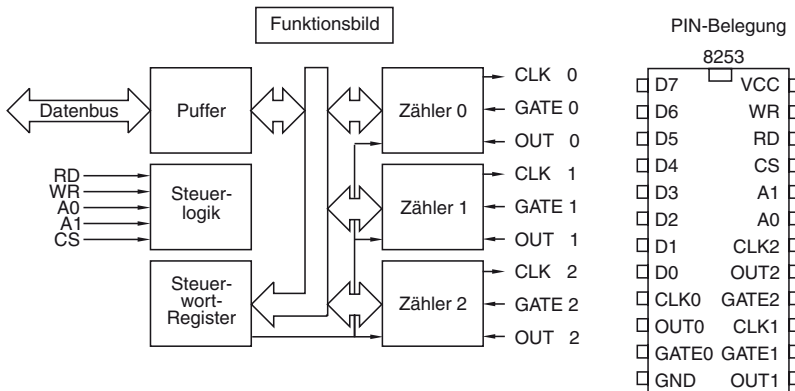


Bild III-69 Funktionsbild und Anschlussbelegung des 8253

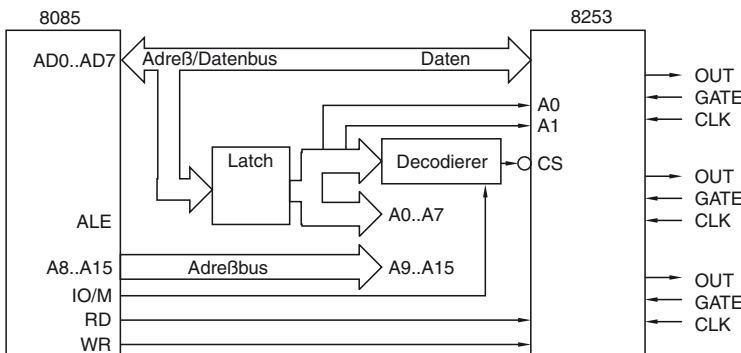


Bild III-70 Baustein mit 8085 CPU

Tabelle III-21

| /CS | /RD | /WR | A1 | A0 | Funktion                    |
|-----|-----|-----|----|----|-----------------------------|
| 0   | 1   | 0   | 0  | 0  | Zähler 0 laden              |
| 0   | 1   | 0   | 0  | 1  | Zähler 1 laden              |
| 0   | 1   | 0   | 1  | 1  | Zähler 2 laden              |
| 0   | 1   | 0   | 1  | 1  | Steuerwort laden            |
| 0   | 0   | 1   | 0  | 0  | Zähler 0 lesen              |
| 0   | 0   | 1   | 0  | 1  | Zähler 1 lesen              |
| 0   | 0   | 1   | 1  | 0  | Zähler 2 lesen              |
| 0   | 0   | 1   | 1  | 1  | Datenbus hochohmig          |
| 1   | x   | x   | x  | x  | Baustein nicht angesprochen |
| 0   | 1   | 1   | x  | x  | Datenbus hochohmig          |

Steuerwortes und die Adressen der Zähler an. Mit Bit 7 und Bit 6 kann einer der Zähler gewählt werden, mit Bit 1, 2 und 3 wird die Betriebsart festgelegt. Bit 0 legt den Zählmodus fest und Bit 4 und 5 haben Einfluss auf das L- und H-Byte beim Lesen oder Beschreiben des Bausteins. Die Betriebsarten unterscheiden sich durch verschiedene Ausgangsimpulse.

In der Betriebsart Mode 0 wird der Zähler über das Zählregister mit einem Anfangswert geladen, während der Ausgang OUT zu Beginn der Zählung „0“ ist. Mit jedem Takt wird der Zähler decrementiert und gibt bei Erreichen des Wertes Null eine „1“ am Ausgang aus. Man spricht bei dieser Betriebsart auch von Interrupt bei Zählernulldurchgang, weil sich die positive Flanke am OUT-Ausgang zum Auslösen von Unterbrechungsanforderungen gut eignet. Bild III-73 zeigt die beteiligten Signale beispielhaft für einen Zähleranfangswert = 4.

Der Ausgangspegel bleibt so lange erhalten, bis der Zähler neu geladen wird. Der Zählvorgang selbst

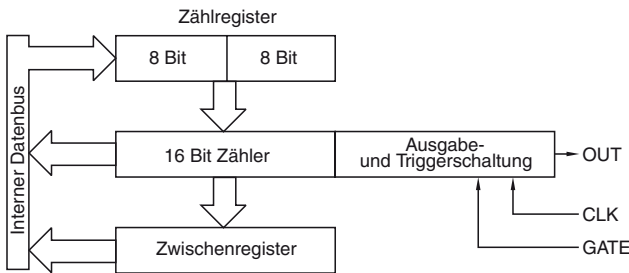


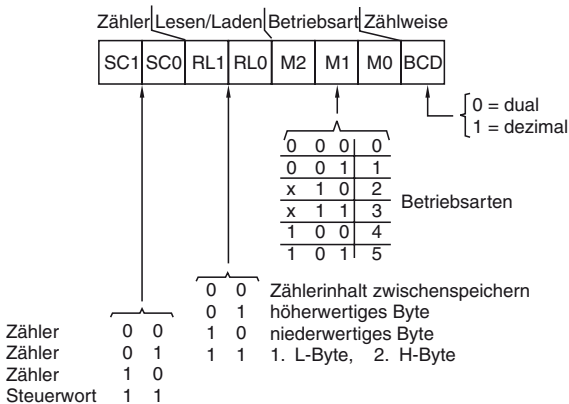
Bild III-71

Prinzip eines Zählers

Das Zählregister kann über den Datenbus mit einem Wert geladen werden, der bei Zählbeginn in den eigentlichen Zähler gelangt. Der Zählerzwischenspeicher enthält den jeweiligen Zählerstand und kann softwaremäßig abgefragt werden. Mit Hilfe des Steuerwortregisters kann die Zählart (dual oder dezimal) und die Betriebsart (Betriebsart 0 bis 5) festgelegt werden. Bild III-72 gibt das Format des

kann am Anschluss GATE mit „0“ unterbrochen werden und mit „1“ fortgeführt werden (Bild III-74, Bild III-73).

In der Betriebsart Mode 1 kann eine monostabile Kippstufe nachgebildet werden. Nach dem Laden des Zählers wird er durch „1“ am Anschluss Gate gestartet. Der Ausgang wird dann „0“, bis der Zählerstand Null erreicht ist.



Adressierung

| Adresse |    | Register   |   |
|---------|----|------------|---|
| A1      | A0 |            |   |
| 0       | 0  | Zähler     | 0 |
| 0       | 1  | Zähler     | 1 |
| 1       | 0  | Zähler     | 2 |
| 1       | 1  | Steuerwort |   |

Bild III-72 Format des Steuerwortes und Adressen der Register

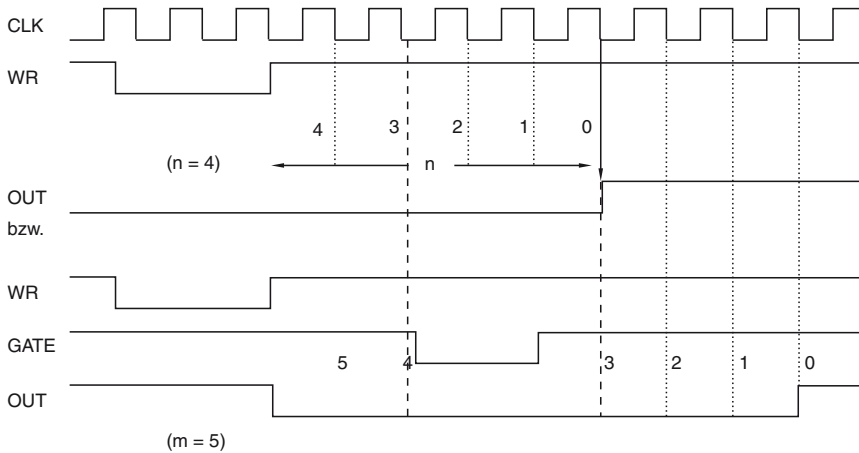


Bild III-73 Signalverlauf in der Betriebsart 0

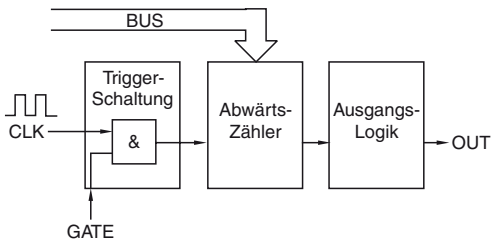


Bild III-74 Blockbild eines Zählers

In der Betriebsart Mode 2 kann ein Zähler als Teiler oder Generator arbeiten. Nach dem Erreichen des Nullwertes beginnt sofort ein erneuter Zählvorgang. In der Betriebsart Mode 3 arbeitet der TIMER als Rechteckgenerator.

In der Betriebsart Mode 4 spricht man auch vom softwaregesteuerten Signal, weil der Ausgang beim Erreichen des Nullwertes für die Dauer einer Taktperiode von „1“ auf „0“ geht.

In der Betriebsart Mode 5 spricht man von einem hardwaregesteuerten Signal, weil der Zähler erst mit der ansteigenden Flanke des GATE-Signals startet. Wie in der Betriebsart Mode 4 geht der Ausgang beim Erreichen des Nullwertes für die Dauer einer Taktperiode von „1“ auf „0“.

Eine mögliche Anwendung ist die, den TIMER für Ereigniszählungen einzusetzen. Man versteht darunter, dass der Zähler kontinuierlich bis zum Eintreffen einer Bedingung (eines Ereignisses) zählt. Hierbei ist es notwendig, den Zählerstand abzufragen und in Abhängigkeit von diesem Wert den Prozessor Entscheidungen treffen zu lassen. Der Zählerinhalt aller drei Zähler kann ausgelesen werden. Es gibt zwei Möglichkeiten, den Zählerstand zu erfahren. Einmal kann der gewünschte Zähler über A0 und A1 adressiert werden und mit /RD zur CPU gelangen. Wenn RL0 und RL1 auf „1“ gesetzt sind, handelt es sich um

einen 16-Bit-Wert. Der Lesebefehl muss dann zweimal erfolgen. Mit dem ersten Befehl wird das LSB (niederwertiges Byte) und mit dem zweiten das MSB (höherwertiges Byte) eingelesen. Während dieser Zeit muss aber das CLK-Signal abgeschaltet sein, beispielsweise durch den GATE-Anschluss, um einen gültigen Zählerinhalt zu bekommen.

Eine zweite Möglichkeit besteht darin, den Zählerinhalt in den Zwischenspeicher zu bringen und zu lesen, ohne den eigentlichen Zählvorgang zu unterbrechen. Hierbei wird der entsprechende Zähler über das Steuerwort mit SC0 und SC1 ausgewählt, und RL0 und RL1 werden auf „0“ gesetzt. Die übrigen Bits sind hierbei ohne Bedeutung. Eine einfache Programmsequenz zeigt dies beispielhaft für den Zähler 1.

#### ■ Beispiel: Lesen des Zählerzustands

```
MVI A, 40      ;Zähler 1 und Zählerinhalt zwischenspeichern
OUT 03         ;Steuerwort-Register, Wert zwischenspeichern
IN 01          ;(Zähler 1, L-Byte) → Akkumulator
MOV L,A        ;(Akkumulator) → L-Register „retten“
IN 01          ;(Zähler 1, H-Byte) → Akkumulator
MOV H,A        ;(Akkumulator) → H-Register „retten“
               ;Der Zählerstand liegt jetzt im Registerpaar H vor
```

Damit der Zähler seine Tätigkeit aufnimmt, muss er mit einem Zähleranfangswert geladen werden. Hierzu ist es notwendig, das entsprechende Steuerwort ins Steuerwort-Register zu schreiben und anschließend den gewünschten Zählwert einzubringen. Von Bedeutung ist nur die zuvor festgelegte Reihenfolge durch das Steuerwort mit RL0 und RL1.

## 4.6 Programmierbarer E/A-Baustein mit Speicher und Zeitgeber

Neben programmierbaren E/A-Bausteinen werden solche mit zusätzlichen integrierten Baustufen wie TIMER und/oder Speicher angeboten. Beispiele hierfür sind der 8155 und 8755. Der 8755 besitzt ein internes ROM von  $2\text{ K} \times 8\text{ Bit}$  und ein 8-Bit-Port PA und PB, wobei im Gegensatz zum 8255 die einzelnen Bitleitungen als Aus- oder Eingang programmiert werden können.



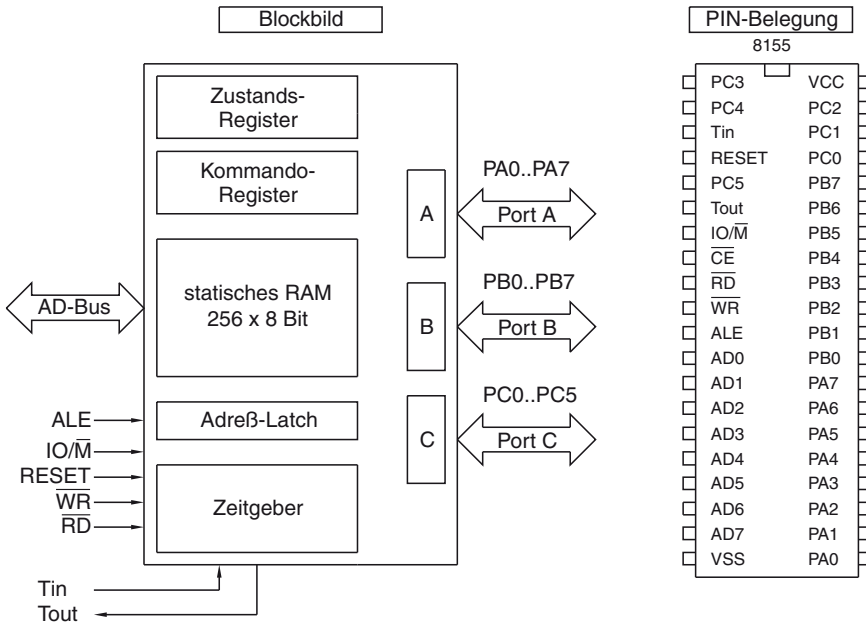


**Bild III-75** Blockbild und Anschlussbelegung des 8155

■ **Beispiel:** 8155/8156

Der Unterschied zwischen dem 8155 und dem 8156 besteht lediglich im Bausteinwahlanschluss CE. An diesem Eingang wird der 8155 mit „0“, der 8156 mit „1“ angesteuert. Der Baustein besitzt 2 TTL-kompatible Ports (A und B) mit je 8 Leitungen und ein Port C mit 6 Leitungen. Die Speicherkapazität des RAM beträgt  $256 \times 8$  Bit. Ferner ist ein 14-Bit-Zähler integriert. Der direkte Anschluss an den AD-Bus der 8085 CPU oder eines Mikrocontrollers ist wegen des vorhandenen Adressenregisters (Adress-Latch) möglich (Bild III-75). Die Bedeutung der Anschlüsse werden in der Tabelle III-22 erklärt. Alle weiteren technischen Daten zeigt Bild III-77 (siehe Seite 110).

Für parallele Ein- und Ausgaben besitzt der Baustein drei Ports: Port A und Port B mit 8 und Port C mit 6 Leitungen. Port C kann

durch das Kommando-Register so programmiert werden, dass an den Anschlüssen Steuersignale für die parallele Ein- und Ausgabe mit *Quittungsbetrieb* zur Verfügung stehen. In der Betriebsart ALT4 arbeiten dann die beiden anderen Ports im *Handshake-Betrieb*, während drei Leitungen von Port C dem Port A und 3 Leitungen dem Port B zugeordnet sind. Ein Beispiel für den Anschluss peripherer Geräte im Quittungsbetrieb (Handshaking) zeigt Bild III-76. Die Steuerleitungen können in der Betriebsartentabelle mit ALT4 verglichen werden. In den Betriebsarten ALT1 und ALT2 arbeiten alle Ports als einfache Ein- und Ausgabeports. Für die Adressierung der Ports, des Kommando-Registers und des Zeitgebers kommt der Baustein mit zwei Adressleitungen nicht mehr aus, daher dienen A0, A1 und A2 zur Adressierung.

**Tabelle III-22** Bedeutung der Anschlüsse:

| PIN         | Funktion              | Anmerkungen                                                                                                                                                                                                                                  |
|-------------|-----------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| D0 ... D7   | Datenbus              | Die Adresse wird mit der abfallenden Flanke des Signals ALE gespeichert.<br>Adressenspeicher-Freigabe<br>Eingang High-aktiv; ein H-Pegel an diesem Eingang setzt alle Register zurück und bringt die Ports in die Betriebsart 0 auf Eingabe. |
| AD0, AD7    | Adressen-/Datenbus    |                                                                                                                                                                                                                                              |
| ALE         | Adress Latch Enable   |                                                                                                                                                                                                                                              |
| RESET       | Rücksetzeingang       |                                                                                                                                                                                                                                              |
| IO, /M      | E/A-Speicherwahl      | Eingang High-aktiv<br>Eingang Low-aktiv<br>Eingang Low-aktiv                                                                                                                                                                                 |
| CE          | Baustein-Auswahl      |                                                                                                                                                                                                                                              |
| /RD         | Lese-Eingang          |                                                                                                                                                                                                                                              |
| /WR         | Schreib-Eingang       |                                                                                                                                                                                                                                              |
| PA0 ... PA7 | Port A                | Bit 0 ... Bit 7<br>Bit 0 ... Bit 7<br>Bit 0 ... Bit 6                                                                                                                                                                                        |
| PB0 ... PB7 | Port B                |                                                                                                                                                                                                                                              |
| PC0 ... PC5 | Port C                |                                                                                                                                                                                                                                              |
| TIMER IN    | Zeitgebereingang      |                                                                                                                                                                                                                                              |
| TIMER OUT   | Zeitgebераusgang      |                                                                                                                                                                                                                                              |
| VCC         | Betriebsspannung +5 V |                                                                                                                                                                                                                                              |
| GND         | Masse 0 V             |                                                                                                                                                                                                                                              |

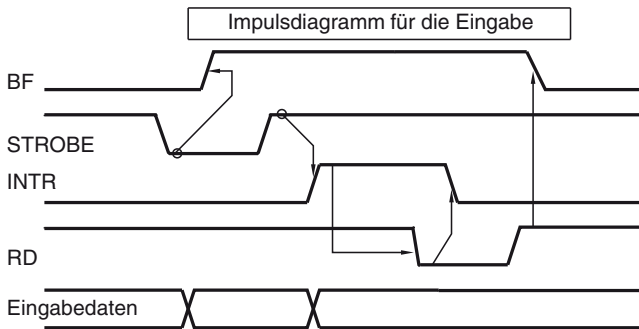
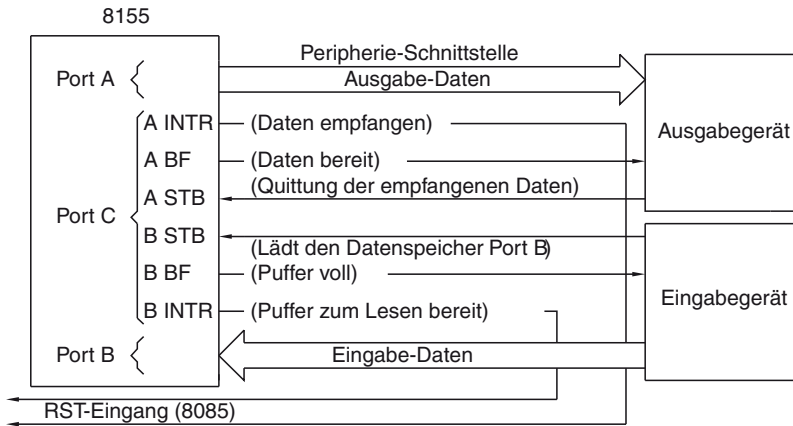


Bild III-76

Baustein im Quittungsbetrieb

Die Programmierung erfolgt über das Kommando-Register. Eine einfache Programmsequenz zeigt den Programmiervorgang zur Ausgabe über das Port A.

#### ■ Beispiel:

```
MVI A,01 ;Portbaustein initialisieren
;PA = Ausgang
OUT 00 ;Adresse des Kommando-Registers
MVI A,FF ;Daten → Akkumulator
OUT 01 ;Datenausgabe an Port A
;am Port A liegen jetzt alle Ausgänge auf „1“
```

Neben dem Kommando-Register besitzt der 8155 ein Zustandsregister, wo der Zustand des Zeitgebers und der Zustand der Steuerleitungen abgefragt werden können. Die Adresse ist die des Kommando-Registers. Das ist möglich, weil in das Kommando-Register nur eingeschrieben werden kann und das Zustandsregister nur gelesen wird. Der Zeitgeber des Bausteins ist ein 14-Bit-Abwärtszähler, der die Impulse am Eingang  $T_{in}$  zählt und sich nach Ende der Zählung betriebsartenabhängig verhält, d.h. am Ausgang  $TIMER\ OUT$  einen Rechteckimpuls ausgibt, wenn das Ende der Zählung erreicht ist. Die Bedeutung der Bits für den Zeitgeber sind ebenfalls im Bild dargestellt.

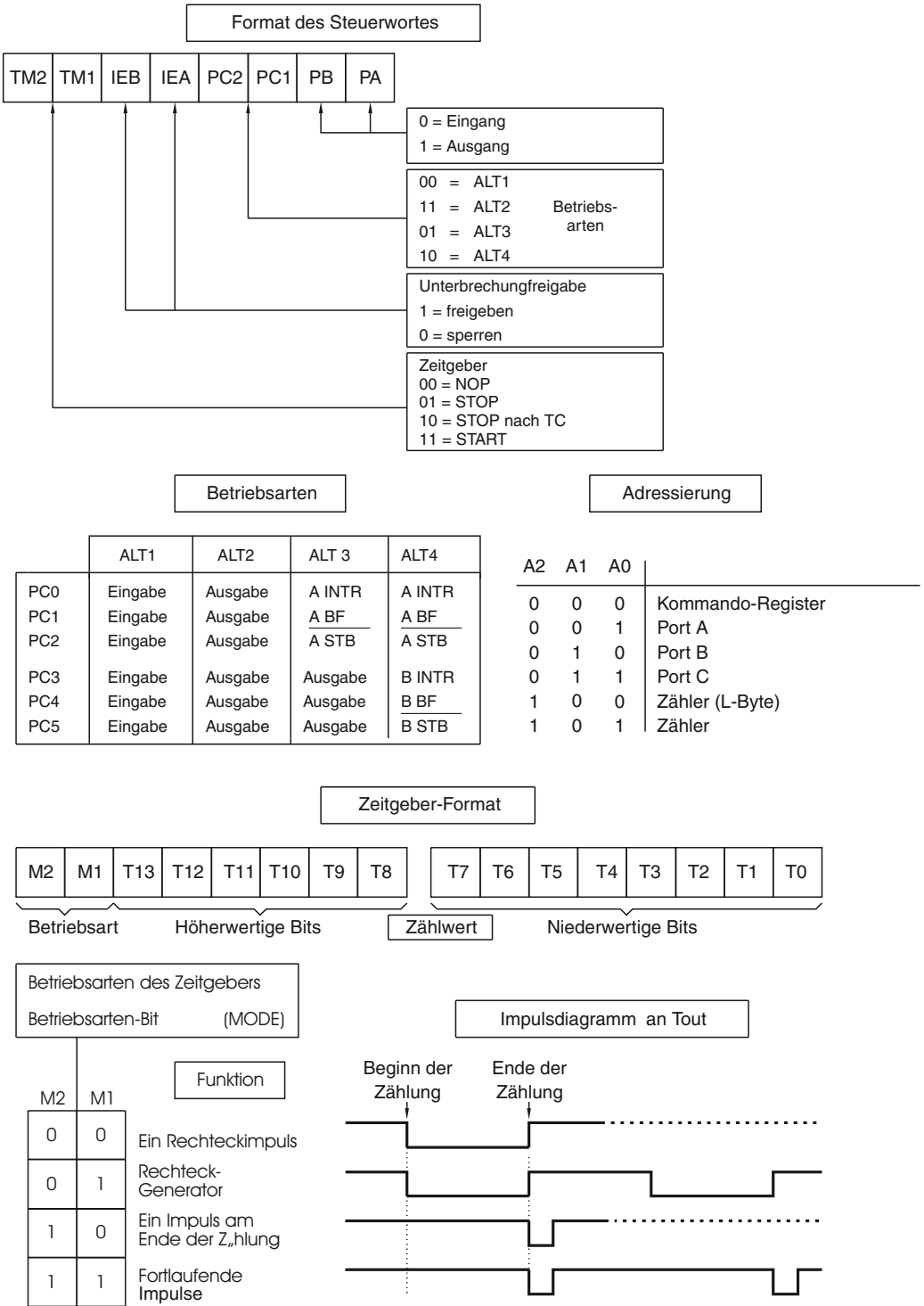
■ **Beispiel:** Der Portbaustein 8755 besitzt als Speicher ein EPROM (elektrisch programmierbarer und UV-löschbarer Speicher) mit einer Speicherkapazität von  $2\text{ K} \times 8\text{ Bit}$ . Zur Bausteinauswahl sind die beiden Anschlüsse /CE1 (low-aktiv) und CE2 (high-aktiv) anzusprechen. Als Ports besitzt der Baustein das Port A und das Port B mit jeweils 8 Leitungen oder Kanälen (Bild III-78, siehe Seite 631). Im Gegensatz zu vielen anderen Portbausteinen

kann hier jeder Kanal als Eingabe- oder Ausgabekanal arbeiten. Die Funktion wird durch die entsprechende Adressierung vorgenommen. Der Ein- oder Ausgabezustand jeden Kanals bestimmt das Datenrichtungs-Register (DDR). Die Funktion eines Kanals beschreibt Bild III-79 siehe Seite 631.

## 4.7 Eingabe-Ausgabe-Bausteine für den seriellen Betrieb

### 4.7.1 Allgemeines

Bausteine für den seriellen Betrieb übernehmen die Daten wortweise vom Prozessor und wandeln sie in eine kontinuierliche Folge serieller Informationen um. Des weiteren können Daten seriell empfangen werden und für den Prozessor in ein Datenwort parallel umgewandelt werden. Wesentlicher Bestandteil sind Parallel-Serienwandler und Serien-Parallelwandler. Bild III-80 zeigt das Prinzip der seriellen Übertragung mit einem E/A-Baustein. Der Aufwand, die Realisierung dieser Wandler mit logischen Schaltungen vorzunehmen, ist unwirtschaftlich. Man bedient sich daher USART's (universell asynchron receiver/transmitter = Universeller Asynchron-Empfänger Sender) oder SIO's (serial input/output = Serieller E/A-Baustein).



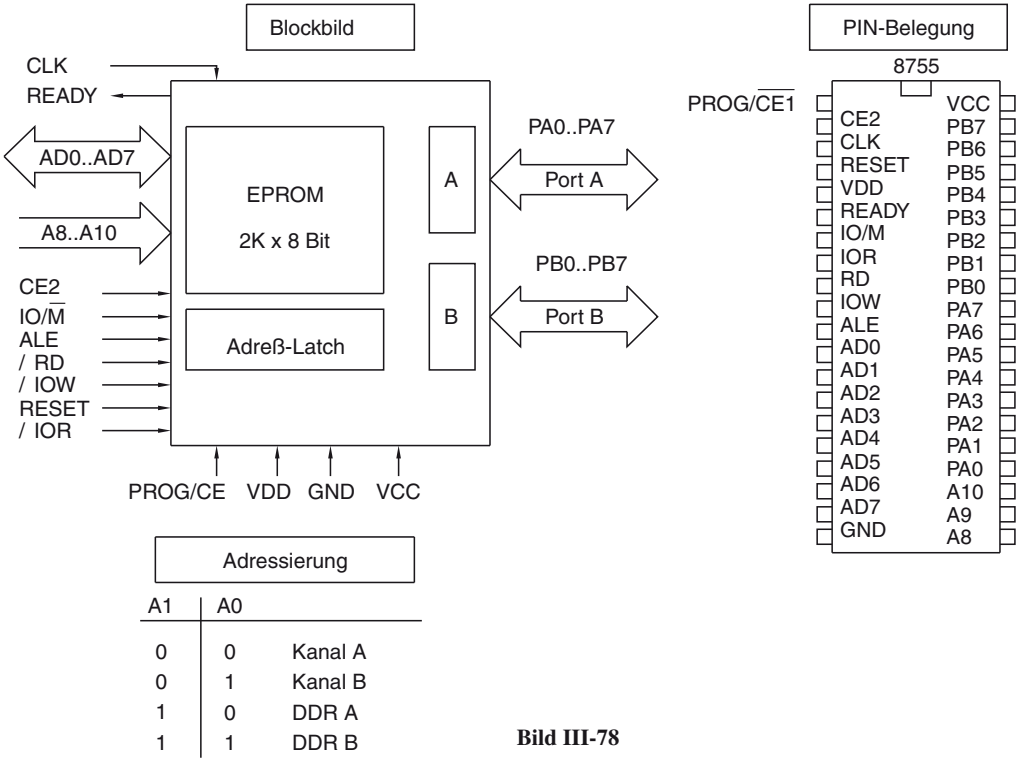


Bild III-78

E/A-Baustein

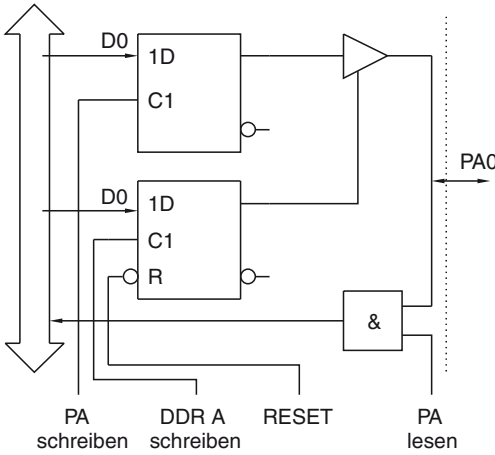


Bild III-79  
Datenrichtungs-Register mit Datenleitung

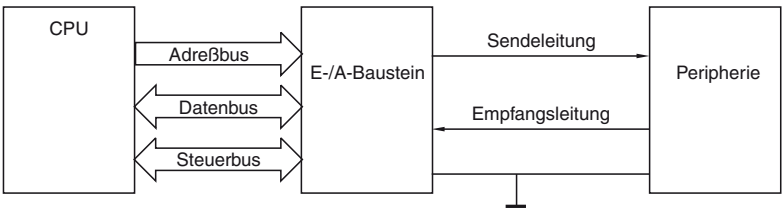


Bild III-80  
Prinzip der seriellen Übertragung mit E/A-Baustein

4.7.2 USART

Beim Senden gelangen die parallel gelieferten Daten vom Prozessor über Zwischenregister (Latch) und Parallel-Serienwandler auf die Sendeausgangsleitung. Beim Empfang müssen die seriellen Daten wieder in parallele Worte rückgeführt werden. Damit der Prozessor hinsichtlich des Zeitpunktes, wann Daten von ihm gesendet bzw. empfangen werden sollen, flexibler ist, wird ein zusätzliches Sende- und Empfangsregister eingebaut. Der Sender fügt noch zusätzliche Bits in den Datenstrom ein, damit der Prozessor sich nicht mit den Besonderheiten der speziellen Übertragungsverfahren wie beispielsweise Start- und Stopbits beschäftigen muss. Ähnlich muss der Empfänger Zeichen, die nicht zum Dateninhalt gehören, entfernen. Hierzu dient eine Steuerung des Taktstromes (Bild III-81). Die eigentliche Bausteinfunktion wird durch die Software festgelegt.

■ **Beispiel:** Der USART 8251 ist ein universeller Synchron/Asynchron-Sender/Empfänger-Baustein und kann durch den Prozessor für die gebräuchlichen Datenübertragungsverfahren programmiert werden. Bild III-82 gibt die Anschlussbelegung wieder und zeigt das Blockbild des Bausteins. Tabelle III-23 beschreibt die Bedeutung der Anschlüsse.

Der Baustein kann im Synchron- oder Asynchronbetrieb eingesetzt werden. Die Betriebsarten unterscheiden sich im Aufbau des Übertragungszeichens und der Synchronisation. Beim Synchronbetrieb bestimmt das periphere Gerät die Übertragungsrate. Beim Asynchronbetrieb werden die Daten mit vorgegebener Taktfrequenz übertragen. Ein interner Frequenzteiler kann mit dem Modewort auf die Teilverhältnisse 1, 16 oder 24 eingestellt werden. Mit zugeführtem Sendetakt und programmiertem Teilverhältnis wird die Übertragungsgeschwindigkeit (Baudrate  $1 \text{ Bd} = 1 \text{ Bit/Sekunde}$ ) bestimmt. Der Baustein lässt Übertragungsgeschwindigkeiten bis zu 64 KBaud zu. Jede Übertragung beginnt mit einem Start-Bit und endet je nach Programmierung mit dem Paritybit und mit bis zu 2 Stop-Bits. Die Wortübertragung beginnt stets mit D0. Die Länge der zu übertragenden Worte ist zwischen 5 und 8 Bit programmierbar. Der Sendevorgang über die Leitung TxD wird durch den Sendetakt TxC ausgelöst. Steht kein Sendezichen an, hat der TxD-Ausgang H-Pegel. Der Baustein 8251 empfängt die seriellen Daten über die Leitung RxD. RxD liegt

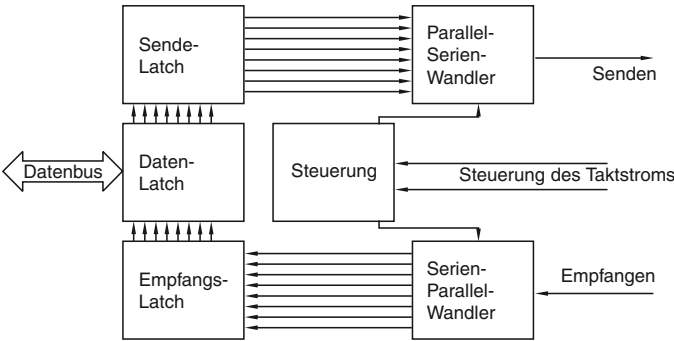


Bild III-81 Prinzip eines USART

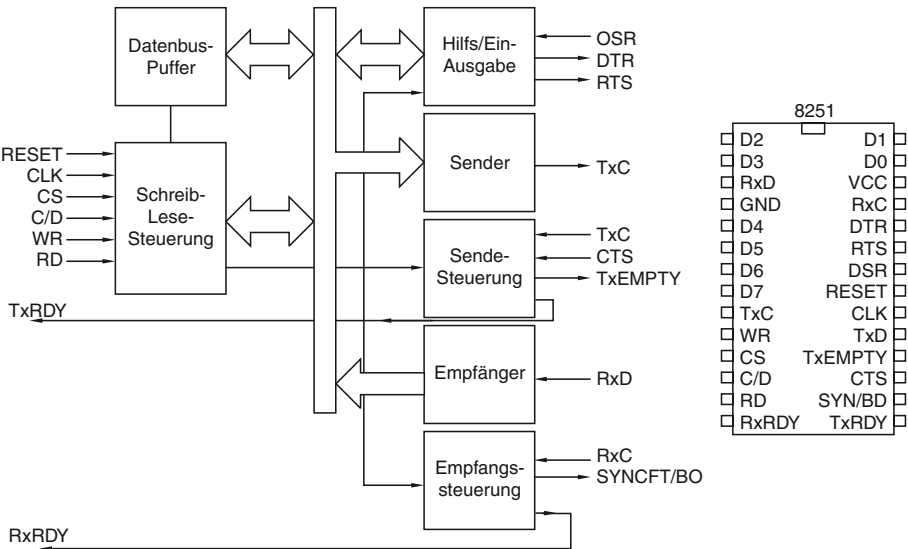


Bild III-82 Blockbild des 8251 und Anschlussbelegung

Tabelle III-23 Bedeutung der Anschlüsse

|           |                                                             |                     |
|-----------|-------------------------------------------------------------|---------------------|
| PIN       | Funktion                                                    |                     |
| D0 ... D7 | Datenbus                                                    |                     |
| RESET     | Rücksetzen                                                  |                     |
| CLK       | Systemtakt                                                  |                     |
| CS        | Bausteinwahl                                                | Clock               |
| C/D       | Kennzeichnung der Daten als Steuer- bzw. Statuswort/Zeichen | Chip Select         |
| RD        | Daten oder Zustand lesen                                    | Control/Data        |
| WR        | Daten oder Steuerinformation schreiben                      | Read                |
| DSR       | Betriebsbereitschaft                                        | Write               |
| DTR       | DE-Einrichtung betriebsbereit                               | Data Set Ready      |
| RTS       | Sender einschalten                                          | Data Terminal Ready |
| TxD       | serielle Sendedaten                                         | Request to Send     |
| TxC       | Sendetakt                                                   | Transmit Data       |
| CTS       | Senderfreigabe                                              | Transmitter Clock   |
| TxEMPTY   | Senderegister leer                                          | Clear to Send       |
| TxRDY     | Sender kann Daten annehmen                                  | Transmitter Empty   |
| RxD       | Serielle Empfangsdaten                                      | Transmitter Ready   |
| RxC       | Empfangstakt                                                | Receive Data        |
| RxREADY   | Empfänger kann Daten liefern                                | Receiver Clock      |
| VCC       | Betriebsspannung 5 V                                        | Receiver Ready      |
| GND       | Masse 0 V                                                   |                     |

normalerweise auf H-Pegel. Bei fallender Flanke an diesem Eingang und Startbits erfolgt der Empfangsvorgang. Die Daten gelangen zum Datenbus-Puffer und können vom Prozessor abgeholt werden. Der Datenempfang wird durch den Anschluss RxRDY mit einem H-Pegel gemeldet.

Zum Handshaking ist bei Empfangssteuerung der Ausgang RxRDY zuständig. SYNDET/BD hat unterschiedliche Funktionen, je nach programmierter Betriebsart. Die Anschlüsse DSR, DTR und RTS dienen zur Modemsteuerung.

Treten Fehler bei der Übertragung auf, wird dies im Statusregister (Tabelle III-24) gekennzeichnet.

Tabelle III-24 Übertragungsfehler

|                 |                      |
|-----------------|----------------------|
| Parity-Error    | (Paritätsfehler)     |
| Overrun-Error   | (Überlauffehler)     |
| Framing-Error   | (Sperrschrittfehler) |
| Break-Detection | (Break-Erkennung)    |

Die Programmierung erfolgt wie bei den anderen E-/A-Bausteinen durch Laden des Kommandoregisters vom Prozessor über den Datenbus. Mit dem Steuerwort

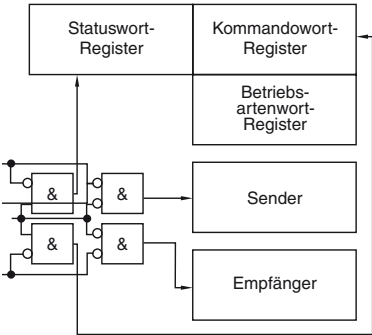


Bild III-83 Prinzip der Adressierung

für MODE werden die allgemeinen Betriebseigenschaften wie Synchron- oder Asynchronbetrieb, Zeichenlänge und Paritätsart festgelegt. Mit dem Kommandowort wird die Sende- und Empfangssteuerung beeinflusst. Die Reihenfolge „Betriebsart festlegen“ und anschließend „Kommandowort eingeben“ muss eingehalten werden, da beide Codes mit der gleichen Adresse Anschluss C/D = „1“ übergeben werden. Das Statusregister kann bei C/D = „1“ gelesen werden (Tabelle III-25). Dadurch kann der Prozessor den Zustand des Bausteins zu jeder Zeit abfragen (Bild III-84, 85).

Tabelle III-25 Register-Adressierung

| C/D | RD | WR |                       |
|-----|----|----|-----------------------|
| 1   | 0  | 1  | Statuswort-Register   |
| 1   | 1  | 0  | Kommandowort-Register |

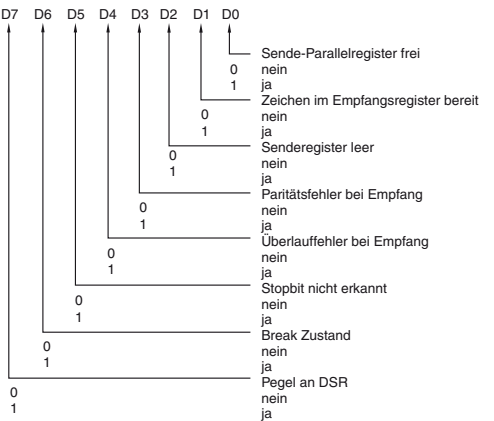


Bild III-84 Statuswort



#### 4.8 Bausteine mit Sonderfunktionen

Einige Mikroprozessorsysteme besitzen außer den bekannten Speicher- und Ein- und Ausgabeeinheiten spezielle Peripheriebausteine, die jeweils eine besondere Aufgabe übernehmen. Als Beispiel wurde ein 80286-System gewählt (Bild III-86, bereits auf Seite 634). Außer dem bekannten Adress-Latch und dem Transceiver, einem Zweirichtungstreiber und dem Prozessor gehören als weitere Bausteine ein *Taktgenerator*, ein *Bus-Controller* und ein *Interrupt-Controller* zum System.

Der Taktgenerator 82284 (Bild III-87) besteht aus einem Oszillator (Osz. 9), der für den Systemtakt verantwortlich ist, einer Synchronisationseinheit, einer RESET-Schaltung und dem PCLK-Generator. Der Taktgenerator selbst kann durch einen externen Generator gesteuert werden, oder der interne Oszillator wird

nur noch mit einem Quarz versehen (Anschluss X1 und X2), der dann die Frequenz bestimmt. Der Anschluss F/C (Frequency/Crystal select) dient zur Auswahl der Takterzeugung. Das PCLK-Signal (Peripheral Clock), das über ein Flipflop (PCLK-Generator) vom CLK-Signal erzeugt wird, ist für die Synchronisation peripherer Geräte verantwortlich. Die Erzeugung des /READY-Signals ist von der entsprechenden Steuerung abhängig (/ARDYEN, /ARDY, /SRDYEN, /SRDY). Das Signal dient zur Steuerung langsamerer Peripheriegeräte und fügt Wartezustände (Wait States) in einen Schreib- oder Lesezyklus ein. Am /RES (Reset in) kann das Reset-Signal erzeugt werden.

Der Buscontroller 82288 (Bild III-88) decodiert die Statussignale (S0, S1 und M/IO) des Prozessors und erzeugt mit dem CLK-Signal die Kommando- und Kontrollsignale (Tabelle III-26).

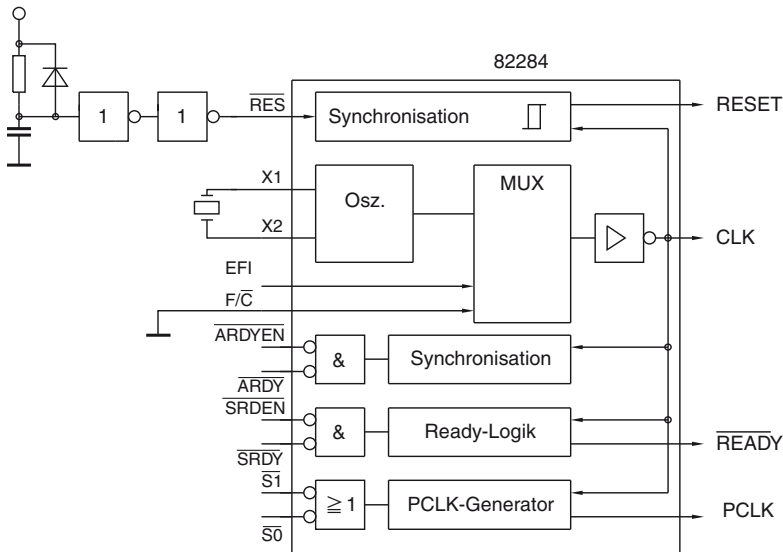


**Bild III-87**  
Taktgenerator 82284

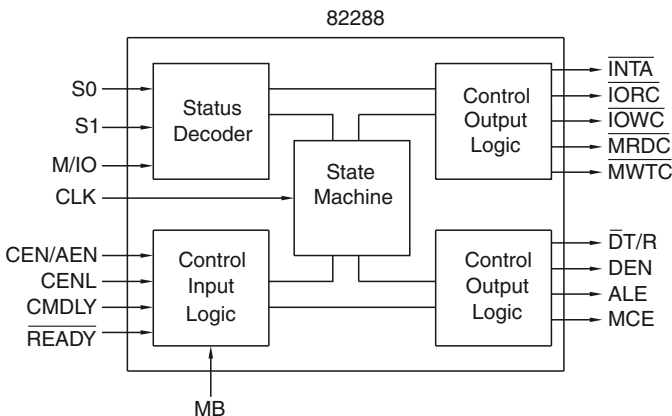


**Bild III-88**  
Bus-Controller



Tabelle III-26 Kommando- und Kontrollsignale

| Kommandosignale                      | Kontrollsignale           |
|--------------------------------------|---------------------------|
| INTA<br>IORC<br>IOWC<br>MRDC<br>MWTC | DT/R<br>DEN<br>ALE<br>MCE |

Interrupt-Controller sollen bei einer Unterbrechungsanforderung eines externen Gerätes am Prozessor einen Interrupt auslösen. Der Baustein 8259 im Bild III-86 besitzt 8 Eingänge für Interruptquellen (IR0 ... IR7). Der Prioritätsdecoder hat die Aufgabe, bei gleichzeitiger Anforderung mehrerer Quellen eine Reihenfolge der Bearbeitungssequenzen festzulegen.

5 Mikrocontroller

5.1 Allgemeines

Mikrocontroller (MC) sind Bauelemente, bei denen auf einem Chip alle erforderlichen Bausteine eines Mikroprozessorsystems integriert sind. Hierzu gehören je nach Type der eigentliche Rechenkern mit Multiplikations- und Divisionseinheit und Taktoszillator, die Systemsteuerung und die Interrupteinheit. Die Kommunikation mit externen Baugruppen wird über parallele und serielle Schnittstellen ermöglicht. Für Mess-, Steuerungs- und Regelzwecke sind *Analog-Digital-Wandler* (AD-Wandler), *Digital-Analog-Wandler* (DA-Wandler) und *Zähler* integriert. Ein *Watchdog-Timer* („Wachhund“) kontrolliert den gesamten Arbeitsablauf. MC’s besitzen eigene Programmspeicher, die als ROM oder EPROM ausgeführt sein können und als Arbeitsspeicher ein internes RAM (siehe auch Abschnitt Halbleiterspeicher). Weiter besteht die Möglichkeit, das MC-System mit externen Speichern zu erweitern. Bild III-89 zeigt in einer Übersicht Komponenten eines Mikrocontrollers. Je nach Verwendungszweck sind bei den unterschiedlichen Typen nicht alle Funktionsstufen enthalten, dafür sind andere Stufen mehrfach vorhanden. Um die Gehäusegröße und damit PIN-Zahl in Abhängigkeit der Funktionsaufgaben möglichst gering zu halten, sind viele Anschlüsse für Doppelfunktionen vorgesehen.

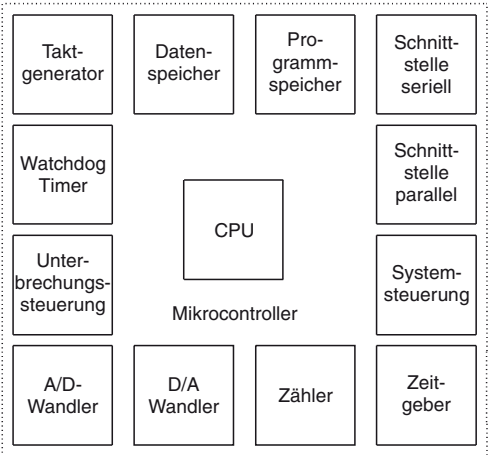


Bild III-89 Komponenten eines Mikrocontrollers

Aus der Vielzahl der Einsatzgebiete sind die Schwerpunkte Datenverarbeitung, Industrieelektronik, Mess-, Steuerungs- und Regelungstechnik, Unterhaltungselektronik und Kraftfahrzeugtechnik zu nennen. Weitverbreitet sind 4-Bit- und 8-Bit-Versionen. Mikrocontroller verdrängen den klassischen Prozessor aus einigen Anwendungsbereichen, weil „Ein-Chip-Systeme“ dort wirtschaftlicher zum Einsatz kommen. Einige Anwendungen, wie beispielsweise in der Automobilindustrie, werden erst durch MC’s ermöglicht. Bei größeren Stückzahlen sind MC’s mit ihrer integrierten Peripherie kostengünstiger als Prozessoren mit externen Peripheriebausteinen. Der Platzbedarf verringert sich erheblich, und die Betriebssicherheit steigt auf Grund der kleineren Anzahl von Fehlerquellen. Die Leistungsfähigkeit der MC’s liegt einmal in der relativ hohen Verarbeitungsgeschwindigkeit, da die meisten Befehle mit nur einem Befehlszyklus (z.B. 1 µs) auskommen, der flexiblen Adressierungsarten und den zahlreichen Bitverarbeitungsmöglichkeiten. Beispielsweise können logische Befehle mit einzelnen Bits durchgeführt oder einzelne Portbits gesetzt oder rückgesetzt werden, ohne andere Bits zu beeinflussen (siehe auch Abschnitt Maschinensprache). Werden in einem System mehrere Mikrocontroller eingesetzt, spricht man von einem *Multi-Controller*.

Tabelle III-27 Mikrocontroller

| Type   | ROM kByte | RAM Byte | E/A 8-Bit-Port | ADC/E 8-Bit | Clock (MHz) | TIMER |
|--------|-----------|----------|----------------|-------------|-------------|-------|
| 8031   | –         | 128      | 4              | –           | 12          | 2     |
| 8051   | 4         | 128      | 4              | –           | 12, 16      | 2     |
| 8052   | 8         | 256      | 4              | –           | 12, 16, 20  | 3     |
| 80C52  | 8         | 256      | 4              | –           | 12          | 3     |
| 80512  | 4         | 128      | 6+1E           | 8           | 12          | 2     |
| 80513  | 12        | 256      | 4              | –           | 12, 16      | 3     |
| 80515  | 12        | 256      | 6+1E           | 8           | 12, 16      | 3     |
| 80C517 | 12        | 256      | 7+1,5E         | 12          | 12, 16      | 4     |

System, bei dem aus Verwaltungsgründen MC's als *Master* oder *Slave* arbeiten. Der Master übernimmt hierbei die Organisation der Datenübertragung. Der entsprechende Einsatz wird den Bausteinen durch Software mitgeteilt. Die Kommunikation untereinander erfolgt über eine serielle Schnittstelle. Tabelle III-27 führt beispielhaft Mikrocontroller der 80x1x-Familie auf, die sich weltweit als Standard durchgesetzt hat. Bei den Mikrocontrollern dieser Serie werden zwei Versionen unterschieden. Man spricht von *ROM-Versionen*, wenn der Anwender über das interne ROM verfügen kann und von *ROM-losen Versionen*, wenn das interne ROM abgeschaltet ist. Der bis dahin interne Bereich ist dann als externer Bereich ansprechbar. Weitere Unterschiede liegen in der Anzahl der E/A-Ports und der Anzahl der Zeitgeber.

5.2 8-Bit-Mikrocontroller

5.2.1 Funktionsbeschreibung des MC 8051

Der MC 8051 besitzt einen Daten- und Programmspeicher. Eine Kommunikation mit peripheren Geräten ist über die serielle Schnittstelle (UART) und über parallele Schnittstellen (Port 0 bis 3) möglich. Um auf externe Geräte zu reagieren, sind Interrupteingänge vorhanden. Der TIMER ist als Zähler oder Zeitgeber programmierbar. Hauptbestandteil ist die 8051 CPU, der eigentliche Prozessor (Bild III-90). Bei dem Mikrocontroller 8051 können eine Reihe von Anschlussleitungen für unterschiedliche Verwendungen genutzt werden. Erkennbar sind die Doppelbelegungen anhand der PIN-Zuordnung, wie in Bild III-91 dargestellt. In der Tabelle III-28 ist die Bedeutung der jeweiligen Anschlüsse aufgeführt.

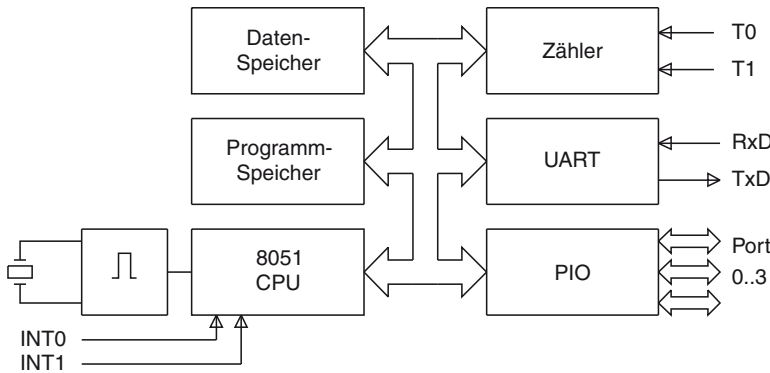
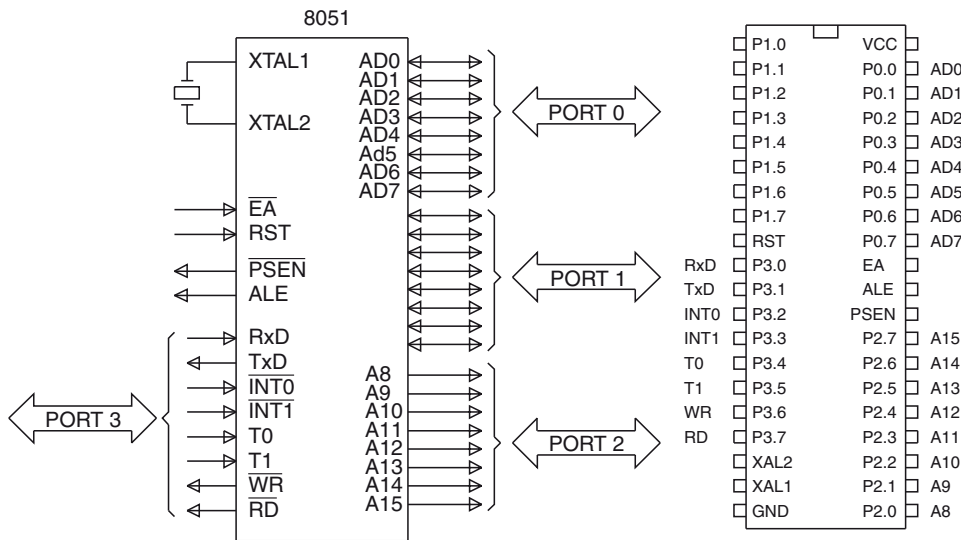


**Bild III-90**  
Vereinfachtes  
Blockbild



nach Datenblatt der Firma Siemens

**Bild III-91** Anschlussbelegung beim MC 8051

Tabelle III-28 Bedeutung der Anschlüsse

| Bezeichnung   | Funktion                                                                                                  |
|---------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| AD0 ... AD7   | Adress-Datenbus                                                                                           |
| RST           | Rücksetzen bei H-Pegel                                                                                    |
| VPD           | Bei Anschluss Ruhestrom für internes RAM                                                                  |
| RxD           | Serielle Schnittstelle                                                                                    |
| TxD           | Serielle Schnittstelle                                                                                    |
| /INT0         | (Interrupt)/Unterbrechungseingang                                                                         |
| /INT1         | (Interrupt)/Unterbrechungseingang                                                                         |
| T0            | (Timer 0)/Zähler/Zeitgeber 0                                                                              |
| T1            | (Timer 1)/Zähler/Zeitgeber 1                                                                              |
| /WR           | (Write)/Schreiben                                                                                         |
| /RD           | (Read)/Lesen                                                                                              |
| XAL2          | Quarzanschluss, Externe Taktmöglichkeit                                                                   |
| XAL1          | Quarzanschluss                                                                                            |
| /E/A          | External Access/Externer Programmspeicherzugriff<br>(bei L-Pegel); bei H-Pegel: 4 K intern, ab 4 K extern |
| /PSEN         | Program Store Enable/Externe Programmspeicherfreigabe                                                     |
| ALE           | Adress Latch Enable/Signal zur Adressenzwischenspeicherung                                                |
| PX.0 ... PX.7 | Port (0, 1, 2, 3) digitale E/A, 8 Bit                                                                     |

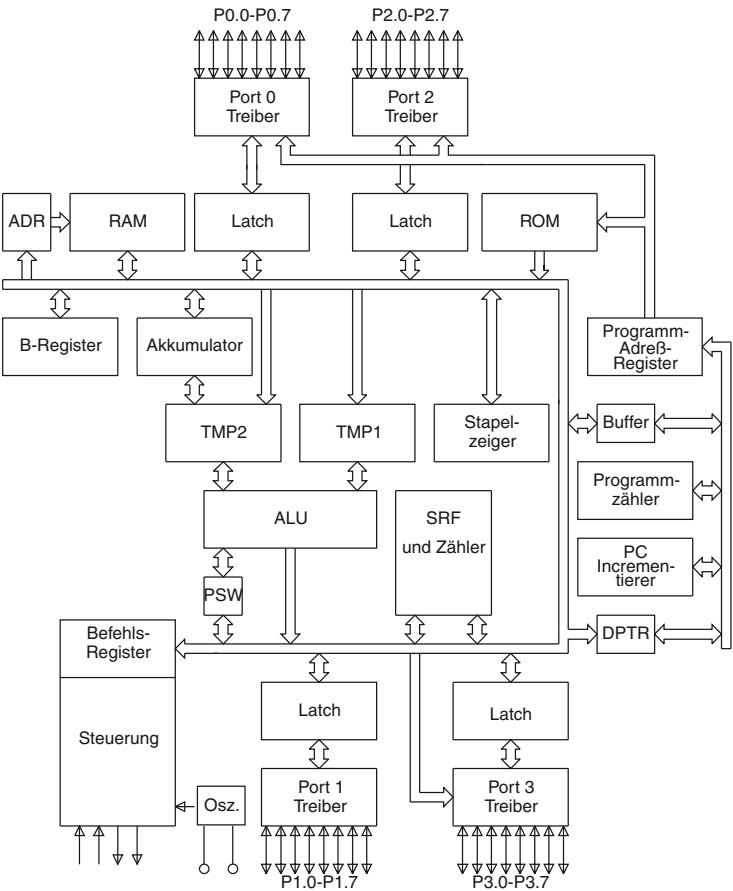


Bild III-92  
Funktionsbild

Das Funktionsbild des Bausteins gibt Bild III-92 wieder. Die CPU besteht aus dem Befehlszähler (PC), dem Befehlsdecoder der ALU (Rechen- und Logikeinheit) und der Steuerlogik. Der Programmzähler steuert den Programmablauf, und der Befehlsdecoder sorgt für die Befehlsausführung (siehe auch Abschnitt Mikroprozessortechnik). Die ALU des 8051 kann folgende Operationen durchführen: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Vergleichen, Rotieren. Außerdem können die logischen Operationen UND, ODER, Exklusiv ODER und Bitmanipulationen durchgeführt werden. Als Arbeitsregister dienen Akkumulator, die Register R0 bis R7 mit ihren vier Bänken (siehe auch Bild III-102) und das B-Register. Die Bänke können mit dem Alternativ-Registersatz der Z80 CPU verglichen werden und die Register R0 bis R1 mit den von den 8-Bit-Prozessoren bekannten Registern B, C, D, E, H und L. Im Gegensatz zu den genannten Registern wird

beim 8051 eine Adresse angesprochen, und die jeweiligen Registersätze werden durch Umschaltung aktiviert. Wie bei der Standard-CPU sind Stapelzeiger (Stack-Pointer), der hier bei einem RESET auf Adresse 07 gesetzt wird, der Programmzähler (PC = Program Counter) und das vom Mikroprozessor bekannte Kennzeichen oder Flagregister (hier: PSW = Programm Status Word) vorhanden. Die von einem herkömmlichen 8-Bit-Prozessor abweichenden zusätzlichen Baustufen sind im Blockbild III-92 besonders gekennzeichnet. Der Datenzeiger (DPTR = Data Pointer) zeigt auf die als nächstes zu bearbeitende Adresse des Datenspeichers.

Zur Steuerung interner Funktionen dienen Spezial-Funktions-Register (SFR = Special-Function-Register). Im Funktionsbild sind sie mit dem Block SFR und Zähler und Zähler gekennzeichnet. Die genaue Aufteilung dieses Blockes zeigt Bild III-93. Tabelle III-29 erläutert die entsprechenden Kürzel der Registernamen.

Tabelle III-29 Special-Function-Register

| Bezeichnung | Funktion                                            |                                                                                                                                          |
|-------------|-----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| P0          | Port 0                                              | L-Byte<br>H-Byte<br>Control<br>Betriebsart<br>L-Byte<br>L-Byte<br>H-Byte<br>H-Byte<br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br>B-Register |
| SP          | (Stack-Pointer)/Stapelzeiger                        |                                                                                                                                          |
| DPL         | (Data-Pointer)/Datenzeiger                          |                                                                                                                                          |
| DPH         | (Data-Pointer)/Datenzeiger                          |                                                                                                                                          |
| TCON        | (Timer/Counter) Zeitgeber/Zähler                    |                                                                                                                                          |
| TMOD        | (Timer/Counter) Zeitgeber/Zähler                    |                                                                                                                                          |
| TL0         | (Timer/Counter) Zeitgeber/Zähler 0                  |                                                                                                                                          |
| TL1         | (Timer/Counter) Zeitgeber/Zähler 1                  |                                                                                                                                          |
| TH0         | (Timer/Counter) Zeitgeber/Zähler 0                  |                                                                                                                                          |
| TH1         | (Timer/Counter) Zeitgeber/Zähler 1                  |                                                                                                                                          |
| P1          | Port 1                                              |                                                                                                                                          |
| SCON        | (Serial Interface Control) Status/Kontroll-Register |                                                                                                                                          |
| SBUF        | (Serial Data Buffer)/Seriellles Pufferregister      |                                                                                                                                          |
| P2          | Port 2                                              |                                                                                                                                          |
| IE          | (Interrupt Enable)/Interruptmaske/-freigabe         |                                                                                                                                          |
| P3          | Port 3                                              |                                                                                                                                          |
| IP          | (Interrupt Priority)/Interruptpriorität             |                                                                                                                                          |
| PSW         | Program Status Word                                 |                                                                                                                                          |
| ACC         | Accumulator B                                       |                                                                                                                                          |

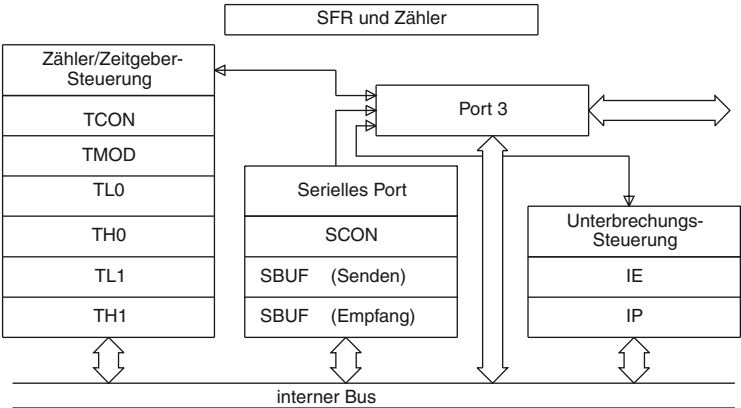


Bild III-93  
Special-Function-Register  
und Zähler

5.2.2 Ein-/Ausgabeeinheit

Die 4 E/A-Ports mit einer 8-Bit-Breite arbeiten bidirektional (in beiden Richtungen) und können jeweils einzeln unabhängig voneinander als Eingabe- oder Ausgabekanal arbeiten. Bild III-94 verdeutlicht dies an Hand der Portstruktur eines Kanals. Die Ausgabeinformation („0“ oder „1“) wird mit dem Schreibsignal dem D-Flipflop übergeben und steht somit dem Portausgang zur Verfügung. Der Zustand des D-Flipflops kann über Lesen des D-Flipflops (Latch lesen) jederzeit abgefragt werden. Soll eine Information eingelesen werden, wird das D-Flipflop gesperrt. Mit dem Lesesignal (PIN lesen) gelangt das anliegende Bit zum Datenbus. Bei einem RESET wird der Portanschluss auf Eingang geschaltet.

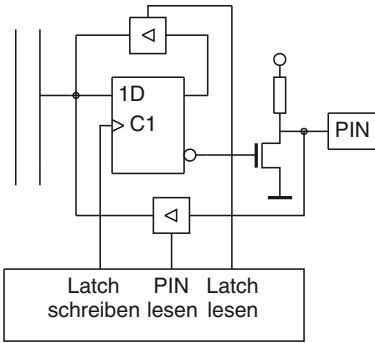


Bild III-94 Portstruktur eines Kanals

Port 0, 2 und 3 besitzen Doppelfunktionen. Beispielsweise wird das Port 0 zur Adressierung externer Speicher mit verwendet. Port 0 arbeitet dann als Adress-/Datenbus. Bild III-95 zeigt den Anschluss eines externen Speichers an den Baustein.

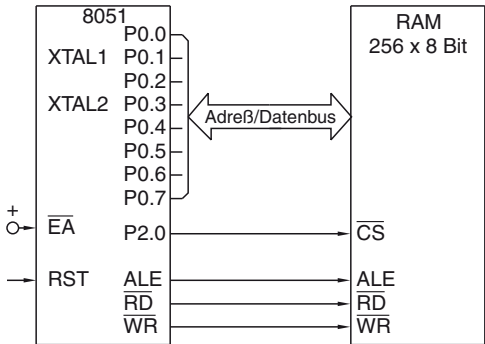


Bild III-95 Anschluss an einen externen Speicher

Da der dargestellte Speicher einen internen Adressen-zwischenspeicher besitzt (Eingang ALE), ist kein zusätzlicher Zwischenspeicher erforderlich. Besitzt der externe Speicher eine größere Kapazität als 0,25 k, wird Port 2 ebenfalls in die Adressierung mit

einbezogen. Hier wird die Bausteinauswahl mit P2.0 durchgeführt. Port 3 kann neben Ein- und Ausgabe von Daten die im Anschlussplan angegebenen Funktionen durchführen.

5.2.3 RESET-Schaltung

Damit die CPU nach dem Einschalten in einen definierten Anfangszustand gebracht wird, ist eine RESET-Schaltung notwendig (Bild III-96). Die CPU arbeitet dann immer ab Adresse 0000 des Speichers. Der Baustein wird durch einen „H“-Pegel am Anschluss RST zurückgesetzt. Beim Einschalten der Betriebsspannung muss der Anschluss mindestens für die Zeit von 1 ms H-Pegel besitzen. Bei der dargestellten Schaltung wirkt der Kondensator bei Anlegen der Versorgungsspannung wie ein Kurzschluss und legt zunächst „H“-Pegel an den RESET-Eingang. Nach Aufladung des Kondensators liegt „L“-Pegel an. Der MC 80(C)515 benötigt nur einen Kondensator am RESET-Anschluss, weil ein interner Widerstand vorhanden ist.

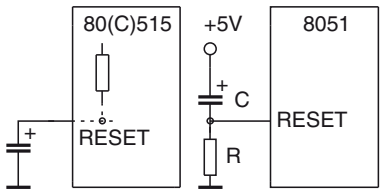


Bild III-96 RESET-Schaltungen

5.2.4 Taktgenerator

Der interne Taktgenerator des MC 8051 braucht nur noch mit dem Quarz ergänzt zu werden, um seine Funktion ausführen zu können. Die Quarzfrequenz liegt in einem Bereich bis zu 12 MHz. Der Baustein kann auch über einen externen Taktgenerator gesteuert werden. Es wird dann XTAL1 auf Masse gelegt und XTAL2 über einen Treiber angeschlossen (Bild III-97). Der Taktgenerator erzeugt alle benötigten Taktsignale des Systems.

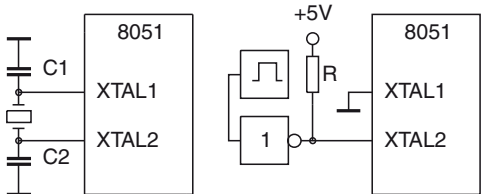


Bild III-97 Taktgenerator

5.2.5 Stromaufnahme

Um die Stromaufnahme zu reduzieren, besitzt die CMOS-Version, beispielsweise der MC 80C51, zwei Betriebsarten. Im *Power-down-Mode* wird der interne Taktgenerator abgeschaltet und der MC damit in

einen inaktiven Zustand gebracht. Die im internen RAM gespeicherten Daten bleiben erhalten. Mit einem Hardware-Reset kann diese Betriebsart beendet werden. Im *Idle-Mode* wird der Taktgenerator nur von der CPU getrennt und versorgt alle anderen Komponenten wie Zähler und serielle Schnittstelle weiterhin mit Taktsignalen. Diese Betriebsart kann über ein *Reset* oder aber auch über ein *Interrupt* beendet werden. Die unterschiedliche Stromaufnahme wird in Tabelle III-30 dargestellt.

Tabelle III-30

|          |     | Active Mode |     |     | Idle Mode |     |     |
|----------|-----|-------------|-----|-----|-----------|-----|-----|
| Frequenz | VCC | 4 V         | 5 V | 6 V | 4 V       | 5 V | 6 V |
| 0,5 MHz  |     | 1,6         | 2,2 | 3   | 0,6       | 0,9 | 1,2 |
| 3,5 MHz  |     | 4,3         | 5,7 | 7,5 | 1,1       | 1,6 | 2,2 |
| 8,0 MHz  |     | 8,3         | 11  | 14  | 1,8       | 2,7 | 3,7 |
| 12 MHz   |     | 12          | 16  | 20  | 2,5       | 3,7 | 5   |

I (mA)

5.2.6 TIMER

Der MC 8051 verfügt über 2 interne 16-Bit-Zähler T0 und T1, die als Zähler (Counter) oder Zeitgeber (Timer) programmiert werden können. Man spricht von einem Zeitgeber, wenn der interne Takt benutzt wird. Mit Zähler/Zeitgeber können Ereignisse gezählt, Zeitintervalle oder Pulszeiten gemessen und Baudraten für die serielle Schnittstelle erzeugt werden. Die jeweilige Arbeitsweise wird in den entsprechenden SFR's, dem TMOD-Register (Timer Modus) und TCON-Register (Timer Control) festgelegt. Hiermit kann beispielsweise der Zähler gestartet oder angehalten werden. Auch können in der Betriebsart 2 beide Zähler als 16-Bit-Zähler verwendet werden. In der Betriebsart 3 wird der Timer automatisch bei einem Überlaufen nachgeladen. Man spricht hier

auch von der Betriebsart „Auto Reload“. Ein gerade vorhandener Zählerstand lässt sich aus den SFR T1 bzw. T2 ablesen. Die Zähler/Zeitgeber sind Aufwärtszähler, die ein Überlauf-Kennzeichen erzeugen, beispielsweise beim 16-Bit-Zähler von FFFF nach 0000. Die Überlaufkennzeichen sind Bestandteil des TCON-Registers (Bit 7: TF1, Bit 5: TF0). Diese Kennzeichen dienen auch als Unterbreuchungskennzeichen (Timer Interrut Flags) und werden durch ein Programm abgefragt. Bild III-98 zeigt das Prinzip eines 13-Bit-Zählers/Zeitgebers in der Betriebsart (Mode) 0.

Über TR0, INT0(PIN) und Gate wird der Zeitgeber über eine TOR-Schaltung (das UND-Gatter wirkt als Schalter) aktiviert. Die Frequenz des Zeitgebers ist vom Quarz abhängig. Da jeder Maschinenzyklus den TIMER incrementiert und jeder Maschinenzyklus aus 12 Taktperioden besteht, erfolgt die im Bild dargestellte Teilung durch 12. Im Bild III-99 sind die Bitanordnung der zuständigen Register und die verschiedenen Betriebsarten aufgeführt.

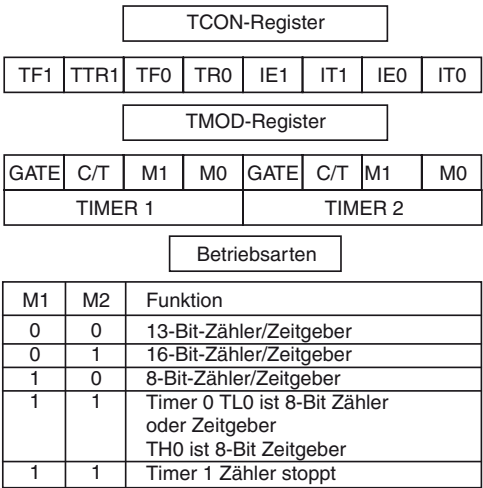


Bild III-99 Zähler-Betriebsarten und Register

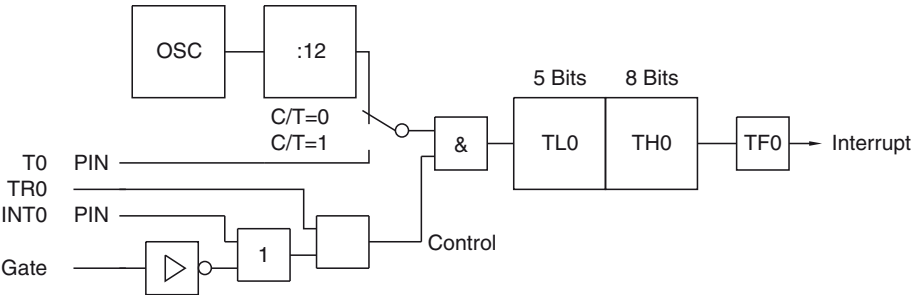


Bild III-98 TIMER in der Betriebsart 0

5.2.7 Unterbrechungssystem

Dem MC 8051 stehen 5 Interruptquellen (Interrupt = Unterbrechung) mit 2 Prioritätsebenen zur Verfügung. Nach Bild III-101 sind dies die beiden Eingänge INT0 und INT1, die beiden Zähler und eine interne serielle Schnittstelle. Nur das Interrupt der seriellen Schnittstelle wird durch Software ausgelöst, alle übrigen sind Hardware-Interrupts. Die Interrupteinträge INT0 und INT1 können je nach Programmierung flanken- oder pegelgesteuert sein. Nach

einer Interruptanforderung wird das gerade laufende Programm unterbrochen, und es erfolgt ein Sprung zum Interruptprogramm. Über eine Maske können Interrupts einzeln zugelassen oder gesperrt oder über die Interruptfreigabe alle Quellen freigegeben oder alle gesperrt werden. Liegen mehrere Interruptanforderungen gleichzeitig an, gilt die Prioritätenreihenfolge. Bei gewünschten Interrupts werden die entsprechenden Einsprungsadressen des internen Programmspeichers ausgewählt (siehe auch Bild III-102).

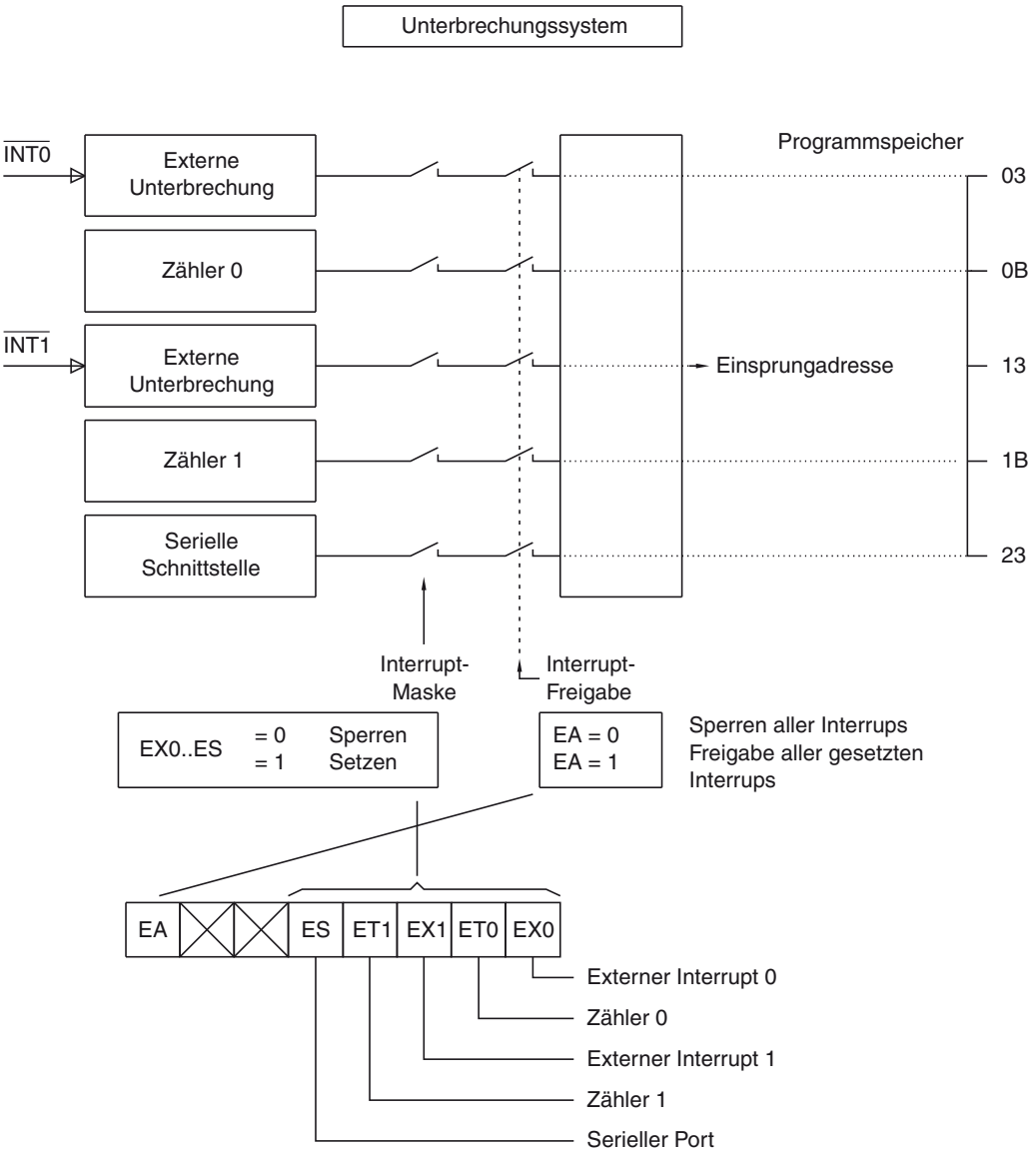


Bild III-100 Unterbrechungssystem

5.2.8 Speicher

Als Speicher sind ein 128 bzw. 256 Byte RAM und 4 oder 8 KByte ROM integriert. Der 8052AH-BASIC besitzt zusätzlich intern einen *Basicinterpreter* mit 8 KByte EPROM. Mikrocontroller unterscheiden nach *Daten-* und *Programmspeicher* (Bild III-101). Befehle stehen daher nur im Programmspeicher. Der MC 8051 kann als 8-Bit-Mikrocontroller höchstens jeweils 64 KByte adressieren.

Der MC besitzt als Programmspeicher ein internes 4KB ROM. Liegt der /EA-Anschluss auf „1“, wird von dort aus gelesen. Bei /EA „0“ wird der *externe* Programmspeicher angesprochen. Im internen Programmspeicher sind Einsprungadressen reserviert, wie der internen Speicheraufteilung zu entnehmen ist

(Bild III-102). Eine Gesamtübersicht verschafft Tabelle III-31. Der *interne* Datenspeicherbereich liegt von 00 bis FF, wobei sich bis Adresse 1F vier Registerbänke mit jeweils acht Registern R0 ... R7 befinden. Dieser Speicherbereich ist *direkt* und *indirekt* adressierbar (siehe Abschnit Maschinensprache). Der sich anschließende *bitadressierbare* Bereich (jedes Bit ist einzeln ansprechbar) ist direkt nur bis Adresse 2F adressierbar. Der weitere Datenspeicherbereich ist von einer Anzahl Registern, die teilweise ebenfalls bitadressierbar sind, belegt. Es sind Register mit speziellen Funktionen, wie der Stackpointer SP mit der Adresse 81. Die entsprechende Adressenaufteilung von 80 bis 7F sind in der Tabelle III-34 zu finden. Der 64 K externe Datenspeicher ist nur *indirekt* adressierbar.

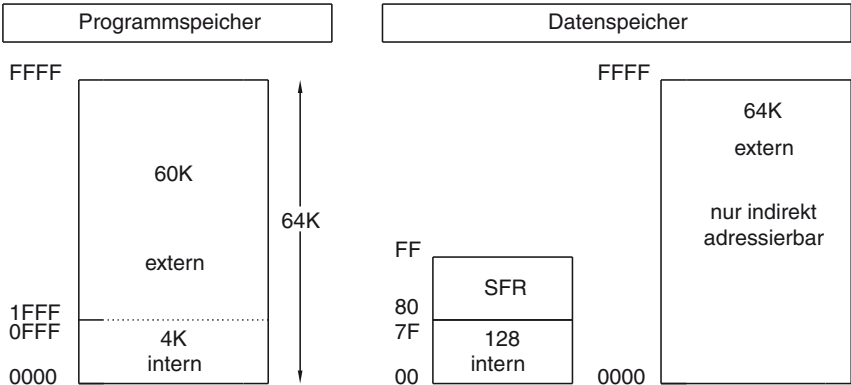


Bild III-101 Speicherplan

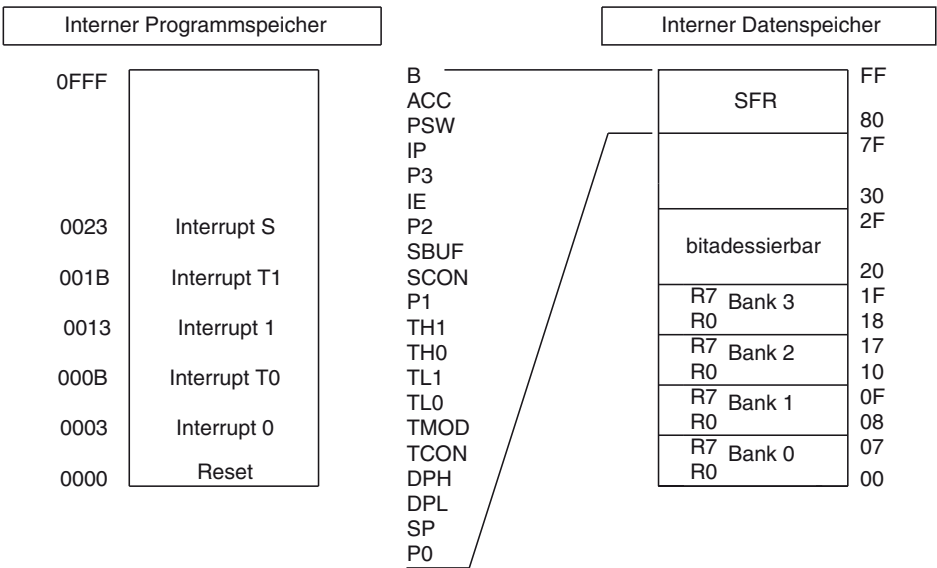


Bild III-102 Speicheraufteilung



**Tabelle III-31** Register- und Adressenübersicht

| SFR  | Bit-Adressen |       |       |       |       |       |       |       | Byte-   |
|------|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------|
|      | Bit 7        | Bit 6 | Bit 5 | Bit 4 | Bit 3 | Bit 2 | Bit 1 | Bit 0 | Adresse |
| B    | F7           | F6    | F5    | F4    | F3    | F2    | F1    | F0    | F0      |
| ACC  | E7           | E6    | E5    | E4    | E3    | E2    | E1    | E0    | E0      |
| PSW  | D7           | D6    | D5    | D4    | D3    | D2    | D1    | D0    | D0      |
| IP   | BF           | BE    | BD    | BC    | BB    | BA    | B9    | B8    | B8      |
| P3   | B7           | B6    | B5    | B4    | B3    | B2    | B1    | B0    | B0      |
| IE   | AF           | AE    | AD    | AC    | AB    | AA    | A9    | A8    | A8      |
| P2   | A7           | A6    | A5    | A4    | A3    | A2    | A1    | A0    | A0      |
| SBUF |              |       |       |       |       |       |       |       | 99      |
| SCON | 9F           | 9E    | 9D    | 9C    | 9B    | 9A    | 99    | 98    | 98      |
| P1   | 97           | 96    | 95    | 94    | 93    | 92    | 91    | 90    | 90      |
| TH1  |              |       |       |       |       |       |       |       | 8D      |
| TH0  |              |       |       |       |       |       |       |       | 8C      |
| TL1  |              |       |       |       |       |       |       |       | 8B      |
| TL0  |              |       |       |       |       |       |       |       | 8A      |
| TMOD |              |       |       |       |       |       |       |       | 89      |
| TCON | 8F           | 8E    | 8D    | 8C    | 8B    | 8A    | 89    | 88    | 88      |
| DPH  |              |       |       |       |       |       |       |       | 83      |
| DPL  |              |       |       |       |       |       |       |       | 82      |
| SP   |              |       |       |       |       |       |       |       | 81      |
| P0   | 87           | 86    | 85    | 84    | 83    | 82    | 81    | 80    | 80      |
|      |              |       |       |       |       |       |       | MSB   | LSB     |

**5.2.9 Serielle Schnittstelle**

Alle Mikrocontroller der 8051-Familie verfügen über mindestens eine serielle Schnittstelle, mit der im Asynchron- oder Synchronbetrieb eine serielle Datenübertragung durchgeführt werden kann. Nach Bild III-103 besteht die chipinterne Schnittstelle aus dem Datenregister SBUF und dem Kontroll- oder Statusregister SCON. Das Datenregister SBUF besitzt ein Sende- und Empfangsregister, auf das lesend oder schreibend zugegriffen wird. Die Eingangsdaten gelangen über den Anschluss RxD in ein Schieberegister, wo eine Umwandlung des seriellen Datenstroms in eine parallele Information erfolgt. Nach Ausmaskierung der nicht zur Information gehörenden Bits wie Start- und Stopbit gelangen die Daten ins Empfangsregister. Die Ausgangsdaten gelangen über das Senderegister und über das SCON-Register zum Ausgang TxD. Mit dem Kontroll-/Statusregister SCON kann die gewünschte Betriebsart (Mode 0, 1, 2, 3) gewählt werden. Weiter enthält es die Steuerbits für Empfänger- und Senderinterrupt. In der Betriebsart 0 werden die Daten über RxD (P3.0) gesendet oder empfangen, und an TxD (P3.1) wird ein Sendetakt mit dem Tastverhältnis 1:1 bei einer festen Frequenz von f<sub>osz</sub>/12 ausgegeben.

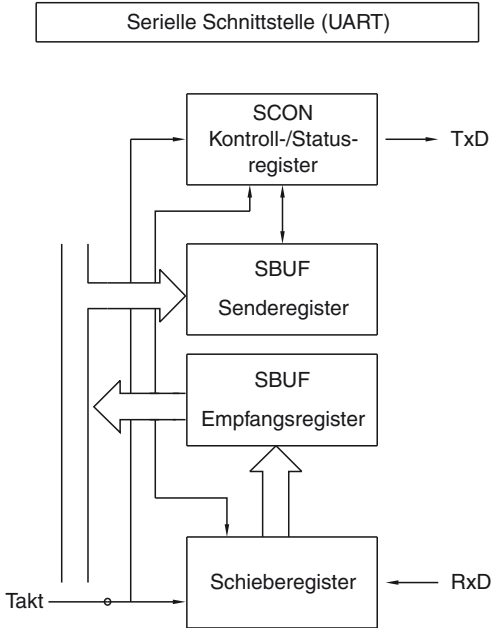


**Bild III-103** Serielle Schnittstelle

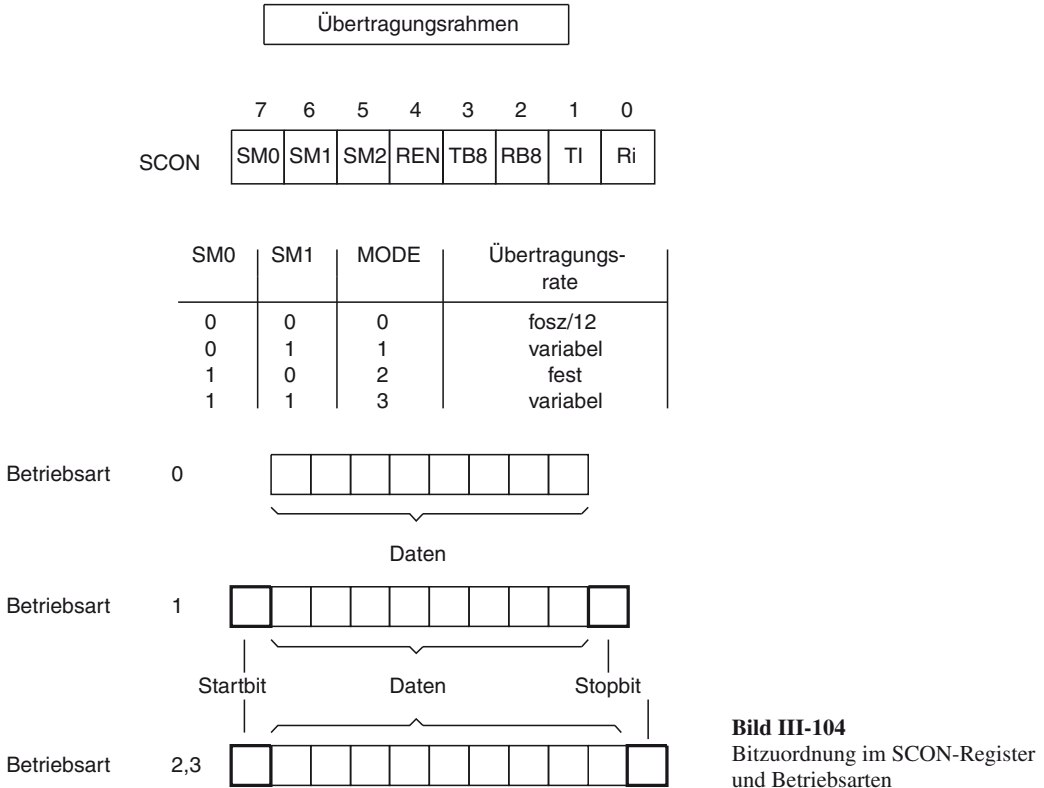


Bild III-104 zeigt die Bedeutung der Bitanordnung im SCON-Register und die Bitzuordnung zur Einstellung der einzelnen Betriebsarten.

5.3 16-Bit-Mikrocontroller

Bild III-105 zeigt die Architektur des MC SAB80C515/535 als vereinfachtes Blockbild. Der Baustein besitzt außer den 6 Ports (= 48 Kanäle) zur digitalen Ein- und Ausgabe einen 8-Bit gemultiplexten A/D-Wandler-Eingang. Das 256 Byte interne RAM kann extern bis zu 64 KByte erweitert werden und ist bei Betriebsspannungsausfall über einen Anschluss ruhestromversorgt. Im Gegensatz zum ...515 hat der ...535 keinen internen Programmspeicher. Seine Programme müssen in einem externen ROM untergebracht werden. Außerdem ist im ...535 ein Watchdog-Timer integriert. Seine Aufgabe ist es, bei Störungen einen Reset auszulösen. Es handelt sich hierbei im Prinzip um einen 16-Bit-Zähler, der mit jedem Maschinenzyklus inkrementiert wird. Bei Überlauf erfolgt ein interner Reset, und ein Statusbit wird gesetzt, das durch eine Abfrage die Resetursache kennzeichnet. Im Programmablauf wird der Watchdog-Timer jedesmal vor dem Überlauf zurückgesetzt. Weitere Besonderheiten dieses Bausteins sind *Capture*-, *Compare*- und *Reload*-Funktionen des Zählers/Zeitgebers 2. Bei der Capture-Funktion (capture

= einfangen) sind Zeitmessungen realisierbar, weil durch ein externes Signal ein Zwischenspeichern des Zählerstandes in ein entsprechendes SFR ausgelöst wird. Bei der Compare-Funktion (compare = vergleichen) kann eine Meldung (z.B. Interrupt) erfolgen, wenn der Inhalt des laufenden Timers 2 mit dem des Compare-Registers übereinstimmt. Mit der Reload-Funktion wird die Zykluszeit der Timer variiert. Hiermit lässt sich dann eine PWM (Pulsweitenmodulation) durchführen. Solche Signale können verwendet werden, um beispielsweise Schritt- oder Gleichstrommotore steuern zu können. Die Port-Kanäle können digital oder analog über die gemultiplexten Eingänge genutzt werden. Der Baustein verfügt über eine programmierbare Referenzspannungsquelle. Der Vorteil in der Programmierbarkeit der Referenzspannung liegt einmal in der eventuell gewünschten unterschiedlichen Referenzspannung pro Kanal und in der veränderbaren Wandlerauflösung. Der Wandler selbst arbeitet nach dem Prinzip der *sukzessiven Approximation* mit einer Wandlungszeit von 15 µs. Bild III-106 zeigt das Blockbild des A/D-Wandlers mit dem SFR DAPR (D/A-Program-Register). Im L-Nibble ist die untere Grenze der Referenzspannung und im H-Nibble die obere Grenze definiert. Die Wahl des Analogeingangs ist im SFR



ADCON festgelegt (A/D-Controll-Register), in dem auch festgelegt ist, ob nur eine oder fortlaufende Wandlungen stattfinden sollen.

6 Maschinensprache

6.1 Allgemeines

Soll ein Mikrocomputer Anweisungen ausführen, müssen die dazu erforderlichen Befehle in *binärcodierter Form* im Speicher vorliegen. Jeder in dieser Form zum Mikroprozessor gebrachte Befehl gelangt zum Befehlsregister, wird dort interpretiert und veranlasst die CPU, die dazugehörige Operation auszuführen. Da der Mikroprozessor diese Anweisungen direkt in Operationen umsetzen kann, spricht man von *Maschinensprache*. Der *Maschinencode* (Microcode, Operationscode), nach denen der Mikroprozessor seine Operationen durchführt, ist hardwaremäßig festgelegt und bei den Prozessoren unterschiedlich.

Alle Befehle, die der Mikroprozessor ausführen kann, stellen seinen *Befehlssatz* (Instructions Set) dar. Er wird in den Datenbüchern der Hersteller ausführlich beschrieben. Um in Maschinensprache zu programmieren, muss der Programmierer den Prozessor kennen. Hierbei ist vor allem die Kenntnis des Registerplans und des Befehlssatzes der CPU wesentlich. Als Beispiel dient der Prozessor 8085. Ein Auszug des Befehlssatzes befindet sich in Tabelle III-31 und Tabelle III-32. Bild III-107 zeigt den Registerplan der 8085 CPU.

Hier sind alle Register zusammengefasst, auf die man als Programmierer Einfluss üben kann. Die Register Akkumulator bis L-Register sind 8-Bit-Register. Der Stapelzeiger und der Befehlszähler sind 16-Bit Register. Damit ist die Bit-Zahl gemeint, die das jeweilige Register aufnehmen kann. Die Register B, C, D, E und H, L können zusammengefasst werden. Sie arbeiten dann als Registerpaare B, D und H. Der Name des Registerpaares gibt an, wo sich jeweils die höherwertigen Bits befinden. Akkumulator und Flag-Register (Kennzeichen-Register) fasst man unter dem Namen PSW (Programm Status Word) zusammen.

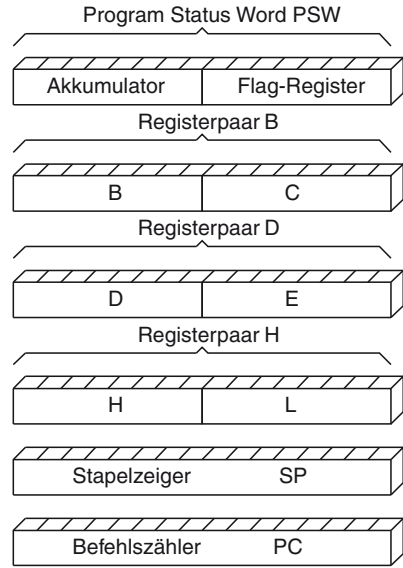


Bild III-107 Registerplan der 8085 CPU

6.2 Maschinencode

Für alle Befehle eines Mikroprozessors existiert eine Struktur unterschiedlicher Bits, die eine bestimmte Systematik beinhaltet. Daher lassen sich aus dem Format des Maschinencodes und aus der Kenntnis der Registertabelle weitere Befehle herleiten. Der Registername oder die Registerkennung und der Operationscode sind hardwaremäßig festgelegt.

- **Beispiel:** Der Befehl „INR D“ (Increment D) bedeutet, dass sich der Registerinhalt nach Befehlsausführung um 1 erhöht. Der Operationscode lautet 00sss100<sub>2</sub> (Bild III-108). Für die Platzhalter sss kann jetzt die Registerkennung 010<sub>2</sub> = D-Register eingefügt werden, und man erhält den Maschinencode 00010100<sub>2</sub>.
- **Beispiel:** Die Bitfolge 10110sss2 bedeutet, dass der Akkumulator mit einem Register eine Oder-Verknüpfung durchführen soll. Mit welchem Register dies zu geschehen hat, ist wieder durch die Platzhalter sss (Quellenregister) symbolisiert. Damit lautet der Befehl ORA B: 10110000<sub>2</sub> und ORA C: 10110001<sub>2</sub>. Die Z80 CPU besitzt bei gleichen Befehlen den gleichen Maschinencode. Die MC's 8085 und Z80 arbeiten mit Informationseinheiten von 8 Bit (1 Byte).

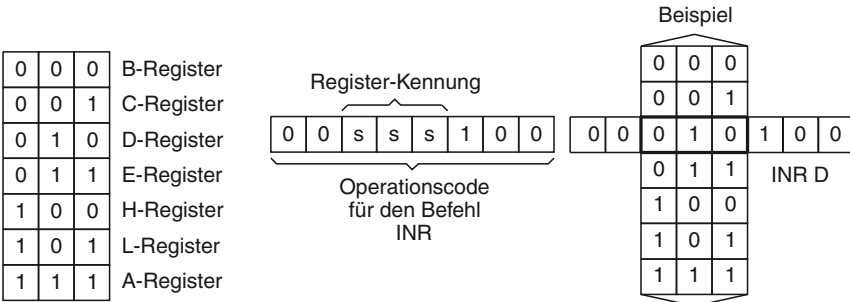


Bild III-108 Registertabelle und Herleitung von Befehlen

### 6.3 Befehlsaufbau

Ein Befehl besteht aus einem Operationsteil und einem Operanden (Bild III-109). Das erste Byte des Befehls ist immer der Befehlscode (Operationscode).

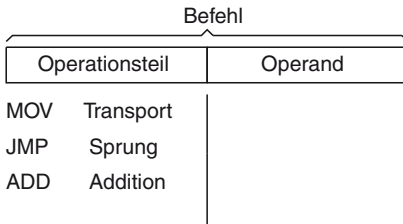


**Bild III-109** Aufbau eines Befehls

Hiermit wird dem Prozessor mitgeteilt, welche Operation ausgeführt werden soll. In weiteren Bytes können sich Daten oder Adressen befinden. Soll der Prozessor Daten vom Akkumulator zu einer Speicherstelle bringen, dann ist dies mit einem Byte nicht mehr zu codieren, da die Adresse des Speichers schon 16 Bit ausmacht. Folglich wird dem Prozessor im ersten Byte mitgeteilt, dass er Daten zu einer Speicherstelle zu kopieren hat; in den beiden fol-

genden Bytes wird dann die Adresse angegeben. Unterschieden werden dem Aufbau nach 1-Byte-, 2-Byte- und 3-Byte-Befehle (Bild III-110).

Der 1-Byte-Befehl bedeutet, dass vom Akkumulatorinhalt der Inhalt des Registers B subtrahiert wird. Das Ergebnis wird wieder zum Akkumulator geschrieben. Im 2-Byte-Befehl werden die Daten  $11111111_2$  zum Akkumulator gebracht, und im 3-Byte-Befehl gelangen die Daten des Akkumulator zur Speicherstelle  $1000\ 0010\ 0000\ 0000_2$ . Bei Angabe der Adresse ist wesentlich, dass die Reihenfolge genau eingehalten ist. Zunächst muss dem Befehlsregister das L-Byte (niederwertigsten 8 Bit) und dann das H-Byte (höherwertigsten 8 Bit) zugeführt werden.

### 6.4 Befehlsdarstellung

Heute ist es nicht mehr üblich, in binärcodierter Form zu programmieren. Wenn von Maschinenprogrammen gesprochen wird, meint man die *Assemblerdarstellung* der Befehle. Die *Mnemoniks* (Symbole) der Operationscodes (Assembler) lassen sich mit einiger Übung leicht merken, da sie sich aus den Befehlsfunktionen ableiten lassen. Die Darstellung der Daten und Adressen erfolgt hierbei in hexadezimaler Form.

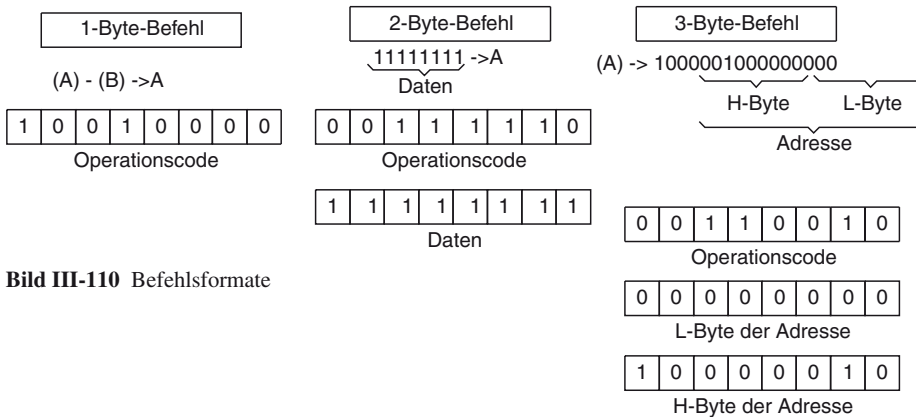


**Bild III-110** Befehlsformate

#### ■ Beispiel:

| Mnemonic/Assembler | Kommentar                                                |
|--------------------|----------------------------------------------------------|
| MVI A,FF           | ; Kopiere die Daten $11111111_2$ zum Akkumulator (8085)  |
| LD A,FF            | ; Kopiere die Daten $11111111_2$ zum Akkumulator (Z80)   |
| STA 8200           | ; Kopiere den Inhalt des Akkumulators zur Adresse (8085) |
|                    | ; $1000\ 0010\ 0000\ 0000_2$                             |

Um Schreibarbeit zu sparen und Programme übersichtlich zu halten, verwendet man bei Kommentaren häufig eine Kurzschreibweise. Alles, was in der Klammer steht, bedeutet dann den Inhalt eines Registers oder einer Adresse. Ein Pfeil gibt die Datenrichtung an.

Beispiel: (A) → B bedeutet: Akkumulatorinhalt nach B bringen

(8200) → A bedeutet: Inhalt der Adresse 8200 zum Akkumulator bringen.

Die Umsetzung der Mnemonik und der Hexform in die Binärfom des Maschinencodes erfolgt mit einem Übersetzerprogramm (Assembler).

### 6.5 Befehle

Die Befehle eines Mikroprozessors lassen sich unter dem Gesichtspunkt der Befehlsfunktionen oder nach Adressierungsarten ordnen.

#### 6.5.1 Befehlsfunktionen

Bei den *Datentransport-Befehlen* (Kopierbefehlen) werden Daten *unmittelbar* in ein Register eingegeben oder Daten werden zwischen den Registern oder

zwischen Speicher und Registern kopiert. Bei den Transportbefehlen wird zwischen verschiedenen *Adressierungsarten* unterschieden. In der Assemblerschreibweise ist es üblich, zunächst das Ziel und dann die Quelle anzugeben. MOV A,B bedeutet, dass Daten von B nach A transportiert werden sollen (Bild III-111).

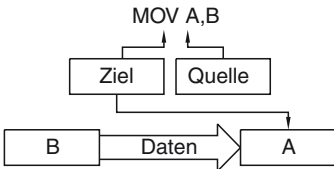


Bild III-111 Assemblerschreibweise

Mit Hilfe der *arithmetischen Befehle* werden Daten oder Registerinhalte miteinander addiert, subtrahiert, inkrementiert (um 1 erhöht) oder dekrementiert (um 1 vermindert).

■ **Beispiel:** Die Inhalte der Speicherstellen A000 (Inhalt = 03<sub>H</sub>) und A001 (Inhalt = 11<sub>H</sub>) werden addiert und das Ergebnis zur Speicherstelle A002 gebracht. Nach dem Programmablauf befindet sich in der Speicherstelle A002 der Inhalt 14<sub>H</sub> bzw. 0001 0100<sub>2</sub>.

Programm:

| Adresse | Operationscode | Assembler | Kommentar         |
|---------|----------------|-----------|-------------------|
| 0000    | 3A 00 A0       | LDA A000  | ;(A000) → A       |
| 0003    | 47             | MOV B,A   | ;(A) → B „retten“ |
| 0004    | 3A 01 A0       | LDA A001  | ;(A001) → A       |
| 0007    | 80             | ADD B     | ;(A) + (B) → A    |
| 0008    | 32 02 A0       | STA A002  | ;(A) → A002       |
| 000B    | 76             | HLT       | ;Halt             |

Beispiel

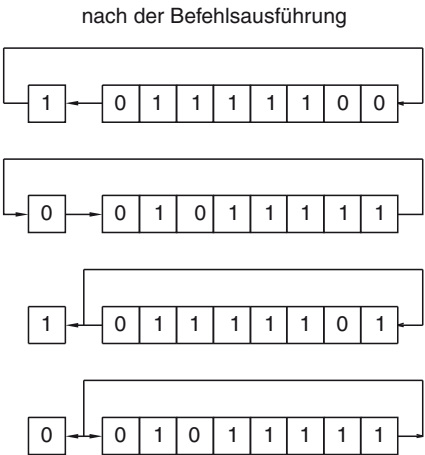
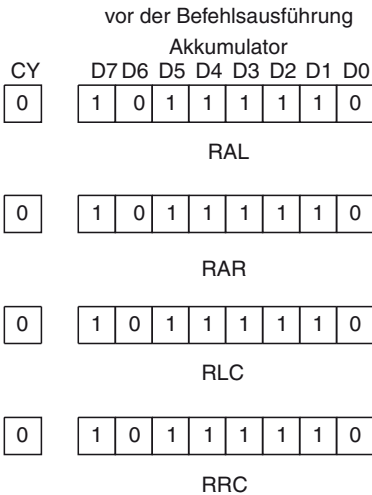


Bild III-112 Rotationsbefehle

Mit den *Schiebe-Befehlen* (Rotations-Befehle) kann der Inhalt vom Akkumulator links oder rechts jeweils um eine Bitstelle verschoben werden. Dadurch gelangt Bitstelle 7 bei Links-Rotation zur Bitstelle 0 und Bitstelle 0 bei Rechts-Rotation zur Bitstelle 7. Hierbei wird auch gleichzeitig das Carrybit verändert. Eine weitere Befehlsart lässt die Rotation nur über das Carrybit zu. Bild III-112 führt die verschiedenen Befehle auf.

Mit Hilfe der *logischen Befehle* können zwischen dem Akkumulator und den Registern oder mit Konstanten logische Verknüpfungen wie UND, ODER und EXKLUSIV-ODER durchgeführt werden. Durch diese Befehle wird das Flag-Register beeinflusst.

Mit den *Sprungbefehlen* wird der Ablauf eines Programms geändert. Der Prozessor arbeitet normalerweise Adresse für Adresse nacheinander ab. Es können unbedingte oder bedingte Sprünge programmiert werden. Ein *unbedingter Sprung* enthält im Befehl selbst eine Adresse und wird *immer* ausgeführt.

■ **Beispiel:**

JMP 8200 ;Sprünge zur Adresse 8200

Der *bedingte Sprung* ist von einer Bedingung abhängig. Hierbei ist zwischen bejahenden und verneinenden Sprüngen zu unterscheiden.

■ **Beispiel:**

JNZ Sprünge, wenn Z nicht „1“ gesetzt ist.

JZ Sprünge, wenn Z „1“ gesetzt ist.

Die Bedingung überprüft der Mikroprozessor im *Flagregister* (Kennzeichen-Register). In Bild III-113 befindet sich die Anordnung der Bits. Die Bitstellen (Flags) werden bei bestimmten Operationen wie arithmetischen und logischen Befehlen gesetzt.



Bild III-113

Bitanordnung im Flagregister

■ **Beispiele:** Das Carry-Flag wird bei arithmetischen Operation gesetzt oder zurückgesetzt.

$$\begin{array}{rcl} (A) & = & 1010\ 1111_2 \\ (B) & = & 0110\ 0000_2 \end{array}$$

$$(A) + (B) = 1\ 0000\ 1111_2 \quad \text{Cy wird auf „1“ gesetzt}$$

Ist das Ergebnis bestimmter Operationen „0“, dann wird das Zero-Flag gesetzt.

$$\begin{array}{rcl} (A) & = & 1011\ 1111_2 \\ (B) & = & 1011\ 1111_2 \end{array}$$

$$(A) - (B) = 0000\ 0000_2 \quad \text{Z wird auf „1“ gesetzt}$$

$$\begin{array}{rcl} (A) & = & 1010\ 0001_2 \\ (B) & = & 0101\ 1111_2 \end{array}$$

$$(A) + (B) = 1\ 0000\ 0000_2 \quad \text{Z und Cy wird auf „1“ gesetzt}$$

Das Sign-Flag (Vorzeichen) bezieht sich auf das MSB (Most Significant Bit = höchstwertigstes Bit) des Akkumulators bei Interpretation des Datenwortes in Zweierkomplementdarstellung.

$$(A) = 0011\ 1111_2 \quad S = „0“$$

$$(A) = 1000\ 1101_2 \quad S = „1“$$

Das Hilfsarry-Flag wird durch arithmetische und logische Verknüpfungen bei Entstehen eines Übertrags von Bit 3 nach Bit 4 gesetzt.

Das Parity-Flag gibt eine „1“-Meldung, bei gerader Parität der 1-Bit-Stellen im Akkumulator und eine „0“-Meldung bei ungerader Parität

$$(A) = 1010\ 1111_2 \quad P = „1“$$

$$(A) = 1010\ 1101_2 \quad P = „0“$$

■ **Beispiel:** Abfrage des Zero-Flag

Bei einfachen Zählschleifen wird der Inhalt eines Registers so lange dekrementiert, bis der Registerinhalt Null ist.

| Adresse | Operationscode | Assembler | Bemerkung    |
|---------|----------------|-----------|--------------|
| 0000    | 3E FF          | MVI A,FF  | :FF → A      |
| 0002    | 3D             | DCR A     | ;(A) – 1 → A |
| 0003    | C2 02 00       | JNZ 0002  | :Null?       |
| 0006    | 76             | HLT       | :Halt        |

**Unterprogramm- und Stapelspeicherbefehle:** Programmteile oder Programme, die innerhalb eines Hauptprogramms häufiger benötigt werden, brauchen nur einmal programmiert werden. Solche Programme nennt man *Unterprogramme*. Wie bei Sprungbefehlen gibt es bedingte und unbedingte Unterprogrammbeefehle. Ein unbedingter Unterprogrammaufruf wird mit dem Befehl CALL erreicht. Der Rücksprung zum Hauptprogramm erfolgt mit dem Befehl RET. Mit Aufruf des Unterprogramms wird die nachfolgende Hauptprogrammadresse zum Stack gebracht, um beim Rücksprung aus dem Unterprogramm das Hauptprogramm dort fortsetzen zu können. Oft werden im Unterprogramm Register benötigt, die im

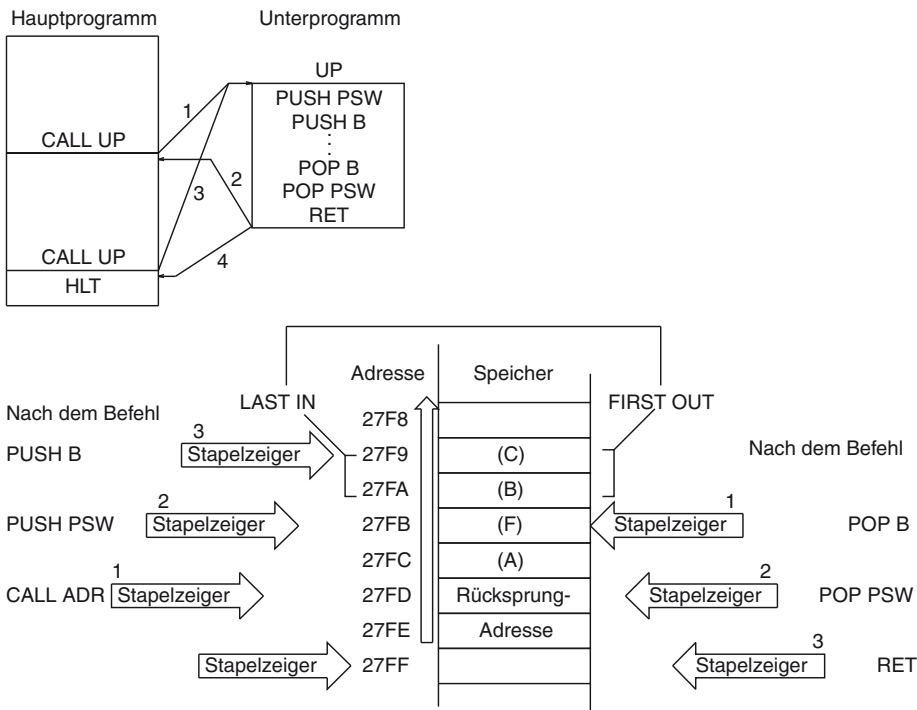


Bild III-114 Stack-Prinzip

Hauptprogramm schon Daten übertragen bekommen haben und deren Inhalte sich nicht während des Unterprogrammablaufs ändern dürfen. Zur „Rettung“ dieser Daten wird dann ebenfalls der *Stapelspeicher* eingesetzt.

Der Stapelspeicher (Stack) selbst ist Teil des Arbeitsspeichers. Er ist bei Programmierung von Unterprogrammen im Hauptprogramm stets zu initialisieren. Hiermit ist gemeint, dass der Stapelzeiger mit einer Adresse geladen wird. Dabei kann jeder beliebige Teil des Speichers als Stack verwendet werden.

Da der Stapelspeicher mit der Adresse des Stackpointer beginnend bei jedem Aufruf je die zwei niederwertigeren Adressen mit Daten füllt, ist es zweckmäßig, ihn an die höchste Adresse des Arbeitsspeichers zu legen. Aus Bild III-114 geht das Prinzip hervor. Hier wird der Stackpointer auf die Adresse 27FF gebracht. Nach Aufruf des Unterprogramms mit CALL steht der Stackpointer auf der Adresse 27FD. Mit den Befehlen PUSH PSW und PUSH B im Unterprogramm werden die Inhalte der Register auf den Stack gebracht, sie werden für das Hauptprogramm „gerettet“. Der Stackpointer zeigt auf die Adresse 27F9. Im Unterprogramm kann jetzt mit den Registern A, B und C gearbeitet werden, weil am Ende des Unterprogramms durch POP B und POP PSW der Originalzustand der Register B und A wieder hergestellt wird. Mit POP B wird beispielsweise der Inhalt der Adresse 27F9 zum C-Register und der Inhalt der Adresse 27FA zum B-Register gebracht. Bei der Programmierung ist, wie auch das Beispiel zeigt, darauf zu achten, dass der zuletzt zum Stack gebrachte Registerinhalt als erstes vom Stack zurückgerufen wird (Last In-First Out), weil sonst Registerinhalte vertauscht werden.

**Ein- und Ausgabe-Befehle:** Sollen Daten von einer E/A-Einheit zur CPU oder von der CPU zur E/A-Einheit geleitet werden, wird das mit IN (Eingabebefehl) und OUT (Ausgabebefehl) durchgeführt. Hierbei muss hinter dem IN- und OUT-Befehl die jeweilige Adresse der E/A-Einheit (des Ports) angegeben werden.

#### ■ Beispiel:

IN FF: Die Daten gelangen von der Portadresse FF zum Akkumulator

OUT FF: Die Daten werden vom Akkumulator zur Portadresse FF gebracht.

Bei Einsatz eines programmierbaren Portbausteins ist dieser zunächst zu initialisieren.

**Interrupt-Befehle** dienen zur *Unterbrechungssteuerung* (siehe auch Abschnitt Mikroprozessortechnik). Durch einen Impuls oder einen Pegel an einem Interrupteingang des Prozessors wird das laufende Programm nach Abarbeitung des gerade in Arbeit befindlichen Befehls unterbrochen. Es erfolgt ein Sprung zu einer vom Hersteller hardwaremäßig festgelegten Adresse, zur Interrupt-Routine. Der Befehlszählerstand wird auf dem Stack gespeichert, um

nach dem Rücksprung aus der Routine mit dem Programm fortfahren zu können.

Die Anzahl der Interrupteingänge sind bei den Prozessoren unterschiedlich. Der MC 8085 besitzt die fünf Interrupteingänge TRAP, RST 7.5, RST 6.5, RST 5.5 und INTR. Hierbei wird zwischen *maskierbaren* und *nichtmaskierbaren* Interrupteingängen unterschieden. Mit dem Befehl SIM (Set Interrupt Mask) und Verwendung des Akkumulatorinhalts können die maskierbaren Interrupts gesperrt oder freigegeben werden, wenn allgemein Interrupts mit dem Befehl EI (Enable Interrupt) zugelassen werden. Mit DI (Disable Interrupt) kann die Zulassung der Interrupts verweigert werden. Aus Bild III-115 wird die Wirkung der Befehle sichtbar. Eine Interruptannahme erfolgt nur, wenn mit SIM die entsprechende Maske gesetzt wurde und mit EI die Freigabe erfolgt. Nicht von diesen Befehlen betroffen ist der TRAP-Interrupt (nicht maskierbar). Er wird bei einer Anforderung immer wirksam und besitzt Vorrang vor allen anderen Interruptzugriffen.

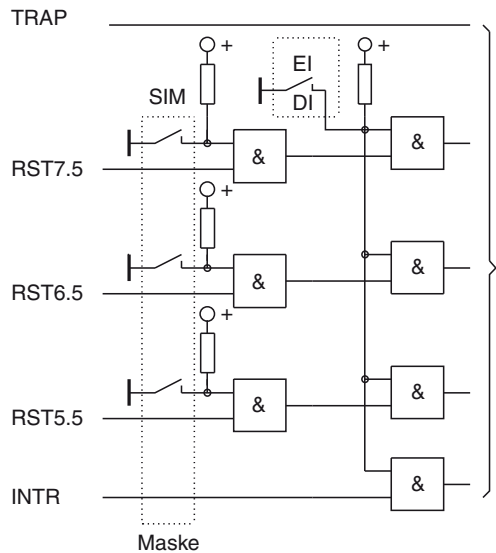


**Bild III-115** Interruptannahme

Ermöglicht die Interrupt-Maske Zugang verschiedener Geräte zur CPU und erfolgen Interruptanforderungen gleichzeitig, tritt die vom Hersteller festgelegte Priorität ein. In Bild III-116 ist die Priorität und die Lage der Hardware-Verzweigungen dargestellt. An der jeweiligen Adresse kann nur eine kleine Routine geschrieben werden, oder es steht dort ein Sprungbefehl zum Arbeitsspeicher. Wie ein Unterprogramm wird die Routine mit RET abgeschlossen. Mit dem Befehl RIM (Read Interrupt Mask) wird der Akkumulator geladen. Damit können die Maske und tatsächliche Unterbrechungen abgefragt werden, wie die Anordnung der Bits Bild III-117 zeigt. Der INTR-



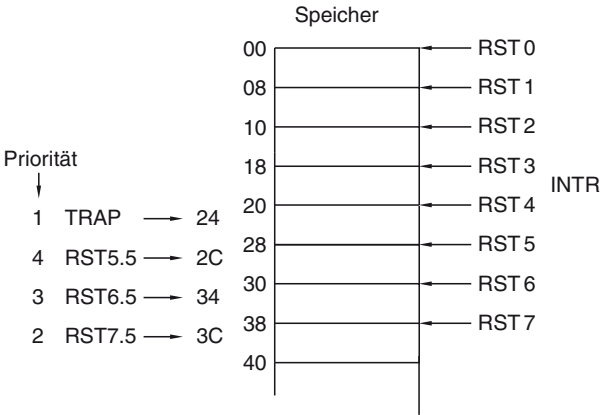


**Bild III-116**  
Interruptadressen und Priorität

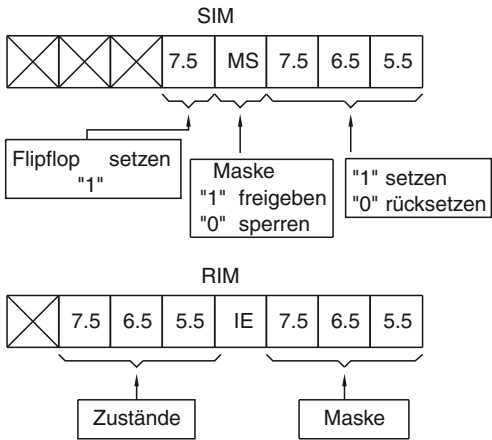


**Bild III-117** Bit-Anordnung für SIM- und RIM-Befehl

Interrupteingang dient als Vektorinterrupt. Bei seiner Auslösung zeigt er nach Abfrage INTA (Interrupt Acknowledge) des Datenbusses auf eine der 8 Hardwareadressen (Bild III-117).

**6.5.2 Adressierungsarten**

Bei den Transportbefehlen lassen sich verschiedene Adressierungsarten (Bild III-118) unterscheiden. Die *implizite Adressierung* enthält keine Operanden-Adresse, wie das beispielsweise bei dem Kopieren der Daten von einem zum anderen Register der Fall ist. Hier ist im Befehl implizit (inbegriffen) die Funktion gegeben. Man bezeichnet diese Adressierungsart auch als Registeradressierung. Bei der *unmittelbaren* (immediate) *Adressierung* enthält der Befehl die zu verarbeitende Konstante. Hierbei kann es sich um eine 8-Bit- oder 16-Bit-Konstante handeln. Man spricht von direkter Adressierung, wenn die Speicherstelle im Befehl benannt wird. Die 16-Bit-

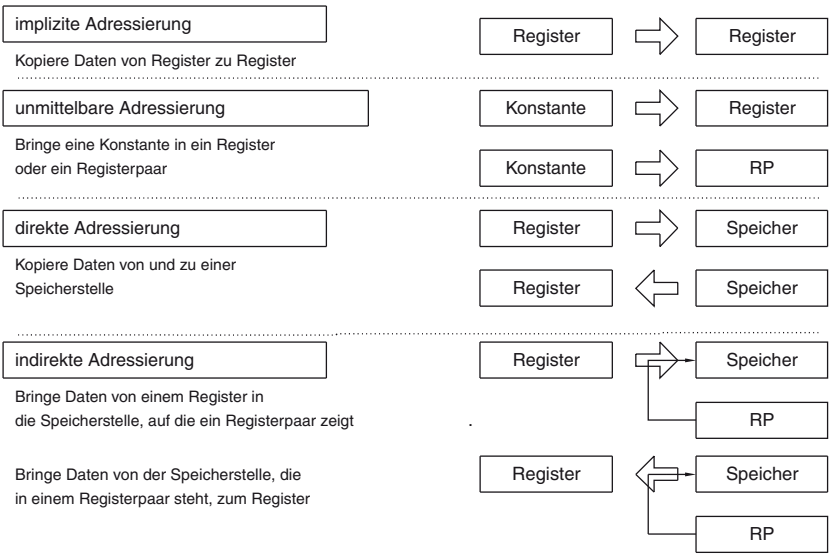


**Bild III-118** Übersicht: Adressierungsarten

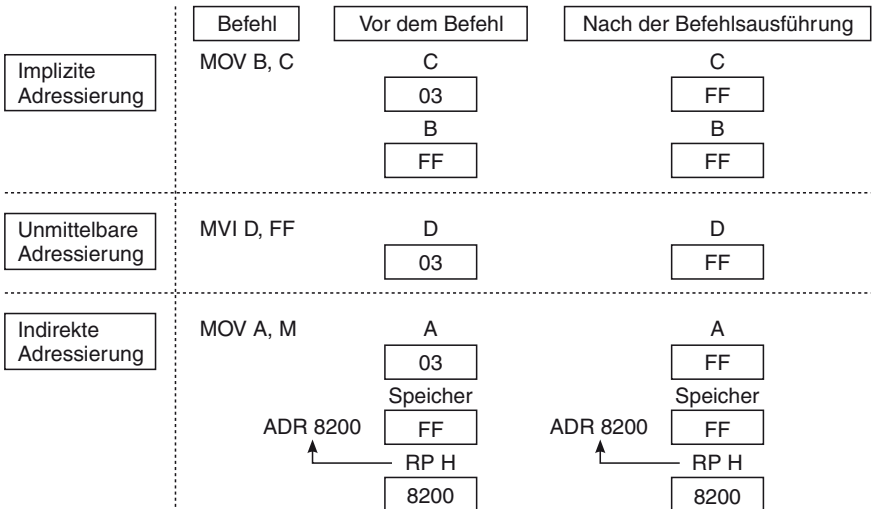


Bild III-119 Beispiele

Adresse folgt direkt hinter dem Operationscode. Bei der *indirekten Adressierung* wird die Adresse, die angesprochen werden soll, zuvor in einem Registerpaar abgelegt (siehe Beispiele Bild III-119). Der MC Z80 kennt außerdem noch die relative und indizierte Adressierung. Bei der relativen Adressierung erhält der Sprungbefehl eine durch eine Konstante festgelegte Distanzadresse, um von einer absoluten Adresse unabhängig zu sein. Die indizierte Adressierung legt das Indexregister und die Adressen fest. Beispiel: LD A,(IX + 0009) Sprung um (IX) + 9 Adressen.

6.6 Befehlszyklus und Befehlszeiten

6.6.1 Befehlszyklus

Alle Befehle, die ein Mikroprozessor durchführen soll, stehen im Speicher. Das Zusammenwirken von CPU und Speicher zeigt Bild III-120 an einem 2-Byte-Befehl. Beim Einschalten wird der Programmzähler immer auf die Adresse (ADR) 0000 gestellt, die Steuerung der CPU wird mit RD (Read) aktiviert, und der Inhalt der ADR 0000 wird zur CPU gebracht. Dort erfolgt die Decodierung. Der Programmzähler

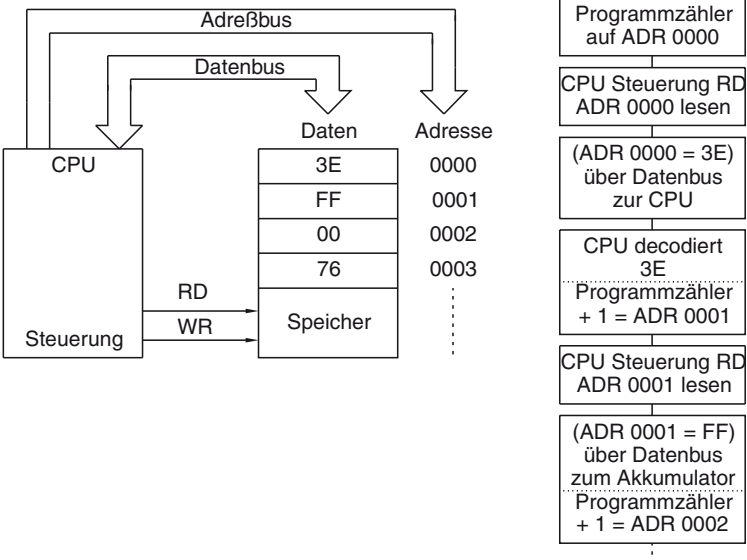


Bild III-120 Zusammenwirken von Speicher und CPU

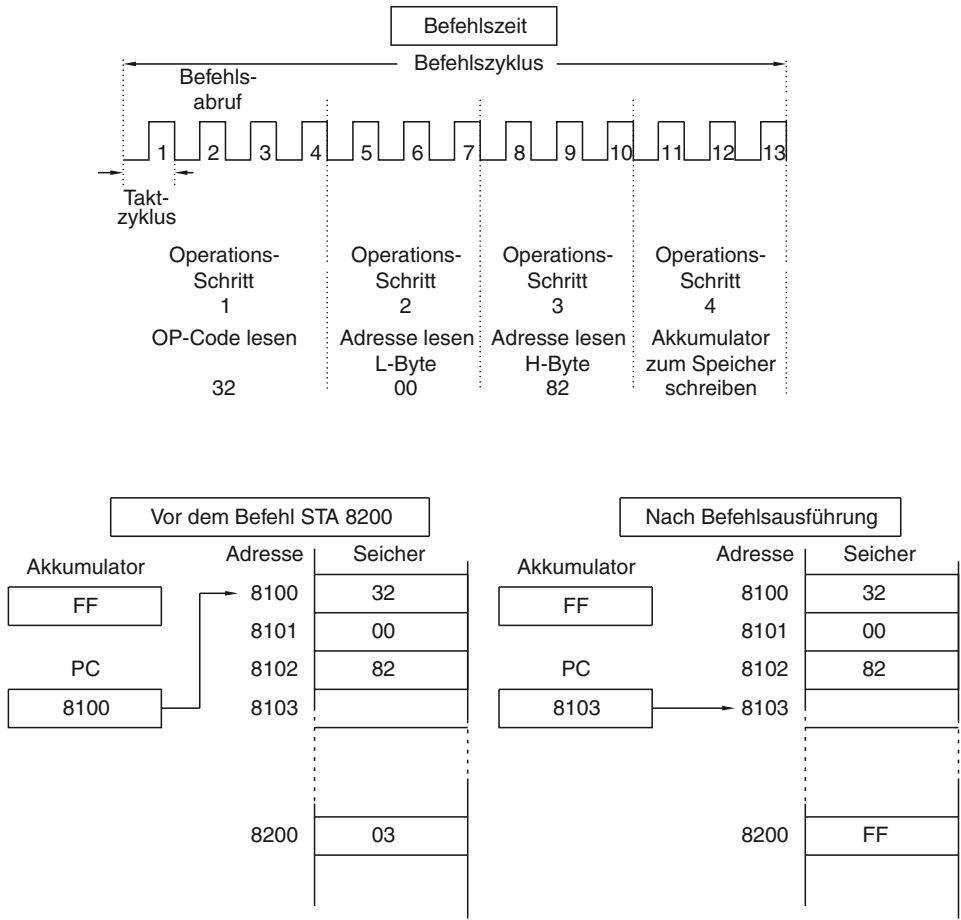


Bild III-121 Befehlszyklus

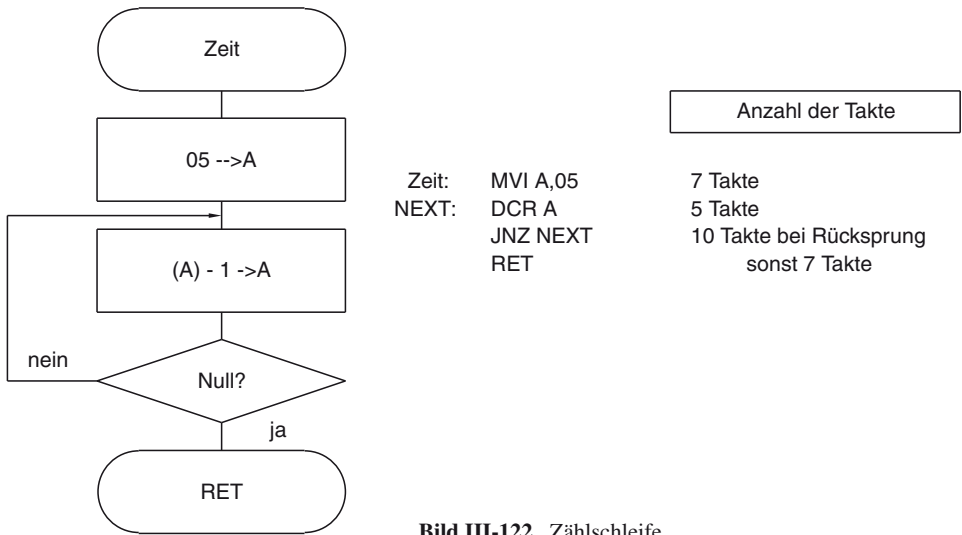


Bild III-122 Zählschleife

erhöht sich automatisch um 1 und legt die ADR 0001 auf den Adressbus. Der Inhalt dieser Adresse wird von der CPU wieder über den Datenbus gelesen. Mit der Information 3E erhält die CPU den Befehl, das nächste Byte zum Akkumulator zu bringen. Diese Befehlsbearbeitung erfordert eine gewisse Zeit. Das Einlesen und Ausführen eines Befehls bezeichnet man als *Befehlszyklus* (instruction cycle). Er wird in bestimmte Zeiteinheiten mit definierten Vorgängen, den *Operationsschritten* (states), aufgeteilt; jeder Operationsschritt wiederum in mehreren Taktzyklen. Der erste Operationszyklus ruft immer einen Befehl auf und wird daher *Befehlsabrufzyklus* (Opcode Fetch) genannt. Weitere Operationszyklen können der Speicher-Lesevorgang (Memory Read) und der Speicher-Einschreibvorgang (Memory Write) oder Ein-/Ausgabeschnittstelle lesen oder schreiben sein. Die Operationszyklen werden auch als *Maschinenzyklen* bezeichnet. Bild III-121 führt dies beispielhaft für den Befehl STA 8200 an. Mit diesem Befehl wird der Inhalt des Akkumulators zur Adresse 8200 kopiert.

6.6.2 Befehlszeiten

Die Befehlszeit (Dauer eines Befehls) ist zum einen von der Taktdauer und zum anderen von der Anzahl der Takte pro Befehl abhängig. Hieraus lässt sich die Zeit, die ein Programm benötigt, berechnen.

■ **Beispiel:** Bei einem Taktzyklus von 0,5 µs ergibt sich mit  $7 + (15 \cdot 5) - 3 = 79$  Takte eine Zeitdauer von 39,5 µs für die in Bild III-122 (siehe Seite 134) dargestellte Zeitschleife. Soll die Zeitschleife genau 40 µs dauern, kann ein NOP-Befehl eingefügt werden.

7 Befehlsvorrat

Der Befehlsvorrat eines Prozessors enthält alle Befehle, die er ausführen kann. Die nachfolgende Tabelle III-31 gibt einen Auszug aus dem Befehlsvorrat des MC 8085 und die Anzahl der Operationszyklen an. Tabelle III-32 informiert über den Operationscode einiger Befehle.

Tabelle III-31 Befehlsvorrat

| Assembler                                          | Bedeutung                                                                                                  | Operations-<br>zyklen | Takt-<br>zyklen | Flags    |
|----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|-----------------|----------|
| <b>Transport-<br/>befehle:</b>                     |                                                                                                            |                       |                 |          |
| MOV D,S                                            | Move Data; Übertrage Daten                                                                                 | 1                     | 4               | –        |
| MVI K                                              | Load Data Immediate Into Register;<br>Lade Daten unmittelbar in das Register                               | 2                     | 7               | –        |
| LDA ADR                                            | Load Akku From Memory;<br>Bringe den Inhalt einer Adresse zum Akku                                         | 4                     | 13              | –        |
| STA ADR                                            | Store Akkumulator From Memory;<br>Speichere Akkuinhalt direkt zum Speicher                                 |                       |                 |          |
| LXI KK                                             | Load 16 Bit Into Register Pair;<br>Lade 16 Bit in ein Registerpaar                                         |                       |                 |          |
| <b>Arithmetische<br/>und logische<br/>Befehle:</b> |                                                                                                            |                       |                 |          |
| INR D                                              | Increment Register; Inkrementiere Registerinhalt                                                           | 1                     | 4               | Z,S,P,HC |
| DCR D                                              | Decrement Register; Dekrementiere Registerinhalt                                                           | 1                     | 4               | Z,S,P,HC |
| ADD S                                              | Add Register; Addiere Registerinhalt zum Akku-<br>mulator                                                  | 1                     | 4               | Z,S,P,HC |
| ADC S                                              | Add Register With Carry; Addiere mit Übertrag                                                              | 1                     | 4               | Z,S,P,HC |
| SUB S                                              | Subtract Register; Subtrahiere Registerinhalt vom<br>Akkumulator                                           | 1                     | 4               | Z,S,P,HC |
| CMP                                                | Compare Register; Vergleiche Register mit Akku-<br>lator (der Akkumulatorinhalt ändert sich hierbei nicht) | 1                     | 4               | Z,S,P,HC |
| ADI K                                              | Add Immediate; Addiere direkt zum Akkumulator                                                              | 2                     | 7               | Z,S,P,Cy |

**Tabelle III-31** (Fortsetzung)

| Assembler                                                      | Bedeutung                                                           | Operations-<br>zyklen | Takt-<br>zyklen | Flags    |
|----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|-----------------------|-----------------|----------|
| ACI K                                                          | Add With Carry; Addiere mit Carry zum Akkumulator                   | 2                     | 7               | Z,S,P,Cy |
| SUI K                                                          | Subtract Immediate; Subtrahiere direkt zum Akkumulator              | 2                     | 7               | Z,S,P,Cy |
| SBI K                                                          | Subtract With Borrow; Subtrahiere direkt vom Akkumulator mit Borger | 2                     | 7               | Z,S,P,Cy |
| CPI K                                                          | Compare With Immediate Data; Vergleiche direkt                      | 2                     | 7               | Z,S,P,Cy |
| CMA                                                            | Complement With Akkumulator; Komplementbildung                      | 1                     | 4               | -STC     |
| STC                                                            | Set Carry; Carryflag setzen                                         | 1                     | 4               | Cy       |
| INX RP                                                         | Increment; Inkrementiere Registerpaar                               | 1                     | 6               | –        |
| DCX RP                                                         | Decrement; Dekrementiere Registerpaar                               | 1                     | 6               | –        |
| ANA S                                                          | AND Register; UND-Verknüpfung mit Akkumulator                       | 1                     | 4               | Z,S,P,Cy |
| XRA S                                                          | EXCLUSIV-OR; XOR-Verknüpfung mit Akkumulator                        | 1                     | 4               | Z,S,P,Cy |
| ORA S                                                          | ÖR Register; ODER-Verknüpfung mit Akkumulator                       | 1                     | 4               | Z,S,P,Cy |
| ANI K                                                          | UND-Verknüpfung mit Konstante                                       | 2                     | 7               | Z,S,P,Cy |
| XRI K                                                          | XOR-Verknüpfung mit Konstante                                       | 2                     | 7               | Z,S,P,Cy |
| ORI K                                                          | ODER-Verknüpfung mit Konstante                                      | 2                     | 7               | Z,S,P,Cy |
| <b>Rotations-<br/>befehle:</b>                                 |                                                                     |                       |                 |          |
| RLC                                                            | Rotate Akku Left                                                    | 1                     | 4               | Cy       |
| RAL                                                            | Rotate Akku Left Through Carry                                      | 1                     | 4               | Cy       |
| RRC                                                            | Rotate Akku Right                                                   | 1                     | 4               | Cy       |
| RAR                                                            | Rotate Akku Right Through Carry                                     | 1                     | 4               | Cy       |
| <b>Sprungbefehle:</b>                                          |                                                                     |                       |                 |          |
| JMP ADR                                                        | JUMP; direkter Sprung                                               | 3                     | 10              | –        |
| JZ ADR                                                         | Jump On Zero; Springe, wenn Z-Flag gesetzt                          | 3                     | 10              | –        |
| JNZ ADR                                                        | Jump If Not Zero                                                    | 3                     | 10              | –        |
| JM ADR                                                         | Jump On Minus; Springe, wenn S-Flag gesetzt                         | 3                     | 10              | –        |
| JC ADR                                                         | Jump On Carry                                                       | 3                     | 10              | –        |
| JPO ADR                                                        | Jump On Parity Odd; Springe bei ungerader Parität                   | 3                     | 10              | –        |
| JPE ADR                                                        | Jump On Parity Even; Springe bei gerader Parität                    | 3                     | 10              | –        |
| <b>Unterpro-<br/>grammaufruf<br/>und Stapel-<br/>speicher:</b> |                                                                     |                       |                 |          |
| CALL ADR                                                       | Unterprogrammaufruf                                                 | 5                     | 18              | –        |
| RET                                                            | Return, Rücksprung zum Hauptprogramm                                | 3                     | 10              | –        |

Tabelle III-31 (Fortsetzung)

| Assembler                      | Bedeutung                                 | Operations-<br>zyklen | Takt-<br>zyklen | Flags |
|--------------------------------|-------------------------------------------|-----------------------|-----------------|-------|
| PUSH B                         | BC zum Stack schreiben                    | 3                     | 12              | –     |
| PUSH D                         | DE zum Stack schreiben                    | 3                     | 12              | –     |
| PUSH H                         | HL zum Stack schreiben                    | 3                     | 12              | –     |
| PUSH PSW                       | AF zum Stack schreiben                    | 3                     | 12              | –     |
| POP B                          | BC vom Stack holen                        | 3                     | 10              | –     |
| POP D                          | DE vom Stack holen                        | 3                     | 10              | –     |
| POP H                          | HL vom Stack holen                        | 3                     | 10              | –     |
| POP PSW                        | AF vom Stack holen                        | 3                     | 10              | –     |
| <b>E/A-Befehle:</b>            |                                           |                       |                 |       |
| IN                             | Eingabe zum Akkumulator                   | 3                     | 10              | –     |
| OUT                            | Ausgabe vom Akkumulator                   | 3                     | 10              | –     |
| <b>Interrupt-<br/>befehle:</b> |                                           |                       |                 |       |
| EI                             | Enable Interrupts; Interrupts freigeben   | 1                     | 4               | –     |
| DI                             | Disable Interrupts; Interrupts sperren    | 1                     | 4               | –     |
| SIM                            | Set Interrupt Mask; Interruptmaske setzen | 1                     | 4               | –     |
| RIM                            | Read Interrupt Mask; Interruptmaske lesen | 1                     | 4               | –     |
| <b>Sonstige<br/>Befehle:</b>   |                                           |                       |                 |       |
| HLT                            | Halt                                      | 1                     | 5               | –     |
| NOP                            | No Operation                              | 1                     | 4               | –     |

Tabelle III-32 Befehle und Operationscode (Auswahl)

|        | A  | B  | C  | D  | E  | H  | L  | M  |
|--------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| MOV A, | 7F | 78 | 79 | 7a | 7B | 7C | 7D | 7E |
| MOV B, | 47 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 |
| MOV C, | 4F | 48 | 49 | 4A | 4B | 4C | 4D | 7E |
| MOV D; | 57 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| MOV E  | 5F | 58 | 59 | 5A | 5B | 5C | 5D | 5E |
| MOV H; | 67 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 |
| MOV L, | 6F | 68 | 69 | 6A | 6B | 6C | 6D | 6E |
| MOV M, | 77 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 |    |
|        |    |    |    |    |    |    |    |    |

Tabelle III-32 (Fortsetzung)

|         | A           | B | C           | D           | E | H       | L  | M |
|---------|-------------|---|-------------|-------------|---|---------|----|---|
| MVI A,K | 3E XX       |   | INR A       | 3C          |   | DCR A   | 3D |   |
| MVI B,K | 06 XX       |   | INR B       | 04          |   | DCR B   | 05 |   |
| MVI C,K | 0E XX       |   | INR C       | 0C          |   | DCR C   | 0D |   |
| MVI D,K | 16 XX       |   | INR D       | 15          |   | DCR D   | 15 |   |
| MVI E,K | 1E XX       |   | INR E       | 1C          |   | DCR E   | 1D |   |
| MVI H,K | 26 XX       |   | INR H       | 24          |   | DCR H   | 25 |   |
| MVI L,K | 2E XX       |   | INR L       | 2C          |   | DCR L   | 2D |   |
|         |             |   |             |             |   |         |    |   |
| STA ADR | 32<br>XX XX |   | LDA<br>ADR  | 3A<br>XX XX |   |         |    |   |
|         |             |   |             |             |   |         |    |   |
| JMP ADR | C3<br>XX XX |   | CALL<br>ADR | CD<br>XX XX |   |         |    |   |
| JZ ADR  | CA<br>XX XX |   | RET         | C9          |   |         |    |   |
| JNZ ADR | C2<br>XX XX |   |             |             |   |         |    |   |
| JM ADR  | FA<br>XX XX |   | PUSH<br>PSW | F5          |   | POP PSW | F1 |   |
|         |             |   | PUSH B      | C5          |   | POP B   | C1 |   |
|         |             |   | PUSH D      | D5          |   | POP D   | D1 |   |
|         |             |   | PUSH H      | E5          |   | POP H   | E1 |   |

8 Hinweise zur Programmierung und Programmbeispiele

Größere Programme werden in überschaubare Blöcke zerlegt und in Bibliotheken als Module gespeichert. Sie lassen sich dann für andere Programme nutzen. Beispiele für immer wieder benötigte Module sind Zählschleifen, Tabellenverarbeitung, Rechenprogramme, Interruptverarbeitung und Ein- und Ausgaben.

Programme werden mit einem Textverarbeitungsprogramm (Editor) geschrieben und anschließend assembliert. Der Assembler übersetzt die Mnemonik in den Maschinencode und überprüft das Programm auf Syntaxfehler. Weiterhin stellt das Assemblerprogramm Hilfen zur Programmierung bereit. Dazu gehören z.B. Zuweisungen von Marken (Labels) und Anweisungen wie ORG (Origin = Anfang) und EQU (Equate = gleichsetzen). EQU weist dem Namen der

Marke einen Operanden zu, und mit ORG wird die Anfangsadresse des Programms festgelegt.

■ **Beispiel 1:** Für eine langsame Ausgabeeinheit wird eine Zeitschleife benötigt. Daher soll ein Unterprogramm mit dem Namen TIME programmiert werden. Im Hauptprogramm wird die Zeitdauer in das Registerpaar BC gebracht.

```
Unterprogramm: TIME
ORG 0100
TIME  PUSH PSW      AF zum Stack „retten“
      PUSH B        BC zum Stack „retten“
LOOP: DCX B          Registerpaar BC – 1 → BC
      MOV A,B        Flagbeeinflussung

      ORA C
      JNZ LOOP       Springe, wenn nicht Null, nach LOOP
      POP B          vom Stack zurückholen
      POP PSW        AF vom Stack zurückholen
      RET            Zurück zum Hauptprogramm
```

Eine Flagbeeinflussung muss hier vorgenommen werden, weil beim Inkrementieren eines Registerpaares keine Flags gesetzt werden, also auch nicht bei Null.

| Adresse | OP-Code  | Marke | Assembler | Bemerkung          |
|---------|----------|-------|-----------|--------------------|
| 0100    | F5       | LOOP: | PUSH PSW  | ;(AF) → Stack      |
| 0101    | C5       |       | PUSH B    | ;(BC) → Stack      |
| 0102    | 0B       |       | DCX B     | ;(BC) – 1 → BC     |
| 0103    | 78       |       | MOV A,B   | ;(B) → A           |
| 0104    | B1       |       | ORA C     | ;(C) OR (A) → A    |
| 0105    | C2 02 01 |       | JNZ LOOP  | ;(BC) = 0?         |
| 0108    | C1       |       | POP B     | ;(Stack) → BC      |
| 0109    | F1       |       | POP PSW   | ;(Stack) → AF      |
| 010A    | C9       |       | RET       | ;zum Hauptprogramm |
|         |          |       |           |                    |

■ **Beispiel 2:** Löschen eines Speicherbereiches  
Die Anzahl der zu löschenden Speicherstellen steht im Register B (Anzahl) und die erste zu löschende Speicherstelle im HL-Register (Zeiger). Erhöht sich das HL-Register um 1, steht auto-

matisch die nächste Speicherstelle im Registerpaar. Damit zeigt das HL-Register immer auf die gewünschte Speicherstelle. Nach jedem Löschvorgang wird der Zähler um 1 vermindert und ein erneuter Löschvorgang durchgeführt, bis der Zähler auf Null steht.

| Marke  | Assembler | Bemerkung          |
|--------|-----------|--------------------|
| CLEAR: | PUSH PSW  | ;(AF) → Stack      |
|        | PUSH H    | ;(HL) → Stack      |
|        | SUB A     | ;A = 0             |
|        | MOV M,A   | ;1. Stelle löschen |
|        | INX H     | ;Zeiger + 1        |
|        | DCR B     | ;Zähler – 1        |
|        | JNZ CLEAR | ;Ende?             |
|        | POP H     | ;(Stack) → HL      |
|        | POP PSW   | ;(Stack) → AF      |
|        | HLT       |                    |

IV Computertechnik

1 Komponenten eines Computers

Ein Computer besteht immer aus der *Hard-* und der *Software*. Die Software lässt sich aufteilen in *Programme*, die die Zentraleinheit ausführt, und *Daten*, mit denen sie arbeitet. Zur Hardware gehört die *Zentraleinheit* und eine Anzahl *peripherer Geräte*. Von ihrer Leistungsfähigkeit in Verbindung mit dem Prozessortyp und der Größe des Arbeitsspeichers hängt die Leistungsfähigkeit des gesamten Computersystems ab. Periphere Geräte können nach ihrer Aufgabe eingeteilt werden in *Ein- und Ausgabegeräte* wie Tastatur, Monitor, Drucker und Plotter und in *periphere Speicher* wie Magnetplattenspeicher und optische Speicher. Die Anzahl und Art der Peripheriegeräte hängt von der Aufgabe und vom Einsatzgebiet des Computers ab.

In einem Personalcomputer (PC) (Bild IV-1) ist die Zentraleinheit mit der Speichereinheit in einem Tisch- oder Towergehäuse untergebracht. Als Speicher für das Betriebssystem und für Anwenderprogramme dient eine *Festplatte* oder ein *CD-ROM-Laufwerk*. Zur Datensicherung und Datenverwaltung werden 3,5'- und 5,25'-Laufwerke einge-

setzt. Der angeschlossene *Drucker* wird für die Text- oder Grafikausgaben benutzt. *Tastatur* und *Monitor* ermöglichen die Kommunikation zwischen Mensch und Maschine. Die heute überwiegend grafisch orientierten Anwenderprogramme vereinfachen ihre Bedienung mit einer *Maus*.

Prozessorner besitzen eine zusätzliche Prozessperipherie für digitale und analoge Eingangs- und Ausgangssignale.

2 Massenspeicher

Massenspeicher lassen sich nach ihrer Funktion in *Magnetplatten*, *optische Speichermedien* und *Halbleiterspeicher* einordnen.

2.1 Magnetplatten

2.1.1 Diskette und Diskettenlaufwerk

Die Diskette (Floppy-Disk) ist ein Speichermedium, auf der Daten gespeichert, gelöscht und wieder überschrieben werden können. Sie besteht aus einer etwa 2 µm dicken Kunststoffträgerfolie, auf der beidseitig

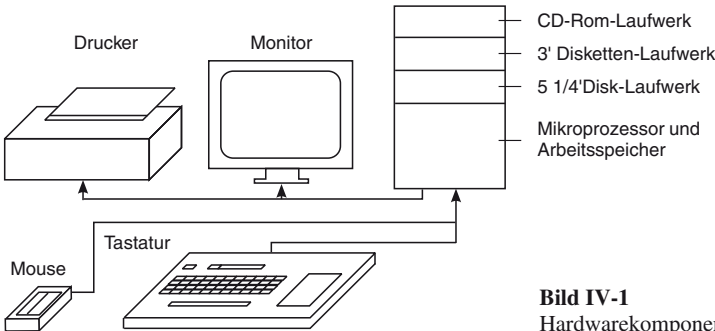


Bild IV-1  
Hardwarekomponenten eines Computers



eine magnetisierbare Schicht (z.B. Eisenoxidschicht) aufgebracht ist. Man unterscheidet Maxi-(8'), Mini-(5,25') und Mikro-Disketten (3,5'), wobei die beiden letzten sich bei PC's durchgesetzt haben. Die Größenangabe bezieht sich auf den Durchmesser der Diskettenscheibe, die fest in einer rechteckförmigen Kunststoffhülle mit ausgekleideten Vliesinnenseiten eingeschlossen ist. Dort ist sie gegen kleinste Verschmutzungen (Staub, Fingerabdrücke), die zum Datenverlust führen können, geschützt. Da Disketten unter dem Einfluss magnetischer Felder ebenfalls ihre Daten verlieren, dürfen sie solchen Feldern nicht ausgesetzt werden. Einmal beschriebene Disketten können vor einem erneuten Beschreiben, und damit vor einem eventuellen Datenverlust, dadurch geschützt werden, dass die Schreibschutzkerbe bei den 5,25'-Disketten mit einem lichtundurchlässigen Klebestreifen versehen wird. Die 3,5'-Disketten besitzen einen Schieber, mit dem man die Schreibschutzöffnung schließen kann (Bild IV-2). Disketten erhalten erst ihre Funktion, wenn sie vom Rechner durch ein Programm formatiert wurden.

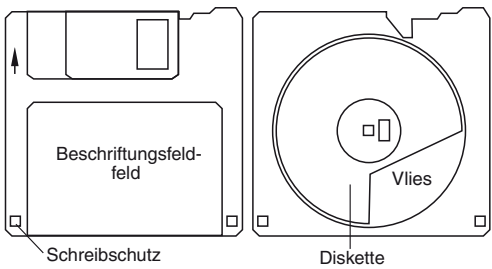


Bild IV-2 3,5'- Diskette

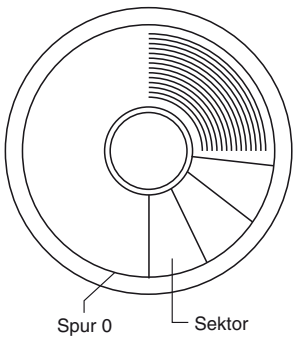


Bild IV-3 Diskettenscheibe

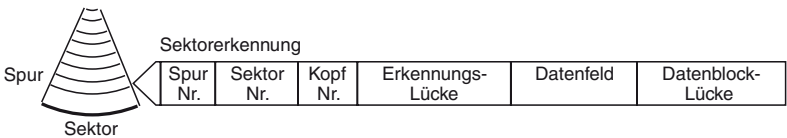


Bild IV-4 Spurformat

Durch die *Formatierung* wird die Diskette in konzentrische Spuren (Traks) und radiale Sektoren aufgeteilt (Bild IV-3). Beispielsweise kann eine Diskettenseite 80 Spuren mit 18 Sektoren besitzen. Auf den Spuren der einzelnen Sektoren befinden sich nach einem Speichervorgang die entsprechenden Daten, die dort in Datenblöcken zusammengefasst werden. Außer dem Datenblock enthält ein Sektor eine Sektorerkennung, eine Erkennungs- und eine Datenblocklücke. In der Sektorerkennung befinden sich Sektor- und Spurnummer (Bild IV-4). Liegt in Spur 0 ein Verzeichnis der Datennamen mit Zuordnung von Sektoradresse und Spurnummer, kann die gewünschte Information schnell ausgelesen werden. Die Speicherkapazität einer Diskette ist von der Formatierung abhängig. Beispielsweise ergibt sich bei der oben genannten Diskette bei 512 Byte/Sektor und zwei Aufzeichnungsseiten eine Kapazität von 1440 kByte. Zur Kennzeichnung des Sektors 0 dient ein *Indexloch* oder ein Erkennungsbyte. Die sich ergebenden Datenblöcke sind fortlaufend nummeriert. Auf jeder Spur innerhalb eines Sektors kann eine bestimmte Anzahl Daten, z. B. 256 oder 512 Byte gespeichert werden. Dies ist jeweils abhängig von der Spurdichte. Je mehr Spuren sich auf der Diskette befinden, desto mehr Daten kann sie aufnehmen. Die Spurdichte wird mit TPI (Tracks Per Inch = Spuren pro Zoll) angegeben und die *Aufzeichnungsdichte* in BPI (Bits per Inch). Man spricht auch von FCI (Flux Changes per Inch = Flusswechsel pro Zoll). Da die inneren Spuren einen geringeren Umfang besitzen, sind sie **die Basis** für die Anzahl der Daten. Die mittleren Zugriffszeiten bei Disketten betragen 100 bis 200 ms. Die übliche Speicherkapazität beträgt heute 1,44 MByte. Standardlaufwerke verwenden beide Seiten der Diskette und besitzen daher zwei Schreib- und Leseköpfe (Kombiköpfe). Ist ein PC mit mehreren Laufwerken ausgestattet, hat das Erstlaufwerk den Namen A und das Zweitlaufwerk den Namen B. Der Name C ist in der Regel der Festplatte vorbehalten. Das Prinzip der Aufzeichnung und das Lesen von Daten zeigt Bild IV-5. Beim Speichern der Daten erzeugt ein Schreibstrom im Schreib- und Lesemagnetkopf ein Magnetfeld, das im Luftspaltbereich des Kopfes auf der Diskette eine Magnetisierung bewirkt. Beim Lesen entsteht in der Kopfwicklung durch magnetische Induktion eine Spannung, die von der Magnetisierung (Ausrichtung der Molekularmagnete) der Diskette abhängt.

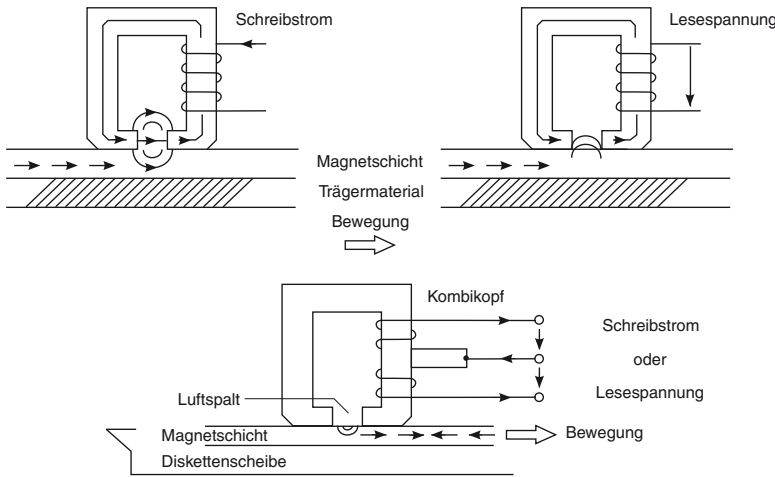


**Bild IV-5**  
Schreib-Lesekopf

Bild IV-6 verdeutlicht den Zusammenhang zwischen Daten, Schreibstrom und Magnetisierung und zeigt mögliche Codierungsverfahren auf. Beim *FM-Verfahren* (Frequency Modulation = Frequenzmodulationsverfahren) werden den Datenbits Synchronisationsbits zugefügt. Ein Datenbit „1“ erhält hierbei die

Codierung „1,1“ und ein Datenbit „0“ die Codierung „1,0“. Bei *MFM-Verfahren* (Modified FM) wird nur ein Synchronisationsbit auf die Diskette gebracht, wenn eine „0“ als Datenbit vorausging. Weil dieses Verfahren weniger Flusswechsel benötigt, erhöht sich die mögliche Speicherkapazität.

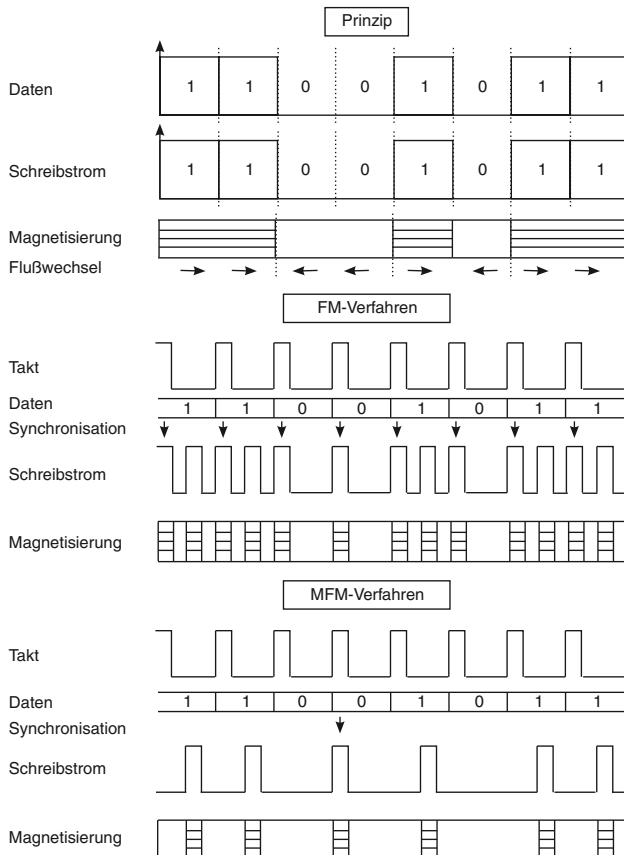


**Bild IV-6**  
Codierungsverfahren

Das Diskettenlaufwerk wird über den Floppy-Disk-Controller von der CPU angesteuert. Der Antriebsmotor lässt die Diskette 300 mal in der Sekunde rotieren und die Schrittmotorsteuerung bringt die Köpfe in die richtige Positon auf der Diskette. Ferner erhält der FDC Signale für die Spur 0- und Schreibschutzerkennung. Beim Schreibvorgang wandelt der Controller die eingehenden zu speichernden parallelen Daten in einen seriellen Datenstrom um und steuert über einen Schreibverstärker den Schreib-Lesemagnetkopf an. Bild IV-7 zeigt das Prinzip eines Diskettenlaufwerks mit Controller. Beim Lesen von der Diskette wird jeder Flusswechsel vom Lesekopf aufgenommen und als Wechselspannung

einem nachfolgenden Schreibverstärker zugeführt. Hochfrequente Störspannungen werden vorher über ein Filter (Tiefpass) ausgesiebt. Über eine Differenzierstufe und nachfolgenden Komparator wird das Lesesignal in eine gewünschte digitale Form gebracht, um hier je nach Codierungsverfahren dem FDC die decodierten Daten zur Verfügung zu stellen (Bild IV-8). Dort wird der serielle Datenstrom dann wieder in das parallele Format gebracht. Die entsprechenden Signale der einzelnen Blöcke sind mit dargestellt. Bild IV-9 zeigt beispielhaft einen *Floppy-Disk-Controller*, in dem sich alle notwendigen Funktionseinheiten befinden, mit seiner 34poligen Steckerleiste und dem Anschluss an das Bussystem.

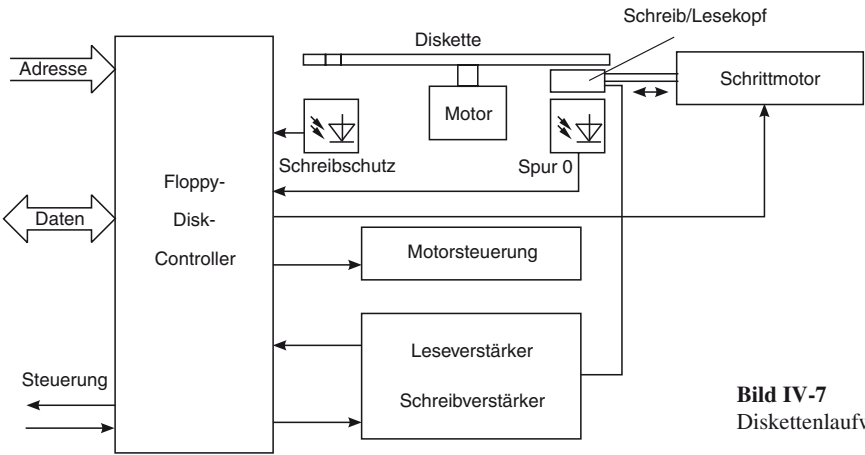


**Bild IV-7**  
Diskettenlaufwerk mit Controller

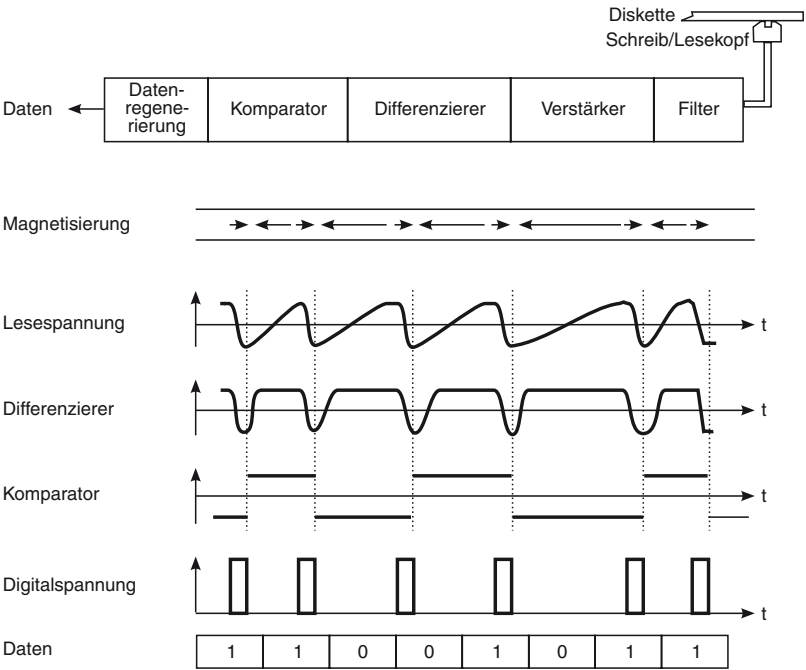


**Bild IV-8**  
Aufbereitung der  
Diskettendaten

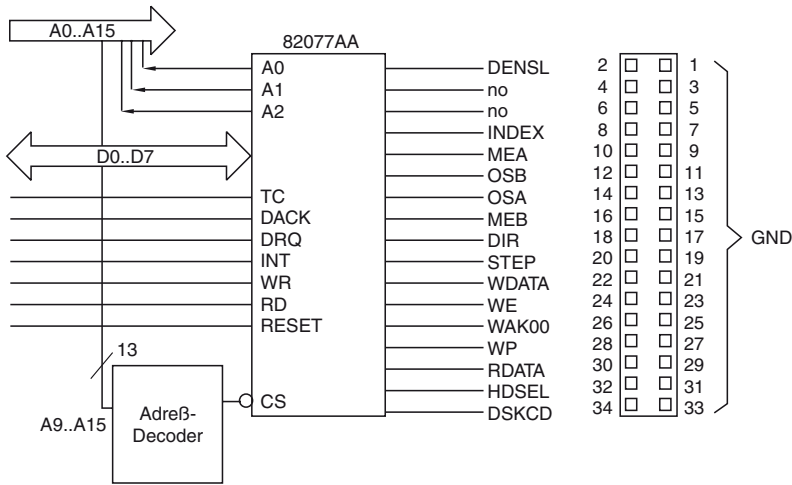


**Bild IV-9**  
Floppy-Disk-Controller  
mit Anschlüssen

Der Baustein selbst wird wie ein E/A-Baustein über eine Adresse angesprochen. Vorgänger des 82077AA sind die Controller 8272 und NEC765A.

**2.1.2 Festplatte und Festplattenlaufwerk**

Die Funktion der Festplatte beruht wie bei den Disketten auf der Magnetisierung einer Oberfläche. Das Trägermaterial von Festplatten ist Aluminium, auf der eine sehr dünne magnetisierbare Schicht (z.B. Eisenoxid) aufgebracht ist. Um die Speicherkapazität zu erhöhen, sind mehrere Platten übereinander (Bild IV-10) auf einer gemeinsamen Achse angebracht. Die Platte selbst ist – wie bei den Disketten auch – in konzentrische Spuren und radiale Sektoren aufgeteilt.

Die Platten rotieren im Gegensatz zu den Disketten ständig mit Geschwindigkeiten ab 5200 Umdrehungen pro Minute. Da sich bei den hohen Rotationsgeschwindigkeiten zwischen Plattenoberfläche und Kopf ein Luftpolster bildet, können sich Kopf und Platte nie berühren. Der Kopf „fliegt“ somit über die Platte. Zum Starten und Landen des Kopfes dient eine nicht zum Speicherbereich gehörende Randzone, die sogenannte *landing zone*. Beim Ausschalten des Rechners erfolgt das korrekte Landen („Parken“) automatisch. Festplatten sind stoßempfindlich. Ein Berühren der Platte durch die Köpfe (Headcrash) führt zu deren Zerstörung.

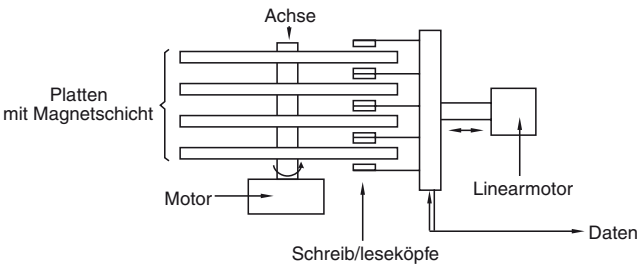
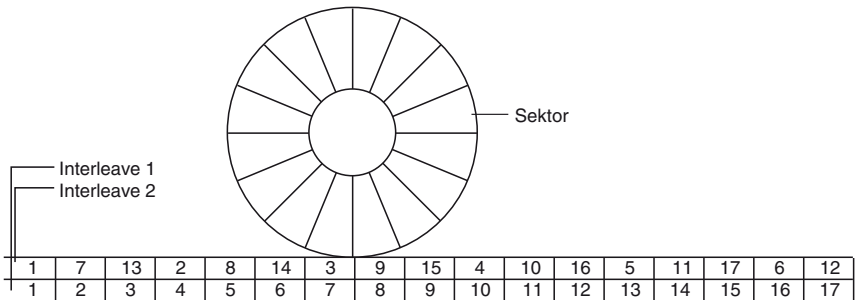


**Bild IV-10**  
Prinzip des Festplattenlaufwerks



Der Vorteil der Festplatten gegenüber Diskettenlaufwerken liegt in der Geschwindigkeit (mittlere Zugriffszeit 10 ms) und in der wesentlich höheren Speicherkapazität (2 GByte und mehr). Unter Zugriffszeit versteht man die Zeit, die der Schreib-Lesekopf benötigt, um zur gewünschten Spur (Einstellzeit) und dem gewünschten Sektor (Latenzzeit) zu kommen.

Durch die Formatierung werden Datenspuren in konzentrischen Kreisen eingerichtet und festgelegt, wo Sektoren und Zylinder auf der Platte liegen. Je dichter die Spuren nebeneinander verlaufen, desto größer ist die mögliche Speicherkapazität. Die genau übereinander liegenden Spuren eines Plattenstapels nennt man Zylinder. Die Zylinder sind jeweils wieder in kleinere Speichereinheiten (Sektoren) aufgeteilt. Die Anzahl der Sektoren ist auf allen Spuren gleich. Die größte Datendichte liegt somit auf der innersten Spur. Da auf der äußeren Spur die gleiche Dateninformation liegt, ist die Datendichte hier geringer. Ausnahmen bilden Platten mit *Zone-Bit-Recording*, wo die inneren Spuren weniger Sektoren als die äußeren enthalten und somit die Platzverschwendung auf den äußeren Sektoren entfällt. Der Controller speichert zusätzlich Kontrolldaten, um die Position der Magnetköpfe zu bestimmen.

Bei den Vorgängertypen war die Geschwindigkeit der Festplatten größer als der mögliche Rechnerzugriff. Die Spur eines Sektors konnte nicht bei jeder Umdrehung der Festplatte, sondern erst bei der zweiten oder dritten Umdrehung gelesen werden. Ein *Interleave-Faktor* passte die Umdrehungsgeschwindigkeit der Festplatte an die Geschwindigkeit des Prozessors bzw. an die Geschwindigkeit an, mit welcher der Controller Daten von oder zur Festplatte übertragen kann. Bild IV-11 vergleicht die Sektorenfolge der Festplatte mit einem Interleave-Faktor 3 und eine mit dem Interleave-Faktor 1.

Die Festplatte selbst kann in mehrere logische Laufwerke unterteilt (partitioniert) werden, die dann vom Betriebssystem jeweils als eigenständige physikalische Laufwerke behandelt werden. *Wechselplatten* sind nicht fest installiert. Sie können problemlos ausgewechselt und transportiert werden.

2.1.3 Magnetbandgeräte

Magnetbandgeräte (Streamer) dienen zur Aufnahme und Sicherung großer Datenmengen. Die Aufzeichnung der Daten erfolgt durch die Magnetisierung einer dünnen Eisenoxidschicht, die sich auf einer Trägefolie befindet. Ein unmittelbarer freier Zugriff auf bestimmte Daten ist nicht möglich.

2.2 CD-ROM- und CD-Laufwerk

Das CD-Laufwerk (CD = Compact Disc) gehört heute zur Grundausstattung eines PC-Systems. Die CD zählt zu den optischen Speichern, bei denen zwischen CD-WROM (Write Once Read Multiple, kann einmal beschrieben werden) und CD-ROM unterschieden wird. Ihr Vorteil gegenüber Festplatten liegt in der

sehr hohen Speicherkapazität (über 500 MByte) und den relativ kurzen Zugriffszeiten (unter 1 ms). Die Datenspur liegt *spiralförmig* auf der CD vor und wird von innen nach außen gelesen. Die Daten der Standard CD sind in Tabelle IV-1 zusammengefasst.

Tabelle IV-1 Standard CD

|                                    |                           |
|------------------------------------|---------------------------|
| Durchmesser:                       | 120 mm                    |
| Drehzahl:                          | 200–530 min <sup>-1</sup> |
| Abtastrichtung:                    | von innen nach außen      |
| Abtastgeschwindigkeit:             | konstant                  |
| Spurbreite:                        | 0,6 µm                    |
| Abstand benachbarter Spurbereiche: | 1 µm                      |

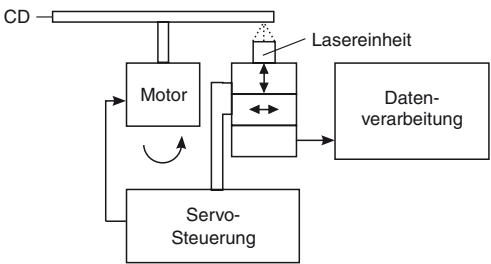


Bild IV-12 Prinzip eines CD-Laufwerkes

Bild IV-12 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines CD-Laufwerkes. Die Motordrehzahl ist zwischen der Innenabtastung und der Außenabtastung variabel, weil beim Lesen der CD ein konstanter Datenstrom erzeugt werden muss. Gegenüber Single-Speed-Laufwerken mit Datenübertragungsraten von 150 KByte pro Sekunde ist der Faktor heutiger Laufwerke 20 und mehr. Die Servosteuerung sorgt für eine gezielte Führung der Abtasteinheit (Focus und Spurhaltung) über die Datenspur.

Die *digitalen* Informationen auf der CD sind durch Vertiefungen auf der spiralförmig angeordneten Spur eingeprägt. Die Vertiefungen heißen *Pits* und die Stege dazwischen bezeichnet man mit *Land*. Der Wechsel zwischen Land und Pit wird beim Lesen der Daten von innen nach außen als „1“ interpretiert (Bild IV-13). Hierbei wird die Spur durch den gebündelten Laserstrahl abgetastet. Trifft der Laserstrahl auf ein Pit, erfolgt eine Reflexion, die im Idealfall zur Absorption des Lichtes führt. Trifft er auf keine Vertiefung, dann wird der Strahl voll reflektiert.

Bild IV-14 verdeutlicht das Leseprinzip. Eine Laserdiode sendet das Laserlicht durch einen halbdurchlässigen Spiegel, einen Strahlteiler und eine Focussierlinse auf die Reflexionsschicht der CD. Das reflektierte Licht gelangt über den Strahlteiler auf den Lesedetektor. Der Lesedetektor besteht aus Fotodioden, die aus dem gewonnenen elektrischen Signal die Daten zur Verarbeitung weitergeben und Signale für die Servosteuerung gewinnen.

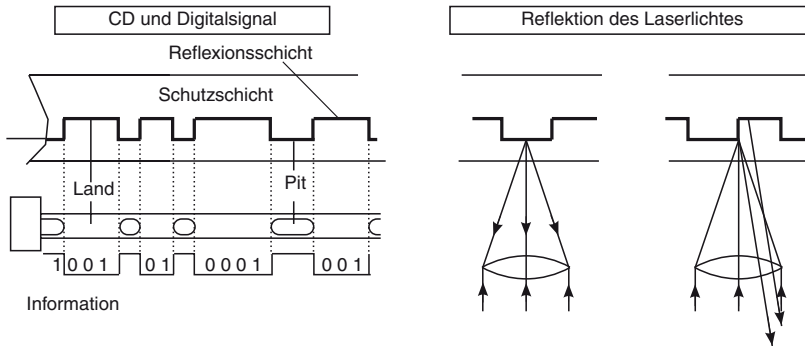


**Bild IV-13** Signale und Reflexion des Laserlichtes

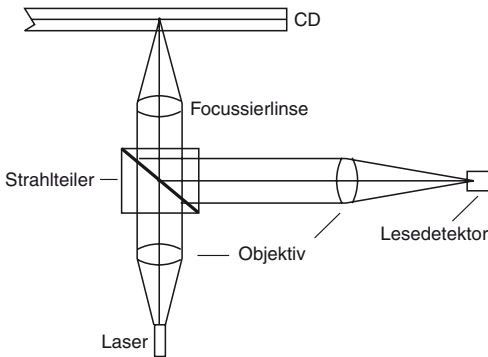


**Bild IV-14** Leseprinzip

### 3 Eingabegeräte

#### 3.1 Tastatur

Zur Eingabe von Zeichen und Befehlen wird in PC-Systemen die Tastatur (Keyboard) verwendet. Bei den Tastenelementen selbst sind unterschiedliche Tastenarten und Anordnungen gebräuchlich. Die deutsche Tastatur hat die sogenannte *QWERTZ-Anordnung* mit Funktions- und Cursortasten und Nummernblock. Bei der internationalen Anordnung sind Z mit Y vertauscht (QWERTY-Anordnung).

Die Tastatur besteht aus einer Tastaturmatrix, einem Mikrokontroller und einem Puffer-Speicher für die seriellen Daten, die der Tastaturschnittstelle (Tastatur-Interface) auf dem Motherboard zur Verfügung gestellt werden. Bild IV-15 zeigt das Blockschaltbild.

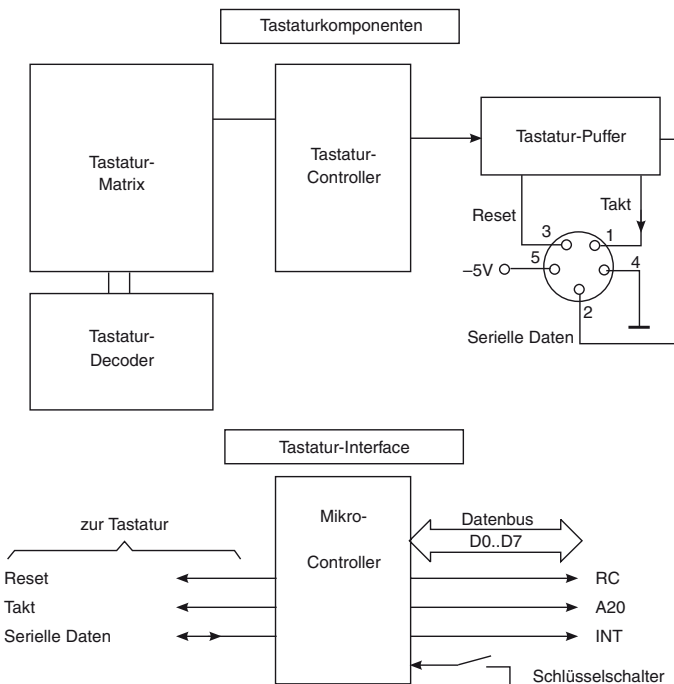


**Bild IV-15**  
Tastaturinterface  
und -komponenten

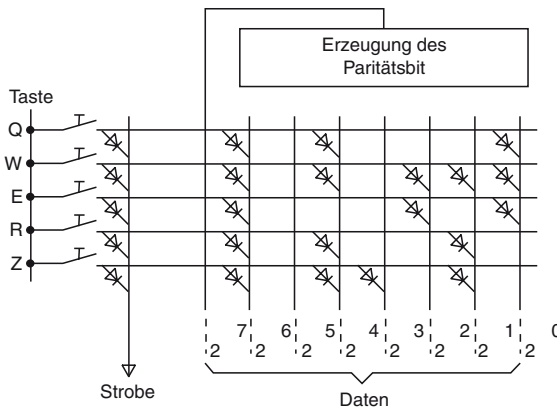


**Bild IV-16**  
Prinzip: Tastaturmatrix

Die Funktion der Tastenmatrix ist aus Bild IV-16 ersichtlich. Die Tastatur erzeugt aus einem Tastendruck ein Bitmuster (Scan-Code = Zuordnung zur Tastennummer).

Der Tastatur-Controller (Beispiel 8048) wertet hierbei die Eingabe der Tastatur aus. Unterschieden wird zwischen dem Drücken der Taste („Make“-Codes) und dem Loslassen der Taste („Break“-Codes). Die beiden Codes unterscheiden sich nur durch das höchstwertige Bit. Wird eine Taste gedrückt und nach bestimmter Zeit (z.B. 0,5 s) nicht losgelassen, sendet der Tastatur-Controller fortlaufend den gleichen Tastencode (Autorepeat-Funktion). Mit Hilfe des erzeugten Taktes durch den Mikrocontroller werden die Daten *seriell* zum Tastatur-Interface geschrieben. Dort werden die seriellen Daten von einem weiteren Mikrocontroller (z.B. 8042) empfangen und in parallele Daten umgesetzt, die dann der CPU zur Verfügung gestellt werden. Die Zuordnung der Scan-Codes zu den ASCII-Werten kann mit Hilfe eines Tastaturreibers, z.B. KEYBGR.COM, selbst definiert werden. Die Übertragung zur CPU wird durch INT (Interrupt 1) ausgelöst.

### 3.2 Maus

Text- und Grafik-Software verwenden einen *Cursor* (z.B. kurze blinkende Linie oder Lichtmarke verschiedener Form), um an die Stelle des Bildschirms zu zeigen, an der das nachfolgende Zeichen entsteht. Der Cursor kann sowohl mit Hilfe der Cursortasten als auch mit der Maus bewegt werden. Die Mause-Software bewegt den Cursor auf dem Bildschirm genau in die Richtung, in der die Maus bewegt wird. Hierbei wird die Maus zu einer wichtigen Eingabe-einheit. Installiert wird sie durch die entsprechenden Maustreiber. Auf dem Markt existieren unterschiedliche Maustypen, z.B. mit zwei oder drei Tasten. Bei beiden ist wesentliches Element die Rollkugel. X- und Y-Richtung und Status der Maustasten wird an die serielle Schnittstelle weitergegeben.

## 4 Ausgabegeräte

### 4.1 Datensichtgeräte

Datensichtgeräte dienen zur Wiedergabe alphanumerischer und grafischer Informationen.

#### 4.1.1 Monitor

Nach Bild IV-17 besteht der Monitor aus einer Bildröhre und aus Schaltungen für die Hochspannungserzeugung, Strahlstromablenkung (Ablenkeinheit), Synchronisierung und Signalverstärkung (Videoverstärker). Angesteuert wird der Monitor vom Videointerface (Grafikkarte) mit dem *Videosignal* und der *Synchronisation*. Das Videosignal ist das eigentliche Bildsignal und die Synchronisationssignale dienen dazu, ein stehendes Bild auf dem Monitor zu erzeugen.

Würde der Einsetzpunkt des Bildes nicht immer an derselben Stelle liegen, hat man den Eindruck, das Bild würde „durchlaufen“. Die zur Monitoransteuerung notwendigen Daten befinden sich im *Bildschirmspeicher*, der Teil des Arbeitsspeichers ist oder im *Video-RAM* auf der *Grafikkarte*. Die Bildröhre selbst (Kathodenstrahlröhre) besteht aus einem Strahlerzeugersystem (Katode) und dem Bildschirm. Die von der Kathode austretenden Elektronen treffen durch Hochspannung beschleunigt auf dem Bildschirm auf und erzeugen hier einen sichtbaren Punkt, dessen Farbe bei *monochromen* (einfarbigem) Bildschirmen von der Leuchtschicht (weiß, grün, bernstein) des Bildschirms abhängt. Zur Helligkeitseinstellung dient ein Einsteller, der von außen zugänglich ist und den Strahlstrom durch Potentialänderung zwischen Kathode und Steuergitter (Wehneltzylinder) beeinflusst. Das Steuergitter ist die Elektrode in der Bildröhre, die sich unmittelbar hinter der Katode befindet. Um ein einwandfrei scharfes Bild zu erhalten, muss der Elektronenstrahl gebündelt den Bildschirm erreichen. Dies wird durch ein elektrostatisches Feld erreicht, das wie eine Elektronenoptik wirkt. Eine Einstellmöglichkeit bietet der FOCUS-(Schärfe-) Einsteller.

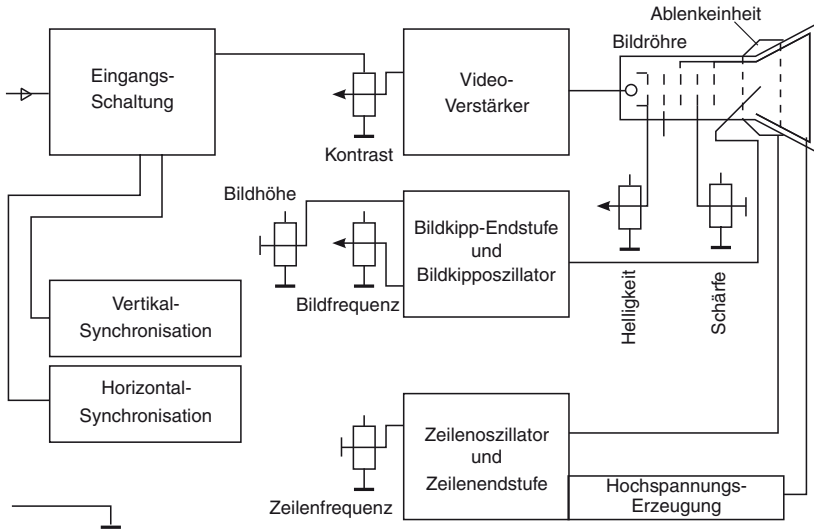


Bild IV-17 Blockbild eines Monitors

Da der Elektronenstrahl das Bild zeilenweise erstellt, wird eine Ablenkschaltung benötigt, die den Elektronenstrahl durch Magnetfelder entsprechend ablenkt. Hierzu dienen die Horizontal- und Vertikalablenkspulenpaare (Ablenkeinheit).

Um eine gleichmäßige Ablenkung von links nach rechts zu erhalten, wird den Horizontalablenkspulen ein sägezahnförmiger Strom zugeführt. Während des Rücklaufs (von rechts nach links) wird der Elektronenstrahl dunkel getastet. Die Anzahl der horizontalen Abtastungen pro Sekunde ergibt die *Zeilen- oder Horizontalfrequenz*, die bei den einzelnen Herstellern unterschiedlich ist (z.B. 30 ... 80 kHz bei 14" Monitoren). Die lineare Ablenkung des Elektronenstrahls von oben nach unten bewirken die Vertikalablenkspulen. Bild IV-18 zeigt den Zusammenhang zwischen vertikaler und horizontaler Ablenkung. Die Amplitude der Bildablenkspannung ist für die Bildhöhe verantwortlich. Häufig ist hierfür ein Einsteller von außen zugänglich.

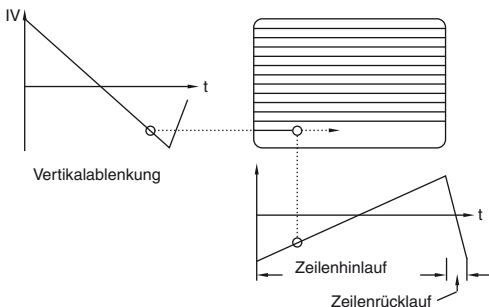


Bild IV-18 Vertikale und horizontale Ablenkung

Zur Darstellung eines flimmerfreien Bildes müssen bei der *Negativdarstellung* (helle Zeichen auf dunklem Grund) mindestens 50 Bilder pro Sekunde geschrieben werden. Dies ergibt eine Bildwiederholfrequenz von 50 Hz. Die *Positivdarstellung* (dunkle Zeichen auf hellem Grund) erfordert mindestens 70 Hz. Die meisten Monitore arbeiten heute mit Bildfrequenzen zwischen 60 und 120 Hz. Eine Möglichkeit, Flimmern zu reduzieren, ist das Verschachteln zweier Halbbilder nach dem Zeilensprungverfahren (interlaced), wie das bei Fernsehgeräten der Fall ist. Hierbei werden zunächst die ungeraden und dann die geraden Zeilen geschrieben (Bild IV-19). Der Rücklauf ist immer unsichtbar. Bei 25 Halbbildern in der Sekunde wird beispielsweise eine Bildfrequenz von 50 Hz vorgetäuscht (Trägheit der Augen).

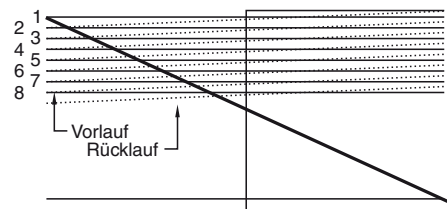


Bild IV-19 Zeilensprungverfahren

Der Farbmonitor besitzt eine *in-line*-Röhre mit drei Elektronenerzeugungssystemen jeweils für die Grundfarben Rot (R), Grün (G) und Blau (B), mit der die entsprechenden Farbstreifen angeregt werden (Bild IV-20).

Um eine gute Farbwiedergabe zu erhalten, müssen die Elektronenstrahlen ihre zugeordneten Farbstreifen



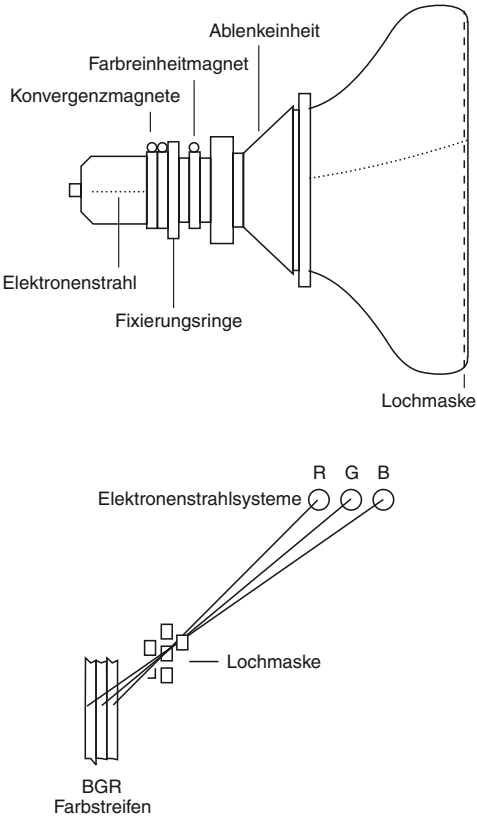


Bild IV-20 Farbbildröhre und Inlineprinzip

durch den gemeinsamen Schnittpunkt der Schlitzmaske treffen (Konvergenz). Mit Hilfe von Dauermagneten, die um den Röhrenhals angeordnet sind, kann eine eventuell notwendige Nachjustierung erfolgen. Bei der *Trinitron*-Farbbildröhre besteht die Gittermaske aus senkrecht angeordneten Metallstreifen. Zur Stabilität können zusätzlich zwei Streifen waagrecht eingezogen sein. Das Elektronenerzeugersystem besteht aus drei Kathoden. Im Gegensatz zur In-line-Röhre sind alle anderen Elektroden nur einmal vorhanden. Das Verhältnis von Breite zur Höhe ist bei allen Standardmonitoren 4:3. Damit reicht die Bildschirmdiagonale zur Angabe über die Monitorgröße aus. Die Zahl der vertikal und horizontal ansprechbaren Bildpunkte (Pixel) gibt die *Auflösung* an. Eine Angabe von  $1024 \times 768$  bedeutet, dass horizontal 1024 und vertikal 768 Pixel dargestellt werden. Den Abstand benachbarter Bildmittelpunkte bezeichnet man als *Dot Pitch*. Die vom Videointerface gelieferten Signale (wenige Volt) müssen noch verstärkt werden, um die Bildröhre aussteuern zu können. Die Amplitude des Signals ist mit dem Kontrasteinsteller veränderbar. Monitore erzeugen Röntgenstrahlen und elektromagnetische Felder. Während für Röntgenstrahlen eine

Röntgenverordnung existiert, gibt es für elektrostatische und magnetische Felder nur die allgemeinen Vorschriften VDE 0848. Die heutigen Monitore genügen alle der schwedischen *MPR-Norm* (Statens mät-och pröad), die jeweils Höchstwerte an der Bildschirmoberfläche vorschreiben. Sie können als strahlungsarm eingestuft werden. Monitor und Grafikkarte müssen aufeinander abgestimmt sein, da die Karten mit unterschiedlichen Zeilen- und Bildfrequenzen angeboten werden. Der *Multiscan-Monitor* dagegen ist in der Lage, die Signale aller gängigen Grafikkarten zu verarbeiten, weil er das Bild automatisch nach den angebotenen Frequenzen einstellt (Bildfrequenzen 50 ... 90 Hz, Zeilenfrequenzen 15 ... 45 kHz). Das Videointerface (Bild IV-21) überträgt Daten zum Monitor. Die Grafikkarte besteht im Prinzip aus einem *Zeichengenerator*, der alle Zeichen, die auf dem Bildschirm dargestellt werden können, enthält, und aus einem *Bildspeicher*, in dem der gesamte Bildschirminhalt abgelegt ist. Der Bildspeicher wird dann z.B. 60 mal in der Sekunde abgefragt und zur Anzeige gebracht. In kürzester Zeit haben sich immer bessere Grafikstandards herausgebildet. Tabelle IV-2 gibt einen Überblick über die Entwicklung von Grafikkarten. EGA-Karten können beispielsweise maximal 16 aus 64 Farben darstellen, während im VGA-Standard 256 Farben dargestellt werden können. Weitere Unterschiede liegen in der Signalübergabe zum Monitor. Während EGA mit digitalen Signalen arbeitet, werden bei den heute üblichen VGA- oder SVGA-Karten analoge Signale übertragen.

Tabelle IV-2 Grafikkarten (Entwicklung)

| Karte    | Format/Bildpunkte     | Anzahl der Farben | Bild-/ Zeilenfrequenz |
|----------|-----------------------|-------------------|-----------------------|
| Hercules | 768 · 320             | –                 | 50/18430              |
| CGA      | 320 · 200             | 4                 | 60/15750              |
| EGA      | 640 · 350             | 16                | 60/21850              |
| VGA      | 640 · 480 (800 · 600) | 256               | 70/18750              |

Bei Grafikkarten wird nach zwei grundsätzlichen Betriebsarten, dem *Text*- und dem *Grafikmodus*, unterschieden. Im Text- oder Alphamodus liegt die Bildinformation zeichenorientiert im ASCII-Code mit einem zusätzlichen Attributbyte vor. Das Attribut bestimmt z.B. die Farbe des ASCII-Zeichens. Aufgeteilt wird der Bildschirm nach Textzeilen und Textspalten (Bild IV-22), z.B. in 80 Zeichen pro Zeile und 25 Zeilen. Hierzu ist eine relativ große Videobandbreite erforderlich.

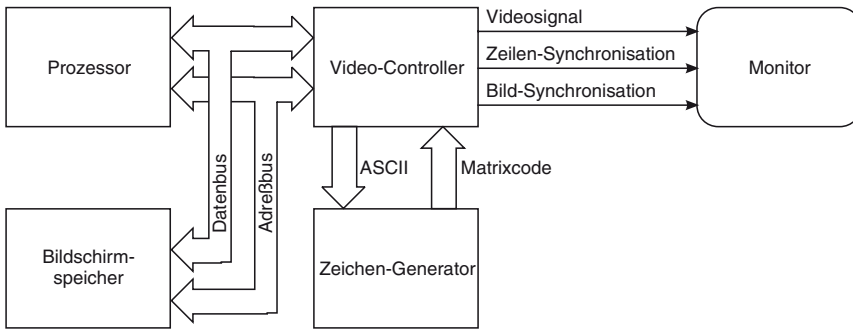


**Bild IV-21**  
Videointerface

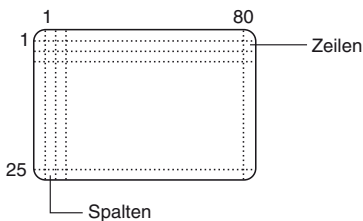


**Bild IV-22** Darstellung im Textmodus

#### 4.1.2 LCD-Bildschirm

Neben dem Monitor, der mit einer Bildröhre bestückt ist, sind LCD-Bildschirme im Einsatz. Sie sind als Flachbildschirme aufgebaut und benötigen weniger Platz. Ein weiterer Vorteil ist der geringere Stromverbrauch. Als Nachteile sind Kontrastarmut, vor allem bei Fremdlichteinwirkung, Temperaturabhängigkeit und Trägheit zu nennen.

### 4.2 Drucker

Drucker (Printer) ermöglichen die Ausgabe alphanumerischer Zeichen für die Textverarbeitung und sind in der Lage, Diagramme und Zeichnungen zu erstellen. Im wesentlichen unterscheidet man heute *Typenrad-, Nadel-, Tintenstrahl- und Laserdrucker*.

#### 4.2.1 Typenraddrucker

Typenraddrucker waren die ersten eingesetzten Drucker in Verbindung mit Computersystemen. Sie arbeiten nach dem Prinzip der Typenradschreibma-

schine und erzeugen ein ausgezeichnetes Schriftbild. Nachteile sind die geringe Druckergeschwindigkeit und die Unfähigkeit, Grafiken zu drucken. Ein weiterer Nachteil ist die Notwendigkeit, das Typenrad zu wechseln, wenn unterschiedliche Schriftarten in einem Schreiben verwendet werden sollen.

#### 4.2.2 Matrixdrucker

Sehr weite Verbreitung haben die Nadel- oder Matrixdrucker gefunden, weil sie relativ preiswert sind. Die Zeichen werden durch ein Punktraster dargestellt. Die Steuerung erfolgt über Nadeln des Druckkopfes. Üblich sind 9- bzw. 24-Nadeldrucker. Matrixdrucker sind relativ schnell, grafik- und farbfähig. Als Nachteil kann das etwas höhere Arbeitsgeräusch empfunden werden.

#### 4.2.3 Tintenstrahlrucker

Durch sehr kleine Düsen wird Tinte auf das Blatt gebracht. Bei den Vorgängertypen trockneten häufig diese Düsen ein, wenn der Drucker wenig im Gebrauch war. Tintenstrahlrucker wurden in letzter Zeit durch unterschiedliche technische Verfahren wesentlich verbessert. Sie arbeiten sehr leise und sind farb- und grafikfähig.

#### 4.2.4 Laserdrucker

Das Drucksystem eines Laserdruckers kann mit dem Prinzip eines Fotokopierers verglichen werden. Die Druckgeschwindigkeit ist sehr groß und das Druckbild hervorragend.

## V Programmiertechnik

Aufgabe der Programmertechnik ist es, Verfahren bereitzustellen oder zu entwickeln, mit deren Hilfe die Eigenschaften programmierbarer Geräte verändert werden können. Voraussetzung dafür ist, dass diese Geräte über einen Befehlsvorrat sowie über die Freiheit verfügen, die Auswahl und die Reihenfolge der auszuführenden Befehle zu variieren. Die genannten „Geräte“ beinhalten in der Regel mindestens einen Prozessor oder Controller.

Während eine SPS eindeutig programmierbar ist, erscheint eine Waschmaschine, obwohl sie einen Controller enthält, nur auf den ersten Blick programmierbar: über den Programmwahlschalter wählt der Benutzer aus fertigen, von ihm nicht veränderbaren Abläufen einen aus. Seine „Programmierung“ bezieht sich auf die Auswahl der berücksichtigten Daten (Art der Wäsche, Temperatur ...). Da diese Daten (oder Parameter) dem Gerät keine grundsätzlich neuen Eigenschaften verleihen, nennt man diese Vorgang nicht Programmieren sondern *Parametrieren*.

### 1 Programmiersprachen

Der Begriff *Programmiersprache* entstammt der Analogie mit der menschlichen Sprache. Hier wie dort gibt es die Vokabeln (Befehle) und die Grammatik (Regeln).

Dem Programmierstil der Pionierzeit lag keine „Sprache“ in diesem Sinne zugrunde, denn es fehlten die „Vokabeln“, die Begriffe, die synonym für bestimmte Inhalte (Befehle) standen. So war die Programmierung dadurch gekennzeichnet, dass jedes einzelne Bit im Speicher per Hand (Schalter) gesetzt bzw. gelöscht werden musste. Unter einer höheren Programmiersprache ist im Folgenden zu verstehen, dass *ein Befehl* in eben dieser Sprache *mehrere* Maschinenbefehle zu seiner Umsetzung benötigt.

In PASCAL lautet z.B. die Anweisung zur Addition zweier Variablen-Werte :

U\_Gesamt := U\_R1 + U\_R2 ;

In Z80-Assembler sind für den (prinzipiell) gleichen Vorgang die folgenden Anweisungen nötig:

Vorplanung der Registerbelegung:

HL = Adresse des 1. Operanden  
(HL + 1) = Adresse des 2. Operanden  
(HL + 3) = Adresse des Ergebnisses  
A = Rechenregister  
B = Hilfsregister

LD HL, 8000 ; Adresse des 1. Operanden in das HL-Register

LD A, (HL); Lade das A-Register mit dem 1. Operanden

INC HL ; erhöhe den Inhalt des HL-Registers um 1

LD B, (HL) ; Lade das B-Register mit dem 2. Operanden  
ADD B ; Addiere den Inhalt des B-Registers zum Inhalt des A-Registers (das Ergebnis verbleibt im A-Register)  
INC HL ; erhöhe den Inhalt des HL-Registers um 1  
LD (HL), A ; lade die Speicheradresse, auf die das HL-Register zeigt, mit dem Ergebnis

Aus der Verwendung einer höheren Programmiersprache resultiert daher eine bessere Übertragbarkeit (Portierung) auf andere Rechnersysteme sowie eine effizientere Programmierung; allerdings steigt der Speicherbedarf teilweise drastisch an.

Guter Programmierstil ist nur sehr bedingt von der verwendeten Programmiersprache abhängig. Mit der nötigen Disziplin und Sorgfalt lässt sich auch mit Sprachen, die nicht modular angelegt sind, sauber arbeiten. Es folgt daher eine unvollständige, alphabetisch sortierte Liste einiger Programmiersprachen, um die babylonische Vielfalt wenigstens zu benennen. Aufgrund der enormen Innovationsgeschwindigkeit können viele der bei einer Sprache genannten Eigenschaften z.Zt. bereits in eine andere Sprache übernommen worden sein.

#### 1.1 Assembler

Der Begriff Assembler ist doppeldeutig. Zum einen wird damit die (hier gemeinte) Assemblersprache und zum anderen das Programm, das aus einem Quelltext (siehe Beispiel) die Maschinenbefehle übersetzt, bezeichnet. Diese Dualität der Bezeichnungen findet sich auch bei anderen Programmiersprachen.

„Assembler“ ist eine *Programmiersprache*, weil der einzelne, vom Zielprozessor verstehbare Befehl durch ein sinnvolles Synonym dargestellt wird. Diese Synonyme werden Mnemonics (Mneme: Gedächtnis, Erinnerung) genannt, da sie die Aktion des betreffenden Befehls in kürzester Form beschreiben.

■ **Beispiel:** LD B,3E; Lade das B-Register mit dem Wert 3E<sub>16</sub>

Hier steht die Abkürzung (Mnemonic) LD für „lade“!

Obwohl die Programmierung in Assembler hohe Anforderungen an den Programmierer stellt, weil er den Zielprozessor sehr gut kennen muss, gehört diese Sprache zu den niederen: *jeder* benutzte Maschinenbefehl wird durch *eine* Assembler-Anweisung dargestellt. Daher liefert diese Sprache keine Strukturierungshilfen (Wiederhol-Schleifen, Datentypen etc.) mit. Wer diese Sprache beherrscht, wird durch keine Sprachkonventionen reglementiert; man muss allerdings die volle Verantwortung selbst für einfachste Programmelemente (z.B. Ende einer Zählschleife) tragen. Der Vorteil dieser Sprache liegt in dem sehr schnellen Ablauf der erzeugten Programme sowie dem geringen Speicherplatzbedarf.

#### 1.2 ADA

Sowohl für den kommerziellen, den industriellen und den militärischen Bereich geeignet, ist ADA (Augusta Ada Byron, 1816–1862) eine universelle

Sprache. Sie wurde mit den Schwerpunkten leichte Wartung/Prüfung sowie Portierbarkeit entwickelt. Ähnlich PASCAL dokumentiert sie sich weitgehend selbstständig und erlaubt aufgrund des modularen Konzeptes das arbeitsteilige Vorgehen bei großen Softwareprojekten.

Eine geringe Innovationsgeschwindigkeit dieser Sprache ist der Preis für ein stabiles, an feste Spezifikationen gebundenes Konzept.

### 1.3 ALGOL

Die technisch-wissenschaftlich orientierte Sprache ALGOL (Algorithmic Language) ist seit ca. 1960 verfügbar. Sie ist der „Urahn“ der modernen, blockorientierten und prozeduralen Sprachen (Klammerung durch BEGIN .. END). Hier wird erstmalig zwischen der Zuweisung := und dem Vergleich = schon bei den verwendeten Operatoren unterschieden. Dazu wird die Prozedur als Statement und die Funktion als Variable einsetzbar. Die geschriebenen Prozeduren und Funktionen können sich selber aufrufen (echte Rekursion) und die Bool'sche Algebra wird im Befehlsvorrat berücksichtigt.

### 1.4 BASIC

Die leichte Erlernbarkeit stand im Vordergrund, als die Sprache BASIC (Beginner's all pupose symbolic instruction code) anfang der sechziger Jahre am Dartmouth College/USA aus dem Vorbild FORTRAN als „verdünnter Aufguss“ entstand. Da BASIC ein Interpreter ist, ergeben sich kurze Testzeiten für die Programme. Allerdings werden diese recht langsam, wenn das Programm lang ist und viele Erklärungen (REM) sowie umfangreiche Kontrollstrukturen enthält.

Die Sprache BASIC ist einfach, beansprucht wenig Speicherplatz und kann auf (fast) jedem Mikroprozessorsystem installiert werden.

Da jeder Hersteller „sein“ BASIC weiterentwickelte und/oder an sein Mikroprozessorsystem anpasste, entstanden im Laufe der Zeit unzählige, nichtkompatible aber immer leistungsfähigere BASIC-Dialekte. Die modernen BASIC-Versionen sind zu vollwertigen Konkurrenten der Sprachen C oder PASCAL geworden.

Der große Bekanntheitsgrad sowie die Leistungsfähigkeit haben dazu geführt, dass professionelle Anwenderprogramme (Textverarbeitung, Tabellenkalkulation, Datenbanken) BASIC-Dialekte als Makrosprache zur Parametrierung benutzen.

### 1.5 C

Die Eigenschaften von C stellen eine Mittlerfunktion zwischen den Assembler-Sprachen und höheren Sprachen dar. So besitzt C von Assembler die extrem hohe Abarbeitungsgeschwindigkeit mit einem sehr kompakten Code und von den (blockorientierten) höheren Sprachen deren Modularität und damit die gute Dokumentation und Wartungsfähigkeit.

Mit der größeren Nähe zur Prozessorebene obliegt dem Programmierer, ähnlich wie bei den Assembler-Sprachen, eine größere Verantwortung bei der Kontrolle des Programmes. Beispielsweise müssen Typüberprüfungen von Objekten veranlasst werden, während diese in PASCAL automatisch durchgeführt werden.

Aus diesen Gründen wird C gern als Programmiersprache für systemnahe Probleme verwendet. Beschränken sich die Programmierer auf den Kernighan-Ritchie- oder den ANSI-Standard, so ist eine leichte Portierung auf die verschiedensten Rechnersysteme möglich.

### 1.6 FORTRAN

Seit ca. 1955 verfügbar, ist FORTRAN (Formular Translator) eine der ersten Hochsprachen für den technisch-wissenschaftlichen Bereich. Ermöglicht wurde die (teilweise) Ablösung von den Assemblersprachen zu diesem Zeitpunkt durch größere, zur Verfügung stehende Arbeitsspeicher (4 bis 16 kByte).

Durch die Hochsprachen-Eigenschaften sind die mit FORTRAN geschriebenen Programme austauschbar (portabel). So entstanden rasch große Programmsammlungen, die dieser Programmiersprache auch heute noch ihr Dasein sichern, obwohl es zu dieser Programmiersprache mittlerweile Alternativen gibt.

### 1.7 PASCAL

Die modernen PASCAL-Sprachen lehnen sich alle an das von Niklaus Wirth Anfang der 70iger Jahre in Zürich entwickelte PASCAL (Blaise Pascal, 1623–1662) an.

PASCAL, das ebenso wie ALGOL eine blockorientierte, prozedurale Sprache ist, wurde von Wirth ursprünglich für seine Studenten entwickelt, damit diese sich einen sauberen, strukturierten Programmierstil erwerben konnten. Hält sich der Programmierer an wenige Regeln, entsteht ein sich selbst dokumentierender Quelltext, so dass Wartung und Pflege der Programme vereinfacht werden. Zudem ermöglicht die Modularisierung sowie die Unterscheidung in lokale und globale Objekte eine Entwicklung großer Projekte in arbeitsteiligen Gruppen.

Diese Eigenschaften, sowie wesentlich verbesserte PASCAL-Dialekte, tragen dazu bei, dass diese Sprache zunehmend als (semi-) professionelle Programmiersprache gilt. Die Verbesserungen der einzelnen Dialekte ohne Normung bzw Standard führt allerdings dazu, dass die erzeugten Programme kaum portabel sind.

### 1.8 PL/M

Für die Mikroprozessoren 8080/85 und 8088/8086 sowie für die Controll-Familie 8051 wurde die Sprache PL/M (Programming Language for Microprocessors) aus der älteren Sprache PL/1 entwickelt. Diese erlaubt eine strukturierte Programmierung in

Modulen, die separat übersetzt und später gebunden werden können. Für zeitkritische Aufgaben können auch Programmteile in Assembler eingefügt werden. Die Nutzung dieser Sprache setzt allerdings gute Kenntnisse des Zielprozessor-Systems voraus, so dass die Anwender im professionellen Bereich zu finden sind.

## 2 Grundlagen der Programmierung

Die Aufgabe beim Programmieren besteht darin, eine Befehlsfolge (Programm) für ein bestimmtes Prozessorsystem in dessen Speicher zu schreiben, so dass es vom Prozessor ausgeführt werden kann.

Da der Prozessor nur binäre Befehle verstehen und verarbeiten kann, der Mensch wiederum lieber mit einer ihm vertrauten Sprache umgeht, wird das Programm möglichst in einer höheren Programmiersprache verfasst und dann in die maschinenübliche, binäre Form übersetzt. Die lästige, syntaktische Strenge der meisten Programmiersprachen wird nun zu einem Vorteil, weil diese Arbeit des Übersetzens durch einen Computer mit einem entsprechenden Übersetzungsprogramm ausgeführt werden kann.

### 2.1 Interpreter

Wie der Name ausdrückt, deutet (übersetzt) ein Interpreter das ihm zur Verfügung stehende Quellprogramm Anweisung für Anweisung, *während* das zu übersetzende Programm abläuft. Dieses Verfahren bedingt, dass sich der Interpreter *und* das zu übersetzende Programm immer gleichzeitig im Speicher befinden müssen, wenn das Programm ablaufen soll. Weiterhin wird jede Anweisung bei jedem Programmdurchlauf erneut gedeutet (übersetzt), wodurch sich zu den Programmablaufzeiten auch noch die Übersetzungszeiten addieren.

Der größte Nachteil liegt somit in der großen Ausführungszeit der damit laufenden Programme. Da auch Leerstellen, lange Bezeichner und (teilweise) erklärende Kommentare die Laufzeit verlängern, verzichten viele Programmierer auf eine übersichtliche Programmierung zugunsten der Geschwindigkeit. Die Folge sind komplizierte, weil optimierte Programme, die kaum gewartet werden können.

Ein Vorteil liegt in der Möglichkeit, relativ kleine und damit begrenzt leistungsfähige Interpreter einzusetzen. Diese Interpreter liefern aufgrund ihrer engen Zweckbestimmung (z. B. Mess-, Steuer- und Regelaufgaben) einen beachtlichen Befehlsvorrat und sind so klein, dass sie im Masken-ROM eines Controllers Platz finden.

### 2.2 Compiler

Ein Compiler (Übersetzer) ist ein Programm, das ein Quellprogramm komplett übersetzt und dann *anschließend* bei Bedarf ablaufen lässt. Bei der Übersetzung werden die Kommentare zwar gelesen, aber

nicht bearbeitet; ebenso erzeugt ein langer Variablenname (oder ein beliebiger Bezeichner) genau den gleichen Verweis auf einen Speicherplatz wie ein kurzer Name, so dass die Übersetzungszeit zwar ansteigt, nicht aber die Laufzeit.

Als weiterer Vorteil verbleibt die gute Selbstdokumentation eines solchen, mit aussagefähigen Variablennamen geschriebenen Quellprogrammes, das auch durch die reichliche Verwendung von Leerzeilen und Zeichen zur Verbesserung der Übersicht nicht langsamer ausgeführt wird.

Das so erzeugte, lauffähige Programm kann später ohne Anwesenheit des Compilers gestartet werden. Diese Eigenschaft macht die erzeugten Programme kommerziell nutzbar, weil das erzeugte Programm (im Gegensatz zum Compiler oder Interpreter) geistiges Eigentum des Programmierers ist und somit nicht unter den Urheberrechtsschutz des Compiler-Lieferanten fällt.

### 2.3 Editor

Der Editor ist ein Programm, das dem Schreiben des Quellprogrammes dient. Im Grunde ist dazu jedes Textverarbeitungsprogramm, das den geschriebenen Text (Quellprogramm oder Quelltext) in unformatierter Form abspeichern kann, geeignet. Unformatiert bedeutet hier ohne Textmerkmale wie fett, unterstrichen oder ähnlichen, z.B. für die Korrespondenz wichtigen Eigenschaften.

Der Quelltext muss im reinen ASCII-Format vorliegen, damit der Interpreter, Compiler oder Assembler ihn verarbeiten können. Gleichzeitig bieten die Editoren großer, kommerzieller Textverarbeitungen vielfältige Annehmlichkeiten:

- Blockbefehle (suchen, verschieben, kopieren, löschen ...)
- komfortable Dateiverwaltung
- Arbeit mit mehreren Dateien gleichzeitig (Fenster-Technik)

### 2.4 Integrierte Entwicklungsumgebung

Unter einer integrierten Entwicklungsumgebung versteht man ein Programmpaket, das alle Hilfsprogramme enthält, die zur Programmerstellung gebraucht werden: Editor, Interpreter oder Compiler, Linker und Debugger. Diese Hilfsprogramme werden dann je nach geforderter Aktivität menügesteuert aufgerufen.

Häufig gehört auch ein umfassendes Hilfesystem dazu, das Syntaxfehler erkennt und Abhilfe vorschlägt. Diese Entwicklungsumgebungen, die für die meisten höheren Programmiersprachen verfügbar sind, beschleunigen die Programmerstellung enorm, weil die Zeit für einen Durchlauf – Quelltext erstellen und Programm testen – (Turn-Around-Time) drastisch verkürzt wird.

## 2.5 Methoden der Programmentwicklung

Obwohl es theoretisch unendlich viele Wege zum Programm gibt, haben sich die Top-Down- und die Bottom-Up-Methoden etabliert, die es erlauben, den Weg nach ausgesuchten Kriterien zu optimieren. Eine exakte *Problembeschreibung* setzen allerdings beide Methoden voraus. Die Bearbeitung sehr großer Software-Projekte setzt weitergehende Verfahren voraus (Software-Engineering). Dazu gehört vor allem die Planung der zeitlichen Abhängigkeiten verschiedener Arbeitsteams (Netzplantechnik).

## 2.6 Problembeschreibung

Der Abnehmer eines Programmes sollte vom Programmierer (-team) dazu gedrängt werden, eine schriftliche Beschreibung der erwarteten Leistungen des Programmes anzufertigen. Diese Beschreibung kann oder sollte gemeinsam mit dem Fachmann (Programmierer) erstellt werden, um überzeugene, vom System nicht erfüllbare Anforderungen sofort auszuschließen oder ein anderes Zielsystem einzuplanen. Diese Beschreibung, auch Pflichtenheft genannt, sollte u.a. enthalten:

- erwartete Ausgangsinformationen des Systems (eventuell grafisch; Farbdarstellung/Monochrom?)
- benötigte Eingangsdaten (Datei-Formate; Tastatur; Maus; Sensoren ...)
- Vorkenntnisse der Benutzergruppe (Online-Hilfesystem; Handbuch für Benutzer?)
- gemeinsamer Datenzugriff mehrerer Benutzer? (Konsistenz des Datenbestandes, Vermeidung unvollständiger Transaktionen)

Eine große Sorgfalt im frühen Planungsstadium zahlt sich durch eine geringe Änderungswahrscheinlichkeit im Laufe der Arbeit aus.

## 2.7 Top-Down-Methode

Unter Anwendung der Top-Down-Methode wird das Problem zu Beginn global, also in seiner Gesamtheit

beschrieben. Dieses Gesamtproblem wird dann hierarchisch immer weiter aufgeteilt in Teilprobleme, bis diese zu lösbarer Aufgaben werden.

Nach Bearbeitung der ersten, globalen Ebene stehen die beiden Teilprobleme exakt beschrieben fest. Je nach Umfang sollte auch hier die Problembeschreibung, jetzt für die zweite Ebene, detailliert und schriftlich erfolgen. Wird die Arbeit an den Teilproblemen verschiedenen Arbeitsgruppen übertragen, sind diese Beschreibungen verbindliche Abgrenzungen zu den anderen Teilproblemen.

Auf der niedrigsten Stufe der Hierarchisierung werden sämtliche Aufgaben bearbeitet und die Ergebnisse entsprechend zu den höheren Ebenen zurückgeleitet. Bis auf die unvermeidbare Fehlersuche ist das Programm damit fertig, denn der obige Hierarchisierungsplan liefert gleichzeitig das Rahmen- oder Hauptprogramm nebst Dokumentation.

## 2.8 Bottom-Up-Methode

Auch bei der Bottom-Up-Methode wird das Gesamtproblem in einem Pflichtenheft beschrieben. Der daran anschließende Lösungsweg beginnt nun aber auf der niedrigsten, der Aufgabenebene. Zu dem Beispiel in Abbildung würde das bedeuten, je nach Interessenlage oder Vorkenntnissen des Programmierers stehen etliche, mögliche Aufgaben zur Bearbeitung an. Er könnte mit einer Sammlung in Frage kommender Formeln der komplexen Rechnung beginnen bzw. bei mangelnden Kenntnissen, sich in diese einarbeiten. Nachdem alle für notwendig erachteten Aufgaben erledigt sind, werden sie in einem übergeordneten Rahmen (-Programm) zusammengefasst, bis das Gesamtproblem gelöst ist.

## 2.9 Bewertung der Methoden

Die Top-Down-Methode entspricht in ihrer Struktur am ehesten der Struktur effizienter, menschlicher Handlungsweise und verspricht daher ein zielgerichtetes, von unnötigen Seitenwegen freies Vorgehen.

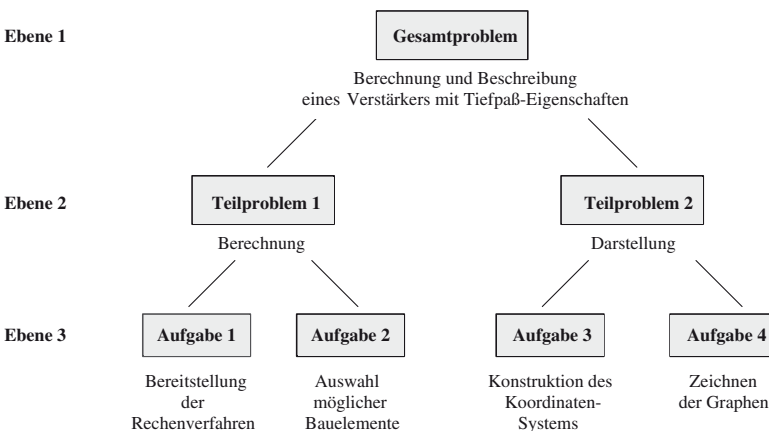


Bild V-1 TOP-DOWN-Methode



Damit wird gleichzeitig eine geringe Fehlerwahrscheinlichkeit sowie eine gute Selbstdokumentation erzielt.

Die Gefahr dieser Methode liegt darin, „das Rad ständig neu“ zu erfinden: auf der letzten, der Aufgaben-Ebene werden Programmteile (Module) geschrieben, die die geforderte Aufgabe möglichst genau erledigen. Das führt zwangsläufig zu einer geringen Wiederverwertbarkeit der Module und schließt zudem die Verwendung bereits vorhandener, ähnlicher Module aus.

Die Bottom-Up-Methode empfiehlt sich ausschließlich für kleinste Programmiervorhaben, denn die Gefahr, sich in Detaillösungen zu verirren, ist sehr groß. Zusätzlich besteht die Wahrscheinlichkeit, dass ergänzende Anforderungen einer der höheren Hierarchisierungsebenen an die (fertigen) Module von diesen dann nicht erfüllt werden können; dies führt häufig zur völligen Neukonzeption einiger Module.

Erschwerend kommt die nachträgliche Dokumentation des Vorhabens hinzu. Da diese erst am Ende des dann fertigen Programmes erfolgen kann, steht die Dokumentation zwangsläufig nicht als Strukturierungshilfe während der Arbeit zur Verfügung; strukturelle Schwächen des Programmes sind so unvermeidbar.

Als „Königsweg“ bietet sich die Top-Down-Methode unter Beachtung folgender Bedingungen an:

- 1) frühzeitig, auf höchstmöglicher Ebene, wird bereits geprüft, ob es für die zu lösenden Teilprobleme/ Aufgaben Standard-Lösungen (Module) gibt, bzw. ob es sich lohnt ein vorhandenes anzupassen
- 2) muss ein Modul vollständig neu geschrieben werden, ist auf gute Wiederverwertbarkeit zu achten; daraus folgt, dass Module, die nicht wiederverwertbar sind, so klein wie möglich sein sollten (Verweis auf Modularisierung/Bibliotheken)

## 2.10 Programm-Test

Hiermit ist die Prüfung eines Programmes auf logische Fehler gemeint, denn die syntaktischen Fehler (Fehler in der Schreibweise, Verletzung von Konventionen) werden bereits vom Interpreter oder Compiler erkannt.

Fehlerfreie Programme gibt es nicht! Denn Fehlerfreiheit bedeutet nicht nur, dass aus der Anweisung  $A := 12 / B$  das Ergebnis „3“ resultiert, wenn die

Variable B augenblicklich den Wert 4 besitzt. Darin eingeschlossen ist die Erwartung, dass das Programm nicht einfach die Bearbeitung abbricht, falls „B“ den Wert Null annehmen sollte, sondern den Benutzer darüber informiert, dass dieser Fall eingetreten ist. Noch besser wäre es, wenn der Benutzer dann unter Alternativen wählen könnte, wie das Programm damit umgehen soll.

Ein Instrument zur Fehlererkennung ist der Bleistifttest: alle vorkommenden Variablen werden in einer Tabelle aufgeführt und das Modul mit extremen Werten für die Eingangswerte „auf dem Papier“ gestartet. Alle Änderungen der Variablen werden in der Tabelle festgehalten und geben so ein Bild über die Zulässigkeit und den Erfolg der einzelnen Befehle des Programmes.

Weiterhin existiert bei der Top-Down-Methode bereits ein Rahmenprogramm (Hauptprogramm), wenn die Module getestet werden sollen. Diesem Rahmenprogramm werden die oben genannten extremen Eingangswerte für die zu testenden Module übergeben und das Hauptprogramm mit den Modulen gestartet. Noch nicht fertige Module können in ihrem Ein- und Ausgabeverhalten durch kleine Simulationsmodule ersetzt werden, um das Hauptprogramm lauffähig zu machen.

Zeigen sich dabei Unregelmäßigkeiten, bieten die Entwicklungsumgebungen die Möglichkeit, den vorliegenden Quelltext des Modules schrittweise abzuarbeiten und dabei die aktuellen Werte der Variablen in einer Tabelle auf dem Bildschirm zu verfolgen.

Die Simulation von Programmen ist ein Verfahren, das bei der Software-Entwicklung für Mikroprozessoren und Controllern angewandt wird. Hier wird das Programm ja nicht auf dem Zielsystem (z.B. Controller), sondern auf einem PC entwickelt. Um die so erstellten Programme dennoch auf dem PC testen zu können, bieten viele derartige Entwicklungsumgebungen eine Simulation auf dem Entwicklungsrechner an.

Ungefähr die Hälfte der vorhandenen Fehler können so vom Programmierer selbst entdeckt und behoben werden. Weitere Fehler können durch andere (objektive) Mitglieder des Entwicklungsteams gefunden werden und ca. 10% der Fehler bleiben unerkannt.

# VI Datenkommunikation

## 1 Einführung

Eine Datenverarbeitungsanlage (DVA) arbeitet nach dem Prinzip *Eingabe – Verarbeitung – Ausgabe*. Eine isoliert arbeitende DVA, ein „System“, kann nur die Daten verarbeiten, auf die sie lokal zugreifen kann. Viele Aufgabenstellungen machen es wünschenswert oder sogar zwingend erforderlich, Daten zwischen

Systemen auszutauschen; oder aber die Vernetzung der Systeme erlaubt neue Funktionalitäten, mehr Effektivität, mehr Produktivität – oft bei gleichzeitiger Kostensenkung. Mit *System* ist hier nicht nur ein Großrechner oder ein PC gemeint, auch Produktionsmaschinen oder Roboter in der Industrie, ein Mikrocontroller zur Steuerung eines Außenspiegels am Pkw ist in diesem Sinn ein System.

## 1.1 Warum Datenkommunikation?

Ohne triftigen Grund wird keine neue Technologie eingeführt. Erst wenn deutliche Vorteile sichtbar sind, erfolgt der Schwenk in die neue Richtung. Die Vernetzung von eigenständigen Systemen bietet diese Vorteile:

- **Kostensenkung:**
  - durch höhere Effektivität:  
*schnelle und preiswerte Kommunikation über E-Mail und Voice-over-IP (VoIP); gemeinsamer Zugriff auf Projektdaten, ...*
  - durch Automatisierung von Produktionsabläufen:  
*Vernetzung von der Unternehmensleitungsebene bis zum Produktionsprozess; Fernwartung und Fernsteuerung von Produktionsanlagen, ...*
  - durch Rationalisierungen:  
*E-Banking, E-Shopping; B2B, Business-to-Business-Systeme („Elektronischer Einkauf“) ...*
- **Datenverbund:**
  - Zugriff auf räumlich verteilte Daten einmal erfasste Daten sind netzweit verfügbar
  - Sicherung der Datenkonsistenz und Aktualität:  
*aktuelle Projektdaten sind überall verfügbar; Flugreservierungen sind weltweit möglich ...*
- **Funktionsverbund:**
  - Zugriff auf spezielle Funktionen im Netz: *Großrechner, Datenbanken...*
  - keine räumlichen Einschränkungen für den Arbeitsplatz: *Teleworking, ...*
- **Verfügbarkeitsverbund:**
  - redundante und fehlertolerante Systeme: hohe Zuverlässigkeit für sicherheitskritische oder unternehmenskritische Anwendungen  
*Ampelsteuerung ... Autopilot; redundante Firmen-Server*
- **Lastverbund:**
  - jede Maschine kann jede Aufgabe bearbeiten
  - kürzere mittlere Antwortzeiten durch gleichmäßige Verteilung der Rechenlast auf alle Maschinen
  - Bereitstellen skalierbarer (leicht erweiterbarer) Rechnerleistung für viele Nutzer:  
*„Server-Farmen“ für WWW-Server, Datenbankserver (z. B. bei Google ...)*
- **Leistungsverbund:**
  - Parallelrechner: die Aufgabe wird aufgeteilt auf verschiedene Maschinen und dann parallel (zeitgleich) von allen Maschinen bearbeitet (*falls die Aufgabe auch parallelisierbar ist!*): z.B. *Wettervorhersage, Erstellen von Computeranimationsfilmen*

Diesen Vorteilen stehen leider auch einige Nachteile gegenüber:

- **Abhängigkeit vom Netzwerk:**
  - bei Abhängigkeit von der Netzwerkverbindung geht ohne das Netz nichts mehr ...
- **Gefahr durch Angriffe über das Netz:**
  - mögliche Angriffe: Datendiebstahl, Spionage, Sabotage:  
*durch Computer-Viren, Würmer, Trojaner, Hacker; „Denial-of-Service-Angriffe“: können das System zum Stillstand oder zum Absturz bringen (PC, Firmen-Server, Produktionsanlagen, Infrastruktur, z.B. Stromnetze ...)*
- Bezieht man das Internet und Menschen mit ein in die Datenkommunikation, so können gerade hier noch weitere gravierende Nachteile auftreten:
- **Rationalisierungen:**
  - Personalabbau besonders in kundennahen Bereichen wie E-Banking, E-Shopping
- **Datenabgleich und Überwachung:**
  - einfache elektronische Überwachung
  - Tendenz zur Aufhebung der Trennung von Privatsphäre und betrieblichen Interessen  
*z.B. beobachten der Internet-Nutzer durch Cookies; Personen-Recherche im Internet vor Einstellung (Achtung: das „Netz“ vergisst nichts, seien Sie vorsichtig mit dem, was Sie dort von sich eintragen...)*
- **soziale Auswirkungen:**
  - Heimarbeit
  - Outsourcing
  - „Internet-Sucht“

## 1.2 Geschichte der Datenkommunikation

### • Batch-Betrieb

In den 60er-Jahren war der Batch-Betrieb mit Operateuren für die Rechnerbedienung Standard in der Datenverarbeitung. Die Programmeingabe erfolgte typischer Weise über Lochkarten, die Ergebnisse kamen auf einem Zeilendrucker aus der Maschine. Vereinzelt gab es Prozessrechner, z.B. in der Chemie. Eine Datenkommunikation zwischen den DV-Anlagen fand nicht statt.

### • Zentralrechner

In den 70er Jahren ging die Entwicklung hin zu Zentralrechnern („Mainframe“, Großrechner) mit Time-Sharing-Betrieb und Dialogterminals. Die Terminals standen immer weiter entfernt vom „Rechnerraum“ in den „Terminalräumen“ oder direkt am Arbeitsplatz des Sachbearbeiters, z.B. in Banken und Reisebüros.

Die erforderliche Datenkommunikation zwischen Rechner und Terminal erfolgte meist über analoge Leitungen, wobei jeder Hersteller seine eigene Technik einsetzte. Die Terminalnetze verschiedener Hersteller waren inkompatibel zueinander, manchmal



sogar die neuen Varianten zu den älteren desselben Herstellers. Bekannte Standards waren:

- SNA (System Network Architecture, IBM)
- DECNET (DEC)
- TRANSDATA (Siemens)

#### • der PC

1971 war mit dem Intel 4004 der erste Mikroprozessor verfügbar; 1978 erschienen dann der Intel 8086 und gleichzeitig der IBM PC, der auf der Basis der 8086-Architektur das Konzept eines kompakten, *Persönlichen Computers* („PC“) realisierte. Der PC hatte genügend Rechenleistung, um sowohl autark zu arbeiten als auch Datenkommunikation betreiben zu können.

#### • Vernetzung

Die Leistungsfähigkeit der PCs wuchs mit jedem neuen Mikroprozessor extrem schnell. Anfangs wurden PCs nur isoliert als Einzelplatzrechner betrieben. Aber bald erkannte man, dass vernetzte PCs eine viel preiswertere Alternative zu Zentralrechner sind – solange die zu verarbeitenden Datenmengen klein genug sind. Hieraus ergab sich ein wirtschaftlicher Druck zur standardisierten Vernetzung aller Rechner.

#### • Internet

Das Internet entstand ursprünglich aus einer Initiative der US-Regierung über ein Forschungsprojekt zur Realisierung eines ausfallsicheren kontinentalen Netzwerkes. 1969 startete es mit vier Rechnerknoten. In der Folgezeit schlossen sich erst immer mehr Universitäten, dann auch Forschungseinrichtungen und andere Einrichtungen an. Heute besteht das Internet aus einem Zusammenschluss von vielen Netzwerken verschiedener Institutionen und Provider, die einen Internetanschluss auch für Privatkunden bereitstellen.

Grundlage des Internets ist seit 1983 das Protokoll TCP/IP Version 4 (IPv4), das nur sehr zögerlich von der verbesserten Version 6 (IPv6) abgelöst wird. TCP/IP ist zurzeit der De-facto-Marktstandard: es steht kostengünstig für alle wichtigen Rechnertypen zur Verfügung!

## 2 Computernetzwerke

Ein Computernetzwerk besteht aus mehreren unabhängigen Computern, die über ein Netzwerk verbunden sind. Man unterscheidet Server und Clients:

- ein **Server** stellt im Netzwerk einen Dienst bereit, den
- ein **Client** über das Netzwerk in Anspruch nehmen kann.

Je nach Organisation der Stationen im Netz unterscheidet man Peer-to-Peer-Netze („P2P“) und Client/Server-Netze („C/S“).

### 2.1 Peer-to-Peer-Netz

In einem Peer-to-Peer-Netz (P2P-Netz) sind alle Stationen gleichberechtigt: jede Station kann gleichzeitig Client und Server sein. Jede Station dient primär als Arbeitsplatzrechner. Der Aufbau des Netzes ist einfach: es müssen nur alle Stationen miteinander verbunden werden; es ist kein spezieller Server notwendig. Nachteilig ist der hohe Wartungsaufwand durch die **dezentrale Verwaltung**, da in jeder Station alle Rechte für alle anderen Stationen verwaltet werden müssen. Daher sind P2P-Netze nur in sehr kleinen Netzen bis etwa zehn Stationen sinnvoll, z.B. in kleinen Büros. Ein typischer Vertreter der P2P-Netze war Windows für Workgroups.

### 2.2 Client/Server-Netz

In einem Client/Server-Netz sind die Aufgaben klar getrennt:

- der/die Server stellen zentrale Dienste bereit
- die Clients rufen die Dienste ab.

Mit „Server“ bezeichnet man meist einen besonders leistungsfähigen und betriebssicheren Rechner; oder aber das Programm, das einen Server-Dienst realisiert. Es gibt eine Vielzahl von möglichen Server-Diensten, z.B.

- WWW-Server: stellt Webseiten ins Netz
- Datenbank-Server
- File-Server: zentraler Datenspeicher
- Druck-Server: zentrales Drucken
- DNS-Server: Domain Name Service
- Mail-Server: für E-Mails
- Authentifikations-Server (Anmelde-Server)
- ...

Wenn ein Server hinreichend leistungsstark ist und die Datenverarbeitung für die Clients mit übernimmt, muss der Client nur noch die Ergebnisse anzeigen. Dafür reicht dann auch ein „Thin Client“, ein leistungsschwächerer und entsprechend preiswerter Rechner. Hiermit nähert man sich wieder der Struktur mit Zentralrechner von früher.

## 3 Einteilung von Netzwerken

Netzwerke lassen sich nach räumlicher Ausdehnung oder Dienstart in Kategorien einteilen:

### 3.1 Ausdehnung

#### GAN

Weltweite Netze bezeichnet man als **GAN**, **Global Area Network**. Typische Verbindungen erfolgt über Satellit mit z.B.  $n \times 36 \text{ MBit/s}$  ( $n$  = Anzahl der Kanäle) oder über Glasfasern mit typisch  $n \times 10 \text{ GBit/s}$ .

#### WAN

Im Bereich um 1000 km spricht man vom **WAN**, **Wide Area Network**. Der Datentransport erfolgt per

Telefon, Datex-P, ISDN (9,6 bis 64 kBit/s) oder über Glasfasern (100 MBit/s ... 10 GBit/s).

### MAN

Ein **MAN**, **Metropolitan Area Network**, umfasst etwa den Bereich einer großen Stadt (100 km). Typische Verbindungen sind als Glasfaserstrecke mit Datenraten von 100 ... 10.000 MBit/s ausgelegt (FDDI, Fibre Distributed Data Interface, 100 MBit/s; ATM, Asynchronous Transfer Mode, 622 MBit/s, GE, Gigabit Ethernet, 1000 MBit/s).

### LAN

Netzwerke bis etwa 10 km Ausdehnung bezeichnet man als **LAN**, **Local Area Network**. Auf kurzen Entfernungen dominieren verdrehte Kupferkabel (Twisted-Pair-Kabel, TP-Kabel) in Haus und Büro bis 100 m (CAT-5-Kabel: 100 MBit/s bis 100 m; CAT-7 S/FTP-Kabel: 10 GBit/s bis 100 m). Auch größere Entfernungen sind mit TP-Kabeln möglich (DSL: 3 km mit 1 MBit/s); interessant sind aber die bereits verlegten Kabel-TV-Netze, die technisch Bandbreiten von 800 MBit/s und mehr bieten können. Für hohe Datenraten setzt man Glasfasern oder Kunststofffasern ein; diese bieten gleichzeitig eine galvanische Trennung.

## 3.2 Dienstarten und Verbindungen

Man unterscheidet verbindungsorientierte und verbindungslose Dienste, Punkt-zu-Punkt-Kanäle und Rundsendekanäle.

### 3.2.1 Verbindungsorientierter Dienst

Ein verbindungsorientierter Dienst liefert einen zuverlässigen Nachrichtenstrom (z.B. *Dokumente zum Drucker*), einen zuverlässigen Bytestrom (z.B. *Sitzung am Remote Terminal*) oder auch nur eine unzuverlässige Verbindung bei minimaler Verzögerung (z.B. *VoIP*, „Internet-Telefonie“).

### 3.2.2 Kanalvermittlung

Die Kanalvermittlung (Bild VI-1) erstellt eine feste Leitung für die Dauer der Vermittlung, einen „Tunnel“ durch das Netz. Dazu ist ein Auf- und Abbau der Verbindung erforderlich.

Die Daten fließen nach dem **FIFO-Prinzip** (First In, First Out) durch das Netz. So bleibt die Reihenfolge der Pakete erhalten.

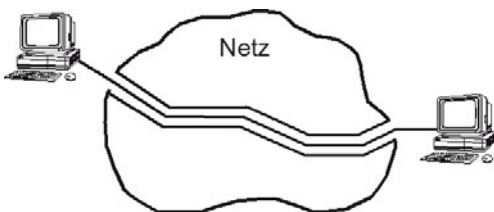


**Bild VI-1** Kanalvermittlung

Beispiele:

- Telefon: feste physikalische Verbindung (früher) oder virtuelle Verbindung (heute)
- ATM, TCP: feste virtuelle Verbindung

### 3.2.3 Verbindungsloser Dienst

Ein verbindungsloser Dienst (Bild VI-2) benutzt eine Paketvermittlung: Pakete werden an das Netz übergeben und im Netz „irgendwie“ von Knoten zu Knoten weitergereicht; jeder Knoten ist bei der Weiterleitung autark. Im Internet sind die Knoten als IP-Router realisiert

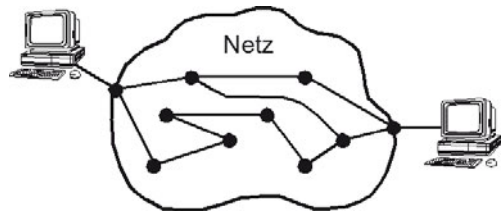


**Bild VI-2** Verbindungsloser Dienst

Es ist kein Auf- oder Abbau der Verbindung erforderlich, der Datendurchsatz ist maximal; allerdings können Pakete sich überholen und in falscher Reihenfolge am Ziel ankommen. Beispiele:

- Briefpost
- IP, Internet Protokoll
- UDP, User Data Protocol

### 3.2.4 Punkt-zu-Punkt-Kanäle

Je zwei Netzknoten sind mit einer Leitung verbunden, Bild VI-3. Die Netzknoten reichen die Nachricht weiter, bis sie am Ziel ist.

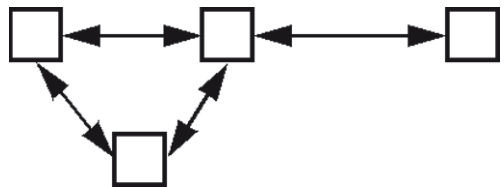


**Bild VI-3** Punkt-zu-Punkt-Kanäle

Da alle Netzknoten gleichzeitig senden können, ist der Gesamtdurchsatz des Netzes maximal. Die Verbindungen werden als TP-Kabel oder als Glasfaser ausgeführt; seltener auch als Funkstrecke.

### 3.2.5 Rundsendekanäle

Alle Netzknoten hören auf einem gemeinsamen Medium alle Nachrichten mit und ignorieren die nicht an sie selbst gerichteten, Bild VI-4.

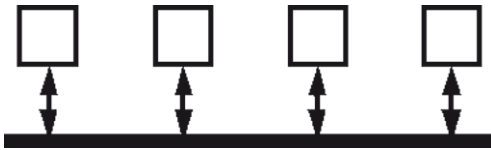


Bild VI-4 Rundsendekanäle

Die Verzögerungszeit je Nachricht ist minimal; für Rundsendungen (**Broadcasts**, ein Sender und viele Empfänger) ist diese Struktur ideal; bei hoher Datenlast wird der Kanal jedoch zum Flaschenhals. Ethernet (speziell mit Koax-Kabeln: 10Base5, 10Base2; veraltet) arbeitete nach diesem Prinzip; ebenso aktuell viele Funknetze.

### 3.3 Basisband – Breitband

Bei der **Basisbandübertragung** (Bild VI-5) gehen die Digitalsignale direkt ins Kabel und belegen den Frequenzbereich von der Frequenz null bis zur System-Bandbreite  $B$ .

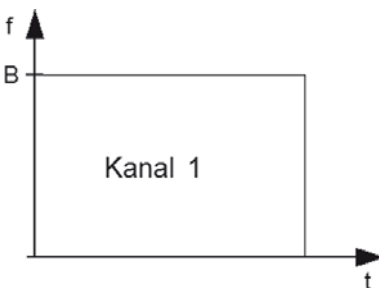


Bild VI-5 Basisbandübertragung

Die Schnittstellen sind preiswert, das Netz ist einfach und billig zu installieren und zu warten. Das Medium ist bidirektional verwendbar, die Datenraten reichen bis 10 GBit/s bei 100 m oder 10 MBit/s bei 1 km (Kupfer-Kabel). Die Basisbandübertragung ist sehr verbreitet, viele Standards bauen darauf auf: V.24, USB, Ethernet ...

Bei der **Breitbandübertragung** (Bild VI-6) ist die gesamte Bandbreite des Mediums aufgeteilt in mehrere Frequenzbänder mit einer Kanalbreite von z.B. 8 MHz; dies entspricht einem Fernsehkanal. Die Datenrate beträgt typisch 50 MBit/s (je 8 MHz-Kanal).

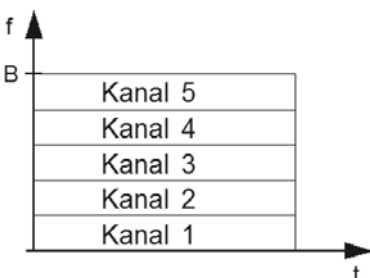


Bild VI-6 Breitbandübertragung

Typische Satellitenkommunikationskanäle haben eine Bandbreite von 36 MBit/s und können damit ca. 500 PCM-Kanäle mit 64 kBit/s gleichzeitig übertragen.

In Kabelfernsehtzen (Standard DOCSIS 3, Data over Cable Service Interface Specification) erreicht man bei Zusammenlegen von z.B. 16 Kanälen eine Bandbreite von 800 MBit/s (Downstream), die sich alle Teilnehmer in einem Netzwerksegment teilen müssen. Die Übertragung erfolgt über analoge Verstärker mit der vorhandenen Kabelfernsehtnetz-Infrastruktur. Da das Kabelfernsehtnetz ursprünglich nur unidirektionalen Datentransport zulässt, müssen für den Rückkanal (Upstream) entweder ein zweites Medium (z.B. Telefon; selten) oder ein zweiter Frequenzbereich bereitgestellt werden (DOCSIS 3: VHF-Kanäle 2,3 und 4); dies setzt „Rückkanalfähige“ Komponenten voraus (z.B. Hausanschlussverstärker).

### 3.4 FDM – DWDM – TDM

Das Frequenzmultiplexverfahren **FDM (Frequency Division Multiplexing)** teilt jeder Station ein Frequenzband zu. Bei wenigen Stationen erfolgt eine statische Vergabe der Frequenzbänder. Es handelt sich um die analoge Technik der Breitbandübertragung, siehe oben.

Das Wellenlängenmultiplexverfahren **DWDM (Dense Wavelength Division Multiplexing)** ist die optische Variante von FDM. Da die Bandbreite der elektrischen Sender und Empfänger begrenzt ist, koppelt man mehrere Strahlen mit leicht unterschiedlichen Wellenlängen über ein Gitter oder ein Prisma in die Glasfaser ein, Bild VI-7.

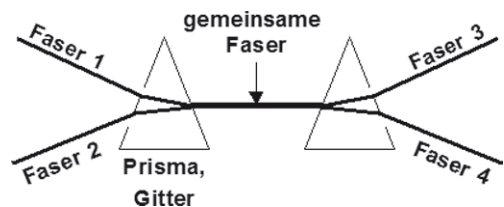


Bild VI-7 Wellenlängenmultiplexverfahren

DWDM-Systeme mit 160 Wellenlängen à 10 GBit pro Sekunde sind bereits verfügbar; die Übertragungskapazität einer einzelnen (!) Glasfaser liegt damit im Bereich Terabit pro Sekunde (TBit/s). Systeme mit mehr als der zehnfachen Kapazität sind ebenfalls im Labor machbar, werden zurzeit aber (noch?) nicht benötigt.

Das Zeitmultiplexverfahren **TDM (Time Division Multiplexing)** verschachtelt die verschiedenen Kanäle zeitlich hintereinander, Bild VI-8. Jede Station erhält für einen Zeitintervall  $T$  die gesamte Bandbreite  $B$  des Übertragungskanals. Kritisch ist die Steuerung der Vergabe der Zeitfenster, hierin unterschei-

den sich die verschiedenen realisierten Verfahren ganz erheblich:

- ATM ist deterministisch, echtzeitfähig und kann QoS (Quality of Service) bieten
- Token-Ring-Netze sind ebenfalls berechenbar und gut geeignet auch für „harte“ Echtzeit
- CSMA/CD ist sehr einfach, bei wenig Netzlast auch schnell, aber weder deterministisch noch zuverlässig und nicht „hart“ echtzeitfähig
- EtherCAT teilt die Daten auf in Prozessdaten, die extrem zeitgenau versendet werden, und restliche Daten, die in der verbleibenden Zeit über das Netz geschickt werden

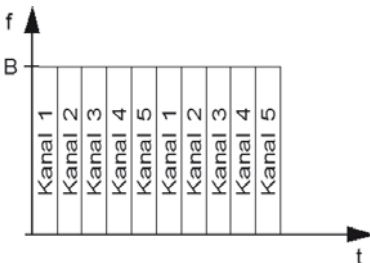


Bild VI-8 Zeitmultiplexverfahren

## 4 Netzwerk-Topologien

Zur Verkabelung des Netzwerkes können die verschiedensten Topologien angewandt werden: Stern, Bus, Ring, Baum, Vollverbindung oder Kombinationen davon.

### 4.1 Sternnetz

Im Sternnetz (Bild VI-9) hat die Zentrale Punkt-zu-Punkt-Verbindung zu allen Stationen. Der Datenaustausch erfolgt nur über die Zentrale.

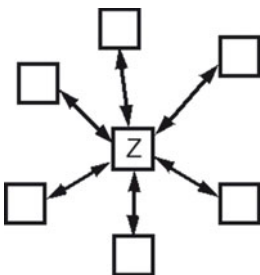


Bild VI-9  
Sternnetz

Die Vorteile sind:

- + sehr einfache Verkabelung
- + der Ausfall einer Station ist unkritisch

Die Nachteile sind:

- der Ausfall der Zentrale legt das Netz lahm
- der Verkabelungsaufwand ist mittel bis hoch.

Beispiele: Ethernet-LAN mit TP-Kabeln oder Glasfasern (10 ... 10.000 MBit/s)

Die Zentrale wurde früher als **„HUB“** („Multiport-Repeater“, Signalverstärker mit mehreren Ein- und Ausgängen) ausgeführt, Bild VI-10. Dies ist zwar sehr preiswert, hat aber den Nachteil, dass der Hub immer nur eine einzige Verbindung herstellen kann; was schnell zum Flaschenhals werden kann.

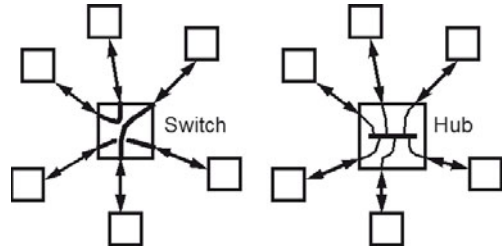


Bild VI-10 Hub und Switch im Sternnetz

Verbesserung bringt ein **„Switch“**, der als „Schalter“ nur genau die Leitungen durchschaltet, die für den Datentransport erforderlich sind und gegebenenfalls auch Datenpakete zwischenspeichern kann, falls eine Zielleitung gerade blockiert sein sollte („Store-and-Forward“). Durch das Schalten mehrerer paralleler Datenpfade wird der Flaschenhals im zentralen Knotenpunkt entschärft.

### 4.2 Busnetz

Im Busnetz (Bild VI-11) sind alle Stationen parallel an den Bus angeschlossen. Jede Station kann Daten direkt zu jeder anderen Station senden („Rundsendungen“). Das Medium für den Bus ist ein Koax-Kabel, TP-Kabel mit einem Hub oder Funk.

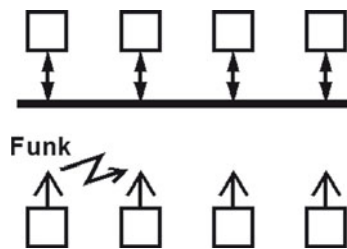


Bild VI-11  
Busnetz

Die Vorteile sind:

- + es können alle gleichzeitig hören
- + der Ausfall einer Station ist unkritisch
- + der Verkabelungsaufwand ist gering
- + kein Aufwand für Vermittlung

Die Nachteile sind:

- es ist nur eine Verbindung auf dem Bus möglich
- bei hoher Netzlast wird der Bus zum Flaschenhals
- die Fehlersuche im Bus ist schwierig
- der Bus ist leicht abzuhören
- ein Ausfall des Mediums legt das Netz lahm

### 4.3 Ringnetz

Alle Stationen sind ringförmig verbunden, Bild VI-12. Die Daten werden mit genau 1 Bit Verzögerung von Station zu Station weitergereicht. Die Vorteile sind:

- + geeignet für Echtzeitanwendungen
- + der Verkabelungsaufwand gering

Die Nachteile sind:

- die Übertragungsdauer steigt mit der Zahl der Stationen
- der Ausfall einer Station legt das Netz lahm.

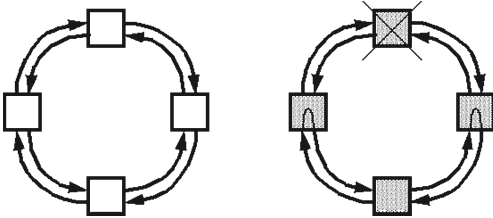


**Bild VI-12** Ringnetz

Im doppelten Ring wird der Ausfall einer Station durch Umkonfigurieren aufgefangen.

Beispiele:

- IBM Token Ring: 4/16 MBit/s
- FDDI: Fibre Distributed Data Interface 100 MBit/s
- HSTR: High Speed Token Ring 100/1000 MBit/s
- SERCOS III, EtherCAT: Ringnetzwerke zur schnellen Steuerung von Maschinen und Anlagen („Industrial Ethernet“)

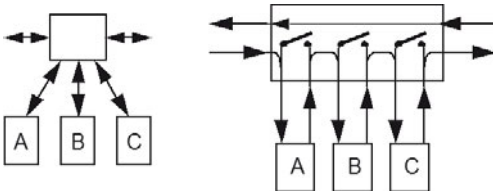


**Bild VI-13** Kabelkonzentratoren

Zur Überbrückung nicht aktiver Stationen hat die Firma IBM Kabelkonzentratoren eingeführt (Bild VI-13), die als Verteilerstationen am Ring hängen und extern eine einfache sternförmige Verkabelung erlauben. Der Kabelkonzentrator stellt dann intern die logische Ringstruktur her; nicht aktive Stationen kann er erkennen und überbrücken. Neue Entwicklungen (z.B.

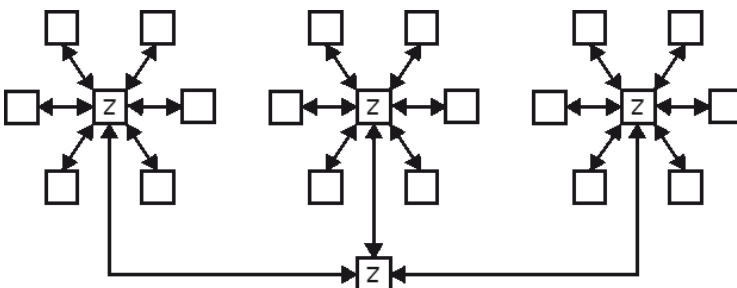


**Bild VI-16** Stern-Stern-Netz

EtherCAT) besitzen diese Funktionalität in jedem Netzwerkanchlussknoten.

### 4.4 Baumnetz

Im Baumnetz senden alle Stationen zur Kopfstation, diese verteilt die Nachrichten wieder im Netz (Bild VI-14). Dies Verfahren ist ideal zur Verwendung auf bestehenden Kabelfernsehtzen.

Beispiele: Kabelnetze; USB (*Universal Serial Bus*)

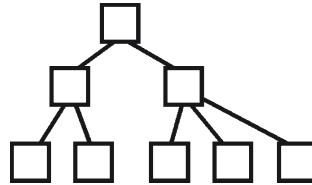


**Bild VI-14**  
Baumnetz

### 4.5 Vollverbindung

Bei einer Vollverbindung (Bild VI-15) ist jede Station direkt mit jeder anderen verbunden. Dies ergibt minimale Transportverzögerung und viele redundante Wege im Netz; jedoch auf Kosten eines maximalen Verkabelungsaufwandes.

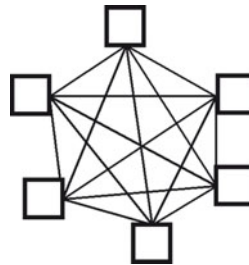


**Bild I-15**  
Vollverbindung

Beispiele: die Anfänge der Telefonnetze in den USA; redundante Verbindung einiger (z.B. 2 + 2) Router zur Verbesserung der Ausfallsicherheit.

### 4.6 Mischformen

#### 4.6.1 Stern-Stern-Netz

- ein Stern als Hauptverteiler (Bild VI-16)
- dazu ein Stern je Arbeitsgruppe
- oder ein Stern je Etage
- wenn der Hauptverteiler ausfällt, ist das Netz in der Etage noch funktionsfähig

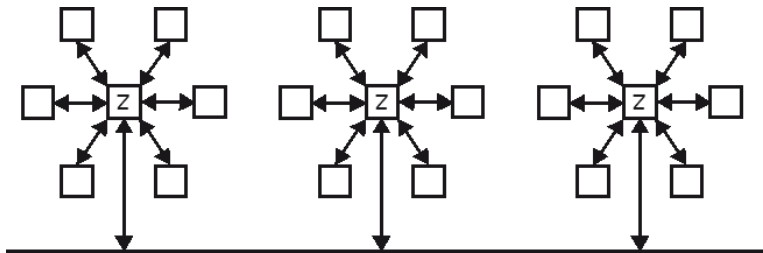


Bild VI-17  
Stern-Bus-Netz

4.6.2 Stern-Bus-Netz

- Bus als Hauptverteiler („Backbone“, Bild VI-17)
- sonst wie Stern-Stern-Netz

4.7 Sonderformen

4.7.1 Linien-Netz

- Sonderform eines Sternnetzes (Bild VI-18)
- Switch im Gerät eingebaut
- die Verbindung wird von Gerät zu Gerät weitergezogen
- Einsatz in der Automatisierungstechnik

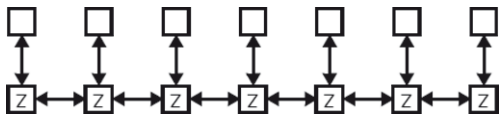


Bild VI-18 Linien-Netz

4.7.2 Ring-Netz

- Liniennetz mit einfacher Redundanz (Bild VI-19): Ausfall eines Kabels oder Switches ist unkritisch
- Switches müssen die Schleife erkennen, z.B. mit:
  - MRP: Media Redundancy Protocol
  - RSTP: Rapid Spanning Tree Protocol
- Einsatz in der Automatisierungstechnik

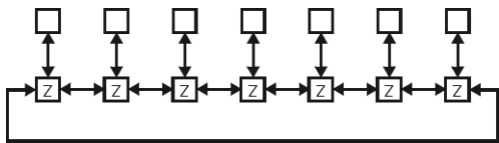


Bild VI-19 Ring-Netz

5 Das OSI-Referenzmodell

Das OSI-Referenzmodell (Bild VI-20) besteht aus sieben aufeinander aufbauenden Ebenen sowie der Schicht 0, dem Übertragungsmedium. Es unterscheidet Dienste, Schnittstellen und Protokolle und ist genormt in ISO 7498.

- Ein **Protokoll** ist eine logische Verbindung in einer Schicht: z.B. http, das *Hyper Text Transfer Protocol*, verbindet einen WWW-Client mit einem WWW-Server
- Ein **Dienst** stellt in einer Schicht eine definierte Menge von Funktionen bereit und bietet diese der nächst höheren Schicht an; IP bietet TCP an, Pakete durchs Netz zu transportieren
- Eine **Schnittstelle** liegt zwischen zwei Schichten und definiert Zahl und Art der Parameter und Ergebnisse für den Zugriff auf Dienste der tieferen Schicht

Im OSI-Modell erfüllt jede Schicht genau eine Funktion und kann dabei auf Dienste der unter ihr liegenden Schicht zugreifen; als Ergebnis stellt die Schicht Dienste für die nächst höhere Schicht bereit. Die Grenzen zwischen den Schichten sind so gewählt, dass der Informationsfluss über die Schnittstellen zwischen den Schichten möglichst gering ist. Nur auf derselben Schicht fließen Informationen vom Sender zum Empfänger und zurück. Art, Umfang und Inhalt der Informationen sind im Protokoll dieser Schicht festgelegt: jede Schicht hat also ihr eigenes Protokoll.

Das Protokoll stellt damit eine logische Verbindung zur gleichen Schicht in verschiedenen Stationen her: die Bitübertragungsschicht überträgt **Bits** entspre-

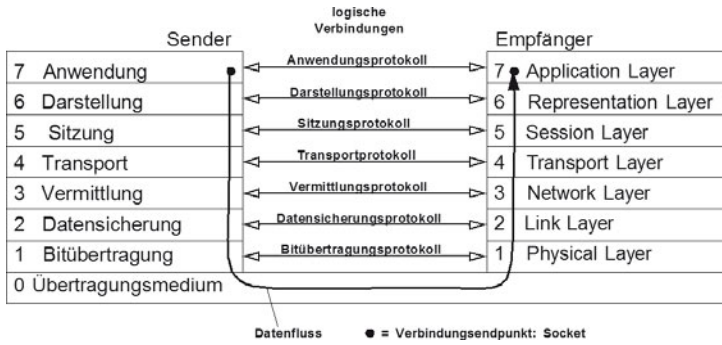


Bild VI-20  
OSI-Referenzmodell



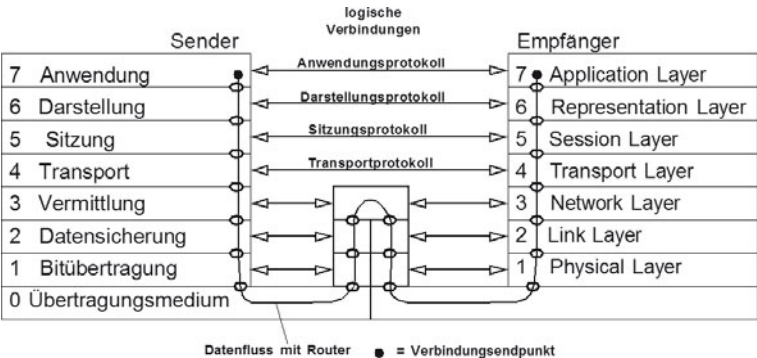


**Bild VI-21**  
Datenfluss mit Router

chend dem Bitübertragungsprotokoll; die Datensicherungsschicht überträgt **Datenrahmen** entsprechend dem Datensicherungsprotokoll, die Vermittlungsschicht überträgt **Datenpakete** entsprechend dem Vermittlungsprotokoll usw. Sind zwei Stationen nicht direkt über das Übertragungsmedium verbunden, sondern über eine Vermittlungsstelle, die auf Schicht 3 arbeitet (**Router**), so werden hier die Daten bis auf Schicht 3 hoch „ausgepackt“, entsprechend dem Vermittlungsprotokoll von Schicht 3 analysiert, wieder „eingepackt“ und zur Schicht 0 geschickt, wo sie dann zur Zielstation gelangen (Bild VI-21). Liegen mehrere Vermittlungsstationen zwischen Sender und Empfänger, so wiederholt sich der Vorgang entsprechend oft.

**5.1 Aufteilen langer Nachrichten**

Die mit einer Nachricht maximal übertragbaren Datenmengen sind je nach Schicht begrenzt. Zu lange Nachrichten werden in mehrere kleine aufgeteilt (Bild VI-22). Um die ursprüngliche Nachricht wieder korrekt zusammensetzen zu können, erhalten alle Teilnachrichten (Fragmente) Zusatzinformationen in einem

Nachrichtenkopf („Header“), der direkt vor der ursprünglichen Nachricht gesendet wird. Bei Bedarf kann jede Schicht einen eigenen Protokoll-Header zur Nachricht hinzufügen; dieser wird aber nur innerhalb derselben Schicht verwendet und im Empfänger ausgewertet. Bevor die Nachricht im Empfänger von einer Schicht „nach oben“ weitergereicht wird, wird der Header der Schicht entfernt. Die Datensicherungsschicht fügt neben dem Header auch noch eine Endanweisung („Trailer“) zur Nachricht hinzu; in ihr steht bei Ethernet die 32-Bit-CRC-Prüfsumme zur Fehlererkennung.

**5.2 Schicht 0: Übertragungsmedien**

**5.2.1 Koaxialkabel**

Koaxialkabel eignen sich ideal zum Aufbau von Busnetzen (Bild VI-23). Auch die ersten Ethernet-Netzwerke benutzten Koaxialkabel:

- 10base2: „Thinwire Ethernet“ oder „Cheapernet“, 10 MBit/s bis 185 m (1985), 5 mm Außendurchmesser
- 10base5: „Yellow Cable“, 10 MBit/s bis 500 m (1986), 12 mm Außendurchmesser

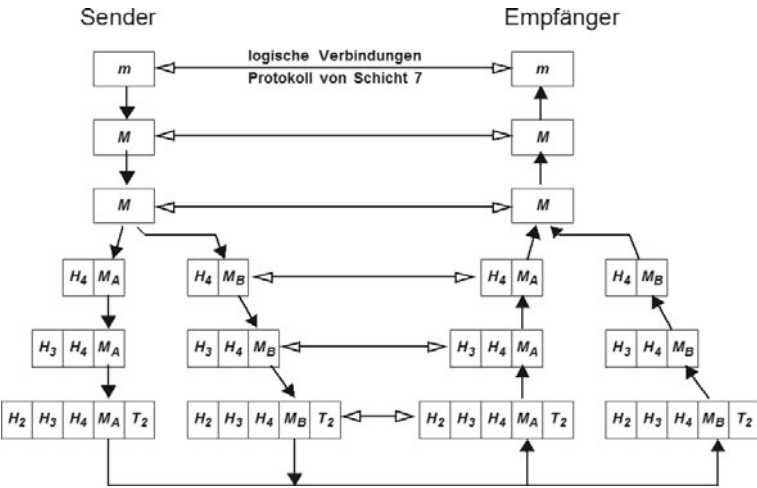


**Bild VI-22**  
Aufteilen langer Nachrichten

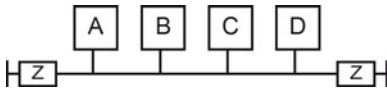


Bild VI-23 Koaxialkabel

Das „Yellow Cable“ hat einen 2,6 mm starken Innenleiter aus massivem Kupfer. Das „Cheapernet“-Kabel ist wesentlich dünner, flexibler und preiswerter; wegen seiner höheren Dämpfung ist die maximale Länge eines Segmentes aber auch stark reduziert. Sehr nachteilig ist die maximale Datenrate von nur 10 MBit/s, die das Busnetz zum Flaschenhals macht. Koaxialkabel sind heute nur noch in Altinstallationen zu finden, sie werden beim Netzausbau gegen Twisted-Pair-Kabel ausgetauscht. Einzig in Kabelfernsehverteilernetzen sind Koaxialkabel nach wie vor Stand der Technik.

### 5.2.2 Twisted-Pair-Kabel

TP-Kabel sind seit langer Zeit im rauen Einsatz erprobt und bewährt. Durch die Verdrehung der zwei zusammengehörenden Adern und die Übertragung differenzieller Signalpegel ist eine sehr störarme Übertragung auch hoher Frequenzen möglich (Bild VI-24), zudem sind die Kabel preiswert. Neuverkabelungen erfolgt mindestens mit CAT5-Kabel („Kategorie 5“, für Fast-Ethernet, 100 MBit/s bis 100 m) oder besser gleich mit CAT7-Kabel (für 10 Gigabit-Ethernet bis 100 m).



Bild VI-24 Twisted-Pair-Kabel

Die Verbindung zur Netzwerkkarte erfolgt über preiswerte RJ45-Stecker. Beim Anschluss eines Rechners an einen Hub oder Switch wird ein **Patch-Kabel** benötigt, in dem alle Adern 1:1 durchgeführt sind. Bei der direkten Verbindung zweier Rechner muss ein Kabel mit gekreuzten Leitungen („**Crossover-Kabel**“) benutzt werden, damit die Sendeleitungen der Station A auf den Eingangsleitungen der Station B und umgekehrt ankommen.

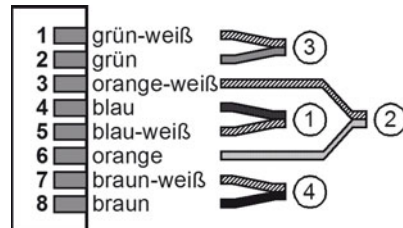
Neuere Geräte für Gigabit-Ethernet (1000Base-T) und 10GBase-T beherrschen mittlerweile eine automatische Erkennung der Sende- und Empfangsleitungen (Auto-MDIX); damit sind keine Crossover-Kabel mehr erforderlich.

### 5.2.3 RJ45-Stecker

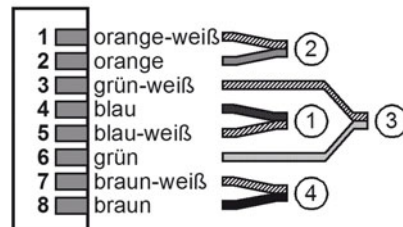
Der RJ45-Stecker hat acht Kontakte für vier verdrehte Aderpaare. Folgende Aderpaare werden benutzt (Bild VI-25):

- Ethernet 10/100: Paare 2 + 3
- Gigabit-Ethernet: Paare 1 + 2 + 3 + 4
- ISDN: Paare 1 + 3

Ein Kabel mit vier Aderpaaren kann bei passender (Spar-)Verdrahtung also zwei Ethernet 10/100 Anschlüsse oder einen Ethernet-10/100 und einen ISDN-Anschluss versorgen; ein späterer Umstieg auf Gigabit-Ethernet ist dann aber ausgeschlossen, weil dieses alle vier Aderpaare benötigt. Daher sollte bei Neuinstallationen jede Anschlussdose mit einem kompletten Kabel versorgt werden.



RJ45 T568A



RJ45 T568B

Bild VI-25 RJ45-Stecker, Kontakt- und Farbschema

Für die Adern im RJ45-Stecker gibt es die Farbschemata T568A und T568B. Ein Crossover-Kabel hat zwei verschiedene Stecker, einen mit dem Farbschema T568A und einen mit T568B. Sind beide Enden gleich, so handelt es sich um ein Patch-Kabel.

### 5.2.4 Lichtwellenleiter (LWL)

Bei hohen Datenraten und großen Entfernungen kommen Glasfasern als Lichtwellenleiter zur Anwendung. Unterseekabel mit Glasfasern verbinden zuverlässiger und preiswerter als Satelliten die Kontinente. FLAG: Fiber-Optic Link Around the Globe: 28.000 km, 10 GBit/s, von England bis Japan; SEA-ME-WE3: South-East Asia – Middle East – Western Europe 3, 39.000 km, 48 × 10 GBit/s, von Europa bis Australien;

TAT-14: Transatlantisches Telefonkabel Nr. 14, Deutschland – USA, 64 × 10 GBit/s. Unterseekabel sind besonders gefährdet durch Seebeben und Schiffsanker.

In der Automatisierungstechnik werden zur galvanischen Trennung Kunststofflichtwellenleiter eingesetzt, die robust und preiswert sind, aber auch eine sehr hohe Dämpfung aufweisen; dies ist bei den hier typischen kurzen Entfernungen von unter 500 Meter aber kein Problem.



Anhand ihres physikalischen Aufbaus unterscheidet man drei Arten von Lichtwellenleitern:

### Stufenindexfaser

Die maximale Länge der Stufenindexfaser (Bild VI-26) ist begrenzt durch die starke Moden-Dispersion in der Faser. Mit Moden-Dispersion bezeichnet man die Impulsaufweitung durch unterschiedliche Weglängen der verschiedenen Ausbreitungswege der Lichtstrahlen in der Faser.

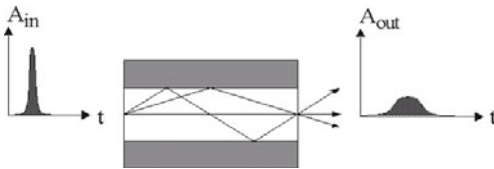


**Bild VI-26** Stufenindexfaser

Der Durchmesser des Kerns einer Glasfaser beträgt 50  $\mu\text{m}$  oder 62,5  $\mu\text{m}$ ; der des Mantels 125  $\mu\text{m}$  (50/125 oder 62,5/125). Die Dämpfung beträgt  $D < 5 \text{ dB/km}$  bei Glasfasern.

Kunststofffasern gibt es als HCS-Faser (Hard Clad Silica Optical Fiber, 200/230  $\mu\text{m}$ , bis 2 km; Kern Quarzglas, Mantel Kunststoff) und als POF-Faser (Polymeric Optical Fiber, 980/1000  $\mu\text{m}$ , bis 100 m, Kern PMMA, Polymethylmethacrylat, Mantel Kunststoff).

### Gradientenindexfaser

Der Durchmesser ist identisch zur Stufenindexfaser (50/125 oder 62,5/125). Ein optimierter gradueller Verlauf des Brechungsindex von der Mitte der Faser zum Rand hin verringert die Moden-Dispersion, Bild VI-27. Die Dämpfung beträgt  $D < 3,5 \text{ dB/km}$  bei 850 nm und  $D < 1,0 \text{ dB/km}$  bei 1300 nm Wellenlänge.

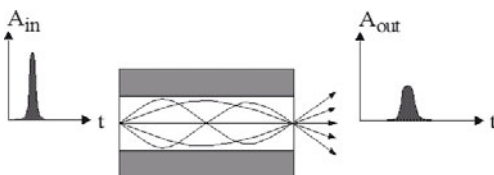


**Bild VI-27** Gradientenindexfaser

### Mono-Mode-Fasern

Der Außendurchmesser ist auch hier 125  $\mu\text{m}$ ; der Kerndurchmesser ist mit 9  $\mu\text{m}$  so klein, dass die Moden-Dispersion nicht mehr auftreten kann (Bild VI-28). Die Dämpfung beträgt  $D < 1,0 \text{ dB/km}$  bei 1310 nm Wellenlänge. Mono-Mode-Fasern eignen sich daher am besten für hohe Datenraten und hohe Entfernungen, sind aber teurer und mit dem sehr kleinen Kerndurchmesser schwieriger zu verarbeiten.

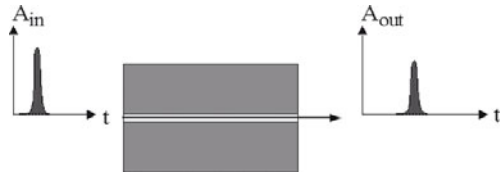


**Bild VI-28** Mono-Mode-Faser

Weitere Einzelheiten zu Lichtwellenleitern siehe Kapitel Nachrichtentechnik XII Nachrichtenübertragung über Lichtwellenleiter (LWL).

### 5.2.5 Ethernet-Medien

**Ethernet** bezeichnet einen Firmenstandard, der ursprünglich von Xerox, DEC und Intel für ein 10 MBit/s-Netz erarbeitet wurde und der später als Vorlage für die Norm IEEE 802.3 diente. Heute bezeichnet man mit „Ethernet“ meist alle Netze, die dem Standard IEEE 802.3 entsprechen. Alle Ethernet-Netze haben eine logische Bus-Struktur, aber nur mit Koax-Kabeln hat ein Ethernet-Netz auch eine physikalische Bus-Struktur: TP-Kabel und Glasfasern sind physikalisch immer als Stern-Struktur verlegt. Derzeit sind u.a. diese Kabeltypen für Ethernet genormt:

- (Standard-) Ethernet, 10 MBit/s:
 

|         |       |                                       |
|---------|-------|---------------------------------------|
| 10Base2 | 185 m | dünnes Koax-Kabel                     |
| 10Base5 | 500 m | dickes Koax-Kabel, das „Yellow Cable“ |
| 10BaseT | 150 m | Twisted Pair Kabel                    |
| 10BaseF | 2 km  | Glasfaserkabel                        |
- Fast-Ethernet, 100 MBit/s:
 

|          |       |                |
|----------|-------|----------------|
| 100BaseT | 100 m | TP-Kabel CAT 5 |
| 100BaseF | 2 km  | Glasfaserkabel |
- Gigabit-Ethernet, 1 GBit/s:
 

|             |       |                  |
|-------------|-------|------------------|
| 1000Base-T  | 100 m | TP-Kabel CAT 5e  |
| 1000Base-SX | 500 m | Multi-Mode-Faser |
| 1000Base-LX | 5 km  | Mono-Mode-Faser  |
- 10 Gigabit-Ethernet mit 10 GBit/s:
 

|            |       |                  |
|------------|-------|------------------|
| 10GBase-T  | 100 m | TP-Kabel CAT 6a  |
| 10GBase-LX | 300 m | Multi-Mode-Faser |
| 10GBase-LX | 10 km | Mono-Mode-Faser  |
| 10GBase-EX | 40 km | Mono-Mode-Faser  |

### 5.2.6 Strukturierte Verkabelung

Die Europäische Norm EN 50173-1 definiert Grundsätze für eine dienst- und anwendungsneutrale strukturierte Verkabelung. In einem systematischen „Top-Down-Ansatz“ ist jeder Anschlusspunkt nach Ort und Leistungsfähigkeit spezifiziert. Dies reduziert die Kosten bei Betrieb und Fehlersuche im Netz. Die Norm unterscheidet Primärbereich, Sekundärbereich und Tertiärbereich:

#### Primärbereich:

Verbindung verschiedener Standortverteiler oder Gebäudeverteiler; meist mit Glasfasern (galvanische Trennung!); eventuell auch DSL.

Große Entfernungen, hohe Datenraten, wenig Anschlusspunkte.

### Sekundärbereich:

Anschluss der Etagen- oder Gruppenverteiler (Switches) an die Standort- oder Gebäudeverteiler; mit Glasfasern; bis ca. 500 m.

### Tertiärbereich:

Anschluss der Endgeräte an die Etagen- oder Gruppenverteiler. Typisch mit max. 100 m Twisted-Pair-(TP-) Kupferkabel, davon 90 m fest verlegt und zweimal fünf Meter Patchkabel; bei besonderen Anforderungen auch Glas- oder Kunststofffasern.

## 5.3 Schicht 1: Bitübertragung

Das Protokoll der Bitübertragungsschicht legt fest, wie die Bits im Übertragungsmedium physikalisch kodiert sind hinsichtlich Spannung, Strom, Frequenz, Phasenwinkel, Amplitude oder Intensität und Zeitdauer. Hier sind die Elektrotechnik oder auch die Optik gefragt. Aktive Komponenten in Schicht 1 sorgen nur für eine Signalverstärkung im Medium (Repeater, Multiport-Repeater = Hub) und sind völlig unabhängig von allen Protokollen höherer Schichten.

### 5.3.1 Bit/s und Baud

Die Übertragungsrate einer Verbindung wird angegeben in **Bit/s**, das ist die Zahl der übertragenen Bits je Sekunde. Mit **Baud** („Schritt“) bezeichnet man die Zahl der Signaländerungen je Sekunde; also ist 1 Baud gleich 1 Signaländerung je Sekunde.

#### Ist also 1 Bit/s gleich 1 Baud?

- **Ja**, falls 1 Signaländerung genau 1 Bit überträgt. Dies ist der Fall bei einer digitalen Übertragung, in der nur die Zustände 0 oder 1 vorkommen. Diese Art der Übertragung ist sehr störsicher und daher auch sehr weit verbreitet.

Einige Beispiele:

- serielle V.24-Schnittstellen (PC: COM1)
  - Ethernet 10BaseX
  - USB
  - **Nein**, falls 1 Signaländerung mehrere Bits gleichzeitig überträgt. Kann ein mehrstufiges Signal 8 Zustände annehmen, dann kann nach jeder Signaländerung einer der Zustände  $0 = 000_2$  bis  $7 = 111_2$  angenommen werden. Damit hat 1 Schritt 3 Bit Informationsgehalt; in diesem Beispiel gilt: 1 Baud = 3 Bit.
- Beispiele:
- 10GBase-T (10 GBit/s Ethernet),  
Modulationsverfahren: 128-DSQ,  
128 Punkte, 7 Bit je Symbol: drückt die Signalfrequenz auf 400 MHz; 800 MBaud;  
1 Schritt = 1,25 ns
  - DVB-T: max. 64-QAM (6 Bit je Symbol)
  - DVB-C: 256-QAM (8 Bit je Symbol)
  - DVB-C2: 4096-QAM (12 Bit je Symbol)

### 5.3.2 Maximale Bitrate

Für einen idealen Übertragungskanal mit der Bandbreite  $B$ , das heißt, er überträgt nur Frequenzanteile im Bereich von 0 bis  $B$  (Basisbandübertragung), ergibt sich bei einer binären Übertragung eine maximale Datenrate von

$$BR_{\max} = 2 \times B \text{ [Bit/s]}$$

Bei einer mehrstufigen Übertragung mit  $N$  Stufen je Schritt vergrößert sich die Datenrate um die Zahl der Bits je Schritt  $\lg(N)$ , wobei  $\lg$  der Logarithmus Dualis, also der Logarithmus zur Basis 2, ist und sich über den natürlichen Logarithmus berechnen lässt:

$$BR_{\max} = 2 \times B \times \lg(N) \text{ [Bit/s]}$$

$$\lg(N) = \ln(N) / \ln(2)$$

Hat ein Telefonkanal eine Bandbreite von  $B = 2400$  Hz, so ergibt die bei binärer Übertragung ( $N = 2$ ) eine maximale Datenrate von:

$$\begin{aligned} BR_{\max} &= 2 \times B \times \lg(N) \\ &= 2 \times 2400 \times 1 = 4800 \text{ Bit/s} \end{aligned}$$

Das ist deutlich weniger als Standard-Ethernet mit 10.000.000 Bit/s...

Das Rauschen begrenzt die maximale Zahl der fehlerfrei erkennbaren Stufen; binäre Codierungen mit  $N = 2$  sind ja gerade wegen ihrer Störunempfindlichkeit so weit verbreitet. Die Größe des Rauschen wird angegeben als Rauschabstand, der aus dem Quotienten von Signalleistung und Rauschleistung berechnet wird ( $S/N$ , Signal-to-Noise), meist in dB:

$$S/N \text{ [dB]} = 10 \log(S/N)$$

Im Telefonnetz ist typisch  $S:N = 1000:1$  oder  $S/N = 30$  dB. Die maximale Bitrate eines verrauschten Datenkanals berechnet sich zu

$$BR_{\max} = B \times \lg(1 + S/N)$$

Für den Telefonkanal mit  $B = 2400$  Hz und  $S/N = 30$  dB ergibt dies als maximale Datenrate von:

$$\begin{aligned} BR_{\max} &= B \times \lg(1 + S/N) \\ &= 2400 \times \lg(1 + 1000/1) \\ &= 24000 \text{ Bit/s} \end{aligned}$$

Hätte der Telefonkanal CD-Qualität ( $B = 40000$  Hz,  $S/N = 90$  dB), dann ergäbe das auch nur ca. 1,2 MBit/s ...

Hohe Datenraten kann man auf einfache Weise nur mit einem Medium erreichen, das eine möglichst hohe Bandbreite hat. Reicht die Bandbreite nicht aus, muss man auf mehrstufige Codierungen ausweichen.

### 5.3.3 Bitkodierungen

#### 5.3.3.1 V.24

Die Norm CCITT V.24, gleich mit RS 232 C und DIN 66020, beschreibt eine weit verbreitete, sehr einfache serielle, asynchrone binäre Datenüber-

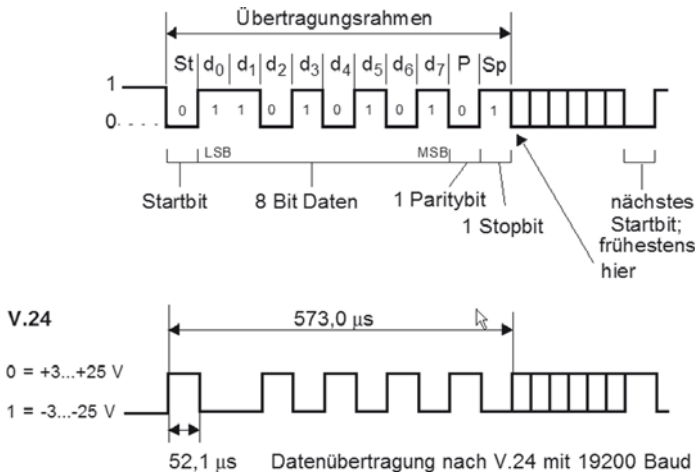


**Bild VI-29**  
V.24-Schnittstelle:  
Datenübertragung

tragung, die auch vom PC her als Schnittstelle COM1 bekannt ist. Die Baudrate – hier gleich mit der Bitrate – ist in einem weiten Bereich von z.B. 110 bis 115200 Baud einstellbar. Die maximale Reichweite bei kleinen Datenraten liegt bei ca. 100 m, bei 115200 Baud eher im Meterbereich. Trotz der hohen – aber auf Masse bezogenen – Signalpegel sind längere Kabel doch sehr störeffendlich.

Zu Beginn der Datenübertragung synchronisiert das Startbit den Empfänger, Bild VI-29. Es folgen die Datenbits, beginnend mit dem niederwertigsten Bit (LSB, Least Significant Bit). Die Zahl der Datenbits ist meist einstellbar, z.B. von fünf bis acht. Nach den Daten kann optional ein Parity-Bit (Prüfbit) folgen; mit diesem sind alle 1-Bit-Fehler erkennbar. Den Abschluss des Übertragungsrahmens bildet immer ein Stopbit. Stehen keine weiteren Daten zur Übertragung bereit, so wird das Stopbit beliebig verlängert.

Die Redundanz bei der Übertragung eines Bytes (8 Bit) beträgt mindestens 20 % (ein Startbit plus ein Stopbit zu jedem Byte). Je nach Dateninhalt kann ein Gleichanteil im Signal enthalten sein; damit ist nur eine Basisbandübertragung möglich. Eine direkte Übertragung über Telefon oder eine transformatorische galvanische Trennung sind nicht möglich, da der Gleichanteil im Signal nicht übertragen werden kann.

### 5.3.3.2 Manchester-Kodierung

Die Manchester-Kodierung (Bild VI-30) ist frei von Gleichanteilen im Signal und lässt sich daher sehr gut übertragen. Weitere Vorteile sind der im Signalstrom enthaltene Takt zur Synchronisierung der Datenbits sowie die Erkennbarkeit von Kurzschluss und offener Leitung. Den Vorteilen steht die recht hohe Redundanz von 50 % gegenüber; daher wird die Manchester-Kodierung nur bei kleinen Datenraten eingesetzt (10Base-T).

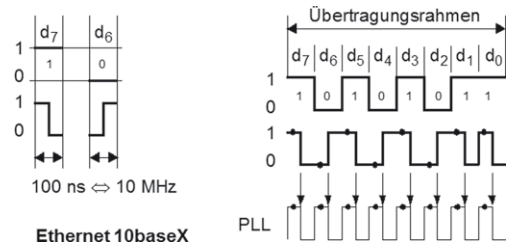


**Bild VI-30** Manchester-Codierung

Die Codierung erfolgt als 1B/2B-Codierung, d.h. aus einem Datenbit werden zwei Bits im Datenkanal:

- aus 1 wird 10
- aus 0 wird 01

In der Bitmitte ist also immer ein Pegelwechsel, der zur Synchronisation der PLL im Empfänger genutzt wird. Ethernet mit 10 MBit/s (10BaseX) arbeitet mit der Manchester-Kodierung; die maximale Frequenz im 10BaseX-Kabel beträgt 10 MHz, die minimale 5 MHz.

### 5.3.3.3 NRZI – Non Return to Zero/Invert

Die Codierung (Bild VI-31) verringert die Frequenzen im Kabel:

- bei 0 bleibt das Signal konstant
- bei 1 erfolgt eine Pegelumkehr in der Mitte des Bitintervalls

Damit entspricht die maximale Frequenz im Kabel nur noch der halben Datenrate. Auch hier ist der Takt im Signalstrom enthalten. Jedoch ist je nach Kodierung etwas Gleichanteil im Signal: eine lange Folge von Nullen erzeugt einen konstanten Signalpegel und muss daher vermieden werden. Dafür sorgt ein RLL-Code (Run Length Limited Code), z.B. mit einer 4B/5B-Kodierung bei Ethernet 100BaseTx oder mit einer 8B/10B-Kodierung wie bei 1000BaseX. Die Redundanz beträgt 20 %.

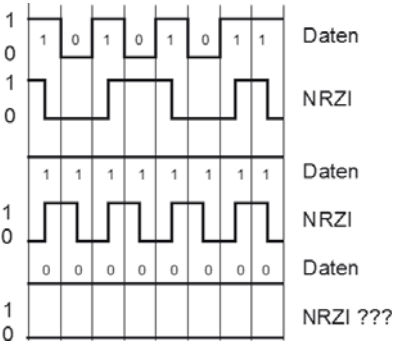


Bild VI-31 NRZI/Invert-Codierung

5.3.3.4 4B/5B-Code Bild (VI-32)

Bild VI-32 zeigt die Codetabelle.

| 4 Bit | 4B/5B-Code |
|-------|------------|
| 0     | 11110      |
| 1     | 01001      |
| 2     | 10100      |
| 3     | 10101      |
| 4     | 01010      |
| 5     | 01011      |
| 6     | 01110      |
| 7     | 01111      |
| 8     | 10010      |
| 9     | 10011      |
| A     | 10110      |
| B     | 10111      |
| C     | 11010      |
| D     | 11011      |
| E     | 11100      |
| F     | 11101      |

Bild VI-32  
4B/5B-Code

5.3.3.5 MLT3-Kodierung

Zur Übertragung von Ethernet mit 100 MBit/s benötigt man bei binärer Übertragung ein Kabel mit mindestens 50 MHz Bandbreite. Mit einer mehrstufigen Übertragung kann man Bandbreite sparen, also auch preiswertere Kabel nutzen. MLT-3 (Multilevel Threshold-3, Bild VI-33) verwendet eine dreistufige

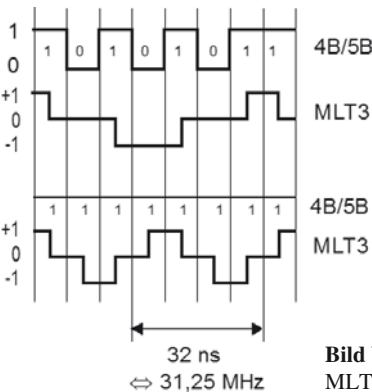


Bild VI-33  
MLT3-Codierung

(ternäre) Übertragung und kommt so bei einer Datenrate von 100 MBit/s mit einer Bandbreite von 31,25 MHz (statt 50 MHz) aus. Bei der MLT-3-Codierung führt eine 0 zu einem konstanten Signal, eine 1 bewirkt eine Pegeländerung. Daher ist auch hier zur Minimierung des Gleichanteils ein RLL-Code notwendig. Das Signal kann drei Pegel annehmen: +1, 0, -1. Der Takt ist im Signalstrom enthalten; je nach RLL-Code verbleibt ein minimaler Gleichanteil im Signal. Mit dem 4B/5B-Code beträgt die Redundanz 20 %.

5.3.3.6 PAM-5-Kodierung

Gigabit-Ethernet (1000Base-X) nutzt einen 8B/10B-Code mit einer Symbolrate von 125 MBaud. Auf Kupferkabeln (1000Base-T) wird über alle vier Adernpaare gleichzeitig gesendet und empfangen, Bild VI-34. Jedes Adernpaar überträgt zwei Bit; alle vier Adernpaare parallel zusammen ein Byte. Die zwei Bit auf einem Adernpaar sind über Trellis-Code-Modulation (TCM) auf drei Bit erweitert; damit erhält man die notwendige Redundanz (33,3 %) für eine Vorwärtsfehlerkorrektur bei einer Bruttoübertragungsrate von 1,5 GBit/s. Je drei Bit der TCM werden dynamisch auf eine der fünf Stufen der PAM-5 (Puls-Amplituden-Modulation mit fünf Stufen) abgebildet; mit vier Adernpaaren und fünf Zuständen je Paar ergeben sich 625 mögliche Symbole für ein Byte.

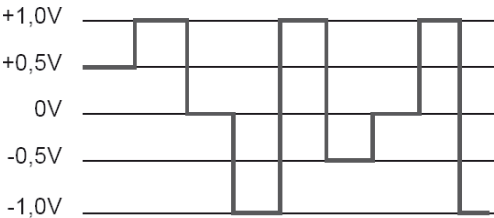


Bild VI-34 PAM-5-Codierung

5.3.3.7 128 DSQ-Kodierung

Für die Datenübertragung mit 10 GBit/s über 100 m auf TP-Kabeln bei 10 Gigabit-Ethernet (10GBase-T) nutzt man die 128 DSQ-Kodierung (DSQ = Double Square), Bild VI-35. 128 Punkte je Symbol ergeben sieben Bit je Symbol, drei Bit als Feld-Index („Co-set“) und vier Bit für die Position im Feld. Alle vier Adernpaare werden bidirektional benutzt; die Symbolrate beträgt 800 MBaud, die Leitungskodierung erfolgt über D/A-Wandler (DAC) mit einer PAM-16 (16 Stufen). Die Signalverarbeitung übernimmt ein digitaler Signalprozessor (DSP), der in einem Trainingsmodus – vor dem normalen Betrieb – einige Leitungsparameter bestimmt und so bekannte Eigenstörungen aus dem Empfangssignal heraus rechnet (Echo-Anteile, NEXT, Near End Cross Talk, Nahnebensprechen, FEXT, Far End Cross Talk, Fernnebensprechen).

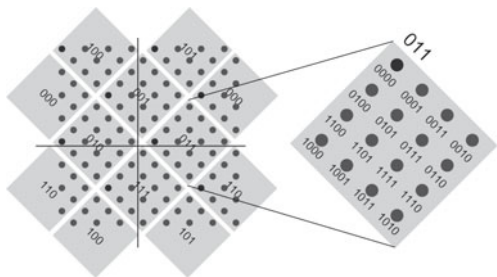


Bild VI-35 128 DSQ-Codierung

5.4 Schicht 2: Datensicherung

Schicht 2 legt fest, wie der Sender Datenübertragungsrahmen (*Data Frames*) erstellt, ob und wie der Empfänger Quittungsrahmen erstellt und wie die üblichen Probleme – beschädigte, verloren gegangene oder duplizierte Datenrahmen – behandelt werden. Teilweise erfolgt auch eine Datenflusssteuerung um einen Überlauf im Empfänger bei zu schnellem Sender zu vermeiden. Aktive Komponenten in Schicht 2 sind die *Bridges* (Brücken), die verschiedene LANs nach 802.3, 802.4 und 802.5 verbinden können. Ein „Ethernet-Switch“ arbeitet ebenfalls auf Schicht 2 und sorgt als Zentrale im Sternnetz für maximalen Datendurchsatz.

Nach Festlegung der sieben Schichten des OSI-Modells stellte man fest, dass Schicht 2 etwas überladen war und so teilte man sie auf in Schicht 2a und 2b, wobei 2b noch weiter unterteilt wurde:

- 2a: **LLC, Logical Link Control**, IEEE 802.2
- 2b: **MAC, Media Access Control**
  - IEEE 802.3, **CSMA/CD**
  - IEEE 802.4, **Token Bus**
  - IEEE 802.5, **Token Ring**
  - IEEE 802.11, **Wireless**

5.4.1 IEEE 802.3: CSMA/CD

**CSMA/CD (*Carrier Sense Multiple Access with Collision Detection*)** ist ein Buszuteilungsverfahren mit sehr geringer logischer Komplexität (Bild VI-36). Es lässt sich sehr flexibel mit beliebig vielen Stationen einsetzen; allerdings steigt mit der Zahl der Stationen auch die Wahrscheinlichkeit von Kollisionen. Die Effizienz ist extrem abhängig vom Gesamtverkehrsaufkommen im Netz, bis 40 % Auslastung ist es problemlos; bei deutlich höherer Netzlast kann das Netz zusammenbrechen. Das Zugangsverfahren ist nicht determiniert: weder Erfolg noch Wartezeit lassen sich vorhersagen. Zudem neigt CSMA/CD dazu, „unfair“ zu sein: eine Station kann durch viele andere beliebig lange am Senden gehindert werden. Damit ist CSMA/CD nicht geeignet für „harte“ Echtzeitanwendungen.

5.4.1.1 Funktionsweise

Laufende Übertragungen werden nicht unterbrochen. Eine sendewillige Station hört daher zunächst das Medium ab, bis dieses frei ist (*Carrier Sense*). Ist das Medium frei, so dürfen *alle* sendewilligen Stationen gleichberechtigt mit ihren Übertragungen beginnen (*Multiple Access*). Sollten jetzt zwei oder mehr Stationen gleichzeitig senden, so kommt es zur Kollision der Daten im Medium. Alle beteiligten Stationen erkennen die Kollision (*Collision Detection*) und bestätigen sie mit einem Jam-Signal. Zur Auflösung der Kollision „würfelt“ jede Station über eine Zufallszahl eine Wartezeit bis zu ihrem nächsten Sendeversuch. Solange die Zufallszahlen unterschiedlich sind, wird die Station mit der kleinsten Wartezeit als nächste allein das (dann hoffentlich freie) Medium beanspruchen und ihre Nachricht senden können. Sollte es nach einer Wartezeit erneut zu einer Kollision kommen, wird das Verfahren wiederholt.

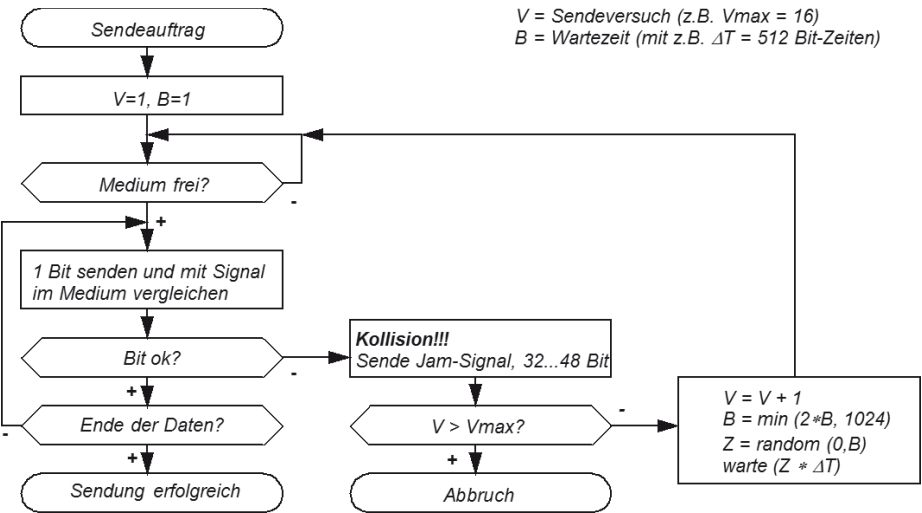


Bild VI-36 Buszuteilungsverfahren nach IEEE 802.3: CSMA/CD



sion kommen, so wird die maximale Wartezeit so lange verdoppelt, bis der Sendeversuchszähler sein Maximum überschritten hat und der Sendeversuch mit einer Fehlermeldung abgebrochen wird.

### 5.4.1.2 Late Collisions

CSMA/CD setzt voraus, dass Kollisionen erkannt werden. Daher müssen alle Stationen eine Mindestnachrichtlänge einhalten, die so groß ist, dass auch in großen Netzen mit endlicher Signalausbreitung im Medium alle Kollisionen sicher erkannt werden. Ist das Netz zu groß – oder die Nachricht zu kurz – so ist es möglich, dass die sendende Station die Nachricht zwar fehlerfrei auf die Reise schickt, aber in einiger Entfernung im Medium die Nachricht doch noch zerstört wird – ohne dass die sendende Station dies bemerken kann. Diese *Late Collisions* können den Netzbetrieb empfindlich stören.

### 5.4.1.3 Autonegotiation

Netzwerkarten nach dem Standard 10baseT prüfen in Übertragungspausen alle 16 ms mit einem *Normal Link Pulse (NLP)* die Verbindung zur Gegenseite, Bild VI-37. Wird die Verbindung durch Einstecken des Kabels hergestellt und werden zwei bis zehn NLPs empfangen, gilt die Leitung als aktiv und an der Netzwerkkarte leuchtet die „Link LED“ auf. Fehlt der NLP länger als 100 ms, so gilt die Leitung als unterbrochen und die „Link LED“ erlischt.

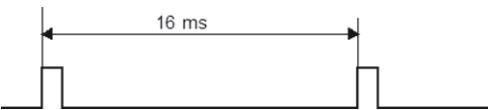


Bild VI-37 Autonegotiation

Der Standard 100baseT definiert einen *Fast Link Pulse Burst (FLP)*, der eine kompatible Erweiterung des NLPs ist. Zum Verbindungsaufbau oder nach Leitungsunterbrechung sendet die Station alle 16 ms

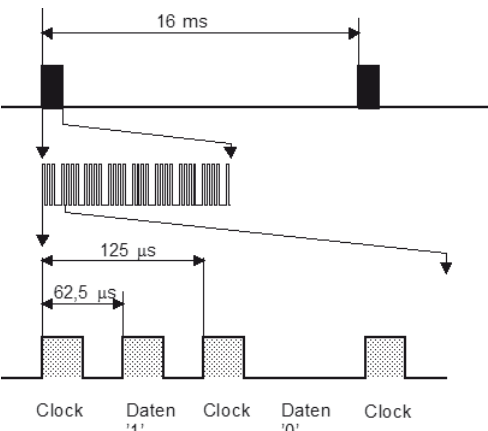


Bild VI-38 100baseT-Standard: Fast Link Pulse Burst

eine Impulsserie mit 17 Takt- und 16 Datenimpulsen, Bild VI-38. Diese bilden zusammen das 16 Bit-Link-Code-Wort, das den höchsten möglichen Übertragungsmodus der Station anzeigt:

1. 100Base-TX Voll duplex
2. 100Base-T4
3. 100Base-TX Halb duplex
4. 10Base-TX Voll duplex
5. 10Base-TX Halb duplex

Beide Stationen wählen den höchsten gemeinsamen Modus.

### 5.4.2 IEEE 802.5: Token Ring

Ein Ringnetz nach IEEE 802.5 besteht aus einer Summe von Punkt-zu-Punkt-Verbindungen in Form eines Rings. Es kommt felderprobte Verbindungstechnik (Koax-Kabel, TP-Kabel, Lwl) zum Einsatz. Die Daten sind im differentiellen Manchester-Code verschlüsselt; die ungültigen Codes dienen als *Frame Start* und *End Delimiter*.

Das gesamte Netz ist in rein digitaler Technik realisiert; jegliche analogen Komponenten wie die Kollisionserkennung bei IEEE 802.3 fehlen. Jede Station verzögert die Nachricht um genau 1 Bit; dazu kommen noch die Laufzeiten im Kabel.

#### Funktionsweise

Es kreist immer genau 1 Token im Ring (Bild VI-39). Das Token ist 3 Bytes gleich 24 Bit lang. Ist der Ring nicht lang genug, um das Token aufzunehmen, dann verlängert die Überwachungsstation den Ring künstlich. Wer das Token besitzt, darf senden; aber spätestens nach der Token-Haltezeit (10 ms) muss das Token weitergegeben werden.

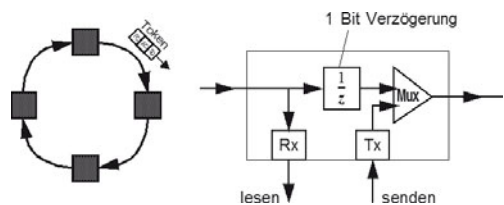


Bild VI-39 Token Ring

Eine Station kann ein Token reservieren, falls die eigene Priorität höher ist als die des Frei-Tokens. Die Station mit der höchsten Priorität erhält das Senderecht; Stationen mit zu kleiner Priorität können unter Umständen bei ausgelastetem Netz nie senden. Die zu sendenden Daten werden an das reservierte freie Token angehängt. Die Zielstation bestätigt den Empfang; Daten und Bestätigung kommen am Sender wieder an; der Sender kann dann die Integrität der Daten prüfen. Nach Abschluss der Sendung muss der Sender ein Frei-Token generieren. Aus der Token-Haltezeit und der Zahl der Stationen im Ring (plus Laufzeit im Kabel) kann eine maximale Wartezeit bis

zur nächsten Sendung berechnet werden – sofern alle Stationen mit gleicher Priorität arbeiten.

5.5 Schicht 3: Vermittlung

Die Vermittlungsschicht bestimmt die Paketleitwege, z.B. über Tabellen (Routing-Tabellen). Optionale Funktionen sind die Abrechnung der Kosten, die Behandlung von Überlastsituationen (z.B. zu viele Pakete im Netz) und – immer wichtiger werdend – die Abwehr unzulässiger Zugriffe und Angriffe durch Paket-Filter-Firewalls.

5.5.1 Internet Protokoll, Version 4 (IPv4)

Das Internet Protokolls, Version 4 ist genormt in RFC 791 und MIL-STD 1777. IP fragmentiert Pakete bei Bedarf; ein Paket *kann* maximal 64 kB (inkl. Kopf) groß sein; mindestens 576 Byte-Pakete *muss* jeder Knoten verarbeiten können. Es gibt eine Kopfprüfsumme, aber keine Datenprüfsumme; Prüfsummen für die Daten müssen bei Bedarf die höheren Schichten berechnen. Im LAN rechnet Ethernet auch eine 32-Bit-CRC-Prüfsumme. Die Lebensdauer eines Paketes ist begrenzt.

IP-Protokollkopf

Der Protokollkopf von IPv4 besteht aus mindestens fünf 32-Bit-Worten und kann durch Angabe von Optionen noch länger werden, Bild VI-40. Die wichtigsten Felder sind die 32-Bit Internet-Adressen von Sender und Empfänger. Die Felder sind im Einzelnen:

- **Version:** 4 (→ IPv4)
- **Länge:** Zahl der 32-Bit-Worte für den IP-Header (variabel in IPv4!)
- **Servicetypen:** Priorität, Wartezeit, Durchsatz und Zuverlässigkeit (wird aber derzeit von fast allen Router ignoriert...)
- **Paketlänge:** max. 65535 Bytes, Header + Daten
- **ID:** eindeutige Identifikation für Fragmente, um diese wieder zusammensetzen zu können
- **Flaggen:**
  - **DF:** „don’t fragment“ Paket wird nie fragmentiert (sondern ggf. gelöscht)
  - **MF:** „more fragments“: es folgen weitere Fragmente
- **Fragmentabstand:** bei MF = 1: Startadresse (geteilt durch 8) der Daten dieses Fragmentes im Gesamtpaket

- **Lebensdauer: TTL,** „time to live“, jeder Router zählt TTL um eins herunter; bei einer TTL von null wird das Paket gelöscht
- **Transport-ID:** ID des Transportprotokolls, z.B. 6 = TCP, 17 = UDP,...
- **Kopfprüfsumme:** Prüfsumme nur für den Header; muss wegen kleiner werdender TTL auf jedem Knoten neu berechnet werden
- **Senderadresse,**
- **Empfängeradresse:** 4-Byte Internet-Adressen
- **Optionen:** z.B. für Netzwerkmanagement oder Sicherheit
- **Füllzeichen:** zum Auffüllen auf 32-Bit-Worte

5.5.2 IP-Adressen

5.5.2.1 Schreibweisen

Mit 32 Bit Länge könnten die IP-Adressen theoretisch vier Milliarden Stationen eindeutig adressieren. Zur einfacheren Handhabung der 32-Bit-Zahlen sind diese bei Eingabe und Anzeige stets unterteilt in vier Gruppen zu je 8 Bit, also vier Bytes, die dann getrennt durch Punkte als einzelne Dezimalzahlen von 0 bis 255 dargestellt werden (*Dotted Decimal Format*). Eine Darstellung als Hexadezimalzahl hat sich bei IPv4 nicht durchsetzen können; erst bei IPv6 kam man darauf zurück. Zwei Beispiele:

IP-Adresse:

- dezimal: 10.1.42.2
- hexadezimal: 0A011A02
- binär: 00001010.00000001.00101010.00000010

Netzmaske:

- dezimal: 255.255.255.192
- hexadezimal: FFFFFFFC0
- binär: 11111111.11111111.11111111.11000000

5.5.2.2 Netzmaske

Netzmasken oder Subnetzmasken (*Subnet Mask*) unterteilen den IPv4-Adressraums in Teilnetze (Subnetze). IP-Adresse und Netzmaske legen das Subnetz einer Station fest. Eine Station kann nur andere Stationen im „eigenen“ Subnetz direkt erreichen; für alle anderen Stationen muss ein Router vermitteln. Als Binärzahl betrachtet besteht eine Netzmaske immer aus einer links beginnenden, lückenlosen Folge von Einsen. Hiervon ist eine andere Schreibweise abgeleitet: anstelle der Dezimal-Punkt-Schreibweise für die Netzmaske schreibt man die Zahl ihrer

|                     |       |              |               |                 |             |    |
|---------------------|-------|--------------|---------------|-----------------|-------------|----|
| 1                   | 4     | 8            | 16            | 19              | 24          | 32 |
| Version             | Länge | Servicetypen | Paketlänge    |                 |             |    |
| ID                  |       |              | Flaggen       | Fragmentabstand |             |    |
| Lebensdauer (TTL)   |       | Transport-ID | Kopfprüfsumme |                 |             |    |
| IP-Senderadresse    |       |              |               |                 |             |    |
| IP-Empfängeradresse |       |              |               |                 |             |    |
| Optionen            |       |              |               |                 | Füllzeichen |    |

Bild VI-40  
IPv4: Protokollkopf

Einsen hinter einen Schrägstrich. Das für die Konfiguration einer Station notwendige Paar IP-Adresse/Netzmaske kann dann so aussehen:

IP-Adresse/Netzmaske

10.1.42.2/255.255.255.192

10.1.42.2/11111111.11111111.11111111.11000000

10.1.42.2/26

Zwei Stationen sind genau dann in demselben Subnetz, wenn das Ergebnis der Bit-weisen UND-Verknüpfung der binären IP-Adresse mit der binären Subnetzmaske bei beiden gleich ist. Ein Beispiel:

| IP-Adresse/NM | Netzmaske     | Netzadresse |
|---------------|---------------|-------------|
| 10.1.42.10/24 | 255.255.255.0 | 10.1.42.0   |
| 10.1.42.50/24 | 255.255.255.0 | 10.1.42.0   |
| 10.1.43.50/24 | 255.255.255.0 | 10.1.43.0   |

Die beiden ersten Stationen liegen im selben Netzwerk und können sich gegenseitig erreichen; die letzte Station liegt isoliert in einem anderen Netzwerk und wäre nur über einen zusätzlichen Router zu erreichen. Falls möglich, kann man aber auch die Netzmasken so weit verkürzen, dass alle Stationen in einem Netz liegen:

| IP-Adresse/NM | Netzmaske     | Netzadresse |
|---------------|---------------|-------------|
| 10.1.42.10/23 | 255.255.254.0 | 10.1.42.0   |
| 10.1.42.50/23 | 255.255.254.0 | 10.1.42.0   |
| 10.1.43.50/23 | 255.255.254.0 | 10.1.42.0   |

Jetzt liegen alle Stationen im selben Netz und jede kann jede erreichen. Bei der Konfiguration eines Netzes sollte dringend beachtet werden, dass alle Stationen dieselbe Netzmaske haben!

### 5.5.2.3 Host-Adressen

Der Teil der IP-Adresse, der nicht zur Netzadresse gehört, ist die Host-ID. Je kürzer die Netzmaske ist, desto mehr Host-Adressen passen in ein Netz. Die kleinste (binär alles Nullen) und die größte (binär alles Einsen) Host-ID sind reserviert als Netzwerkadresse und als Broadcast-Adresse (BC-Adresse) und dürfen nicht für Stationen benutzt werden:

- IP-Adresse/NM: 10.1.42.10/16
- Netzwerkadresse: 10.1.0.0
- kleinste Host-Adresse: 10.1.0.1
- Host-IDs: 0.1 ... 255.254
- größte Host-Adresse: 10.1.255.254
- Broadcast-Adresse: 10.1.255.255

Damit berechnet sich die maximale Zahl der Stationen in einem Netz zu zwei hoch (Anzahl der Nullen in der Netzmaske) minus zwei (keine Station auf Netz- oder BC-Adresse):

| Netzmaske | max. Stationen im Netz |
|-----------|------------------------|
| /8        | $2^4 - 2 = 16.777.214$ |
| /16       | $2^{16} - 2 = 65.534$  |
| /24       | $2^8 - 2 = 254$        |
| /23       | $2^9 - 2 = 510$        |
| /30       | $2^2 - 2 = 2$          |

Große Netze mit sehr vielen Stationen können zur effizienteren Organisation und Verwaltung des Netzes durch Wahl einer längeren Netzmaske in mehrere kleine Netze aufgeteilt werden; dies erfordert dann aber den Einsatz von zusätzlichen Routern.

### 5.5.2.4 IP-Adressklassen

Die IP-Adressen sind in Adressklassen unterteilt, die eine einfache und bedarfsgerechte Verteilung für große und kleine Netze möglich machen sollten:

- Klasse A: 0.0.0.0 bis 127.255.255.255/255.0.0.0
- Klasse B: 128.0.0.0 bis 191.255.255.255/255.255.0.0
- Klasse C: 192.0.0.0 bis 223.255.255.255/255.255.255.0

Klasse A umfasst 128 Netze für je bis zu 16 Millionen Stationen. Diese Netze belegen den halben Adressraum; sie wurden in der Anfangszeit schnell vergeben, sind aber praktisch leer. Klasse B umfasst 16.384 Netze mit je 65.534 nutzbaren Adressen; diese sind gut geeignet für große Firmen. Es bleiben noch ca. zwei Millionen Klasse-C-Netze mit je 254 nutzbaren Adressen.

Die Adressen ab 224.0.0.0 sind nicht im Internet nutzbar; sie werden teilweise für spezielle Anwendungen in lokalen Netzen benutzt.

Bei der Vergabe von IP-Adressen sind einige Einschränkungen zu beachten:

- die IP-Adresse muss der Klasse A, B, oder C angehören
- sie darf mit der Netzmaske der Station keine Netzwerk- oder Broadcast-Adresse ergeben
- falls die Station ans Internet angeschlossen werden soll, muss die IP-Adresse weltweit eindeutig sein und es darf keine private IP-Adresse sein (siehe unten)
- 0.0.0.0 ist reserviert für „keine Adresse“
- das Netz 127.0.0.0/8 ist reserviert für interne Loopback-Tests (*localhost*)
- 255.255.255.255 ist reserviert für Broadcast

### 5.5.3 Private IP-Adressen

In RFC 1597 und RFC 1918 *Address Allocation for Private Internets* (RFC, Request for Comment; „Internet-Normen“) sind drei Adressbereiche zum Aufbau privater Intranets beschrieben:

- Klasse A: 10.0.0.0 bis 10.255.255.255
- Klasse B: 172.16.0.0 bis 172.31.255.255
- Klasse C: 192.168.0.0 bis 192.168.255.255
- APIPA: 169.254.1.1 bis 169.254.254.254

In Intranets sind dieselben Adressen weltweit beliebig oft verwendbar, solange die Netze voneinander isoliert sind. Kein Internet-Router leitet ein Paket mit einer privaten IP-Adresse weiter. Daher ist keine direkte Verbindung zum Internet möglich; aber auch



kein direkter Angriff aus dem Internet auf eine private Adresse.

APIPA (Automatic Private IP Addressing, „Auto-IP“, RFC 3927, Dynamic Configuration of IPv4 Link-Local Addresses) oder Zeroconf (Zero Configuration Networking) ermöglicht eine konfigurationsfreie Vernetzung von Geräten im lokalen Netzwerk: jede Station berechnet für sich eine pseudozufällige Netzwerkadresse aus diesem Bereich. Sollte es damit im Netz zu einer Adresskollision kommen, so berechnet sich die Station eine neue pseudozufällige Adresse.

5.5.4 NAT: Network Address Translation

Eine Verbindung aus einem Netz mit privaten IP-Adressen in das Internet erfordert ein Gateway oder einen Router mit NAT (*Network Address Translation oder IP-Masquerading*), Bild VI-41. Erste Entwürfe für NAT gab es ab Anfang der 90er Jahre. Die Ziele waren:

- den Engpass bei den IP-Adressen zu beseitigen
- das private Netz nach außen zu verstecken
- das private Netz vor Angriffen von außen zu schützen

Der NAT-Router hat eine offizielle Internet-Adresse und eine im privaten Netz. Er nimmt ein Paket aus dem privaten Netz an, merkt sich den Absender im privaten Netz in einer Tabelle, setzt als Absender seine eigene offizielle Internet-Adresse ein und leitet das Paket ins Internet weiter. Die Antwort aus dem Internet kommt zurück an die Adresse des Routers und er leitet das Paket weiter an die richtige Station im privaten Netz.

Das gesamte private LAN 192.168.1.0/24 besitzt hier nur genau eine öffentliche IP-Adresse, die des Routers (141.71.24.151). Übliche DSL-Router arbeiten

immer mit NAT, ihre offizielle IP-Adresse beziehen sie bei der Einwahl dynamisch per DHCP (siehe unten) vom jeweiligen Provider.

Für größere Netzwerke gibt es auch NAT-Gateways, die mehrere Internet-Adressen besitzen.

5.5.5 Router

Router verbinden verschiedene Netze indem sie Pakete annehmen und bestmöglich weiterleiten. Per Definition kann eine Station nur andere Stationen im *selben* Netz erreichen; Stationen in *fremden* Netzen sind nur über einen Router erreichbar.

| IP          | NM              | Gateway     | Schnittstelle |
|-------------|-----------------|-------------|---------------|
| 0.0.0.0     | 0.0.0.0         | 141.71.24.1 | 141.71.24.2   |
| 10.0.2.0    | 255.255.255.0   | 10.0.2.2    | 10.0.2.2      |
| 10.0.2.2    | 255.255.255.255 | 127.0.0.1   | 127.0.0.1     |
| 141.71.24.0 | 255.255.255.0   | 141.71.24.2 | 141.71.24.2   |
| 141.71.24.2 | 255.255.255.255 | 127.0.0.1   | 127.0.0.1     |
| 192.168.1.0 | 255.255.255.0   | 10.0.2.3    | 10.0.2.2      |

Eine Routing-Tabelle enthält u.a. diese Einträge: Zieladresse (IP), Netzmaske (NM), nächster Router zum Ziel (Gateway, GW) und Schnittstelle des Routers, an die das Gateway angeschlossen ist. Der Router vergleicht die Ziel-IP-Adresse eines ankommenden Paketes, UND-verknüpft mit der NM aus der Tabelle, mit der IP aus derselben Zeile der Routing-Tabelle. Bei einem Treffer schickt er das Paket entsprechend dem am besten passenden Eintrag weiter:

- Ziel-IP via Schnittstelle an Gateway
- 10.0.2.50 10.0.2.2 10.0.2.2
- 10.0.2.2 127.0.0.1 127.0.0.1
- 10.1.2.50 141.71.24.2 141.71.24.1

Passt kein Eintrag oder ist die Lebensdauer (TTL) des Paketes abgelaufen, dann löscht der Router das Paket. Der Eintrag 0.0.0.0/0.0.0.0 in der Tabelle passt auf alle Adressen; dies ist der *Standard-Gateway*-Eintrag. Das Standard-Gateway ist der Default-Router, der immer dann benutzt wird, wenn kein anderer Eintrag passt. Bei mehreren Standard-Gateway-Einträgen wird zuerst das erste Standard-Gateway benutzt, fällt dieses aus, dann wird automatisch auf das nächste umgeschaltet.

5.5.6 Routing-Protokolle

Router tauschen ihre Informationen über vorhandene Paketleitwege mit Routing-Protokollen untereinander aus (RIP: Router Information Protocol; OSPF: Open Shortest Path First; BGP: Border Gateway Protocol). Wenn ein Router Anschluss an ein neues Netzwerk erhält oder ein benachbarter Router ausfällt, wird die Änderung der Netzkonfiguration von Router zu Router weitergegeben. In sehr großen Netzen kann es eine Weile dauern, bis alle Router auf dem aktuellen Stand sind; unmittelbar nach dem Ausfall eines Routers können daher noch einige Pakete verloren gehen.

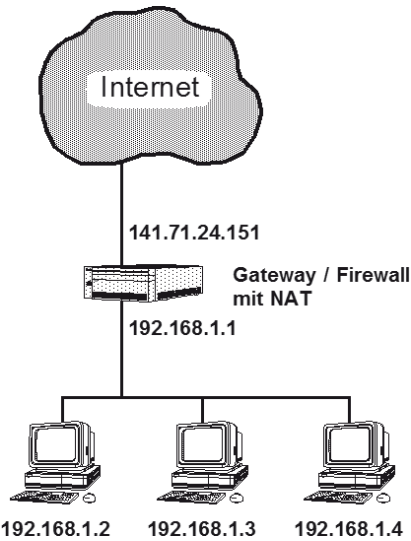


Bild VI-41 Network Address Translation

### 5.5.7 Paketfilter-Firewall

Ein Router packt die Datenpakete bis auf Schicht drei aus, um die Ziel-IP-Adresse auswerten zu können. Damit kann er auf die Absender-IP-Adresse zugreifen und es besteht die Möglichkeit, den Datenverkehr an Hand der IP-Adressen im Paket zu filtern und unerwünschte Verbindungen zu unterbinden. Eine solche Paketfilter-Firewall ist sehr schnell, aber auch sehr grob: Angriffe von zugelassenen IP-Adressen kann sie nicht verhindern; Würmer und Trojaner, die in den Datenpaketen z.B. via E-Mail kommen, sind für eine Paketfilter-Firewall absolut unsichtbar.

### 5.5.8 Kostenabrechnung

Der Router kann an jedem Paket an den IP-Adressen erkennen, woher es kommt und wohin es geht. Damit kann er auch für eine Kostenabrechnung die Datenmenge je IP-Adresse (oder je Gruppe/Abteilung) erfassen.

### 5.5.9 IPv6

IPv6 ist wesentlich leistungsfähiger, bringt einige Sicherheitsoptionen mit, benötigt aber auch wesentlich mehr Rechenleistung, weshalb man gerne bei IPv4 bleibt. Aber spätestens wenn keine offiziellen IPv4-Adressen mehr verfügbar sind, müssen neue Systeme mit IPv6 arbeiten. So schätzt die Internet Assigned Numbers Authority (IANA), dass dies um 2011/2012 der Fall sein könnte. IPv4 hat einige Schwachstellen:

- Die IP-Adressen werden knapp, da die Verteilung mit den Klasse-A/B/C-Adressen wenig effektiv war.
- Jeder Router muss für jedes der max. 2 Mio. Klasse-C-Netze einen Tabelleneintrag im Speicher halten.
- In absehbarer Zeit sollen etwa eine Milliarde Handys und „Wireless Devices“ angeschlossen werden ...
- Das Routing benötigt sehr viel Prozessorleistung für das Fragmentieren von Paketen im Router und zum Berechnen der Prüfsummen im IP-Kopf, die sich wegen der TTL ständig ändern
- es gibt kein QoS (Quality of Service), etwa reservierte Bandbreite für Echtzeitdaten wie Telefon (VoIP, Voice over IP) oder Video
- Es gibt keinen Standard für Verschlüsselung oder Authentifizierung.

IPv6 (Internet Protokoll, Version 6) soll diese Schwächen beseitigen. Klassische Protokolle werden weiter unterstützt (TCP, UDP, ICMP; RIP, OSPF, BGP). Die IPv6-Adressen sind auf 128 Bit erweitert, die alten IPv4-Adressen sind darin enthalten. Das Routen kostet weniger Prozessorleistung und wird schneller: weil Pakete nicht mehr fragmentiert werden (das muss bei Bedarf der Sender machen). Der Basis-Header hat eine feste Länge, weniger Felder und ent-

hält keine Checksumme mehr; bei Bedarf folgen dem Basis-Header noch Erweiterungs-Header.

## 5.6 Schicht 4: Transport

Schicht 4 ist zuständig für den Aufbau und Abbau der Verbindung. Sie kann die Art der Verbindung festlegen, etwa hinsichtlich Dienstgüte wie Bandbreite, Zuverlässigkeit, usw. Abhängig von den Fähigkeiten der Schicht 3 muss sie eventuell die Nachrichten im Sender in kleinere Pakete zerlegen und im Empfänger wieder in der richtigen Reihenfolge zusammensetzen. Allgemein bietet die Transportschicht eine genormte Schnittstelle für die Sitzungsschicht durch Kapselung der tieferen Schichten.

### 5.6.1 TCP/IP

Die Entwicklung von TCP/IP (Transport Control Protocol/Internet Protocol) begann 1969 im ARPANET mit 4 Knoten: UCLA (University of California at Los Angeles), UCSB (University of California at Berkley), SRI (Stanford Research Institute) und die University of Utah koppelten zum ersten Mal vier Rechner.

1983 erfolgte die Umstellung des ARPANETs von NCP (*Network Control Program*) auf TCP/IP Version 4 (**IPv4**); diese Version ist auch heute noch aktuell(!). 1990 bestand das Internet aus einem Zusammenschluss von 3000 Netzen und 200.000 Rechnern auf der Basis von TCP/IP; 2000 waren es ca. 20 Mio. Rechner. Laut EITO nutzen Anfang 2008 1,23 Milliarden Menschen das Internet.

TCP/IP ist zurzeit der De-facto-Marktstandard: es steht kostengünstig für alle wichtigen Rechnertypen zur Verfügung!

### 5.6.2 Ziele von TCP/IP

Die Architektur von TCP/IP verfolgte diese Ziele:

- robust bei Ausfall von Teilen des Netzes
- unabhängig von Netzwerktechnologien und Hostrechnern
- universelle Verbindungsmöglichkeiten im Netz
- zuverlässige Übertragung
- standardisierte Anwendungsprotokolle

TCP/IP realisiert diese Anforderungen, indem es Netzknoten als Paketvermittlungsrechner (*Router*) einsetzt und über Routing-Protokolle dynamisches Routing ermöglicht: die Router informieren sich gegenseitig über neue und ausgefallene Teilnetze. TCP nutzt den Paket-Datenübertragungsdienst von IP. IP ist ein verbindungsloses, unzuverlässiges Protokoll, das ggf. auch die Nachricht in kleinere Pakete zerlegt und wieder zusammensetzt; und bei Überlast notfalls auch mal Pakete löschen darf. Die Robustheit gegen Ausfälle von Teilen des Netzes erreicht man mit IP.

TCP sorgt als zuverlässiges Transportprotokoll mit Sicherungsfunktionen für eine sichere Ende-zu-Ende-Datenübertragung. Insbesondere muss TCP die Unzuverlässigkeit von IP wieder ausgleichen.

### 5.6.3 Das TCP/IP-Referenzmodell

Das TCP/IP-Referenzmodell (Bild VI-42) besteht aus vier Schichten:

1. **Subnetzwerk:** überträgt die Daten; der Dienst wird gebraucht, aber nur die Schnittstelle zu ihm definiert. Hier findet man Ethernet, Token Ring usw.
2. **Netzwerk:** hier sorgt IP für die optimale Zustellung der Pakete durch das Netz.
3. **Transport:** hier kümmert sich TCP um die zuverlässige Zustellung der Nachrichten von Programm zu Programm oder von Prozess zu Prozess; alternativ kann UDP die Daten auch schneller, aber unzuverlässig transportieren
4. **Anwendung:** hier arbeiten die Programme und Prozesse, die über das Netzwerk Daten austauschen wollen

| Protokoll                                                       |                                            | TCP/IP-Schicht            |
|-----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|---------------------------|
| Telnet<br>FTP<br>SMTP<br>Rlogin                                 | DNS<br>NFS<br>BootP<br>TFTP<br>SNMP<br>RIP | 4 Anwendung, Application  |
| TCP                                                             | UDP                                        | 3 Transport               |
| IP<br>ICMP, ARP, RARP                                           |                                            | 2 Netzwerk, Network       |
| Ethernet<br>Token Ring<br>FDDI <sup>a</sup><br>ATM <sup>b</sup> |                                            | 1 Subnetzwerk, Subnetwork |

Bild VI-42 TCP/IP-Referenzmodell

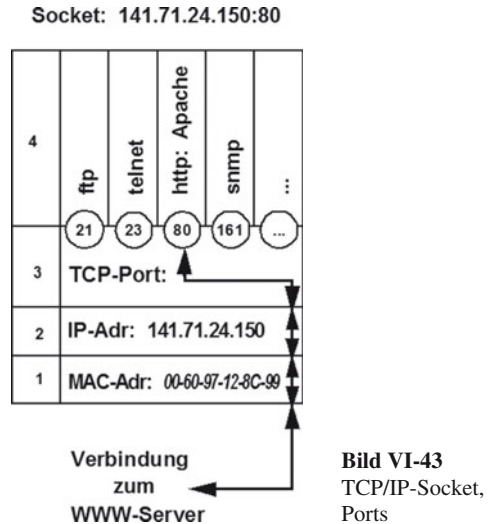
### 5.6.4 TCP/IP-Socket

Zur Adressierung von Anwendungen und Diensten benutzt TCP/IP-*Sockets*. Ein Socket ist ein Kommunikationsendpunkt und besteht aus einer 32-Bit-IPv4-Adresse sowie einer 16-Bit-TCP-Portnummer (Bild VI-43). Mit der IP-Adresse ist eine Station eindeutig identifiziert; mit der Portnummer ist in der Maschine ein Socket eindeutig festgelegt. Jedes Programm, das Daten über das Netz austauschen will, muss dazu vorher einen Socket öffnen.

Mit der 16-Bit-Portnummer sind 65536 Ports in einer Station möglich; jeder Port ermöglicht einen Datenübertragungskanal. Der Bereich der Ports ist aufgeteilt in diese Bereiche:

0 ... 1023 „*Well Known Ports*“:  
für Serverprozesse

1024 ... 49151 „*Registered Ports*“:  
offiziell bei der IANA (Internet Assigned Numbers Authority) beantragte Ports



49152 ... 65535 „*Private Ports*“:  
frei verfügbare Ports

Beispiele für „*Registered Ports*“:

Port: Dienst / Anwendung:

- 21 FTP, File Transfer Protocol
- 22 ssh, Secure Shell (sicher)
- 23 Telnet, virtuelles Terminal (unsicher)
- 53 DNS, Domain Name Service
- 80 WWW, World Wide Web, HTTP
- 110 POP3, Post Office Protocol Version 3

### 5.6.5 TCP: Transport Control Protocol

TCP benutzt für seine Aufgaben eine voll duplex-fähige, bidirektionale, sichere, virtuelle Verbindung mit geregelter Verbindungsauf- und -abbau (*TCP-3-Wege-Handshake*), Bild VI-44. Der Benutzer sieht nur einen bidirektionalen Datenstrom von Bytes, aber keine Blöcke oder Pakete. Die Transportbenutzer-Adressierung erfolgt über 16-Bit-Portnummern. 32-Bit-Sequenznummern (SEQ) und 32-Bit-Quittungsnummern (ACK) mit Zeitüberwachung, sowie Prüfsummen mit Empfangsquittungen garantieren die Datensicherheit.

Der Verbindungsaufbau findet über das *TCP-3-Wege-Handshake* statt.

1. Eine Station sendet einen Verbindungsaufbauwunsch mit der Flagge SYN = 1 und der Sequenznummer X.
2. Die Gegenstation sendet ihrerseits einen Verbindungsaufbauwunsch für den Rückkanal mit SYN = 1 und ihrer Sequenznummer Y; gleichzeitig bestätigt sie dem Empfang mit über die Sequenznummer ACK = X + 1.
2. Die erste Station bestätigt den Aufbau des Rückkanals über die Sequenznummer ACK = Y + 1. Die Verbindung ist aufgebaut, die Daten können ausgetauscht werden.

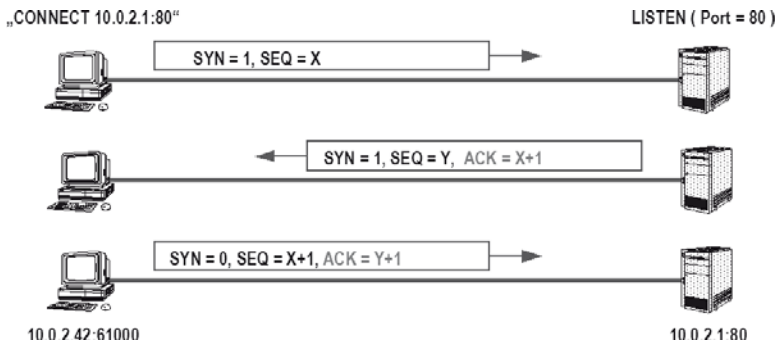


**Bild VI-44**  
Transport Control Protocol

Die Datenflusssteuerung übernimmt das *Sliding Window*: jede Station übermittelt eine Fenstergröße, die die Zahl der unbestätigt, also im Voraus gesendeten Bytes festlegt. Ist diese Zahl von Bytes gesendet, muss der Sender auf eine Bestätigung warten. Kommt eine Bestätigung, so darf der Sender um die Zahl der bestätigten Bytes weiter senden. Ist die Fenstergröße null, so muss der Sender anhalten.

### 5.6.6 UDP: User Data Protocol

UDP ist eine vereinfachte Alternative zu TCP. UDP benutzt wie TCP Portnummern zur Adressierung. Aber im Gegensatz zu TCP ist UDP verbindungslos, hat keine Quittungen, ist unzuverlässig – aber schnell! Datensicherung und Flusssteuerung übernehmen bei Bedarf die Anwendung oder ein zuverlässiges Netzwerk (z.B. Ethernet). UDP eignet sich damit sehr gut im LAN für eine unzuverlässige, aber sehr schnelle Datenübermittlung wie Sprach- und Videoübertragung sowie für lokale Services wie NFS (Network File System) oder DNS (Domain Name Service).

## 5.7 Aufgaben der Schichten 5–7

Im TCP/IP-Referenzmodell sind die OSI-Schichten fünf bis sieben zu einer Schicht „Anwendung“ zusammengefasst, was in den meisten Fällen auch kein Problem macht.

Im OSI-Modell regelt Schicht 5 (*Sitzungsschicht*) Datentransport und gehobene Dienste, z.B. den Zugang zu Time-Sharing-Systemen, die Dialogsteuerung oder ggf. ein Token-Management (die Operation darf nur ausführen, wer das Token hat). Die Synchronisierung großer Dateien mit Fixpunkten (check points)

Schicht 6 (*Darstellung*) stellt häufig gebrauchte Funktionen für den Anwender bereit, wie Datenkompression, Kryptographie (SSL, Secure Socket Layer) und analysiert ggf. Syntax und Semantik der Daten zur Konvertierung von ASCII in EBCDIC, 1er- in 2er-Komplement oder Little- in Big-Endian.

In Schicht 7 (*Anwendung*) laufen die typischen Server- und Client-Anwendungen: WWW-Server und WWW-Browser; Terminal-Emulationen, Dateitransfer, E-Mail-Server und -Clients, Application Gateway Firewalls und sonstige Anwenderprogramme.

### 5.7.1 DNS: Domain Name Service

Zum Aufbau einer Verbindung benötigt man die IP-Adresse der Gegenstation. In der Anfangszeit benutzte man eine Datei HOSTS.TXT, die den wenig lesbaren IP-Adressen gut lesbare Namen zuordnete. Im ARPANET lag eine zentrale Datei HOSTS.TXT mit den Adressen aller Stationen im Netz im NIC (Network Information Center), die per FTP von allen Stationen lesbar war und als lokale Kopie im Verzeichnis `/etc/hosts` auf jeder Unix-Maschine verfügbar war. Mit der stark steigenden Zahl der Stationen wurde diese Praxis zu aufwändig.

Abhilfe brachte der DNS (*Domain Name Service*; RFCs 1034, 1035, 1101, 1183, 1032) als „Internet Directory Service“, der die Zuordnung von symbolischen Namen zu Internet-Adressen über ein hierarchisches, auf Domänen basierendes Benennungsschema einführt. Der DNS beruht auf einer verteilten Datenbank, die DNS-Server verwalten.

#### 5.7.1.1 Funktionsweise

Ein Client will eine Verbindung zu einem Ziel-Host aufbauen, hat dessen DNS-Namen und benötigt nun für den Verbindungsaufbau die IP-Adresse (Bild VI-45). Zur Namensauflösung schickt der Client den Namen über den Resolver (einen DNS-Client) an seinen lokalen DNS-Server, den er aus seiner Netzwerkkonfiguration kennt. Kann der lokale DNS-Server den Namen auflösen, so schickt den Namen mit zugehöriger IP-Adresse an den Client zurück. Kann er den Namen nicht auflösen, so befragt der lokale DNS-Server den in der Namenshierarchie nächst höheren Server. Dieser Vorgang wiederholt sich, bis der DNS-Server gefunden ist, der zu diesem Namen verbindlich Auskunft geben kann. Das Ergebnis ist dann die gesuchte IP-Adresse oder die Auskunft, dass der Name ungültig ist.

DNS-Einträge waren ursprünglich alle statisch, d.h. vom Administrator der Domäne von Hand eingepflegt. Eine Verbesserung ist der DDNS (*Dynamic Domain Name Service*; RFC 2136). Active Directory von Windows 2000/2003 benutzt ebenfalls einen DDNS als Name Service.

Die DNS-Server im Internet müssen besonders geschützt werden, da verfälschte Adresse/Namenzuord-

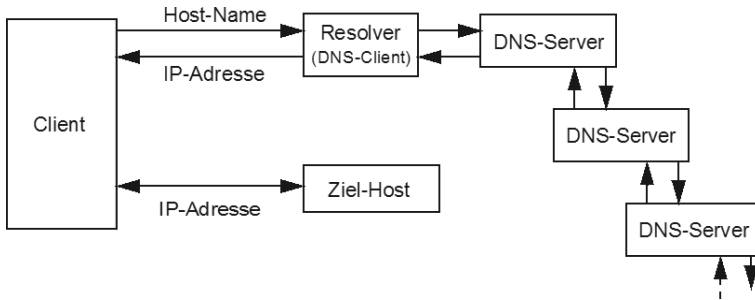


**Bild VI-45**  
Domain Name Service

nungen in der DNS-Datenbank die betroffenen Adressen praktisch unerreichbar machen.

### 5.7.1.2 DNS-Namen

Ein vollständiger DNS-Name (**FQDN, Fully Qualified Domain Name**) kann so aussehen:

hostname.subdomain.domain.top-level-domain

Ein Beispiel:

FQDN:                www.etch.fh-hannover.de  
 top-level-domain: .de  
 domain:            .fh-hannover  
 subdomain:        etech  
 hostname:         www

Die höchste Hierarchiestufe der Internet-Domänen steht am Ende des Namens; die Namen der einzelnen Hierarchiestufen sind durch Punkte getrennt. Groß- und Kleinschreibung wird nicht beachtet. Zusammengesetzte Namen können bis 63 Zeichen lang sein; der gesamte Pfadname kann maximal 255 Zeichen lang sein. Seit kurzem sind auch deutsche Umlaute (ä, ö, ü) im Namen erlaubt (*aber noch nicht in allen Programmen problemlos benutzbar*).

Einige allgemeine Top-Level Domänen sind:

|      |                                   |
|------|-----------------------------------|
| .int | internationale Organisationen     |
| .mil | Amerikanische Streitkräfte        |
| .com | Kommerzielle Unternehmen          |
| .net | Netzbetreiber                     |
| .edu | education: Universitäten u.ä.     |
| .org | nicht-kommerzielle Organisationen |
| .gov | US-Bundesregierung                |

Ebenso hat jedes Land eine eigene Top-Level Domäne:

|     |                                      |
|-----|--------------------------------------|
| .de | Deutschland                          |
| .fr | Frankreich                           |
| .jp | Japan                                |
| .tv | Tuvalu (Inselstaat im Stillen Ozean) |
|     | usw.                                 |

### 5.7.2 DHCP: Dynamic Host Configuration Protocol

Jede Station muss eine netzwerkweit eindeutige IP-Adresse haben. In großen Netzwerken kann dies schnell unübersichtlich werden.

Abhilfe schafft ein DHCP-Server, der dynamisch IP-Adressen und Netzmasken für den Client aus einem Bereich von freien IP-Adressen an die DHCP-Clients verteilt. Neben den Adressen verteilt der DHCP-Server auch die IP-Adressen von DNS-Server, Standard-Gateway, den DNS-Domännennamen u.a.m. Der DHCP-Client erhält eine *Lease* mit allen IP-Parametern, deren Nutzungsdauer (*Lease Time*) allerdings zeitlich begrenzt ist (z.B. auf 24 Stunden).

Der DHCP-Client erhält beim Booten vom DHCP-Server seine Konfiguration. Bieten mehrere DHCP-Server eine Lease an, kann der Client sich eine Lease aussuchen.

Der Vorteil des DHCP-Dienstes liegt in der zentralen Verwaltung aller Clients über den DHCP-Server. Der DHCP-Client erhält nach dem Starten immer eine aktuelle IP-Konfiguration. Damit gibt es weniger Konfigurationsfehler und der Aufwand zur Netzadministration sinkt; Änderungen in der Netzwerkkonfiguration werden einfach via DHCP verteilt. Neu in Netz aufgenommene Stationen werden automatisch mit den passenden Konfigurationsdaten versorgt.

Bei Bedarf können feste Adressen von der dynamischen Vergabe ausgeschlossen werden. Für Router, Server oder Drucker können auch feste Adressen reserviert werden; die Erkennung der Geräte erfolgt über die MAC-Adressen. In Netzen mit hohen Sicherheitsanforderungen können auch nur Clients mit bekannten MAC-Adressen Zugang zum Netz erhalten. Damit kann sich ein Angreifer nicht ohne weiteres ins Netz einschleichen.

Die Erneuerung der DHCP-Lease erfolgt immer beim Neustart des Clients innerhalb der Gültigkeitsdauer. Ist die Lease-Time zu 50 % abgelaufen, dann versucht der DHCP-Client „prophylaktisch“, seine Lease beim aktuellen DHCP-Server zu verlängern um einen unterbrechungsfreien Netzbetrieb zu gewährleisten. Ist der DHCP-Server nicht erreichbar und die Lease-Time ist zu 87,5 % abgelaufen, dann der DHCP-Client sucht mit einem Broadcast nach beliebigen DHCP-Servern im Netz. Gelingt auch dies nicht und ist die Lease-Time zu 100 % abgelaufen, dann muss der Client seine Lease freigeben; und es ist für ihn kein weiterer Zugriff auf das Netz mehr möglich.

Eine Anzeige der aktuellen IP-Konfiguration erhält man unter Windows 9x mit dem Befehl `winiipcfg`



(ausgeführt in einer DOS-Konsole); unter Windows NT/2000/2003 mit *ipconfig /all* und unter Linux mit *ifconfig*.

## 6 Industrial Ethernet

Industrial Ethernet beschreibt die Anwendungen von Ethernet in industriellen Produktionsprozessen. Der Einsatz von Ethernet-Standards in der industriellen Automatisierungstechnik hat diese Vorteile:

- die Ethernet-Technologie ist bekannt, bewährt und preiswert
- die Fertigung und die Produkte lassen sich verbessern und Kosten reduzieren
- Fernwartung, Ferndiagnose und Fernzugriff über WAN sind möglich
- nur eine Netzwerk-Technologie vom Büro bis zur Produktionsmaschine ist zu pflegen

Die transparente Kommunikation über alle Geschäftsbereiche, von der Unternehmensleitebene (ERP-Systeme, Enterprise Resource Planning) über die Nutzung etablierter IT-Techniken zur Datenvisualisierung und Kommunikation bis hin zur Datenerfassung und Steuerung von Maschinen in der Produktionszelle kann mit dem Ethernet-Standard abgedeckt werden.

Gegenüber dem Einsatz im Büro ergeben sich je nach Einsatzort deutlich höhere Anforderungen an die Robustheit der Netzkabel und Netzwerkgeräte, speziell hinsichtlich der Umgebungsbedingungen, z.B. bei mechanischen Beanspruchungen, Vibrationen, Schmutz und Feuchtigkeit, Temperaturbereich, UV-Strahlung und Resistenz gegenüber elektromagnetischen Störungen.

### Echtzeit-Betrieb

Industrielle Steuerungen müssen oft schnell und zuverlässig reagieren: soll die Bewegung eines mehr-

achsigen Roboters in Echtzeit über ein Netzwerk gesteuert werden, so müssen alle Steuerdaten nicht nur hinreichend *rechtzeitig* (nicht zu spät), sondern auch *gleichzeitig* (nicht zu früh und nicht spät) eintreffen. Die Abweichung von der Sollzeit heißt „Jitter“; dieser muss für die Anwendung klein genug sein. Meist ist hierfür eine Synchronisation der Uhren in allen Stationen notwendig, z.B. über das Precision Time Protocol (PTP, IEEE 1588).

Die benutzten Industrial-Ethernet-Protokolle unterscheiden sich stark in ihrer Echtzeitfähigkeit und dem Grad der dazu notwendigen Modifikation von Standard-Ethernet-Software und -Hardware:

Software-Modifikationen:

- Modbus-RTPS:  
Zykluszeit 5 ... 10 ms

zusätzlich mit IEEE 1588-Hardware:

- EtherNet/IP mit CIPsync:  
Zykluszeit 300 µs bei 30 Antrieben

Spezieller Netzwerk-Controller (ASIC/FPGA):

- PROFINet Echtzeit-Subnetz V3:  
Zykluszeit 1 ms bei 100 Antrieben
- SERCOS III:  
Zykluszeit 250 µs bei 100 Antrieben
- EtherCAT:  
Zykluszeit 100 µs bei 100 Antrieben

## 7 Literatur

- [1] Tanenbaum, A. S.: Computernetzwerke, 4., aktualisierte Auflage, Pearson, 2003
- [2] c't extra 03/2009 Netzwerke, Heise
- [3] c't magazin für computertechnik, Heise
- [4] <http://www.heise.de/netze/>
- [5] <http://de.wikipedia.org/wiki/Rechnernetz>

# Automatisierungstechnik

## 1 Einführung

**Automatisierung:** Reale Aufgaben der Automatisierungstechnik sind im Allgemeinen sehr komplex. Als umfassender Ausdruck für Steuerungs-, Regelungs- und Visualisierungs-Vorgänge hat sich der Begriff der Automatisierung durchgesetzt. Er beinhaltet, dass Automatisierungsgeräte selbsttätig Programme befolgen und dabei Entscheidungen auf Grund vorgegebener Führungsgrößen und rückgeführter Prozessgrößen aus der Anlage sowie erforderlicher Daten aus internen Speichern des Systems treffen, um daraus notwendige Ausgangsgrößen für den Betriebsprozess zu bilden.

**Steuerung:** Steuern oder Steuerung wird als Ablauf in einem System definiert, bei dem eine oder mehrere Eingangsgrößen andere Größen als Ausgangsgrößen aufgrund der dem System eigentümlichen Gesetzmäßigkeiten beeinflussen. Kennzeichen für das Steuern ist der *offene Wirkungsablauf über der Steuerstrecke*. Eine Steuerung liegt also vor, wenn Eingangsgrößen nach einer festgelegten Gesetzmäßigkeit Ausgangsgrößen beeinflussen. Die Auswirkung einer nicht vorhersehbaren Störgröße wird nicht ausgeglichen.

**Regelung:** Immer dann, wenn Störgrößenänderungen das System nicht hinnehmbar beeinflussen können, werden Regelungen erforderlich. Die Regelgröße (Aufbengröße) muss sich messtechnisch erfassen lassen, denn eine Regelung ist ein Vorgang, bei dem die Regelgröße fortlaufend erfasst, mit der Führungsgröße verglichen und abhängig vom Ergebnis dieses Vergleichs im Sinne einer Angleichung an die Führungsgröße beeinflusst wird. Der sich dabei ergeben-

de Wirkungsablauf findet in einem geschlossenen Kreis, dem *Regelkreis*, statt. Programmierbare Automatisierungsgeräte können die Aufgaben des Steuerns und Regelns ausführen, denn beide Funktionen beruhen auf Programmen unter Verwendung desselben Operationsvorrates.

## 2 Automatisierungsgeräte

Die derzeit am weitesten verbreitete Hardware-Plattform der Steuerungstechnik ist die *Speicherprogrammierbare Steuerung SPS*, wie sie in Bild 1 abgebildet ist, dort jedoch ohne den heute schon üblichen Anschluss an ein Feldbussystem zur Vernetzung mit anderen Steuerungskomponenten.

Eine Speicherprogrammierbare Steuerung hat die Struktur eines Rechners, deren Funktion als Programm gespeichert ist. Sie besteht im einfachsten Fall aus einer *Stromversorgung PS*, einem *Steuerungsprozessor CPU*, einigen zentralen *digitalen Eingabe- und Ausgabebaugruppen* sowie einem internen Bussystem. Bei Bedarf können auch Baugruppen zur *Analogwertverarbeitung* oder für besondere Funktionen wie *Regler*, schnelle *Zähler* und *Positionierungen* hinzukommen. Die Peripheriebaugruppen und die Programmiersprachen sind auf die Belange der Steuerungstechnik ausgerichtet. Speicherprogrammierbare Steuerungen gibt es als modulare und kompakte Systeme für unterschiedliche Anforderungsniveaus. Ein typisches Merkmal von SPS-Steuerungen ist die zyklische Programmbearbeitung, wie in Bild 2 angedeutet.

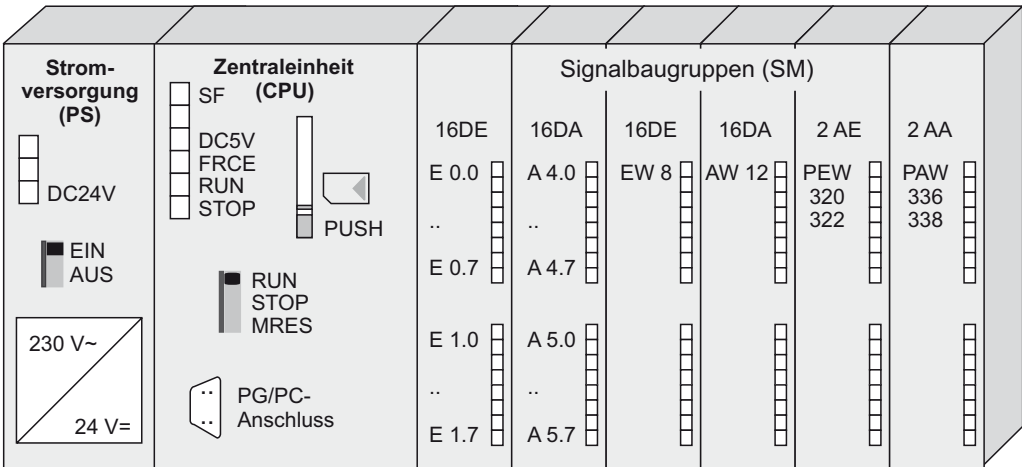


**Bild 1** Aufbau einer Speicherprogrammierbaren Steuerung ohne Feldbusanschluss  
DE = Digitale Eingänge, DA = Digitale Ausgänge, AE = Analoge Eingänge, AA = Analoge Ausgänge

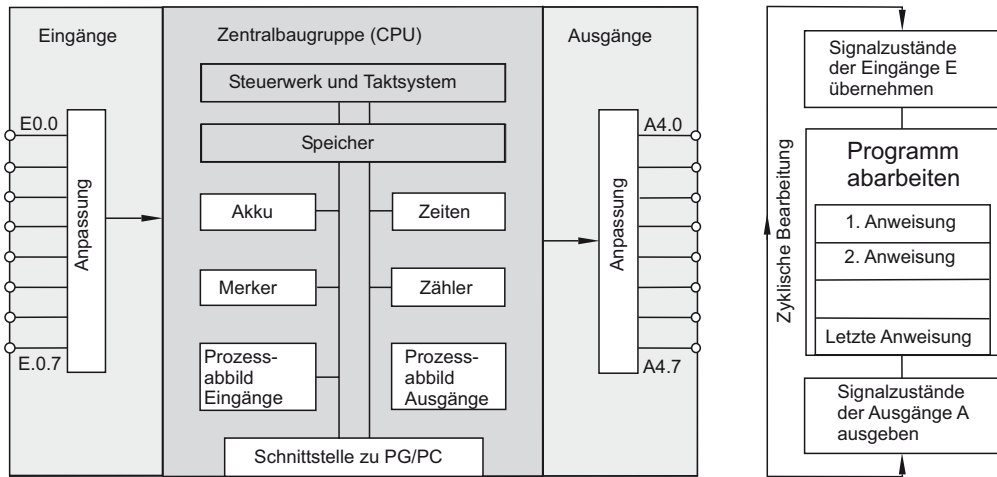


**Bild 2** SPS-Struktur und zyklische Programmabarbeitung

In der Praxis werden nicht mehr ausschließlich SPS-basierte Automatisierungssysteme eingesetzt, sondern vernetzte Steuerungssysteme bestehend aus SPSen und PCs mit unterschiedlichen Aufgaben, wobei die SPS mehr prozessnah und der PC mehr übergeordnet und datenverarbeitend genutzt wird. Soll die Steuerungsfunktionalität nicht mehr von einer modernen SPS, sondern von einem PC ausgeführt werden, so gibt es diese Lösung als Industrie-PC mit eingebauter SPS-Karte und zusätzlicher Feldbus-Schnittstelle. In Sonderfällen kommt auch eine sog. Soft-SPS-Lösung in Frage, bei der in einem PC die Funktion einer SPS softwaremäßig nachgebildet und Steuerungsaufgaben „nebenher“ miterledigt werden. Für die Programmerstellung macht es keinen Unterschied, ob die Hardware-Plattform ein PC oder eine SPS ist.

### 3 Grundzüge der SPS-Norm IEC 61131-3

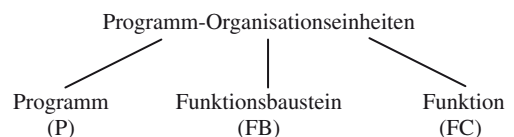
Auch wenn das Programmieren von Steuerungen und Regelungen noch immer ein sehr individueller Prozess ist, muss seit Jahren der Standard der SPS-Programmier-Norm IEC 61131-3 zu Grunde gelegt werden, der eine rationellere Programmerstellung und größere Herstellerunabhängigkeit zum Ziel hat. Den Anwendungsprogrammierern müssen wirksame Mittel an die Hand gegeben werden, um wiederverwendbare und damit kostensparende Programme entwickeln zu können. Die Norm IEC 61131-3 bzw. DIN EN 61131-3 richtet sich daher in erster Linie an SPS-Hersteller. Für Anwendungsprogrammierer ist die SPS-Norm eher ein Dokument im Hintergrund, denn sie sind für ihre Arbeit auf ein reales IEC 61131-3 kompatibles Programmier- und SPS-System angewiesen.

Die Grundzüge dieser SPS-Norm werden in den folgenden Abschnitten dargelegt und bilden die Voraussetzungen dafür, mit einem der SPS-Norm entsprechenden Programmiersystem richtig umgehen zu können.

#### 3.1 Programmorganisationskonzept

Es ist ein hierarchisch gegliedertes System von so genannten Programmorganisationseinheiten (POE) eingeführt worden, bestehend aus einem Hauptprogrammtyp (Schlüsselwort: PROGRAM) mit Zugriffsmöglichkeit auf SPS-Eingänge/-Ausgänge und zwei Unterprogrammtypen davon einen Typ mit Gedächtnisfunktion (Schlüsselwort: FUNCTION\_BLOCK) und einen Typ ohne Gedächtnisfunktion (Schlüsselwort: FUNCTION). Durch dieses Programmorganisationskonzept in Verbindung mit dem Datentyp- und Variablenkonzept zur Entwicklung strukturierter Programme wird die Wiederverwendbarkeit von Bausteinen bei späteren Anwendungen ermöglicht. Dadurch ist die neue Anwendungsprogrammierung sehr viel anspruchsvoller als die herkömmliche SPS-Programmierung geworden.

Ein Steuerungsprogramm (Anwenderprogramm) ist eine in Programm-Organisations-Einheiten (POE) gegliederte Einheit. Anstelle der unhandlichen Bezeichnung Programmorganisationseinheit wird vereinfacht auch nur von Bausteinen gesprochen.





Jeder Baustein besteht aus einem

- Deklarationsteil für die Definition aller lokal verwendeten Variablen und einem
- Rumpf für die Anweisungen (Befehle) des ausführbaren Programms.

**Funktion:** Dieser POE-Typ ist geeignet, wenn ein Funktionsergebnis ausschließlich aus den Eingangsvariablen des Bausteins zu ermitteln ist und unter dem Funktionsnamen des Bausteins zur Verfügung gestellt werden soll. Der Aufruf einer Funktion mit denselben Werten der Eingangsvariablen liefert deshalb immer denselben Ausgangswert zurück. Die SPS-Norm enthält einen Katalog von Standardfunktionen, die in SPS-Systemen zur Verfügung stehen sollten. Falls eine spezielle Funktion benötigt wird, kann diese vom Anwender selbst erzeugt werden, dabei muss jedoch beachtet werden, dass keine internen Zustandsvariablen deklarierbar sind, da der Baustein typ Funktion dafür keine Speicherefähigkeit (Gedächtnis) besitzt. Eine Funktion stellt das Funktionsergebnis unter dem deklarierten Funktionsnamen zur Verfügung, sodass keine Ausgangsvariable deklariert werden muss. Es ist jedoch zulässig, Funktionen mit mehreren Ausgangsvariablen zu bilden. Funktionen können innerhalb eines Programmzyklus mehrfach aufgerufen werden, um mit unterschiedlichen Werten der Eingangsvariablen entsprechende Funktionsergebnisse zu ermitteln.

**Funktionsbaustein:** Dieser POE-Typ ist geeignet, wenn aus den Werten von Eingangs- und Ausgangsvariablen sowie bausteininterner Zustandsvariablen neue Ergebnisse für eine oder mehrere Ausgangsvariablen ermittelt werden sollen. Alle Werte der Ausgangs- und Zustandsvariablen bleiben von einer Bearbeitung des Funktionsbausteins bis zur folgenden erhalten. Das bedeutet, dass es bei einer erneuten Bearbeitung des Funktionsbausteins mit den gleichen Werten der Eingangsvariablen zu anderen Ausgangsergebnissen kommen kann. Anschaulich spricht man hier von einem Baustein typ mit Gedächtnis. Um die Fähigkeiten eines Funktionsbausteins in einem Programm auch mehrfach nutzen zu können, ist die sog. *Instanziierung* der Funktionsbausteine erforderlich, worunter man das Erzeugen einer Kopie (Instanz) des Bausteins versteht. Jede Instanz muss mit einem eigenen Namen versehen werden. Unter dem Instanznamen werden die jeweils letztgültigen Variablenwerte auf entsprechenden Speicherplätzen verwaltet, während das Bausteinprogramm im Original verbleibt und dort den Instanzen bei deren Ausführung zur Verfügung steht. Die SPS-Norm schlägt viele Standardfunktionsbausteine vor, die in SPS-Systemen verfügbar sein sollten. Spezielle Funktionsbausteine können vom Anwender selbst erzeugt werden. Auch sie unterliegen bei ihrer Anwendung der Instanziierung.

**Programm:** Dieser POE-Typ bildet die oberste Hierarchieebene der Programmorganisationseinheiten. Die SPS-Norm sieht vor, dass Programme (P) in Ressourcen (SPS-Systeme) auch instanziiert werden können. Einige SPS-Systeme verwenden den Baustein typ Programm (P) als alleiniges Hauptprogramm zur Organisation des Anwenderprogramms, dass aus Funktionen (FC) und Funktionsbausteinen (FB) besteht. Der Programminhalt eines solchen (Haupt-)Programms besteht dann nur aus Aufrufen der Funktionen und Funktionsbausteine und um deren Eingangs-/Ausgangs-Variablen mit realen SPS-Ein-/Ausgängen zu verbinden.

### 3.2 Deklaration von FB- und FC-Bausteinen

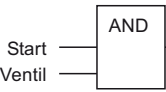
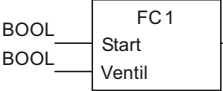
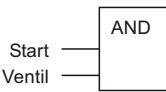
Anwenderprogramme bestehen immer auch aus sog. abgeleiteten Funktionen (FC) und/oder Funktionsbausteinen (FB), die erst durch Deklaration und Programmierung erzeugt werden müssen. Dabei sind Vorschriften zu beachten. Die Deklaration bezieht sich auf die Festlegung des Bausteintyps und auf die Bildung der Außenschnittstelle mit ihren Eingangs- und Ausgangsvariablen (-parametern) sowie der außen nicht erkennbaren bausteininternen Zustandsvariablen bei Funktionsbausteinen. Die Programmierung bezieht sich auf den Bausteinrumpf, der die Steuerungslogik enthalten muss. Deklaration und Programmierung kann in Textform oder in Grafik erfolgen.

#### • Erstellen einer Funktion mit dem Funktionsnamen FC 1

Bei der Deklaration in Textform sind folgende Elemente zu verwenden:

- das einleitende Schlüsselwort **FUNCTION** gefolgt vom Funktionsnamen, einem Doppelpunkt und dem Datentyp des Funktionswertes,
- das Konstrukt **VAR\_INPUT...END VAR**, mit dem die Namen und Datentypen der Eingangsvariablen der Funktion festgelegt werden,
- das Konstrukt **VAR\_OUT...END VAR** für die Namen und Datentypen von Ausgangsvariablen,
- das Konstrukt **VAR\_IN\_OUT...END VAR**, das die Namen und Datentypen von Durchgangsvariablen der Funktion festlegt,
- falls erforderlich das Konstrukt **VAR...END VAR**, mit dem die Namen und Datentypen von internen temporären Hilfsvariablen festgelegt werden können, deren Daten jedoch bei Beendigung der Funktion verloren gehen,
- einen Funktionsrumpf mit dem auszuführenden Programm,
- das abschließende Schlüsselwort **END\_FUNCTION**.

■ **Beispiel 1:** Deklaration einer Funktion FC

| Allgemein                                                                                                                                                                                                   | Ausführung in Textform                                                                                                                                                                                                                                            | Ausführung in Grafik                                                                                                                                                                                                                                                        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>FUNCTION FC1 : BOOL</b><br>(*Außenschnittstelle*)<br><b>VAR_INPUT</b><br>Bezeichner1 : Datentyp ;<br>Bezeichner2 : Datentyp ;<br><b>END_VAR</b><br>(*Funktionsrumpf*)<br>Programm<br><b>END_FUNCTION</b> | <b>FUNCTION FC1 : BOOL</b><br>(*Außenschnittstelle*)<br><b>VAR_INPUT</b><br>Start : BOOL ;<br>Ventil : BOOL ;<br><b>END_VAR</b><br>(*Funktionsrumpf*)<br><br><b>END_FUNCTION</b> | <b>FUNCTION FC1 : BOOL</b><br>(*Außenschnittstelle*)<br><br>(*Funktionsrumpf*)<br><br><b>END_FUNCTION</b> |

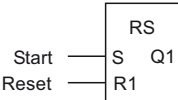
• **Erstellen eines Funktionsbausteins mit dem Namen FB 1:**

Die Deklaration eines Anwender-Funktionsbausteins in Textform erfolgt in ähnlicher Weise wie bei der Anwender-Funktion, dabei sind folgende Elemente zu verwenden:

- das einleitende Schlüsselwort **FUNCTION\_BLOCK** gefolgt vom Funktionsbausteinnamen ohne einen Datentyp,
- das Konstrukt **VAR\_INPUT...END VAR**, mit dem die Namen und Datentypen der Eingangsvariablen des Funktionsbausteins festgelegt werden,
- das Konstrukt **VAR\_OUTPUT...END VAR**, mit dem die Namen und Datentypen der Ausgangsvariablen des Funktionsbausteins deklariert werden (mehrere Ausgangsvariablen sind zulässig),

- das Konstrukt **VAR\_IN\_OUT...END VAR**, das die Namen und Datentypen von Durchgangsvariablen des Funktionsbausteins festlegt, deren Werte innerhalb des Bausteins durch das Programm verändert werden dürfen,
- das Konstrukt **VAR...END VAR**, das die Namen und Datentypen der bausteininternen Zustandsvariablen des Funktionsbausteins festlegt. Dieses Konstrukt wird auch verwendet, um im Funktionsbaustein eine Instanz eines Standardfunktionsbausteins zu erzeugen,
- einen Funktionsbausteinrumpf mit dem auszuführenden Programm,
- das abschließende Schlüsselwort **END\_FUNCTION\_BLOCK**.

■ **Beispiel 2:** Deklaration eines Funktionsbausteins FB

| Allgemein                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Ausführung in Textform                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Ausführung in Grafik                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>FUNCTION_BLOCK FB 1</b><br>(*Außenschnittstelle*)<br><b>VAR_INPUT</b><br>Bezeichner_1 : Datentyp ;<br>Bezeichner_2 : Datentyp ;<br><b>END_VAR</b><br><b>VAR_OUTPUT</b><br>Bezeichner_3 : Datentyp ;<br><b>END_VAR</b><br><b>VAR</b><br>Bezeichner_4 : Datentyp ;<br><b>END_VAR</b><br>(*Funktionsbausteinrumpf*)<br><br>Programm<br><br><b>END_FUNCTION_BLOCK</b> | <b>FUNCTION_BLOCK FB 1</b><br>(*Außenschnittstelle*)<br><b>VAR_INPUT</b><br>Start : BOOL ;<br>Reset : BOOL ;<br><b>END_VAR</b><br><b>VAR_OUTPUT</b><br>Ausg : BOOL ;<br><b>END_VAR</b><br><b>VAR</b><br>SRO_1 : RS ;<br><b>END_VAR</b><br>(*Funktionsbausteinrumpf*)<br><br><b>END_FUNCTION_BLOCK</b> | <b>FUNCTION_BLOCK FB 1</b><br>(*Außenschnittstelle*)<br><br>(*Funktionsbausteinrumpf*)<br><br><b>END_FUNCTION_BLOCK</b> |

**3.3 Variablen**

In Funktionen (FC) und Funktionsbausteinen (FB) sollte nur mit symbolischen Variablen programmiert werden, um damit bibliotheksfähige Programme zu erhalten, die keine Festlegungen bezüglich der Ver-

wendung realer SPS-Eingänge/Ausgänge oder Merker enthalten. Erst auf der Ebene der Programme (P) sollte die Zuordnung der SPS-Eingänge/Ausgänge/Zähler/Zeitglieder zu den direkten (realen) Eingangs- und Ausgangsvariablen erfolgen.

Eine **Variable** ist ein mit einem Namen (Bezeichner) versehener Speicherplatz, der im Anwenderprogramm als Platzhalter für Daten fungiert, die sich zur Laufzeit des Programms ändern können. Diese Variablen können symbolisch oder direkt adressiert sein.

Unter **Daten** sollen hier Informationen aus technischen Anlagen verstanden werden, wie z.B. Messdaten über Temperaturen, Füllstände, Durchflussmengen, die verarbeitet und gespeichert werden müssen. Die Variablen sind die Mittel, um die Daten zu erfassen. Dabei wird für die Variablen ein bestimmter Datentyp festgelegt. Dieser Datentyp hängt direkt zusammen mit den auf ihn zulässigen Operationen.

**Einzelelement-Variablen** enthalten einzelne Datenelemente mit einfachem Datentyp, die in der Tabelle 1 auszugsweise dargestellt und bei der Deklaration der Variablen zu berücksichtigen sind.

Die Deklaration symbolischer Variablen erfolgt im dafür vorgesehenen Deklarationsteil der Bausteine unter einem Namen (Bezeichner) durch Verwendung von Schlüsselwörtern wie VAR, VAR\_INPUT, VAR\_OUTPUT, VAR\_IN\_OUT und Angabe eines Datentyps wie bei der Deklaration der Bausteine FC und FB bereits gezeigt. Der Speicherort wird durch das Betriebssystem automatisch festgelegt. Der Gültigkeitsbereich einer symbolischen Variablen ist lokal auf den Baustein beschränkt, in dem sie deklariert wurde, d.h. die Variable ist nur in diesem Baustein

bekannt. Eine Ausnahme von dieser Regel bilden symbolisch adressierte Globalvariablen, die in allen Bausteinen der SPS bekannt sind aber nur sparsam verwendet werden sollten. Bei der Deklaration von Variablen in Textform sind die in Tabelle 2 angegebenen Schlüsselwörter zu verwenden. Bei grafischer Deklaration führt das Programmiersystem die Anwendung dieser Regeln im Hintergrund aus.

**Multielement-Variablen** enthalten mehrere Datenelemente die in Feldern (Arrays) oder Strukturen zusammengefasst sind

- Feld (Array):

Ein Feld ist eine Sammlung von Datenelementen des gleichen Datentyps, die durch in eckigen Klammern [ ] angegebene Feldindizes angesprochen werden. Als Datentyp für Indizes sind z.B. INT, WORD, BYTE, BOOL zulässig. Es gibt eindimensionale und mehrdimensionale Felder.

■ **Beispiel 3:** Eindimensionales Feld

```
(*Deklaration*)
VAR
  Tabelle : ARRAY [0..3] OF BYTE :=
    16#00, 16#0F, 16#80, 16#FF ;
END_VAR
VAR_OUTPUT
  Wert : BYTE ;
END_VAR
(*Abfrage*)
Wert := Tabelle [2] ;
```

**Tabelle 1** Elementare Datentypen

| Schlüsselwort                                                                                                                                                                                       | Datentyp                            | Größe  | Schreibweise und Wertebereiche                                          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|--------|-------------------------------------------------------------------------|
| <b>Bit-Datentypen</b>                                                                                                                                                                               |                                     |        |                                                                         |
| BOOL                                                                                                                                                                                                | Boolesche Variablen                 | 1 Bit  | FALSE, TRUE                                                             |
| BYTE                                                                                                                                                                                                | Bit-Folge und<br>8 Bit-Hex-Zahlen   | 8 Bit  | 16# 0...FF                                                              |
| WORD                                                                                                                                                                                                | Bit-Folge und<br>16 Bit-Hex-Zahlen  | 16 Bit | 16# 0000...FFFF                                                         |
| DWORD                                                                                                                                                                                               | Bit-Folge und<br>32 Bit-Hex-Zahlen  | 32 Bit | 16# 0000_0000...FFFF_FFFF                                               |
| CHAR                                                                                                                                                                                                | ASCII-Zeichen                       | 8Bit   | ‘A’                                                                     |
| <b>Arithmetiktypen</b>                                                                                                                                                                              |                                     |        |                                                                         |
| INT                                                                                                                                                                                                 | Ganze Zahlen<br>(Festpunktzahlen)   | 16 Bit | −32768 bis +32767                                                       |
| DINT                                                                                                                                                                                                | Ganze Zahlen<br>(Festpunktzahlen)   | 32 Bit | L# −2147483648 bis +2147483647                                          |
| REAL                                                                                                                                                                                                | Reelle Zahlen<br>(Gleitpunktzahlen) | 32 Bit | Dezimalzahl mit Punkt: 341.7 oder<br>Exponentialdarstellung: 3.417 E+02 |
| <b>Zeittypen</b>                                                                                                                                                                                    |                                     |        |                                                                         |
| TIME                                                                                                                                                                                                | Zeitdauer<br>(IEC-Format)           | 32 Bit | TIME# −24d20h31m bis +24d20h31m                                         |
| TIME OF DAY                                                                                                                                                                                         | Uhrzeit<br>(Tageszeit)              | 32 Bit | TIME_OF_DAY#23:59:59,9                                                  |
| DATE                                                                                                                                                                                                | Datum                               | 16 Bit | DATE#1990-01-01                                                         |
| Hinweis: Es existiert kein besonderer Datentyp für BCD-Zahlen (Binär Codierte Dezimalzahlen), diese sind eine Teilmenge der Hexadezimalzahlen, für die es die Datentypen BYTE, WORD und DWORD gibt. |                                     |        |                                                                         |

Tabelle 2 Schlüsselwörter zur Deklaration von Variablen

| Schlüsselwort                 | Bezeichnung und Gebrauch der Variablen                                                         |
|-------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>VAR_INPUT ... END_VAR</b>  | Eingangsvariable: Von außerhalb kommend, nicht innerhalb des Bausteins änderbar.               |
| <b>VAR_OUTPUT ... END_VAR</b> | Ausgangsvariable: Nach außen lieferbar.                                                        |
| <b>VAR_IN_OUT ... END_VAR</b> | DurchgangsvARIABLE: Von außen kommend, innerhalb des Bausteins änderbar, nach außen lieferbar. |
| <b>VAR ... END_VAR</b>        | Zustandsvariable: Gebrauch nur innerhalb des Bausteines                                        |
| <b>VAR_GLOBAL ... END_VAR</b> | Globalvariable: Globaler Geltungsbereich in SPS                                                |
| <b>VAR RETAIN</b>             | Zustandsvariable gepuffert (Remanenzverhalten).                                                |
| <b>CONSTANT</b>               | „Konstante Variable“, nicht veränderbar.                                                       |
| <b>AT</b>                     | Zuweisung eines direkten Speicherortes.                                                        |

• Struktur:

Eine Struktur ist eine Sammlung von Datenelementen unterschiedlicher Datentypen. Die Datenelemente sind in einer Hierarchie geordnet, z.B. Produkt, Version, Seriennummer, Datum.

Direkte Variablen

In der obersten Hierarchieebene der Programmorganisationseinheiten steht der Bausteintyp Programm (P). In diesem Baustein müssen nicht nur die zum Anwenderprogramm gehörenden Funktionsbausteine (FB) und Funktionen (FC) aufgerufen, sondern auch die Verbindungen zu den SPS-Eingängen/Ausgängen hergestellt werden. Nach den Vorschriften der Norm IEC 61131-3 sind diese Adressen dem Programm (P) jedoch nicht automatisch bekannt, d.h. sie müssen erst durch Deklaration bekannt gemacht werden, dazu dienen die sog. direkten Variablen. Bei der direkten Adressierung von Variablen wird als Variablenname der physikalische Speicherort des

Datenelements verwendet, also ein SPS-Eingang/ Ausgang oder auch Merker. Zur Unterscheidung der direkten Variablen von ihrem Speicherort wird ein vorgesetztes Prozentzeichen (%) gefolgt von einem Präfix zur Kennzeichnung des Speicherortes und ein Präfix für die Speichergröße verwendet, wie in der Tabelle 3 angegeben.

■ Beispiel 4: Deklaration einer direkten Variablen

| Allgemein                                                       | Ausführung in Textform                                    |
|-----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| <b>VAR</b><br><b>AT</b> %Operand : Datentyp ;<br><b>END_VAR</b> | <b>VAR</b><br><b>AT</b> %IX4.7 : BOOL ;<br><b>END_VAR</b> |

In einer zweiten Variante können zur Erzielung einer besseren Programmlesbarkeit Variablennamen eingeführt werden, die jedoch im Unterschied zu den richtigen symbolischen Variablen direkt mit dem physikalischen Speicherort (SPS-Eingang/Ausgang, Merker) verbunden sind (Beispiel 5).

Tabelle 3 Präfix für Speicherort und Größe der Operanden

| Präfix           | Bedeutung                                                                              | Beispiele für direkte Variablen                                                                                                                                                                                                                                                                |
|------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| I<br>Q<br>M      | Speicherort Eingang<br>Speicherort Ausgang<br>Speicherort Merker                       | Einzel-Eingänge      %IX0.7... %IX0.0<br>Einzel-Ausgänge    %QX0.7...%QX0.0<br>Eingangsbyte        %IB0 = %IX0.7...%IX0.0<br>Ausgangsbyte        %QB0 = %QX0.7...%QX0.0<br>Eingangswort        %IW0 = %IB0+%IB1<br>Ausgangswort        %QW0 = %QB0+%QB1<br>Eingangsdoppelwort %ID0 = %IW0+%IW1 |
| X<br>B<br>W<br>D | (Einzel)-Bit-Größe<br>Byte-(8 Bit) Größe<br>Wort-(16 Bit) Größe<br>Doppelwort-(32 Bit) |                                                                                                                                                                                                                                                                                                |

■ Beispiel 5: Deklaration einer direkten Variablen mit symbolischen Namen

| Allgemein                                                                  | Beispiel                                                              |
|----------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| <b>VAR</b><br>Bezeichner <b>AT</b> %Operand : Datentyp ;<br><b>END_VAR</b> | <b>VAR</b><br>Endschalter <b>AT</b> %IX4.7 : BOOL ;<br><b>END_VAR</b> |

Anm.: Direkte Variablen sollten nicht in den Bausteintypen FB und FC verwendet werden, weil diese Programmteile dadurch hardwarespezifische Festlegungen enthalten würden wie beispielsweise, an welchen SPS-Eingang ein bestimmter Sensor angeschlossen wird. Das aber widerspricht der Forderung nach einer bibliotheksfähigen Gestaltung von FB- und FC-Bausteinen.

Globale Variablen

Globale Variablen sind solche, die durch eine entsprechende Deklaration in allen Bausteintypen innerhalb einer SPS bekannt gemacht wurden, also einen globalen Geltungsbereich haben. Der Deklarationsort ist der Baustein Programm (P).

Globale Variablen werden verwendet, um auf einfache Art einen bausteinübergreifenden Datenaustausch zu erreichen. Das kann jedoch unerwünschte Nebenwirkungen haben und die Verwendbarkeit eines Bausteins einschränken. Eine bessere Lösung besteht in der Deklaration von Übergabvariablen im Baustein Programm (P), um die entsprechenden Eingänge und Ausgänge der dort aufgerufenen Bausteine miteinander zu verbinden.

Beispiel 6: Deklaration einer Globalvariablen

```
PROGRAM PRG
(*Deklaration*)
VAR_GLOBAL
  Bezeichner : Datentyp ;
END_VAR
(*Programmrumpf*)
Programm
END_PROGRAM
```

3.4 Programmiersprachen

Zur Erstellung der Steuerungsprogramme mit Hilfe einer Programmiersoftware stehen gemäß DIN EN 61131-3 fünf Programmiersprachen zur Verfügung stehen: Zwei textuelle Fachsprachen (AWL, ST) und zwei grafische Fachsprachen (KOP, FBS) sowie die übergeordnete Ablaufsprache (AS) mit grafischen und textuellen Elementen.

Der Programmierer kann auswählen, ob er das Bausteinprogramm in einer grafischen Sprache oder in einer Textsprache programmieren will.

- Für die grafischen Sprachen stehen in Standardbibliotheken grafische Symbole für Standardfunktionen (FC) und Standardfunktionsbausteine (FB) zur Verfügung. Diese Bausteinsymbole müssen in das Anwenderprogramm je nach Bedarf eingefügt werden, um die bezeichneten Aktionen dort ausführen zu lassen.
- Die Textsprachen benutzen anstelle von Standardbausteinen sog. Standardoperatoren, die der Programmiersprache implizit bekannt sind. Ein Operator ist ein textliches Symbol, das eine Aktion darstellt, die an einem Operanden, d.h. einer symbolischen oder direkten Variable, ausgeführt wird.

Bei der Textsprache AWL stehen die einzelnen Anweisungen in Listenform untereinander. Jede Anweisung besteht aus einem Operator, der ggf. mit einem Modifizierer ergänzt wird {N für eine Negation, C für eine Bedingung, ( für Klammer auf, ) für Klammer zu}, gefolgt von einem oder mehreren durch Kommas getrennten Operanden. Eine Anweisung kann auch durch eine Sprungmarke gekennzeichnet sein. Die Verarbeitung der Anweisungen erfolgt in einem Ergebnisregister, dieses enthält das sog. Aktuelle Ergebnis (AE), das auf folgende Weise für das Beispiel in Bild 3 ermittelt wird:

- LD E0 Lade den Wert des 1. Operanden (E0) in das Ergebnisregister
- ANDN E1 Verknüpfe das Aktuelle Ergebnis mit dem negierten Wert des 2. Operanden (E1)
- ST A4 Speichere das veränderte Aktuelle Ergebnis im Zieloperanden (A4)

Die Tabelle 4 zeigt die Standardoperatoren der Anweisungsliste (AWL) mit kurzen Erläuterungen, auf die nicht mehr weiter eingegangen wird. Die den Standardoperatoren entsprechenden Standardbausteine werden weiter unten jedoch noch näher dargestellt.

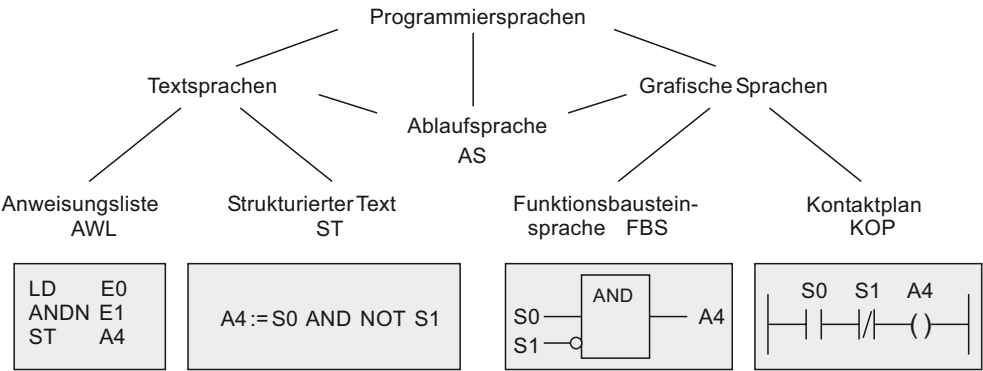


Bild 3 Übersicht zu genormten SPS-Programmiersprachen

**Tabelle 4** Operatoren der Anweisungsliste (AWL)

| Operator   | Modifizierer | Operand/Typ          | Bedeutung                                                                      |
|------------|--------------|----------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| LD (Load)  | N            | Variable/Bool        | Setzt das aktuelle Ergebnis (AE) dem Operanden gleich.                         |
| ST (Store) | N            |                      | Speichert das aktuelle Ergebnis (boolesche 1 oder 0) auf die Operandenadresse. |
| S (Set)    |              |                      | Setzt booleschen Operator auf 1                                                |
| R (Reset)  |              |                      | Setzt booleschen Operator auf 0 zurück                                         |
| AND        | N, (         |                      | Boolesches UND                                                                 |
| OR         | N, (         |                      | Boolesches ODER                                                                |
| XOR        | N, (         |                      | Boolesches Exklusiv-ODER                                                       |
| )          |              |                      | Bearbeitet die eingeklammerte Operation                                        |
| CAL (Call) | C, N         | Instanzname<br>Marke | Aufruf eines Funktionsbausteins                                                |
| JMP        | C, N         |                      | Sprung zur Marke                                                               |
| GT         | (            |                      | Vergleich auf größer als, >                                                    |
| GE         | (            |                      | Vergleich auf größer gleich, >=                                                |
| EQ         | (            |                      | Vergleich auf ist gleich, =                                                    |
| NE         | (            |                      | Vergleich auf ungleich, <>                                                     |
| LE         | (            |                      | Vergleich auf kleiner gleich, <=                                               |
| LT         | (            |                      | Vergleich auf kleiner als, <                                                   |
| ADD        | (            |                      | Addition                                                                       |
| SUB        | (            |                      | Subtraktion                                                                    |
| MUL        | (            |                      | Multiplikation                                                                 |
| DIV        | (            |                      | Division                                                                       |
|            | (            |                      |                                                                                |

**4 Programmstrukturen**

Unter einer Programmstruktur versteht man den Aufbau eines Anwenderprogramms aus Codebausteinen. Es können drei Strukturen unterschieden werden.

**4.1 Lineares Programm**

Das gesamte Programm befindet sich in dem zyklisch bearbeiteten Programm (P). Die CPU arbeitet die Anweisungen der Reihe nach ab und beginnt dann wieder von vorne, wie in Bild 4 gezeigt.

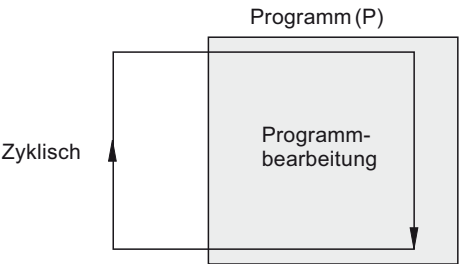


**Bild 4** Lineares Programm

**4.2 Gegliedertes Programm**

Das Programm ist in mehrere Bausteine aufgeteilt, wobei jeder Baustein nur das Programm einer Teil-

aufgabe enthält. Die Programmorganisationseinheit Programm (P) enthält die Aufruf-Anweisungen, nach deren Reihenfolge die einzelnen Bausteine bearbeitet werden. Gegenüber dem linearen Programm besteht der Vorteil in den besser überschaubaren kleinen Einheiten. Bild 5 lässt die Gliederungsstruktur und den Aufruf der beiden Funktionen mit der erforderlichen Parameterübergabe erkennen.

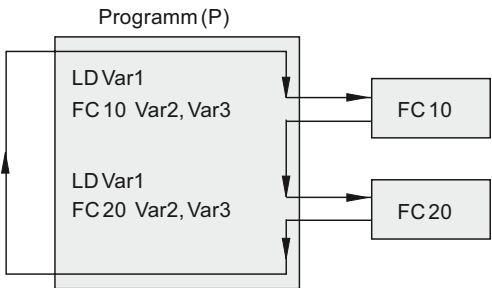


**Bild 5** Das Steuerungsprogramm besteht aus zwei unterschiedlichen Programmteilen

**4.3 Parametrierbares Programm**

Ein Unterprogramm ist parametrierbar, wenn es seine Eingangs- und Ausgangsvariablen dem Hauptprogramm bei jedem Aufruf erneut zur Verfügung stellt und sein Programm für jeden Aufruf erneut ausführt,

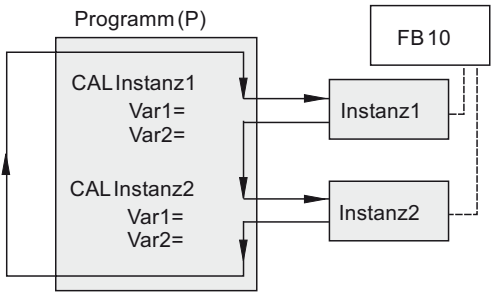


**Bild 6** Das Steuerungsprogramm besteht aus zwei Instanzen eines Programmteils

um so aufrufspezifische Ergebnisse zu erzielen. Im Bild 6 ist die Parametrierbarkeit am Beispiel eines Funktionsbausteins (FB) dargestellt. Grundsätzlich ist dies auch bei Funktion (FC) möglich, jedoch mit der Einschränkung der nicht gegebenen Gedächtnisfähigkeit dieses Bausteintyps.

**5 Eingabe- und Ausgabesignale**

In den technischen Prozessen treten physikalische Größen wie Temperaturen, Drucke, Durchflüsse etc. auf. Automatisierungsgeräte können in der Regel nur elektrische Signale erkennen und ausgeben. Wo erforderlich, muss also eine Signalumwandlung erfolgen. Man unterscheidet verschiedene Signalarten.

**5.1 Binäre Signale**

Ein binäres Signal ist ein 1 Bit-Signal, das nur einen von zwei möglichen Signalzuständen annehmen kann. Ein typischer Binärsignal-Geber ist ein Schalter.

Ein Signal heißt binär, wenn es nur zweier Werte fähig ist: (TRUE = 1, FALSE = 0). Die SPS-Hersteller haben für ihre Steuerungskomponenten ein Toleranzschema festgelegt, das den Wertebereich konkreter Spannungen den binären Signalzuständen zuordnet, die von den Geräten verarbeitet werden.

Die Automatisierungsgeräte können nicht den Schaltzustand von angeschlossenen Schaltern, sondern nur

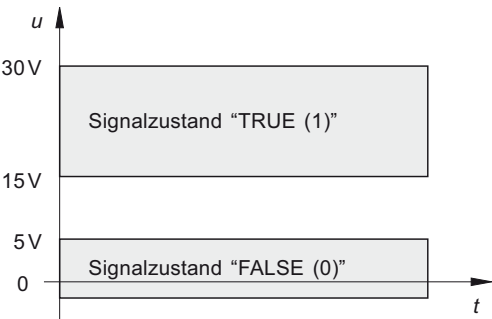


**Bild 7** Signalzustände und Spannungspegel

anliegende Signale erkennen, d.h. die unterschiedliche Wirkung von Öffner- und Schließerkontakten in Anlagen muss bei der Programmerstellung bedacht werden.

Offene (unbeschaltete) Steuerungseingänge erzeugen Signalzustand „0“.

**5.2 Digitale Signale**

Ein digitales Signal ist eine mehrstellige Bitkette, die durch Codierung eine festgelegte Bedeutung erhält, z.B. als Zahlenwert. Ein typischer Digitalsignal-Geber ist ein Zifferneinsteller. Um z.B. die Zahlen 0 bis 9 darstellen zu können, sind vier Binärstellen erforderlich.

| Dezimalzahl | Dualzahl |   |   |   | Wert |
|-------------|----------|---|---|---|------|
|             | 8        | 4 | 2 | 1 |      |
| 0           | 0        | 0 | 0 | 0 |      |
| 1           | 0        | 0 | 0 | 1 |      |
| 2           | 0        | 0 | 1 | 0 |      |
| 3           | 0        | 0 | 1 | 1 |      |
| 4           | 0        | 1 | 0 | 0 |      |
| 5           | 0        | 1 | 0 | 1 |      |
| 6           | 0        | 1 | 1 | 0 |      |
| 7           | 0        | 1 | 1 | 1 |      |
| 8           | 1        | 0 | 0 | 0 |      |
| 9           | 1        | 0 | 0 | 1 |      |

1 Binärstelle = 1 Bit

1 Byte = 8 Bit

1 Wort = 2 Byte = 16 Bit

1 Doppelwort = 32 Bit

**5.3 Analoge Signale**

Für ein analoges Signal ist charakteristisch, dass der Signalparameter (z.B. die Spannung) innerhalb bestimmter Grenzen jeden beliebigen Wert annehmen kann. Automatisierungsgeräte können intern keine analogen Signale verarbeiten. So genannte Analogbaugruppen nehmen eine Signalumsetzung vor und wandeln ein analoges Signal in ein digitales Signal um bzw. auch umgekehrt.

**6 Eingabe-/Ausgabebaugruppen**

Die im Bild 1 angedeuteten Eingabe- und Ausgabebaugruppen der SPS werden üblicherweise als zentrale digitale Eingabe- und Ausgabebaugruppen bezeichnet im Gegensatz zu den dezentralen Baugruppen (Slaves), die über ein Feldbussystem angeschlossen sind. Die digitalen Eingabe- und Ausgabebaugruppen umfassen meistens 1 Byte = 8 Bit; 2 Byte = 16 Bit; 4 Byte = 32 Bit Eingänge bzw. Ausgänge. Im Steuerungsprogramm können Bits, Bytes, Worte oder Doppelworte abgefragt oder angesteuert werden. Bei Analogbaugruppen sind entsprechend die Anzahl der Eingänge bzw. Ausgänge angegeben.



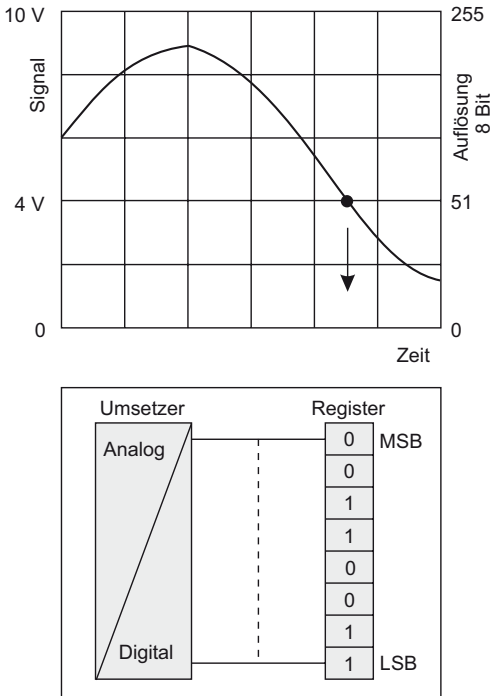


**Bild 8** Ein Spannungswert wird in eine Zahl umgesetzt (vereinfacht)

*Digitaleingabebaugruppen* gibt es für DC 24 V und AC 120/230 V mit Potenzialtrennung über Optokoppler sowie Anzeige des aktuellen Signalzustandes durch Leuchtdioden. Aufgrund von Filtermaßnahmen gegen Störsignale liegt die Frequenzobergrenze für Eingangssignale bei etwa 50 Hz. Die Digitaleingabebaugruppen formen die Pegel der externen digitalen Signale aus dem Prozess in den internen Signalpegel des SPS-Systems um. Die Baugruppen sind z.B. geeignet für den Anschluss von Schaltern und 2-Draht-Näherungsschaltern (BERO).

*Digitalausgabebaugruppen* gibt es für Lastspannungen DC 24 V oder AC 120/230 V bei spezifizierter Strombelastbarkeit und Potenzialtrennung mittels Optokoppler. Die Schaltfrequenz der Ausgänge wird nach ohmscher Last, induktiver Last und Lampenlast unterschieden und liegt im Bereich bis 100 Hz. Die Digitalausgabebaugruppen formen den internen Signalpegel des SPS-Systems in die externen, für den Prozess benötigten Signalpegel um. Die Baugruppen sind z.B. geeignet für den Anschluss von Magnetventilen, Schützen, Kleinmotoren, Lampen und Motorstartern.

*Analogeingabebaugruppen* wandeln analoge Signale aus dem Prozess in digitale Signale für die interne Verarbeitung innerhalb der SPS um. Es können Spannungs- und Stromgeber, Thermoelemente, Widerstände und Widerstandsthermometer angeschlossen werden:

|                        |                                                    |
|------------------------|----------------------------------------------------|
| Spannung               | z.B. $\pm 10$ V                                    |
| Strom                  | z.B. 4 bis 20 mA                                   |
| Widerstand             | z.B. 0 ... 300 Ohm                                 |
| Thermoelement          | z.B. Typ E, N, K mit Kennlinien – Linearisierung   |
| Widerstandsthermometer | z.B. Pt 100-Standard mit Kennlinien-Linearisierung |

Die Baugruppen verfügen über eine parametrierbare Auflösung von z.B. 9 bis 15 Bit + Vorzeichen, unterschiedliche Messbereiche (einstellbar durch Messbereichsmodule und Software) sowie Alarmfähigkeit (Diagnose und Grenzwertalarme an die CPU).

*Analogausgabebaugruppen* wandeln digitale Signale aus der SPS in analoge Signale für den Prozess um und sind für den Anschluss analoger Aktoren geeignet. Als Ausgangsbereiche werden angeboten:

|                  |                  |
|------------------|------------------|
| Spannungsausgang | z.B. $\pm 10$ V  |
| Stromausgang     | z.B. 0 bis 20 mA |

Die Baugruppen haben eine Auflösung von 12 bis 15 Bit. Es sind unterschiedliche Messbereiche je Kanal einstellbar.

## 7 Verknüpfungssteuerungen

SPS-Programme werden mit einem IEC 61131-3 orientierten Projektierungssystem (z.B. CoDeSys) als Projekte angelegt, in Bausteine programmiert und unter einem Dateinamen abgespeichert.

Als Verknüpfungssteuerungen bezeichnet man solche Programme, die Ausgangssignale überwiegend unter Verwendung einfacher Logikbeziehungen, Speicherfunktionen, Zeitglieder, Zähler u.a. in zyklischer Bearbeitungsweise erzeugen. Damit stellen Verknüpfungssteuerungen den größten Teil der SPS-Programme dar. Neben den Verknüpfungssteuerungen gibt es noch die Programmart der Ablaufsteuerungen.

### 7.1 Logische Grundverknüpfungen in verschiedenen Darstellungen

Nachfolgend wird eine Auswahl wichtiger Programmierfunktionen zur Realisierung von Verknüpfungssteuerungen gezeigt. In Bild 9 werden die logischen Grundverknüpfungen UND, ODER, NEGATION gezeigt. Die in diesen Beispielen vorkommenden Eingangs-/Ausgangsbezeichnungen wie E1, E2, A4 oder auch S1 usw. sind als kurze Namen von deklarerter Variablen mit zutreffenden Datentyp in entsprechenden Bausteinen zu betrachten und nicht zu verwechseln mit bekannten SPS-Operanden.

### 7.2 Zusammengesetzte logische Grundverknüpfungen

Zu den logischen Grundverknüpfungen zählen auch die beiden häufig vorkommenden Strukturen UND-



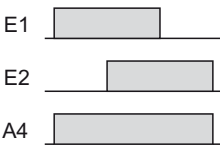
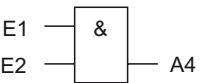
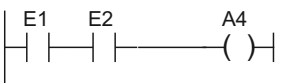
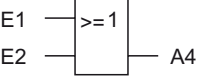
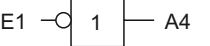
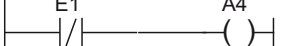
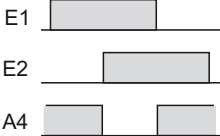
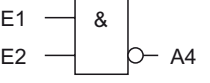
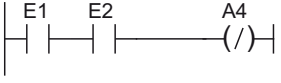
| Funktion                                                             | Zeitdiagramm                                                                      | FBS                                                                               | KOP                                                                                | AWL                       |
|----------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| <b>UND</b><br>$A4 = E1 \wedge E2$<br>$A4 = E1 \& E2$<br>$A4 = E1 E2$ |  |  |  | LD E1<br>AND E2<br>ST A4  |
| <b>ODER</b><br>$A4 = E1 \vee E2$                                     |  |  |  | LD E1<br>OR E2<br>ST A4   |
| <b>NICHT</b><br>$A4 = \overline{E1}$                                 |  |  |  | LDN E1<br>ST A4           |
| <b>Ausgangs-NEGATION</b><br>$A4 = \overline{E1 \wedge E2}$           |  |  |  | LD E1<br>AND E2<br>STN A4 |

Bild 9 Logischen Grundverknüpfungen nach IEC 61131-3

vor-ODER sowie ODER-vor-UND, die in Bild 10 in grafischer Form (FBS) und Textform (AWL) dargestellt sind. Die zugehörigen Schaltfunktionen heißen

Disjunktive Normalform für die UND-vor-ODER-Struktur und Konjunktive Normalform für die ODER-vor-UND-Struktur.

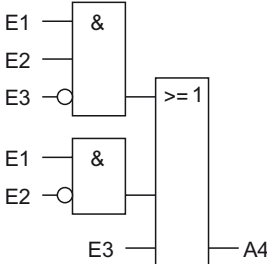
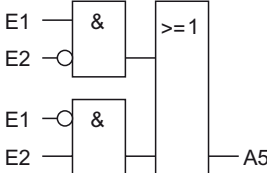
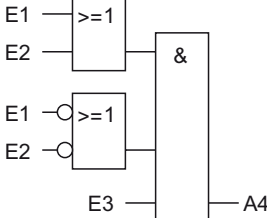
|                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                           |                                                                                                               |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>UND-vor-ODER-Verknüpfung</b><br><b>1) Allgemeiner Fall</b><br>siehe nachfolgend bei DNF<br>$A = E1 E2 \overline{E3} \vee E1 \overline{E2} \vee E3$<br><br><b>2) Spezieller Fall:</b><br><b>Antivalenz (Exklusiv-ODER)</b><br>$A = E1 \leftrightarrow E2$ | <br> | LD E1<br>AND E2<br>ANDN E3<br>OR(<br>AND E1<br>ANDN E2<br>)<br>OR E3<br>ST A4<br><br>LD E1<br>XOR E2<br>ST A5 |
| <b>ODER-vor-UND-Verknüpfung</b><br>$A = (E1 \vee E2) \wedge (E1 \vee E2) \wedge E3$                                                                                                                                                                         |                                                                                        | LD E1<br>OR E2<br>AND(<br>ORN E1<br>ORN E2<br>)<br>AND E3<br>ST A4                                            |

Bild 10 Zusammengesetzten logischen Grundverknüpfungen nach IEC 61131-3

7.3 Schließer- und Öffnerkontakte, Drahtbruchsicherheit, Erdschlussgefahr

Befehlsgeber können auf einer Schließer- oder Öffner-Funktion beruhen, d.h. bei Betätigung ein 1-Signal oder ein 0-Signal an den Steuerungseingang liefern. Ein Startbefehl für eine Steuerung ist mit einem 1-Signal, ein Haltbefehl mit einem 0-Signal auszuführen. Bei Gleichzeitigkeit muss der Haltbefehl Vorrang haben.

Das Einschalten einer Steuerung durch einen Schließerkontakt (Arbeitsstromprinzip) und das Ausschalten mit einem Öffnerkontakt (Ruhestromprinzip) macht die Steuerung drahtbruchsicher. Bei Auftreten eines Drahtbruchs erfolgt kein unbeabsichtigtes Einschalten der Steuerung, jedoch wird eine eingeschaltete Steuerung abgeschaltet. Die Erdschlussgefahr erfordert geerdete Steuerkreise oder Isolationsüberwachung.

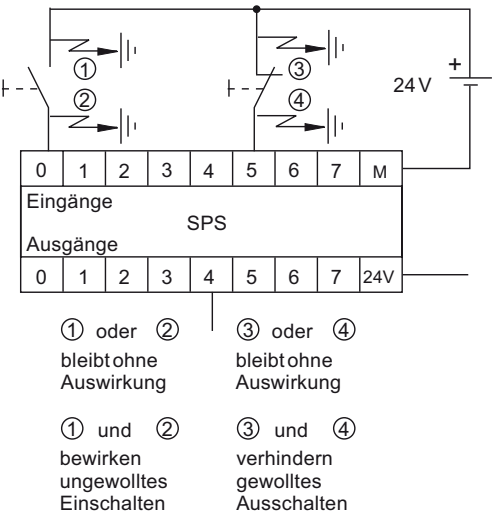


Bild 11 Auswirkungen von Erdschlüssen im nicht geerdeten Steuerkreis

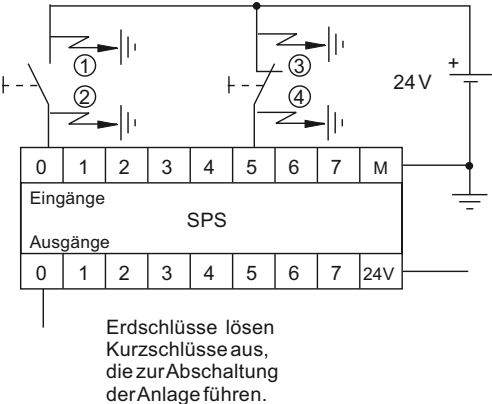
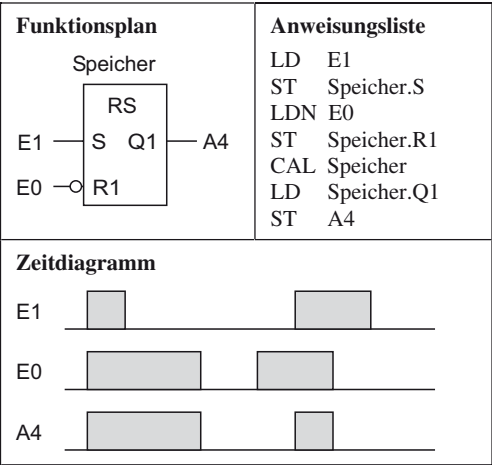


Bild 12 Auswirkung von Erdschlüssen im geerdeten Steuerkreis

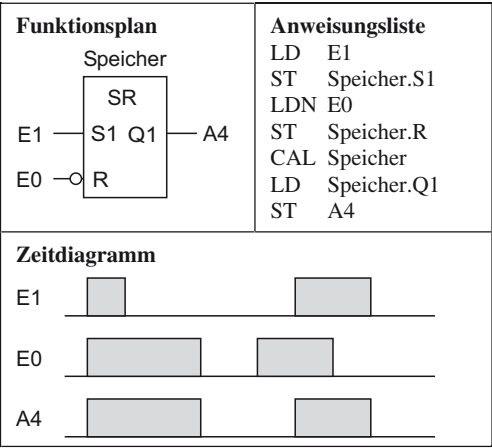
7.4 Speicherfunktionen

Viele Steuerungsaufgabe erfordern die Verwendung von Speicherfunktionen. Eine Speicherfunktion liegt dann vor, wenn ein kurzzeitig auftretender Signalzustand über den Programmzyklus hinaus festgehalten, d.h. gespeichert und erst zu einem späteren Zeitpunkt wieder gelöscht werden muss. Die Ausführung einer Speicherfunktion umfasst das Setzen und Rücksetzen des Speichers. Für die Speicherfunktionen stehen bistabile Standardfunktionsbausteine zur Verfügung, aus denen sich Instanzen zur Verwendung im Anwenderprogramm bilden lassen. Zu unterscheiden sind zwei Speicherbausteintypen, die unterschiedlich auf gleichzeitiges Eintreffen von Setz- und Rücksetzsignalen reagieren.

Speichern mit vorrangigem Rücksetzen



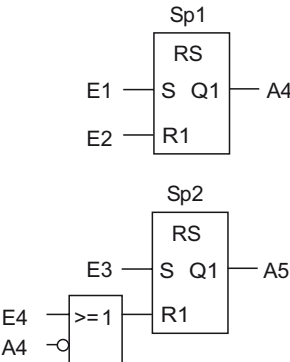
Speichern mit vorrangigem Setzen



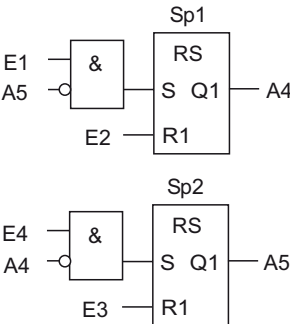
■ Gegenseitiges Verriegeln

Zwei Arten von Verriegelungen lassen sich unterscheiden, Bei dem gegenseitigen Verriegeln dürfen die Speicher nicht gleichzeitig gesetzt sein, z.B. für Motor-Rechtslauf und Linkslauf. Für die Ausführung von Speicherverriegelungen gibt es zwei Varianten.

Verriegeln über die Rücksetzeingänge



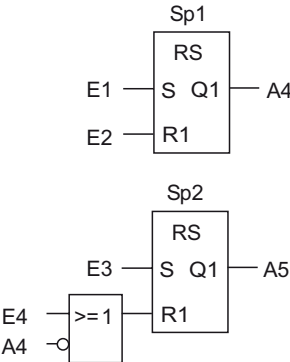
Verriegeln über die Setzeingänge



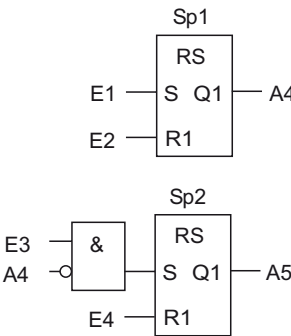
■ Reihenfolgeverriegelung

Bei einer Reihenfolgenverriegelung darf ein Speicher nur gesetzt werden, wenn zuvor ein oder mehrere andere Speicher gesetzt sind. Ein Beispiel sind hintereinander geschaltete Förderbänder. Auch bei der Reihenfolgeverriegelung gibt es zwei Ausführungsvarianten.

Verriegeln über den Rücksetzeingang



Verriegeln über den Setzeingang



7.5 Flankenauswertung

Die Flankenauswertung eines Signals ist dann erforderlich, wenn aus einem Signalwechsel von FALSE nach TRUE oder umgekehrt ein kurzer Impuls der Zeitdauer von einer Programmzykluszeit herzuleiten ist, unabhängig von der Betätigungsdauer des Signalgebers. Das ist z.B. wichtig, wenn bei einer Sicherheitsschaltung überprüft werden muss, ob ein Taster wirklich betätigt wurde oder nur dauerhaft durch Manipulation niedergehalten wird.

Im Bild 13 werden Beispiele gezeigt, wie die Impulsgewinnung unter Verwendung von Standardfunktionsbausteinen für Flankenerkennung gelöst werden kann. P-Flanke und N-Flanke sind die Namen der Instanzen der Funktionsbausteine. Der Zykluszeitimpuls steht als Impulsoperand IO zur Verfügung.

7.6 Darstellung und Eigenschaften elektropneumatischer Stellglieder

Elektropneumatische Stellglieder können mit Ausgangssignalen einer SPS angesteuert werden. Ihre Hilfsenergie ist Druckluft, mit der pneumatische Zylinder betätigt werden. Bild 14 zeigt drei häufig verwendete elektropneumatische Stellgliedertypen.

**3/2-Wegeventil:** Elektromagnetisches Ventil mit Rückstellfeder hat nur einen elektrischen Steuereingang Y1 und kann durch ein Stellsignal aus der Schaltstellung b in die Schaltstellung a geschaltet werden. Nach Beendigung des Stellsignals erfolgt eine federmechanische Rückstellung des Ventils, dessen Vorteil die definierte Schaltstellung im unbetätigten Zustand ist.

**5/2-Wegeventil:** Elektromagnetische Impulsventile haben zwei elektrische Steuereingänge Y1 und Y2, sie können durch kurze Ansteuerimpulse aus einer Schaltstellung in die andere umgeschaltet werden. Die Ventile übernehmen die RS-Speicherfunktion der Steuerung. Nachteil des Speicherverhaltens ist die nicht definierte Schaltstellung im unbetätigten Zustand, daher erfolgt meistens eine Ansteuerung von Y1 und Y2 mit inversen Signalen.

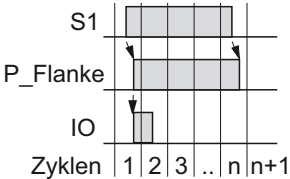
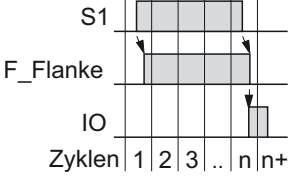
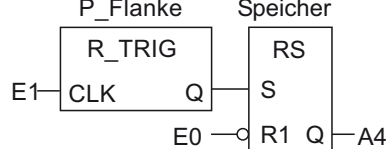
| FUP                                                                                                                                               | AWL                                                                                                                 | Zeitdiagramm                                                                                                                                                    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Positive (steigende) Flanke 0 → 1</b></p> <p>P_Flanke</p>  | <p>LD S1<br/>ST P_Flanke.CLK<br/>CAL P_Flanke<br/>LD P_Flanke.Q<br/>ST IO</p>                                       |                                                                               |
| <p><b>Negative (fallende) Flanke 1 → 0</b></p> <p>N_Flanke</p>   | <p>LD S1<br/>ST F_Flanke.CLK<br/>CAL F_Flanke<br/>LD F_Flanke.Q<br/>ST IO</p>                                       |                                                                               |
| <p>P_Flanke Speicher</p>                                         | <p>LD E1<br/>ST P_Flanke.CLK<br/>CAL P_Flanke<br/>LD P_Flanke.Q<br/>ST Speicher.S<br/>LDN E0<br/>ST Speicher.R1</p> | <p>Der Impulsoperanden IO kann entfallen, wenn die Flankenwertung nur an einer Stelle des Programms benötigt wird, im Beispiel zum Setzen des RS-Speichers.</p> |

Bild 13 Flankenwertung nach IEC 61131-3

**5/3-Wegeventil:** Bei elektromagnetischen Impulsventilen mit Federzentrierung geht das Ventil im unbetätigten Zustand in die Mittelstellung. Daher kann neben der Vorwärts- und Rückwärtsbewegung des Zylinderkolbens auch eine Halteposition veranlasst werden.

**Funktionsdiagramme** zeigen den Bewegungsverlauf von Zylindern. In der Ordinate wird der zurückgelegte Weg und in der Abszisse werden Schritte oder Zeiten aufgetragen. Zusätzlich können die Zustände von Magnetspulen der Ventile dargestellt werden.

7.7 Regeln für das Umsetzen von Schützschaltungen in SPS-Programme

Eine gegebene Schützsteuerung, die z.B. zur Ansteuerung von Elektromotoren oder Elektropneumatik eingesetzt wurde, kann durch eine SPS-Steuerung

unter sinngemäßer Anwendung der nachfolgenden Umsetzungsregeln ersetzt werden.

- 1. Der Hauptstromkreis wird unverändert außerhalb der SPS beibehalten.
- 2. Hauptschütze werden von den SPS-Ausgängen angesteuert und werden als OUT- oder IN-OUT-Variable deklariert. Der Schaltzustand des Hauptschützes wird somit außerhalb des Bausteins in einem SPS-Ausgang gespeichert. Wird ein Kontakt K1 des Hauptschützes K1 am Bausteineingang abgefragt, ist K1 als DurchgangsvARIABLE (IN\_OUT) zu deklarieren.
- 3. Hilfsschütze werden durch temporäre oder statische Variablen innerhalb des Bausteins ersetzt. Wenn Hilfsschütze interne Speicherfunktionen ausüben, muss für jedes Hilfsschütz eine statische SpeichervARIABLE (VAR) deklariert werden.

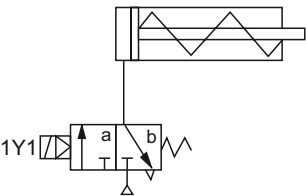
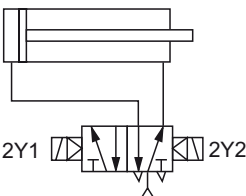
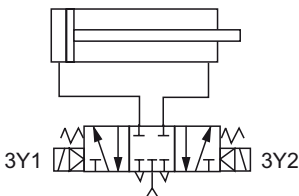
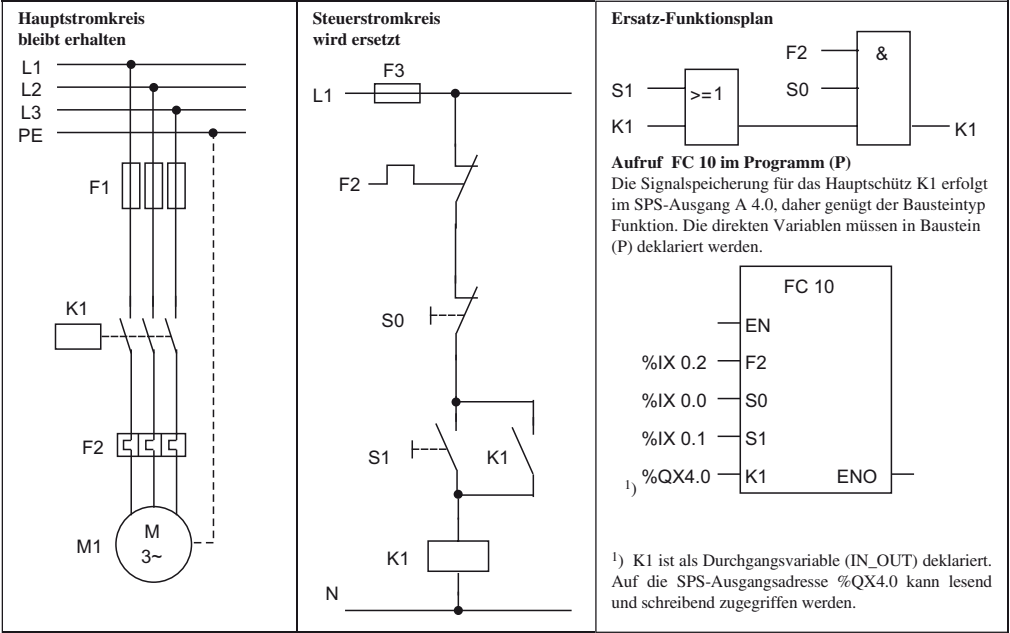
| Einfachwirkender Zylinder mit Ansteuerung durch ein 3/2-Wegeventil                  | Doppeltwirkender Zylinder mit Ansteuerung durch ein 5/2-Wegeventil                  | Doppeltwirkender Zylinder mit Ansteuerung durch ein 5/3-Wegeventil                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |

Bild 14 Beispiele elektropneumatischer Stellglieder

■ **Beispiel 7:** Umsetzung einer Schützschaltung in ein SPS-Programm



4. Parallelschaltungen von Schützkontakten werden durch ODER-Verknüpfungen und Reihenschaltungen durch UND-Verknüpfungen der Variablen ersetzt.
5. Öffner von Schützkontakten werden negiert und Schließer bejaht abgefragt.
6. Öffner- und Schließerkontakte von Signalgebern wie Taster und Schalter werden im Programm bejaht abgefragt und als Eingabevariablen deklariert, wenn derselbe Kontakttyp beibehalten wird.
7. Die bejahte Abfrage von Signalgebern in Regel 6 gilt nicht bei Verwendung der Speicherfunktion anstelle der Selbsthaltung.
8. Die Umsetzungsregeln 1 bis 6 verändern nicht die vorgegebene Steuerungsstruktur, wenn die Schütze keine Zeitverzögerungen oder Wischerkontakte enthalten. Einschalt- und Ausschaltverzögerungen müssen mit Zeitgliedern und Wischerkontakten mit Flankenauswertung nachgebildet werden. Impulse von Wischerkontakten beim Einschalten (Ausschalten) entsprechen steigenden (fallenden) Flanken.

**7.8 Zeitfunktionen**

Die Zeitbildung ist eine Grundfunktion der Steuerungstechnik. Es können zeitliche Abläufe, wie Warte- und Überwachungszeiten, Zeitmessungen oder Taktimpulse programmiert werden. In der Norm DIN EN 61131-3 sind neben einer Echtzeituhr drei Stan-

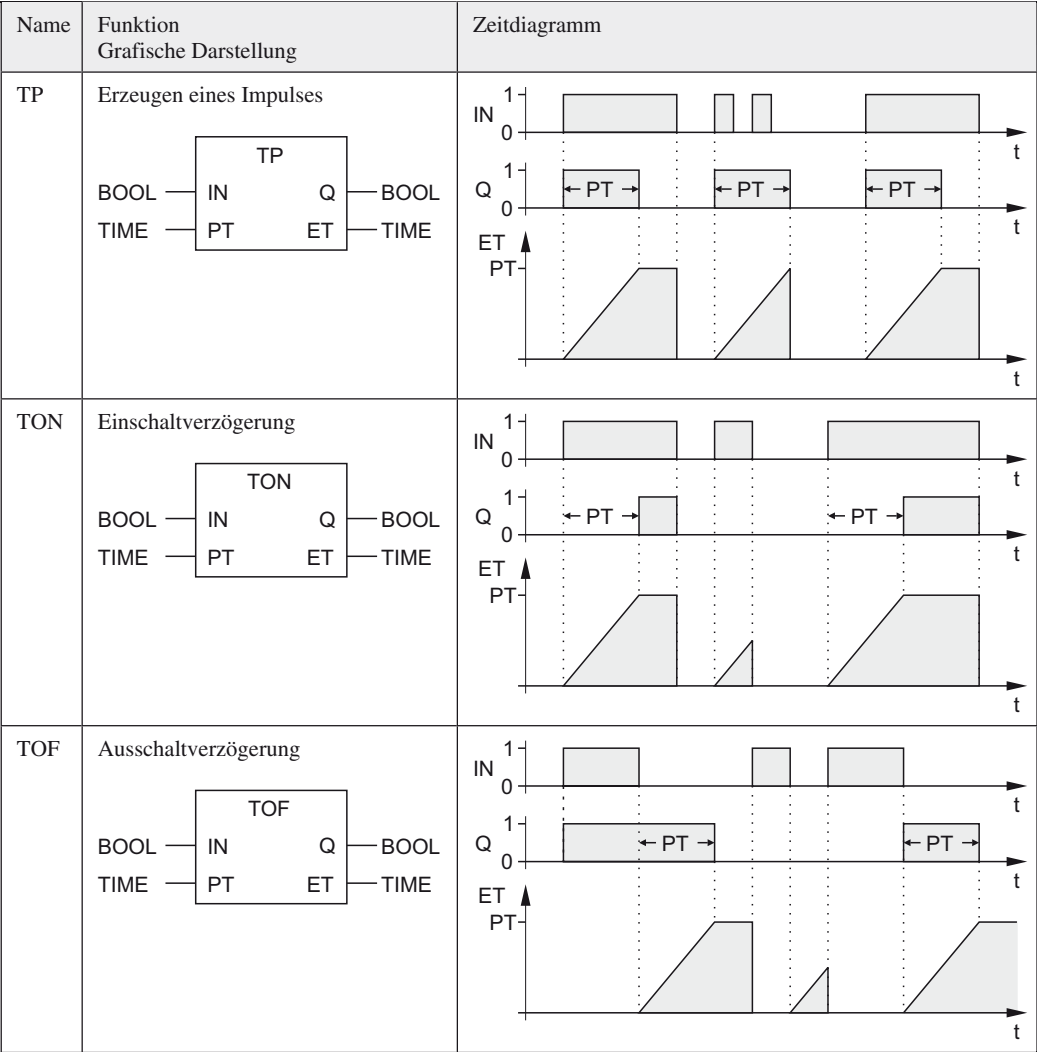
dardfunktionsbausteine für die Zeitbildung aufgeführt, die in Bild 15 gezeigt werden.

**7.9 Zählerfunktionen**

Zählerfunktionen werden in Steuerungsaufgaben benötigt, um bestimmte Mengen oder Positionen durch Aufzählen von Impulsen zu erfassen, Frequenzen zu ermitteln oder die Funktion von Steuerwerken zu übernehmen.

Grundsätzlich lassen sich Zähler in Automatisierungssystemen auf drei verschiedene Arten realisieren.

- Zähler werden als Funktionsbausteine oder Funktionen im Steuerungsprogramm aufgerufen und parametrierbar. Diese Zähler können je Zykluszeit nur einen Vorwärts- und einen Rückwärtszählimpuls verarbeiten. Die Verarbeitung von externen Zählimpulsen ist von der Zykluszeit und der Schaltfrequenz der Signaleingänge abhängig. Innerhalb dieses Kapitels wird ausschließlich diese Zählerart verwendet.
- Zähler werden durch eine Variable vom Datentyp Integer oder Doppelinteger realisiert. Das Auf- bzw. Abwärtszählen erfolgt bei diesen Zählern mit Additions- bzw. Subtraktionsbefehlen. Diese Zähler können je Zykluszeit mehrere interne Vorwärts- bzw. Rückwärtszählimpulse verarbeiten. Die Verarbeitung von externen Zählimpulsen ist jedoch wieder von der Zykluszeit abhängig.



Operandenbedeutung:  
IN = Startbedingung; PT = Zeitvorgabe; Q = Status der Zeit; ET = Aktueller Zeitwert

**Bild 15** Zeitglieder nach IEC 61131-3

- Zähler sind auf einer speziellen Baugruppe untergebracht oder sind als „Schnelle Zähler“ mit separaten Signaleingängen Teil des Betriebssystems der Zentralbaugruppe CPU. Mit diesen Zählern ist es möglich, externe Zählimpulse zu erfassen, die schneller als die Zykluszeit sind. Innerhalb des Steuerungsprogramms können Zählerstände mit Übergabewariablen abgerufen werden.

Bei der Realisierung von Zählern unterscheidet man Vorwärts- bzw. Aufwärts-Zähler, Rückwärts- bzw. Abwärts-Zähler und Vor-Rückwärts- bzw. Auf-Abwärts-Zähler. Der Zählerstand ergibt sich aus der Anzahl der positiven Signalfanken an den Eingängen für Vorwärts- und Rückwärtszählen.

In der Norm DIN EN 61131-3 sind für die drei Zähler die grafische Darstellung und die Arbeitsweise der Standardfunktionsbausteine festgelegt wie in Bild 16 abgebildet.

### 7.10 Vergleichsfunktionen

Mit Vergleichsfunktionen werden die Werte zweier digitaler Operanden des gleichen Datentyps verglichen. Das sind in den meisten Fällen Variablen mit Datentypen für Zahlenwerte wie REAL (Dezimalzahlen mit Komma), INT (Ganzzahlen mit Vorzeichen) und WORD (vorzeichenlose Zahlen). Zur Durchführung von Vergleichen stehen Standardfunktionen (FC) zur Verfügung, die beliebig oft mit

| Name               | Grafische Darstellung | Arbeitsweise in ST-Sprache                                                                                                                                                                           |
|--------------------|-----------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Aufwärts-Zähler    |                       | <pre>IF R THEN CV := 0; ELSIF CU AND (CV &lt; Pymax)   Then CV := CV+1; END_IF; Q := (CV &gt;= PV)</pre>                                                                                             |
| Abwärts-Zähler     |                       | <pre>IF LD THEN CV := PV; ELSIF CD AND (CV &lt; Pvmin)   Then CV := CV-1; END_IF; Q := (CV &lt;= 0)</pre>                                                                                            |
| Auf-Abwärts-Zähler |                       | <pre>IF R THEN CV := 0; ELSIF LD THEN CV := PV; ELSIF CU AND (CV &lt; Pymax)   THEN CV := CV+1; ELSIF CD AND (CV &lt; Pvmin)   THEN CV := CV-1; END_IF; QU := (CV &gt;= PV) QD := (CV &lt;= 0)</pre> |

Bedeutung der Eingänge und Ausgänge: CU = Vorwärtszähleingang steigende Flanke; CD = Rückwärtszähleingang steigende Flanke; R = Rücksetzeingang; LD = Ladeeingang; PV = Ladewert; QU = Status Zählerstand (CV größer gleich Ladewert); QD = Status Zählerstand (CV kleiner gleich 0); CV = Zählerstand.  
Hinweis: Die numerischen Werte der Grenzvariablen Pymax und Pvmin sind implementierungsabhängig. Mögliche Werte sind Pymax = 32767 und Pvmin = -32768.

**Bild 16** Zählfunktionen nach IEC 61131-3

verschiedenen Eingangsparametern aufgerufen werden können. Das Vergleichsergebnis steht als binärer Signalzustand im aktuellen Ergebnis (AE) zur Verfügung, und zwar mit TRUE, wenn der Vergleich zutrifft und mit FALSE, wenn er nicht zutrifft. Die Tabelle 5 zeigt die Vergleichsmöglichkeiten für den einfachsten Fall von zwei Vergleichseingängen IN1 und IN2.

**Tabelle 5** Vergleichsfunktionen

| Name | Symbol | Beschreibung           |
|------|--------|------------------------|
| GT   | >      | IN1 größer IN2         |
| GE   | >=     | IN1 größer gleich IN2  |
| EQ   | =      | IN1 gleich IN2         |
| LE   | <=     | IN1 kleiner gleich IN2 |
| LT   | <      | IN1 kleiner IN2        |
| NE   | <>     | IN1 ungleich IN2       |

■ **Beispiel 8:** Vergleich auf „größer“

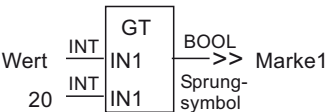


**Bild 17**

Die Eingangsvariable „Wert“ vom Datentyp Integer wird mit der Integerkonstanten „20“ auf „größer als“ verglichen, siehe Bild 17. Am Ausgang des Vergleichers ist das Sprungsymbol durch eine Signallinie mit Doppelpfeil am Ende angegeben. Der Sprung ist bedingt, weil er vom Ausgang des Vergleichs abhängig ist. Ist die Vergleichsbedingung erfüllt, wird das Programm an der Stelle von Marke1 fortgeführt. Ist die Vergleichsbedingung nicht erfüllt, läuft das Programm linear weiter. Im Vergleichsbaustein ist der Name der Vergleichsfunktion angegeben (GT).

**7.11 MOVE-Funktion**

Die MOVE-Funktion zählt zu den arithmetischen Standardfunktionen. Sie hat genau einen Eingang und einen Ausgang und bewirkt das „Durchreichen“ von Daten der Eingangsvariablen an die Ausgangsvariable in Abhängigkeit von einem booleschen Freigabesignal EN, dabei darf der Datentyp auf der Ausgangs- und Eingangsseite sogar verschieden sein. Die Nutzung der MOVE-Funktion zur Datentypumwandlung hat enge Grenzen. Sinnvoll ist z.B. die Umwandlung von BYTE in WORD. Mit der Datentypangabe ANY in Bild 18 ist kein neuer Datentyp gemeint. ANY ist der ranghöchste der sog. allgemeinen Datentypen der SPS-Norm, die sich nur an Hersteller wendet und

mitteilt, dass jeder nachgeordnete Datentyp verwendet werden darf. Die Ausgestaltung der MOVE-Funktion ist herstellerabhängig.

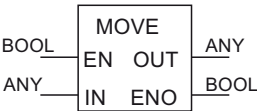


**Bild 18**  
MOVE-Funktion  
mit Ausführungs-  
steuerung EN/ENO

7.12 EN /ENO-Mechanismus

EN steht für Enable IN (boolescher Freigabe-Eingang) und ENO für Enable OUT (boolescher Freigabeausgang). Die SPS-Norm sieht vor, dass Funktionen (FC) in den Programmiersprachen FBS und KOP über diese Möglichkeit der Ausführungssteuerung verfügen müssen. Der Freigabe-Eingang EN kann mit einer Logikverknüpfung beschaltet sein (z.B. UND-Glied, Vergleicher). Der boolesche Ausgang ENO kann zur Ansteuerung nachfolgender Funktionen benutzt werden, weil er anzeigt, ob die Bausteinfunktion ordnungsgemäß ausgeführt wurde oder nicht.

Die Variablen EN/ENO müssen nicht benutzt werden, wenn die Ausführung der Funktion in jedem Fall erfolgen soll.

Ist bei Funktionsaufruf EN = 0, wird die Funktion nicht ausgeführt und ENO = 0 ausgegeben.

Ist bei Funktionsaufruf EN = 1, wird die Funktion ausgeführt und der Ausgang meldet mit ENO = 1 die Fehlerfreiheit der Ausführung oder mit ENO = 0 einen Ausführungsfehler.

8 Aufruf und Wertübergaben zwischen Bausteinen nach IEC 61131-3

8.1 Aufrufhierarchie der Bausteine P, FB und FC

- Das Anwenderprogramm einer SPS hat einen hierarchischen Aufbau:

An oberster Stelle steht ein Baustein des Typs Programm (P), dessen Deklaration und Gebrauch identisch ist mit denen der bereits beschriebenen Funktionsbausteine, jedoch mit den begrenzenden Schlüsselwörtern **PROGRAM ... END\_PROGRAM**. In diesem Baustein können Instanzen von Funktionsbausteinen (FB) sowie Funktionen (FC) aufgerufen werden.

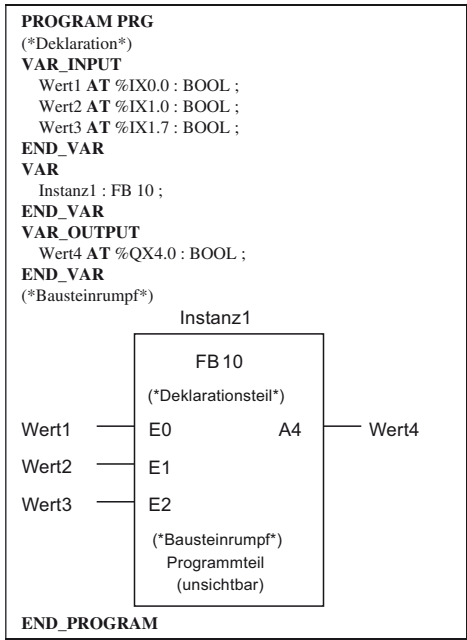
An mittlerer Stelle stehen die Bausteine des Typs Funktionsbaustein (FB). Innerhalb eines Funktionsbausteins können Instanzen anderer Funktionsbausteine oder auch Funktionen (FC) aufgerufen werden. An unterster Stelle stehen die Bausteine vom Typ Funktionen (FC). Innerhalb einer Funktion können andere Funktionen (FC) aufgerufen werden.

8.2 Aufruf von Funktionsbausteinen in FBS

Am einfachsten gestalten sich Bausteinaufrufe und die damit verbundenen Wertübergaben in grafischer Programmiersprache, z.B. FBS. Die Einbindung eines Funktionsbausteins (FB) in ein Programm (P) geschieht in der logischen Reihenfolge: Deklarieren einer Instanz des Funktionsbausteins, Einfügen des Bausteinsymbols aus der Bausteinbibliothek und Zuordnung des Instanznamens, Anbindung der Instanz-Eingänge/Ausgänge an Variablen des aufrufenden Bausteins, z.B. auch an direkte Variablen, welche die Verbindung zu den realen SPS-Eingängen/Ausgängen halten.

Instanzen werden deklariert wie Variablen durch Angabe eines Namens und eines Typs. Als Typ wird der Name des Funktionsbausteins verwendet.

■ *Beispiel 9:* Programm P ruft Funktionsbaustein FB auf



8.3 Aufruf von Funktionsbausteinen in AWL

Gleicher Deklarationsteil wie in der Grafiksprache FBS. Etwas schwieriger gestaltet sich der Bausteinaufruf und die damit verbundenen Wertübergaben in Textsprache, z.B. AWL. Es stehen mehrere Methoden zur Verfügung, deren einfachste ist die mit der formalen Argumentenliste, die auch vom Hersteller fest vorgegeben sein kann. Bei dieser Methode muss ein Funktionsbaustein mit dem Befehl CAL (unbedingt) oder CALC (bedingt) aufgerufen werden, gefolgt vom Instanznamen und der offenen Klammer. Darunter erscheint die auszufüllende Liste mit den Parametern.



tern des aufgerufenen Instanzbausteins, die mit der geschlossenen Klammer beendet wird.

■ **Beispiel 10:** Programm P ruft Funktionsbaustein FB auf

```
PROGRAM PRG
(*Deklaration*)
VAR_INPUT
  Wert1 AT %IX0.0 : BOOL ;
  Wert2 AT %IX1.0 : BOOL ;
  Wert3 AT %IX1.7 : BOOL ;
END_VAR
VAR
  Instanz1 : FB 10 ;
END_VAR
VAR_OUTPUT
  Wert4 AT %QX4.0 : BOOL ;
END_VAR
(*Bausteinrumpf*)
CAL Instanz1 (
  E0 := Wert1,
  E1 := Wert2,
  E2 := Wert3,
  A4 => Wert4 )
END_PROGRAM
```

## 8.4 Aufruf von Funktionen in AWL

Gegenüber dem Aufruf von Funktionsbausteinen entfällt die Instanzbildung. Der Aufruf in der Grafiksprache FBS ist sonst der gleiche wie bei Funktionsbausteinen. Unterschiede bestehen beim Aufruf in der Textsprache AWL, da nicht der Operator CAL verwendet werden darf. Der Funktionsname ist als Operator in der Anweisung anzugeben. Es sind zwei Aufrufmethoden zu unterscheiden.

Beim „*formalen Aufruf*“ wird als erste Anweisung einfach der Name der aufzurufenden Funktion geschrieben, gefolgt von der offenen Klammer. Danach wird je Anweisungszeile ein Eingangsparameter übergeben, wie bei der obigen formalen Argumentenliste, jedoch nur für die Funktionseingänge. Dann folgt die geschlossene Klammer, mit der die Funktion bearbeitet und das Ergebnis im Ergebnisregister gespeichert wird. Die letzte Anweisung speichert das Aktuelle Ergebnis (AE) des Ergebnisregisters in der Zielvariablen.

■ **Beispiel 11:** Formaler Funktionsaufruf einer Funktion

```
PROGRAM PRG
(*Deklaration*)
VAR_INPUT
  Wert1 AT %IX0.0 : BOOL ;
  Wert2 AT %IX1.0 : BOOL ;
  Wert3 AT %IX1.7 : BOOL ;
END_VAR
VAR_OUTPUT
  Wert4 AT %QX4.0 : BOOL ;
END_VAR
(*Bausteinrumpf*)
FC 10 (
  E0 := Wert1,
  E1 := Wert2,
  E2 := Wert3,
);
ST Wert4
END_PROGRAM
```

Beim „*nichtformalen Aufruf*“ muss zuerst der erste Eingangsparameter in das Ergebnisregister geladen werden. Dann kommt die Anweisung mit dem Namen der Funktion als Operator, gefolgt von den restlichen Eingangsparametern in richtiger Reihenfolge und durch Kommas getrennt im Operandenteil. Mit dem Abschluss dieser Anweisung berechnet die Funktion das Ergebnis und stellt es in das Ergebnisregister. In der letzten Anweisung wird das Aktuelle Ergebnis (AE) des Ergebnisregisters in der Zielvariablen gespeichert.

■ **Beispiel 12:** Nichtformaler Aufruf einer Funktion

```
PROGRAM PRG
(*Deklaration*)
VAR_INPUT
  Wert1 AT %IX0.0 : BOOL ;
  Wert2 AT %IX1.0 : BOOL ;
  Wert3 AT %IX1.7 : BOOL ;
END_VAR
VAR_OUTPUT
  Wert4 AT %QX4.0 : BOOL ;
END_VAR
(*Bausteinrumpf*)
LD Wert1
FC 10 Wert 2, Wert 3
ST Wert4
END_PROGRAM
```

## 9 Ablaufsteuerung

Steuerungsprogramme, die einen schrittweisen Prozessablauf nach den Vorgaben von *Ablauf-Funktionsplänen* ausführen, werden *Ablaufsteuerungen* genannt.

### 9.1 Ablauf-Funktionsplan

Der Ablauf-Funktionsplan ist eine eigenständige Planart zur prozessorientierten Darstellung von Steuerungsaufgaben. Eine verbale Aufgabenstellung soll aus Gründen der Klarheit und Vollständigkeit durch eine grafische Darstellung ersetzt werden, die bei der Planung, Inbetriebnahme und Störungssuche hilfreich sein soll. Ein richtig entworfener Ablauf-Funktionsplan muss bereits die Lösung einer entsprechenden Steuerungsaufgabe darstellen.

Geeignete Steuerungsaufgaben sind solche, bei denen unterscheidbare Aktionen in einer ereignis- oder zeitgesteuerten Reihen- oder auch Parallelfolge ablaufen und die auf Wiederholung gerichtet sind. Anschauliche Beispiele dafür sind Produktionsanlagen.

Der Ablauf-Funktionsplan stellt nur die grafischen Elemente für eine Ablaufbeschreibung zur Verfügung. Die Entwurfsmethode besteht darin, dass Steuerungszustände eingeführt und mit Aktionen verknüpft sowie Übergangsstellen zur Berücksichtigung von Steuersignalen vorgesehen werden.

Die Darstellung von Ablauf-Funktionsplänen kann auf zwei verschiedenen Normen beruhen:

- DIN EN 60848 GRAFCET, Spezifikationssprache für Funktionspläne der Ablaufsteuerung. (Nachfolger der DIN 40719-6). Diese Norm definiert eine grafische Entwurfssprache für die funktionale Beschreibung des Verhaltens des Ablaufteils eines Steuerungssystems. Die Entwurfssprache wird „GRAFCET“ genannt.
- DIN EN 61131, Speicherprogrammierbare Steuerungen, Teil 3: Programmiersprachen, hierin Elemente der Ablaufsprache (AS). Der Zweck der Ablaufsprache ist die Darstellung von Ablauffunktionen in SPS-Programm-Organisationseinheiten des Typs Funktionsbaustein oder Programm. Dazu gibt die Norm zwei Darstellungsvarianten für ihre Elemente an, eine ausführlich behandelte grafische Variante und eine textuelle Variante.

DIN EN 60848 und DIN EN 61131-3 haben jeweils ihren eigenen spezifischen Anwendungsbereich. Während die Entwurfssprache GRAFCET für die Beschreibung des Verhaltens unabhängig von einer speziellen Realisierung (elektronisch, elektromechanisch, pneumatisch oder gemischt) ist, legt IEC 61131-3 die Beschreibungsmittel der Ablaufsprache AS zwecks Programmrealisierung fest. Bei der Darstellung der Aktionsblöcke wird auf die Unterschiede eingegangen.

9.2 Grafische Darstellung von Ablaufsteuerungsfunktionen

Zur Darstellung von Ablaufstrukturen werden Ablauf-Funktionspläne verwendet, die auch als SFC (Sequential Function Chart) bezeichnet werden.

Darstellung von Schritten und Transitionen

Jeder mögliche Zustand einer Steuerung wird im Ablauf-Funktionsplan durch einen *Schritt* dargestellt. Ein Schritt ist entweder aktiv oder inaktiv und stellt einen Zustand der Steuerung dar. Ein Schritt muss grafisch durch einen Block dargestellt werden, der einen Schrittnamen in Form eines Bezeichners enthält, siehe Bild 19.

Eine Sonderstellung nimmt der Anfangsschritt ein, der durch eine doppelte Umrahmung gekennzeichnet ist. Der Anfangsschritt muss beim Start des Ablaufs

als einziger Schritt aktiv sein. Die Schritte sind durch *gerichtete Verbindungen* in Form von vertikalen Linien miteinander verbunden. Die Eigenschaft eines Schrittes, aktiv oder inaktiv sein zu können, setzt ein Speicherverhalten im Steuerungsprogramm voraus. Jedem Schritt ist normalerweise eine Aktion zugeordnet, die in einem Aktionsblock angegeben und mit dem Schritt verknüpft werden kann. Die Aktion ist nicht Bestandteil des Schrittes. Die Ablaufkette besteht aus einer Folge von *Schritten* und *Transitionen*, die einfach oder verzweigt sein kann.

Einfache Ablaufkette:

Der Wechsel von Schritt und Transition wird als Folge wiederholt. Es wird eine Kettenschleife gebildet, um wieder zum Anfang zurückzukehren. Die zurückführende Wirkungslinie kann durch eine Pfeildarstellungen mit Angabe von Schrittnummern ersetzt werden.

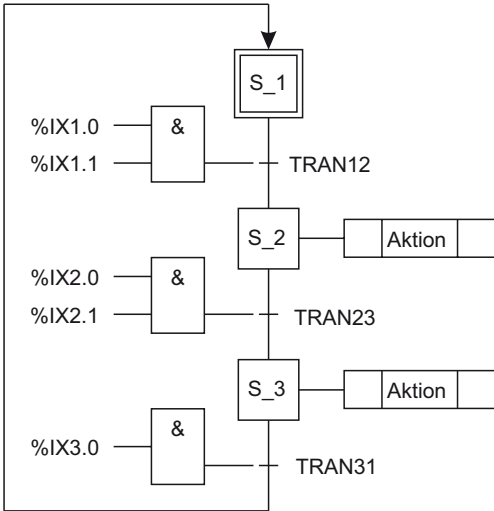


Bild 20 Einfache (lineare) Ablaufkette

Verzweigte Ablaufkette:

Man unterscheidet je nach Art der Verzweigung zwischen der Alternativ-Verzweigung und der Simultan-Verzweigung.

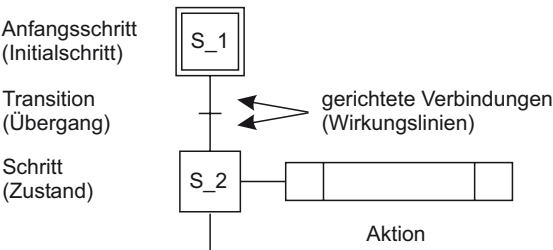


Bild 19 Darstellung von Ablaufschritten

- *Alternativ-Verzweigung* (1- aus *n*-Verzweigung, ODER-Verzweigung); es erfolgt die Auswahl und Bearbeitung nur eines Kettenstranges aus mehreren Kettensträngen. Am Verzweigungsanfang darf zur gleichen Zeit nur eine Transitionsbedingung wahr sein (Verriegelung) oder es muss eine Priorität vorgegeben werden, indem der Strang mit der niedersten Nummer die höchste Priorität hat. Zusätzlich wird mit einem Stern (\*) angegeben, dass die Transitionen von links nach rechts bearbeitet werden. Jedes Strang-Ende muss eine eigene Transitionsbedingungen zum Verlassen des Kettenstranges aufweisen. Anfang und Ende von Alternativ-Verzweigungen werden durch waagerechte Einfachlinien dargestellt.
- *Simultan-Verzweigung* (Parallelbearbeitung mehrerer Kettenstränge, UND-Verzweigung); es erfolgt die gleichzeitige Aktivierung der Anfangsschritte mehrerer Kettenstränge, die dann aber unabhängig voneinander bearbeitet werden. Alle Kettenstränge unterliegen auf der Anfangsseite nur einer vorgelagerten gemeinsamen Transitionsbedingung. Bei der Zusammenführung der Kettenstränge (Endseite) darf nur eine gemeinsame Transitionsbedingung vorhanden sein. Anfang und Ende von Simultan-Verzweigungen werden durch waagerechte Doppellinien dargestellt.

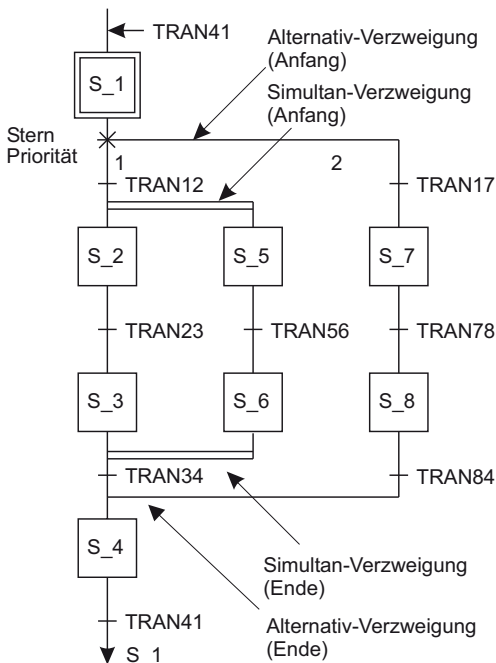


Bild 21 Verzweigte Ablaufkette

Wenn zum Beispiel der Anfangsschritt S\_1 aktiv ist und die Transitionsbedingung von TRAN\_17 den booleschen Wert TRUE liefert während die Transi-

onsbedingung von TRAN\_12 den booleschen Wert FALSE hat, wird der Schritt S\_7 aktiviert und Schritt 1 deaktiviert. Damit kann es in dieser Phase des Ablaufs nicht mehr zu einer Aktivierung der Schritte S\_2 und S\_5 kommen. Der Übergang von Schritt S\_8 zu Schritt S\_4 erfolgt erst, wenn die Transitionsbedingung von TRAN\_84 den booleschen Wert TRUE annimmt. Schritt S\_8 wird dann von S\_4 zurückgesetzt.

Für den Fall, dass der Anfangsschritt S\_1 aktiv ist und die Transitionsbedingungen von TRAN\_12 und TRAN\_17 den booleschen Wert TRUE haben, wird wegen der festgelegten Priorität die Simultan-Verzweigung bearbeitet. Es werden die Schritte S\_2 und S\_5 aktiviert und der Vorgängerschritt S\_1 deaktiviert. Der Schritt S\_4 wird erst erreicht, wenn die Vorgängerschritte S\_3 und S\_6 aktiv sind und die Transitionsbedingung von TRAN\_34 den booleschen Wert TRUE annimmt. Die Schritte S\_3 und S\_6 werden dann von S\_4 zurückgesetzt.

Schleifen und Sprünge

Ein *Sprung* führt unter Steuerung durch eine Transitionsbedingung von einem Schritt zu einem entfernten anderen Schritt, wobei der durch den Sprung gebildete Zweig keine Schritte enthält. Eine *Schleife* kann die Folge eines Sprunges sein, indem unter Steuerung durch eine Transitionsbedingung auf einen Vorgängerschritt zurückgesprungen wird. Dabei muss verhindert werden, dass sich das Programm in einer Endlosschleife verfängt.

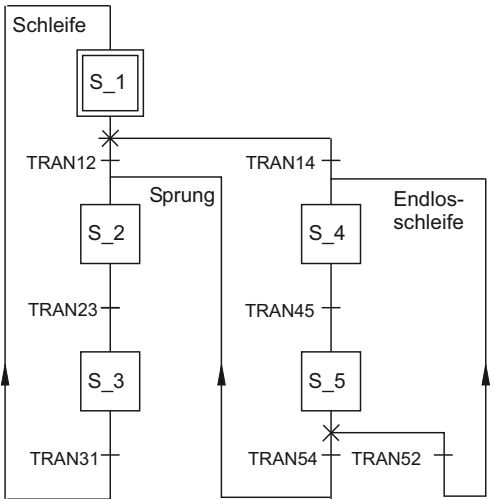
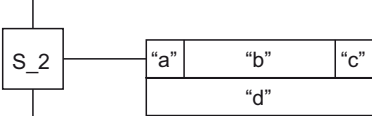


Bild 22 Sprung und Schleife

Aktionen, Aktionsblock

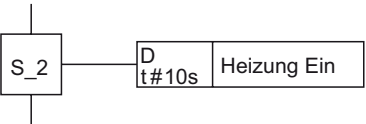
Mit einem Schritt ist in der Regel eine Aktion verbunden. Ein Schritt ohne zugehörige Aktion übt eine Warte-Funktion aus bis die nachfolgende Transitionsbedingung erfüllt ist. Da der Ablauf-Funktions-

plan beschreiben soll, was in der gesteuerten Anlage zu geschehen hat, wird in der Norm der Begriff *Aktion* anstelle von *Befehl* verwendet. Der *Aktionsblock* ist ein grafisches Element zur Darstellung von Aktionen. Der Aktionsblock ist nicht Teil eines Schrittes und damit auch nicht Teil der Ablaufkette. Der Aktionsblock kann mit einem Schritt verknüpft oder als grafisches Element in einer Kontaktplan- bzw. Funktionsplandarstellung verwendet werden. Nachfolgend wird jedoch die Verknüpfung von Schritt und Aktionsblock bevorzugt. In vollständiger Darstellung besteht der Aktionsblock aus vier Teilflächen, die nicht alle genutzt werden müssen:



- Feld "a": Bestimmungszeichen
- Feld "b": Aktionsname
- Feld "c": Anzeigevariable
- Feld "d": Beschreibung der Aktion in AWL; ST; KOP, FBS

Im einfachsten Fall wird in Feld "b" der Name einer booleschen Variablen und in Feld "a" ein zutreffendes Bestimmungszeichen eingetragen.



Die Aktion wird ausgeführt, wenn der zugehörige Schritt gesetzt ist und eine Aktionssteuerung die Freigabe erteilt. Die Aktionssteuerung sorgt für die richtige Umsetzung der im Feld "a" eingetragenen Bestimmungszeichen. Im Beispiel lautet die Aktion „Heizung EIN“ und es ist das Bestimmungszeichen D zusammen mit einer Zeitangabe im Feld "a" eingetragen. Ergebnis: Die Heizung wird verzögert eingeschaltet. Es ist zulässig, mehrere Aktionen mit einem Schritt zu verbinden. Dies wird grafisch dargestellt durch aneinander gereihte Aktionsblöcke.

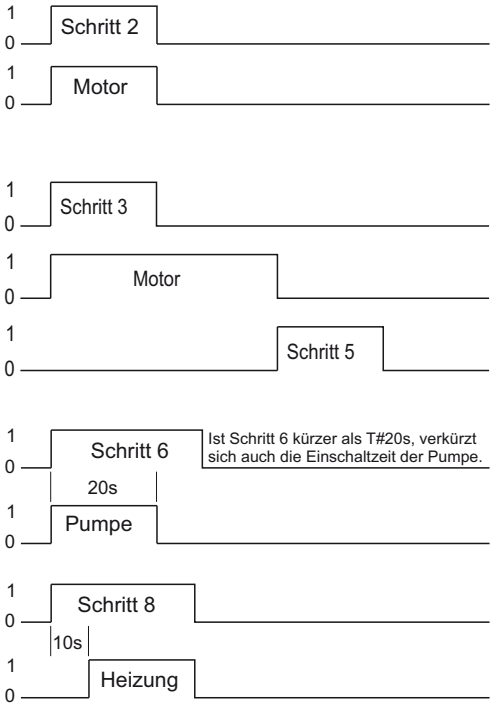
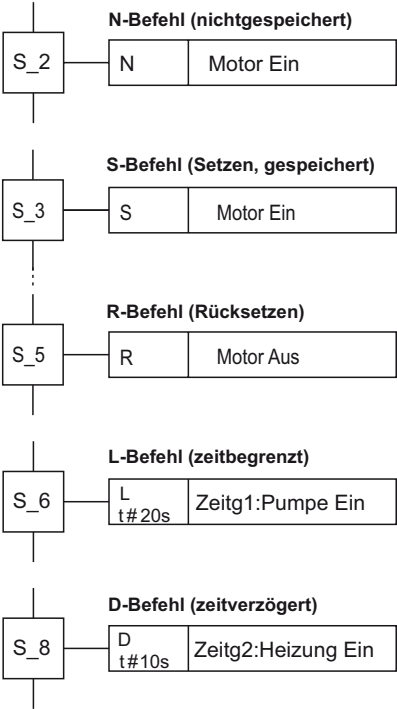
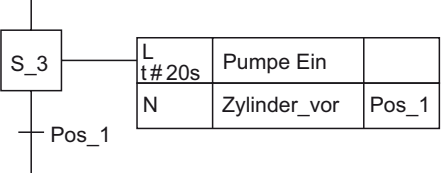
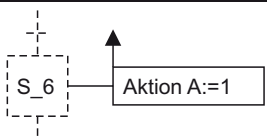
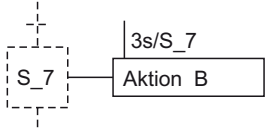
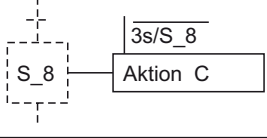
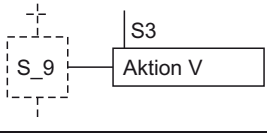


**Bild 23** Bestimmungszeichen N, S, R, L und D für Aktionen nach IEC 61131-3

Tabelle 6 Symbole für Aktionen nach GRAFCET

|                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | <b>Speichernde Aktion</b><br>Aktion wird bei Aktivierung des Schrittes gespeichert.<br>Beispiel: Setze den Wert der booleschen Variablen A auf TRUE                                                                                                                                |
|  | <b>Zeitverzögerte Aktion</b><br>Die verzögerte Aktion ist eine kontinuierlich wirkende Aktion, bei der die Zuweisungsbedingung erst nach 3s erfüllt ist.<br>Beispiel: Ausgang B nimmt den Wert TRUE an, nachdem drei Sekunden seit der Aktivierung von Schritt S_7 vergangen sind. |
|  | <b>Zeitbegrenzte Aktion</b><br>Die begrenzte Aktion ist eine kontinuierlich wirkende Aktion, bei der die Zuweisungsbedingung während der Dauer von 3s erfüllt ist.<br>Beispiel: Ausgang C erhält den Wert TRUE für drei Sekunden nach Aktivierung von Schritt S_8.                 |
|  | <b>Bedingte Aktion</b><br>Die Zuweisungsbedingung S3 beeinflusst die kontinuierlich wirkende Aktion.<br>Beispiel: Ausgang V erhält den Wert TRUE, wenn in Schritt 9 Bedingung S3 erfüllt ist.<br>Als boolesche Gleichung: $V = S_9 \ \& \ S3$                                      |

Im Aktionsfeld “c” kann eine boolesche Anzeige-Variable eingetragen werden, die durch die Aktion gesetzt werden kann, um die Erledigung oder einen Fehlerfall (z.B. Zeitüberschreitung) anzuzeigen oder als Weiterschaltbedingung verwendbar ist.

Bestimmungszeichen für Aktionen (IEC 61131-3)

Die Verknüpfung einer Aktion mit einem Schritt erfolgt formal durch ein sog. Bestimmungszeichen. Für jedes Bestimmungszeichen (N, S, R, L, D u.a.) muss in der Ablaufsteuerung eine Programmteil mit einer entsprechenden Ansteuerlogik für die im Feld “b” angegebene boolesche Ausgangsvariable vorhanden sein. Im Bild 23 ist für einzelne Bestimmungszeichen die Art der Ansteuerlogik mit Liniendiagrammen beschrieben.

Die **DIN EN 60848** unterteilt den Aktionsblock nicht. Die Art der Aktionsausgabe wird dort durch Symbole am Aktionsblock festgelegt, siehe Tabelle 6.

Welche der Darstellungen verwendet wird, bestimmen in der Praxis die Vorteile für den jeweiligen Anwendungszweck. Ablaufsteuerungen werden mit speziellen Software-Tools der Automatisierungsfir- men entwickelt, die viel Detailarbeit übernehmen.

9.3 Betriebsartenteil und Bedienfeld

Ablaufsteuerungen in der Praxis bestehen aus Ablaufketten und verfügen über einen übergeordneten Betriebsartenteil für die Inbetriebnahme, Anlagenbetrieb und Störungsbeseitigung. Ablaufsteuerungen bestehen im Prinzip immer aus folgenden Komponenten:

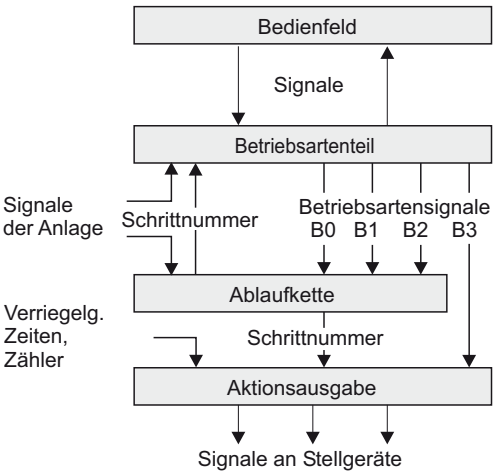


Bild 24 Struktur einer Ablaufsteuerung

Betriebsartensignale

Betriebsartensignale sind die vom Betriebsartenprogramm erzeugten Steuersignale für das Weiterschalten und Rücksetzen der Ablaufkette sowie für die Freigabe von Aktionen.

• Rücksetzen RESET (B0)

RESET wirkt durch die Übergabevariable B0 auf einen Eingangsparameter RUECKSETZ des Ablaufkettenbausteins und versetzt die Schritt- kette in die Grundstellung oder wirkt über den RESET-Eingang

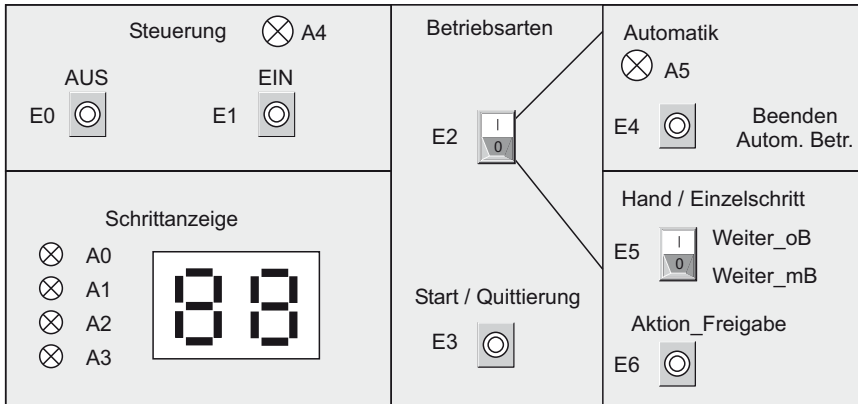


**Bild 25** Beispiel eines Bedienfeldes für Ablaufsteuerung

des Aktionsbausteins und setzt dort Speicher, Zeitglieder und Zähler zurück.

- **Freigabe der Kette mit Bedingungen**  
**FREI\_K\_mB (B1)**

FREI\_K\_mB wirkt durch die Übergabevariable B1 auf einen Eingangsparameter WEITER\_mB im Ablaufkettenbaustein. Nur wenn B1 = 1 ist, wird bei erfüllten Weberschaltbedingungen der nächste Schritt gesetzt. Das B1-Signal kann ein Impuls bei Hand-Einzelschrittbetrieb oder ein Dauersignal bei Automatikbetrieb sein.

- **Freigabe der Kette ohne Bedingungen**  
**FREI\_K\_oB (B2)**

FREI\_K\_oB wirkt durch die Übergabevariable B2 auf einen Eingangsparameter WEITER\_oB im Ablaufkettenbaustein. Nur wenn B2 = 1 ist, wird im Hand-Einzelschrittbetrieb der nächste Schrittspeicher gesetzt, ohne dass die Weberschaltbedingung erfüllt sein muss. Das B2-Signal muss immer ein Impulssignal mit der Länge von einer Zykluszeit sein.

- **Freigabe Aktion FR\_AKTION (B3)**

FR\_AKTION wirkt durch die Übergabevariable B3 auf einen Eingangsparameter FREIGABE des Aktionsbausteins und kann dort einen Aktionsausgang freischalten bzw. sperren.

### Funktionen eines Bedienfeldes

Eingriffe in Steuerungen sollen von einem Bedienfeld aus erfolgen, dessen Bedienoberfläche auf die Erfordernisse von Ablaufsteuerungen mit Betriebsartenteil abgestimmt ist.

Die Kenntnisnahme der Einzelfunktionen der Befehlsgeber und Anzeigen des beispielhaften Bedienfeldes verdeutlicht die Komplexität und Praxisnähe von Ablaufsteuerungen.

Taster E0: **Steuerung: AUS**

Taster E1: **Steuerung: EIN**

Hinweis: Statt der beiden Taster kann auch ein EIN-AUS-Schalter bzw. ein Schlüsselschalter verwendet werden.

Schalter E2: **Betriebsart**

Wahl der Betriebsart: E2 = 1 für Automatik, E2 = 0 für Handbetrieb.

Während eines Bearbeitungsprozesses kann zwischen Automatik und Handbetrieb umgeschaltet werden.

Taster E3: **Start/Einzelschritt**

Bei E2 = 1 (Automatik) werden durch Betätigung von E3 der Automatikbetrieb für das Weberschalten der Ablaufkette mit Bedingungen sowie die Freigabe der Aktionen eingeschaltet und somit der automatische Ablauf der Kette gestartet. Bei E2 = 0 (Hand-/Einzelschrittbetrieb) erfolgt bei Betätigung von E3 eine Einzelschritt-Weberschaltung der Schritt-kette.

Bei ausgeschalteter Steuerung kann durch Betätigen der Start/Quittierung-Taste ein RESET zum Rücksetzen der Schritt-kette und der gespeicherten Aktionen ausgelöst werden, wenn sich die Anlage in der Grundstellung befindet.

Taster E4: **Beenden Automatikbetrieb**

Vorwahl zum Beenden der Betriebsart Automatik bei Erreichen der Grundstellung der Ablaufkette (vollständig beendeter Bearbeitungsprozess).

Schalter E5: **Weberschaltbedingung für Hand-/Einzelschrittbetrieb**

Bei E2 = 0 (Hand-/Einzelschrittbetrieb) muss die Art der Ablaufketten-Weberschaltung festgelegt werden. Zur Auswahl stehen E5 = 1 (Weberschalten



ohne Bedingungen) und  $E5 = 0$  (Weiter-schalten mit Bedingungen).

#### Taster E6: **Aktions-Freigabe**

In der Betriebsart Handbetrieb wird durch Taster E6 die Aktion des aktiven Schrittes solange ausgeführt, wie E6 betätigt ist.

## 10 Kommunikation in Automatisierungssystemen

Die Automatisierungstechnik befindet sich im Umbruch. Durch Anwendung moderner Kommunikationstechnik erhofft man sich entscheidende Verbesserungen bei Effizienz und Flexibilität der Automatisierungsprozesse. Der Begriff der Automatisierungstechnik umfasst heute mehr als nur das Automatisieren im Sinne von Steuern, Regeln und Visualisieren, eingeschlossen ist auch das Kommunizieren.

Zwischen den Anlagenkomponenten eines Automatisierungssystems müssen in der Regel Informationen ausgetauscht werden. Das sind im einfachsten Fall Signale von Sensoren und Aktoren, die zum übergeordneten Automatisierungsgerät gelangen müssen oder von dort herkommen. In anderen Fällen handelt es sich um Messwerte, Statusmeldungen und Diagnoseinformationen, die schon kompliziertere Daten darstellen. Realität ist auch, dass Auftragsdaten der Produktion zwischen Büro und Fertigungsanlage übertragen werden müssen. Es liegen also umfangreiche Kommunikationsbeziehungen in der Automatisierungstechnik vor, zu deren Bewältigung moderne Kommunikationssysteme verwendet werden.

### 10.1 Bussysteme

Die klassische Informationsübertragung von Prozesssignalen mittels analoger Spannungs- oder Stromwerte passt nicht zur digitalen Datenverarbeitung in den Automatisierungsgeräten. Es ist deshalb naheliegend, auch die Informationsübertragung auf eine digitale Grundlage zu stellen. Um gleichzeitig den Verkabelungsaufwand so gering wie möglich zu halten, überträgt man Daten über Bussysteme in Form serieller Zweidrahtverbindungen, an die alle Teilnehmer angeschlossen sind. Für den Informationsaustausch werden Telegramme mit entsprechenden Sende- und Empfangsadressen sowie den Nutzdaten gebildet. Ein solches digitales Kommunikationssystem ist leichter erweiterbar durch Anschluss weiterer Teilnehmerstationen und Änderungen erfordern zum großen Teil nur softwaremäßige Eingriffe. Digitale Kommunikationssysteme vereinfachen nicht nur den sonst erforderlichen Verdrahtungsaufwand radikal, sondern bringen für den Anlagenbetreiber auch noch einen Zusatznutzen, indem außer den eigentlichen Messwerten nützliche Anlageninformationen wie z.B. Fehlermeldungen ohne großen Mehraufwand zusätz-

lich zur Verfügung stehen und Fernparametrierungen intelligenter Sensoren möglich sind.

Je nach Anwendungsbereich werden in der Automatisierungstechnik unterschiedliche Bussysteme eingesetzt, deren wichtigste Merkmale ihre sog. Echtzeitfähigkeit und Störsicherheit sind. Echtzeit bedeutet, dass die neuen Daten immer „rechtzeitig“ eintreffen. Zu spät eintreffende Daten können sonst zu gefährlichen Anlagenzuständen führen. Verwendet werden nur noch *standardisierte, offene Bussysteme*. Standardisiert bedeutet international genormt in der IEC 61158 und *Offenheit* gewährt den Zugang zu Spezifikationen und Technologien, damit sich neue Anbieter mit eigenen Produkten am System beteiligen können. Für die Nutzer ergibt sich so der Vorteil einer größeren Unabhängigkeit von Herstellern bei der Auswahl der zu vernetzenden Anlagenkomponenten.

Im prozessnahen Bereich der Anlage, der Feldebene, findet man überwiegend sogenannte **Feldbussysteme** mit Master-Slave-Kommunikation vor. Die Slaves sind die Buskomponenten, über die alle Eingangs- und Ausgangssignale der Anlage erfasst bzw. ausgegeben werden. Die Master-Station ist ein Kommunikationsprozessor, der für die zyklische Bedienung der zugeordneten Slave-Stationen sorgt, indem er die Daten von Eingängen der Slaves abholt bzw. an Ausgänge von Slaves ausliefert. Bekannte Master-Slave-Systeme für den Feldbereich sind der **AS-i-Bus** (Aktor-Sensor-Interface), der **PROFIBUS-DP** (Process Field BUS-Dezentrale Peripherie), der **INTERBUS-S** und andere Systeme. In der Feldebene zählen Bussysteme seit vielen Jahren zum Stand der Technik. In komplexeren Anlagen mit mehrerer SPSen kann jedoch auch ein Datenaustausch zwischen Steuerungsstationen (SPSen) erforderlich sein. Das erfordert bereits die höherwertige Master-Master-Kommunikation, die aber auch noch dem Produktionsbereich der Fabrik zuzurechnen ist. Muss ein noch weitergehender Datenaustausch unter Einbeziehung von Bürobereichen, z.B. der Fertigungssteuerung, verwirklicht werden, so wird eine zweite Netzinfrastruktur neben dem vorhandenen Feldbussystem erforderlich. Hierfür bietet sich dann das im Bürobereich bereits etablierte **Ethernet-TCP/IP-Netz** an. Schon lange wurde gefordert, das TCP/IP-Netz in die Fertigungsebene zu verlängern bei gleichzeitiger Erfüllung der Echtzeitbedingung. Ein Beispiel hierfür ist **PROFINET** als neues Kommunikationssystem. Bild 26 gibt eine Übersicht zu Bussystemen in der industriellen Kommunikation.

### 10.2 PROFINET – Offener Industrial Ethernet Standard

PROFINET bietet sich als ein offenes und durchgängiges Konzept für Automatisierungslösungen auf Ethernetbasis an, im Bereich von Einzelmaschinen bis hin zu modular aufgebauten Anlagen mit verteilter Steuerungszelligenz und gewährleistet dabei

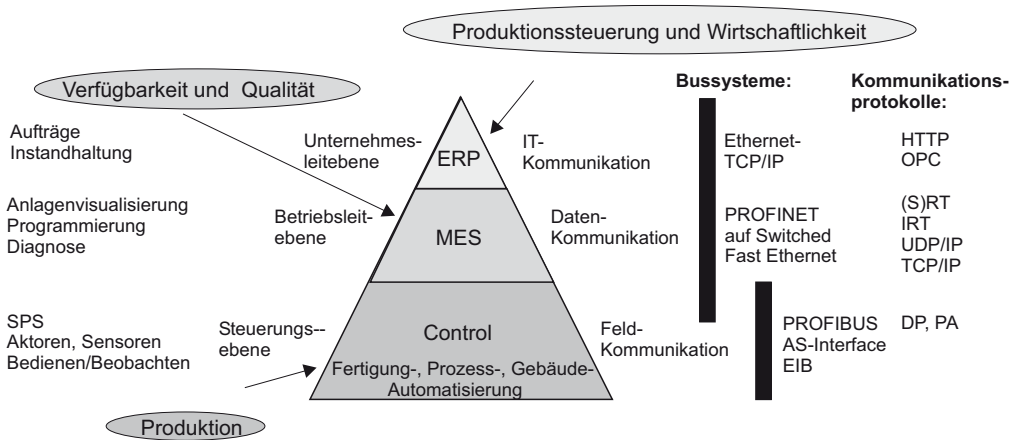


**Bild 26** Industrielle Kommunikation  
ERP = Enterprise Ressource Planning, MES = Manufacturing Execution Systems

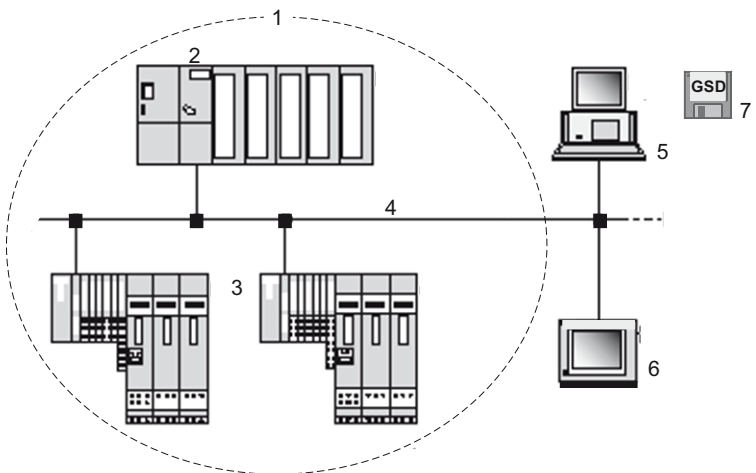


**Bild 27** Bussystem PROFINET IO

| Ziffer | PROFINET IO                   | PROFIBUS DP              | Bemerkung                                                                        |
|--------|-------------------------------|--------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| 1      | IO-System                     | DP-Mastersystem          | Alle Geräte (IO-Controller, IO-Devices) und Kommunikationsverbindungen           |
| 2      | IO-Controller                 | DP-Master                | Gerät, über das angeschlossene Feldgeräte angesprochen werden                    |
| 3      | IO-Device                     | DP-Slave                 | Dezentrale Feldgeräte z.T. mit eigener CPU                                       |
| 4      | Industrial Ethernet           | Profibus                 | Netzwerkinfrastruktur mit Switches (im Bild 27 nicht dargestellt)                |
| 5      | IO-Supervisor                 | PG/PC DP-Master Klasse 2 | Programmieren, Inbetriebnahme/Diagnose                                           |
| 6      | HMI = Human Machine Interface | HMI                      | Gerät zum Bedienen und Beobachten mit Zugriff auch auf IO-Devices über Ethernet! |
| 7      | GSD (XML-Datei)               | GSD (ASCII-Datei)        | Gerätebeschreibungsdatei für die IO-Devices und DP-Slaves                        |



durch Einbinden von PROFIBUS DP einen Investitionsschutz.

Das Grundkonzept besteht aus

- PROFINET IO (dezentrale Feldgeräte) und
- PROFINET CBA (verteilte Automatisierung)

und schließt folgenden Leistungsumfang ein:

- Industrial Ethernet-Netzwerke mit aktiven Netzkomponenten (Switches, Router)
- Integration bestehender Feldbussysteme (PROFIBUS DP, INTERBUS,...)
- Kommunikationskanäle für anforderungsabhängige Übertragungsleistung
- Herstellerübergreifendes Engineeringkonzept (Projektiertung, Programmierung)
- Einsatz von IT-Technologien (Netzwerkadministration, Webserver, E-Mail, OPC)
- Sicherheitsgerichtete Kommunikation

## PROFINET IO

PROFINET IO ist die Kurzbezeichnung für das Steuerungskonzept „Dezentrale Feldgeräte“, dass mit einem Industrial Ethernet Netzwerk ein zentrales Steuerungsgerät (IO-Controller) mit dem dezentralen Feldgerätebereich (IO-Devices) verbindet und somit eine Ähnlichkeit mit dem weitverbreiteten Feldbussystem PROFIBUS-DP besitzt. Die Nutzdaten der Feldgeräte werden auch wieder zyklisch in Echtzeit in das Prozessabbild des IO-Controllers übertragen oder in umgekehrter Richtung an die IO-Devices ausgegeben. Das verwendete Kommunikationsmodell heißt Provider-Consumer-Verfahren und nicht mehr Master-Slave-Verfahren, obwohl der Datenverkehr mit den Feldgeräten in beiden Systemen nach dem gleichen Prinzip abläuft. PROFIBUS regelt den Buszugriff über die Token-Weitergabe, von der die DP-Slaves ausgeschlossen sind. Im Ethernet-System ist das nicht möglich, weil alle Teilnehmer am Netz beim Buszugriff gleichberechtigt sind. Der Provider sendet seine Daten ohne Aufforderung des Kommunikationspartners. Den IO-Devices wird deshalb beim System-Hochlauf mitgeteilt, dass sie mit einem Buszyklus von z.B. 10 ms mit aktuellen Daten versorgt werden. Die Eigenschaften der IO-Devices werden durch deren GSD-Datei (General Station Description auf XML-Basis) beschrieben, wie dieses auch von PROFIBUS DP her bekannt ist.

Die Steuerungszintelligenz in Form eines Anwenderprogramms befindet sich bei PROFINET IO oftmals nur im IO-Controller, kann aber auch teilweise in intelligenten IO-Devices (Feldgeräte mit eigener CPU) untergebracht sein, auch wieder vergleichbar mit dem PROFIBUS DP-System.

Das Bild 27 zeigt zusammen mit der anschließenden Gegenüberstellung der Grundbegriffe die Ähnlichkeit beider Systeme auf.

## PROFINET-Kommunikationskanäle

Die PROFINET-Kommunikation findet über Industrial Ethernet statt. Dabei werden die folgenden *Übertragungsarten* unterstützt:

1. Zyklische Übertragung von zeitkritischen Daten (Nutzdaten)
2. Azyklische Übertragung von Engineering-Daten und zeitunkritische Parametrierungs-, Konfigurierungs- und Diagnose-Daten.

Für die genannten Übertragungsarten werden unterschiedliche *Transportprotokolle* verwendet, die man sich vereinfacht als Transportkanäle unterschiedlicher Leistungsstufen vorstellen kann. Bild 28 gibt eine Übersicht:

- **TCP/UDP-IP-Kanal** (Standard-Transportprotokoll der IT-Welt) für die Übertragung zeitunkritischer PROFINET-Daten. Dieser Transportkanal steht auch zur generellen Anbindung der Automatisierungssysteme an die übergeordneten Ethernet-Netze wie den Firmen-eigenen Intranets und dem öffentlichen Internet zur Verfügung.
- **SRT-Kanal** (Soft Real Time) für zeitkritische PROFINET-Daten. Hierbei handelt es sich um ein spezielles Transportprotokoll von PROFINET, um die im Feldbusbereich geforderte Echtzeitkommunikation zu ermöglichen. Werden Aktualisierungszeiten von ca. 10 ms bei zyklischer Datenübertragung gefordert, wird von „weicher“ Echtzeitbedingung gesprochen. Das SRT-Transportprotokoll wird als Software auf Basis vorhandener Controller realisiert.
- **IRT-Kanal** (Isochrone Real Time) für ganz besonders anspruchsvolle Anforderungen an die Übertragung von PROFINET-Daten wie beispielsweise für Antriebssteuerungen. Hier sind „harte“ Echtzeitbedingungen einzuhalten, d.h. Aktualisierungszeiten von ca. 1 ms bei einer garantierten Taktgenauigkeit bis auf 1 µs. Die IRT-Kommunikation ist zeitschlitzgesteuert und setzt eine entsprechende Konfigurierung mit IRT-fähigen Geräten einschließlich der Switches voraus. IRT-fähige Switches schalten die Verbindungen zeitsynchronisiert (nicht adressgesteuert) bereits vor dem Eintreffen der Ethernet-Telegramme durch. Die Realisierung des IRT-Transportprotokolls erfolgt auf Hardware-Basis durch einen ASIC. PROFINET nutzt auch das Prinzip der „Telegramm-Priorisierung“, um die Übertragung der Daten durch das Ethernet-Netzwerk zu verbessern. Vordringlichere Telegramme sollen die weniger eiligen Telegramme überholen können. Netzwerkkomponenten wie Switches können den Datenfluss priorisierter Telegramme steuern, dazu verwenden sie Zwischenspeicher.

## 10.3 OPC-Technologie

Die OPC-Technologie (OLE for Process Control) bildet eine Datenbrücke zwischen einer Applikation,

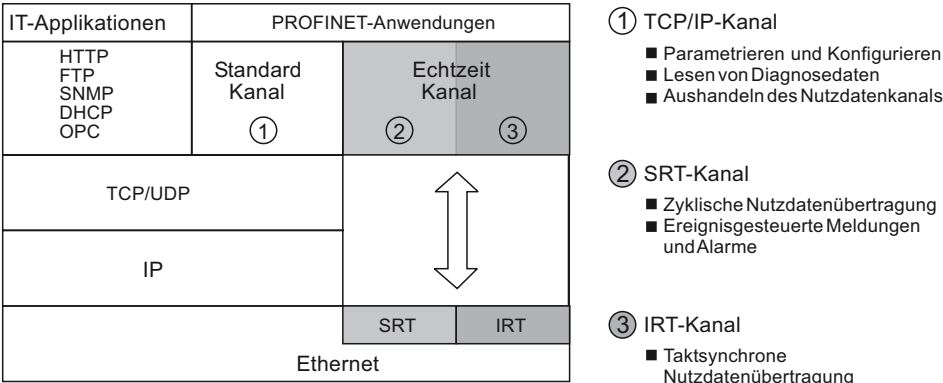


Bild 28 Kommunikationskanäle bei PROFINET

die Prozessdaten übergeordnet zu verarbeiten hat und einer Steuerungs-Hardware, die als gerätespezifischer Datenlieferant angesehen werden kann. OPC ist ein Client-Server-System.

Ein OPC-Server ist eine Software-Komponente, die der Hersteller einer SPS-Hardware für diese zur Verfügung stellt, damit von übergeordneten Anwenderprogrammen (z.B. MS Excel) aus auf die spezifische Hardware zugegriffen werden kann. Für den OPC-Server, der auf einem PC läuft, muss eine unterlagerte Kommunikationsverbindung zur Hardware des Herstellers eingerichtet werden, z.B. PROFIBUS oder Industrial Ethernet-TCP/IP.

Im Anwenderprogramm muss ein OPC-Client angelegt und konfiguriert werden, um auf einen OPC-Server und somit auf die Prozessdaten beispielsweise einer SPS lokal oder entfernt zugreifen zu können. Die Entwicklung eines OPC-Client-Programms kann beispielsweise mit Excel-VBA oder durch Einbindung eines fertigen ActiveX-Elements gelöst werden.

11 Steuerungssicherheit

Jede Maschinensteuerung ist mit einem Fehlerrisiko behaftet, dass sich durch besondere Maßnahmen bei der Entwicklung, Fertigung, Inbetriebnahme und Bedienung verringern aber nicht völlig ausschließen lässt. Fehlerursachen sind technisches oder menschliches Versagen.

Sicherheitsrelevante Maßnahmen sind nicht allein unter dem Aspekt der technischen Funktion (Wie funktioniert die Sicherheitsmaßnahme?) sondern besonders auch unter rechtlichen Gesichtspunkten (Welche Sicherheitsvorschriften gelten?) zu sehen. Hinter allem aber steht eine soziale Verantwortung des Geräteherstellers und Betreibers, der sich bewusst sein sollte, dass der Werker an einer Maschine davon ausgeht, dass diese sicher ist.

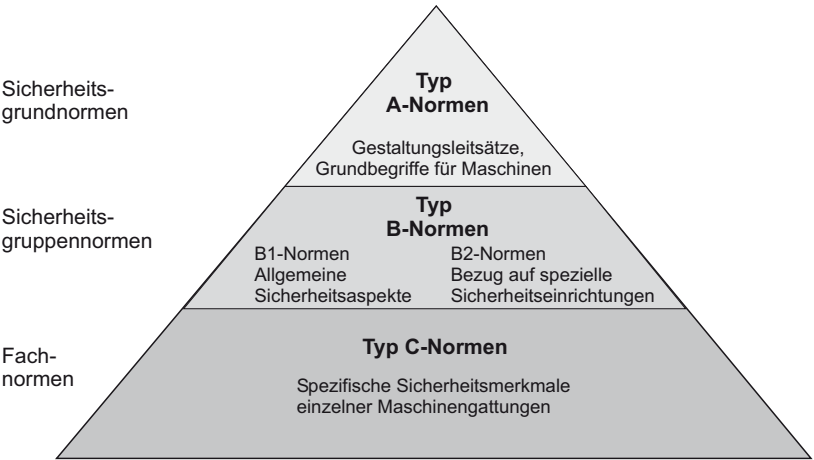


Bild 29: Hierarchie des europäischen Normenwerkes für Sicherheit von Maschinen

## 11.1 Europäische Richtlinien und Sicherheitsnormen

Drei für die Steuerungstechnik wichtige EG-Richtlinien seien hier besonders erwähnt:

- Niederspannungsrichtlinie 73/23/EWG: Schutz vor Gefahren durch elektrischen Strom bei Niederspannungsgeräten im Spannungsbereich 50 ... 1000 VAC, 75 ... 1500 VDC, CE-Kennzeichnungspflicht seit 1997.
- Maschinenrichtlinie 89/392/EG, letzte Fassung 98/37 EG: Grundlegende Anforderungen an die Sicherheit der Maschinen zum Schutz der Gesundheit des Betreibers. Inzwischen gilt diese Richtlinie auch für Sicherheitsbauteile, CE-Kennzeichnungspflicht seit 1995.
- EMV-Richtlinie 89/336/EWG (Elektromagnetische Verträglichkeit): Zwei grundlegende Anforderungen an die Geräte sind die sehr allgemein gehaltenen Grenzen für Störaussendung und Störfestigkeit bei Einstrahlung, CE-Kennzeichnungspflicht seit 1996.

Die europäischen Normen zur Sicherheit von Maschinen weisen eine dreigeteilte hierarchische Struktur auf:

- Typ A-Normen: Enthalten Gestaltungsleitsätze, die für alle Maschinen gültig sind.
- Typ B-Normen: Sind Sicherheits-Gruppennormen, die auf unterschiedliche Maschinengruppen anwendbar sind, wie z.B. DIN EN 60204-1: Elektrische Ausrüstung von Maschinen. B2-Normen behandeln spezielle Sicherheitseinrichtungen, wie z.B. DIN EN 418: NOT-AUS-Einrichtungen.
- Typ C-Normen: Sind Sicherheits-Fachnormen und beschreiben konkrete Anforderungen an einzelne Maschinenarten.

Für Normen von Typ C gilt das „Vermutungsprinzip“, d.h. bei Einhaltung dieser Normen darf vermutet werden, dass die Anforderungen der betreffenden EG-Richtlinien erfüllt sind.

## 11.2 Sicherheitsbegriff

Der Begriff *Sicherheit eines Steuerungssystems* ist auf die möglichen Folgen von auftretenden Fehlern bezogen, die Personen und Sachen betreffen. Davon zu unterscheiden ist der Begriff der *Verfügbarkeit* eines technischen Systems, die zwischen 0 und 100 % liegen kann, unabhängig von der Bedeutung der möglichen Folgen eines Ausfalls.

Um funktionale Sicherheit einer Maschine zu erreichen, ist es erforderlich, dass die sicherheitsbezogenen Teile der Schutz- und Steuereinrichtungen korrekt funktionieren und sich im Fehlerfall so verhalten, dass die Maschine in einem sicheren Zustand bleibt oder dorthin gebracht wird.

Das Maß für die erreichte funktionale Sicherheit wird in den Normen mit unterschiedlichen Wertigkeitsstufen ausgedrückt, und zwar mit:

- Safety Integrity Level in IEC 61508: SIL 1 bis SIL 4 (Höchststufe)
- Kategorien in der DIN EN 954-1: KAT 1 bis KAT 4 (Höchststufe)
- Performance Level in ISO 13849-1: PLa bis PLe (Höchststufe)

### Startfunktion

- Start-Funktionen müssen durch Erregen des entsprechenden Kreises erfolgen.

### Stoppfunktionen

- Stopp-Funktionen müssen durch Entregen des entsprechenden Kreises erfolgen und haben Vorrang vor zugeordneten Start-Funktionen. Das Rücksetzen der Stopp-Funktion darf keinen Gefahr bringenden Zustand einleiten. Bei den Stopp-Funktionen gibt es die Kategorien 0, 1 und 2.

Anforderungen der Stopp-Kategorien:

1. **Kategorie 0** ist ein Stillsetzen durch sofortiges Abschalten der Energiezufuhr zu den Antrieben, d.h. ein *ungesteuertes Stillsetzen*, z.B. durch Betätigung des Motor Leistungsschalters und aller Bremsen (mechanischer Stillsetzeinrichtungen).

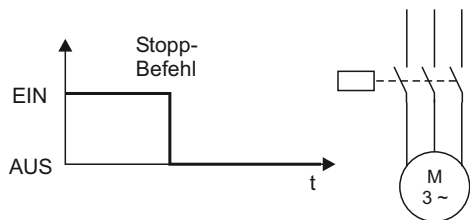


Bild 30 Stopp-Kategorie 0

2. **Kategorie 1** ist ein *gesteuertes Stillsetzen*, bei dem die Energiezufuhr zu den Maschinenantrieben beibehalten wird, um das gesteuerte Stillsetzen ausführen zu können. Die Energiezufuhr wird erst dann unterbrochen, wenn der Stillstand erreicht ist, z.B. Gegenstrombremsung von Drehstrommotoren.

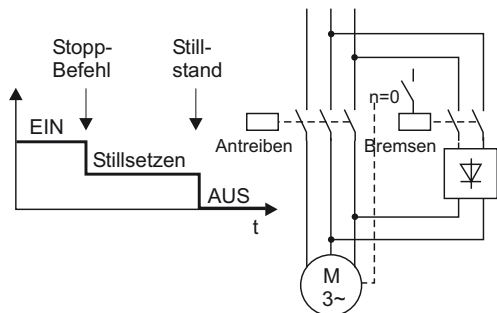


Bild 31 Stopp-Kategorie 1

3. **Kategorie 2** ist ein *gesteuertes Stillsetzen*, bei dem die Energiezufuhr zu den Maschinen-

**Tabelle 7** Beschreibung der Anforderungen für Sicherheitskategorien

| Kategorie | Kurzfassung der Anforderungen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Systemverhalten                                                                                                                                                                                                    | Maßnahmen                                                                      |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| B         | <ul style="list-style-type: none"><li>• Sicherheitsbezogene Teile von Steuerungen nach dem Stand der Technik.</li><li>• Bauteile müssen den zu erwartenden Einflüssen standhalten.</li></ul>                                                                                                                                                                                                                                                                   | Das Auftreten eines Fehlers kann zum Verlust der Sicherheitsfunktion führen.                                                                                                                                       | z.B. 1-kanaliger Sicherheitskreis, Erdung des Steuerstromkreises               |
| 1         | <ul style="list-style-type: none"><li>• Anforderungen von „B“ müssen erfüllt sein.</li><li>• Einsatz bewährter Bauteile und Sicherheitsprinzipien.</li></ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Das Auftreten eines Fehlers kann zum Verlust der Sicherheitsfunktion führen, aber höhere Zuverlässigkeit als in Kategorie B.                                                                                       | zusätzlich z.B.: zwangsöffnende und zwangsgeführte Kontakte                    |
| 2         | <ul style="list-style-type: none"><li>• Anforderungen von „B“ müssen erfüllt sein. Einsatz bewährter Bauteile und Sicherheitsprinzipien.</li><li>• Testung der Sicherheitsfunktion in angemessenen Zeitabständen durch die Steuerung.</li></ul>                                                                                                                                                                                                                | Das Auftreten eines Fehlers kann zum Verlust der Sicherheitsfunktion zwischen den Prüfungsabständen führen. Der Verlust der Sicherheitsfunktion wird durch die Prüfung erkannt.                                    | zusätzlich z.B.: Funktions-/Anlaufestung                                       |
| 3         | <ul style="list-style-type: none"><li>• Anforderungen von „B“ sind zu erfüllen, Einsatz bewährter Bauteile und Sicherheitsprinzipien.</li><li>• Einfehler-Sicherheit: Ein einzelner Fehler führt nicht zum Verlust der Sicherheitsfunktion.</li><li>• Der einzelne Fehler wird erkannt mit der Einschränkung „wann immer und in angemessener Weise durchführbar“.</li></ul>                                                                                    | Wenn der einzelne Fehler auftritt, bleibt die Sicherheitsfunktion immer erhalten. Einige aber nicht alle Fehler werden erkannt. Eine Anhäufung unerkannter Fehler kann zum Verlust der Sicherheitsfunktion führen. | zusätzlich z.B.: 2-kanalige Ausführung von Sicherheitskreisen                  |
| 4         | <ul style="list-style-type: none"><li>• Anforderungen von „B“ sind zu erfüllen, Anwendung bewährter Prinzipien.</li><li>• 1-Fehlersicherheit ist gewährleistet.</li><li>• Erkennung des einzelnen Fehlers vor oder bei nächster Anforderung an die Sicherheitsfunktion (Selbstüberwachung).</li><li>• Falls die Erkennung des einzelnen Fehlers nicht möglich ist, darf eine Anhäufung von Fehlern nicht zum Verlust der Sicherheitsfunktion führen.</li></ul> | Wenn Fehler auftreten, bleibt die Sicherheitsfunktion immer erhalten. Die Fehler werden rechtzeitig erkannt, um einen Verlust der Sicherheitsfunktion zu verhindern.                                               | zusätzlich z.B.: Selbstüberwachung der Sicherheitskreise, Querschlusserkennung |

antrieben erhalten bleibt, z.B. Anhalten durch Vorgabe von Sollwert „0“.

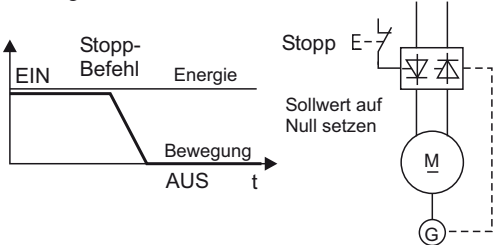


**Bild 32** Stopp-Kategorie 2

**Handlungen im Notfall (NOT\_AUS)**

Der neue Begriff *Handlungen im Notfall* ist Teil eines neuen Sicherheitskonzepts und steht für eine differenzierte Betrachtung der Handlungen, die im Notfall auszuführen sind. Im informativen Anhang der Norm DIN EN 60204-1 wird das noch in der Beratung befindliche Konzept erläutert. Eine Handlung im Notfall schließt einzeln oder in Kombination ein:

1. Stillsetzen im Notfall (Risiko durch einen Prozessablauf oder eine Bewegung)
2. Ingangsetzen im Notfall!

3. Ausschalten im Notfall (Risiko durch elektrische Gefährdung)
4. Einschalten im Notfall!

Die Norm macht nur Aussagen über *Stillsetzen im Notfall* sowie *Ausschalten im Notfall* und bestimmt, dass beide durch eine einzige menschliche Handlung auszulösen sind.

Es besteht eine enge Anbindung der Notfallsignale an die Stoppkategorien:

- *Stillsetzen im Notfall* muss entweder als Stopp der Kategorie 0 oder 1 wirken und über die Risikoanalyse bestimmt werden.

Für das Stillsetzen im Notfall der Kategorie 0 dürfen nur festverdrahtete, elektromechanische Betriebsmittel verwendet werden. Zusätzlich darf die Funktion nicht von einer elektronischen Schaltlogik (Hardware oder Software) oder von der Übertragung von Befehlen über ein Kommunikationsnetzwerk oder eine Datenverbindung abhängen.

Bei der Stopp-Funktion der Kategorie 1 für die Stillsetz-Funktion im Notfall muss die endgültige Abschaltung der Energie der Maschinen-Antriebsselemente sichergestellt sein und muss durch Verwendung von elektromechanischen Betriebsmitteln erfolgen.

**Anmerkung der Norm:** Die Norm weist in ihrem deutschen Vorwort daraufhin, dass in Fällen, in denen andere Normen andere technische Lösungen zulassen als in DIN EN 60204-1 festgelegt ist, diese anderen technischen Lösungen zur Anwendung gelangen dürfen! Damit ist auch klargestellt, dass elektronische Betriebsmittel doch für NOT-AUS-Einrichtungen unabhängig von der Stopp-Kategorie eingesetzt werden dürfen, wenn diese unter Anwendung der Normen DIN EN 954-1 (Risikoanalyse) und/oder IEC 61508 die gleiche Sicherheit erfüllen, wie nach DIN EN 60204-1 gefordert.

- *Ausschalten im Notfall* sollte vorgesehen werden, wo ein Schutz gegen direktes Berühren aktiver Stromkreisteile (z.B. Schaltgeräte in elektrischen Betriebsräumen) nur durch Abstand oder Hindernisse erreicht wird oder wo es die Möglichkeit einer anderen Gefährdung durch elektrische Energie gibt.

Ein Ausschalten im Notfall wird durch Abschalten der Maschine von der Versorgung erreicht mit der Folge eines ungesteuerten Stillsetzens (Stopp-0-Kategorie) der Maschine. Ist das nicht zulässig, kann es notwendig sein, einen anderen Schutz z.B. gegen direktes Berühren vorzusehen, sodass ein Ausschalten im Notfall nicht notwendig ist.

## 12 Regelungstechnische Grundbegriffe der Automatisierungstechnik

Die folgenden Kapitel über regelungstechnische Grundbegriffe, Regelstrecken und Regler sind nur

eine enge Ausschnittsbetrachtung einer umfassenden Wissenschaft, die sich mit der gezielten Beeinflussung dynamischer Prozesse während des Prozessablaufs beschäftigt und dafür mathematische Methoden zur Systembeschreibung und -untersuchung entwickelt hat. Es geht hier nicht um die mathematische Behandlung von Regelkreisen, sondern im Kern nur darum, für eine bestimmte Regelungsaufgabe einen geeigneten Reglertyp auszuwählen und den Einfluss seiner Regelparame-ter auf das Verhalten im Regelkreis kennenzulernen.

### 12.1 Unterschied zwischen Steuern und Regeln, regelungstechnische Größen

Kennzeichen einer reinen Steuerung ist der sog. offene Wirkungsablauf, d.h. die Eingangssignale enthalten keine Rückmeldungen über ihre aktuelle Auswirkung auf den Prozess. Dieser Fall ist z.B. bei einer einfachen Drehzahlsteuerung eines Motors gegeben, wie in Bild 33 dargestellt. Mit dem einstellbaren Widerstand kann die Motordrehzahl gesteuert werden. Eine unterschiedlich schwere Last tritt als Störgröße auf und beeinflusst die tatsächliche Motordrehzahl. Eine solche Wirkungsstruktur bezeichnet man als *Steuerung*, im Sinne von Vorwärtssteuerung.

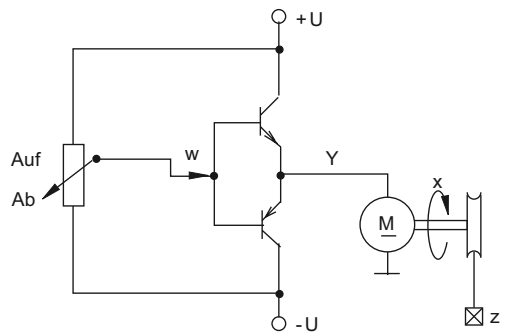


Bild 33 Drehzahl-Steuerung

Um die Darstellung unabhängig von einer bestimmten Anwendung zu machen, führt man allgemeingültige Symbole und steuerungstechnische Größen ein, wie Bild 34 zeigt, die man sich für den jeweiligen Anwendungsfall anschaulich übersetzen muss, z.B.:

- |                     |                                                                                                              |
|---------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $w$ = Führungsgröße | ⇒ die Ausgangsspannung des Potenziometers (Sollwertvorgabe)                                                  |
| $y$ = Stellgröße    | ⇒ die Motorspannung;                                                                                         |
| $x$ = Steuergröße   | ⇒ die Drehzahl, bei der man einen gewünschten Sollwert und einen tatsächlichen Istwert zu unterscheiden hat; |
| $z$ = Störgröße     | ⇒ die unterschiedlichen Lasten.                                                                              |

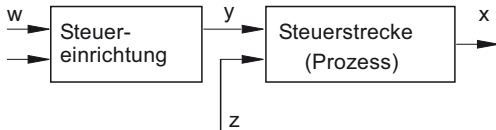


Bild 34 Struktur einer Steuerung

Im Gegensatz zum Typ der Vorwärtssteuerung hat eine Regelung einen Informationsrückfluss, sodass ein geschlossener Wirkungsablauf entsteht, den man als Regelkreis bezeichnet. Beim Motor in Bild 35 wird die tatsächliche Drehzahl zu einem Regler zurückgeführt. Hat sich die Drehzahl durch eine stärkere Belastung verringert, kann dies erkannt und nachgeregelt werden. Steuerungen mit Rückführung werden als *Regelungen* bezeichnet.

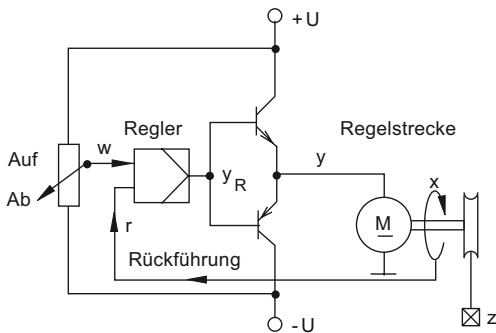


Bild 35 Drehzahlregelung

*Regeln* ist ein Vorgang, bei dem eine Größe, die man die *Regelgröße* nennt, fortlaufend erfasst und mit einer anderen Größe, die man als *Führungsgröße* bezeichnet, fortlaufend verglichen wird. Abhängig vom Ergebnis des Vergleichs muss das Regelungsprogramm eine Ausgangsgröße bilden, welche die Regelgröße im Sinne einer Angleichung an die Führungsgröße beeinflusst. Der sich dabei ergebende Wirkungsablauf findet in einem geschlossenen Kreis, dem *Regelkreis*, statt.

Das Erfassen der Regelgröße erfolgt durch Messen ihres aktuellen Wertes (Istwert). Die fortlaufende Erfassung bedeutet für eine SPS als Regler soviel wie

eine hinreichend häufige Abtastung des Messwertes. Die Angleichung der Regelgröße an die Führungsgröße wird durch das ablaufende Regelungsprogramm erreicht.

Die SPS als Regler führt dabei einen Vergleich zwischen *Führungsgröße*  $w$  und *Regelgröße*  $x$  (genauer: *Rückführgröße*  $r$ ) durch und ermittelt dabei die *Regeldifferenz*  $e$ . Aus der Regeldifferenz wird über die Reglerfunktion das *Reglerausgangssignal*  $y_R$  ermittelt. Dieses ist eine leistungsarme Signalgröße, die einem Stellgerät zugeführt wird, das den passenden Anschluss an die Regelstrecke herstellt. Das *Stellgerät* besteht oft aus einem *Stellantrieb* und einem *Stellglied*. Der Stellantrieb bildet aus dem Reglerausgangssignal  $y_R$  die *Stellgröße*  $y$  und betätigt das Stellglied, welches den Massen- oder Energiestrom für die geregelte Anlage dosiert. Die *Regelstrecke* ist derjenige Teil des Regelkreises, in dem die Regelgröße geregelt wird. Sie beginnt am *Stellort*, also dort, wo die Stellgröße  $y$  in den Massen- oder Energiestrom eingreift und endet am *Messort*, wo sich der Messfühler zur Erfassung der Regelgröße  $x$  befindet. Der Stellantrieb wird zur Regeleinrichtung gezählt, weil er ein eigenes Zeitverhalten besitzt und damit das Gesamtzeitverhalten der Regeleinrichtung beeinflusst. Das Stellglied dagegen wird zur Regelstrecke gerechnet, weil es sich um deren Ventile, Schieber, Klappen oder elektronische Schalter (Transistoren, Thyristoren) handelt. Der Messfühler gehört ebenfalls zur Regelstrecke, denn er arbeitet nicht trägheitslos und beeinflusst damit das Zeitverhalten der Regelstrecke. Bild 36 zeigt die Struktur einer Regelung in ausführlicher Darstellung. Gebräuchlich sind aber auch vereinfachte Darstellungen, wenn sie ihren Zweck erfüllen.

In den Lösungen von Automatisierungsaufgaben kommen Steuerungen und Regelungen zusammen vor. Geregelt werden muss immer dann, wenn Größen auf genaue Werte geführt oder gegen den Einfluss veränderlicher Störgrößen  $z$  konstant gehalten werden müssen. So ist z.B. eine Ablaufsteuerung vom Prinzip her eine Steuerung. Wenn aber während der Zeitdauer eines Schrittes z.B. die Temperatur eines Mischgutes bei unterschiedlichen Füllmengen im Behälter konstant gehalten werden muss, kann dies

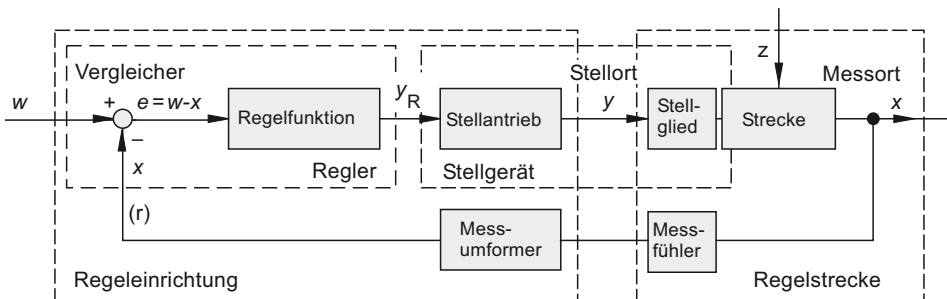


Bild 36 Ausführlich dargestellte Struktur eines Regelkreises



nur mit einer unterlagerten Regelung erreicht werden. Die SPS kann eine Vielzahl zeitgleich ablaufender Vorgänge steuern und regeln.

## 12.2 Regler-Technologien

In späteren Abschnitten werden Reglertypen nur noch im Sinne von ausführbaren Regelfunktionen, also recht abstrakt, beschrieben. Die technologische Ausführung von Reglern dagegen unterliegt der technischen Entwicklung.

Die ersten Regler waren schaltende Regler, die rein elektromechanische realisiert wurden und deren bekanntester Vertreter der noch heute verwendete *Bimetallkontaktregler* ist, wie er in einfachen Geräte, z.B. Toastern, vorkommt.

Es wurden dann Regler für anspruchsvollere Regelfunktionen benötigt, um sowohl analoge Eingangssignale verarbeiten als auch analoge Ausgangssignale ausgeben zu können. Analoge Signale sind solche, die innerhalb bestimmter Grenzen wie z.B.  $\pm 10\text{ V}$  jeden beliebigen Wert annehmen können. Diese sog. *Analogregler* bestehen technologisch betrachtet aus einem Verstärker und benötigen eine Energiequelle. Verstärken ist dabei ein Vorgang, bei dem mit möglichst kleinem Energieaufwand am Verstärkereingang eine möglichst kräftige Energieabgabe der Energiequelle an den Verstärkerausgang signalgesteuert erfolgt. Als Verstärker für analoge Regler kommen elektronische aber auch pneumatische und hydraulische Elemente in Frage. Bei den elektronischen Operationsverstärkern werden die typischen Regelfunktionen, die man mit den Kennbuchstaben P für proportional, I für integral und D für differenzial bezeichnet, durch spezielle Beschaltungsmaßnahmen erreicht, die den Anwender jedoch nicht interessieren müssen. Den Schlusspunkt dieser Entwicklung bildet der Universalregler in der Ausführung als analoger PID-Regler, der alle Funktionen ausführen kann, wie in Bild 37 schematisch dargestellt.

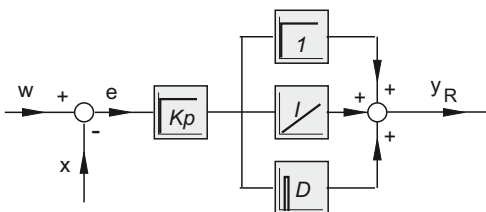


**Bild 37** PID-Regelfunktion

Mit der Verfügbarkeit von preiswerten Mikrocontrollern lassen sich heute sog. digitale Regler mit entsprechender Software für den Regelalgorithmus sowie AD- und DA-Umsetzern für die Signalumwandlungen realisieren. Die Signale außerhalb des digitalen Reglers können nach wie vor analog sein, im Innern des Reglers werden nur digitale (zahlenmäßige) Signale verarbeitet. Bild 38 zeigt den prinzi-

piellen Aufbau eines digitalen Reglers, der auch für die SPS zutrifft.

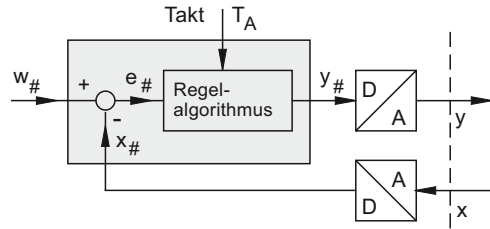


**Bild 38** Vereinfacht dargestellter Aufbau eines Digitalreglers. Mit # gekennzeichnete Größen sind die zu Regelungssignalen proportionalen Zahlenwerte

Der digitale Regler führt eine taktgesteuerte Abtastregelung aus, weil er neue Eingangswerte erst entgegennehmen kann, wenn er einen Berechnungszyklus abgeschlossen hat, für den er eine gewisse Rechenzeit benötigt. Das hat zur Folge, dass neue Eingangsgrößen nur zu diskreten Zeitpunkten eingelesen und die Stellgröße nur zu diskreten Zeitpunkten ausgegeben werden können. Im Regelungsprogramm, dass in gleichen Zeitabständen bearbeitet werden muss, wird aus dem Momentanwert der digitalisierten Regelgröße  $x_\#$  und einer Führungsgröße  $w_\#$  die Regeldifferenz  $e_\#$  berechnet und daraus nach programmierten Funktionen die Stellgröße  $y_\#$  gebildet. Die genau einzuhaltenden Zeitabstände werden als Abtastzeit  $T_A$  bezeichnet.

Da auch der Analog-Digital-Umsetzer zur Umwandlung eines Momentanwertes der Regelgröße eine gewisse Zeit benötigt, muss dieser Wert für den Wandlungszeitraum mit einem Halteglied konstant gehalten werden, um Umwandlungsfehler zu vermeiden. Bei der Digitalisierung der Regelgröße  $x$  im Analog-Digital-Umsetzer kann je nach seiner Stellenzahl nur eine bestimmte Unterscheidungsfähigkeit für Signalwerte erreicht werden. Bei einer Stellenzahl von 8 Bit stehen nur  $2^8 = 256$  mögliche Zahlenwerte zur Verfügung, sodass sich bei einem Analogsignalbereich von 0 bis 10 V nur Spannungsstufen von ca. 40 mV unterscheiden lassen.

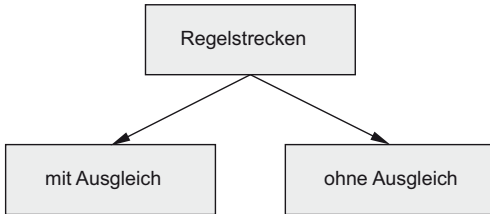
Auf Grund der wert- und zeitdiskreten Signalverarbeitung der digitalen Regler ergeben sich Grenzen hinsichtlich der Verarbeitung höherer Signalfrequenzen. Dafür können digitale Regler aber nicht nur die PID-Regelfunktion nachbilden, sondern ermöglichen auch die Realisierung neuartiger Reglertypen.

## 13 Regelstrecken

### 13.1 Beispiele für Regelstrecken

Das nachfolgend beschriebene Ordnungsschema soll helfen, um sich besser in der unübersehbaren Vielfalt möglicher Regelstrecken zurecht zu finden.

**Erstes Ordnungskriterium:** Regelstrecken mit und ohne Ausgleich



Als Beispiel für eine *Regelstrecke mit Ausgleich* sei die Temperaturregelung einer Heizungsanlage genannt. Bei Veränderung der Mischventilstellung erreicht die Raumtemperatur auf verändertem Niveau wieder einen stabilen Wert.

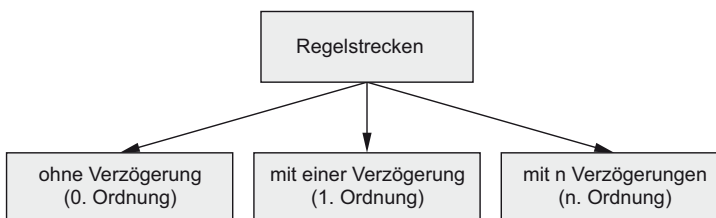
*Ausgleich* bedeutet, dass die Regelgröße  $x$  der Strecke nach einer sprunghaften Änderung der Stellgröße  $y$  innerhalb einer abzuwartenden Übergangszeit wieder einen stabilen Zustand, den sog. Beharrungszustand erreicht.

Regelstrecken mit Ausgleich und konstantem Übertragungsbeiwert  $K_{PS}$  haben einen proportionalen Charakter und werden deshalb auch *P-Strecken* genannt.

Bei einer *Regelstrecke ohne Ausgleich* würde die Regelgröße  $x$  nach einer sprunghaften Änderung der Stellgröße  $y$  keinen neuen Beharrungszustand finden. Dies ist z.B. der Fall bei einem Behälter mit dem Füllstand als Regelgröße  $x$ , wenn die Ablaufmenge in  $\text{m}^3/\text{h}$  durch eine Pumpe konstant gehalten wird. Jede Änderung der Zulaufmenge in  $\text{m}^3/\text{h}$  führt dann entweder zum Überlaufen oder Leerlaufen des Behälters.

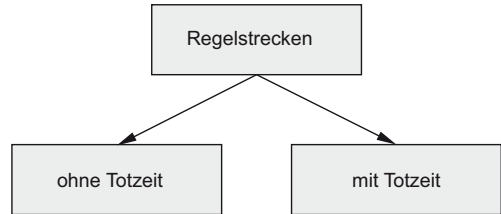
Regelstrecken ohne Ausgleich haben einen integralen Charakter und werden daher als *I-Strecken* bezeichnet.

**Zweites Ordnungskriterium:** Regelstrecken mit und ohne Verzögerung.



Verzögerung bedeutet, dass die Regelgröße  $x$  einer sprunghaften Änderung der Stellgröße  $y$  nicht sprunghaft folgen kann, sondern erst nach einer bestimmten Zeit einen neuen stabilen Wert erreicht. Verzögerungen treten bei technischen Prozessen immer auf, wenn Energie zu- oder abgeführt oder Massen beschleunigt oder abgebremst werden müssen.

**Drittes Ordnungskriterium:** Regelstrecken mit und ohne Totzeit.



Ein bekanntes Beispiel für eine Regelstrecke mit Totzeit ist das Förderband. Durch eine Schieberöffnung (Stellgrößenänderung  $\Delta y$ ) gelang mehr Fördergut auf das Band. Die höhere Ausschüttmenge (Regelgrößenänderung  $\Delta x$ ) wirkt sich am Ende des Förderbandes jedoch nicht sofort aus, sondern erst nach einer Totzeit, die von der Geschwindigkeit und der Länge des Bandes abhängt.

In der Praxis vorkommende Regelstrecken weisen zumeist Kombinationen von Eigenschaften auf. Die Kriterien Ausgleich, Verzögerung und Totzeit treten dann gemeinsam auf. Die nachfolgende Tabelle 8 zeigt Beispiele für Regelstrecken mit den genannten Ordnungskriterien. Die definierten Streckenparameter und typischen Sprungantworten werden im Anschluss erläutert.

### 13.2 Beschreibungsmittel zur Darstellung von Regelstreckeneigenschaften

Für die Auswahl eines geeigneten Reglers muss das Verhalten der Regelstrecke bekannt sein. Man versucht das Verhalten der Regelstrecken durch die Angabe von Kennlinien und Zeitfunktionen zu beschreiben, um daraus die Regelstreckenparameter abzuleiten.

#### Kennlinien von Strecken mit Ausgleich, Übertragungsbeiwert $K_{PS}$

Die Kennlinie einer Regelstrecke ist die grafische Darstellung des Zusammenhangs zwischen Stellgröße  $y$  und Regelgröße  $x$ . Eine *Kennlinie* ist somit ein Diagramm, bei dem die Abhängigkeit einer physikalischen Größe von einer anderen physikalischen Größe (nicht der Zeit) dargestellt ist. Auf der senkrechten Achse können z.B. die Raumtemperatur und auf der waagrechten Achse die Stellung des Mischventils aufgetragen sein:  $T = f(\alpha)$ .

Der *Übertragungsbeiwert*  $K_S$  der Regelstrecke ist durch den Quotienten der Änderung der Regelgröße  $x$  und der Änderung der Stellgröße  $y$  bestimmt. Im Signalfussplan entspricht dies dem Verhältnis der



Ausgangsgröße bezogen auf die Eingangsgröße. Damit kann bei bekanntem Übertragungsbeiwert der Regelstrecke bei einer Änderung der Stellgröße  $\Delta y$  die zu erwartende Änderung der Regelgröße  $\Delta x$  bestimmt werden. Die Zeit für die Änderung spielt dabei insofern keine Rolle, weil die zu jeder Stellgrößenänderung sich ergebende Regelgrößenänderung abgewartet werden muss (Erreichen des Beharrungszustandes). Man spricht deshalb auch von der statischen Kennlinie der Regelstrecke.

Die Kennlinie zeigt den Zusammenhang zwischen Regelgröße  $x$  und Stellgröße  $y$  innerhalb des Laufbereichs beider Größen bei konstantem Störgrößeneinfluss. Zu jedem Stellgrößenwert  $y$  ist der zugehörige Regelgrößenwert  $x$  im Beharrungszustand aufgetragen, siehe Bild 39.

Ist diese statische Kennlinie eine Gerade aus dem Achsenursprung, spricht man von einer P-Regelstrecke mit konstantem Übertragungsbeiwert  $K_{PS}$  (Index P für proportional, Index S für Strecke). Zur Berechnung von  $K_{PS}$  darf man deshalb auch den ganzen Regelbereich einsetzen:

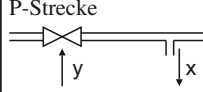
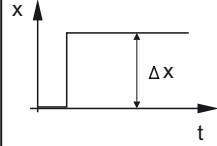
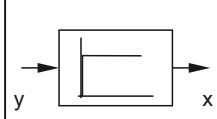
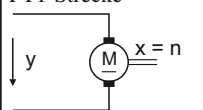
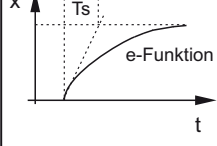
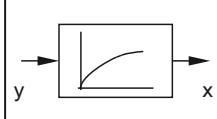
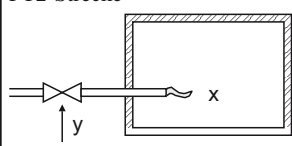
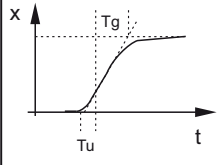
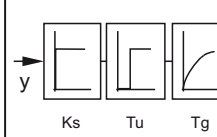
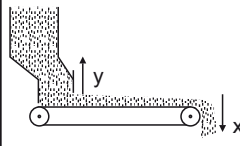
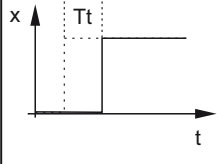
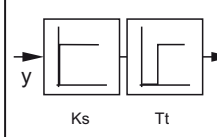
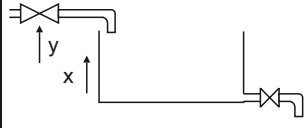
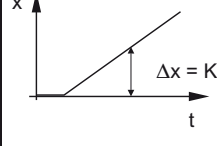
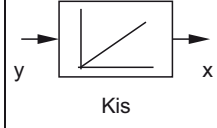
$$K_{PS} = \frac{\Delta X_h}{\Delta Y_h} \quad \text{mit}$$

$X_h$  = Stellwirkung (Regelbereich der Strecke)

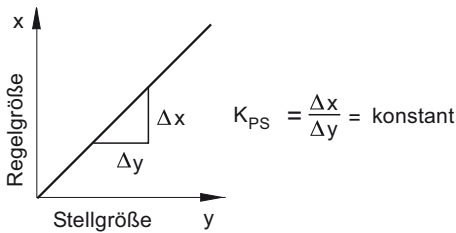
$Y_h$  = Stellbereich des Reglers

Häufig haben Regelstrecken jedoch nichtlinearer Kennlinien, d.h. sie sind gekrümmt, sodass der Übertragungsbeiwert  $K_{PS}$  keine Konstante ist. Das möchte man vermeiden, weil solche Strecken viel schwieriger

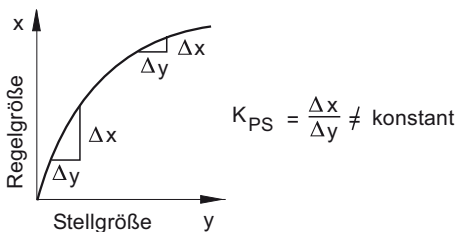
**Tabelle 8** Regelstrecken

| Art der Strecke<br>Beispiel                                                                                                                             | Sprungantwort                                                                       | Strecken-<br>parameter       | Signalflussplan-<br>darstellung                                                      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>P-Strecke</b><br><br>Druck und Durchfluss in Flüssigkeitsrohrnetzen |    | $K_{PS}$                     |    |
| <b>PT1-Strecke</b><br><br>Drehzahl                                    |   | $K_{PS},$<br>$T_S$           |   |
| <b>PT2-Strecke</b><br><br>Ofentemperatur                             |  | $K_{PS},$<br>$T_u,$<br>$T_g$ |  |
| <b>P-Strecke mit Totzeit</b><br><br>Fördermenge                      |  | $K_{PS}$<br>$T_t$            |  |
| <b>I-Strecke</b><br><br>Füllstand                                    |  | $K_{IS}$                     |  |

## P-Regelstrecke mit linearer Kennlinie



## P-Regelstrecke mit nichtlinearer Kennlinie

**Bild 39** Kennlinien von Regelstrecken mit Ausgleich

zu regeln sind. Abhilfe kann durch eine umgekehrt nichtlineare Kennlinie des Stellgliedes geschaffen werden. Dieser mögliche „Trick“ zeigt auch, warum das Stellglied zur Regelstrecke gehört.

**Zeitverhalten von Regelstrecken mit Ausgleich**

Ausgangspunkt der Betrachtung sei eine Regelstrecke mit Ausgleich und linearer Kennlinie. Damit ist die Regelstrecke noch nicht eindeutig beschrieben, denn es fehlt noch die Kenntnis über das Zeitverhalten der Strecke. Die zusätzliche Fragestellung lautet: Wie reagiert die Regelgröße  $x$  der Strecke auf eine plötzliche Änderung der Stellgröße um  $\Delta y$  dargestellt im zeitlichen Verlauf?

1. Regelstrecke mit Ausgleich 0. Ordnung: *P-Strecke*

Kennzeichen einer P-Strecke ist die proportionale Reaktion der Regelgröße  $x$  auf die Änderung der Stellgröße  $y$ . Wird die Stellgröße sprunghaft verändert, reagiert die Regelgröße ebenfalls sprunghaft. In der Tabelle 8 ist als Beispiel für eine P-Strecke ein Durchfluss in einer Rohrleitung angegeben. Wird durch stärkeres Öffnen eines Ventils am Anfang der Rohrleitung der Durchfluss erhöht, ist dies auch am Ende der Rohrleitung sofort in gleicher Weise der Fall, da die Flüssigkeit nicht komprimierbar ist. Die P-Strecke ist allein durch den Streckenparameter  $K_{PS}$  (Übertragungsbeiwert) gekennzeichnet.

2. Regelstrecke mit Ausgleich 1. Ordnung:  
*PT1-Strecke*

Kennzeichen einer PT1-Strecke ist ein anfänglich schneller Anstieg der Regelgröße  $x$ , der sich dann

aber immer mehr verzögert und erst nach längerer Zeit den neuen Beharrungszustand erreicht. In der Tabelle 8 ist als Beispiel für eine PT1-Strecke die Drehzahländerung eines Motors angegeben. Der Motor hat auch ohne angeflanschte Arbeitsmaschine eine eigene Schwungmasse, die sich einer sofortigen Drehzahländerung widersetzt. Abstrakt ausgedrückt: Die PT1-Strecke ist eine Strecke mit Ausgleich und einen Energiespeicher, der die Verzögerung bewirkt. Die PT1-Strecke ist durch die Streckenparameter  $K_{PS}$  (Übertragungsbeiwert) und  $T_S$  (Verzögerungskonstante) gekennzeichnet. Die Verzögerungskonstante lässt sich durch Anlegen einer Tangente an die Sprungantwort ermitteln.

3. Regelstrecke mit Ausgleich 2. Ordnung:  
*PT2-Strecke*

Kennzeichen einer PT2-Strecke ist ein anfänglich langsamer Anstieg der Regelgröße  $x$ , der sich dann aber beschleunigt und danach wieder verzögert bis der neue Beharrungszustand erreicht wird. Als Beispiel für eine PT2-Strecke wird in Tabelle 8 eine Heizung angegeben. Es sind zwei Speicher vorhanden. Wird der Heißwasserdurchfluss sprunghaft erhöht, muss sich erst der Heizkörper auf die neue Temperatur einstellen und dann erst wird mit dem Aufheizen der Raumluft begonnen.

Die Streckenparameter aus der Sprungantwort der PT2-Strecke sind  $K_{PS}$  (Übertragungsbeiwert) und die durch die eingetragene Wendetangente gebildeten Zeitkonstanten  $T_u$  (Verzugszeit) und  $T_g$  (Ausgleichszeit).

Das Ordnungszahlschema lässt sich entsprechend der Anzahl der in einer Regelstrecke vorkommenden Speicher noch weiter erhöhen.

4. Regelstrecke mit Ausgleich und Totzeit: *PT<sub>t</sub>*

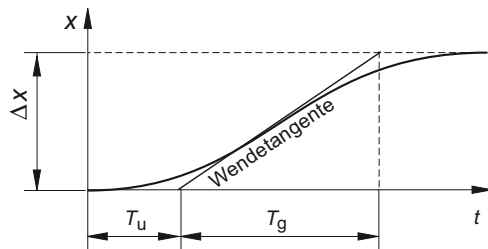
Kennzeichen eines Totzeitverhaltens ist, dass sich die Regelgröße  $x$  zwar in gleicher Weise sprunghaft ändert wie die Stellgröße, jedoch erst um die Totzeit  $T_t$  zeitverzögert. In der Tabelle 8 ist als Beispiel ein Förderband angegeben, bei dem eine gewisse Zeit vergeht, bis eine veränderte Schüttmenge am Ende des Förderbandes ankommt.

Die Streckenparameter der  $PT_t$ -Strecke sind  $K_{PS}$  (Übertragungsbeiwert) und  $T_t$  (Totzeit).

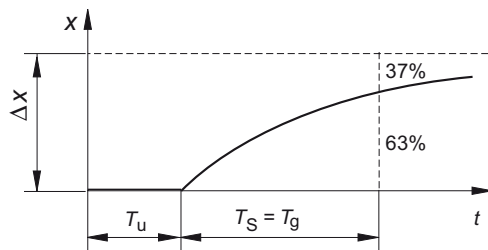
5. Regelstrecke ohne Ausgleich 0. Ordnung: *I-Strecke*

Bei den I-Strecken bildet sich die Regelgröße  $x$  durch Aufsummieren einer Stellgrößenänderung  $\Delta y$  über fortlaufende Zeitabschnitte  $\Delta t$ . Kennzeichen einer I-Strecke ist der zeitproportionale Anstieg oder Rückgang der Regelgröße, verbunden mit Überlauf oder Leerlauf, wenn nicht genau Abfluss gleich Zufluss ist. Als Beispiel für eine I-Strecke ist in der Tabelle 8 ein offener Behälter mit freiem Zulauf angegeben.

1. Aufzeichnung der Übertragungsfunktion, Eintrag der Wendetangente, Bestimmung der Verzugszeit  $T_u$ , Ausgleichszeit  $T_g$  und Änderung der Regelgröße  $\Delta x$



2. Ersatzfunktion mit  $T_u$  als Totzeit und  $T_g$  als Verzögerungszeit  $T_s$  eines PT1-Gliedes bilden.



3. Die Regelstrecke kann näherungsweise durch ein P-Glied, ein Totzeitglied und ein PT1-Glied mit deren Streckenparametern  $K_{PS}$ ,  $T_t$ ,  $T_u$ ,  $T_g$  beschrieben werden.

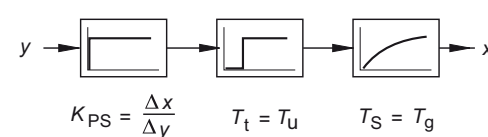


**Bild 40** Bestimmung der Regelparameter einer unbekannten Regelstrecke

**Bestimmung der Regelstreckenparameter**

Damit ein zur Regelstrecke passender Regler gefunden und günstig dimensioniert werden kann, müssen zuerst einmal die Streckenparameter der Regelstrecke bekannt sein. Dazu muss ein Signalfussplan mit dem zugehörigen Übertragungsbeiwert  $K_{PS}$  und den Zeitkonstanten ermittelt werden, der die zunächst noch unbekannte Regelstrecke möglichst gut beschreibt. Das kann auf experimentelle Art durch Aufnahme der Sprungantwort auf einen Stellgrößen- oder Störgrößenprung geschehen.

Der Ablauf des Experimentes gliedert sich in folgenden Schritte:

1. Das Stellglied wird zum Zeitpunkt  $t_0$  um den Wert  $\Delta y$  verstellt. Da es sich um eine Strecke mit Ausgleich handeln soll, wird die Regelgröße  $x$  einen um  $\Delta x$  verschobenen Beharrungszustand einnehmen. Die Antwort der Regelgröße  $x$  wird mit einem  $y$ - $t$ -Schreiber aufgezeichnet und liegt dann als Liniendiagramm vor. An den Kurvenverlauf der Sprungantwort wird die Wendetangente eingezeichnet und aus den Achsenabschnitte die Verzugszeit  $T_u$  und die Ausgleichszeit  $T_g$  bestimmt.
2. Daraus kann eine Ersatzfunktion, bestehend aus einem Totzeitglied mit der Totzeit  $T_t$  und einem PT1-Glied mit der Verzögerungszeit  $T_s$  gebildet werden.
3. Die Übertragungsbeiwerte beider Glieder können als ein Übertragungsbeiwert  $K_{PS}$  in einem P-Glied zusammengefasst werden. Da es sich im einfachsten Fall um eine Regelstrecke mit Ausgleich und linearer Kennlinie handeln soll, lässt sich der Übertragungsbeiwert aus

$$K_{PS} = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

berechnen. Das nebenstehende Bild 40 zeigt das Vorgehen anschaulich.

Erfahrungen haben ergeben, dass das Verhältnis von Verzugszeit  $T_u$  zu Ausgleichszeit  $T_g$  Auskunft über die Regelbarkeit der Strecke ergeben:

| gut regelbar                     | noch regelbar                   | schlecht regelbar               |
|----------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| $\frac{T_u}{T_g} < \frac{1}{10}$ | $\frac{T_u}{T_g} = \frac{1}{5}$ | $\frac{T_u}{T_g} > \frac{1}{3}$ |

**14 Regler**

Aufgabe der Regler ist es, bei Abweichung der Regelgröße  $x$  von der Führungsgröße  $w$  die Reglerausgangsgröße  $y_R$  so zu verändern, dass die Regelgröße  $x$  in möglichst kurzer Zeit optimal an die Führungsgröße  $w$  angeglichen wird. Ursache für die Abweichung kann eine aufgetretene Störgröße  $z$  oder die veränderte Führungsgröße  $w$  sein.

In traditioneller Einteilung der Regler unterscheidet man

- stetige und unstetige Regler
- oder
- schaltende Regler (Zweipunkt-, Dreipunktregler),
  - analoge Regler und
  - digitale Regler.

Aus Gründen der Umfangsbeschränkung soll hier auf die Darstellung der schaltungs- und gerätetechnischen Ausführungen von Reglern verzichtet werden. Es werden nur die typischen Eigenschaften bekannter Reglertypen anhand ihrer Regelfunktion und durch ihre sog. Sprungantworten beschrieben, siehe Übersicht in Bild 42. Danach wird übergeleitet zum PID-Regelalgorithmus für den digitalen Abtastregler, der als Softwareregler in einer SPS realisiert werden kann.

14.1 P-Regler, P-Regelfunktion

Der P-Regler ist ein proportional wirkender Regler, der in seinem Arbeitsbereich, den man als Proportionalbereich bezeichnet, durch die Regelfunktion

$y_R = K_{PR} \cdot e$  mit  $K_{PR}$  = Proportionalbeiwert

beschrieben ist. Eine sprunghafte Änderung der Regeldifferenz  $e$  am Eingang führt ohne Zeitverzögerung zu einer proportionalen sprunghaften Änderung der Reglerausgangsgröße  $y_R$  am Ausgang, solange sich die Regeldifferenz  $e$  innerhalb des Proportionalbereichs bewegt.

Setzt man die Regeldifferenz  $e = w - x$  in den Regelfunktion ein, so erhält man:

$y_R = K_{PR} \cdot (w - x)$

Diese Beziehung lässt erkennen, dass der P-Regler nicht das leisten kann, was von Reglern allgemein erwartet wird, nämlich die genaue Heranführung der Regelgröße  $x$  an die Führungsgröße  $w$ . Bei  $x = w$  wird die Reglerausgangsgröße  $y_R = 0$  und damit erhält die Regelstrecke kein Stellsignal  $y$ , um die Regelgröße  $x$  bilden zu können: Eine Heizung, der kein Wärmeträger zugeführt wird, kann keinen Temperaturwert bilden.

Andererseits kennzeichnet den P-Regler eine direkte Zuordnung von Regelgröße  $x$  zu Stellgröße  $y_R$  bei fest eingestelltem Proportionalbeiwert  $K_{PR}$  und vorgegebener Führungsgröße  $w$ , solange sich die Regelgröße  $x$  noch innerhalb des Proportionalbereich  $X_P$  befindet. Der Proportionalbereich  $X_P$  lässt sich aus dem Stellbereich  $Y_h$  und dem Proportionalbeiwert  $K_{PR}$  berechnen:

$X_P = \frac{Y_h}{K_{PR}}$

Die feste Zuordnung von  $x$  und  $y_R$  kann anschaulich als statische Kennlinie des P-Reglers dargestellt werden, deren Achsenabschnitte sich aus

$y_R = K_{PR} \cdot (w - x)$

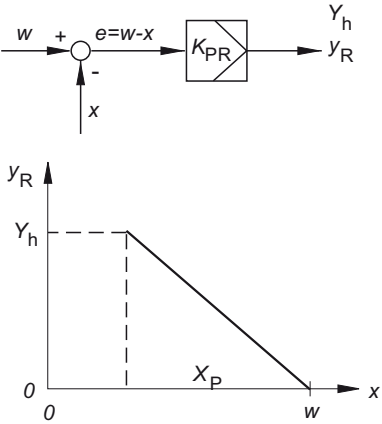
berechnen lassen:

Für  $y_R = 0 \Rightarrow x = w$

Für  $y_R = Y_h = X_P \cdot K_{PR} \Rightarrow x = w - X_P$

Das Zahlenbeispiel zeigt, dass bei einem P-Regler die Eingangsgröße  $x$  und Ausgangsgröße  $y_R$  einander starr zugeordnet sind, solange sie sich im Proportionalbereich befinden. Wird in Folge einer Störeinwirkung  $z$  auf die Regelstrecke eine Änderung der Reglerausgangsgröße  $\Delta y_R$  erforderlich, dann ist dies nur bei einer gleichzeitigen Änderung der Regelgröße  $\Delta x$  möglich. Der P-Regler kann also eine Störung nicht völlig ausregeln. Der neue Beharrungszustand ist ein anderer Punkt auf der  $y_R$ - $x$ -Kennlinie des P-Reglers, in deren fallenden Verlauf die Umkehrung des Wirkungssinns der Regelung zum Ausdruck kommt.

Die Änderung der Regelgröße  $\Delta x$  bei einer erforderlichen gleich großen Änderung der Reglerausgangsgröße  $\Delta y_R$  lässt sich verringern, wenn der Proportionalbereich  $X_P$  verkleinert wird, indem man  $K_p$  vergrößert. Dieser Verbesserung des P-Reglers sind aber Grenzen gesetzt, weil der Regelkreis instabil wird. Der P-Regler mit einem großen  $K_p$ -Wert reagiert überempfindlich auf kleinste Regelgrößenänderungen mit zu starken Ausschlägen bei der Stellgröße, die dann in extremer Weise ständig zwischen  $y_R = 0$  und  $y_R = Y_h$  umschaltet.



Zahlenbeispiel:

$w = 3,75V, \quad K_{PR} = 4, \quad Y_h = 10V$

|                | $x$          | $e$          | $y_R$     |
|----------------|--------------|--------------|-----------|
| $X_P$ -Bereich | 1,25V        | 2,5V         | 10V       |
|                | 1,75V        | 2,0V         | 8V        |
|                | 2,25V        | 1,5V         | 6V        |
|                | <b>2,50V</b> | <b>1,25V</b> | <b>5V</b> |
|                | 2,75V        | 1,0V         | 4V        |
|                | 3,25V        | 0,5V         | 2V        |
|                | 3,75V        | 0,0V         | 0V        |

$X_P = \frac{Y_h}{K_{PR}} = \frac{10V}{4} = 2,5V$

Bild 41 Kennlinie des P-Reglers

Der P-Regler als einfachster kontinuierlicher Regler mit sehr schnellem Reglereingriff kann überall dort gut verwendet werden, wo die Strecke einen kleinen Regler-Proportionalbereich erlaubt. Das ist der Fall, wenn entweder nur geringe Störgrößen  $z$  auftreten oder das Verhältnis der Streckenzeitkonstanten  $T_g/T_u$  groß ist und geringe bleibende Regeldifferenzen  $\Delta x$  hinnehmbar sind.

## 14.2 I-Regler, I-Regelfunktion

Der I-Regler ist ein integral wirkender Regler, der die Reglerausgangsgröße  $y_R$  in vielen kleinen Schritten solange ändert, bis eine aufgetretene Regeldifferenz  $e = w - x$  vollständig beseitigt ist. Dabei ist die Änderungsgeschwindigkeit der Stellgröße direkt proportional zur noch vorhandenen Regeldifferenz  $e$  und einem Übertragungsbeiwert  $K_{IR}$ :

$$\frac{dy_R}{dt} = K_{IR} \cdot e$$

In der Arbeitsweise gleicht der I-Regler einem Boten, dessen Laufgeschwindigkeit von der Dringlichkeit des Auftrags abhängig ist, wenn man die Regeldifferenz  $e$  als Dringlichkeitsmaß deutet. Solange noch eine Regeldifferenz besteht, ist der I-Regler damit beschäftigt, sie zu beseitigen.

Summiert man die unendlich vielen kleinen Schrittschritte zur erzeugten Reglerausgangsgröße  $y_R$ , so erhält man die I-Regelfunktion:

$$y_R = K_{IR} \cdot \int e \cdot dt$$

mit  $K_{IR}$  = Integrierbeiwert (Übertragungsbeiwert)

In der Regelfunktion ist  $K_{IR}$  als Integrierbeiwert nicht ganz leicht verständlich zu deuten.  $K_{IR}$  beinhaltet eine Zeit  $T_I$ , die man als Integrierzeit bezeichnet, und die angibt, wie lange es dauert, bis der I-Regler den vollen Stellbereich  $Y_h$  durchlaufen hat, wenn als Eingangsgroße die Regelgröße  $x$  um den vollen Bereich  $X_h$  geändert wird:

$$K_{IR} = \frac{Y_h}{T_I \cdot X_h}$$

Die beiden Bereiche  $Y_h$  und  $X_h$  sind konstruktiv festliegende Werte, sodass als Einstellparameter des I-Reglers die Integrierzeit  $T_I$  in Frage kommt. Je kleiner die Integrierzeit  $T_I$  gewählt wird, umso schneller ändert sich die Reglerausgangsgröße  $y_R$  in Abhängigkeit von der Regeldifferenz  $e$ .

I-Regler arbeiten langsamer als P-Regler, lassen dafür aber keine bleibende Regeldifferenz bestehen. I-Regler sind ungeeignet für Regelstrecken mit großen Zeitkonstanten oder bei Strecken ohne Ausgleich. Für Regelstrecken, die nur durch eine Totzeit charakterisiert sind, ist der I-Regler von allen Reglertypen der am besten geeignete.

## 14.3 PI-Regler, PI-Regelfunktion

Die Eigenschaften von P-Reglern und I-Reglern ergänzen sich gut, weil P-Regler dynamisch besser sind als I-Regler und I-Regler statisch besser sind als P-Regler. Also ist es naheliegend, die beiden Regelverhalten zum PI-Regler zu kombinieren.

Die Regelfunktion des PI-Reglers ergibt sich aus der Addition der P-Regelfunktion und I-Regelfunktion:

$$y_R = K_{PR} \cdot e + K_{IR} \cdot \int e \cdot dt$$

Die Regelfunktion lässt erkennen, dass die Änderung der Reglerausgangsgröße  $y_R$  zum einen proportional zur Regeldifferenz  $e$  und zum anderen proportional zum Produkt aus Regeldifferenz und Zeit ist. Der erste Anteil sorgt für den schnellen und stabilen Reglereingriff und der zweite Anteil für die Beseitigung der bleibenden Regeldifferenz.

Eine bekanntere Darstellungsform der PI-Regelfunktion ersetzt den Integrierbeiwert  $K_{IR}$  durch einen Quotienten

$$K_{IR} = \frac{K_{PR}}{T_n}$$

mit dem Vorteil, den Proportionalbeiwert  $K_{PR}$  ausklammern zu können, sodass die PI-Regelfunktion nun in der Form

$$y_R = K_{PR} \cdot \left( e + \frac{1}{T_n} \cdot \int e \cdot dt \right)$$

entsteht. Die darin neu erscheinende Größe  $T_n$  wird *Nachstellzeit* genannt. Ausdrücken möchte man, dass der PI-Regler im Prinzip ein I-Regler ist, dessen Wirkungsbeginn aber um die Nachstellzeit  $T_n$  vorverlegt erscheint, also schneller eingreift. Tatsächlich beruht der schnellere Eingriff aber auf dem P-Anteil.  $K_{PR}$  und  $T_n$  sind die Regelparameter (Einstellgrößen) mit denen der PI-Regler an die Regelstrecke optimal angepasst werden kann. Beide Parameter können einzeln oder gleichzeitig verstellt werden:

Lässt man zunächst  $K_{PR}$  konstant und verändert nur  $T_n$ , bleibt der P-Anteil in der Reglerausgangsgröße gleich hoch, es lässt sich aber die Stellgeschwindigkeit beeinflussen. Vergrößert man  $T_n$ , verringert sich die Stellgeschwindigkeit bei der Reglerausgangsgröße  $y_R$ . Wird die Nachstellzeit  $T_n$  soweit vergrößert, dass sie gegen unendlich geht, erhält man das Verhalten eines P-Reglers. Umgekehrt erhöht sich die Stellgeschwindigkeit, wenn man die Nachstellzeit verringert. Dieses darf nicht zu weit getrieben werden, weil es die Schwingneigung und Instabilität des PI-Reglers erhöht.

Was geschieht, wenn die Nachstellzeit  $T_n$  fest eingestellt bleibt und die Proportionalverstärkung  $K_{PR}$  verändert wird? Durch die Änderung von  $K_{PR}$  ändern sich beide Anteile der Reglerausgangsgröße im gleichen Verhältnis. Bei einer Vergrößerung von  $K_{PR}$

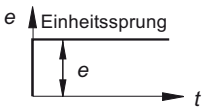
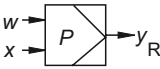
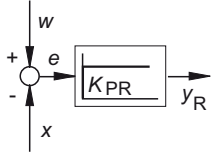
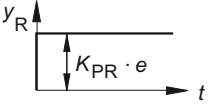
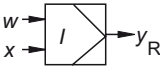
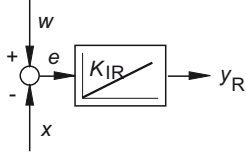
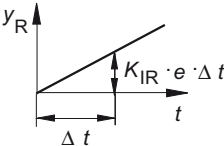
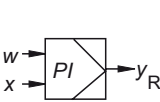
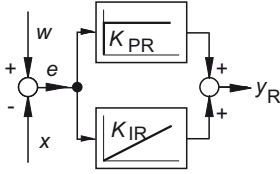
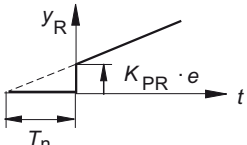
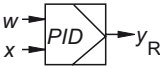
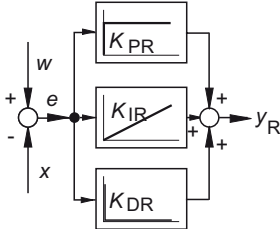
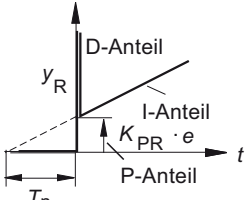
|                                                                                                   |                                                                                     |                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                   |                                                                                     |                                                                                 |                                                                                                                                                                    |
| Symbol                                                                                            | Signalflussplan                                                                     | Sprungantworten                                                                                                                                                  | Bemerkung                                                                                                                                                          |
| P-Regler<br>     |    | <br>$X_P = \frac{y_h}{K_{PR}}$ P-Bereich                                        | Vorteil:<br>Günstiges Zeitverhalten<br><br>Nachteil:<br>Lastabhängige bleibende Regeldifferenz                                                                     |
| I-Regler<br>     |    | $T_I = \text{Integrierzeit}$<br><br>$K_{IR} = \frac{y_h}{T_I \cdot X_h}$        | Vorteil:<br>Keine bleibende Regeldifferenz<br><br>Nachteil:<br>Ungünstiges Zeitverhalten                                                                           |
| PI-Regler<br>   |   | $K_{PR} = \text{Proportional-verstärkung}$<br><br>$T_n = \text{Nachstellzeit}$ | Vorteile:<br>Günstiges Zeitverhalten,<br><br>Keine bleibende Regeldifferenz                                                                                        |
| PID-Regler<br> |  | <br>(Idealisierte Sprungantwort)                                              | Vorteile:<br>Schnelleres Ausregeln einer Regeldifferenz gegenüber dem PI-Regler<br><br>Keine bleibende Regeldifferenz<br><br>Geeigent für schwierige Regelstrecken |

Bild 42 Signalflusspläne und Sprungantworten der wichtigsten Reglertypen

erhöht sich der P-Anteil an der Gesamtverstellung und die Stellgeschwindigkeit. Der PI-Regler ist für den Einsatz in allen Streckentypen gut geeignet.

#### 14.4 PID-Regler, PID-Regelfunktion

Der PID-Regler ist ein PI-Regler mit einem zusätzlichen D-Anteil (D = Differenzial). Die Vorstellung von der Wirkung eines D-Anteils in einem Regler entspricht einem kurz geschlagenen Konterschlag gegen eine sehr starke Änderung der Regelgröße  $x$ , die sich infolge einer Störgröße  $z$  einstellen würde. Der D-Anteil bewirkt eine sehr kräftige aber nur kurz wirkende Veränderung der Reglerausgangsgröße, die sich aus

$$\Delta y_R = K_{DR} \cdot \frac{de}{dt} \quad \text{mit } K_{DR} = \text{Differenzierbeiwert}$$

berechnet und dabei der zeitlichen Änderung der Regeldifferenz  $e$  proportional ist. In der Regelungstechnik wird die Eigenschaft eines Reglers, auf eine sich abzeichnende Entwicklung bereits im Voraus zu reagieren, als *Vorhalt* bezeichnet. Im Voraus bedeutet, der Regler beobachtet die Veränderung der Regeldifferenz bereits im aller ersten Ansatz bei ihrer Entstehung.

Die PID-Regelfunktion bildet sich aus der PI-Regelfunktion erweitert mit dem Vorhaltglied:

$$y_R = K_{PR} \cdot \left( e + \frac{1}{T_n} \cdot \int e \cdot dt + T_v \cdot \frac{de}{dt} \right)$$

Die Vorhaltzeit  $T_v$  ist vergleichbar der Nachstellzeit  $T_n$  eine eingesparte Zeit. Damit ist der PID-Regler im Prinzip ein PI-Regler, dessen Wirkungsbeginn um die Vorhaltzeit  $T_v$  vorverlegt erscheint, allerdings kann dies nicht in der Sprungantwort dargestellt werden. Der Vorteil des PID-Reglers gegenüber dem PI-Regler ist die etwas schnellere Beseitigung einer aufgetretenen Regeldifferenz.

Weil der PID-Regler alle bisher besprochenen Regelparameter, nämlich die Proportionalverstärkung  $K_{PR}$  für den P-Anteil, die Integrierzeit  $T_i$  bzw. die Nachstellzeit  $T_n$  für den I-Anteil und die Vorhaltzeit  $T_v$  für den D-Anteil enthält, wird er auch als Universalregler bezeichnet. Der PID-Regler ist wegen der Vielzahl der möglichen Einstellkombinationen zur Anpassung an alle Regelstreckentypen geeignet, aber etwas schwierig in der Handhabung.

#### 14.5 Vergleich der verschiedenen Reglertypen

Als Abschluss der Betrachtung verschiedener Reglertypen soll in Bild 43 vergleichend gezeigt werden, wie sich die Regler bei optimaler Einstellung an einer Regelstrecke mit Ausgleich und den Kenngrößen  $K_{PS}$ ,

$T_u$  und  $T_g$  verhalten, wenn die Auswirkung einer aufgetretenen Störgröße  $z$  auf die Regelgröße  $x$  ausgeregelt werden soll.

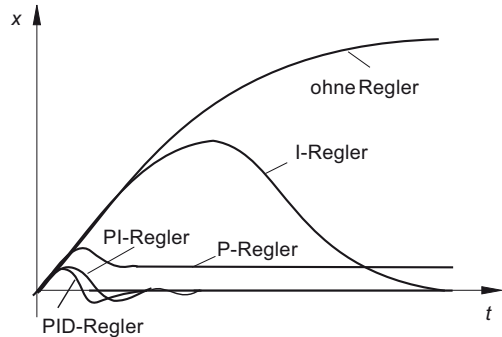


**Bild 43** Unterschiedliches Ausregeln einer Störung bei verschiedenen Reglertypen an einer Regelstrecke mit Ausgleich

#### 14.6 PID-Reglerbaustein für digitale Abtastregelung

Eine Faustformel besagt, dass digitale Abtastregler gute Regelergebnisse liefern, wenn die größte Strecken-Zeitkonstante  $T_s$  etwa 10 mal größer als die Abtastzeit  $T_A$  sein kann. Der Abtastzeitwert bestimmt sich aus der Programmbearbeitungszeit des Rechners einschließlich der Wandlungszeit des A/D-Umsetzers. Ein gut zu erreichender Abtastzeitwert bei einer SPS liegt bei 100 ms. Systembedingt kann sich bei Abtastreglern das Reglerausgangssignal  $y_R$  nur wertdiskret, also bestenfalls feinstufig, und zeitdiskret, nämlich im Takt der Abtastzeit  $T_A$ , ändern, wie Bild 44 zeigt.

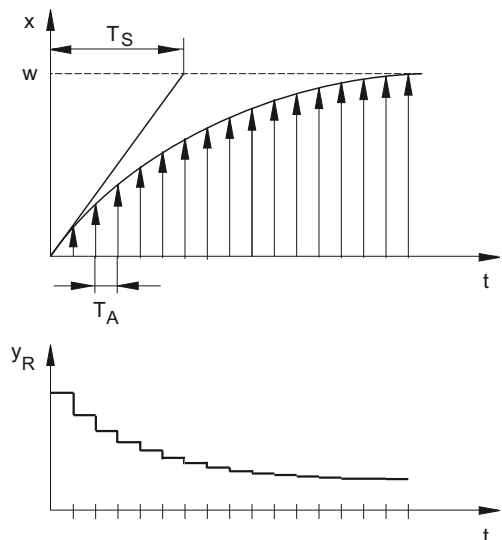


**Bild 44** Istwertabtastung und Regelspannungsausgabe



Zusätzlich muss die PID-Regelfunktion an die arithmetischen Möglichkeiten eines digitalen Rechners angepasst werden. Die originale PID-Regelfunktion muss ersetzt werden durch einen wirkungsähnlichen PID-Regelalgorithmus, bei dem das Integral des I-Anteils durch eine Summe und das Differenzial des D-Anteils durch einen Differenzenquotienten ersetzt wird. Die differenziell kleine Zeitspanne  $dt$  in der Regelfunktion wird durch die Abtastzeit  $T_A$  ersetzt. Eine SPS als Softwareregler verfügt dann mit ihren Additions-, Subtraktions-, Multiplikations- und Divisions-Befehlen über die notwendigen Rechenoperationen zur Durchführung des PID-Regelprogramms, der die Stellgröße  $y_R$  für jeden Abtastzeitpunkt  $k$  neu berechnet:

$$y_R(k) = K_{PR} \cdot \left( e(k) + \frac{1}{T_n} \cdot \sum_{i=1}^k e(i) \cdot T_A + T_v \cdot \frac{e(k) - e(k-1)}{T_A} \right)$$

Die in der Formel noch vorhandene fortlaufende Summenbildung kann mit einem rekursiven Algorithmus ausgeführt werden, sodass eine Speicherung aller Regeldifferenzen  $e$  nicht erforderlich ist. Es ergibt sich eine Formel zur Berechnung der Reglerausgangsgröße  $y_R(k)$  zu den bestimmten Zeitpunkten  $k$  und bezeichnet sie als *Stellungsalgorithmus*. Die analoge Wertausgabe dieser Reglerausgangsgröße am Abtastreglerausgang der SPS, also nach der Digital-Analog-Umsetzung, muss auf ein P-Stellglied geführt werden, das die richtige Stellgröße  $y$  an die Regelstrecke abgibt:

$$y_R(k) = K_{PR} \cdot \left( e(k) + \frac{T_A}{T_n} \cdot e_{SUM(k)} + T_v \cdot \frac{e(k) - e(k-1)}{T_A} \right)$$

PID-Stellungsalgorithmus

Digitale Abtastregler steuern häufig auch sog. I-Stellglieder an. Das sind motorische Stellantriebe, die erst durch ihren Vorschub die Stellgröße  $y$  bilden. Da solchen I-Stellgliedern nicht der Stellgrößenwert, sondern nur die Stellgrößenänderung zu geführt werden darf, gibt es auch noch einen zweiten PID-Algorithmus, der nur die Änderung der Reglerausgangsgröße  $\Delta y_R$  pro Abtastzeit  $T_A$  berechnet und als *Geschwindigkeitsalgorithmus* bezeichnet wird. Dieses Signal kann zur Bildung von entsprechend langen oder kurzen Schritt-Stellsignalen für die sog. Schrittregler verwendet werden.

$$\Delta y = K_{PR} \cdot \left( \begin{matrix} e(k) - e(k-1) + \frac{T_A}{T_n} \cdot e(k) \\ + \frac{T_v}{T_A} (e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)) \end{matrix} \right)$$

PID-Geschwindigkeitsalgorithmus

Nachfolgend wird die Umsetzung des beschriebenen Stellungsalgorithmus in ein universelles PID-Reglerprogramm gezeigt, dessen P-Anteil, I-Anteil bzw. D-Anteil einzeln zu und abschaltbar sind, um quasi-kontinuierliche P-, PI- oder PID-Regelfunktionen ausführen zu lassen. Bild 45 zeigt zunächst das Funktionsschema des zu realisierenden PID-Reglerbausteins.

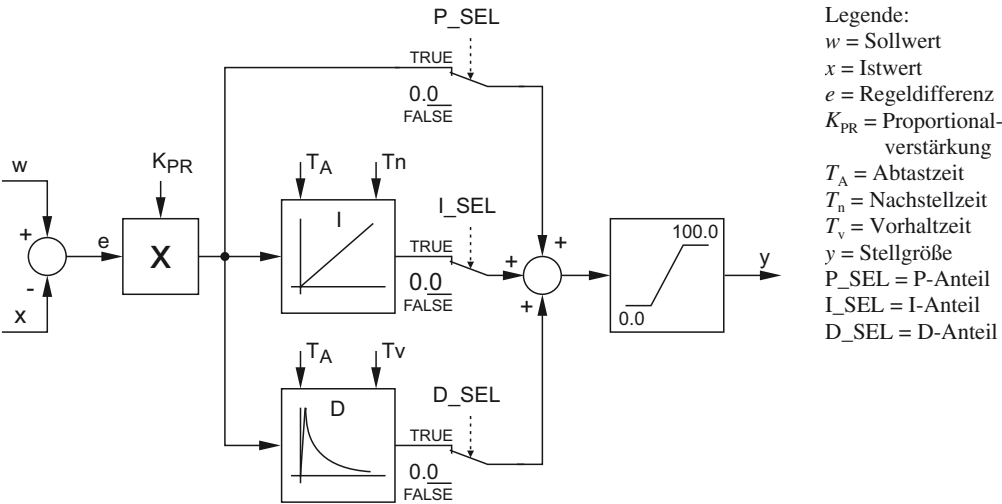


Bild 45 Funktionsschema eines PID-Reglerbausteins für Stellungsalgorithmus



Da die PID-Reglerfunktion über Speichereigenschaften verfügt, wird das Programm mit einem Funktionsbaustein realisiert. Über den Eingangsparameter EIN kann die Regelfunktion ein- oder ausgeschaltet werden. Im ausgeschalteten Zustand werden alle gespeicherten Werte zurückgesetzt. Weitere Eingangsparameter des Funktionsbausteins sind die Führungsgröße  $w$  (SW), die Regelgröße  $x$  (IW) sowie die Einstellwerte Proportionalbeiwert  $K_{PR}$  (KP), Nachstellzeit  $T_n$  (TN), Vorhaltzeit  $T_v$  (TV) und die Abtastzeit  $T_A$  (TA).

Es wird angenommen, dass die Führungsgröße  $w$  und die Regelgröße  $x$  als Gleitpunktzahlen im Bereich von 0.0 bis 100.0 vorliegen. Die Proportionalverstär-

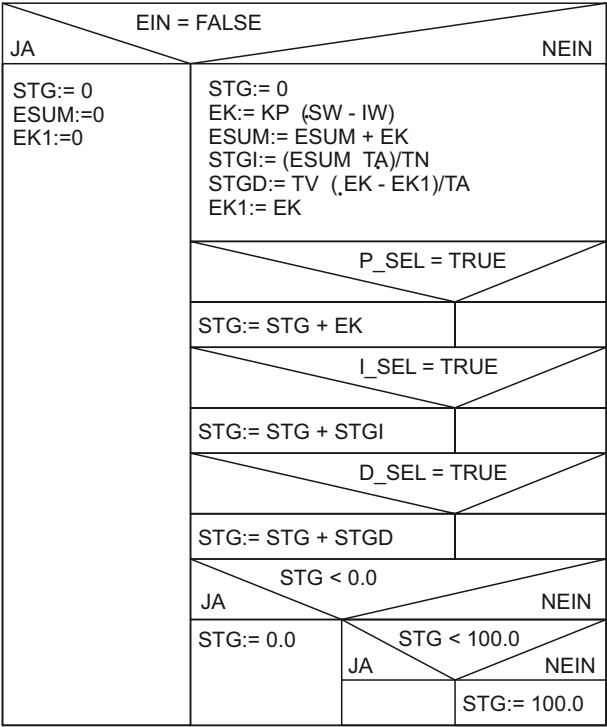
kung KP und die Zeitwerte TN, TV und TA sind ebenfalls als Gleitpunktzahlen anzugeben. Bei den Zeitwerten TN, TV und TA entspricht dabei der Zahlenwert einem Zeitwert in Sekunden.

Mit den binären Eingangsparametern P\_SEL, I\_SEL und D\_SEL können die einzelnen Anteile mit einem „1“-Signal zugeschaltet und mit einem „0“-Signal abgeschaltet werden.

Die Ausgangsgröße STG des PID-Reglerbausteins ist die kontinuierliche Stellgröße  $y_R$  in einem Gleitpunktzahlenbereich von 0.0 ... 100.0.

Der PID-Reglerbaustein muss entsprechend der gewählten Abtastzeit  $T_A$  in gleichen zeitlichen Abständen zur Bearbeitung aufgerufen werden.

Struktogramm des PID-Reglerbausteins mit Stellungsalgorithmus:



Lokale stationäre Variablen des Funktionsbausteins:

EK1 = Regeldifferenz des vorhergehenden Abtastzeitpunktes mit dem Proportionalbeiwert KP multipliziert.

ESUM = Summe aller Regeldifferenzen, die mit dem Proportionalbeiwert KP multipliziert sind.

Lokale temporäre Variablen des Funktionsbausteins:

EK = Regeldifferenz mit dem Proportionalbeiwert KP multipliziert. Der Wert entspricht dem P-Anteil.

STGI = Berechneter I-Anteil der Stellgröße STG.

STGD = Berechneter D-Anteil der Stellgröße STG.

14.7 SPS als kontinuierlicher PID-Abtastregler

Der in 14.6 beschriebene PID-Reglerbaustein für den Stellungsalgorithmus ist noch kein gebrauchsfertiger digitaler SPS-Regler. Bild 46 zeigt in vereinfachter Form, was noch alles benötigt wird. Die SPS muss neben der CPU-Baugruppe selbstverständlich auch über eine Analogeingabebaugruppe und eine Analog-

ausgabebaugruppe verfügen. Programmäßig ist nicht nur der Regelalgorithmus, sondern auch das Einlesen der analogen Regelgröße  $x$  und die Ausgabe der analogen Stellgröße  $y$  auszuführen, d.h. die Anbindung der SPS an den Messaufnehmer und das Stellglied der realen oder simulierten Regelstrecke zu realisieren. Praktisch umsetzen lässt sich eine solche SPS-Reglerlösung nur mit fertigen Programmierbausteinen aus der SPS-Bibliothek.

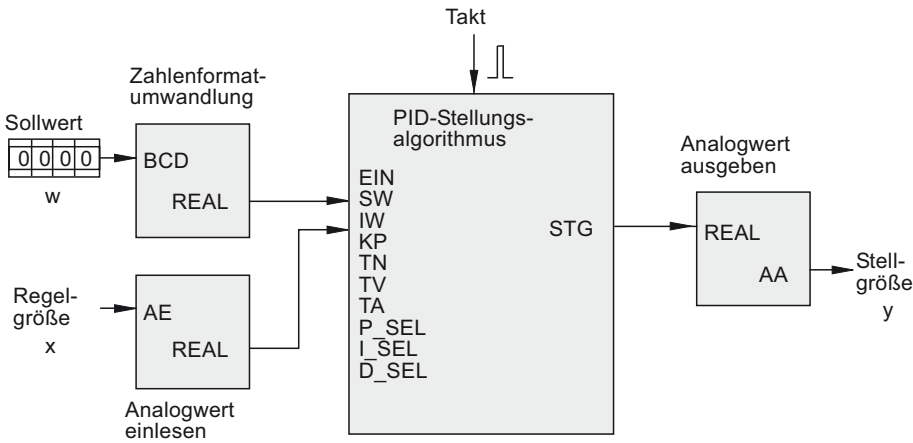


**Bild 46** SPS-Regelstruktur (vereinfacht)

## 14.8 Digitaler Schrittreger mit PI-Verhalten

In der klassischen Analogregeltechnik wurde dieser Reglertyp mit einem Dreipunktreger und verzögerter Rückführung über dem Schaltverstärker realisiert, weshalb er dort auch als Dreipunkt-Schrittreger bezeichnet wurde. Die digitale Nachbildung dieses Reglertyps beruht nicht mehr auf dem Dreipunktreger, sondern auf dem PID-Geschwindigkeitsalgorithmus mit einer nachgesetzten Impulsausgabe zur Ansteuerung eines motorischen Stellantriebs, der einen Schieber oder ein Ventil mit einer Folge von Stellschritten öffnet oder schließt. Die so gebildete Stellgröße ist quasi-kontinuierlich, da jede Stellglied-

position innerhalb des Stellbereichs erreichbar ist, wenn auch in kleinen Schritten. Werden keine Impulse ausgegeben, bleibt die Stellgröße unverändert. Mit den beiden binär wirkenden Impulsausgängen können die erforderlichen drei Schaltzustände „Rechtslauf“, „Linkslauf“ und „Aus“ für den Stellantrieb realisiert werden.

Auf eine sprungförmige Änderung der Regeldifferenz  $e$  reagiert der PI-Schrittreger sofort mit einem „langen“ Schritt. Das Stellsignal  $y_1$  gibt dazu einen langen Impuls aus, der durch den P-Anteil des Regelalgorithmus verursacht wird. Die darauffolgenden kürzeren Impulse werden durch den I-Anteil des Regelalgorithmus gebildet, siehe Bild 47. Der PI-Schrittreger wirkt solange, bis keine Regeldifferenz mehr besteht.

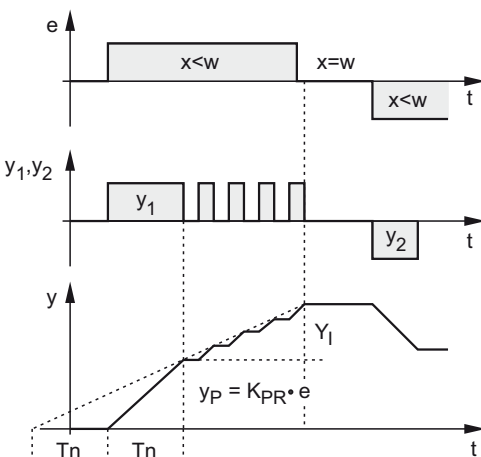


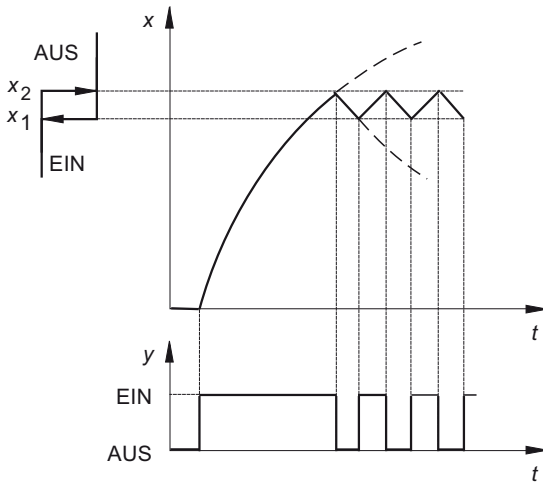
**Bild 47** Impulsverhalten eines PI-Schrittregers

## 14.9 Zweipunktreger, Zweipunkt-Regelfunktion

Bei der Zweipunkt-Regelfunktion wird ein binäres Stellgrößensignal mit den Zuständen „EIN“ und „AUS“ erzeugt. Bei „EIN“ erfolgt 100 % Leistungszufuhr für die Regelstrecke und bei „AUS“ dagegen 0 %.

Die Kennlinie des Zweipunktregers zeigt die Position der beiden Schaltpunkte auf der Regelgrößenachse  $x$ , deren Mittenlage durch die eingestellte Führungsgröße  $w$  festgelegt ist. Die Zuschaltung der Leistungszufuhr erfolgt, wenn die Regelgröße  $x$  den unteren Grenzwert unterschreitet. Die Leistungszufuhr wird abgeschaltet, sobald die Regelgröße  $x$  den oberen Grenzwert überschreitet.

Es ist charakteristisch für Zweipunktreger, dass es für die Regelgröße  $x$  keinen Beharrungszustand gibt, dem sie zustreben kann. Die Stellgröße schaltet

**Bild 48**

Zweipunkt-Regelfunktion mit Verlauf der Regelgröße

ständig um und die Regelgröße verändert sich fortwährend im Rahmen einer noch zulässigen Schwankungsbreite, die durch die Differenz der beiden Schaltpunkte  $x_2$  und  $x_1$  festgelegt ist. Diese sog. *Schalthysterese* trägt zur Beruhigung des Regelvorgangs bei. Den Einfluss einer Störgröße  $z$  korrigiert der Zweipunktregler durch Änderung seines EIN-AUS-Schaltverhältnisses.

Grafisch lässt sich der Zweipunkt-Regelungsvorgang anschaulich darstellen, wie Bild 48 zeigt.

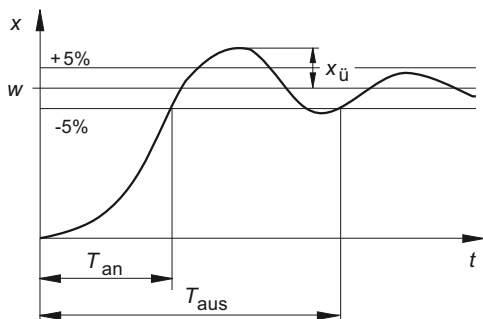
## 14.10 Regelgüte

Ein Regler hat die Aufgabe, die Regelgröße  $x$  möglichst genau auf den durch die Führungsgröße  $w$  vorgegebenen Sollwert zu bringen und auch dort gegen den Einfluss einer Störgröße  $z$  zu halten. Außerdem wird gefordert, dass der Regelungsvorgang in möglichst kurzer Zeit und nur unter vorübergehenden

noch zulässigem Überschwingen abgeschlossen wird. Diese Forderungen lassen sich nicht alle erfüllen, da einzelne Bedingungen sich auch widersprechen. Dämpft man beispielsweise die Überschwingweite, vergrößert sich die Ausregelzeit. Es ist daher nur möglich für eine vorliegende Regelungsaufgabe die günstigsten Reglereinstellungen im Sinne eines Kompromisses zu finden.

Beurteilungsmaßstäbe für die Regelgüte sind die An- und Ausregelzeit sowie die Überschwingweite, wie in Bild 49 dargestellt.

1. Die Anregelzeit  $T_{an}$  ist die Zeit, die bis zum erstmaligen Erreichen des Sollwertes der Regelgröße vergeht.
2. Die Ausregelzeit  $T_{aus}$  ist die Zeit, die vergeht bis die Regelgröße  $x$  endgültig in den Toleranzbereich einmündet und darin verbleibt.
3. Die Überschwingweite  $x_{\bar{u}}$  wird in Prozent des Sollwertes der Regelgröße  $x$  festgelegt.

**Bild 49** Kriterien zur Regelgüte

## Literaturverzeichnis

- DIN EN 61131-3, Speicherprogrammierbare Steuerungen, Teil 3: Programmiersprachen, Dezember 2003, Beuth Verlag Berlin
- DIN 19226 Teil 4, Leittechnik; Regelungstechnik und Steuerungstechnik; Begriffe für Regelungs- und Steuerungssysteme, Februar 1994, Beuth Verlag Berlin
- Gehlen, P.: Funktionale Sicherheit in Maschinen und Anlagen, Siemens AG (Hrsg.), Verlag: Publicis Corporate Publishing, Erlangen 2007
- Lepers, H.: SPS-Programmierung nach IEC 61131-3, Franzis Verlag Pöng, 2005

*Mann, H., Schiffelgen, H., Froriep, R.:* Einführung in die Regelungstechnik, Hanser Verlag München, 8. Auflage 1997

*Reuter, M., Zacher, S.:* Regelungstechnik für Ingenieure, Vieweg Verlag, 11. Auflage 2004

*Seitz, M.:* Speicherprogrammierbare Steuerungen, Fachbuchverlag Leipzig, 2003

*Wellenreuther, G., Zastrow, D.:* Automatisieren mit SPS, Theorie und Praxis, Verlag Vieweg Wiesbaden, 4. Auflage 2008

*Wellenreuther, G., Zastrow, D.:* Automatisieren mit SPS, Übersichten und Übungsaufgaben, Verlag Vieweg Wiesbaden, 4. Auflage 2009

# Regelungstechnik

## I Einführung

Regelungstechnik ist die Wissenschaft von der automatischen gezielten Beeinflussung dynamischer Prozesse [3]. *Dynamisch* bedeutet, dass die Prozessgrößen sich zeitlich ändern.

*Prozesse* laufen in *Systemen* ab, also Einheiten, die mit der Umwelt durch Ein- und Ausgangsgrößen verbunden sind. Der Zusammenhang von Ein- und Ausgangsgrößen wird durch mathematische Beziehungen, beispielsweise Differenzialgleichungen, beschrieben. Das zu beeinflussende System wird auch als *Regelstrecke* oder kurz *Strecke* bezeichnet, die Begriffe Prozess, System und Strecke werden im Folgenden synonym verwendet. Je nach Anwendungsfall kann es sich um ein technisches oder auch um ein nichttechnisches System, beispielsweise ein biologisches oder ökonomisches, handeln. Die im Folgenden behandelten Methoden der Regelungstechnik verwenden stets ein mathematisches Modell, also eine abstrahierte Beschreibung des Prozesses.

hinreichend genau der Führungsgröße folgt; die Wirkung der Störgröße muss hierzu hinreichend unterdrückt werden.

In der Norm DIN IEC 60050-351 [1] werden die Bestandteile des Regelkreises detaillierter gegliedert. Die Messung der Regelgröße erfolgt durch die *Messeinrichtung*, in der Literatur auch als *Messglied* bezeichnet. Das *Stellglied* als Teil der Strecke wandelt die Stellgröße vom niedrigen Leistungspegel des Regelglieds zu einem höheren Leistungspegel. Der *Regler* umfasst laut Norm das Vergleichsglied und das Regelglied; im üblichen Sprachgebrauch werden Regelglied und Regler jedoch synonym verwendet. Ist die Führungsgröße konstant, so spricht man von einer *Festwertregelung*, bei einer zeitabhängigen Führungsgröße von einer *Folgeregelung*.

Charakteristisch für eine Regelung ist die Rückführung oder *Rückkopplung* von Prozessgrößen, im klassischen Regelkreis gemäß Bild I-1 der Regel-

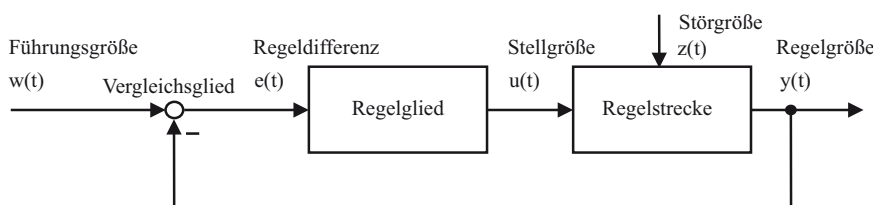


**Bild I-1** Klassischer Regelkreis

Bild I-1 zeigt die klassische Struktur zur gezielten Beeinflussung dynamischer Prozesse, den *Regelkreis*. Die zeitveränderliche Größe  $y(t)$ , die im Idealfall exakt einem vorgegebenen Verlauf folgen soll, wird gemessen und mit der Sollgröße  $w(t)$  verglichen.  $y(t)$  wird als *Regelgröße*,  $w(t)$  als *Führungsgröße* bezeichnet. Die Differenz  $e(t) = w(t) - y(t)$  heißt *Regeldifferenz*, *Regelabweichung* oder *Regelfehler*. Die Differenzbildung von Soll- und Istwert der Regelgröße wird als *Soll-Istwert-Vergleich* bezeichnet. Das *Regelglied* berechnet aus der Regeldifferenz  $e(t)$  die *Stellgröße*  $u(t)$ , und zwar so, dass die Regelgröße der Führungsgröße möglichst gut folgt. Neben der von außen vorgebbaren Stellgröße  $u(t)$  besitzt die Strecke noch eine weitere Eingangsgröße, die *Störgröße*  $z(t)$ . Im Gegensatz zur Führungsgröße kann die Störgröße nicht von außen vorgegeben und häufig auch nicht gemessen werden, ihr zeitlicher Verlauf ist also unbekannt.

Beim Regelungsentwurf, auch als *Regelungssynthese* bezeichnet, geht es nun darum, ein geeignetes Regelglied zu bestimmen, so dass die Regelgröße

größe  $y(t)$ . Wird durch die Störgröße eine Abweichung der Regelgröße von der Führungsgröße, also eine Regeldifferenz ungleich Null, verursacht, so kann diese, ein geeignetes Regelglied vorausgesetzt, im geschlossenen Kreis wieder ausgeregelt werden. Auch wenn die dynamischen Eigenschaften der Strecke nur näherungsweise bekannt sind, wird bei Verwendung eines geeigneten Regelglieds der Betrag der Regeldifferenz hinreichend klein sein. Diese Eigenschaft wird als *Robustheit* bezeichnet.

Im Gegensatz zu einem geschlossenen Regelkreis findet bei einer offenen Steuerkette oder kurz *Steuerung* gemäß Bild I-2 keine Rückführung von Prozessgrößen statt. Die Strecke wird hier als *Steuerstrecke* bezeichnet, die steuernde Einheit als *Steuereinrichtung* oder kurz ebenfalls als *Steuerung*<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Der Begriff „Steuerung“ wird in der Automatisierungstechnik noch mit einer weiteren Bedeutung verwendet, nämlich als Kurzform von „ereignisdiskrete Steuerung“, die eine Rückführung wertediskreter Prozessgrößen (z.B. „Ventil geöffnet“ oder „Ventil geschlossen“) auf wertediskrete Stellgrößen bezeichnet.

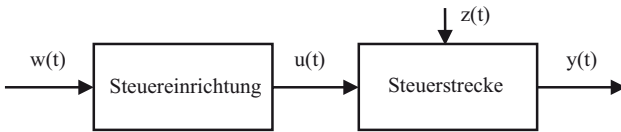


Bild I-2 Steuerkette

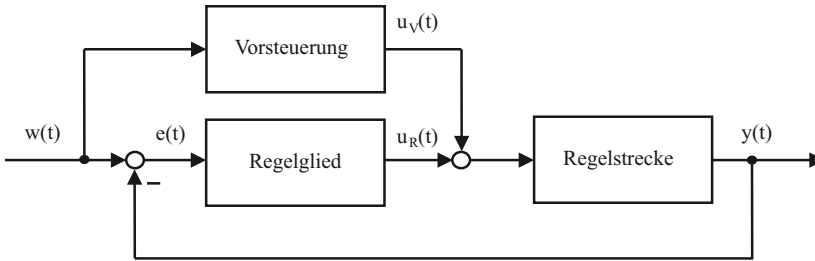


Bild I-3 Regelkreis mit Vorsteuerung

Eine offene Steuerkette kann dann angewendet werden, wenn das dynamische Verhalten und der Anfangszustand der Steuerstrecke genau bekannt sind sowie die Störgröße vernachlässigbar ist. Sind diese Voraussetzungen erfüllt, kann mit einer geeignet entworfenen Steuerung die Ausgangsgröße der Strecke schneller auf einen neuen Sollwert gebracht werden als mit einer Regelung. Für die Aufgabenstellung der Folgeregelung wird daher häufig die Rege-

lung mit einer Steuerung, als *Vorsteuerung* bezeichnet, kombiniert. Wie in Bild I-3 dargestellt, setzt sich hierbei die Stellgröße  $u(t)$  aus einem Vorsteuerungsanteil  $u_V(t)$  und einem Regelungsanteil  $u_R(t)$  zusammen. Der Regelungsanteil der Stellgröße kompensiert die Wirkung von Modellungenauigkeiten und Störungen, der Vorsteuerungsanteil gewährleistet, dass die Regelgröße schnell der Führungsgröße und damit der Solltrajektorie folgt.

## II Strukturbild und Übertragungsglieder

### 1 Strukturbild

Das *Strukturbild* eines dynamischen Systems, auch *Signalflussplan* genannt, ist eine grafische Darstellung der Funktionalbeziehungen der zeitveränderlichen Größen. Die zeitveränderlichen Größen werden dabei als Pfeile dargestellt. Blöcke charakterisieren die Funktionalbeziehung zwischen den Eingangsgrößen und den Ausgangsgrößen, beispielsweise durch eine Differenzialgleichung. Blöcke sind rückwirkungsfrei.

Das Strukturbild stellt eine anschauliche Beschreibung des dynamischen Systems dar. Rückkopplungen oder unabhängige Teilsysteme können in dieser grafischen Darstellung viel einfacher erkannt werden als direkt aus den Gleichungen der zeitveränderlichen Größen des Systems.

### 2 Übertragungsglieder

Ein Übertragungsglied wird durch die Funktionalbeziehung zwischen den Eingangsgrößen und den Ausgangsgrößen beschrieben. Übertragungsglieder werden im Strukturbild als Block dargestellt. In

Tabelle II-1 sind einfache Übertragungsglieder mit den gebräuchlichen Blocksymbolen aufgelistet. Bei linearen, zeitinvarianten Übertragungsgliedern (siehe Abschnitt 2.3.2 und 2.3.3) wird entweder die Sprungantwort  $h(t)$ , also die Ausgangsgröße  $y(t)$  bei einem Einheitssprung  $\sigma(t)$  als Eingangsgröße  $u(t)$ , im Blocksymbol dargestellt oder die in Abschnitt 3.1 definierte Übertragungsfunktion  $G(s)$  angegeben.

### 3 Klassifikation von Übertragungsgliedern

Die Funktionalbeziehung zwischen der Eingangsgröße  $u(t)$  und der Ausgangsgröße  $y(t)$  eines Übertragungsgliedes sei durch den Operator  $A$  gemäß

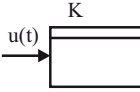
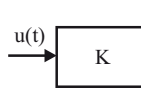
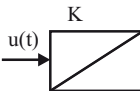
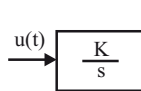
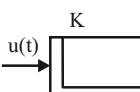
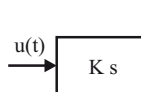
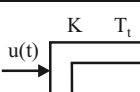
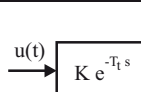
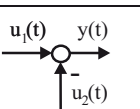
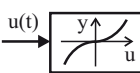
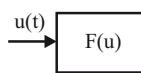
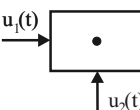
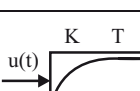
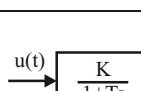
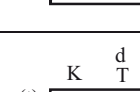
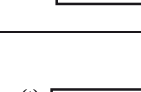
$$y(t) = A\{u(t)\}$$

beschrieben.

#### 3.1 Statische und dynamische Übertragungsglieder

Bei einem *statischen* Übertragungsglied hängt die Ausgangsgröße zum Zeitpunkt  $t$  nur von der Eingangsgröße zum selben Zeitpunkt  $t$  ab. Das *P-Glied*

**Tabelle II-1** Funktionalbeziehung und Blocksymbol einfacher Übertragungsglieder

| Übertragungsglied                                                                                       | Funktionalbeziehung                                                                | Blocksymbol                                                                                                                                                                   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>P</i> -Glied<br>(Proportionalglied)                                                                  | $y(t) = K \cdot u(t)$                                                              |  oder      |
| <i>I</i> -Glied<br>(Integrierglied)                                                                     | $y(t) = K \int_0^t u(\tau) d\tau$                                                  |  oder      |
| <i>D</i> -Glied<br>(Differenzierglied)                                                                  | $y(t) = K \cdot \dot{u}(t)$                                                        |  oder      |
| <i>TZ</i> -Glied, <i>T<sub>i</sub></i> -Glied<br>(Totzeitglied)                                         | $y(t) = K \cdot u(t - T_i)$<br>mit $T_i > 0$                                       |  oder      |
| <i>S</i> -Glied<br>(Summierglied)                                                                       | $y(t) = \pm u_1(t) \pm u_2(t)$                                                     |                                                                                              |
| <i>KL</i> -Glied<br>(Kennlinienglied)                                                                   | $y(t) = F(u(t))$                                                                   |  oder      |
| <i>M</i> -Glied<br>(Multiplizierglied)                                                                  | $y(t) = K \cdot u_1(t) \cdot u_2(t)$                                               |                                                                                             |
| <i>PT<sub>1</sub></i> -Glied,<br><i>VZ<sub>1</sub></i> -Glied<br>(Verzögerungsglied<br>erster Ordnung)  | $T \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K \cdot u(t)$                                         |  oder  |
| <i>PT<sub>2</sub></i> -Glied,<br><i>VZ<sub>2</sub></i> -Glied<br>(Verzögerungsglied<br>zweiter Ordnung) | $T^2 \cdot \ddot{y}(t) + 2 \cdot d \cdot T \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K \cdot u(t)$ |  oder  |

mit der Funktionalbeziehung  $y(t) = K \cdot u(t)$  und das *KL*-Glied mit der Funktionalbeziehung  $y(t) = F(u(t))$  sind statische Übertragungsglieder.

Bei einem *dynamischen* Übertragungsglied hängt die Ausgangsgröße zum Zeitpunkt  $t$  von der Eingangsgröße zu einem anderen Zeitpunkt ab, typischerweise von der Eingangsgröße bis zum Zeitpunkt  $t$ . Das

*I*-Glied mit der Funktionalbeziehung  $y(t) = K \int_0^t u(\tau) d\tau$

ist ein dynamisches Übertragungsglied.

### 3.2 Lineare und nichtlineare Übertragungsglieder

Ein Übertragungsglied heißt *linear*, wenn es das Überlagerungsprinzip (Superpositionsprinzip),

$$A\{u_1(t) + u_2(t)\} = A\{u_1(t)\} + A\{u_2(t)\}$$

für beliebige  $u_1(t)$  und  $u_2(t)$ , und das Verstärkungsprinzip,

$$A\{c \cdot u(t)\} = c \cdot A\{u(t)\}$$

für beliebige  $c$  und  $u(t)$ , erfüllt [3]. Andernfalls heißt das Übertragungsglied *nichtlinear*.

Mit

$$y_1(t) = A\{u_1(t)\}, \quad y_2(t) = A\{u_2(t)\}$$

und der Eingangsgröße

$$u(t) = c_1 \cdot u_1(t) + c_2 \cdot u_2(t)$$

lautet die Ausgangsgröße eines linearen Systems

$$y(t) = c_1 \cdot y_1(t) + c_2 \cdot y_2(t).$$

Das *I*-Glied ist ein lineares Übertragungsglied. Das *KL*-Glied – den Sonderfall des *P*-Gliedes ausgenommen – ist ein nichtlineares Übertragungsglied.

### 3.3 Zeitinvariante und zeitvariante Übertragungsglieder

Ein Übertragungsglied heißt *zeitinvariant*, wenn es das Verschiebungsprinzip,

$$y(t - t_0) = A\{u(t - t_0)\}$$

für jede Eingangsgröße  $u(t)$  und jedes  $t_0 > 0$ , erfüllt [3]. Andernfalls heißt es *zeitvariant*.

Das Übertragungsverhalten eines zeitinvarianten Übertragungsgliedes ist also unabhängig von der Zeit, das Übertragungsverhalten eines zeitvarianten Übertragungsgliedes ist dagegen abhängig von der Zeit. Alle Übertragungsglieder in Tabelle II-1 sind zeitinvariant. Ein Übertragungsglied, dessen Übertragungsverhalten durch eine Differenzialgleichung mit zeitabhängigen Koeffizienten beschrieben wird, beispielsweise

$$a_0(t) \cdot y(t) + a_1(t) \cdot \dot{y}(t) = b_0(t) \cdot u(t) + b_1(t) \cdot \dot{u}(t),$$

ist dagegen zeitvariant.

Technische Systeme sind, verursacht unter anderem durch Alterung und Verschleiß, stets zeitvariant. Jedoch können sie, wenn man lediglich einen begrenzten Zeitraum betrachtet, in guter Näherung als zeitinvariant beschrieben werden.

### 3.4 Kausale und akasale Übertragungsglieder

Ein Übertragungsglied heißt *kausal*, wenn die Eingangsgröße zu einem beliebigen Zeitpunkt  $\tau$  die Ausgangsgröße für  $t < \tau$  nicht beeinflusst. Andernfalls heißt es *akausal*.

Alle Übertragungsglieder in Tabelle II-1 sind kausal. Ein TZ-Glied mit negativer Totzeit,  $T_i < 0$ , ist dagegen akausal.

Technische Systeme sind stets kausal. Damit ein Reglergesetz technisch realisiert werden kann, muss das Übertragungsverhalten kausal sein.

## 4 Beschreibung von Übertragungsgliedern um einen Arbeitspunkt

### 4.1 Arbeitspunkt eines Übertragungsgliedes

Im *Arbeitspunkt* eines Übertragungsgliedes, auch als Betriebspunkt, Ruhelage oder stationärer Zustand bezeichnet, sind alle zeitveränderlichen Größen konstant. Die zeitlichen Ableitungen sind damit gleich

Null. Wird das Übertragungsverhalten durch die Differenzialgleichung

$$f\left(u(t), \dot{u}(t), \dots, u^{(m)}(t), y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n)}(t)\right) = 0 \quad (\text{II.1})$$

beschrieben, so gilt für die Ruhelage

$$f(u_R, 0, \dots, 0, y_R, 0, \dots, 0) = 0.$$

Zu einem vorgegebenen  $u_R$  können unendlich viele oder endlich viele Lösungen oder genau eine oder auch keine Lösung  $y_R$  existieren.

### 4.2 Linearisierung um den Arbeitspunkt

Betrachtet man das Übertragungsverhalten eines nichtlinearen Übertragungsgliedes in der Umgebung des Arbeitspunktes  $u_R, y_R$ , dann genügt es häufig, eine lineare Approximation zu verwenden. Man spricht dann von der *Linearisierung um den Arbeitspunkt*. Diese Vorgehensweise ist insbesondere dann angemessen, wenn mit einer Festwertregelung ein dynamisches System trotz Störungen im Arbeitspunkt gehalten werden soll.

Mit den Abweichungen

$$\Delta u(t) = u(t) - u_R,$$

$$\Delta y(t) = y(t) - y_R$$

erhält man durch Taylorreihenentwicklung und Vernachlässigung des Restgliedes aus Gleichung (II.1) die lineare Näherung

$$\begin{aligned} & a_0 \cdot \Delta y(t) + a_1 \cdot \Delta \dot{y}(t) + \dots + a_n \cdot \Delta y^{(n)}(t) \\ & = b_0 \cdot \Delta u(t) + b_1 \cdot \Delta \dot{u}(t) + \dots + b_m \cdot \Delta u^{(m)}(t) \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

mit

$$a_0 = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(u_R, 0, \dots, 0, y_R, 0, \dots, 0)},$$

$$a_1 = \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right|_{(u_R, 0, \dots, 0, y_R, 0, \dots, 0)},$$

⋮

$$a_n = \left. \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right|_{(u_R, 0, \dots, 0, y_R, 0, \dots, 0)},$$

$$b_0 = - \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(u_R, 0, \dots, 0, y_R, 0, \dots, 0)},$$

$$b_1 = - \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{u}} \right|_{(u_R, 0, \dots, 0, y_R, 0, \dots, 0)},$$

⋮

$$b_m = - \left. \frac{\partial f}{\partial u^{(m)}} \right|_{(u_R, 0, \dots, 0, y_R, 0, \dots, 0)}.$$



Als triviales Beispiel werde die nichtlineare Kennlinie  $y = F(u)$  mit der Ruhelage  $y_R = F(u_R)$  betrachtet. Mit

$$f(u, y) = y - F(u)$$

erhält man

$$a_0 = 1 \Big|_{(u_R, y_R)} = 1,$$

$$b_0 = \frac{\partial F(u)}{\partial u} \Big|_{(u_R, y_R)} = F'(u) \Big|_{u_R}.$$

Aus Gleichung (II.2) folgt somit die lineare Approximation

$$\Delta y(t) = F'(u) \Big|_{u_R} \cdot \Delta u(t).$$

Das KL-Glied kann also in der Umgebung des Arbeitspunktes  $u_R, y_R$  durch ein P-Glied

$$\Delta y(t) = K \cdot \Delta u(t)$$

mit

$$K = F'(u) \Big|_{u_R}$$

angenähert werden.

## 5 Impulsantwort und Sprungantwort einfacher Übertragungsglieder

Als *Impulsantwort*  $g(t)$  eines Übertragungsgliedes bezeichnet man die Ausgangsgröße  $y(t)$ , die sich als Reaktion auf einen Dirac-Impuls  $\delta(t)$  am Eingang  $u(t)$  des Übertragungsgliedes ergibt. Als *Sprungantwort*  $h(t)$  bezeichnet man die Ausgangsgröße  $y(t)$ , die sich als Reaktion auf einen Einheitsprung  $\sigma(t)$  am Eingang  $u(t)$  ergibt.

### 5.1 P-Glied

Für das P-Glied mit der Funktionalbeziehung

$$y(t) = K \cdot u(t)$$

lautet die Impulsantwort

$$g(t) = K \cdot \delta(t)$$

und die Sprungantwort

$$h(t) = K \cdot \sigma(t).$$

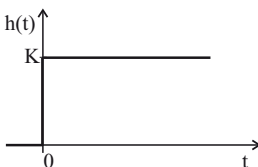


**Bild II-1**  
Sprungantwort  $h(t)$   
des P-Gliedes

### 5.2 I-Glied

Für das I-Glied mit der Funktionalbeziehung

$$y(t) = K \int_0^t u(\tau) d\tau$$

lautet die Impulsantwort

$$g(t) = K \cdot \sigma(t)$$

und die Sprungantwort

$$h(t) = K \cdot t \cdot \sigma(t).$$

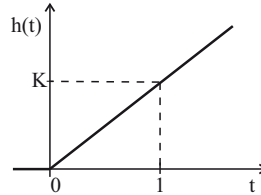


**Bild II-2**  
Sprungantwort  $h(t)$   
des I-Gliedes

### 5.3 D-Glied

Für das D-Glied mit der Funktionalbeziehung

$$y(t) = K \cdot \dot{u}(t)$$

lautet die Impulsantwort

$$g(t) = K \cdot \dot{\delta}(t)$$

und die Sprungantwort

$$h(t) = K \cdot \delta(t).$$

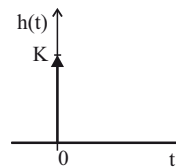


**Bild II-3**  
Sprungantwort  $h(t)$   
des D-Gliedes

### 5.4 TZ-Glied

Für das TZ-Glied mit der Funktionalbeziehung

$$y(t) = K \cdot u(t - T_i), \quad T_i > 0,$$

lautet die Impulsantwort

$$g(t) = K \cdot \delta(t - T_i)$$

und die Sprungantwort

$$h(t) = K \cdot \sigma(t - T_i).$$

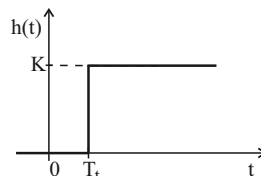


**Bild II-4**  
Sprungantwort  $h(t)$   
des TZ-Gliedes

### 5.5 PT<sub>1</sub>-Glied

Für das PT<sub>1</sub>-Glied mit der Funktionalbeziehung

$$T \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K \cdot u(t), \quad T > 0$$

lautet die Impulsantwort

$$g(t) = \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \cdot \sigma(t)$$

und die Sprungantwort

$$h(t) = K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \cdot \sigma(t)$$

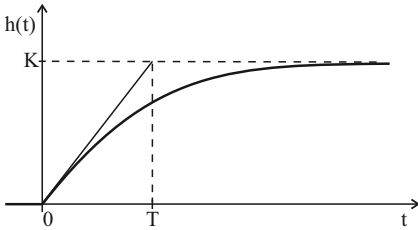


**Bild II-5** Sprungantwort  $h(t)$  des  $PT_1$ -Gliedes

## 5.6 $PT_2$ -Glied

Für das  $PT_2$ -Glied mit der Funktionalbeziehung

$$T^2 \cdot \ddot{y}(t) + 2 \cdot d \cdot T \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K \cdot u(t), \quad T, \quad d > 0$$

sind in Abhängigkeit von der Dämpfung  $d$  drei Fälle zu unterscheiden: der aperiodische Fall für  $d > 1$ , der aperiodische Grenzfall für  $d = 1$  und der periodische Fall für  $0 < d < 1$ .

Im *aperiodischen Fall* für  $d > 1$  lautet die Impulsantwort

$$g(t) = \frac{K}{T_1 - T_2} \cdot \left( e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \cdot \sigma(t)$$

mit

$$T_1 = T \cdot (d + \sqrt{d^2 - 1}),$$

$$T_2 = T \cdot (d - \sqrt{d^2 - 1})$$

und die Sprungantwort

$$h(t) = \left( K - \frac{K}{T_1 - T_2} \cdot \left( T_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \right) \cdot \sigma(t).$$

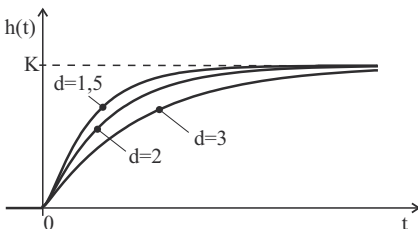


**Bild II-6** Sprungantwort  $h(t)$  des  $PT_2$ -Gliedes im aperiodischen Fall für verschiedene Dämpfungen  $d$

Im *aperiodischen Grenzfall* für  $d = 1$  lautet die Impulsantwort

$$g(t) = \frac{K}{T^2} \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{T}} \cdot \sigma(t)$$

und die Sprungantwort

$$h(t) = \left( K - K \cdot e^{-\frac{t}{T}} - \frac{K}{T} \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{T}} \right) \cdot \sigma(t).$$

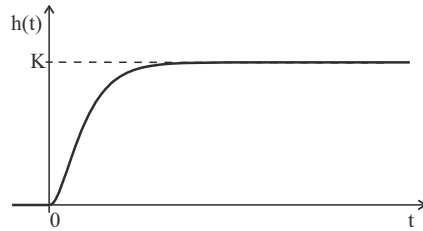


**Bild II-7** Sprungantwort  $h(t)$  des  $PT_2$ -Gliedes im aperiodischen Grenzfall

Im *periodischen Fall* für  $0 < d < 1$  lautet die Impulsantwort

$$g(t) = \frac{K}{T \cdot \sqrt{1-d^2}} \cdot e^{-d \frac{t}{T}} \cdot \sin \left( \sqrt{1-d^2} \cdot \frac{t}{T} \right) \cdot \sigma(t)$$

und die Sprungantwort

$$h(t) = \left( K - \frac{K}{\sqrt{1-d^2}} \cdot e^{-d \frac{t}{T}} \cdot \sin \left( \sqrt{1-d^2} \cdot \frac{t}{T} + \psi \right) \right) \cdot \sigma(t)$$

mit

$$\cos \psi = d, \quad 0 < \psi < \frac{\pi}{2}.$$

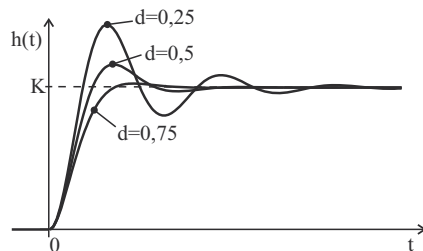
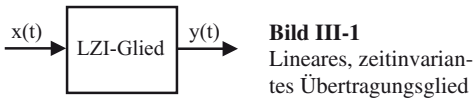


**Bild II-8** Sprungantwort  $h(t)$  des  $PT_2$ -Gliedes im periodischen Fall für verschiedene Dämpfungen  $d$

### III Übertragungsverhalten linearer, zeitinvarianter Übertragungsglieder

Betrachtet werde ein lineares, zeitinvariantes Übertragungsglied (LZI-Glied) mit der Eingangsgröße  $u(t)$  und der Ausgangsgröße  $y(t)$ , siehe Bild III-1. Die Ausgangsgröße  $y(t)$  berechnet sich bei verschwindenden Anfangswerten durch Faltung von Impulsantwort  $g(t)$  und Eingangsgröße  $u(t)$  gemäß

$$y(t) = \int_{\tau=0}^t g(t-\tau) \cdot u(\tau) d\tau. \quad (\text{III.1})$$



#### 1 Übertragungsfunktion

Durch Laplace-Transformation und Anwendung der Faltungsregel erhält man aus Gleichung (III.1) im Bildbereich

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s).$$

$G(s)$  wird als *Übertragungsfunktion* des linearen, zeitinvarianten Systems bezeichnet. Die Übertragungsfunktion  $G(s)$  ist also die Laplace-Transformierte der Impulsantwort  $g(t)$ . Für eine beliebige Eingangsgröße  $u(t)$  kann die Übertragungsfunktion gemäß

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

als Quotient der Laplace-Transformierten  $Y(s)$  der Ausgangsgröße  $y(t)$  und der Laplace-Transformierten  $U(s)$  der Eingangsgröße  $u(t)$  berechnet werden.

Wird das Übertragungsverhalten des linearen, zeitinvarianten Systems durch die Differenzialgleichung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t)$$

$$= b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

beschrieben, so erhält man durch Laplace-Transformation und Anwendung der Differenzierungsregel bei verschwindenden Anfangswerten im Bildbereich

$$\begin{aligned} & (s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) \\ &= (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) U(s). \end{aligned}$$

Die Übertragungsfunktion ist damit durch die gebrochen rationale Funktion

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

gegeben. Solche Übertragungsglieder werden als *R-Glieder* bezeichnet. Mit den *Polen*  $p_i$  und den *Nullstellen*  $n_j$  erhält man die Darstellung

$$G(s) = K \cdot \frac{\prod_{j=1}^m (s - n_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}.$$

Als Pole der Übertragungsfunktion bezeichnet man die Nullstellen des Nennerpolynoms

$$N(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0,$$

als Nullstellen der Übertragungsfunktion die Nullstellen des Zählerpolynoms

$$Z(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0,$$

wobei vorausgesetzt ist, dass Zähler- und Nennerpolynom keine gemeinsame Nullstelle besitzen. Die Anzahl  $m$  der Nullstellen ist kleiner oder gleich der Anzahl  $n$  der Pole. Die Polynomkoeffizienten  $a_n, \dots, a_0$  des Nennerpolynoms sind reell, daher treten ausschließlich reelle Pole oder konjugiert komplexe Polpaare auf. Entsprechendes gilt für die Polynomkoeffizienten  $b_m, \dots, b_0$  des Zählerpolynoms und die Nullstellen der Übertragungsfunktion.

#### 2 Frequenzgangfunktion

Betrachtet man die Übertragungsfunktion  $G(s)$  auf der imaginären Achse, d.h. für  $s = j\omega$ , so erhält man die *Frequenzgangfunktion*

$$F(j\omega) = G(s) \big|_{s=j\omega}.$$

Die Frequenzgangfunktion eines stabilen Übertragungsglieds kann direkt gemessen werden: Schaltet man eine harmonische Schwingung mit der Frequenz  $\omega$  und der Amplitude 1 auf den Eingang des linearen, zeitinvarianten Übertragungsglieds,

$$u(t) = \sin(\omega \cdot t),$$

so erhält man am Ausgang nach dem Abklingen der Einschwingvorgänge ebenfalls eine harmonische Schwingung mit derselben Frequenz  $\omega$ , einer Amplitude  $A(\omega)$  und einer Phasenverschiebung  $\varphi(\omega)$ ,

$$y(t) = A(\omega) \cdot \sin(\omega(t) + \varphi(\omega)).$$

Der Betrag der Frequenzgangfunktion für die Frequenz  $\omega$  beträgt

$$|F(j\omega)| = A(\omega),$$

die Phase

$$\angle F(j\omega) = \varphi(\omega),$$

und damit ergibt sich die Frequenzgangfunktion zu

$$F(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

für die betrachtete Frequenz  $\omega$ . Aufgrund der Linearität des Übertragungsgliedes kann die Messung mit einer beliebigen Eingangsamplitude  $\hat{U}$  durchgeführt werden, die Ausgangsamplitude ergibt sich dann zu  $\hat{Y} = A(\omega) \cdot \hat{U}$ .

Wiederholt man das Experiment für verschiedene Frequenzwerte, erhält man die Frequenzgangfunktion  $F(j\omega)$ .

Von besonderer Bedeutung sind zwei grafische Darstellungen der Frequenzgangfunktion: Die *Ortskurve* zeigt  $F(j\omega)$  für  $\omega \geq 0$  in der komplexen Ebene. Im *Bode-Diagramm* werden Betrag und Phase von  $F(j\omega)$  in zwei separaten Frequenzkennlinien dargestellt.

Stellt man die Frequenzgangfunktion  $F(j\omega)$  als Produkt

$$F(j\omega) = F_1(j\omega) \cdot \dots \cdot F_n(j\omega)$$

dar, so erhält man mit

$$\begin{aligned} |F(j\omega)| \cdot e^{j\angle F(j\omega)} &= |F_1(j\omega)| \cdot e^{j\angle F_1(j\omega)} \cdot \dots \cdot |F_n(j\omega)| \cdot e^{j\angle F_n(j\omega)} \\ &= |F_1(j\omega)| \cdot \dots \cdot |F_n(j\omega)| \cdot e^{j[\angle F_1(j\omega) + \dots + \angle F_n(j\omega)]} \end{aligned}$$

für den Betrag

$$|F(j\omega)| = |F_1(j\omega)| \cdot \dots \cdot |F_n(j\omega)|$$

und für die Phase

$$\angle F(j\omega) = \angle F_1(j\omega) + \dots + \angle F_n(j\omega).$$

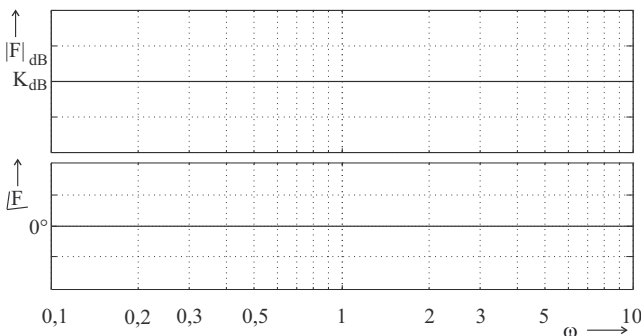
Geht man zum Betrag in Dezibel gemäß

$$|F(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log |F(j\omega)|$$

über, so ergibt sich

$$|F(j\omega)|_{\text{dB}} = |F_1(j\omega)|_{\text{dB}} + \dots + |F_n(j\omega)|_{\text{dB}}.$$

Betrags- bzw. Phasenkennlinie von  $F(j\omega)$  erhält man also als Summe der Betrags- bzw. Phasenkennlinien von  $F_1(j\omega)$  bis  $F_n(j\omega)$ . Die Frequenz wird im Bode-Diagramm logarithmisch aufgetragen.



### 3 Frequenzkennlinien elementarer Übertragungsfunktionen

#### 3.1 Verstärkungsfaktor

Mit  $F(j\omega) = K$ ,  $K > 0$  ergibt sich der Betrag in Dezibel zu

$$|F(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log K,$$

die Phase zu

$$\angle F(j\omega) = 0^\circ.$$

#### 3.2 Integrierer

Mit  $F(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$  ergibt sich der Betrag in Dezibel zu

$$|F(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \cdot \log \omega,$$

die Phase zu

$$\angle F(j\omega) = -90^\circ.$$

#### 3.3 Differenzierer

Mit  $F(j\omega) = j\omega$  ergibt sich der Betrag in Dezibel zu

$$|F(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log \omega,$$

die Phase zu

$$\angle F(j\omega) = 90^\circ.$$

#### 3.4 Reeller Pol

Mit  $F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega \cdot T}$ ,  $T > 0$ , ergibt sich der Betrag zu

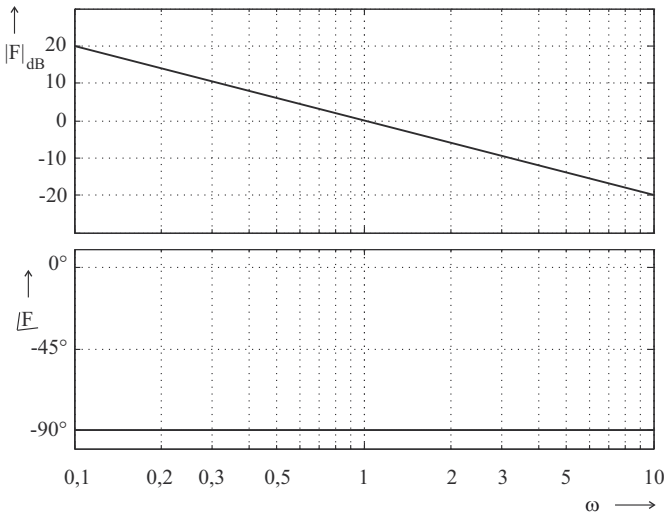
$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \cdot T^2}}.$$

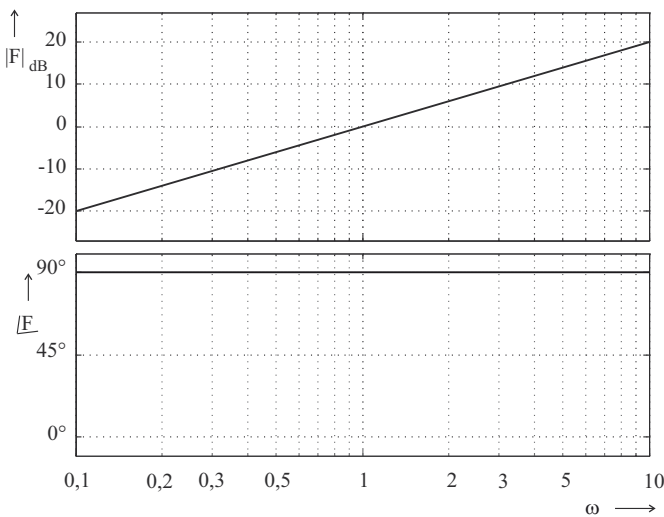
Für  $\omega \ll \frac{1}{T}$  erhält man näherungsweise

$$|F(j\omega)| \approx 1$$

**Bild III-2**

Frequenzkennlinien von  $F(j\omega) = K$


**Bild III-3**

 Frequenzkennlinien von  $F(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$ 

**Bild III-4**

 Frequenzkennlinien von  $F(j\omega) = j\omega$ 

und damit

$$|F(j\omega)|_{\text{dB}} \approx 0.$$

Die 0 dB-Linie ist also die Asymptote für  $\omega \ll \frac{1}{T}$ .

Für  $\omega \gg \frac{1}{T}$  erhält man näherungsweise

$$|F(j\omega)| \approx \frac{1}{\omega \cdot T}$$

und damit

$$|F(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \cdot \log \omega - 20 \cdot \log T.$$

Die Asymptote für  $\omega \gg \frac{1}{T}$  ist also eine Gerade, die

mit 20 dB pro Dekade abfällt. Die Betragskennlinie kann damit durch eine Knickgerade approximiert werden.

Bild III-5 zeigt den exakten Betrag und die Approximation als Knickgerade. Die Abweichung zwischen der exakten Betragskennlinie und der Approximation durch die Knickgerade ist bei der Knickfrequenz

$\omega_0 = \frac{1}{T}$  maximal, sie beträgt dort 3 dB.

Die Phase ergibt sich zu

$$|F(j\omega) = -\arctan(\omega \cdot T).$$

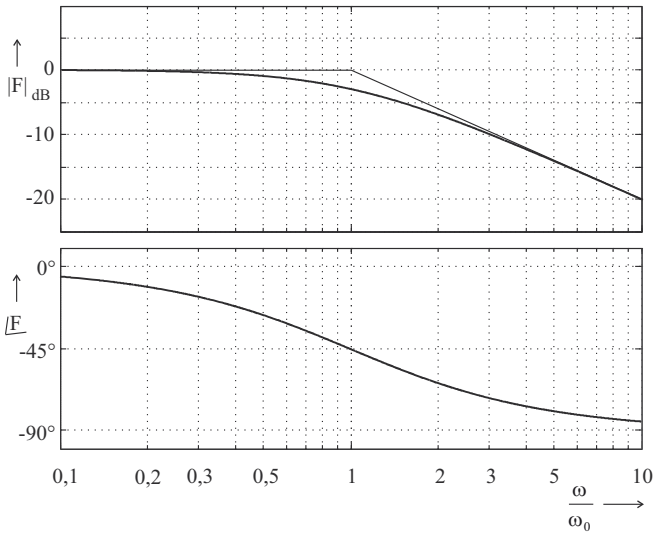


**Bild III-5**  
Frequenzkennlinien von

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega \cdot T}$$

### 3.5 Reelle Nullstelle

Die Frequenzkennlinie einer reellen Nullstelle mit

$$F(j\omega) = 1 + j\omega \cdot T, \quad T > 0,$$

erhält man aus den Frequenzkennlinien einer reellen Polstelle durch Vorzeichenumkehr, d.h. durch Spiegelung an der 0 dB- bzw. 0°-Linie.

### 3.6 Konjugiert komplexes Polpaar

Mit 
$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + 2 \cdot d \cdot j\omega \cdot T + (j\omega \cdot T)^2}, \quad 0 < d < 1,$$

$T > 0$ , ergibt sich der Betrag zu

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 - (\omega \cdot T)^2 + (2 \cdot d \cdot \omega \cdot T)^2}}.$$

Für  $\omega \ll \frac{1}{T}$  erhält man näherungsweise

$$|F(j\omega)| \approx 1$$

und damit

$$|F(j\omega)|_{\text{dB}} \approx 0.$$

Die 0 dB-Linie ist also die Asymptote für  $\omega \ll \frac{1}{T}$ .

Für  $\omega \gg \frac{1}{T}$  erhält man näherungsweise

$$|F(j\omega)| \approx \frac{1}{(\omega \cdot T)^2}$$

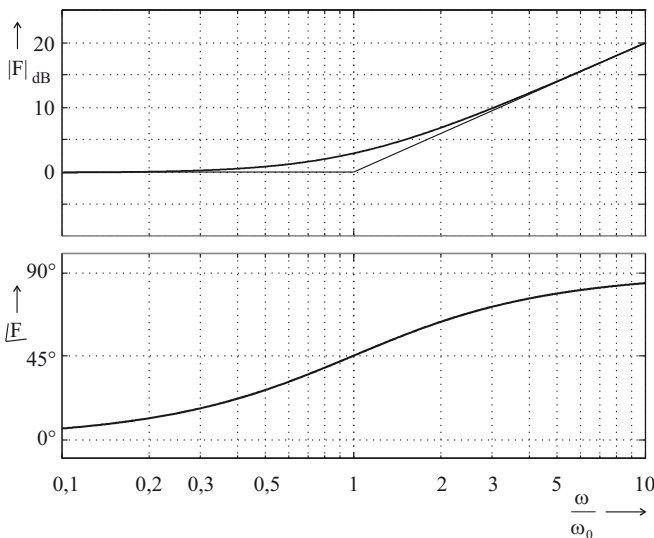


**Bild III-6**  
Frequenzkennlinie von  
 $F(j\omega) = 1 + j\omega \cdot T$

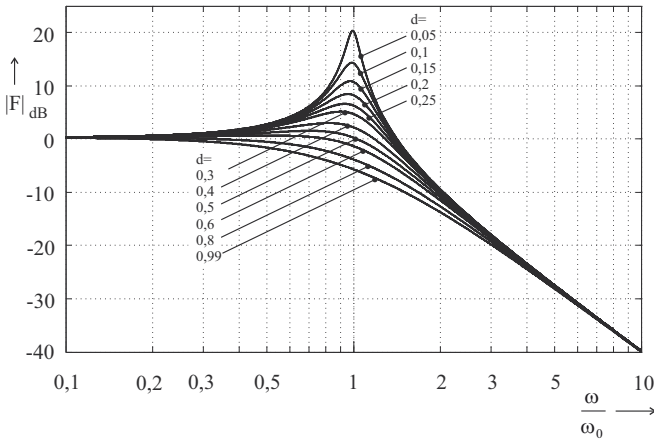


Bild III-7

Betragskennlinie von

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + 2 \cdot d \cdot j\omega \cdot T + (j\omega \cdot T)^2}$$

 in Abhängigkeit von der Dämpfung  $d$ 

und damit

$$|F(j\omega)|_{\text{dB}} \approx -40 \cdot \log \omega - 40 \cdot \log T.$$

Die Asymptote für  $\omega \gg \frac{1}{T}$  ist also eine Gerade, die mit 40 dB pro Dekade abfällt.

Bild III-7 zeigt die Betragskennlinie von

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + 2 \cdot d \cdot j\omega \cdot T + (j\omega \cdot T)^2}$$

in Abhängigkeit von der Dämpfung  $d$ . Für  $d < \frac{\sqrt{2}}{2}$

kommt es zur sogenannten *Resonanzüberhöhung*. Der Maximalwert der Betragskennlinie wird für die Resonanzfrequenz  $\omega_R = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot d^2}$  mit  $\omega_0 = \frac{1}{T}$  erreicht

und beträgt

$$\max |F(j\omega)| = \frac{1}{2 \cdot d \cdot \sqrt{1 - d^2}}.$$

Diese Resonanzüberhöhung wird für  $d \rightarrow 0$  unendlich groß.

Die Phase ergibt sich zu

$$\angle F(j\omega) = -\arctan \frac{2 \cdot d \cdot \omega \cdot T}{1 - (\omega \cdot T)^2}.$$

Bild III-8 zeigt die Phasenkennlinie von  $F(j\omega)$

=  $\frac{1}{1 + 2 \cdot d \cdot j\omega \cdot T + (j\omega \cdot T)^2}$  in Abhängigkeit von der Dämpfung  $d$ .

### 3.7 Konjugiert komplexes Nullstellenpaar

Die Frequenzkennlinien eines konjugiert komplexen Nullstellenpaares mit  $F(j\omega) = 1 + 2 \cdot d \cdot j\omega \cdot T + (j\omega \cdot T)^2$   $0 < d < 1, T > 0$ , erhält man aus den Frequenzkennlinien eines konjugiert komplexen Polpaares durch Vorzeichenumkehr, d.h. durch Spiegelung an der 0 dB- bzw. 0°-Linie.

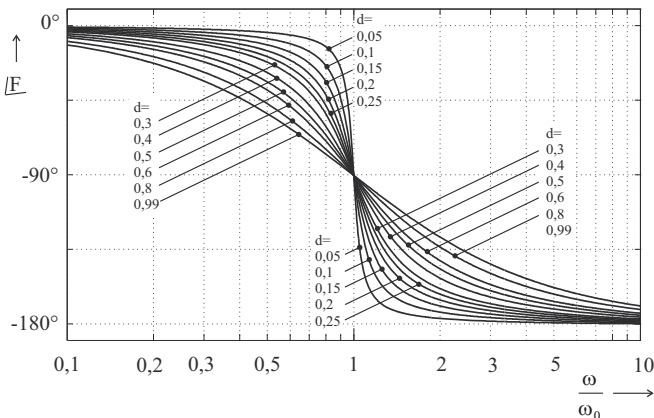
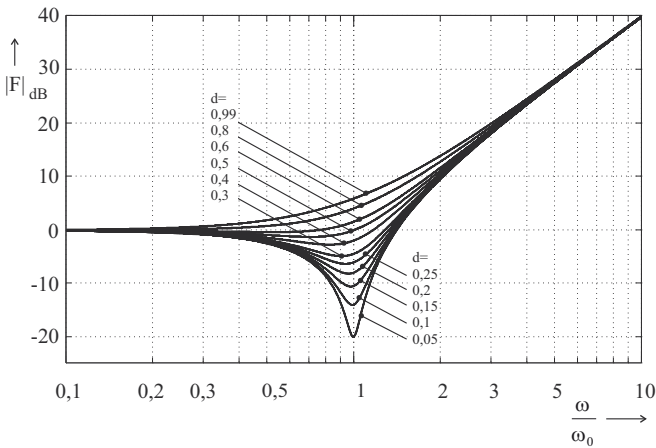


Bild III-8

Phasenkennlinie von

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + 2 \cdot d \cdot j\omega \cdot T + (j\omega \cdot T)^2}$$

 in Abhängigkeit von der Dämpfung  $d$

**Bild III-9**

Betragskennlinie von  
 $F(j\omega) = 1 + 2 \cdot d \cdot j\omega \cdot T + (j\omega \cdot T)^2$   
 in Abhängigkeit von der Dämpfung  $d$

### 3.8 Totzeit

Mit  $F(j\omega) = e^{-j\omega T_t}$ ,  $T_t > 0$ , ergibt sich der Betrag zu

$$|F(j\omega)| = 1$$

und damit

$$|F(j\omega)|_{\text{dB}} = 0.$$

Die Phase beträgt

$$\angle F(j\omega) = -\omega \cdot T_t = -\frac{\omega}{\omega_0} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$\text{mit } \omega_0 = \frac{1}{T_t}.$$

### 3.9 Allpass erster Ordnung

Mit  $F(j\omega) = \frac{1 - j\omega \cdot T}{1 + j\omega \cdot T}$ ,  $T > 0$ , ergibt sich der Betrag

zu

$$|F(j\omega)| = 1$$

und damit

$$|F(j\omega)|_{\text{dB}} = 0.$$

Die Phase beträgt

$$\angle F(j\omega) = -2 \cdot \arctan(\omega \cdot T),$$

sie ist gleich der doppelten Phase eines reellen Pols mit der Zeitkonstanten  $T$ .

### 3.10 Allpass zweiter Ordnung

Mit  $F(j\omega) = \frac{1 - 2 \cdot d \cdot j\omega \cdot T + (j\omega \cdot T)^2}{1 + 2 \cdot d \cdot j\omega \cdot T + (j\omega \cdot T)^2}$ ,  $0 < d < 1$ ,

$T > 0$ , ergibt sich der Betrag zu

$$|F(j\omega)| = 1$$

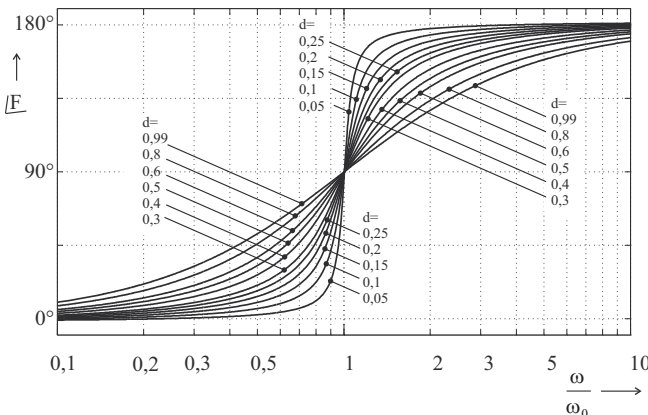
und damit

$$|F(j\omega)|_{\text{dB}} = 0.$$

Die Phase beträgt

$$\angle F(j\omega) = -2 \cdot \arctan \frac{2 \cdot d \cdot \omega \cdot T}{1 - (\omega \cdot T)^2},$$

sie ist gleich der doppelten Phase eines konjugiert komplexen Pools paares mit der Dämpfung  $d$  und der Zeitkonstanten  $T$ .

**Bild III-10**

Phasenkennlinie von  
 $F(j\omega) = 1 + 2 \cdot d \cdot j\omega \cdot T + (j\omega \cdot T)^2$   
 in Abhängigkeit von der Dämpfung  $d$



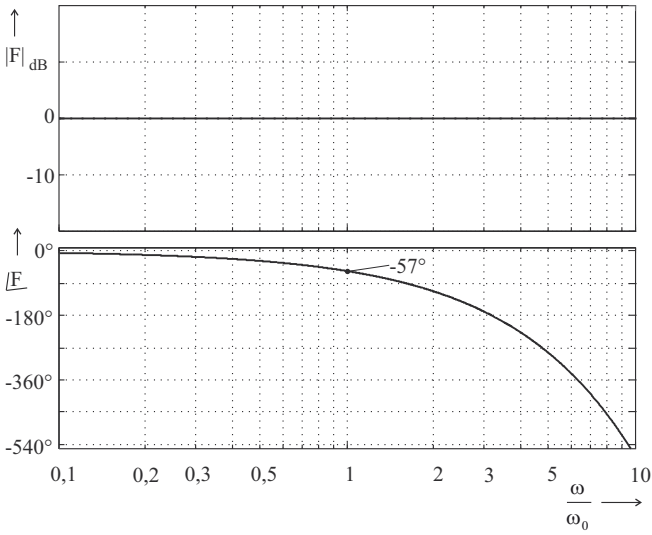


**Bild III-11**  
Frequenzkennlinien von  
 $F(j\omega) = e^{-j\omega \cdot T_i}$

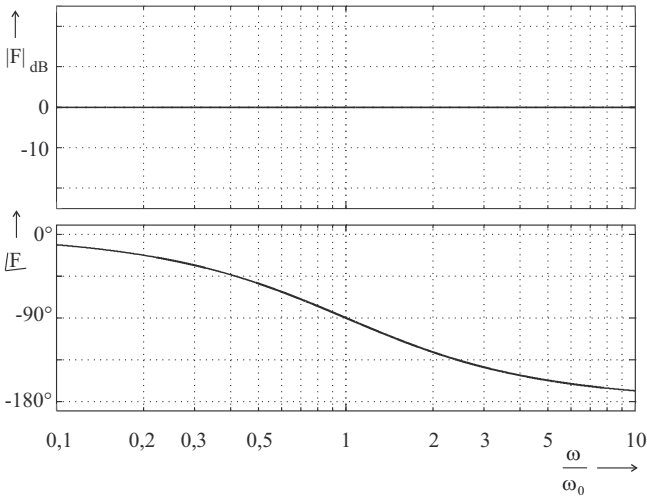


**Bild III-12**  
Phasenkennlinie von  
 $F(j\omega) = \frac{1 - j\omega \cdot T}{1 + j\omega \cdot T}$

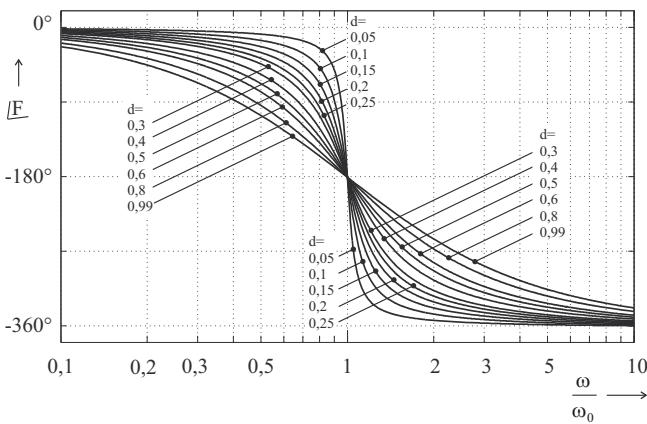


**Bild III-13**  
Phasenkennlinie von  
 $F(j\omega) = \frac{1 - 2 \cdot d \cdot j\omega \cdot T + (j\omega \cdot T)^2}{1 + 2 \cdot d \cdot j\omega \cdot T + (j\omega \cdot T)^2}$

## IV Stabilität

### 1 Definition der Stabilität

Für die Stabilität eines linearen, zeitinvarianten Übertragungsgliedes existieren verschiedene Definitionen. Bei der *asymptotischen Stabilität* wird gefordert, dass der Systemausgang nach einer kurzzeitigen Systemanregung mit wachsender Zeit wieder gegen Null geht. Bei der BIBO-Stabilität (Bounded Input-Bounded Output) wird gefordert, dass bei einem beschränkten Systemeingang der Systemausgang ebenfalls beschränkt ist.

#### 1.1 Asymptotische Stabilität

Ein LZI-Glied heißt *asymptotisch stabil*, wenn seine Impulsantwort  $g(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  gegen Null strebt. Andernfalls heißt es *instabil*.

Gleichwertig hierzu ist die Forderung, dass die Sprungantwort  $h(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  gegen einen endlichen Wert strebt.

#### 1.2 BIBO-Stabilität

Ein LZI-Glied heißt *BIBO-stabil* (Bounded Input-Bounded Output), wenn die Systemantwort auf jede beschränkte Eingangsgröße ebenfalls beschränkt ist.

Die BIBO-Stabilität wird auch als *Übertragungsstabilität* bezeichnet. Aus der BIBO-Stabilität folgt stets die asymptotische Stabilität, die BIBO-Stabilität stellt also eine strengere Forderung an das Übertragungsglied. Für den wichtigen Fall der *R-Glieder* stimmen jedoch asymptotische Stabilität und BIBO-Stabilität überein, so dass im Folgenden nur noch von Stabilität gesprochen wird.

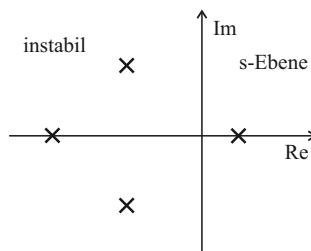
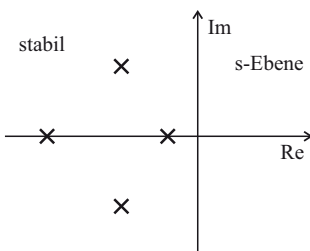
## 2 Stabilitätskriterien

### 2.1 Grundlegendes Stabilitätskriterium

Ein *R-Glied* ist genau dann *stabil*, wenn alle Pole seiner Übertragungsfunktion links der imaginären Achse der komplexen Ebene liegen.

Betrachtet man ein *R-Glied* mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)},$$



wobei Zählerpolynom  $Z(s)$  und Nennerpolynom  $N(s)$  *koprim* seien, d.h. keine gemeinsame Nullstelle besitzen, so sind die Pole der Übertragungsfunktion  $G(s)$  gleich den Nullstellen des Nennerpolynoms  $N(s)$ . Die Pole eines stabilen *R-Gliedes* besitzen also alle einen negativen Realteil. Bild IV-1 zeigt jeweils ein Beispiel für die Polkonfiguration eines stabilen und eines instabilen *R-Gliedes*.

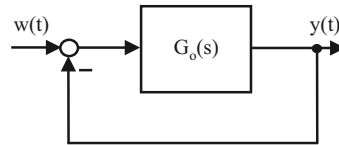


**Bild IV-2** Standardregelkreis

Betrachtet man den Standardregelkreis gemäß Bild IV-2, so ergibt sich die Führungsübertragungsfunktion

$$G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} \text{ zu}$$

$$G_w(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)}.$$

Mit der Übertragungsfunktion  $G_o(s)$  des offenen Kreises gemäß

$$G_o(s) = \frac{Z_o(s)}{N_o(s)}$$

erhält man

$$G_w(s) = \frac{Z_o(s)}{Z_o(s) + N_o(s)}.$$

Damit folgt das *grundlegende Stabilitätskriterium für Regelkreise*:

Ein Regelkreis ist genau dann *stabil*, wenn alle Nullstellen des Polynoms  $Z_o(s) + N_o(s)$  links der imaginären Achse der komplexen Ebene liegen.

Die zur Bestimmung der Nullstellen zu lösende Gleichung

$$Z_o(s) + N_o(s) = 0$$

**Bild IV-1**

Beispiel für die Polkonfiguration eines stabilen und eines instabilen *R-Gliedes*

wird als *charakteristische Gleichung des Regelkreises* bezeichnet.

Für eine Stabilitätsaussage ist die Kenntnis der exakten Lage der Pole von  $G(s)$  bzw.  $G_w(s)$  nicht erforderlich. Es muss lediglich die Frage beantwortet werden, ob alle Pole links der imaginären Achse liegen. Hierfür wurden verschiedene Kriterien entwickelt. Im Folgenden werden als wichtige Vertreter das Hurwitz-Kriterium und das Nyquist-Kriterium vorgestellt.

## 2.2 Hurwitz-Kriterium

Betrachtet wird das Polynom

$$P(s) = a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0$$

mit reellen Koeffizienten  $a_i, i = 0, \dots, n$ , und

$$a_n > 0.$$

Zu untersuchen ist, ob alle Nullstellen des Polynoms  $P(s)$  links der imaginären Achse liegen. Ein solches Polynom wird als *Hurwitz-Polynom* bezeichnet.

Eine *notwendige Bedingung* hierfür ist, dass alle Polynomkoeffizienten positiv sind, d.h.

$$a_i > 0 \quad \text{für } i = 0, \dots, n.$$

Eine *notwendige und hinreichende Bedingung* erhält man, indem man die Hurwitz-Matrix

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & a_{n-9} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & a_{n-8} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots & \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots & \\ 0 & 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & & & \dots & a_0 \end{bmatrix}$$

mit  $n$  Zeilen und  $n$  Spalten sowie  $a_i = 0$  für  $i < 0$  betrachtet. Der Index der Koeffizienten nimmt mit jeder Spalte um 2 ab und mit jeder Zeile um 1 zu, wobei  $a_i = 0$  für  $i > n$  gilt.

Aus der Hurwitz-Matrix  $\underline{H}$  werden nun die Hurwitz-Determinanten  $H_1, \dots, H_n$  gebildet, die Hauptabschnittsdeterminanten oder „nordwestlichen“ Unterdeterminanten von  $\underline{H}$  gemäß

$$H_1 = a_{n-1},$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix},$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix},$$

$\vdots$

$$H_n = \det \underline{H}.$$

Die Nullstellen des Polynoms  $P(s)$  liegen genau dann alle links der imaginären Achse, wenn die Hurwitz-Determinanten  $H_1, \dots, H_n$  alle positiv sind.

Betrachtet man das R-Glied mit der Übertragungsfunktion  $G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$ , so ist zur Stabilitätsunter-

suchung gemäß dem grundlegenden Stabilitätskriterium zu prüfen, ob alle Pole, also alle Nullstellen des Nennerpolynoms  $N(s)$ , links der imaginären Achse liegen. Durch Anwendung des Hurwitz-Kriteriums erhält man folgenden Satz:

Das R-Glied mit der Übertragungsfunktion  $G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$  ist genau dann stabil, wenn die Hurwitz-

Determinanten  $H_1, \dots, H_n$  des Nennerpolynoms  $N(s) = a_n \cdot s^n + \dots + a_1 \cdot s + a_0$ ,  $a_n > 0$ , alle positiv sind.

Betrachtet man den Standardregelkreis gemäß Bild

$$\text{IV-2 mit der Übertragungsfunktion } G_o(s) = \frac{Z_o(s)}{N_o(s)}$$

des offenen Kreises, so lautet die Führungsübertragungsfunktion

$$G_w(s) = \frac{Z_o(s)}{Z_o(s) + N_o(s)}.$$

Damit ergibt sich das *Hurwitz-Kriterium für Regelkreise*:

Ein Regelkreis mit der Übertragungsfunktion

$$G_o(s) = \frac{Z_o(s)}{N_o(s)} \text{ des offenen Kreises ist genau dann}$$

stabil, wenn die Hurwitz-Determinanten  $H_1, \dots, H_n$  des charakteristischen Polynoms  $Z_o(s) + N_o(s)$  des Regelkreises alle positiv sind.

Mit

$$Z_o(s) = b_n \cdot s^n + \dots + b_1 \cdot s + b_0 \quad \text{und}$$

$$N_o(s) = a_n \cdot s^n + \dots + a_1 \cdot s + a_0$$

lautet das charakteristische Polynom des Regelkreises

$$Z_o(s) + N_o(s) = (a_n + b_n) \cdot s^n + \dots + (a_1 + b_1) \cdot s + (a_0 + b_0).$$

Beim Hurwitz-Kriterium für Regelkreise gemäß obiger Formulierung ist vorausgesetzt, dass

$$a_n + b_n > 0$$

gilt.

## 2.3 Nyquist-Kriterium

Das Nyquist-Kriterium ermöglicht, aus dem Frequenzgang  $F_o(j\omega)$  des offenen Kreises direkt auf die Stabilität des Standardregelkreises gemäß Bild IV-2 zu schließen. Für eine einfache Formulierung des Kriteriums sei der Fall betrachtet, dass

$$G_o(s) = \frac{Z_o(s)}{N_o(s)}$$

mit

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G_o(s) = 0$$

gilt. Der Grad des Zählerpolynoms  $Z_o(s)$  ist also kleiner als der Grad  $n$  des Nennerpolynoms  $N_o(s)$ , der offene Kreis ist nicht sprungfähig. Nun betrachtet man den komplexen Zeiger vom *kritischen Punkt*  $-1$  zur Ortskurve  $F_o(j\omega)$  des offenen Kreises gemäß Bild IV-3.

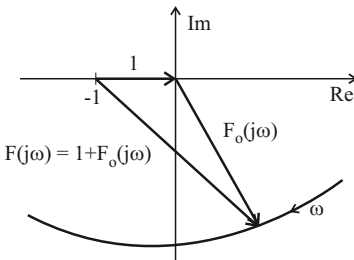


**Bild IV-3** Komplexer Zeiger vom kritischen Punkt  $-1$  zur Ortskurve  $F_o(j\omega)$  des offenen Kreises

Mit

$$F(j\omega) = 1 + F_o(j\omega)$$

bezeichnet man die stetige Winkeländerung des komplexen Zeigers vom kritischen Punkt  $-1$  zur Ortskurve  $F_o(j\omega)$ , wenn  $\omega$  von 0 bis  $\infty$  läuft, als  $\Delta|F(j\omega)$ .

$n_r$  sei die Anzahl der Pole des offenen Kreises rechts der imaginären Achse,  $n_a$  die Anzahl auf der imaginären Achse. Dann lautet das Nyquist-Kriterium: *Der geschlossene Kreis ist genau dann stabil, wenn*

$$\Delta|F(j\omega) = \left(n_r + \frac{n_a}{2}\right) \cdot \pi$$

gilt.

Ist der offene Kreis stabil, liegen also alle Pole des offenen Kreises links der imaginären Achse, so gilt  $n_r = n_a = 0$ . Der geschlossene Kreis ist also genau dann stabil, wenn  $\Delta|F(j\omega) = 0$  gilt. Für diesen Fall kann das Nyquist-Kriterium auch folgendermaßen formuliert werden [3]:

*„Ist der offene Kreis stabil, so ist der geschlossene Kreis genau dann stabil, wenn die Ortskurve des offenen Kreises den Punkt  $-1$  weder umkreist noch durchdringt.“*

Bei einer einfachen Gestalt der Ortskurve kann folgende Formulierung angewandt werden:

*Ist der offene Kreis stabil, so ist der geschlossene Kreis genau dann stabil, wenn der Punkt  $-1$  links der Ortskurve des offenen Kreises liegt.*

Zur Definition von „links“ ist die Ortskurve mit wachsender Frequenz  $\omega$  zu durchlaufen.

Die zwei Formulierungen des Nyquist-Kriteriums für einen stabilen offenen Kreis können dahingehend

erweitert werden, dass der offene Kreis neben den Polen links der imaginären Achse einen einfachen oder zweifachen Pol in  $s = 0$  besitzen darf.

Alle genannten Formulierungen des Nyquist-Kriteriums gelten auch bei einer zusätzlichen Totzeit im offenen Kreis, also

$$G_o(s) = \frac{Z_o(s)}{N_o(s)} e^{-T_d s}.$$

Beispiele für die Anwendung des Nyquist-Kriteriums bei einem offenen Kreis mit Polen links der imaginären Achse sind in Bild IV-4 dargestellt, bei einem offenen Kreis mit Polen links der imaginären Achse mit Ausnahme eines einfachen Poles in  $s = 0$  in Bild IV-5, sowie bei einem offenen Kreis mit Polen links der imaginären Achse mit Ausnahme eines zweifachen Poles in  $s = 0$  in Bild IV-6. Bei einer komplizierten Gestalt der Ortskurve ist es zweckmäßig, die erste Formulierung des Nyquist-Kriteriums, die auch als allgemeine Form bezeichnet wird, zu verwenden, und damit unklare Begriffe wie „umkreisen“ und „links“ zu vermeiden.

## 2.4 Phasenreserve und Amplitudenreserve

Interpretiert man das Nyquist-Kriterium unter Verwendung der Phasenreserve bzw. der Amplitudenreserve, welche aus dem Bode-Diagramm des offenen Kreises einfach abgelesen werden können, so erhält man zwei weitere Kriterien für die Stabilität des geschlossenen Kreises. Es sei der Fall

$$G_o(s) = K \cdot \frac{\prod_{j=1}^m (s - n_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

mit  $K > 0$ ,  $m < n$  und  $\operatorname{Re}\{p_i\} < 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , betrachtet. Weiterhin sei vorausgesetzt, dass die Ortskurve genau einen Schnittpunkt mit dem Einheitskreis um den Ursprung bzw. mit der negativen reellen Achse besitzt.

Bild IV-7 zeigt zwei Ortskurven mit den zugehörigen Frequenzkennlinien. Im Fall a) liegt der kritische Punkt  $-1$  links der Ortskurve des offenen Kreises, der geschlossene Kreis ist also stabil. Im Fall b) liegt der kritische Punkt  $-1$  rechts der Ortskurve des offenen Kreises, der geschlossene Kreis ist also instabil. Betrachtet man den Schnittpunkt der Ortskurve mit dem Einheitskreis um den Ursprung, so ist die Phase im stabilen Fall größer als  $-180^\circ$ , im instabilen Fall dagegen kleiner oder gleich  $-180^\circ$ .

In der Frequenzkennliniendarstellung ist der Schnittpunkt der Ortskurve mit dem Einheitskreis durch die Bedingung

$$|F_o(j\omega_D)| = 1$$

bzw. in logarithmischer Darstellung durch

$$|F_o(j\omega_D)|_{\text{dB}} = 0$$

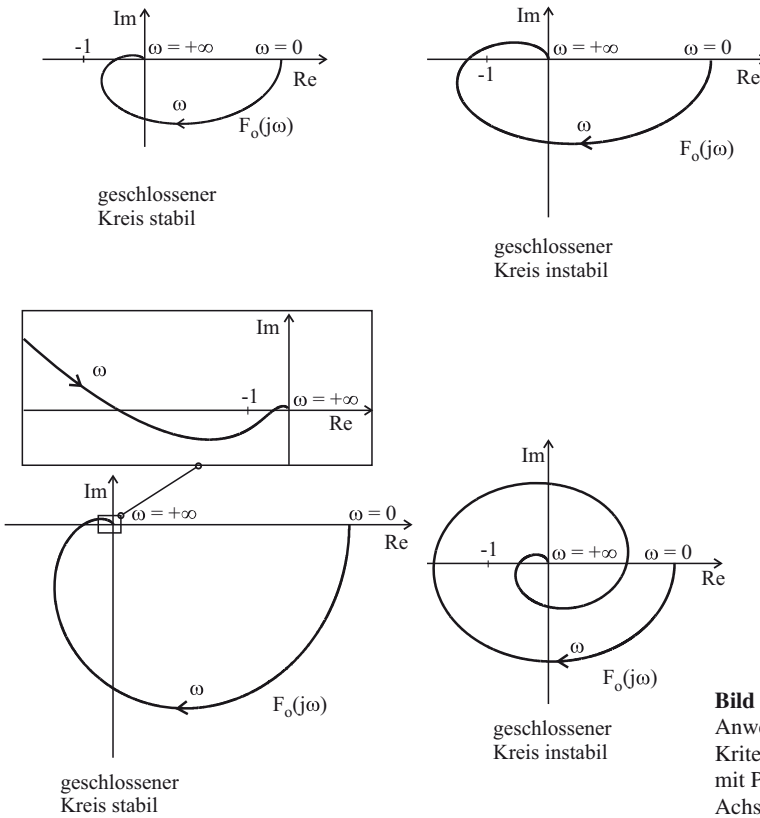


**Bild IV-4**  
Anwendung des Nyquist-Kriteriums bei einem offenen Kreis mit Polen links der imaginären Achse

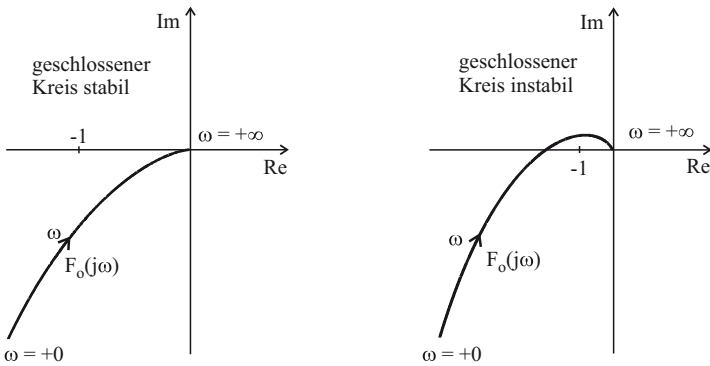


**Bild IV-5**  
Anwendung des Nyquist-Kriteriums bei einem offenen Kreis mit Polen links der imaginären Achse mit Ausnahme eines einfachen Poles in  $s = 0$

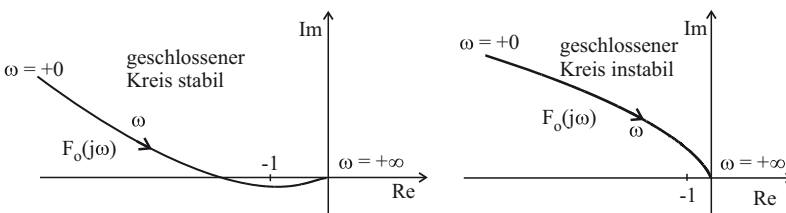


**Bild IV-6** Anwendung des Nyquist-Kriteriums bei einem offenen Kreis mit Polen links der imaginären Achse mit Ausnahme eines zweifachen Poles in  $s = 0$

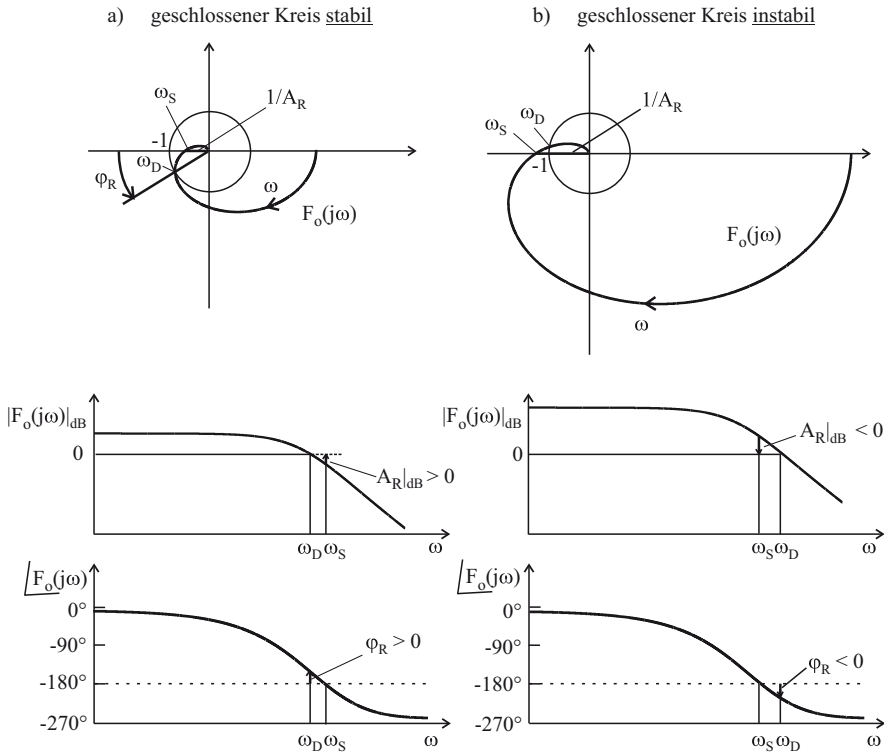


**Bild IV-7** Stabilitätsuntersuchung anhand der Frequenzkennlinien

charakterisiert. Die zugehörige Frequenz  $\omega_D$  wird als *Durchtrittsfrequenz* bezeichnet. Der geschlossene Kreis ist stabil für  $\angle F_o(j\omega_D) > -180^\circ$  und instabil für  $\angle F_o(j\omega_D) \leq -180^\circ$ . Der Abstand von  $\angle F_o(j\omega_D)$  zu  $-180^\circ$  wird als *Phasenreserve* oder *Phasenrand*

$$\varphi_R = \angle F_o(j\omega) + 180^\circ$$

definiert. Anhand der Phasenreserve kann nun direkt das Stabilitätsverhalten des geschlossenen Kreises bestimmt werden:

*Der geschlossene Kreis ist genau dann stabil, wenn  $\varphi_R > 0$  gilt.*

Dabei sei zusätzlich vorausgesetzt, dass  $-540^\circ < \angle F_o(j\omega) < 180^\circ$  für  $\omega < \omega_D$  erfüllt ist. Dieses Kriterium gilt auch dann, wenn  $G_o(s)$  einen ein- oder zweifachen Pol in  $s=0$  besitzt und eine Totzeit enthält [3].

Betrachtet man den Schnittpunkt der Ortskurve mit der negativen reellen Achse, so ist der geschlossene Kreis stabil, wenn der Betrag des Schnittpunkts kleiner als Eins ist, und instabil, wenn der Betrag

größer oder gleich Eins ist. In der Frequenzkennliniendarstellung ist der Schnittpunkt der Ortskurve mit der negativen reellen Achse durch die Bedingung

$$\angle F_o(j\omega_S) = -180^\circ$$

charakterisiert. Mit der zugehörigen Amplitude  $|F_o(j\omega_S)|$  wird die *Amplitudenreserve* oder der *Amplitudenrand* als

$$A_R = \frac{1}{|F_o(j\omega_S)|}$$

definiert. Aus der Betragskennlinie kann die Amplitudenreserve in Dezibel gemäß

$$A_R|_{dB} = -|F_o(j\omega_S)|_{dB}$$

direkt abgelesen werden. Anhand der Betragsreserve in Dezibel kann nun direkt das Stabilitätsverhalten des geschlossenen Kreises bestimmt werden:

*Der geschlossene Kreis ist genau dann stabil, wenn  $A_R|_{dB} > 0$  gilt.*

## V Entwurf von Regelkreisen

Betrachtet werde der Standardregelkreis gemäß Bild V-1.  $G_S(s)$  bezeichnet die Übertragungsfunktion der Strecke, die bekannt sei.  $G_R(s)$  bezeichnet die Übertragungsfunktion des Regelgliedes, dessen Struktur und Parameter so zu bestimmen sind, dass der geschlossene Regelkreis die gewünschten Eigenschaften besitzt. Zunächst sollen diese Forderungen an die Regelung dargestellt und die zu ihrer Erfüllung erforderlichen Bedingungen hergeleitet werden.

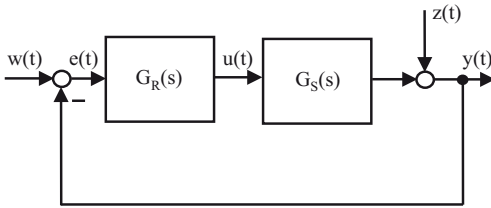


Bild V-1 Standardregelkreis

### 1 Forderungen an die Regelung

#### 1.1 Stabilität

Die grundlegende Forderung nach Stabilität bedeutet, dass die Regelgröße  $y(t)$  bei einer konstanten Führungsgröße  $w(t) = w$  und einer konstanten Störgröße  $z(t) = z$  asymptotisch gegen einen konstanten, endlichen Wert  $y_\infty$  strebt. Sie darf also insbesondere nicht gegen eine Dauerschwingung oder betragsmäßig ins Unendliche streben.

Die Laplace-Transformierte der Regelgröße  $y(t)$  des Standardregelkreises ergibt sich zu

$$Y(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} \cdot W(s) + \frac{1}{1 + G_o(s)} \cdot Z(s)$$

mit der Übertragungsfunktion des offenen Kreises

$$G_o(s) = G_R(s) \cdot G_S(s).$$

Die Führungsübertragungsfunktion

$$G_w(s) = \frac{G_R(s) \cdot G_S(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s)}$$

und der Störübertragungsfunktion

$$G_z(s) = \frac{1}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s)}$$

besitzen dieselben Pole, nämlich die Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$1 + G_R(s) \cdot G_S(s) = 0.$$

Gemäß dem grundlegenden Stabilitätskriterium muss daher die Übertragungsfunktion  $G_R(s)$  des Regelgliedes so gewählt werden, dass diese Pole links der imaginären Achse liegen, damit der Regelkreis stabil ist.

#### 1.2 Stationäre Genauigkeit

Die Regelgröße  $y(t)$  eines stabilen Regelkreises strebt bei einer konstanten Führungsgröße  $w(t) = w$  und einer konstanten Störgröße  $z(t) = z$  gegen einen endlichen Wert  $y_\infty$ . Der Regelkreis wird als *stationär genau* bezeichnet, wenn  $y_\infty$  gleich  $w$  ist, und zwar für beliebiges  $z$ . Ein stationär genauer Regelkreis ist somit durch

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

charakterisiert, die bleibende Regelabweichung ist also gleich Null.

Die Definition der stationären Genauigkeit kann auch auf nicht konstante Führungs- und Störgrößen, beispielsweise Rampen oder Sinusschwingungen, verallgemeinert werden.

Ein stabiler Regelkreis wird als *hinreichend stationär genau* bezeichnet, wenn

$$\left| \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \right| < \varepsilon$$

mit einem genügend kleinen  $\varepsilon > 0$  für  $w = 1$  erfüllt ist, wenn also der Betrag der bleibenden Regelabweichung hinreichend klein ist.

Betrachtet man das Führungsverhalten für  $w(t) = w$ , so erhält man mit

$$W(s) = \frac{w}{s}$$

und

$$Y(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} \cdot W(s)$$

die Laplace-Transformierte der Regelabweichung  $e(t)$  zu

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_o(s)} \cdot \frac{w}{s}.$$

Mit dem Endwertsatz der Laplace-Transformation folgt daraus

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_o(s)} \cdot w. \end{aligned}$$

Besitzt die Übertragungsfunktion  $G_o(s)$  des offenen Kreises einen Pol in  $s = 0$ , so folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

Ein stabiler Regelkreis mit einem  $I$ -Anteil in  $G_o(s)$  ist also bezüglich des Führungsverhaltens stets stationär genau.

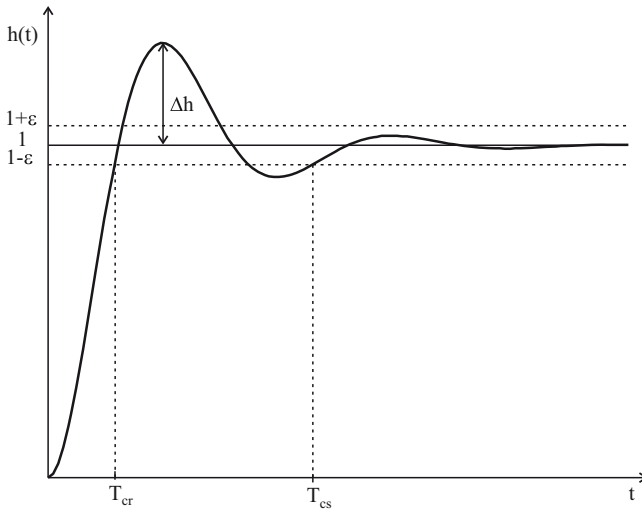


**Bild V-2**  
Führungssprungantwort des Regelkreises und Kennwerte des dynamischen Verhaltens

Besitzt der offene Kreis dagegen  $P$ -Verhalten mit  $G_o(0) = K$ , so folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{K} \cdot w.$$

Der Regelkreis ist somit nicht stationär genau. Um eine *hinreichende* stationäre Genauigkeit zu erzielen, muss die Verstärkung  $K$  genügend groß gewählt werden.

Betrachtet man das Störverhalten für  $z(t) = z$ , so erhält man dasselbe Ergebnis für die stationäre Genauigkeit. Betrachtet man einen Regelkreis, bei dem die Störung innerhalb der Strecke angreift, so bleibt das Ergebnis für die stationäre Genauigkeit unverändert, sofern die Störung *nach* dem  $I$ -Anteil eingreift.

Zusammengefasst ergibt sich:

*Ein stabiler Regelkreis ist genau dann stationär genau, wenn  $G_o(s)$  einen  $I$ -Anteil enthält.*

Falls die Strecke keinen  $I$ -Anteil besitzt, ist also ein Regler mit  $I$ -Anteil zu verwenden, um die stationäre Genauigkeit zu gewährleisten.

### 1.3 Hinreichende Dämpfung

Um ein zu starkes Über- oder Unterschwingen bei Führungs- oder Störgrößensprüngen zu vermeiden, muss der Regelkreis hinreichend gedämpft sein.

Anwendungsspezifisch kann eine zulässige Überschwingweite  $\Delta h$ , siehe Bild V-2, definiert werden. Für eine Vielzahl von Regelkreisen kann die Dämpfung anhand der in Abschnitt 4.2.4 behandelten Phasenreserve bewertet werden. Eine hinreichende Dämpfung des Führungsverhaltens ist typischerweise für eine Phasenreserve von ca.  $60^\circ$  gewährleistet. Wird lediglich das Störverhalten betrachtet, so reicht meist eine Phasenreserve von  $30^\circ$  aus.

### 1.4 Hinreichende Schnelligkeit

Die Schnelligkeit des Regelkreises kann anhand verschiedener Kennwerte beurteilt werden. In Bild V-2 sind die Anregelzeit  $T_{cr}$  und die Ausregelzeit  $T_{cs}$  dargestellt:

Die Anregelzeit  $T_{cr}$  (control rise time) bezeichnet den Zeitpunkt, an dem die Sprungantwort  $h(t)$  erstmals einen Toleranzstreifen der Breite  $2\varepsilon$  um ihren Sollwert erreicht. Die Ausregelzeit  $T_{cs}$  (control settling time) bezeichnet den Zeitpunkt, ab dem die Sprungantwort vollständig in dem Toleranzstreifen der Breite  $2\varepsilon$  verläuft, also

$$|h(t) - 1| \leq \varepsilon$$

für alle  $t \geq T_{cs}$  gilt.

Die Schnelligkeit des Regelkreises kann anhand der in Abschnitt 4.2.4 definierten Durchtrittsfrequenz  $\omega_D$  bewertet werden, da der geschlossene Regelkreis näherungsweise durch ein Verzögerungsglied mit

$$T = \frac{1}{\omega_D}$$

beschrieben werden kann [3]. Je größer die Durchtrittsfrequenz, umso schneller ist der Einschwingvorgang.

Als weitere Forderungen seien die Robustheit des Regelkreises gegenüber (kleinen) Variationen der Strecke gegenüber dem Nominalmodell sowie die hinreichende Unterdrückung des Messrauschens im Regelkreis genannt.

## 2 Reglertypen

Grundsätzlich kommt jede realisierbare Übertragungsfunktion  $G(s)$  für den Regler in Frage. In der Praxis wird jedoch meist einer der in Abschnitt 5.2.1 beschriebenen Standardregler eingesetzt. Die in Abschnitt 5.2.2 dargestellten Korrekturglieder werden in



der Regel für anspruchsvolle Regelungsaufgaben eingesetzt.

### 2.1 Standardregler

Einen PID-Regler erhält man gemäß Bild V-3 durch Parallelschaltung eines Proportional-, eines Integral- und eines Differenzialanteils. Der Zusammenhang zwischen der Regeldifferenz  $e$  und der Störgröße  $u$  wird im Zeitbereich durch

$$u(t) = K_p \cdot e(t) + K_I \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \cdot \frac{de(t)}{dt}$$

beschrieben. Aufgrund des  $P$ -Anteils führt eine große Regeldifferenz zu einer großen Stellgröße, aufgrund des  $I$ -Anteils führt eine anhaltende Regeldifferenz zu einem zusätzlichen Beitrag zur Stellgröße, und aufgrund des  $D$ -Anteils führt eine Änderung der Regeldifferenz zu einem zusätzlichen Beitrag zur Stellgröße. Die Übertragungsfunktion des PID-Reglers lautet

$$G_R(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D \cdot s.$$

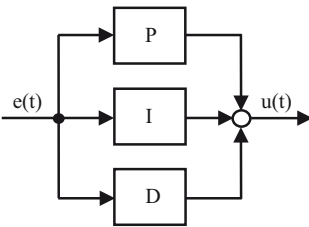


**Bild V-3**  
Struktur eines  
PID-Reglers

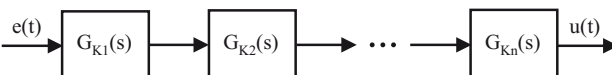
Häufig wird diese Übertragungsfunktion in der Form

$$G_R(s) = K_p \cdot \left( 1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s \right)$$

dargestellt, wobei  $K_p$  als *Proportionalbeiwert* bezeichnet wird,  $T_i = \frac{K_p}{K_I}$  als *Nachstellzeit* und  $T_d = \frac{K_D}{K_p}$  als *Vorhaltezeit*.

Lässt man Anteile des PID-Reglers weg, so erhält man beispielsweise einen P-Regler, einen I-Regler, einen PI-Regler oder einen PD-Regler. Für die Bestimmung geeigneter Reglerparameter ist die Darstellung der Übertragungsfunktion des PID-Reglers gemäß

$$G_R(s) = K_R \cdot \frac{(1 + T_{R1} \cdot s) \cdot (1 + T_{R2} \cdot s)}{s}$$



oder

$$G_R(s) = K_R \cdot \frac{1 + 2 \cdot d_R \cdot T_R \cdot s + T_R^2 \cdot s^2}{s}$$

mit  $0 < d_R < 1$  besser geeignet, siehe Abschnitt 5.3.

Eine Übertragungsfunktion mit einem Zählergrad größer als der Nennergrad ist weder realisierbar noch als Regler geeignet, da hochfrequentes Messrauschen die Stellgröße stark beeinflussen würde. Daher wird die „ideale“ Übertragungsfunktion eines Reglers mit  $D$ -Anteil im Nenner um den Faktor  $(1 + T_N \cdot s)$  mit hinreichend kleinem  $T_N$  ergänzt. So erhält man beispielsweise aus dem „idealen“ PD-Regler den „realen“ PD-Regler.

**Tabelle V-1** Auswahl von Standardreglern

| Reglertyp            | Übertragungsfunktion $G_R(s)$                                                                                        |
|----------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| P-Regler             | $K_R$                                                                                                                |
| PI-Regler            | $K_R \cdot \frac{1 + T_R \cdot s}{s}$                                                                                |
| realer<br>PD-Regler  | $K_R \cdot \frac{1 + T_R \cdot s}{1 + T_N \cdot s}, \quad T_N \ll T_R$                                               |
| realer<br>PID-Regler | $K_R \cdot \frac{(1 + T_{R1} \cdot s) \cdot (1 + T_{R2} \cdot s)}{s(1 + T_N \cdot s)}, \quad T_N \ll T_{R1}, T_{R2}$ |

### 2.2 Korrekturglieder

Einen Regler kann man gemäß Bild V-4 als Reihenschaltung von Korrekturgliedern erhalten. Die Auswahl geeigneter Korrekturglieder und die Bestimmung geeigneter Parameter erfolgt unter Verwendung des Bode-Diagramms der Strecke. Nachfolgend werden die wichtigsten Korrekturglieder vorgestellt.

#### 2.2.1 Proportionalglied (P-Glied)

Das Einfügen eines Proportionalglieds mit der Übertragungsfunktion

$$G_K(s) = K, \quad K > 0,$$

und den Frequenzkennlinien gemäß Bild III-2 verschiebt die Betragskennlinie des offenen Kreises um den Wert

$$K|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log K,$$

die Phasenkennlinie des offenen Kreises bleibt unverändert. Durch geeignete Wahl von  $K$  kann beispiels-

**Bild V-4**

Reglerstruktur als Reihenschaltung von  
Korrekturgliedern

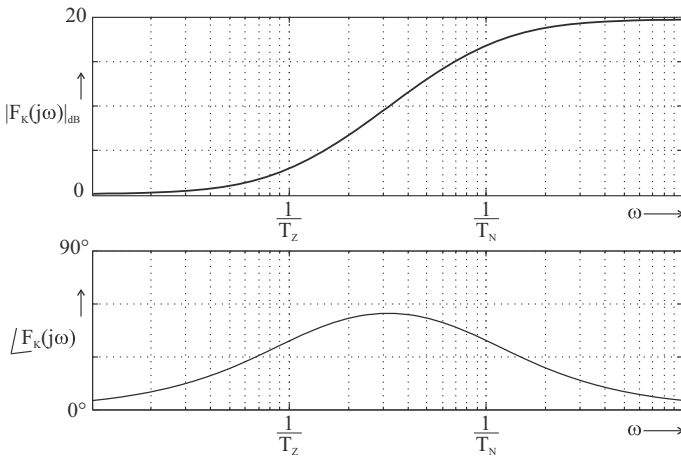


**Bild V-5**  
Frequenzkennlinien von

$$F_K(j\omega) = \frac{1 + j\omega \cdot T_Z}{1 + j\omega \cdot T_N}$$

für  $T_Z = 10T_N$

weise die gewünschte Phasenreserve eingestellt werden. Ist hierfür eine Verschiebung der Betragskennlinie um  $\Delta A|_{dB}$  erforderlich, dann ist  $K$  gemäß

$$K = 10^{\frac{\Delta A|_{dB}}{20}}$$

zu wählen.

### 2.2.2 Integrierglied (I-Glied)

Das Einfügen eines Integrierglieds mit der Übertragungsfunktion

$$G_K(s) = \frac{1}{s}$$

und den Frequenzkennlinien gemäß Bild III-3 ist zur Gewährleistung der stationären Genauigkeit erforderlich, sofern die Strecke kein Integrierglied enthält, wie bereits in Abschnitt 5.1.2 dargelegt.

### 2.2.3 Lead-Glied

Das Lead-Glied oder phasenhebende Korrekturglied besitzt die Übertragungsfunktion

$$G_K(s) = \frac{1 + T_Z \cdot s}{1 + T_N \cdot s}, \quad T_Z > T_N.$$

Die Frequenzkennlinien sind in Bild V-5 für den Fall  $T_Z = 10 \cdot T_N$  dargestellt.

Die maximale Phase tritt bei der Mittenfrequenz

$$\omega_M = \sqrt{\frac{1}{T_Z \cdot T_N}} \quad (V.1)$$

auf und beträgt

$$\angle F_K(j\omega_M) = \arcsin \frac{\frac{T_Z}{T_N} - 1}{\frac{T_Z}{T_N} + 1} \quad (V.2)$$

Mit dem Lead-Glied kann die Phasenkennlinie im gewünschten Frequenzbereich gezielt erhöht und damit die erforderliche Phasenreserve eingestellt werden.

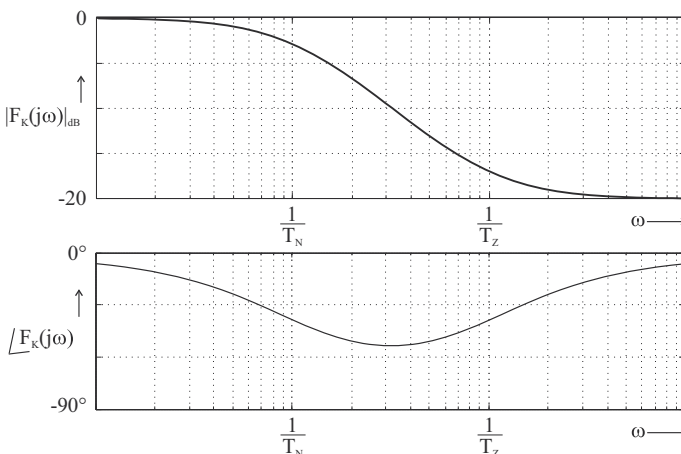


**Bild V-6**  
Frequenzkennlinien von

$$F_K(j\omega) = \frac{1 + j\omega \cdot T_Z}{1 + j\omega \cdot T_N}$$

für  $T_Z = \frac{T_N}{10}$

### 2.2.4 Lag-Glied

Das Lag-Glied oder phasenabsenkende Korrekturglied besitzt die Übertragungsfunktion

$$G_K(s) = \frac{1 + T_Z \cdot s}{1 + T_N \cdot s}, \quad T_Z < T_N.$$

Die Frequenzkennlinien sind in Bild V-6 für den Fall

$$T_Z = \frac{T_N}{10} \text{ dargestellt.}$$

Für  $\omega \gg \frac{1}{T_Z}$  beträgt der Betrag in Dezibel näherungsweise

$$|F_K(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log \cdot \frac{T_Z}{T_N}.$$

Mit dem Lag-Glied kann die Betragskennlinie für  $\omega \gg \frac{1}{T_Z}$  gezielt abgesenkt und damit die gewünschte

Betragsreserve eingestellt werden, ohne die Verstärkung des offenen Kreises zu reduzieren und damit die stationäre Regelabweichung bei einem offenen Kreis mit P-Verhalten zu erhöhen.

## 3 Faustregeln für die Wahl der Reglerstruktur und der Reglerparameter

Bei einer Strecke ohne  $I$ -Anteil empfiehlt sich die Verwendung eines Reglers mit  $I$ -Anteil, beispielsweise eines PI-Reglers, um stationäre Genauigkeit zu erzielen. Allerdings kann die Phasenabsenkung um  $90^\circ$  aufgrund des  $I$ -Anteils die Einstellung einer hinreichenden Phasenreserve erschweren. Daher sollte bei einer Strecke mit  $I$ -Anteil ein Regler ohne  $I$ -Anteil, beispielsweise ein realer PD-Regler, verwendet werden. Greift jedoch eine Störgröße vor dem  $I$ -Anteil der Strecke ein, so ist ein Regler mit  $I$ -Anteil für die stationäre Genauigkeit erforderlich. Besitzt die Strecke ein Doppel- $I$ -Verhalten, also zwei  $I$ -Anteile, so wird meist eine Phasenhebung, beispielsweise durch einen realen PD-Regler oder ein Lead-Glied, zur Stabilisierung des geschlossenen Kreises erforderlich sein.

Um eine hohe Dynamik des geschlossenen Kreises zu erzielen, ist es häufig sinnvoll, die langsamen Streckenanteile, d.h. die am weitesten rechts liegenden Streckenpole links der imaginären Achse, durch entsprechende Nullstellen des Reglers zu kompensieren. Hierzu wählt man beispielsweise bei einem PI-Regler  $T_R$  gleich der größten Nennerzeitkonstante der Strecke. Treten jedoch mehrere große Streckenzeitkonstanten auf, so empfiehlt es sich,  $T_R$  gleich

der Summenzeitkonstante  $T_S = \sum_{i=1}^n T_i$ , d.h. der Summe

der Zeitkonstanten im Nenner der Streckenübertragungsfunktion, zu wählen. Bei Verwendung eines

realen PID-Reglers können zwei Pole der Strecke kompensiert werden, also entweder zwei reelle Pole oder ein konjugiert komplexes Polpaar. Besitzt die Strecke bereits Nullstellen in der Nähe von Polen, so tritt eine näherungsweise Pol-Nullstellen-Kompensation auf, die Pole sind also für das Übertragungsverhalten der Strecke von untergeordneter Bedeutung und müssen daher nicht durch den Regler kompensiert werden. Streckenpole auf oder rechts der imaginären Achse können in der Praxis nicht durch Nullstellen des Reglers kompensiert werden, da die Lage der Pole nicht exakt bekannt ist und auch durch Alterung oder Verschleiß der Strecke variiert. Durch Wahl der Reglerverstärkung  $K_R$  kann die Verstärkung des offenen Kreises so bestimmt werden, dass beispielsweise die geforderte Phasenreserve oder die hinreichende stationäre Genauigkeit bei einem offenen Kreis ohne  $I$ -Anteil gewährleistet wird.

## 4 Reglerentwurf mit dem Frequenzkennlinienverfahren

Der Reglerentwurf mit dem Frequenzkennlinienverfahren wird im Folgenden an zwei Beispielen vorgestellt. Das erste Beispiel behandelt den Entwurf eines PI-Reglers für ein Verzögerungssystem mit reellen Polen. Im zweiten Beispiel wird für eine doppelt integrierende Strecke ein Regler als Reihenschaltung geeigneter Korrekturglieder entworfen.

### 4.1 Entwurf eines PI-Reglers für ein Verzögerungssystem

Betrachtet werde ein Verzögerungssystem, also ein System, dessen Übertragungsfunktion keine Nullstellen besitzt. Die Polstellen seien alle reell, und die Übertragungsfunktion laute

$$G_S(s) = \frac{10}{(1 + 0,1 \cdot s) \cdot (1 + s) \cdot (1 + 10 \cdot s)}.$$

Der „langsamste“ Dynamikanteil der Strecke wird durch die größte Streckenzeitkonstante  $T_{S3} = 10$  beschrieben, also durch den Pol bei  $s = -1/T_{S3} = -0,1$ . Wählt man als Reglertyp einen PI-Regler mit der Übertragungsfunktion

$$G_R(s) = K_R \cdot \frac{1 + T_R \cdot s}{s},$$

so kann dieser Streckenpol durch die Reglernullstelle kompensiert werden, indem  $T_R = 10$  gewählt wird. Die Übertragungsfunktion des offenen Kreises lautet dann

$$G_o(s) = G_R(s) \cdot G_S(s) = \frac{10 \cdot K_R}{s \cdot (1 + 0,1 \cdot s) \cdot (1 + s)}.$$

Aufgrund des  $I$ -Anteils des Reglers ist der geschlossene Kreis stationär genau. Der Parameter  $K_R$  wird nun so gewählt, dass die Phasenreserve  $60^\circ$  beträgt

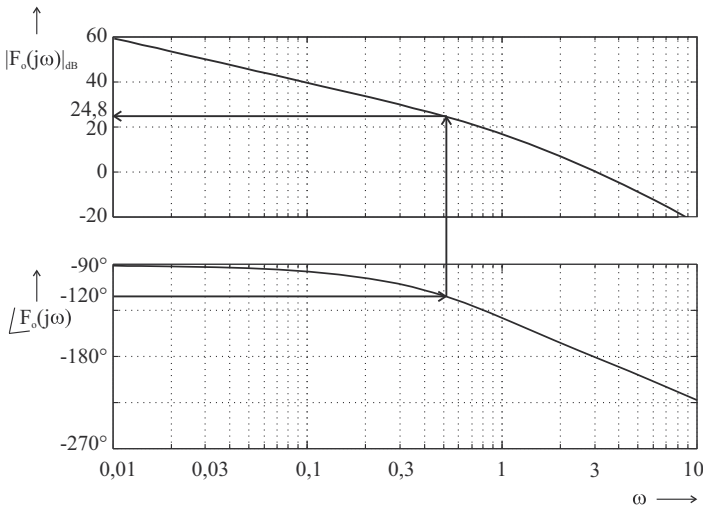


**Bild V-7** Frequenzkennlinien von  $F_o(j\omega)$

$$= \frac{10}{j\omega \cdot \left(1 + j\frac{\omega}{10}\right) \cdot (1 + j\omega)}$$

und somit eine hinreichende Dämpfung gewährleistet ist.

Bild V-7 zeigt die Frequenzkennlinien des offenen Kreises für  $K_R = 1$ . Zu einer Phase von  $-120^\circ$  liest man den Betrag von ca. 24,8 dB ab. Eine Phasenreserve von  $60^\circ$  erhält man also, wenn die Betragskennlinie um 24,8 dB nach unten verschoben wird. Hierzu muss  $K_R$  gemäß

$$K_R|_{dB} = -24,8$$

gewählt werden, d.h.

$$K_R = 10^{-24,8/20} \approx 0,0575.$$

Bild V-8 zeigt die Sprungantwort des geschlossenen Kreises für die Reglerparameter  $K_R = 0,0575$ ,  $T_R = 10$ .

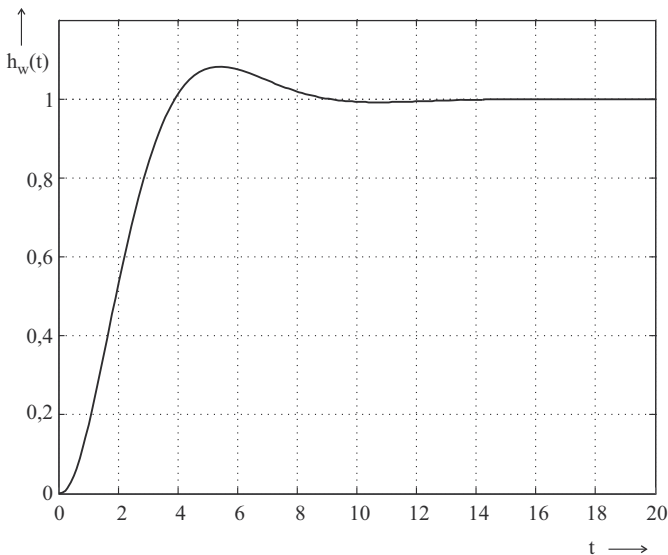


**Bild V-8**  
Sprungantwort des geschlossenen Kreises für

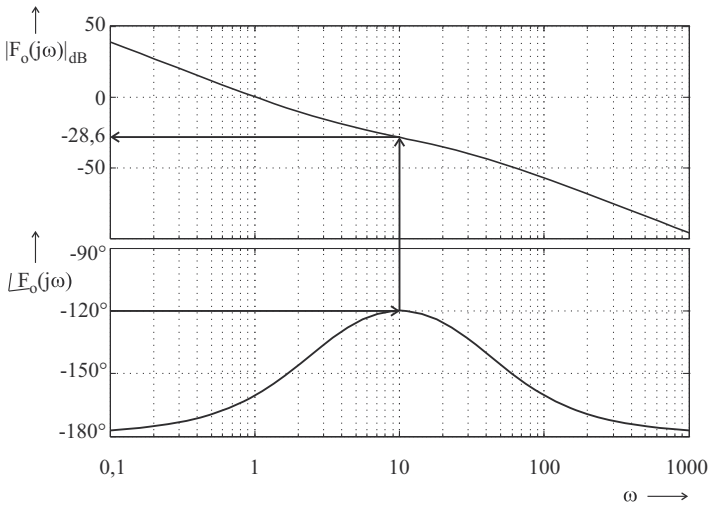
$$G_o(s) = \frac{0,575}{s \cdot (1 + 0,1 \cdot s) \cdot (1 + s)}$$

## 4.2 Reglerentwurf für eine doppelt integrierende Strecke

Betrachtet werde eine doppelt integrierende Strecke mit der Übertragungsfunktion

$$G_S(s) = \frac{1}{s^2},$$

für die ein Regler als Reihenschaltung geeigneter Korrekturglieder entworfen werden soll. Um eine hinreichende Dämpfung und eine hinreichende Schnelligkeit zu gewährleisten, sei eine Phasenreserve von  $\varphi_R = 60^\circ$  bei einer Durchtrittsfrequenz von  $\omega_D = 10$  gefordert. Da die Phase der Strecke konstant  $-180^\circ$  ist, muss eine Phasenhebung von  $60^\circ$  für  $\omega = 10$  erfolgen. Hierfür wird ein Lead-Glied gemäß

**Bild V-9**Frequenzkennlinien von  $F_o(j\omega)$ 

$$= \frac{1 + j\omega \cdot 0,373}{(j\omega)^2 \cdot (1 + j\omega \cdot 0,0268)}$$

Abschnitt 5.2.2.3 mit  $\omega_M = 10$  und  $|F_K(j\omega_M)| = 60^\circ$  eingesetzt. Aus Gleichung (V.1) folgt

$$T_Z \cdot T_N = \frac{1}{\omega_M^2}$$

und aus Gleichung (V.2)

$$T_Z \cdot T_N = \frac{1 + \sin |F_K(j\omega_M)|}{1 - \sin |F_K(j\omega_M)|}.$$

Damit erhält man die Parameter des Lead-Glieds zu

$$T_Z = \frac{1}{\omega_M} \cdot \sqrt{\frac{1 + \sin |F_K(j\omega_M)|}{1 - \sin |F_K(j\omega_M)|}},$$

$$T_N = \frac{1}{\omega_M} \cdot \sqrt{\frac{1 - \sin |F_K(j\omega_M)|}{1 + \sin |F_K(j\omega_M)|}}.$$

Für das betrachtete Beispiel ergibt sich

$$T_Z = 0,373,$$

$$T_N = 0,0268.$$

Bild V-9 zeigt die Frequenzkennlinien des offenen Kreises bei Verwendung dieses Lead-Glieds, d.h. für die Übertragungsfunktion des offenen Kreises gemäß

$$G_o(s) = \frac{1 + 0,373 \cdot s}{1 + 0,0268 \cdot s} \cdot \frac{1}{s^2}.$$

Damit die Durchtrittsfrequenz wie gefordert  $\omega_D = 10$  beträgt, muss die Betragskennlinie durch ein in Reihe geschaltetes Proportionalglied um ca. 28,6 dB angehoben werden. Aus

$$K|_{\text{dB}} = 28,6$$

folgt

$$K = 10^{28,6/20} \approx 26,9.$$

Der Regler ergibt sich als Reihenschaltung eines Proportionalglieds und eines Lead-Glieds, die Übertragungsfunktion des Reglers lautet

$$G_R(s) = K \frac{1 + T_Z \cdot s}{1 + T_N \cdot s}$$

mit  $T_N \ll T_Z$ . Es handelt sich also um einen realen PD-Regler. Bild V-10 zeigt die Sprungantwort des geschlossenen Kreises.

## 5 Einstellregeln bei speziellen Regelstrecken

Für spezielle Regelstrecken wurden Einstellregeln entwickelt, die eine direkte Berechnung der Reglerparameter aus den Streckenparametern ermöglichen. Im Folgenden werden zwei Einstellregeln, das Betragsoptimum und das symmetrische Optimum, vorgestellt.

### 5.1 Betragsoptimum

Betrachtet wird ein Verzögerungssystem der Ordnung  $n$  mit ausschließlich reellen Polen, die Übertragungsfunktion der Strecke lautet also

$$G_s(s) = \frac{K_s}{\prod_{i=1}^n (1 + T_i \cdot s)}.$$

In Tabelle V-2 sind für zwei Fälle die Einstellregeln des Betragsoptimums angegeben: im Falle einer großen Zeitkonstante die Einstellregeln für die Parameter eines PI-Reglers und im Falle zweier großen Zeitkonstanten die Einstellregeln für die Parameter eines PID-Reglers. In [3] ist die Herleitung der Einstellregeln des Betragsoptimums angegeben, außerdem werden weitere Fälle betrachtet.

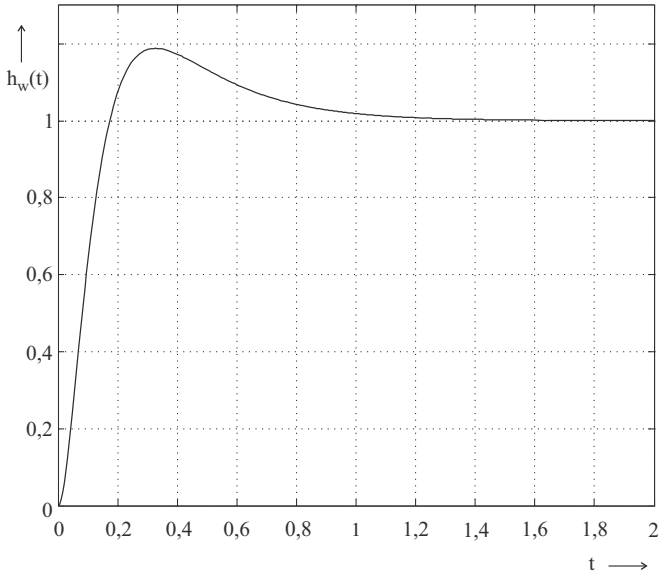


**Bild V-10**  
Sprungantwort des geschlossenen Kreises für  
$$G_o(s) = 26,9 \cdot \frac{1 + 0,373 \cdot s}{1 + 0,0268 \cdot s} \cdot \frac{1}{s^2}$$

Im Falle einer großen Zeitkonstante  $T_1$  wird der Streckenpol bei  $-\frac{1}{T_1}$  durch die Reglernullstelle des PI-Reglers bei  $-\frac{1}{T_R}$  kompensiert. Entsprechend werden im Falle zweier großen Zeitkonstanten  $T_1$  und  $T_2$  die Streckenpole bei  $-\frac{1}{T_1}$  und  $-\frac{1}{T_2}$  durch die Reglernullstellen des PID-Reglers bei  $-\frac{1}{T_{R1}}$  und  $-\frac{1}{T_{R2}}$  kompensiert.

5.2 Symmetrisches Optimum

Betrachtet wird wieder ein Verzögerungssystem mit ausschließlich reellen Polen, wobei die Zeitkonstanten in eine Gruppe großer Zeitkonstanten  $T_1, \dots, T_K$  und eine Gruppe kleiner Zeitkonstanten  $\tau_1, \dots, \tau_\ell$  mit

$$T_1, \dots, T_K \gg \tau_s = \sum_{j=1}^{\ell} \tau_j$$

eingeteilt werden können. Die Übertragungsfunktion der Strecke lautet also

$$G_S(s) = \frac{K_S}{\prod_{i=1}^k (1 + T_i \cdot s) \cdot \prod_{j=1}^{\ell} (1 + \tau_j \cdot s)}$$

**Tabelle V-2** Einstellregeln des Betragsoptimums

| Strecke                                                                                   | Regler                                                                                               | Reglerparameter                                                                          |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| $G_S(s) = \frac{K_S}{\prod_{i=1}^n (1 + T_i)}$<br>$T_1 \gg \sum_{i=2}^n T_i$              | $G_R(s) = K_R \cdot \frac{1 + T_R \cdot s}{s}$<br>PI-Regler                                          | $K_R = \frac{1}{2 \cdot K_S \cdot \sum_{i=2}^n T_i}$<br>$T_R = T_1$                      |
| $G_S(s) = \frac{K_S}{\prod_{i=1}^n (1 + T_i \cdot s)}$<br>$T_1, T_2 \gg \sum_{i=3}^n T_i$ | $G_R(s) = K_R \cdot \frac{(1 + T_{R1} \cdot s) \cdot (1 + T_{R2} \cdot s)}{s}$<br>idealer PID-Regler | $K_R = \frac{1}{2 \cdot K_S \cdot \sum_{i=3}^n T_i}$<br>$T_{R1} = T_1$<br>$T_{R2} = T_2$ |

**Tabelle V-3** Einstellregeln des symmetrischen Optimums

| Strecke                                                                                                                                                                                               | Regler                                                                       | Reglerparameter                                                                                                                                           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>allgemeiner Fall</p> $G_S(s) = \frac{K_S}{\prod_{i=1}^k (1 + T_i \cdot s) \cdot \prod_{j=1}^{\ell} (1 + \tau_j \cdot s)}$ $T_1, \dots, T_k \gg \tau_{\Sigma} = \sum_{j=1}^{\ell} \tau_j$           | $G_R(s) = K_R \cdot \frac{(1 + T_R \cdot s)^k}{s}$                           | $K_R = \frac{1}{2 \cdot K_S \cdot \tau_{\Sigma}} \cdot \frac{\prod_{i=1}^k T_i}{(4 \cdot k \cdot \tau_{\Sigma})^k}$ $T_R = 4 \cdot k \cdot \tau_{\Sigma}$ |
| <p>eine große Zeitkonstante</p> $G_S(s) = \frac{K_S}{(1 + T_1 \cdot s) \cdot \prod_{j=1}^{\ell} (1 + \tau_j \cdot s)}$ $T_1 \gg \tau_{\Sigma} = \sum_{j=1}^{\ell} \tau_j$                             | $G_R(s) = K_R \cdot \frac{1 + T_R \cdot s}{s}$ <p>PI-Regler</p>              | $K_R = \frac{T_1}{8 \cdot K_S \cdot \tau_{\Sigma}^2}$ $T_R = 4 \cdot \tau_{\Sigma}$                                                                       |
| <p>zwei große Zeitkonstanten</p> $G_S(s) = \frac{K_S}{(1 + T_1 \cdot s) \cdot (1 + T_2 \cdot s) \cdot \prod_{j=1}^{\ell} 1 + \tau_j \cdot s}$ $T_1, T_2 \gg \tau_{\Sigma} = \sum_{j=1}^{\ell} \tau_j$ | $G_R(s) = K_R \cdot \frac{(1 + T_R \cdot s)^2}{s}$ <p>idealer PID-Regler</p> | $K_R = \frac{T_1 \cdot T_2}{128 \cdot K_S \cdot \tau_{\Sigma}^3}$ $T_R = 8 \cdot \tau_{\Sigma}$                                                           |

Der Regler wird gemäß

$$G_R(s) = K_R \cdot \frac{(1 + T_R \cdot s)^k}{s}$$

angesetzt, der Zählergrad ist also gleich der Anzahl der großen Zeitkonstanten. In Tabelle V-3 sind die Einstellregeln des symmetrischen Optimums für ein allgemeines  $k$ , für den Fall einer großen Zeitkonstanten, d.h.  $k = 1$ , und den Fall zweier großer Zeitkonstanten,  $k = 2$ , angegeben. Für  $k = 1$  erhält man einen PI-Regler, für  $k = 2$  einen idealen PID-Regler. Die Herleitung dieser Einstellregeln des symmetrischen Optimums findet sich in [3].

Im Gegensatz zum Betragsoptimum findet beim symmetrischen Optimum keine Kompensation von Polstellen der Strecke durch Nullstellen des Reglers statt.

**Literaturverzeichnis**

[1] DIN IEC 60050-351. Beuth. 2009.  
[2] Dorf, R. C., Bishop, R. H.: Moderne Regelungssysteme. Pearson Studium. 10., überarbeitete Auflage 2007.  
[3] Föllinger, O.: Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung. Hüthig. 10., durchgesehene Auflage 2008.  
[4] Horn, M., Dourdoumas, N.: Regelungstechnik. Pearson Studium. 2004.  
[5] Lunze, J.: Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen. Springer. 8. Auflage 2010.  
[6] Lutz, H., Wendt, W.: Taschenbuch der Regelungstechnik: mit MATLAB und Simulink. Harry Deutsch. 8., ergänzte Auflage 2010.

# Messtechnik

## I Grundlagen und Grundbegriffe der Messtechnik

### 1 Begriffe

Es ist eine wesentliche Aufgabe der Messtechnik, technische Vorgänge quantitativ zu erfassen und anhand der gemessenen Größen Funktionsabläufe zu steuern. Als Beispiel sei ein Kraftwerk zur Energieerzeugung genannt, bei dem nur über die Messung von Temperaturen, Leistungen, Drücken und anderen Größen Aussagen über den momentanen Zustand möglich sind und bei Abweichungen vom Sollwert geeignete Eingriffe in das System erfolgen können. Damit eine eindeutige Kommunikation möglich wird, sind die in der Messtechnik verwendeten Begriffe, Messverfahren und Maßeinheiten in entsprechenden Normen oder Vorschriften festgelegt:

|              |                                      |
|--------------|--------------------------------------|
| DIN 1301     | Einheiten                            |
| DIN 1304     | Allgemeine Formelzeichen             |
| DIN 1313     | Physikalische Größen und Gleichungen |
| DIN 1319     | Grundbegriffe der Messtechnik        |
| VDI/VDE 2600 | Metrologie (Messtechnik)             |

Einige häufig verwendete Begriffe aus der Messtechnik sind im folgenden auszugsweise und zum Teil gekürzt nach DIN 1319 oder VDI/VDE 2600 wiedergegeben:

**Messen** ist der experimentelle Vorgang, durch den ein spezieller Wert einer physikalischen Größe als Vielfaches einer Einheit oder eines Bezugswerts ermittelt wird.

**Messwert:** Gemessener spezieller Wert einer Messgröße.

**Messergebnis** ist ein aus mehreren Messwerten einer physikalischen Größe oder aus Messwerten für verschiedene Größen nach einer festgelegten Beziehung ermittelter Wert oder Werteverlauf.

**Messprinzip:** Charakteristische physikalische Erscheinung, die bei der Messung benutzt wird.

Beispiele: Temperaturmessung; Änderung des elektrischen Widerstandes eines metallischen Leiters durch Temperaturänderung.

**Messverfahren:** Spezielle Art der Anwendung eines Messprinzips.

Beispiel: Abgleich einer Instrumentenanzeige auf Null. Wird z.B. bei Brückenschaltungen als *Nullabgleichverfahren* bezeichnet.

**Messgerät:** Liefert oder verkörpert Messwerte.

**Messbereich:** Bereich von Werten des Eingangssignals eines Messgerätes, der entsprechend der Kennlinie dieses Messgerätes eindeutig und innerhalb vorgegebener Fehlergrenzen durch Werte des Ausgangssignals abgebildet wird.

**Empfindlichkeit:** Verhältnis einer Änderung der Ausgangsgröße zu der sie verursachenden Eingangsgröße.

**Kalibrieren:** Ermitteln des gültigen Zusammenhanges zwischen dem Messwert oder dem Wert des Ausgangssignals und dem konventionell richtigen Wert der Messgröße.

**Justieren:** Einstellen oder Abgleichen eines Messgerätes mit dem Ziel, die Anzeige des Messgerätes möglichst nahe an den richtigen Wert der Messgröße anzugleichen.

**Eichen:** Von einer Eichbehörde nach den gesetzlichen Vorschriften und Anforderungen vorzunehmende Prüfung und Stempelung von Messgeräten.

Beispiele: Elektrizitätszähler, Waagen, Zapfsäulen.

**Messumformer:** Messgerät, das ein analoges Eingangssignal in ein eindeutig damit zusammenhängendes analoges Ausgangssignal umformt.

Beispiel: Temperaturmessung; eine Temperaturänderung wird in eine Widerstandsänderung umgeformt.

**Messwandler:** Am Ein- und Ausgang tritt die gleiche physikalische Größe auf; es wird keine Hilfsenergie benötigt.

Beispiele: Spannungswandler, Stromwandler.

**Messumsetzer:** Die Signalstruktur von Ein- und Ausgang ist entweder unterschiedlich (analog-digital oder digital-analog) oder nur digital.

**Analoge Messverfahren:** Der Messgröße wird ein Signal zugeordnet, das mindestens im Idealfall eine eindeutig umkehrbare Abbildung der Messgröße ist (häufig Skalenanzeige).

**Digitale Messverfahren:** Der Messgröße wird ein Signal zugeordnet, das eine mit fest gegebenen Schritten quantisierte Abbildung der Messgröße ist (häufig Ziffernanzeige).

### 2 Einheiten

Messen heißt „Vergleichen“. Die zu messende Größe wird damit als Vielfaches einer Einheit dargestellt. Hat eine Messung eine Spannung von 5 V ergeben (Größenwert), so heißt das, dass die gemessene Spannung das Fünffache der Einheit der Spannung 1 Volt beträgt.

$\text{Größenwert} = \text{Zahlenwert} \cdot \text{Einheit}$

Wird in Gleichungen grundsätzlich das Produkt aus Zahlenwert und Einheit eingesetzt, spricht man von *Größengleichungen*. Sie gelten unabhängig von der Wahl der Einheiten und sind bevorzugt gegenüber *Zahlenwertgleichungen* anzuwenden, bei denen man die Einheiten vereinbart und nur noch Zahlenwerte in die Gleichungen einsetzt.



Für die in der Physik verwendeten Einheiten hat man die folgenden sieben **SI-Basiseinheiten** (Système International d’Unités) nach Tabelle I-1 eingeführt:

**Tabelle I-1** SI-Basiseinheiten

| Basisgröße                  | Basiseinheit |                  |
|-----------------------------|--------------|------------------|
|                             | Name         | Einheitenzeichen |
| Länge                       | Meter        | m                |
| Masse                       | Kilogramm    | kg               |
| Zeit                        | Sekunde      | s                |
| elektrische Stromstärke     | Ampere       | A                |
| thermodynamische Temperatur | Kelvin       | K                |
| Lichtstärke                 | Candela      | cd               |
| Stoffmenge                  | Mol          | mol              |

Aus diesen Basiseinheiten werden weitere **SI-Einheiten** abgeleitet, von denen einige in Tabelle I-2 aufgeführt sind.

**Tabelle I-2** Abgeleitete SI-Einheiten (Auswahl)

| Abgeleitete Größe       | Name   | Zeichen  | Zusammenhang zu anderen SI-Einheiten          |
|-------------------------|--------|----------|-----------------------------------------------|
| Kraft                   | Newton | N        | $1\text{ N} = 1\text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$ |
| Energie                 | Joule  | J        | $1\text{ J} = 1\text{ N} \cdot \text{m}$      |
| Leistung                | Watt   | W        | $1\text{ W} = 1\text{ J/s}$                   |
| Elektrische Spannung    | Volt   | V        | $1\text{ V} = 1\text{ W/A}$                   |
| Elektrischer Widerstand | Ohm    | $\Omega$ | $1\text{ }\Omega = 1\text{ V/A}$              |
| Elektrische Kapazität   | Farad  | F        | $1\text{ F} = 1\text{ A} \cdot \text{s/V}$    |
| Induktivität            | Henry  | H        | $1\text{ H} = 1\text{ V} \cdot \text{s/A}$    |
| Magnetischer Fluss      | Weber  | Wb       | $1\text{ Wb} = 1\text{ V} \cdot \text{s}$     |

Die Darstellung, die Bewahrung und die Weitergabe der SI-Basiseinheiten und wichtiger abgeleiteter SI-Einheiten werden wegen des beträchtlichen apparativen Aufwandes national von Staatsinstituten wahrgenommen; in der Bundesrepublik von der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt in Braunschweig.

**3 Messabweichung, Messfehler**

Eine *Messabweichung* ist der Unterschied zwischen dem *erhaltenen* und dem *wahren* Wert, oder, wenn der wahre Wert nicht bekannt ist, einem als richtig geltenden Wert, dem *konventionell richtigen Wert*. Der früher durchgehend gebrauchte Begriff *Fehler* sollte der Beschreibung von Messgeräten vorbehalten bleiben, die festgestellte systematische Abweichungen aufweisen (DIN 1319). In diesem Kapitel wird der Übersichtlichkeit halber vorwiegend der Begriff „Abweichung“ verwendet.

Das Ziel eines Messvorganges ist es, den Wert der Messgröße so genau wie möglich zu bestimmen. Bei

einem Messvorgang wird aber im allgemeinen nicht der gesuchte „wahre“ Wert gemessen, sondern ein Wert, der von diesem abweicht. Soll eine Aussage über diese Abweichung gemacht werden, muss der wahre Wert bekannt sein. Da dieser wahre Wert in der Regel aber nicht gefunden werden kann, wird ein als „richtig“ angenommener oder vereinbarter Wert für die Messung zugrunde gelegt, der *konventionell richtige Wert*. Sofern dies möglich ist, kann man ihn in der Praxis dadurch erhalten, dass man die zu messende Größe mit einem Messgerät mit sehr viel kleinerer Abweichung (1/10 oder kleiner, d.h. Präzisionsmessgerät) misst.

Die absolute Messabweichung  $F$  ist der Unterschied zwischen dem erhaltenen Messwert  $x_a$  und dem konventionell richtigen Wert  $x_r$ :

● absolute Messabweichung  $F = x_a - x_r$  (I.1)

Die relative Messabweichung  $f$  ergibt sich zu:

● relative Messabweichung

$$f = \frac{F}{x_r} = \frac{x_a - x_r}{x_r}$$

(I.2)

● relative Messabweichung in %

$$f = \frac{F}{x_r} = \frac{x_a - x_r}{x_r} \cdot 100\%$$

(I.3)

Die Ursachen für die Messabweichungen lassen sich nach der Art ihrer Entstehung einteilen.

**3.1 Systematische Abweichungen**

Sie entstehen beispielsweise durch das Messinstrument selbst, das den Messkreis beeinflusst (Spannungsfall am Strommesser) und sind in der Regel nach Betrag und Vorzeichen bekannt und somit *korrigierbar*. Diese Abweichungen machen, wenn sie nicht korrigiert werden, ein Messergebnis *unrichtig*.

Bekannte systematische Abweichungen  $A_a$  werden durch die *Korrektur*  $K$  erfasst. Man erhält damit den *berichtigten Messwert*  $x_r$ :

● Korrektur  $K = -A_a$

● berichtigter Messwert  $x_r = x_a + K$  (I.4)

### 3.2 Zufällige Abweichungen

Sie entstehen durch Einflüsse, die dem Zufall unterliegen, wie zum Beispiel Rauschen, Störungen, Abnutzung und Bauteiländerungen. Sie sind prinzipiell nicht bekannt und können deshalb auch nicht korrigiert werden. Diese Abweichungen machen ein Messergebnis *unsicher*.

Häufig kann man für die zufälligen Abweichungen die *Abweichungsgrenzen*  $G$  angeben, innerhalb derer der Messwert  $x$  „mit großer Wahrscheinlichkeit“ liegt:

- *Messwert mit Abweichungsgrenzen*  $x_r \pm G$  (I.5)

Das bedeutet, dass der Messwert  $x$  im Bereich  $x_r - G \leq x \leq x_r + G$  liegt.

Beispiel I.1 zeigt die unterschiedlichen Arten der Darstellung von Abweichungsgrenzen.

- **Beispiel I.1:**  $5 \text{ V} \pm 0,2 \text{ V}$ ;  $16,2 (1 \pm 0,02) \text{ A}$ ;  $(1 \pm 10\%) \text{ k}\Omega$ . Die Abweichungsgrenzen werden hier, den Erfahrungen aus der Praxis entsprechend, *symmetrisch* zum *konventionell richtigen Wert* angegeben.

Mit der *maximal* auftretenden Abweichung lässt sich auch die *maximale relative* Messabweichung (Gleichung I.2) berechnen (der Begriff „maximal“ entfällt meist):

- *(Maximale) relative Messabweichung*

$$f = \frac{x_r \pm G - x_r}{x_r} = \frac{\pm G}{x_r} \quad (\text{I.6})$$

Die (maximale) relative Messabweichung wird in der Messtechnik bevorzugt angegeben.

- **Beispiel I.2:** Zwei unterschiedliche Spannungen werden gemessen:  $U_1 = 8 \text{ V} \pm 0,1 \text{ V}$ ;  $U_2 = 80 \text{ V} \pm 0,1 \text{ V}$ . Die Abweichungsgrenzen sind für beide Messungen gleich. Erst die (maximale) relative Messabweichung zeigt, dass die Messung von  $U_2$  genauer ist als die von  $U_1$ :

$$f_1 = \pm 0,1 \text{ V} / 8 \text{ V} = \pm 0,0125 = \pm 1,25\%; \\ f_2 = \pm 0,1 \text{ V} / 80 \text{ V} = \pm 0,00125 = \pm 0,125\%.$$

Zur Festlegung der Abweichungsgrenzen  $G$  werden praktische Erfahrungen, umfangreiche Messungen gleicher oder ähnlicher Art und die Statistik herangezogen. Überhaupt spielt die Statistik bei der Angabe von Abweichungen eine entscheidende Rolle. Da man den „wahren“ Wert niemals messen kann, lässt sich von einem Messwert nur angeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit er innerhalb eines bestimmten Wertebereiches liegt. Dazu werden die zwei Begriffe *arithmetischer Mittelwert* und *(empirische) Standardabweichung* verwendet.

### 3.3 Arithmetischer Mittelwert, Erwartungswert

Der Einfluss von zufälligen Abweichungen auf das Messergebnis lässt sich in der Regel dadurch verringern, dass zunächst die Messung häufig wiederholt wird, eventuell sogar mit unterschiedlichen Messgeräten, und anschließend aus den  $n$  Einzelmessungen  $x_i$  der *arithmetische Mittelwert* gebildet wird:

- *arithmetischer Mittelwert*  $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$  (I.7a)

$n$  Anzahl der Messungen;  $x_i$  die einzelnen Messwerte

Lässt man die Zahl der Messungen gegen unendlich gehen, geht der arithmetische Mittelwert  $\bar{x}$  in den Erwartungswert  $\mu$  über, von dem man annimmt, dass er den konventionell richtigen Wert mit großer Wahrscheinlichkeit repräsentiert.

- *Erwartungswert*  $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{x_{in}}{n}$  (I.7b)

$n$  Anzahl der Messungen;  $x_{in}$  die einzelnen Messwerte

Der arithmetische Mittelwert kommt dem *konventionell richtigen Wert* meist schon sehr nahe, da in der Praxis die Abweichungen der Einzelmessungen sowohl positives als auch negatives Vorzeichen haben und sich damit teilweise aufheben. Trotzdem darf man nicht annehmen, dass der arithmetische Mittelwert gleich dem wahren Wert ist.

- **Beispiel I.3:** Eine wiederholt durchgeführte Spannungsmessung liefert die Einzelwerte:  $5,0 \text{ V}$ ;  $5,1 \text{ V}$ ;  $4,9 \text{ V}$ ;  $5,2 \text{ V}$ ;  $5,0 \text{ V}$ ;  $5,1 \text{ V}$ . Der nach Gleichung (I.7a) berechnete arithmetische Mittelwert ergibt  $5,05 \text{ V}$ . Eine zweite Messreihe ergibt die Einzelwerte:  $5,0 \text{ V}$ ;  $5,3 \text{ V}$ ;  $4,8 \text{ V}$ ;  $5,2 \text{ V}$ ;  $5,2 \text{ V}$ ;  $4,8 \text{ V}$ . Der arithmetische Mittelwert ist wiederum  $5,05 \text{ V}$ .

### 3.4 Standardabweichung

Die Erfahrung zeigt, dass trotz des zahlenmäßig gleichen arithmetischen Mittelwertes der Messreihen aus Beispiel I.3 dem Mittelwert der ersten Messreihe eher der *konventionell richtige Wert* zugeordnet werden kann als dem zweiten, weil bei ihr die Einzelmessungen weniger voneinander abweichen. Deshalb wird die *(empirische) Standardabweichung*  $s$  (meist nur kurz als Standardabweichung bezeichnet) als Beurteilungskriterium für eine Messreihe gebildet, die die Differenzen zwischen den Einzelmessungen und dem arithmetischen Mittelwert erfasst und diese Differenzen vor der Summation quadriert, damit sie sich bei entgegengesetztem Vorzeichen nicht teilweise aufheben:

- *Standardabweichung*

$$s = + \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (\text{I.8a})$$

Der Ausdruck  $(n-1)$  im Nenner anstatt  $n$  weist darauf hin, dass die Bildung der Standardabweichung erst für mehr als einen Messwert sinnvoll ist.

Das Quadrat der Standardabweichung wird mit Varianz bezeichnet:

- *Varianz*  $s^2$  oder auch  $\sigma^2$  (I.8b)

Dabei wird  $s^2$  für eine endliche Anzahl von Messwerten verwendet, während  $\sigma^2$  den Grenzwert für unendlich viele Messwerte bezeichnet, siehe Gleichung (I.16), Gaußverteilung.

- **Beispiel I.4:** Die Standardabweichung  $s$  errechnet sich nach Gleichung (I.8a) für die erste Messreihe von Beispiel I.3 zu  $s_1 = 0,105 \text{ V}$ ; für die zweite Messreihe ergibt sich  $s_2 = 0,217 \text{ V}$ .

Je größer die Standardabweichung  $s$  ist, desto mehr „streu“ die Messwerte, und um so weniger wird man vom arithmetischen Mittelwert auf den konventionell richtigen Wert schließen können.

Die Behandlung von Messabweichungen oder Messfehlern geschieht nach Gesetzen der Wahrscheinlichkeitstheorie. Danach werden Messwerte als Werte aufgefasst, die mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit in einem gegebenen Wertebereich auftreten (Kapitel 7 unten). Einzelheiten dazu sind z.B. in DIN 1319 aufgeführt.

#### 4 Abweichungsförpflanzung, Fehlerförfpflanzung

Werden mehrere unterschiedliche abweichungsbehaftete Größen gemessen (z.B. Spannung  $U$  und Strom  $I$ ), um daraus eine weitere Größe rechnerisch zu bestimmen (z.B. den Widerstand  $R$ ), gehen die Messabweichungen der Einzelgrößen in die rechnerisch bestimmte Größe in der nachfolgend dargestellten Weise ein. Gegeben ist  $F = f(x, y, z, \dots)$ . Darin steht  $F$  für den Gesamtfehler (z.B. von  $R$ ), der durch die Einzelfehler der Größen  $x, y, z, \dots$  (z.B.  $U, I$ ) bestimmt wird. Die Einzelfehler erhält man durch partielles Differenzieren:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial x}; & \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial y}; \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial z}; \dots\end{aligned}\quad (I.9)$$

Bei den Abweichungen bzw. Fehlern handelt es sich um endliche Differenzen, so dass aus Gleichung (I.9) folgt:

$$\begin{aligned}\Delta F_x &= \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial x} \cdot \Delta x; \\ \Delta F_y &= \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial y} \cdot \Delta y; \\ \Delta F_z &= \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial z} \cdot \Delta z; \dots\end{aligned}\quad (I.10)$$

Der Gesamtfehler  $\Delta F$  berechnet sich aus der Summe der Einzelfehler:

$$\Delta F = \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial z} \cdot \Delta z + \dots\quad (I.11a)$$

Dieser Ausdruck wird in der Mathematik als totales Differential bezeichnet.

Bei der Anwendung dieser Formel ist zu unterscheiden, ob es sich um systematische oder zufällige Abweichungen bzw. Fehler handelt.

- **Systematische Abweichungen** bzw. **Fehler** sind nach Betrag und Vorzeichen bekannt und müssen deshalb mit Vorzeichen eingesetzt werden. Daraus kann sich ergeben, dass sich bei der Addition der Einzelterme eine Abweichungsverringerung oder sogar eine vollständige Abweichungsaufhebung ergibt, wie Beispiel I.9 zeigt.

$$\Delta F = \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial z} \cdot \Delta z + \dots\quad (I.11.b)$$

absolute Abweichungsgrenze für systematische Abweichungen;  $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$  sind vorzeichenrichtig einzusetzen

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{1}{F} \cdot \left\{ \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial z} \cdot \Delta z + \dots \right\}\quad (I.11.c)$$

relative Abweichungsgrenze für systematische Abweichungen;  $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$  sind vorzeichenrichtig einzusetzen.

- **Zufällige Abweichungen:** Bei ihnen sind nur die Abweichungsgrenzen bekannt.

Für  $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$  werden die zugeordneten Abweichungsgrenzen  $\pm G_x, \pm G_y, \pm G_z, \dots$  eingesetzt. Wichtig ist, dass die Vorzeichen der einzelnen Abweichungsgrenzen ( $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$ ) so gewählt werden, dass sich die größtmögliche Gesamtabweichungsgrenze  $\Delta F$  ergibt. Die tatsächlich auftretende Gesamtabweichungsgrenze kann damit niemals größer werden als die berechnete. Formelmäßig lässt sich das dadurch erreichen, dass bei den Einzelabweichungen die Beträge gebildet und dann insgesamt addiert werden. Das „±“-Zeichen vor dem Ausdruck erfasst die größtmögliche Abweichungsgrenze sowohl in positiver als auch in negativer Richtung.

$$\Delta F = \pm \left\{ \left| \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial x} \cdot \Delta x \right| + \left| \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial y} \cdot \Delta y \right| + \left| \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial z} \cdot \Delta z \right| + \dots \right\}\quad (I.11.d)$$

absolute Abweichungsgrenze für zufällige Abweichungen

$$\frac{\Delta F}{F} = \pm \frac{1}{F} \cdot \left\{ \left| \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial x} \cdot \Delta x \right| + \left| \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial y} \cdot \Delta y \right| + \left| \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial z} \cdot \Delta z \right| + \dots \right\}\quad (I.11.e)$$

relative Abweichungsgrenze für zufällige Abweichungen

- **Beispiel I.5:** An einem Spannungsteiler werden die zwei Teilspannungen  $U_1 = 12 \text{ V} \pm 0,2 \text{ V}$  und  $U_2 = 16 \text{ V} \pm 0,1 \text{ V}$  gemessen. Daraus sollen die Gesamtspannung und der Gesamtfehler bestimmt werden. Bezogen auf Gleichung (I.11) gilt:  $x \leftrightarrow U_1; y \leftrightarrow U_2 \Rightarrow F = f(U_1, U_2) = U_1 + U_2; \Delta x = \Delta U_1 = \pm 0,2 \text{ V}; \Delta y = \Delta U_2 = \pm 0,1 \text{ V}$ . Mit Gleichung (I.11) folgt:

$$\Delta F = \frac{\partial (U_1 + U_2)}{\partial U_1} \cdot \Delta U_1 + \frac{\partial (U_1 + U_2)}{\partial U_2} \cdot \Delta U_2 = 1 \cdot \Delta U_1 + 1 \cdot \Delta U_2$$

Die Gesamtspannung aus diesen zwei Messwerten ergibt sich zu:  
 $(12 + 16) \text{ V} + \Delta F = 28 \text{ V} \pm (0,2 + 0,1) \text{ V} = 28 \text{ V} \pm 0,3 \text{ V}$ .  
 Die relative Messabweichung beträgt:  $[(28 \pm 0,3) \text{ V}] - 28 \text{ V} / 28 \text{ V}$   
 $= \pm 0,011 = \pm 1,1\%$ .

- **Beispiel I.6:** Die Differenz zweier Ströme soll aus den zwei gemessenen Strömen  $I_1 = 290 \text{ mA} \pm 5 \text{ mA}$  und  $I_2 = 265 \text{ mA} \pm 5 \text{ mA}$  berechnet werden.  
 Mit den Zuordnungen entsprechend Beispiel I.5 und Gleichung (I.11) erhält man:  $x \leftrightarrow I_1$ ;  $y \leftrightarrow I_2$ ;  $\Rightarrow F = f(I_1, I_2) = I_1 - I_2$ ;  
 $\Delta x = \Delta I_1 = \pm 5 \text{ mA}$ ;  $\Delta y = \Delta I_2 = \pm 5 \text{ mA}$ .

$$\Delta F = \frac{\partial(I_1 - I_2)}{\partial I_1} \cdot \Delta I_1 + \frac{\partial(I_1 - I_2)}{\partial I_2} \cdot \Delta I_2 = 1 \cdot \Delta I_1 + 1 \cdot \Delta I_2$$

Daraus folgt:

$$I_1 - I_2 = (290 - 265) \text{ mA} \pm (5 + 5) \text{ mA} = 25 \text{ mA} \pm 10 \text{ mA}.$$

Die relative Messabweichung beträgt  $f = \pm 10 \text{ mA} / 25 \text{ mA} = \pm 0,4 = \pm 40\%$ . Das Vorzeichen der Messabweichungen wurde entsprechend der Anmerkung zu Gleichung (I.11) eingesetzt.  
 Die Messabweichung wird um so größer, je geringer die Differenz der Einzel-Messwerte ist.  
 Nach Beispiel I.6 soll die rechnerische Differenzbildung vermieden werden, wenn sich zwei abweichungsbehaftete Messwerte nur wenig voneinander unterscheiden.

- **Beispiel I.7:** Spannung und Strom an einem Widerstand werden gemessen:  $U = 100 \text{ V} \pm 0,5 \text{ V}$ ;  $I = 2,0 \text{ A} \pm 20 \text{ mA}$ . Zu bestimmen sind die relativen Abweichungen für die Leistung an  $R$  und für den Widerstand  $R$ , wenn beide rechnerisch bestimmt werden. Die systematischen Fehler durch die Innenwiderstände der Messinstrumente werden vernachlässigt.  
 Wie in den Beispielen I.5 und I.6 ausführlich gezeigt, ergibt sich für  $P$  folgende Formel:

$$\Delta F = \frac{\partial(U \cdot I)}{\partial U} \cdot \Delta U + \frac{\partial(U \cdot I)}{\partial I} \cdot \Delta I = I \cdot \Delta U + U \cdot \Delta I$$

Daraus folgt die Leistung:

$$\begin{aligned} P &= U \cdot I \pm (I \cdot \Delta U + U \cdot \Delta I) \\ &= 100 \text{ V} \cdot 2 \text{ A} \pm (2 \text{ A} \cdot 0,5 \text{ V} + 100 \text{ V} \cdot 20 \text{ mA}) \\ &= 200 \text{ W} \pm (1 \text{ W} + 2 \text{ W}) \\ &= 200 \text{ W} \pm 3 \text{ W} \end{aligned}$$

Die relative Messabweichung errechnet sich zu  $\pm 3 \text{ W} / 200 \text{ W} = \pm 1,5\%$ . Für den Widerstand gilt:

$$\Delta F = \frac{\partial(U/I)}{\partial U} \cdot \Delta U + \frac{\partial(U/I)}{\partial I} \cdot \Delta I = \Delta U/I - (U/I^2) \cdot \Delta I. \quad (\text{I.12})$$

$$\begin{aligned} R &= 100 \text{ V} / 2 \text{ A} \pm ((0,5 \text{ V} / 2 \text{ A}) + (100 \text{ V} / 4 \text{ A}^2) \cdot 20 \text{ mA}) \\ &= 50 \Omega \pm 0,75 \Omega. \end{aligned}$$

Die relative Messabweichung beträgt  $\pm 0,75 \Omega / 50 \Omega = \pm 1,5\%$ .  
 Das bei der mathematischen Berechnung in Formel (I.12) auftretende Minuszeichen wird mit den Vorzeichen der Einzelmessabweichungen so verknüpft, dass sich wieder die größtmögliche Gesamtmeßabweichung ergibt.

- **Beispiel I.8:** Aus zwei parallel geschalteten Widerständen soll der Gesamtwiderstand  $R_p$  bestimmt werden.  
 Gegeben:  $R_1 = 1000 \Omega \pm 10 \Omega$ ;  $R_2 = 200 \Omega \pm 2 \Omega$

$$\begin{aligned} \Delta F &= \frac{\partial\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)}{\partial R_1} \cdot \Delta R_1 + \frac{\partial\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)}{\partial R_2} \cdot \Delta R_2 \\ &= \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} \cdot \Delta R_1 + \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2} \cdot \Delta R_2 \end{aligned}$$

$$\Delta F = \frac{4 \cdot 10^4 \cdot 10 + 10^6 \cdot 2}{(1,44 \cdot 10^6)} \Omega = 1,67 \Omega$$

Damit ergibt sich:  $R_p = 167 \Omega \pm 1,67 \Omega$ . Der relative Fehler beträgt  $\pm 1,67 \Omega / 167 \Omega = \pm 1\%$ .

#### ■ Beispiel I.9

Ein Widerstand  $R$  soll aus einer Spannungs- und einer Strommessung berechnet werden. Die beiden Messungen sind mit je einem *systematischen* Fehler behaftet:

$U = 10 \text{ V} \pm 10 \text{ mV}$ ;  $I = 5 \text{ mA} \pm 5 \mu\text{A}$ . Für die absolute Fehlergrenze ergibt sich mit Gleichung (I.11.b):

$$\Delta R = + \frac{\Delta U}{I} - \frac{U}{I^2} \cdot \Delta I = \frac{10 \text{ mV}}{5 \text{ mA}} - \frac{10 \text{ V}}{(5 \text{ mA})^2} \cdot 5 \mu\text{A} = 2 \Omega - 2 \Omega = 0.$$

Man erhält rechnerisch den gleichen (korrekten) Wert aus  $\frac{10 \text{ V}}{5 \text{ mA}}$   
 bzw.  $\frac{10,01 \text{ V}}{5,005 \text{ mA}}$ .

## 5 Fehlerangaben von Messgeräten

Bei Messgeräten wird in der Regel die Fehlergrenze angegeben. Sie ist der maximal zugelassene prozentuale Fehler, der häufig auf den Messbereichsendwert bezogen wird (DIN 43780). Sie gilt außerdem nur bei Einhaltung gewisser Referenzbedingungen (z.B. Referenzfrequenz 45 Hz bis 65 Hz  $\pm 5$  Hz).

### 5.1 Analog anzeigende Messgeräte

Bei analog (direkt wirkenden) anzeigenden Messgeräten sind Genauigkeitsklassen nach DIN 43780 festgelegt. Die dort angegebenen Klassenzeichen sind gleich dem Betrag der Fehlergrenzen in Prozent. Dabei ist der absolute Fehler auf einen Bezugswert bezogen, in der Regel auf den Messbereichsendwert. Wird dagegen ein Messwert abgelesen, so ist dieser Messwert der Bezugswert. Da der Bezugswert aber stets kleiner oder höchstens gleich dem Messbereichsendwert ist, wird der Fehler um so größer, je kleiner der gemessene Wert ist. Deshalb gilt:  
*Messwerte möglichst im oberen Drittel der Skala ablesen!*  
 Folgende *Genauigkeitsklassen* sind nach DIN 43780 festgelegt:  
 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1; 2,5; 5.

- **Beispiel I.10:** Ein Messgerät gehört der Klasse 1 an und hat den Messbereichsendwert 100 V. Dann ist die Fehlergrenze  $\pm 1\%$  vom Messbereichsendwert 100 V, also  $\pm 1 \text{ V}$ . Diese Fehlergrenze gilt für jeden angezeigten Messwert. Beträgt der Messwert 20 V, so ist der relative Fehler  $f = [(20 \pm 1) \text{ V} - 20 \text{ V}] / 20 \text{ V} = \pm 5\%$ .

### 5.2 Digital anzeigende Messgeräte

Durch die Elektronik im Instrument setzt sich der Gesamtfehler aus mehreren Anteilen zusammen. In der Praxis findet man häufig die folgende Fehlerangabe für den maximal auftretenden (absoluten) Fehler  $F_{\max}$ , der hier an einem Beispiel gezeigt werden soll:

*absoluter Fehler*

$$F_{\max} = \pm (0,1\% \text{ v.A.} + 0,1\% \text{ v.E.} + 1 \text{ LSB}) \quad (\text{I.13})$$

v.A. von der Anzeige, also abgelesener Wert (of reading); v.E. vom Endwert, Anzeigebereichsendwert (of range); LSB Bit mit der geringsten Wertigkeit, in der Regel die Stelle ganz rechts, Quantisierungsfehler (least significant bit)

- **Beispiel I.11:** Angezeigter Messwert:  $U = 7,50 \text{ V}$ ; Anzeigebereichs-Endwert:  $U_k = 9,99 \text{ V}$ ; 3-stellige Anzeige. Absoluter Fehler  $F_{\max}$  (mit den Angaben aus Gleichung (I.13)):

$$F_{\max} = \pm (0,001 \cdot 7,50 \text{ V} + 0,001 \cdot 9,99 \text{ V} + 0,01 \text{ V}) = \pm 0,0275 \text{ V}$$

Relativer Anzeigefehler:

$$f_{\max} = \pm 0,0275 \text{ V} / 7,50 \text{ V} = \pm 0,00367 = \pm 0,367\%$$

Der Bezugswert für den relativen Anzeigefehler ist auch hier der angezeigte Messwert; der Fehler steigt mit kleiner werdendem Anzeigewert. Deshalb gilt auch hier:

Messwerte möglichst im oberen Drittel der Anzeige ablesen!

## 6 Arithmetischer Mittelwert und Effektivwert von Wechselgrößen

Der *Effektivwert* einer periodischen Wechselspannung (eines periodischen Wechselstromes) gibt die gleiche Leistung ab wie eine gleichgroße Gleichspannung (Gleichstrom). Deshalb soll auch in der Regel der Effektivwert gemessen werden. Er berechnet sich nach der Formel:

- *Effektivwert einer Wechselspannung  $u(t)$ :*

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \{u(t)\}^2 dt} \quad (\text{I.14a})$$

- *Effektivwert eines Wechselstromes  $i(t)$ :*

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \{i(t)\}^2 dt} \quad (\text{I.14b})$$

Der *arithmetische Mittelwert* oder *Gleichanteil* einer periodischen Wechselspannung oder eines periodischen Wechselstromes ergibt sich aus:

- *Arithmetischer Mittelwert einer Wechselspannung  $u(t)$ :*

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T \{u(t)\} dt \quad (\text{I.15a})$$

- *Arithmetischer Mittelwert eines Wechselstromes  $i(t)$ :*

$$\bar{i} = \frac{1}{T} \int_0^T \{i(t)\} dt \quad (\text{I.15b})$$

In der Messtechnik hat er eine gewisse Bedeutung, weil *Drehspulmessinstrumente* diesen Wert anzeigen und *Oszilloskope* in der Schalterstellung „AC“ für die Eingangsspannung diesen Signalanteil unterdrücken (Kapitel III, Oszilloskop).

## 7 Häufigkeitsverteilung, Vertrauensbereich

Trägt man die einzelnen Messwerte einer gemessenen Größe, der zufällige Fehler überlagert sind, in Form einer Häufigkeitsverteilung (Histogramm) auf, erhält man in der Regel einen charakteristischen Verlauf, der sich für eine gegen unendlich gehende Anzahl von Messwerten der Normal- oder Gauß-Verteilung („Gaußsche Glockenkurve“) annähert. Sie ist wie folgt definiert:

- *Normalverteilung*

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma^2} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{I.16})$$

$\bar{x}$  siehe Gleichung (I.7a),  $\sigma^2$  siehe Gleichung (I.8b)

Die Erfahrung hat gezeigt, dass der berechnete Mittelwert  $\bar{x}$  einer Messreihe mit den Einzel-Messwerten  $x_i$  mit zunehmender Wahrscheinlichkeit dem konventionell richtigen Wert entspricht, je mehr sich die aus den Messwerten  $x_i$  gebildete Verteilung der Normalverteilung annähert und je größer die Anzahl der Messwerte ist. Obwohl der Mittelwert  $\bar{x}$  nicht zwangsläufig gleich dem wahren Wert ist, kann man ein Intervall um  $\bar{x}$  herum angeben, in dem der wahre Wert mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit  $(1 - \alpha)$  liegt. Die Grenzen dieses Intervalls heißen *Vertrauensgrenzen*. Das Intervall ist der *Vertrauensbereich*, der sich aus dem *Vertrauensniveau*  $(1 - \alpha)$  (Angabe in %, siehe Tabelle I-3) ergibt.

- *Obere Vertrauensgrenze*  $\bar{x} + \frac{t}{\sqrt{n}} \cdot s$  (I.17a)

- *Untere Vertrauensgrenze*  $\bar{x} - \frac{t}{\sqrt{n}} \cdot s$  (I.17b)

$\bar{x}$  siehe Gleichung (I.7a),  $n$  Anzahl der Messungen,  $s$  Standardabweichung (Gleichung (I.8a)),  $t/\sqrt{n}$  siehe Tabelle I-3

**Tabelle I-3** Werte für  $t$  und  $t/\sqrt{n}$  für verschiedene Werte des Vertrauensniveaus  $(1 - \alpha)$

| Anzahl $n$ der Einzelmessungen | $(1 - \alpha) = 68,26\%$ |              | $(1 - \alpha) = 95\%$ |              | $(1 - \alpha) = 99,5\%$ |              |
|--------------------------------|--------------------------|--------------|-----------------------|--------------|-------------------------|--------------|
|                                | $t$                      | $t/\sqrt{n}$ | $t$                   | $t/\sqrt{n}$ | $t$                     | $t/\sqrt{n}$ |
| 2                              | 1,84                     | 1,30         | 12,71                 | 8,98         | 127,32                  | 90,03        |
| 5                              | 1,15                     | 0,51         | 2,78                  | 1,24         | 5,60                    | 2,50         |
| 10                             | 1,06                     | 0,34         | 2,26                  | 0,71         | 3,69                    | 1,17         |
| 30                             | 1,02                     | 0,19         | 2,05                  | 0,37         | 3,04                    | 0,56         |
| 100                            | 1,00                     | 0,10         | 1,98                  | 0,20         | 2,87                    | 0,29         |

**Tabelle I-4** Zu Beispiel I.12

| Messung Nr. | Spannung $U_i$<br>in V     | $(x_i - \bar{x})$<br>in V | $(x_i - \bar{x})^2$<br>in V              | $t$ für<br>$(1 - \alpha) = 95\%$ | $t/\sqrt{n}$ für<br>$(1 - \alpha) = 95\%$ |
|-------------|----------------------------|---------------------------|------------------------------------------|----------------------------------|-------------------------------------------|
| 1           | 100,2                      | 0,4                       | 0,16                                     | aus Tabelle I-3                  | aus Tabelle I-3                           |
| 2           | 100,4                      | 0,6                       | 0,36                                     |                                  |                                           |
| 3           | 99,3                       | -0,5                      | 0,25                                     |                                  |                                           |
| 4           | 99,0                       | -0,8                      | 0,64                                     |                                  |                                           |
| 5           | 100,1                      | 0,3                       | 0,09                                     |                                  |                                           |
|             | $\bar{x} = 99,8 \text{ V}$ | $\Sigma = 0$              | $\Sigma = 1,50$<br>$s = 0,612 \text{ V}$ | 2,78                             | 1,24                                      |

Tabelle I-3 zeigt Auszüge für  $t$  und  $t/\sqrt{n}$  nach DIN 1319 Teil 3.

■ **Beispiel I.12:** Eine Spannung wird fünfmal gemessen. Zu bestimmen sind die Vertrauensgrenzen für ein Vertrauensniveau von 95%. Das Messergebnis ist anzugeben.  
Daraus ergibt sich die obere Vertrauensgrenze zu:  $99,8 \text{ V} + 1,24 \cdot 0,612 \text{ V} = 99,8 \text{ V} + 0,759 \text{ V}$ ; die untere zu  $99,8 \text{ V} - 0,759 \text{ V}$ . Das Messergebnis für die Spannung lautet:  $99,8 \text{ V} \pm 0,759 \text{ V}$ .

## 8 Bearbeitung und Auswertung von Messwerten

Die Bearbeitung und Auswertung von Messwerten ist in der Regel rechenintensiv und wurde deshalb erst

durch den Einsatz von Rechnern in größerem Umfang möglich. In diesem Zusammenhang haben Begriffe wie

- Chi-Quadrat-Test,
- Quantile, Median,
- Regression,
- Splines und
- Klassierung

an Bedeutung gewonnen. Sie werden im Kapitel XI, PC-gestützte Messverfahren und Messsignalanalyse, dargestellt.

# II Analog anzeigende Messgeräte

## 1 Grundlagen

Die analog anzeigenden Messgeräte sind zum großen Teil von den digital anzeigenden abgelöst worden, weil letztere i.a. einen kleineren Messfehler und einen geringeren Eigenverbrauch besitzen und häufig Funktionen wie automatische Messbereichswahl, Speicherung von Messdaten und eine Schnittstelle zur Messdatenerfassung und -verarbeitung bieten. Die Analogmessgeräte sollen hier deshalb nur auszugsweise und kurz behandelt werden.

Die Wirkungsweise der im Folgenden vorgestellten Messgeräte beruht auf der Kraftwirkung auf einen stromdurchflossenen elektrischen Leiter im Magnetfeld:

$Kraft \quad \vec{F} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \quad \text{bzw.} \quad F = Q \cdot v \cdot B$   
für  $\vec{v} \perp \vec{B}; \quad \vec{F} \perp \vec{B}, \vec{v}$  (II.1)

$F$  Kraft in N,  $Q$  Ladung der den Leiter durchfließenden Elektronen in  $A \cdot s$ ,  $v$  Geschwindigkeit der Elektronen in m/s,  $B$  magnetische Flussdichte in  $V \cdot s/m^2$

Es wird vorausgesetzt, dass  $v$  und  $B$  senkrecht zueinander auftreten.  $F$  steht senkrecht auf  $v$  und  $B$ , die Richtung ergibt sich aus der „Rechten-Hand-Regel“. Benutzt man die zwei Beziehungen  $Q = I \cdot t$  und  $v = l/t$  für den Stromfluss in einem elektrischen Leiter und setzt beides in Gleichung (II.1) ein, folgt daraus eine Darstellung für die Kraft, die auch unter dem Namen *Lorentz-Kraft* bekannt ist:

*Lorentz-Kraft*  $F = B \cdot I \cdot l$  (II.2)

$l$  Spulenlänge,  $I$  Leiter- bzw. Spulenstrom in A,  $B$  magnetische Flussdichte in  $V \cdot s/m^2$

Auch hier gilt für die Richtungsbeziehung der Größen  $B$ ,  $I$  und  $F$  die „Rechte-Hand-Regel“. Die magnetische Flussdichte  $B$  kann durch einen Dauermagneten (Drehspulmesswerk), durch die stromdurchflossene Spule selbst (Drehisenmesswerk) oder durch eine zweite Spule (Prinzip des Elektromagneten wie beim Elektrodynamischen Messwerk) zur Verfügung gestellt werden.



Im Folgenden werden nur die *Messwerke*, also die den Ausschlag direkt erzeugenden Elemente, betrachtet. Gehäuse, Anschlussklemmen, Bereichsumschalter, Vor- und Nebenwiderstände zur Messbereichserweiterung und andere Bauteile, die das Messwerk zum Messgerät ergänzen, bleiben unberücksichtigt.

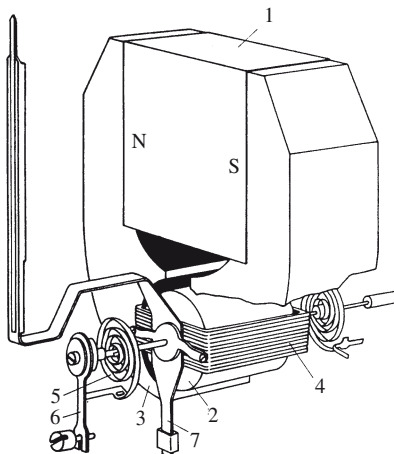
## 2 Drehspul-Messwerk

Den prinzipiellen Aufbau zeigt Bild II-1a. Eine drehbar gelagerte Spule befindet sich im Feld eines Dauermagneten. Abhängig von der Richtung des durchfließenden Stromes dreht sie sich gemäß der *Lorentz-Kraft* nach Gleichung (II.2) rechts oder links herum. Die Länge  $l$  ist die Spulenlänge „nach hinten“. Durch eine Rückstellfeder (Spiralfeder), die gleichzeitig als Stromzuführung dient, wird eine Gegenkraft erzeugt. Der Zeiger kommt zum Stillstand, wenn das elektrische Moment und das mechanische Moment der Feder im Gleichgewicht sind. Die Skalenteilung ist linear, da das elektrische Moment linear vom Strom  $I$  und das mechanische Moment linear vom Drehwinkel  $\alpha$  abhängt. Die Ausschlagrichtung hängt von der Stromrichtung ab (Gleichung II.2). Die für einen Zeigerausschlag erforderliche Leistung (Eigenverbrauch) ist sehr gering. So benötigt das Messwerk des Messinstrumentes „UM“ (AEG) für Vollausschlag einen Strom von  $10\ \mu\text{A}$  bei einer Spannung von  $60\ \text{mV}$ . Das entspricht einer Leistung von  $0,6\ \mu\text{W}$ .

Das Messwerk zeigt den arithmetischen Mittelwert (Gleichanteil) des fließenden Stromes an. Bei der

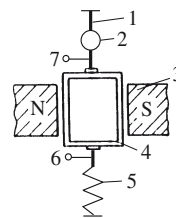
Messung von Wechselströmen führt das bei den häufig vorkommenden sinusförmigen Stromverläufen zu der Anzeige Null (Voraussetzung: Frequenz  $f \gg 1\ \text{Hz}$ , d.h., das Instrument kann wegen seiner Trägheit dem Momentanwert des Stroms nicht mehr folgen). Damit das Messwerk *überhaupt* einen Ausschlag zeigt, wird der Strom durch das Instrument (nicht der zu messende Laststrom) durch einen Einweg- oder Zweiweggleicher so in der Form geändert, dass der arithmetische Mittelwert nicht mehr Null ist. Bei Wechselströmen soll in der Regel der Effektivwert des Stromes gemessen werden, der im Allgemeinen nicht mit dem arithmetischen Mittelwert übereinstimmt. Damit die Anzeige des Stromes wenigstens für *sinusförmigen* Stromverlauf richtig ist, wird die Skala des Instrumentes entsprechend korrigiert. Für sinusförmigen Stromverlauf ist der Effektivwert  $I = \hat{i} / \sqrt{2}$ , der arithmetische Mittelwert bei Einweggleichrichtung  $\bar{i}_{\text{ew}} = \hat{i} / \pi$  bzw. bei Zweiweggleichrichtung  $\bar{i}_{\text{zw}} = 2 \cdot \hat{i} / \pi$ . Also wird die Skalenbeschriftung mit dem Wert  $I / \bar{i}$  multipliziert. Dieser Wert heißt *Kurvenformfaktor* oder kurz *Formfaktor* und beträgt für Sinusform bei Einweggleichrichtung  $\pi / 1,41 = 2,22$  bzw. bei Zweiweggleichrichtung  $\pi / (2 \cdot 1,41) = 1,11$ . Bei nicht sinusförmigem Stromverlauf ist das Verhältnis von Effektivwert zu arithmetischem Mittelwert nicht mehr gleich dem in die Skala eingearbeiteten Wert und damit der vom Instrument angezeigte Wert *falsch*!

Die Messung von Gleich- und Wechselspannungen geschieht über das Ohmsche Gesetz. Eine angelegte



- 1 Permanentmagnet
- 2 Weichenkern
- 3 Polschuhe
- 4 Drehspule
- 5 Spiralfeder und Stromzuführung
- 6 Nullpunkteinstellung
- 7 Äquilibrierarm

a)



- 1 Spannbänder
- 2 Spiegel
- 3 Dauermagnet
- 4 Spule mit Rahmen
- 5 Spannfeder
- 6, 7 Stromzuführung

b)

**Bild II-1**

- a) Drehspulmesswerk (H & B)
- b) Spiegelgalvanometer

Spannung verursacht bei bekanntem Messwerkwiderstand einen ihr proportionalen Strom.

Eine vor allem in der Präzisionsmesstechnik verwendete Sonderbauform ist das *Galvanometer*. Die Drehspule ist an einem dünnen Metallfaden mit rechteckigem Querschnitt befestigt, der einseitig fest eingespannt ist und am anderen Ende durch eine Feder gespannt wird, Bild II-1b. Damit tritt so gut wie keine Lagerreibung auf. Die Spule befindet sich auch hier im Feld eines Dauermagneten. Fließt ein Strom durch sie hindurch, dreht sie sich und tordiert (verdrillt) den Metallfaden. Dadurch entsteht die Rückstellkraft. An dem Metallfaden ist ein Spiegel angebracht (*Spiegelgalvanometer*), der sich mitdreht und dessen Drehwinkel proportional zum Spulenstrom ist. Über einen Lichtstrahl und Umlenkspiegel können so kleinste Ströme im nA-Bereich durch kleinste Winkelauslenkungen des Spiegels in großen Entfernungen (1 m bis 10 m) als bequem ablesbare Lichtmarkenauslenkungen gemessen werden.

Daten des Spiegelgalvanometers BSGe (Ruhstrat):

Ein Strom von 40 nA ergibt auf einer Skala in 25 cm Entfernung vom Spiegel eine Lichtstrahlauslenkung von 1 mm.

### 3 Dreheisen-Messwerk

Beim *Dreheisen-Messwerk* befinden sich nach Bild II-2 ein festes und ein drehbar gelagertes Metallblech im Feld einer vom Messstrom durchflossenen Spule. Die beiden Bleche werden magnetisiert und stoßen sich um so mehr ab, je größer der Strom ist. Die Kraft  $F$  ist proportional zu  $I^2$  (Prinzip „Elektromagnet“:  $F \sim B^2 \sim I^2$ ). Damit ist die Ausschlagrichtung des Zeigers nicht mehr von der Stromrichtung abhängig. Bei der Messung von Wechselströmen bildet das Instrument bei Frequenzen des Stromes  $\gg 1$  Hz wegen seiner Trägheit den Mittelwert aller quadrierten Momentanwerte, so dass der in Gleichung (1.14b) unter der Wurzel stehende Ausdruck gebildet und damit das Quadrat des Effektivwertes angezeigt wird. Durch eine entsprechende Formgebung der Bleche kann man erreichen, dass sich eine

näherungsweise lineare Skalenteilung für die Ableitung des Effektivwertes ergibt.

Theoretisch zeigt das Instrument den Effektivwert des Wechselstromes unabhängig von der Kurvenform an. In der Praxis dagegen wird der Messfehler bei der Messung von sinusförmigen Strömen mit Frequenzen oberhalb etwa (400 ... 1000) Hz durch die Induktivität der Spule und das Verhalten des Eisens mit steigender Frequenz größer. Deshalb ist bereits das Messen *nichtsinusförmiger* Ströme mit Frequenzen weit unterhalb (400 ... 1000) Hz mit erhöhten Messfehlern behaftet, weil die Oberschwingungsanteile oberhalb (400 ... 1000) Hz zunehmend unberücksichtigt bleiben und damit der gemessene Stromverlauf vom tatsächlichen Stromverlauf abweicht (Fourierzerlegung des nichtsinusförmigen Stromverlaufes).

Da das magnetische Feld durch eine Spule und nicht durch einen Dauermagneten erzeugt wird und vorwiegend in Luft verläuft, ist die Flussdichte und damit die Kraft für die Zeigerauslenkung relativ klein. Daraus folgt, dass die für Vollausschlag erforderliche Leistung um den Faktor 10.000 bis 1.000.000 größer ist als bei Drehspulmesswerken.

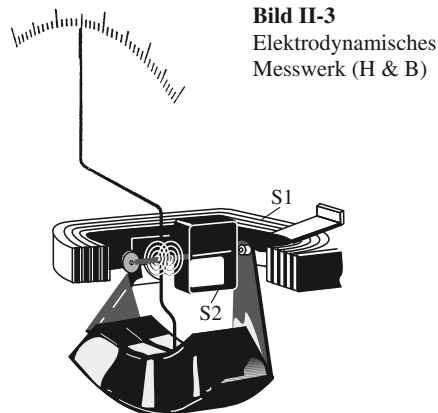
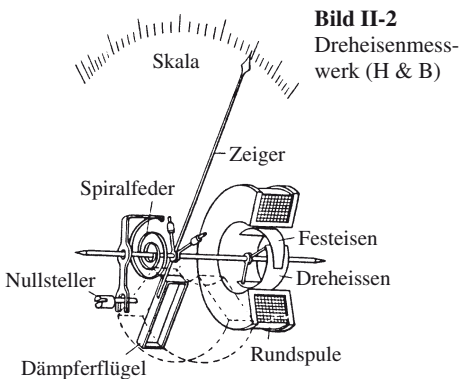
Daten eines Dreheisen-Messwerkes (A-V-Multizet):

Strom für Vollausschlag 60 mA; Innenwiderstand 100  $\Omega$ . Daraus errechnet sich die Leistung für Vollausschlag zu  $(60 \text{ mA})^2 \cdot (100 \Omega) = 360 \text{ mW}$ .

### 4 Elektrodynamisches Messwerk

Nach Bild II-3 besteht das *elektrodynamische Messwerk* aus einer feststehenden, vom Strom  $I_1$  durchflossenen Spule  $S_1$ , die die Flussdichte  $B_1$  erzeugt, und einer zweiten, drehbar gelagerten Spule  $S_2$ , die vom Strom  $I_2$  durchflossen wird. Es gilt:  $B_1 = k_1 \cdot I_1$ ;  $F = k_2 \cdot B_1 \cdot I_2$  (mit Gleichung II.2);  $F = k_1 \cdot k_2 \cdot I_1 \cdot I_2$  bzw.  $F = k_3 \cdot I_1 \cdot U_2$  mit  $U_2 = k_4 \cdot I_2$  ( $k_i$  Konstante).

Die Kraft oder das Moment des Zeigers ist proportional dem *Produkt* zweier Ströme, oder, wenn man einen der beiden Ströme proportional zu einer Spannung macht, dem *Produkt* aus Spannung und Strom. Darin liegt die große Bedeutung dieses Messwerkes.





Es wird hauptsächlich zur Leistungsmessung eingesetzt.

Die Wirkleistung  $P$  eines Verbrauchers berechnet sich bei sinusförmigen Spannungen und Strömen aus  $P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$ . Schickt man den Strom des Verbrauchers durch die feststehende Spule (größerer Querschnitt,  $I_1$  im Bereich 1 ... 10 A) und macht den Strom  $I_2$  proportional zur angelegten Spannung am Verbraucher, so zeigt das elektrodynamische Messwerk die Wirkleistung des Verbrauchers an. Das Messwerk muss aus den zugeführten Größen  $U$  und  $I$  das Moment für den Zeigerausschlag bilden. Damit wird der  $\cos \varphi$  automatisch berücksichtigt.

Die feststehende Spule bildet den *Strompfad*, die bewegliche den *Spannungspfad*. Die Ausschlagrichtung des Zeigers hängt von dem Anschluss der beiden Pfade zueinander ab; beim Ausschlag des Zeigers in die falsche Richtung (an den Anschlag links) müssen die zwei Anschlüsse *eines* der beiden Pfade vertauscht werden. Auch aus diesem Grund kennzeichnen die Hersteller je einen Anschluss beider Pfade mit einem Stern oder einem Pfeil. Weitere Einzelheiten hierzu sind bei der Leistungsmessung aufgeführt.

Die Messung der Wirkleistung bei *nichtsinusförmigem* Spannungs- und Stromverlauf ist nur bedingt

möglich. Hier gelten ähnliche Einschränkungen wie beim Dreheisenmesswerk.

Viele Hersteller haben für den Spannungspfad u.a. die Messbereiche 120 V, 240 V und 480 V vorgesehen; für den Strompfad die Messbereiche 5 A, 1 A. Für eine Messbereichserweiterung mit Spannungs- und Stromwandler sind in der Regel die Messbereiche 100 V und 5 A erforderlich. Weitere Einzelheiten hierzu folgen im Kapitel VI.7.4 „Messbereichserweiterung bei der Leistungsmessung“.

5 Symbole und Instrumentenbeschriftungen

In Tabelle II-1 ist ein Auszug aus DIN 43780 der auf Instrumenten aufgedruckten Symbole und Beschriftungen enthalten. Besonders wird auf das Symbol „Dreieck mit innenliegendem Ausrufungszeichen“ hingewiesen. Es bedeutet, dass in der Betriebsanleitung wichtige Hinweise zum Betrieb des Messgeräts enthalten sind!

So kann ein Messgerät zwar einen Messbereich 5000 V haben, aber die Prüfspannung zwischen den Anschlussklemmen und dem Gehäuse ist geringer.

Tabelle II-1 Beschriftungen auf Messinstrumenten (Auszug aus DIN 43780)

|                                                          |  |
|----------------------------------------------------------|--|
| Elektrodynamisches Meßwerk                               |  |
| Eisengeschlossenes, elektrodynamisches Meßwerk           |  |
| Elektrodynamisches Quotientenmeßwerk                     |  |
| Eisengeschlossenes, elektrodynamisches Quotientenmeßwerk |  |
| Induktions-Meßwerk                                       |  |
| Bimetall-Meßwerk                                         |  |
| Elektrostatisches Meßwerk                                |  |
| Vibrations-Meßwerk                                       |  |
| Thermoumformer allgemein                                 |  |
| Drehspul-Meßwerk mit Thermoumformer                      |  |
| Isolierter Thermoumformer                                |  |
| Gleichrichter                                            |  |
| Drehspul-Meßwerk mit Gleichrichter                       |  |

|                                                                                                                        |  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| Wechselstrominstrument                                                                                                 |  |
| Gleich- und Wechselstrominstrument                                                                                     |  |
| Drehstrominstrument mit einem Meßwerk                                                                                  |  |
| Drehstrominstrument mit zwei Meßwerken                                                                                 |  |
| Drehstrominstrument mit drei Meßwerken                                                                                 |  |
| Senkrechte Gebrauchslage                                                                                               |  |
| Waagrechte Gebrauchslage                                                                                               |  |
| Schräge Gebrauchslage mit Angabe des Neigungswinkels                                                                   |  |
| Zeignullstellvorrichtung                                                                                               |  |
| Prüfspannungszeichen:<br>die Ziffer im Stern bedeutet die Prüfspannung in kV<br>(Stern ohne Ziffer 500 V Prüfspannung) |  |
| Achtung<br>(Gebrauchsanweisung beachten)                                                                               |  |
| Instrument entspricht bezüglich<br>Prüfspannung nicht den Regeln                                                       |  |

## III Oszilloskop

### 1 Übersicht

Das Oszilloskop wird häufig eingesetzt, um den zeitlichen Verlauf von Spannungen sichtbar zu machen. Aus dem Spannungsverlauf lassen sich weitere Größen bestimmen. Auch Größen, die keine Spannungen sind, lassen sich darstellen, wenn man sie in proportionale Spannungen umwandelt. Als Beispiel soll die Darstellung von Stromverläufen genannt werden, die über einen bekannten ohmschen Widerstand in Spannungsverläufe überführt werden können, ohne dass sich der zeitliche Verlauf ändert. Der Widerstandswert ist dann der Proportionalitätsfaktor. Bei entsprechendem technischem Aufwand sind auch mehr als ein Signal gleichzeitig auf dem Display darstellbar (2-Kanal-, 4-Kanal-Oszilloskope).

Bei den Oszilloskopen lässt sich der Leistungsumfang grob so klassifizieren:

- Erfassen periodischer Signale mit Frequenzen von wenigen Hz bis (20 ... 50) MHz, ein bis maximal 2 Kanäle (Standardausführung)
- Erfassen periodischer Signale mit Frequenzen von Null bis (100 ... 500) MHz und Erfassen einmaliger Signale, häufig 4 Kanäle, 2 davon schaltbar als Differenzeingang, farbiges Display, weitere nachrüstbare oder eingebaute Optionen, wie weiter unten dargestellt („Luxusausführung“)
- Erfassen periodischer Signale mit Frequenzen bis zu etlichen GHz, Sampling-Oszilloskope (Spezialausführung)

### 2 Aufbau eines Oszilloskopes

Das Prinzipschaltbild eines Zweikanal-Oszilloskopes zeigt Bild III.1. Wesentliche Baugruppen sind die

folgenden Funktionseinheiten: Eingangsteiler-Verstärker, Triggerung, Analog-Digital-Umsetzer, Digitalspeicher (RAM), Multiplexer-Display-Ansteuerung, Farbdisplay. Eine Steuereinheit sorgt für den geordneten Ablauf der Vorgänge. Die Bezeichnungen sind häufig in englischer Sprache angegeben, manchmal kann man die Sprache der im Display eingeblendeten Bezeichnungen wählen und über die Bedienelemente auf dem Gehäuse eine Schablone in der unterstützten Sprache kleben.

- **Eingangskopplung:** Zunächst muss der Anwender einstellen, wie das darzustellende Signal in den Eingang des Oszilloskopes gelangen soll (Eingangskopplung):

- DC (Gleichgröße, **D**irect **C**urrent): Das Eingangssignal wird original in das Gerät eingespeist.
- AC (Wechselgröße; **A**lternating **C**urrent): Das Eingangssignal wird über einen in Reihe geschalteten Kondensator in das Gerät eingespeist. Damit wird der Gleichanteil (arithmetischer Mittelwert) des darzustellenden Signals zu Null erzwungen, übrig bleibt der Wechselanteil. Diese Betriebsart ist vorteilhaft, wenn z.B. einer Gleichspannung von +15 V eine Wechselspannung von einigen mV überlagert ist. Dann kann diese Wechselspannung z.B. mit einem Ablenkfaktor von 2 mV/Division „bildschirmfüllend“ dargestellt werden.
- GND: In dieser Schalterstellung (GROUND oder kurz GND) wird der Verstärkereingang intern auf den Wert 0 V gelegt (Masse, Ground, Bezugspotential, Gehäuse). Hier kann man erkennen, wo sich die Nulllinie des Eingangssig-

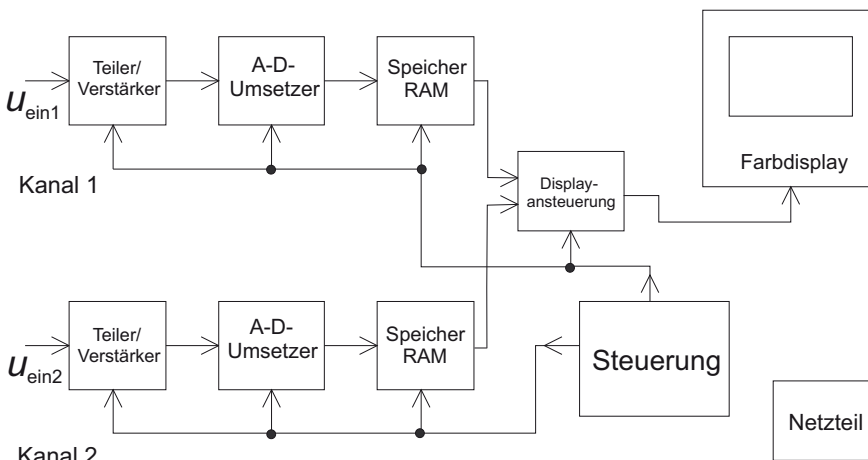


Bild III-1 Prinzipschaltbild eines Zweikanal-Oszilloskopes

nals befindet, siehe Einstellmöglichkeit *Position* weiter unten. Bei vielen Oszilloskopen wird die Nulllinie des Signals intern ermittelt und auf dem Display eingeblendet.

- **Eingangsteiler, Eingangsverstärker:** Der Eingangsteiler-Verstärker passt den Spannungsbereich des Eingangssignals (z.B.  $-24\text{ mV}$  bis  $+45\text{ mV}$  oder  $-56\text{ V}$  bis  $+12\text{ V}$ ) an den Spannungsbereich des Analog-Digital-Umsetzers (z.B.  $-1\text{ V}$  bis  $+1\text{ V}$ ) an, indem das Eingangssignal entsprechend verstärkt oder abgeschwächt wird. Der Wert der Abschwächung bzw. Verstärkung wird vom Anwender über Links-Rechts-Impulsschalter eingestellt. Das Display blendet den zugehörigen *Y-Ablenkoeffizienten* ein, der die Zuordnung zwischen der Amplitude der Eingangsspannung (in Volt) und der auf dem Schirm des Displays dargestellten Amplitude (in cm) festlegt. Er wird in  $\text{V/cm}$  oder in  $\text{V/DIV}$  (division, kurz DIV, Teilstich) angegeben und lässt sich häufig in den Stufen 1-2-5 von  $1\text{ mV/DIV}$  bis  $50\text{ V/DIV}$  fest einstellen. Damit ist eine direkte Zuordnung zwischen der Spannungsamplitude in V und der Darstellungslänge in cm möglich. Häufig ist auf dem Display ein Raster eingeblendet, oft im cm-Abstand. Um von der Rasterlänge unabhängig zu sein, wählt man die Angabe *V/Division*.

#### ● *Triggrung*

- Intern: Über einen Triggerbaustein kann der Anwender festlegen, bei welchem Spannungswert (z.B.  $+2,7\text{ V}$ , eingeblendet durch eine waagerechte farbige Linie) und welcher Steigung (z.B. positiv) die Signalaufzeichnung beginnen soll.
- Pretrigger: Häufig bietet die Triggerschaltung die Möglichkeit der *Pretriggerung*: Das Oszilloskop beginnt mit der Signalaufzeichnung bereits vor dem eingestellten Wert (Beispiel oben:  $2,7\text{ V}$ , positive Steigung), wobei die Vorlaufzeit einstellbar werden kann. Das hat den Vorteil, dass z.B. bei Rechtecksignalen, bei denen man gewöhnlicherweise auf die positive bzw. negative Flanke triggern muss, auch diese Flanke noch dargestellt werden kann. Andernfalls greifen Aufzeichnungsbeginn und Flanke ineinander, so dass der Beginn der Flanke nicht mehr ausreichend genau dargestellt werden kann.
- LINE: In der Regel ist für die Triggrung noch die Betriebsart LINE einstellbar. Das Gerät triggert selbsttätig auf die Netzwechselspannung. Diese Triggerart ist nützlich für die Energietechnik und für Untersuchungen bei Einkopplung von 50-Hz-Netzwechselgrößen in Signalkreise.
- AUTO: Das Oszilloskop legt die Triggerspannung selbsttätig fest, in der Regel bei  $0\text{ V}$ .
- EXTERN: Es gibt Signalverläufe, die sich innerhalb jeder Periode mehr oder weniger aus-

geprägt ändern. Das kann z.B. eine modulierte Trägerschwingung sein. Dann ist es erforderlich, ein geeignetes Triggersignal extern zu erzeugen.

- **Position:** Über ein Potentiometer mit der Bezeichnung *Position* (Y-Position oder kurz Y-POS) lässt sich das Oszillogramm auf dem Display in vertikaler Richtung verschieben. Bei mehreren Signalen auf dem Display kann man den Ablenkfaktor und die Verschiebung so vorwählen, dass sich alle Signale untereinander in der gewünschten Reihenfolge und ohne Überlappung darstellen lassen. Allerdings geht dabei die Information darüber verloren, wo sich der Spannungswert  $0\text{ V}$  bei den einzelnen Signalen befindet. Abhilfe schafft entweder die oben genannte Schalterstellung GND bei jedem Kanal oder es sind intern Schmitt-Trigger für jeden Kanal eingebaut, die den Wert  $0\text{ V}$  erkennen und ihn entsprechend links als kleinen Pfeil einblenden.

#### ● *Zeitachse (x-Achse)*

Hier gibt es drei Betriebsarten.

- (*x-t*)-Betrieb: Die Skalierung der *x*-Achse erfolgt linear in Zeitwerten. Angegeben wird ein Wert Zeit/Länge, wählbar von etwa  $10\text{ ns/DIV}$  bis  $10\text{ s/DIV}$  in den Abstufungen 1, 2, 5 innerhalb einer Dekade. Zu den Bezeichnungen gelten die gleichen Ausführungen wie unter dem Punkt „Eingangsteiler, Eingangsverstärker“ oben. Über einen Links-Rechts-Impulsschalter wird ein passender Wert eingestellt, der im Display eingeblendet wird. Intern bildet das Oszilloskop daraus die Zeitpunkte zur Bildung der Abtastwerte des A-D-Umsetzers für den Spannungswert der *y*-Achse. Damit gekoppelt ist die Zahl der auf dem Display dargestellten Perioden. Die Zeitpunkte für die Bildung der Abtastwerte liefert ein Frequenzgenerator, häufig in Form eines Zählers. Bei einem Ablenkfaktor von z.B.  $1\text{ ms/cm}$ , einer Displaybreite von  $10\text{ cm}$  und  $1000$  Abtastwerten pro waagrechtem (*x*-Achsen-)Durchlauf erhält der A-D-Umsetzer im Abstand von  $10\text{ }\mu\text{s}$  einen Umsetzbe-

$$\text{fehl: } \frac{1\text{ ms}}{\text{cm}} \cdot (10\text{ cm}) \cdot \frac{1}{1000} = 10\text{ }\mu\text{s}. \text{ Auf dem}$$

Display wird ein Zeitbereich von  $\frac{1\text{ ms}}{\text{cm}} \cdot (10\text{ cm}) = 10\text{ ms}$  abgebildet.

Die Abtastung und Speicherung der *y*-Amplitudenwerte geschieht periodisch, und durch die Triggrung ergeben sich i.a. zu gleichen Zeitpunkten auf der *x*-Achse auch gleiche *y*-Achsen-Werte.

- Single-Shot: Hiermit werden einmalige Vorgänge aufgezeichnet. Nach der Triggrung wird der Zeitbereich der *x*-Achse *einmal* durchlaufen und die zugehörigen Abtastwerte werden ge-

speichert. Ein erneutes Durchlaufen ist erst nach manuellem Rücksetzen und erneuter Triggierung möglich.

- (x-y)-Betrieb: Das Oszilloskop besitzt einen zusätzlichen Eingang für eine Spannung mit der Bezeichnung x-Eingang mit nachfolgendem Eingangsteiler-Eingangsverstärker und nachgeschaltetem A-D-Umsetzer. Der Umsetzer erhält die gleichen Umsetzimpulse wie der A-D-Umsetzer für die y-Achse. Jedem Spannungswert auf der x-Achse ist damit ein Spannungswert auf der y-Achse eindeutig zugeordnet, beide werden gespeichert. Man erhält damit die funktionale Abhängigkeit  $u_y = f(u_x)$ . Die Spannung  $u_x$  kann eine periodische Spannung mit z.B. sinusförmigem oder sägezahnförmigem Verlauf sein, sie kann aber auch ein einmaliger Vorgang sein, dann muss die Frequenz der Umsetzimpulse lediglich der Frequenz des Signals  $u_x$  angepasst werden.

Diese Betriebsart wird z.B. zur Darstellung einer Diodenkennlinie  $i_D = f(u_D)$  eingesetzt. Diode und (niederohmiger) Widerstand liegen in Reihe und werden von einer periodischen Spannung  $u_G$  (häufig Sinus- oder Sägezahnverlauf) mit einer Frequenz im Bereich (10 ... 1000) Hz gespeist. Die periodische Spannung gibt die Spannungswerte in x-Richtung vor, die Spannung am Widerstand, die dem Strom proportional ist, die zugeordneten Werte in y-Richtung.

- **Analog-Digital-Umsetzer:** Das in der Amplitude an den Analog-Digital-Umsetzer (A-D-Umsetzer) angepasste Signal wird digitalisiert, wobei die Abtastfrequenz vom Hersteller häufig so gewählt worden ist, dass für das dargestellte Signal 1000 Abtastwerte ergeben. Sie werden im Digitalspeicher (z.B. RAM) abgelegt, zusammen mit dem Zeitmaßstab und weiteren Kenngrößen. Bei Mehrkanaloszilloskopen erhält entweder jeder Kanal seinen eigenen A-D-Umsetzer mit zugehörigem Digitalspeicher, oder es stehen nur *ein* D-A-Umsetzer und *ein* Digitalspeicher zur Verfügung, die im Zeitmultiplexverfahren (siehe Kapitel IX, Mehrfachübertragung – Multiplexverfahren) den einzelnen Kanälen nacheinander zugeordnet werden. Das beschriebene erste Verfahren ist kostenintensiver, ermöglicht aber mehr Umsetzungen pro Zeiteinheit als das zweite. Die Grenzfrequenz des Oszilloskopes hängt entscheidend von der Zahl der Umsetzungen pro Sekunde des A-D-Umsetzers ab. Es besteht folgender prinzipieller Zusammenhang: Eine Grenzfrequenz des Oszilloskopes von 100 MHz erfordert eine Abtastfrequenz von etwas mehr als 200 MHz (Shannon, siehe Signal- und Systemtheorie, VIII Abtasttheorem), womit sich ein sinusförmiger Spannungsverlauf mit der Frequenz 100 MHz auf dem Display

darstellen lässt. Soll dagegen ein unbekannter Signalverlauf mit der bekannten Frequenz 100 MHz einigermaßen originalgetreu dargestellt werden, sind erfahrungsgemäß alle Frequenzanteile bis zur 20. Harmonischen einschließlich zu erfassen, was eine Abtastfrequenz von etwas mehr als 4 GHz erfordert (2 GHz ist dann die erforderliche Grenzfrequenz des Oszilloskopes). Ein weiteres Kriterium für die Auswahl eines A-D-Umsetzers ist die bit-Zahl, mit der der digitalisierte Analogwert erfasst wird. Für die Darstellung auf dem Display (häufig 10 cm breit, 10 cm hoch) ist eine Umsetzung in einen mit 8 bit kodierten Wert durchaus ausreichend. Das ergibt einen Quantisierungsfehler von  $\pm 0,125\%$ . Sollen aber weitere Berechnungen (siehe „Mathematik-Option“ weiter unten) durchgeführt werden, kann ein A-D-Umsetzer mit einer höheren bit-Zahl erforderlich werden, was sich im Preis niederschlägt. Die A-D-Umsetzer sind demnach ein wesentlicher Kostenfaktor der Oszilloskope.

- **Weiterverarbeitung:** Die im Digitalspeicher oder in den Digitalspeichern abgelegten Werte können ausgelesen, in eine zur Anzeige geordnete Form gebracht, ev. weiter aufbereitet, mit Zusatzinformationen versehen (Einblendung Cursor, Ablenkfaktoren, Triggerwerten, ...) und dann dem Display zugeführt werden. Über Zusatzelektronik können die Digitalwerte auch z.B. über einen Netzwerkanschluss (LAN) in ein Netz eingespeist, abgerufen, weiterverarbeitet oder auch ausgedruckt werden. Hier bewährt sich die Maßnahme, dass zu jedem Oszillogramm auch die Kenndaten eingeblendet werden. Häufig können die Daten auch über einen USB-Anschluss auf einen Speicher-Stick übertragen werden.
- **Zusatzoptionen:** Die folgenden Optionen sind häufig insgesamt oder teilweise in die Oszilloskope der „Luxusausführung“ (s.o.) integriert:
  - **Mathematik-Option:** In das Gerät ist ein Rechner integriert. Damit lassen sich von dem aufgezeichneten Spannungsverlauf beispielsweise Kenngrößen wie Scheitelwert, Frequenz, arithmetischer Mittelwert und Effektivwert berechnen, statistische Kenngrößen und die Darstellung durch mathematische Funktion und ähnliches ermitteln und selbstdefinierte Berechnungen durchführen.
  - **Farbige Displays:** Es werden häufig LCD-Anzeigeeinheiten verwendet, wie sie auch bei Rechner-Bildschirmen verwendet werden. Bei den Mehrkanal-Oszilloskopen werden die Spannungsverläufe der einzelnen Kanäle farbig dargestellt, um die Übersichtlichkeit zu erhöhen. In das Schirmbild werden Amplituden, Ablenkfaktoren, Datum, Zeit, Triggerpegel, Nulllinien, Eingangskopplung usw. für die einzelnen Kanäle oder insgesamt ebenfalls in Farbe eingeblendet.

- LAN-Anschlüsse: Zur Dokumentierung (Papierausdruck), Weiterverarbeitung, Speicherung und Versendung an andere Personen steht ein Netzwerkanschluss (LAN) zur Verfügung. Wegen seiner universellen und einfachen Verwendbarkeit hat er die Datenübertragung über spezielle Messdatenbussysteme teilweise abgelöst.
- Cursorreinblendung: Mehrere Cursor für die Zeitachse (x-Achse) und die Spannungsamplitudenachse (y-Achse) ermöglichen das direkte Ablesen von Zeit- und Zeitdifferenz-Werten sowie Amplituden- und Amplitudendifferenz-Werten.
- Tastkopf-Erkennung: Der Anschluss eines Tastkopfes bietet Vorteile (siehe weiter unten), hat aber den Nebeneffekt, dass die Spannung am Eingang des Oszilloskopes nur noch 1/10 oder 1/100 der tatsächlichen Spannung am Tastkopfeingang beträgt. Dieser verringerte Wert wird auch auf dem Schirm eingeblendet, was zu Fehlinterpretationen führen kann. Es gibt Tastköpfe mit einem Zusatzkontakt, der dem Oszilloskop (sofern dafür eingerichtet) den Teilungsfaktor mitteilt und das daraufhin die Werteeinblendung entsprechend korrigiert.
- Differenzverstärker: Alle Signaleingänge eines Oszilloskopes haben einen gemeinsamen Bezugspunkt (Masse, Gehäuse, Abschirmung). Soll eine Spannung dargestellt werden, die keinen direkten Anschluss an diesem Bezugspunkt hat, wendet man Differenzverstärker an, siehe unten. Voraussetzung ist mindestens ein 2-Kanal-Oszilloskop, bei dem dann diese 2 Eingänge ihre Spannungswerte voneinander subtrahieren. Schaltungstechnisch erfordert diese Verstärker-Betriebsart einen erhöhten Aufwand.
- Automatische Einstellung: Das Oszilloskop analysiert das anliegende Eingangssignal und stellt selbsttätig Amplituden- und Zeit-Ablenkfaktoren, Triggerschwelle und weitere Größen so ein, dass das Eingangssignal in der Regel nahezu optimal auf dem Schirm dargestellt wird. Diese Option ist hilfreich, wenn der Anwender Probleme mit der Einstellung des Gerätes hat. Der Leistungsumfang der Oszilloskope erfordert meist eine sehr intensive und damit lang andauernde Beschäftigung mit dem Gerät!

- **Netzteil:** Das Netzteil versorgt die Baugruppen mit Spannung und sorgt für die galvanische Trennung des Oszilloskopes vom 230-V-Energieversorgungsnetz. Es ist als Schaltnetzteil ausgelegt, das einen hohen Wirkungsgrad aufweist.

### 3 Zusatzeinrichtungen

- **Differenzverstärker:** Beim Einsatz von Mehrkanal-Oszilloskopen haben alle Eingangsspannun-

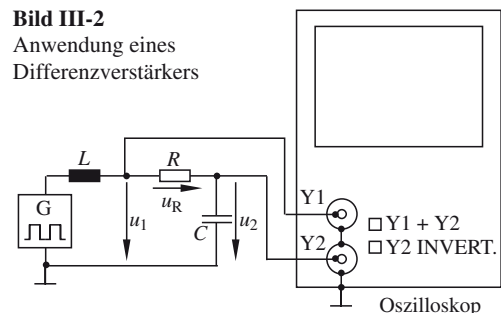
gen das Gehäuse des Oszilloskopes als gemeinsames Bezugspotential. Ein Oszilloskop mit Differenzverstärker-Eingang (-Eingängen) ist prinzipiell ein Mehrkanal-Oszilloskop, bei dem jeweils 2 Kanäle in geeigneter Weise zusammengeschaltet werden. Die Kanäle CH 1 (Channel 1) und CH 2 (Channel 2) haben einen gemeinsamen Wahlschalter mit den Stellungen SINGLE/ADD. Einer oder beide Kanäle haben außerdem einen Wahlschalter mit den Stellungen NORM/INV (Normal/Invertiert). In der Stellung SINGLE werden beide Kanäle unabhängig voneinander verwendet, das Gerät arbeitet als Zweikanal-Oszilloskop. In der Schalterstellung INV wird das dargestellte Signal invertiert. In der Schalterstellung ADD werden CH 1 und CH 2 so verknüpft, dass die an den beiden Eingängen anliegenden Signale addiert werden. Stellt man den Schalter bei CH 2 auf INV, wird das Signal an CH 2 vom Signal an CH 1 subtrahiert. Damit lassen sich auch Signalverläufe darstellen, die keinen gemeinsamen Bezugspunkt, also eine gemeinsame Gleichtaktspannung, haben. Wichtig bei Messungen mit Differenzverstärker-Eingang ist die vom Hersteller angegebene maximal zulässige Gleichtaktspannung (COMMON-MODE-VOLTAGE).

In Bild III-2 soll die Spannung am Widerstand  $R$  dargestellt werden, wobei die Spannungsquelle und das Oszilloskop ein gemeinsames Bezugspotential (Masse, Gehäuse) haben, das nicht am Widerstand liegt. Die beiden Anschlüsse des Widerstandes werden mit den Eingängen CHANNEL 1 und CHANNEL 2 verbunden, die Betriebsweise wird auf ADD eingestellt und CHANNEL 2 invertiert. Dann bildet das Oszilloskop intern

$$u_1 + (-u_2) = u_R \quad (\text{III.3})$$

und stellt damit die Spannung am Widerstand  $R$  dar.

**Bild III-2**  
Anwendung eines  
Differenzverstärkers



- **Sampling-Oszilloskope:** Sampling-Oszilloskope werden dort eingesetzt, wo die Darstellung des Signals nicht mehr in Echtzeit erfolgen kann, also bei Signalfrequenzen oberhalb etwa 1000 MHz.



Das Prinzip ist in Bild III-3 gezeigt. Das Signal wird abgetastet, und zwar mit Abtastimpulsen, deren Dauer  $t_p$  möglichst klein und deren zeitlicher Abstand  $t_a$  nur wenig größer ( $\Delta t$ ) als die Periodendauer  $t_s$  des darzustellenden Signals ist ( $t_a = t_s + \Delta t$ ). Die Momentanwerte der Spannungen gelangen auf ein *Abtast-Halte-Glied*, an dem ein formtreues Abbild des Originalsignals mit geringerer Frequenz dargestellt wird und das dann auf dem Schirm angezeigt wird.

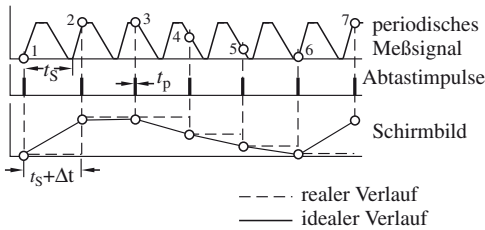


**Bild III-3** Prinzip des Sampling-Oszilloskopes

In der Praxis kann der zeitliche Abstand zweier Abtastimpulse auch so gewählt werden, dass die Periodendauer  $t_s$  zwischen zwei Abtastzeitpunkten mehrmals vergangen ist:  $t_a = n \cdot t_s + \Delta t$  mit  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Diese Betriebsart erfordert eine weniger kurze Abtastdauer  $t_p$ , dafür dauert ein Bildaufbau entsprechend länger.

- **Kalibrier-Spannungsquelle:** An einer zusätzlichen Anschlussbuchse mit der Bezeichnung CAL OUT kann in der Regel ein Rechtecksignal mit kalibrierter Amplitude, Tastgrad und Periodendauer entnommen werden. Häufig handelt es sich um ein symmetrisch zur Nulllinie gelegenes Rechtecksignal mit der Amplitude  $\pm 1$  V, einem Tastgrad 1:2 und der Frequenz 1 kHz. Damit kann, wenigstens teilweise, die Funktionstüchtigkeit des Y- und X-Verstärkers kontrolliert werden. Daneben dient dieses Signal auch zur Kalibrierung von *Tastköpfen*.

- **Tastköpfe:** Der Eingang eines Oszilloskopes stellt für die ihn speisende Quelle eine Last von etwa  $1 \text{ M}\Omega$  ( $R_e$ ) parallel zu etwa  $50 \text{ pF}$  ( $C_e$ ) dar (Bild III-4a). Aus Gründen der Störunterdrückung werden die darzustellenden Signale dem Oszilloskopeingang über abgeschirmte Kabel, meist Koaxialkabel mit einem Wellenwiderstand von  $(50 \dots 75) \Omega$ , zugeführt. Diese haben eine Kapazität von etwa  $(50 \dots 100) \text{ pF}$  pro Meter ( $C_L/m$ ). Selbst wenn man die Induktivität und die ohmschen Widerstände des Kabels vernachlässigt, bilden Leitungskapazität  $C_L$  und Eingangskapazität  $C_e$  mit dem Innenwiderstand  $R_i$  der Signalquelle einen Tiefpass.

Das Verhältnis der Spannungen  $U_e/U_s$  berechnet sich für sinusförmige Spannungen mit  $C = C_e + C_L$  zu:

$$\begin{aligned} \frac{U_e}{U_s} &= \frac{\frac{1}{j\omega C} \cdot R_e}{\frac{1}{j\omega C} + R_e} = \frac{1}{1 + R_i \cdot \frac{1}{j\omega C} + R_e} \\ &= \frac{1}{1 + R_i \cdot \frac{1 + R_e j\omega C}{R_e}} = \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R_e} + R_i \cdot j\omega C} \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

$$\frac{U_e}{U_s} \approx \frac{1}{1 + R_i \cdot j\omega C}$$

$R_e$  wird mit  $1 \text{ M}\Omega$  und  $R_i$  mit  $50 \Omega$  angenommen; damit ist der Summand  $R_i/R_e$  im Nenner vernachlässigbar. Die Grenzfrequenz  $f_g$  ergibt sich, wenn Imaginär- und Realteil im Nenner von Gleichung (III.4) gleich sind:  $1 = \omega_g \cdot C \cdot R_i$  und daraus

$$f_g = 1/(2 \cdot \pi \cdot C \cdot R_i) \quad \text{mit} \quad C = C_L + C_e \quad (\text{III.5})$$

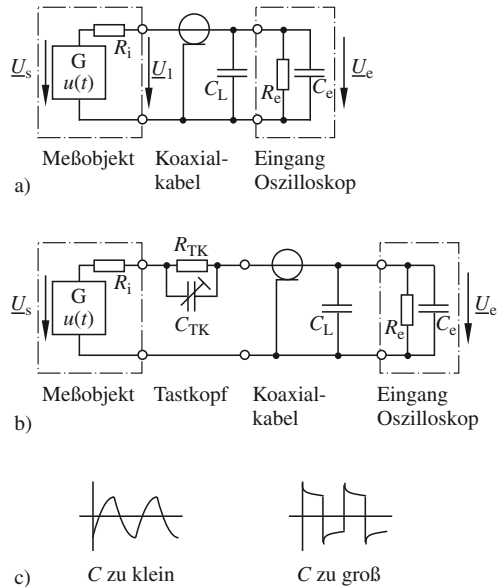


**Bild III-4** Tastkopf.

- a) Oszilloskop mit Signalquelle und Kabel
- b) zusätzlich mit Tastkopf
- c) dargestellte Signal bei Tastkopfabgleich

■ **Beispiel III.1:** Ein Koaxialkabel von  $2 \text{ m}$  Länge und einer Kapazität von  $50 \text{ pF/m}$  ( $C_L = 2 \text{ m} \cdot 50 \text{ pF/m} = 100 \text{ pF}$ ), eine Oszilloskop-Eingangskapazität von  $50 \text{ pF}$  und ein Signalquellen-Innenwiderstand von  $50 \Omega$  führen zu einer Grenzfrequenz nach Gleichung (III.5) von etwa  $21,2 \text{ MHz}$ . Nimmt man an, dass bei nichtsinusförmigen Signalen mindestens noch die 10. Harmonische gemäß Fourierzerlegung erfasst werden muß, werden Signale mit Frequenzen oberhalb etwa  $2,2 \text{ MHz}$  bereits mehr oder weniger verfälscht dargestellt.

Um diese Probleme zu umgehen, hat man die *Tastköpfe* entwickelt, deren interner Aufbau in Bild III-4b dargestellt ist. Der Kondensator  $C_{TK}$  ist von außen einstellbar und liegt parallel zu  $R_{TK}$ .  $R_{TK}$  mit  $C_{TK}$  und  $C = C_L + C_e$  mit  $R_e$  bilden einen Spannungsteiler. Damit ist das Spannungsverhältnis:

$$\frac{U_e}{U_I} = \frac{\frac{1}{j\omega C} \cdot R_e}{\frac{1}{j\omega C} + R_e} = \frac{1}{1 + \frac{1 + j\omega R_e C}{j\omega R_{TK} C_{TK}}} = \frac{1}{\frac{1}{j\omega C} + R_e + R_{TK} + \frac{1}{j\omega C_{TK}}} \quad (III.4)$$

Dieses Verhältnis wird frequenzunabhängig, wenn gilt:

$$R_{TK} \cdot C_{TK} = R_e \cdot C \quad (III.7)$$

Damit wird die Signalform eines *beliebigen* Eingangssignals nicht verändert, denn gemäß Fourierzerlegung dieses Signals werden *alle* vorkommenden Frequenzanteile um den gleichen Faktor herabgesetzt.

Da  $C$  in der Regel größer als 100 pF ist und  $C_{TK}$  als einstellbare Kapazität maximal etwa 30 pF gemacht

werden kann, wird  $R_{TK}$  größer als  $R_e$  gewählt. Es werden Tastköpfe mit *Teilverhältnissen* 10:1 und 100:1 angeboten.

- **Hinweise:**

Korrekterweise müsste für die *Teiler* der Wert 1:10 oder 1:100 angegeben werden, es wird aber der Kehrwert genommen.

Der am Oszilloskop eingestellte Y-Ablenkkoeffizient ist durch die Teilung mit dem Tastkopf nicht mehr gültig. Einige Oszilloskope erkennen den Anschluss eines Tastkopfes und geben eine entsprechende Mitteilung aus oder blenden den korrigierten Wert in die Anzeige oder den Schirm ein.

Beim Einsatz von Tastköpfen erhöht sich der Eingangswiderstand auf den Wert  $R_e + R_{TK}$ , während sich die Kapazität durch die Reihenschaltung von  $C_{TK}$  und  $(C_L + C_e)$  verringert ( $C_{TK} < C_L, C_e$ ).

Damit die Bedingung aus Gleichung (III.7) für unterschiedliche Werte  $R_e$  und  $C_e$  von Oszilloskop-Eingängen mit dem jeweiligen Tastkopf erfüllt werden kann, schließt man an den Eingang des Tastkopfes die oben beschriebene Kalibrier-Spannungsquelle an und gleicht mit dem einstellbaren Kondensator das Bild auf dem Oszilloskopschirm auf ein Rechteck ab. Ist die Bedingung nach Gleichung (III.7) *nicht* erfüllt, ergeben sich Signalverläufe, wie sie in Bild III.4c dargestellt sind.

## IV Schreibende Messgeräte

Die schreibenden Messgeräte werden hauptsächlich eingesetzt, um Vorgänge aufzuzeichnen und zu dokumentieren, die sich im Minuten- und Stunden-Bereich abspielen. Sie sind weitgehend durch Oszilloskope oder elektronische Geräte ähnlich einem Oszilloskop ersetzt worden, die entsprechend für Langzeitaufnahmen ausgelegt sind. Der Vorteil dieser Geräte gegenüber den schreibenden Messgeräten ist der, dass die Daten dauerhaft gespeichert sind, einschließlich der notwendigen Kenngrößen wie Zeitmaßstab, Amplitude, Datum, Aufzeichnungsgerät usw., und sich in dieser Form beliebig oft ausdrucken und vor allem direkt weiterverarbeiten lassen. Weiterhin entfallen die Probleme mit der Mechanik, dem Papier und den Schreibstiften. Deshalb folgt hier eine nur kurze Darstellung der Geräte.

### 1 Betriebsarten

Schreibende Messgeräte haben, wie ein Oszilloskop, die (y-t)- und die (x-y)-Betriebsart.

(y-t)-Betriebsart: Ein Schreibstift wird in y-Richtung proportional zur darzustellenden Spannung  $u$  von der Ruhelage in der Mitte (0 V) nach hinten ( $u > 0$ ) oder

nach vorn ( $u < 0$ ) ausgelenkt. Unter ihm wird ein Papierstreifen von in der Regel 20 cm oder 30 cm Höhe (für die y-Auslenkung) und einer Länge ab 10 m bis 100 m mit konstantem einstellbarem Vorschub von einer Rolle links ab- und auf eine zweite Rolle rechts wieder aufgewickelt (x-Richtung, Zeitmaßstab bzw. Geschwindigkeit, z.B. 1 cm/min). Dazu werden meist Schrittmotoren eingesetzt. Die Rollen haben einen Abstand von ebenfalls 20 cm oder 30 cm, was für diese Betriebsart aber ohne Bedeutung ist. Der Schreibstift zeichnet den Spannungsverlauf auf dem vorbeiziehenden Papier und damit als Funktion der Zeit auf. Es kann sich um periodische oder einmalige Signale handeln. Die Aufzeichnungsdauer wird begrenzt durch die Vorschubgeschwindigkeit (den Zeitmaßstab) und die Länge der Papierrolle. Die Frequenz des Signals sollte unter etwa 5 Hz liegen, weil der Schreibstift als bewegtes mechanisches Gebilde wegen seiner Massenträgheit diesen Wert vorgibt. Der Einsatz mehrerer farbiger Stifte bei Mehrkanalschreibern ist möglich, aber aufwändig.

(x-y)-Betriebsart: Hierbei wird das Papier nicht bewegt, es kann auch ein Papierblatt von 20 cm mal 20 cm oder 30 cm mal 30 cm auf den Schreiber fest

aufgelegt werden. Es wird ein zusätzlicher Kanal benötigt, der für die Auslenkung des Schreibstiftes in  $x$ -Richtung sorgt. Der andere, bereits vorhandene Kanal sorgt, wie bei der  $(y-t)$ -Betriebsart, wiederum für die Auslenkung in  $y$ -Richtung. Damit erhält man die Darstellung  $u_y = f(u_x)$ , wie beim Oszilloskop. Die zwei Kanäle sind in ihren Eigenschaften und Einstellmöglichkeiten denen beim Oszilloskop sehr ähnlich (-AC, -DC, -GND, Eingangsteiler, Eingangsverstärker, Position, Vorschubgeschwindigkeit beim Schreiber (cm/min) entspricht dem Kehrwert der  $x$ -Achsen-Skalierung beim Oszilloskop (ms/cm)).

2 Schreibstiftauslenkung

Die Umsetzung der Ausgangsspannung des Y-Verstärkers allgemein und des X-Verstärkers in der  $x$ - $y$ -Betriebsart in eine Schreibstiftauslenkung erfolgt im wesentlichen auf zwei Arten:

- *Direkte Auslenkung:* Das Prinzip lässt sich an einem Drehspulmesswerk zeigen (Bild II-1, Kapitel II.2). Die Verstärker-Ausgangsspannung wird an die Drehspule angeschlossen, verursacht einen proportionalen Strom und damit eine proportionale Zeigerauslenkung. An der Spitze des Zeigers ist der Schreibstift befestigt, der auf dem darunter vorbeilaufenden Papier den Momentanwert der Spannung markiert.

- *Kompensationsverfahren:* Der Schreibstift kann durch eine Schlittenführung über einen Elektromotor und einen Seilzug in  $Y$ -Richtung über das Papier geführt werden. An der Schlittenführung ist in voller Papierbreite eine Potentiometerbahn befestigt. Am Schreibstift sitzt der Schleifer dieses Potentiometers, so dass der abgegriffene Spannungswert der Stellung des Schreibstiftes proportional ist. Das Ausgangssignal des  $Y$ -Verstärkers und der am Potentiometer abgegriffene Spannungswert werden einem Differenzverstärker zugeführt. Ist die Differenz nicht Null, wird der Schreibstift über den Elektromotor entsprechend verstellt, bis die Differenz zu Null geworden ist. Dann hat der Schreibstift seine Sollstellung erreicht.

Der Vorteil dieses Verfahrens gegenüber dem der direkten Auslenkung liegt zum einen in einer höheren Grenzfrequenz, da das Erreichen der Sollstellung des Schreibstiftes mit relativ großer Leistung über den Elektromotor erfolgen kann. Zum anderen ist es mit einem kleineren Fehler behaftet, weil kleine Abweichungen von der Sollstellung, z.B. durch Reibung des Stiftes auf dem Papier, vom Kompensationsverfahren erkannt und korrigiert werden; bei der direkten Auslenkung fehlt diese Rückmeldung.

Für die Auslenkung des Schreibstiftes zusätzlich in  $X$ -Richtung wird ebenfalls bevorzugt das Kompensationsverfahren eingesetzt.

V Digital anzeigende Messgeräte

Die im Kapitel II behandelten analog anzeigenden Messgeräte werden zunehmend durch digital anzeigende Geräte ergänzt oder ersetzt. In der Tabelle V-1 sind einige Vorteile beider Verfahren einander gegenübergestellt.

1 Digitalvoltmeter

Digital anzeigende Messgeräte haben in der Regel einen Analog-Digital-Umsetzer für Gleichspannungen eingebaut. Für diese Umsetzer werden, je nach

Tabelle V-1 Vorteile von analog und digital anzeigenden Messgeräten

| Analog anzeigende Messgeräte                                                               | Digital anzeigende Messgeräte                                                                     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Meist keine Hilfsenergie (Batterie) erforderlich                                           | Geringer Messfehler, vor allem bei Gleichspannungsmessung ( $ f  < 10^{-3}$ )                     |
| Tendenzen/Änderungen leicht erkennbar (einfacher Abgleich auf Extremwert)                  | Hoher Instrumenten-Innenwiderstand bei Spannungsmessung (10 MΩ bis 100 GΩ)                        |
| Erfassen mehrerer Messwerte gleichzeitig (Flugzeugkanzel, Leitzentrale in Kernkraftwerken) | Einfache Messwert-Speicherung und -Weiterverarbeitung                                             |
|                                                                                            | Mehrere Messungen (10 bis 1000) pro Sekunde möglich                                               |
|                                                                                            | Erweiterung zu Multimetern (Messung von Widerständen, Frequenzen, Kapazitäten, Temperaturen, ...) |

Um die Vorteile beider Verfahren zu kombinieren, werden digital anzeigende Messgeräte mit einer zusätzlichen Balkenanzeige mit bis zu 100 Einzelelementen gefertigt. Auf diese Weise wird eine quasi-analoge Anzeige nachgebildet.

messtechnischer Anforderung, unterschiedliche Verfahren verwendet. So sind diejenigen nach dem Prinzip des *Mehrrampenverfahrens* besonders für die Präzisionsmesstechnik geeignet, da sie mit maximalen relativen Messfehlern im Bereich  $\pm 10^{-3}$  bis  $\pm 10^{-6}$



behaftet sind. Allerdings benötigen sie für einen Messzyklus Zeiten zwischen 0,1 s (Fehler ca.  $\pm 10^{-3}$ ) und 10 s (Fehler ca.  $\pm 10^{-6}$ ). Für Fehler  $\geq |\pm 10^{-5}|$  werden diese Umsetzer als Integrierte Bausteine gefertigt und haben häufig einen Eingangs-Spannungsbereich von 0 bis  $\pm 200$  mV oder 0 bis  $\pm 2$  V. Maximale Fehler und Stellenzahl der Anzeige werden in der Regel einander angepasst, so dass die Anzeige dann den Wertebereich von 0 bis  $\pm 1999$  (Fehler ca.  $\pm 10^{-3}$ ), 0 bis  $\pm 19999$  (Fehler ca.  $\pm 10^{-4}$ ) oder 0 bis  $\pm 199999$  (Fehler ca.  $\pm 10^{-5}$ ) erfasst. Im ersten Fall spricht man von einer  $3\frac{1}{2}$ -stelligen Anzeige, und entsprechend für die anderen Fälle von  $4\frac{1}{2}$ - oder  $5\frac{1}{2}$ -stelliger Anzeige. In die Anzeige muss ein Komma eingefügt werden, wenn der angezeigte Zahlenwert der Spannung in Volt entsprechen soll. Daneben gibt es auch Digitalvoltmeterbausteine mit  $3\frac{3}{4}$ -,  $4\frac{3}{4}$ - oder  $5\frac{3}{4}$ -stelliger Anzeige mit einem Wertebereich von 0 bis  $\pm 3999$ , 0 bis  $\pm 39999$  oder 0 bis  $\pm 399999$ .

Zur Messung von Wechselspannungen werden zwei Verfahren eingesetzt:

- a) Die zu messende Spannung wird gleichgerichtet und dann deren Scheitelwert gemessen. Anschließend wird dieser Wert durch 1,41 geteilt und angezeigt. Da aber nur für sinusförmigen Spannungsverlauf der Faktor 1,41 zwischen Effektivwert und Scheitelwert besteht, ist die Messung von Wechselspannungen auf diesen Signalverlauf beschränkt. Man findet dieses Verfahren häufig bei den Digitalvoltmetern mit  $3\frac{1}{2}$ - oder  $3\frac{3}{4}$ -stelliger Anzeige, seltener bei denen mit  $4\frac{1}{2}$ - oder  $4\frac{3}{4}$ -stelliger Anzeige.
- b) Der Effektivwert wird tatsächlich gemessen. Das geschieht wiederum nach zwei Verfahren:
- b1) Der *analoge* Spannungsverlauf wird quadriert, dann über eine Periode integriert, auf diese Periode bezogen, aus dem so erhaltenen Wert die Wurzel gezogen und dann angezeigt. Damit wird die mathematische Darstellung des Effektivwertes schaltungstechnisch realisiert:

$$\text{Effektivwert } U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \{u(t)\}^2 dt} \quad (\text{V.1})$$

- b2) Der analoge Spannungsverlauf wird pro Periode 100mal oder mehr abgetastet und über einen Analog-Digital-Umsetzer in Digitalwerte umgesetzt. Diese digital kodierten Spannungswerte werden dann, um Gleichung (V.1) zu erfüllen, quadriert, die Werte einer Periode summiert, durch die Anzahl der Werte geteilt, aus dem so erhaltenen Wert die Wurzel gezogen und angezeigt. Da hier Umsetzer mit einer Umsetzzeit verwendet werden müssen, die sich aus der Periodendauer der Wechselspannung, geteilt durch die Zahl der Abtastwerte pro Periode, ergibt, kommen nur Umsetzer nach dem *Flash-Verfahren* in Frage. Diese haben Umsetzzeiten im Bereich von einigen Mikrosekunden oder weni-

ger, die erreichten relativen Fehler liegen häufig bei  $> |\pm 10^{-3}|$ . Bedingt durch die zusätzlichen mathematischen Operationen nach Gleichung (V.1) haben Digitalvoltmeter in den Gleichspannungsmessbereichen kleinere Fehler als in den Wechselspannungsmessbereichen.

Die Messbereiche Integrierter Digitalvoltmeterbausteine können zur Messung größerer Spannungen durch ohmsche Widerstandsteiler (Bild VI-1) erweitert werden. Der Eingangswiderstand dieser Digitalvoltmeterbausteine liegt in der Größenordnung 100 M $\Omega$  bis 1 G $\Omega$ ; beim Einsatz von Widerstandsteilern zur Messbereichserweiterung wird der resultierende Eingangswiderstand des Digitalvoltmeters durch den resultierenden Widerstand dieses Teilers bestimmt. Er liegt für Gleich- und Wechselspannungen häufig bei 10 M $\Omega$ .

## 2 Digitalmultimeter

In Anlehnung an die analogen Multimeter wird auch bei Digitalvoltmetern durch Zusatzeinrichtungen die Messung von Strömen und Widerständen möglich und damit das Instrument zum Digitalmultimeter erweitert.

- *Messung von Widerständen:* In das Instrument wird eine Konstantstromquelle eingebaut, deren Strom den unbekannten Widerstand durchfließt. Die an dem Widerstand entstehende Spannung ist dem Strom proportional und wird gemessen. Der Strom der Stromquelle und der Messbereichsendwert für den jeweiligen Widerstandsmessbereich werden so gewählt, dass sich beispielsweise ein Spannungswert von 200 mV ergibt: Im 200- $\Omega$ -Messbereich wird ein Strom für die Stromquelle von 1 mA eingestellt; im Messbereich 2 k $\Omega$  entsprechend 0,1 mA. Bei einigen Messgeräten kann der Strom um den Faktor 10 höher gewählt werden (Bezeichnung „HIGH“ im Gegensatz zu „LOW“), so dass sich eine maximale Spannung von 2 V ergibt. Das ist vorteilhaft, wenn der Widerstand von Dioden oder Transistoren in Durchlassrichtung gemessen werden soll, da dann auch die Schwellspannung von Siliziumhalbleitern überschritten wird.

Die Messbereiche sind meist dekadisch gestuft und reichen von 200  $\Omega$  bis 20 M $\Omega$ . Der Fehler des Messgerätes bei Widerstandsmessungen liegt deutlich höher als bei Gleichspannungsmessungen, da die Stromquelle mit einem entsprechend höheren Fehler behaftet ist.

Bei der Messung von Widerständen  $< 10$   $\Omega$  gehen sowohl die Zuleitungswiderstände zum Messinstrument als auch die Art des Anschlusses am zu messenden Widerstand in das Messergebnis ein. Um dieses Problem zu umgehen, bieten Digitalmultimeter für Widerstands-Präzisionsmessungen die *Vierpolmessung* an. Dazu muss der Widerstand Potentialan-

schlüsse haben, an denen die Spannung über dem Widerstand unabhängig von der Art des Anschlusses und der Länge der Messleitungen gemessen wird. Der Strom wird in die Stromanschlüsse eingespeist. Damit ist die Länge der Zuleitungen ohne Bedeutung. Besitzt der Widerstand keine Potentialanschlüsse, kann man versuchen, sie durch Anklemmen oder Anlöten zweier zusätzlicher Anschlüsse nachzubilden.

- **Messung von Strömen:** Sie wird auf eine Spannungsmessung zurückgeführt, indem der zu messende Strom  $I$  einen in das Instrument eingebauten bekannten Widerstand  $R_0$  durchfließt. Damit ist die gemessene Spannung  $U$  dem Strom  $I$  proportional ( $U = I \cdot R_0$ ). Die Messbereiche sind in der Regel mit dem Faktor 100 gestuft und ergeben sich damit zu 2 mA, 200 mA und 20 A. Die Widerstände haben die Werte 100  $\Omega$ , 1  $\Omega$  und 0,01  $\Omega$ , damit sich beim Messbereichsendwert eine Spannung von 200 mV einstellt. Der 20 A-Messbereich ist in der Regel über getrennte Buchsen erreichbar und über eine Feinsicherung abgesichert. Da Sicherungen in den anderen niedrigeren Strommessbereichen nicht vorgesehen sind, besteht die Gefahr einer Überlastung der Widerstände durch zu hohe Ströme, was entweder zu ihrer Zerstörung oder aber zur Änderung ihres Wertes und damit zur Erhöhung des Messfehlers führen kann.

Es können sowohl Gleich- als auch Wechselströme gemessen werden. Da die Strommessung auf eine Spannungsmessung zurückgeführt wird, gelten bei der Messung von Wechselströmen die im Kapitel „Messung von Wechselspannungen“ aufgeführten Verfahren und Probleme hier gleichermaßen. Der Messfehler ist bei Gleichstrommessungen um ein bis zwei Größenordnungen größer als bei Gleichspannungsmessungen, weil die Widerstände einen entsprechend höheren Fehler aufweisen, der sich durch Überlastung noch vergrößern kann. Bei der Wechselstrommessung kommen noch zusätzlich die bereits bei der Messung von Wechselspannungen gegenüber Gleichspannungen vorhandenen höheren Messfehler hinzu.

### 3 Messung von Kapazitäten, Frequenzen und Stromverstärkungen

Viele Digitalmultimeter sind noch zusätzlich mit einer oder mehreren der folgenden Messmöglichkeiten ausgestattet.

- **Frequenzmessung:** Für die Frequenzmessung wird der für die Analog-Digital-Umsetzung erforderliche interne Taktgeber, meist ein Quarzoszillator, zur Bereitstellung der Taktezeit des Zählers herangezogen. Der Zähler selbst ist wegen des Mehrstufenverfahrens bei der Analog-Digital-Umsetzung ebenfalls schon im Baustein vorhanden. Als

Messbereiche stehen häufig 20 kHz und 200 kHz zur Verfügung, manchmal auch zusätzlich 2 MHz; der relative Fehler liegt bei ca.  $\pm 1\%$ .

- **Kapazitätsmessung:** Zur Messung der Kapazität eines Kondensators wird die für die Widerstandsmessung erforderliche Stromquelle benutzt. Bei Konstantstromladung eines Kondensators  $C$  mit dem Strom  $I_0$  über eine festgelegte Zeit  $\Delta t$  ergibt sich eine Spannungszunahme  $\Delta U$  am Kondensator. Den Zusammenhang zwischen diesen Größen erhält man über die dem Kondensator zugeführte Ladung  $Q$  ( $Q = C \cdot \Delta U = I_0 \cdot \Delta t$ ). Daraus folgt für  $C$ :  $C = I_0 \cdot \Delta t / \Delta U$ . Die Messbereiche sind häufig zu 2 nF, 200 nF und 2  $\mu$ F gewählt. Der Fehler liegt in der Größenordnung ( $\pm 1 \dots \pm 5\%$ ).
- **Stromverstärkung:** Für die Messung der Stromverstärkung  $h_{21}$  von Transistoren wird in die Basis des Transistors ein Strom aus der für Widerstandsmessungen erforderlichen Stromquelle eingespeist und der Kollektorstrom gemessen. Wählt man den Strom der Stromquelle zu 0,01 mA und wird der Kollektorstrom zu 1,53 mA gemessen, muss nur das Komma in der Anzeige unterdrückt werden, damit die Stromverstärkung 153 angezeigt wird.

Für die hier angesprochenen Messungen von Kapazitäten, Frequenzen und Stromverstärkungen gilt, dass der Fehler meist im Bereich von  $\pm 1\%$  bis  $\pm 5\%$  liegt, und zwar relativ unabhängig von der Anzahl der Stellen des Digitalmultimeters.

## 4 Messung von Temperaturen

Manchmal ist einem Digitalmultimeter eine Temperatursensoreinrichtung in Form eines Widerstandsthermometers mit Platin-Widerstandselement (Nennwert meist 1000  $\Omega$  oder 10000  $\Omega$ ) beigelegt. Zur Messung der Temperatur wird entweder die bereits mehrfach erwähnte Stromquelle oder eine Brückenschaltung eingesetzt. Daneben werden auch Thermoelement-Temperaturaufnehmer eingesetzt. Die Vergleichsstelle (Vergleichstemperatur) wird durch die Umgebungstemperatur gebildet, so dass die Messgeräte nur in einem eng begrenzten Umgebungstemperaturbereich betrieben werden sollen (Beispiel: (+10 ... +30)  $^{\circ}\text{C}$ ; siehe dazu Betriebsanleitung des Messgerätes). Innerhalb dieses Temperaturbereiches findet häufig eine Korrektur über die Temperaturabhängigkeit der Schwellspannung einer Diode statt. Die maximal messbare Temperatur liegt hier höher (ca. (400 ... 600)  $^{\circ}\text{C}$ ) als bei den Platin-Widerstandsthermometern (ca. 300  $^{\circ}\text{C}$ ).

Einzelheiten dazu im Kapitel VII-1.6, „Thermische Aufnehmer“.

## VI Messverfahren zur Messung elektrischer Größen

### 1 Messung von Gleichspannungen

Die Messung von Gleichspannungen kann mit analog oder digital anzeigenden Messgeräten erfolgen.

#### 1.1 Analog anzeigende Spannungsmessgeräte

Je nach maximal zulässigem Fehler werden entweder Dreheisen-Messinstrumente der Klassen 1, 2,5 und 5 oder Drehspul-Messinstrumente der Klassen 0,2, 0,5 und 1, für Präzisionsmessungen der Klassen 0,05 und 0,1 eingesetzt (Definition des Begriffs „Klasse“ in Kapitel 1.5). Die Messinstrumente sind entweder für nur einen Messbereich ausgelegt oder verfügen durch den Einbau einer Messbereichserweiterung über mehrere Messbereiche. Die am häufigsten anzutreffenden Stufungen bei mehreren Messbereichen sind 1-3-10-30 ... und 2-5-20-50 ...

Bei der Spannungsmessung wird das Messinstrument von einem der Spannung proportionalen Strom durchflossen, der wiederum den proportionalen Zeigerausschlag bewirkt. Dieser Strom wird dem Messkreis entnommen und verändert den Wert der zu messenden Spannung. Um die Belastung durch das Messinstrument erkrümmen zu können, wird häufig dessen *Kennwiderstand*  $r_K$  in  $\Omega/V$  angegeben. Er muss mit dem Messbereichsendwert multipliziert werden, um den Widerstand des Instrumentes (Innenwiderstand) zu erhalten. Bei Drehspulmessinstrumenten liegt der Kennwiderstand im Bereich von 20  $k\Omega/V$  bis 200  $k\Omega/V$ , bei Dreheisenmessinstrumenten dagegen nur bei etwa 200  $\Omega/V$  (siehe auch Beispiel VI.1).

#### 1.2 Digital anzeigende Spannungsmessgeräte

Digital anzeigende Spannungsmesser (Digitalvoltmeter) besitzen in der Regel mehrere Messbereiche, die dekadisch gestuft sind: 0,2 V, 2 V, 20 V, 200 V und 1000 V oder 0,4 V, 4 V, 40 V, 400 V und 1000 V. Als höchster Messbereich wird 1000 V gewählt, weil es sich bei Spannungen größer 1000 V um Hochspannung handelt und damit besondere Isolationsmaßnahmen erforderlich werden.

Der Innenwiderstand ist unabhängig vom gewählten Messbereich und wird vom Eingangsspannungsteiler zur Messbereichserweiterung gebildet (Bild VI-1). Er liegt häufig bei 10  $M\Omega$ , bei Präzisionsmessgeräten ist er ausnahmsweise im kleinsten Messbereich durch Abtrennen des Eingangsspannungsteilers erheblich größer, z.B. 10  $G\Omega$ . Der Eingangswiderstand des Analog-Digital-Umsetzers ist  $\geq 10 G\Omega$  und beeinflusst damit nicht das Teilverhältnis des Widerstandsteilers beim Umschalten des Messbereiches. Der Messfehler liegt erfahrungsgemäß bei  $\pm 5 \cdot 10^{-3}$ , wenn Geräte der unteren Preisklasse unberücksichtigt bleiben.

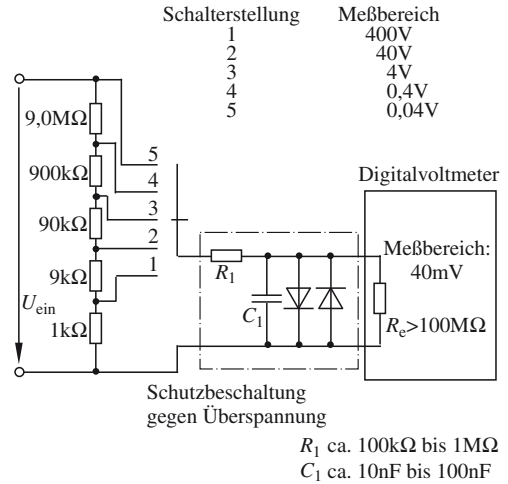


**Bild VI-1** Typischer Eingangsspannungsteiler eines Digitalvoltmeters

#### 1.3 Messabweichung durch den Innenwiderstand des Spannungsmessers

Ist der Innenwiderstand des Spannungsmessers (analog oder digital anzeigend) nicht unendlich groß, wird die zu messende Spannung durch das Messinstrument verändert. In der Schaltung Bild VI-2 soll die Spannung über dem Widerstand  $R_2$  gemessen werden. Das Instrument hat den Innenwiderstand  $R_i$ . Ohne angeschlossenes Messinstrument beträgt die Spannung  $U_2$  an  $R_2$ :

$$U_2 = U_0 \cdot R_2 / (R_1 + R_2)$$

mit angeschlossenem Messinstrument:

$$U'_2 = U_0 \cdot (R_2 \parallel R_i) / (R_1 + (R_2 \parallel R_i))$$

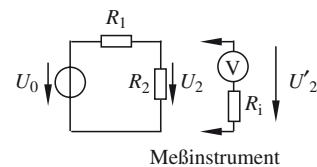


**Bild VI-2** Messabweichung bei der Spannungsmessung

Die gemessene Spannung ist damit kleiner als der tatsächliche Wert ohne Instrument. Die daraus resultierende systematische Messabweichung lässt sich berechnen, indem  $U_2$  und  $U'_2$  in die Formel für den relativen Fehler eingesetzt werden:

$$f = (x_a - x_r) / x_r = (U'_2 - U_2) / U_2 = \frac{U'_2}{U_2} - 1$$

$$= \frac{U_0 \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}}{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_i} \cdot \frac{R_1 + R_2}{U_0 \cdot R_2} - 1$$

Nach Gleichungsumformung folgt daraus:

*Systematische Messabweichung*

$$f = - \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R_i \parallel R_2}} \quad (\text{VI.1})$$

Die durch das Messinstrument verursachte Messabweichung wird um so kleiner, je größer dessen Innenwiderstand  $R_i$  im Verhältnis zur Parallelschaltung der Widerstände  $R_i$  und  $R_2$  ist. Deshalb gilt allgemein:

*Der Innenwiderstand von Spannungsmessern sollte so groß wie möglich sein!*

■ **Beispiel VI.1:** Ein analog anzeigendes Messinstrument mit dem Kennwiderstand  $r_K = 100 \text{ k}\Omega/\text{V}$  hat im Messbereich  $0,3 \text{ V}$  einen Innenwiderstand von  $100 \text{ k}\Omega/\text{V} \cdot 0,3 \text{ V} = 30 \text{ k}\Omega$ ; im Messbereich  $300 \text{ V}$  einen Innenwiderstand von  $100 \text{ k}\Omega/\text{V} \cdot 300 \text{ V} = 30 \text{ M}\Omega$ . Ein Digitalvoltmeter hat den messbereichsunabhängigen Innenwiderstand  $10 \text{ M}\Omega$ . Dann ist der Innenwiderstand des analog anzeigenden Messgerätes in den Messbereichen  $> 100 \text{ V}$  größer als der des Digitalvoltmeters.

## 1.4 Spannungsmessung mit dem Kompensator

Die Messabweichung durch den endlichen Innenwiderstand des Spannungsmessers lässt sich vermeiden, wenn der für die Messung notwendige Strom von einer Hilfsenergiequelle geliefert wird. In Bild VI-3 ist das Prinzip gezeigt. Die Spannung  $U_N$  ist bekannt, sie wird z.B. von einem Normalelement geliefert. Ihr Innenwiderstand  $R_{iN}$  ist ebenfalls bekannt. Der Widerstandsteiler ist ein Präzisionsteiler mit dem Gesamtwiderstand  $R_N$  und dem einstellbaren Teilwiderstand  $R_K$ . Er wird häufig als einstellbarer Stufenwiderstand mit mehreren Dekaden ausgeführt. Die zu messende Spannung ist  $U_x$ , der Innenwiderstand ist  $R_i$ . Zur Messung wird der Abgriff am Widerstand  $R_N$  solange verändert, bis der Nullindikator den Strom Null anzeigt. Dann gilt:

$$U_x = U_a = U_K = U_N \cdot R_K / (R_{iN} + R_N) \quad (\text{VI.2})$$

Mit diesem Verfahren ist es möglich, auch die Leerlaufspannung von Spannungsquellen mit sehr großem Innenwiderstand zu messen. Für die zu messende Spannung gilt:  $U_x < U_N$ .

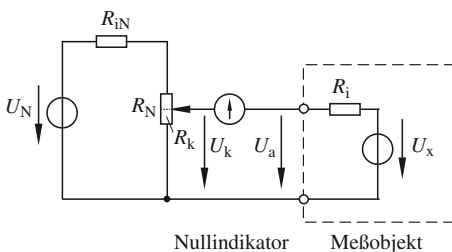


**Bild VI-3** Prinzip des Kompensators

Der Fehler des Verfahrens hängt davon ab, wie genau die Spannung  $U_N$ , deren Innenwiderstand  $R_{iN}$  und die Widerstände  $R_K$  und  $R_N$  bekannt sind und wie empfindlich der Nullindikator ist. Mit Präzisionskompensatoren lassen sich Spannungen mit einem Fehler  $f < |\pm 10^{-4}|$  messen.

Allerdings verliert dieses Messverfahren an Bedeutung, weil Präzisions-Digitalvoltmeter im  $0,2\text{-V}$ - und  $2\text{-V}$ -Messbereich Fehler in der gleichen Größenordnung aufweisen und häufig Innenwiderstände im Bereich  $1 \text{ G}\Omega$  bis  $10 \text{ G}\Omega$  besitzen. Damit kann die Messabweichung nach Gleichung VI.1 meist vernachlässigt werden.

## 2 Messung von Gleichströmen

### 2.1 Analog anzeigende Strommessgeräte

Drehspulmesswerke benötigen einen Strom von etwa  $10 \mu\text{A}$  bis  $100 \mu\text{A}$  für Vollausschlag. Der Innenwiderstand liegt bei  $1 \text{ k}\Omega$  bis  $10 \text{ k}\Omega$ , so dass sich im kleinsten Strommessbereich ein Spannungsfall über dem Messwerk von  $10 \text{ mV}$  bis  $100 \text{ mV}$  ergibt. Für größere Ströme wird dem Messwerk ein entsprechend kleinerer Widerstand parallelgeschaltet (Prinzip Stromteiler).

Der Fehler der Strommessung ist durch die Klasse des Instrumentes gegeben und entspricht dem Fehler bei der Spannungsmessung.

### 2.2 Digital anzeigende Strommessgeräte

Der zu messende Strom durchfließt einen bekannten Widerstand und verursacht an ihm einen Spannungsfall. Besitzt der Widerstand dekadische Werte ( $1 \Omega$ ,  $10 \Omega$ ,  $100 \Omega$  ...), ist der Zahlenwert der gemessenen Spannung durch entsprechendes Setzen eines Kommas in der Anzeige als Stromwert in  $\mu\text{A}$ ,  $\text{mA}$  oder  $\text{A}$  ablesbar. Meist wird eine Stufung in Anlehnung an die Spannungsmessbereiche, aber mit dem Multiplikator 100, verwendet ( $200 \mu\text{A}$ ,  $20 \text{ mA}$ ,  $2 \text{ A}$ ). Der Fehler der Strommessung ist mit  $f \geq |\pm 10^{-2}|$  deutlich höher als bei der Spannungsmessung.

Für ein  $4\frac{1}{2}$ -stelliges Digitalmultimeter beträgt der Spannungsfall beim Maximalstrom unabhängig vom Messbereich typisch  $200 \text{ mV}$ , der Fehler liegt bei  $\pm(0,4 \% \text{ of reading} + 3 \text{ LSB})$ , siehe dazu auch Kapitel V.

### 2.3 Messabweichung durch den Innenwiderstand des Strommessers

In Bild VI-4 soll der Strom durch den Widerstand  $R_1$  gemessen werden.

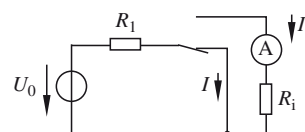


**Bild VI-4** Messabweichung bei der Strommessung

Ohne Strommesser ergibt sich der Strom durch den Widerstand  $R_1$  zu:  $I = U_0/R_1$ , mit Strommesser dagegen zu  $I' = U_0/(R_1 + R_i)$ . Eingesetzt in die Fehlerformel folgt daraus:

$$f = (x_a - x_r)/x_r = (I' - I)/I$$

$$= \frac{\frac{U_0}{R_1 + R_i} - \frac{U_0}{R_1}}{\frac{U_0}{R_1}} = -\frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_i}} \quad (\text{VI.3})$$

Die Messabweichung durch den endlichen Innenwiderstand des Strommessers ist um so kleiner, je kleiner er im Verhältnis zum Widerstand  $R_1$  ist.

*Der Innenwiderstand von Strommessern sollte möglichst klein sein!*

### 3 Messbereichserweiterung

#### 3.1 Spannungsmessung

Soll mit einem analog oder digital anzeigenden Spannungsmesser, dessen Innenwiderstand in einem Messbereich (Wahl des Messbereichs siehe unten) mit  $R_{iU}$  gegeben ist, eine höhere Spannung  $U_x$  gemessen werden, schaltet man einen Widerstand  $R_v$  in Reihe zu dem Spannungsmesser (Bild VI-5a). Dieser Spannungsteiler liefert die Beziehung:

$$U_x/U_U = (R_{iU} + R_v)/R_{iU}$$

Darin ist  $U_U$  die am Instrument abgelesene Spannung. Da man  $U_x$  im allgemeinen nicht kennt, sind  $R_v$  und der Messbereich des Spannungsmessers so einzustellen, dass sich ein Ausschlag oder eine Anzeige möglichst im oberen Drittel des Messbereichs ergibt, da dann der Fehler klein ist. In der Praxis wird man für  $R_v$  einen Stufenwiderstand mit mehreren Dekaden wählen, den höchsten Wert einstellen und dann den Widerstand stufenweise verringern, bis der genannte Ausschlag erreicht ist. Achtung: Für den Dekadenwiderstand muss eine Ausführung mit unterbrechendem Schalter verwendet werden, da der Spannungsmesser sonst im Umschaltmoment durch den kurzgeschlossenen Reihenwiderstand überlastet wird!

#### 3.2 Strommessung

Hier wird zum Instrument ein Widerstand  $R_p$  parallel geschaltet (Bild VI-5b), sofern ein größerer Strom als dem Messbereich entsprechend gemessen werden soll.  $R_{iI}$  ist der Innenwiderstand des Strommessers in einem Messbereich (Wahl siehe unten), der zu messende Strom ist  $I_x$ . Ist  $I_I$  der am Strommesser abgelesene Strom, folgt mit dem Stromteiler:

$$\frac{I_x}{I_I} = \frac{R_{iI}}{R_{iI} \parallel R_p}$$

In der Praxis wird man für  $R_p$  einen Stufenwiderstand mit mehreren Dekaden wählen, den kleinsten Wert einstellen und diesen solange erhöhen, bis sich ein Ausschlag oder eine Anzeige im oberen Drittel des Messbereichs ergibt. Achtung: Für den Dekadenwiderstand muss eine Ausführung mit nichtunterbrechendem Schalter verwendet werden, da der Strommesser sonst im Umschaltmoment durch den fehlenden Parallelwiderstand überlastet wird!

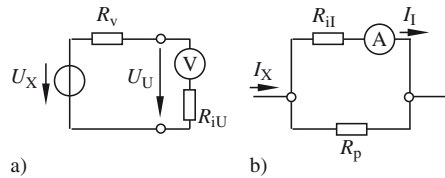


**Bild VI-5** Messbereichserweiterung

- a) Spannungsmessung  
b) Strommessung

### 4 Messung von Wechselspannungen

#### 4.1 Analog anzeigende Wechselspannungsmessgeräte

Zur Messung von Wechselspannungen werden Messgeräte mit Dreheisenmesswerk, Drehspulmesswerk und Thermoumformermesswerk eingesetzt.

##### 4.1.1 Spannungsmesser mit Dreheisenmesswerk

Die den Zeigerausschlag verursachende Kraft lässt sich durch die Lorentzkraft darstellen ( $F = B \cdot I \cdot l$ ). Die Flussdichte  $B$  wird ebenfalls durch den Strom  $I$  erzeugt, so dass  $F = k_1 \cdot I^2 = k_2 \cdot U^2$  gesetzt werden kann. Durch die mechanische Trägheit des Zeigers wird daraus der Mittelwert der Spannung bei Frequenzen  $\gg 1$  Hz gebildet. Berücksichtigt man die Wurzelbeziehung beim Aufbringen der Skalenteilung, wird theoretisch der Effektivwert  $U$  angezeigt:

$$\bullet \text{ Effektivwert } U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \{u(t)\}^2 dt} \quad (\text{VI.4})$$

In der Praxis gilt das aber nur für sinusförmige Spannungen mit Frequenzen bis etwa (400 ... 1000) Hz. Oberhalb dieser Frequenzen nimmt der Zeigerausschlag ab. Ein Grund dafür ist die mit steigender Frequenz zunehmende Impedanz ( $j\omega L$ ) der Spule. Bei nichtsinusförmigen Spannungen wird der Signalverlauf nach Fourier zerlegt. Dabei muss die höchste noch zu berücksichtigende Signalfrequenz, das ist in der Regel die 10. bis 20. Harmonische, an der oberen Grenze des genannten Frequenzbereiches liegen. Auf diese Weise können bereits nichtsinusförmig verlaufende Spannungen mit einer Frequenz von 50 Hz mit einem erhöhten Messfehler durch Verfälschung der Kurvenform behaftet sein.



#### 4.1.2 Spannungsmesser mit Drehspulmesswerk

Das Drehspulmesswerk zeigt den arithmetischen Mittelwert der Wechselspannung an. In der Praxis interessiert aber der Effektivwert, weil er für die Leistung maßgebend ist. Da aber arithmetischer Mittelwert und Effektivwert zahlenmäßig nicht übereinstimmen und der Umrechnungsfaktor zwischen beiden von der Kurvenform abhängt, ist dieses Instrument nicht zur Messung von Wechselspannungen geeignet. Es besitzt jedoch besondere Vorteile, nämlich geringen Eigenverbrauch und lineare Skalenteilung. Deshalb hat man, allerdings nur für sinusförmige Spannungen, die Skala so beschriftet, dass der korrekte Wert abgelesen wird. Da der arithmetische Mittelwert eines sinusförmigen Signals Null ist, wird der Spannungsverlauf mit einem Einweg- oder einem Brückengleichrichter so verändert, dass der arithmetische Mittelwert ungleich Null ist und damit ein Ausschlag erfolgt. Der *Kurvenformfaktor* oder kurz *Formfaktor* ist das Verhältnis von Effektivwert zu arithmetischem Mittelwert bei Einweg- bzw. Brückengleichrichtung. Er beträgt bei sinusförmigem Verlauf 2,22 und bei Brückengleichrichtung 1,11. Mit diesen Faktoren werden die Werte auf der Skala multipliziert. Es sind Spannungen mit Frequenzen bis zu einigen 10 kHz messbar.

*Messinstrumente mit Drehspulmesswerk und Gleichrichter zeigen nur bei sinusförmigen Wechselspannungen den Effektivwert richtig an!*

#### 4.1.3 Spannungsmesser mit Thermoumformermesswerk

Bei diesem Messwerk durchfließt ein der Spannung proportionaler Strom einen sehr dünnen (einige  $\mu\text{m}$ ) Widerstandsdraht. Der Draht erwärmt sich; seine Temperaturdifferenz zur Umgebungstemperatur ist dem Effektivwert des Stromes proportional. Die Temperatur wird mit einem Thermoelement gemessen (Kapitel VII.1.6).

Der Vorteil dieses Verfahrens liegt darin, dass der Frequenzbereich für sinusförmige Spannungen von etwa 0,2 Hz bis 65 MHz reicht, bei Sonderausführungen bis 300 MHz bzw. 10 GHz. Die untere Frequenzgrenze ist dadurch gegeben, dass die Temperatur des Widerstandsdrahtes unterhalb 0,2 Hz dem Momentanwert des Stromes folgt. Gleichspannungen sind als dem Strom proportionale Größe messbar. Ein Nachteil ist, dass der Strom durch den Widerstandsdraht einige mA betragen muss, um Drahttemperaturen oberhalb 100 °C und damit ausreichend große Spannungen am Thermoelement zu bewirken. Damit der Messkreis nicht unzulässig hoch belastet wird, hat man elektronische Lösungen gefunden, die den Strom durch den Widerstandsdraht einer Hilfsspannungsquelle entnehmen, die durch die zu messende Spannung gesteuert wird.

#### 4.2 Digital anzeigende Wechselspannungsmessgeräte

Zur Messung des Effektivwertes einer Spannung werden unterschiedliche Messverfahren eingesetzt.

*1. Verfahren:* Vor allem bei Digitalmultimetern der unteren Preisklasse wird bei der Spannungsmessung der Scheitelwert gemessen, durch 1,41 geteilt und angezeigt. Diese Umrechnung zwischen Scheitel- und Effektivwert gilt aber nicht allgemein für beliebige Spannungsverläufe, so dass der Effektivwert nur bei sinusförmigem Spannungsverlauf richtig angezeigt wird. Die Scheitelwertmessung ist wegen des hohen Eingangswiderstandes des Analog-Digital-Umsetzers einfach möglich. Verglichen mit der Gleichspannungsmessung ist der Eingangswiderstand gleich, der Fehler ist um den Faktor 5 bis 10 größer.

*2. Verfahren:* Der Effektivwert wird tatsächlich gemessen; deshalb spricht man auch von einer „echten“ Effektivwertmessung. Verwendet werden elektronische Schaltkreise, die nach Gleichung VI.4 den analogen Spannungswert am Eingang zunächst quadrieren, diesen dann integrieren, auf die Periodendauer beziehen und anschließend die Wurzel ziehen. Der Fehler dieses Verfahrens ist  $> |\pm 10^{-3}|$ , weil die erforderlichen mathematischen Operationen u.a. durch Logarithmieren und Potenzieren realisiert werden.

Vor allem bei Geräten der Präzisionsmesstechnik wird die zu messende Spannung pro Periode 100mal oder mehr abgetastet und in Digitalwerte umgesetzt. Anschließend werden diese digital kodierten Werte den erforderlichen Rechenoperationen nach Gleichung VI.4 zur Bildung des Effektivwertes unterzogen. Der so bestimmte Effektivwert ist mit einem kleineren Fehler behaftet als beim rein analogen Verfahren, erfordert aber einigen Aufwand. Es ist ein Analog-Digital-Umsetzer mit 8 bit oder mehr und einer Umsetzzeit erforderlich, die nur ein Bruchteil der Periodendauer der zu messenden Spannung ist ( $\text{Umsetzzeit} = \text{Periodendauer} / \text{Abtastwerte pro Periode}$ ).

Bei Messgeräten mit „Echt-Effektivwertmessung“ gibt es Ausführungen, die zwar den Effektivwert tatsächlich messen, an das zu messende Signal aber die Bedingung knüpfen, dass der arithmetische Mittelwert Null ist. Das liegt daran, dass im Eingangskreis des Messgerätes ein Kondensator in Reihe zu den Messanschlüssen eingefügt ist. Dadurch vereinfacht sich zwar der elektronische Aufwand innerhalb des Messgerätes, schränkt aber seinen Einsatz wesentlich ein. Nicht immer weist die Betriebsanleitung eindeutig auf diese Tatsache hin.

Eine wichtige Kenngröße bei der Messung von Wechselspannungen und -strömen ist der *Crestfaktor* als Verhältnis von Scheitelwert zu Effektivwert. Er darf einen bestimmten Wert nicht überschreiten und liegt in der Größenordnung 4 bis 10. Bei einem

Crestfaktor von 4 kann demnach eine rechteckförmige Spannung mit einem Tastgrad 5 nur noch mit erhöhtem Fehler gemessen werden.

## 5 Messung von Wechselströmen

### 5.1 Analog anzeigende Wechselstrommessgeräte

Hier werden die gleichen Messwerke verwendet wie bei der Wechselspannungsmessung. Da bei ihnen der Ausschlag stromproportional ist, können die Aussagen über die Wechselspannungsmessung entsprechend übernommen werden.

*Strommesser mit Dreheisenmesswerk:* Theoretisch wird der Effektivwert unabhängig von der Kurvenform angezeigt, in der Praxis dagegen wird der Zeigerausschlag bei Frequenzen oberhalb 400 Hz bis 1000 Hz geringer. Die Innenwiderstände sind gleich denen bei der Gleichstrommessung.

*Strommesser mit Drehspulmesswerk:* Die Anzeige ist ebenfalls nur für sinusförmige Ströme richtig, die Frequenzgrenze für sinusförmige Ströme liegt auch bei einigen 10 kHz. Die Innenwiderstände entsprechen denen bei der Gleichstrommessung, sofern die Instrumente einen elektronischen Präzisionsgleichrichter eingebaut haben.

*Strommesser mit Thermoumformermesswerk:* Die Innenwiderstände entsprechen denen bei der Gleichstrommessung, der Frequenzbereich reicht von 0,2 Hz bis ca. 65 MHz oder 300 MHz bzw. 10 GHz.

### 5.2 Digital anzeigende Wechselstrommessgeräte

Die Wechselstrommessung wird, wie bei der Gleichstrommessung, auf eine Spannungsmessung zurückgeführt. Deshalb sind die Innenwiderstände in beiden Fällen gleich. Entsprechend gilt analog zur Wechselspannungsmessung:

Der Fehler ist größer als bei der Wechselspannungsmessung, weil der Fehler des Strommesswiderstandes in das Messergebnis eingeht.

## 6 Widerstands- und Impedanzmessung

Für die Widerstands- und Impedanzmessung werden hauptsächlich die Brückenschaltung, der Vergleich mit einem bekannten Widerstand und die kombinierte Messung aus Strom und Spannung eingesetzt.

### 6.1 Gleichstrom-Messbrücken zur Widerstandsmessung

Eine Messbrücke besteht nach Bild VI-6a aus vier Impedanzen oder Widerständen  $Z_1$  oder  $R_1$  bis  $Z_4$  oder  $R_4$  und wird von einer Spannungsquelle mit der

Spannung  $u_{sp}$  gespeist. Zur Messung von Widerständen kann  $u_{sp}$  sowohl eine Gleich- als auch eine Wechselspannung sein, zur Impedanzmessung wird in der Regel eine sinusförmige Spannung verwendet. Man spricht dann von Gleich- oder Wechselstrommessbrücken.

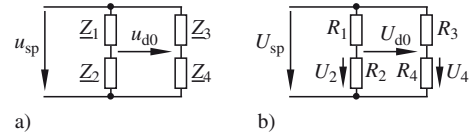


**Bild VI-6** Messbrücke

- a) allgemein
- b) Wheatstone-Messbrücke für ohmsche Widerstände

#### 6.1.1 Grundlagen

Mit der Gleichstrom-Messbrücke lassen sich nur ohmsche Widerstände messen. Eventuell vorhandene induktive Anteile (in Reihe liegend durch die wendelförmige Widerstandsbahn-Anordnung) ergeben den Wert Null, kapazitive Anteile (parallel liegend durch die wendelförmige Widerstandsbahn-Anordnung und den Aufbau) den Wert unendlich.

Die Spannung  $U_{d0}$  in der Brückendiagonalen (Bild VI-6b) ergibt sich zu:

$$U_{d0} = U_2 - U_4 \quad (\text{VI.5})$$

$R_1$  und  $R_2$  sowie  $R_3$  und  $R_4$  bilden einen Spannungsteiler. Der Strom in der Brückendiagonalen ist Null (Index „0“ für  $U_{d0}$ ), und es werden folgende Teilspannungen abgegriffen:

$$U_2 = U_{sp} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad U_4 = U_{sp} \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} \quad (\text{VI.6})$$

Für  $U_{d0}$  folgt daraus:

$$\begin{aligned} U_{d0} &= U_{sp} \cdot \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) \\ &= U_{sp} \cdot \frac{R_2 R_3 + R_2 R_4 - R_1 R_4 - R_2 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \\ U_{d0} &= U_{sp} \cdot \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \quad (\text{VI.7}) \end{aligned}$$

Für die Anwendung der Brückenschaltung zur Widerstandsmessung gibt es zwei Verfahren: 1. *Abgleichverfahren:* Die Spannung  $U_{d0}$  wird durch Abgleich zu Null gemacht. 2. *Ausschlagverfahren:* Die Spannung  $U_{d0}$  ist ein Maß für die Abweichung eines zu messenden Widerstandes von einem Sollwert.

### 6.1.2 Wheatstone-Messbrücke im Abgleichverfahren

Der unbekannte Widerstand ist  $R_1$ . Mindestens einer der Widerstände  $R_2$  bis  $R_4$  wird solange verändert, bis  $U_{d0}$  Null ist. Dann gilt nach Gleichung (VI.7):

$$R_1 = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (\text{VI.8})$$

Die Brücke ist abgeglichen. In der Praxis ist  $R_2$  stetig veränderbar, während das Verhältnis  $R_3/R_4$  in dekadischen Stufen eingestellt werden kann und damit der Messbereich für den zu messenden Widerstand gewählt wird. Die Messunsicherheit dieser Messbrücken ist  $< |\pm 10^{-3}|$ . Sie lässt sich auf  $< |\pm 10^{-4}|$  verringern, wenn auch für den Widerstand  $R_2$  Stufenwiderstände eingesetzt werden, die mehrere Dekaden überstreichen und deren kleinste Stufung bei  $1 \Omega$  oder  $0,1 \Omega$  liegt. Es können Widerstände im Bereich von etwa  $10 \Omega$  bis  $10 \text{ M}\Omega$  gemessen werden.

Bei der *Schleifdraht-Messbrücke* nach Bild VI-7 werden die Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  durch einen homogenen Widerstandsdraht mit konstantem Querschnitt gebildet. Damit sind die Widerstände den jeweiligen Drahtlängen  $l$  proportional.

$$R_1 = \frac{\rho \cdot l_1}{A}; \quad R_2 = \frac{\rho \cdot l_2}{A} \quad (\text{VI.9})$$

$\rho$  spezifischer elektrischer Widerstand in  $\Omega \cdot \text{m}$ ,  $l$  Drahtlänge in m,  $A$  Drahtquerschnittsfläche in  $\text{m}^2$

Daraus folgt die Abgleichbedingung:

$$R_x = R_4 \frac{R_1}{R_2} = R_4 \cdot \frac{l_1}{l_2} \quad (\text{VI.10})$$

Der Schleifdraht wird häufig entweder als ausgestreckter Draht von 1 m Länge oder als Schleifdrahtwendel auf einem walzenförmigen Körper ausgeführt.

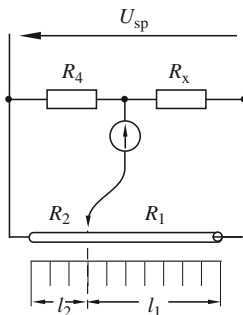


**Bild VI-7**  
Schleifdraht-  
Messbrücke

### 6.1.3 Thomson-Messbrücke im Abgleichverfahren

Die Messung von Widerständen kleiner  $10 \Omega$  erfordert die Anwendung von *Potentialanschlüssen*, um den Einfluss von Übergangswiderständen an den Anschlussklemmen zu verringern, da diese in der Größenordnung der zu messenden Widerstände liegen.

Die dann verwendete *Thomson-Messbrücke* ist nach Bild VI-8 aufgebaut.  $R_x$  ist der zu messende Widerstand,  $R_N$  ein bekannter Widerstand.  $R_1$  bis  $R_4$  sind im Vergleich zu  $R_x$  hochohmig. Für die Parallelschaltung aus den Zuleitungswiderständen  $R_{zu}$  und  $(R_1 + R_2)$  wird  $R_p$  eingeführt:

$$R_p = \frac{(R_1 + R_2) \cdot R_{zu}}{R_1 + R_2 + R_{zu}} \quad (\text{VI.11})$$

Damit erhält man für die Brückendiagonalspannung  $U_{d0}$ :

$$U_{d0} = U_3 - U_x - U_1 = I \left( R_x + R_p + R_N \right) \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_4} - I \cdot R_x - I \cdot R_p \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (\text{VI.12})$$

$$U_{d0} = I \left( \underbrace{\frac{R_x \cdot R_3}{R_3 + R_4} + \frac{R_p \cdot R_3}{R_3 + R_4} + \frac{R_N \cdot R_3}{R_3 + R_4}}_A - \underbrace{R_x - \frac{R_p \cdot R_1}{R_1 + R_2}}_B \right)$$

Die *Thomson-Brücke* ist für  $U_{d0} = 0$  abgeglichen. Diese Bedingung wird unabhängig von  $R_p$  und damit von  $R_{zu}$ , wenn sich die beiden oben gekennzeichneten Summanden A und B aufheben:

$$\frac{R_3}{R_3 + R_4} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (\text{VI.13})$$

Das lässt sich z.B. durch eine entsprechende mechanische Kopplung der Widerstände  $R_1$  und  $R_3$  sowie  $R_2$  und  $R_4$  erreichen.

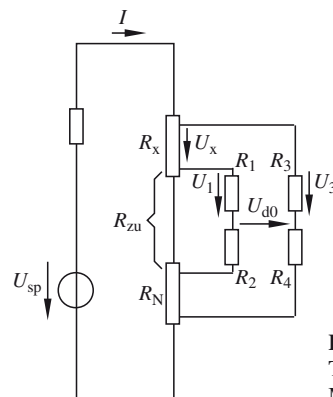


**Bild VI-8**  
Thomson-  
Messbrücke

Setzt man die Abgleichbedingung aus Gleichung (VI.13) in Gleichung (VI.12) ein, so folgt durch Auflösen des Ausdrucks nach dem unbekannten Widerstand  $R_x$ :

$$R_x = R_N \frac{R_3}{R_4} \quad (\text{VI.14})$$



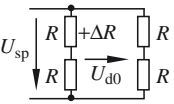
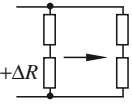
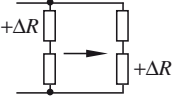
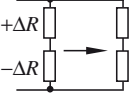
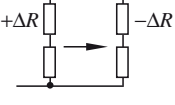
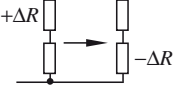
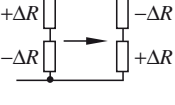
Es können Widerstände bis herab zu etwa  $10^{-5} \Omega$  gemessen werden.

### 6.1.4 Wheatstone-Messbrücke im Ausschlagverfahren

Bei der Messbrücke im Ausschlagverfahren wird die Spannung  $U_{d0}$  gemessen. Dann lässt sich der Widerstand  $R_1$  nach Gleichung (VI.7) bestimmen, wenn  $R_2$  bis  $R_4$  bekannt sind. Im Gegensatz zum Abgleichverfahren ist jetzt aber der Widerstand  $R_1$  veränderlich. Als Beispiel dient ein temperaturabhängiger Wider-

stand, bei dem die Temperatur über den Widerstandswert erfasst wird. In der Praxis ergibt sich häufig die Forderung, dass eine Widerstandsänderung gegenüber einem Arbeitspunkt (Sollwert) gemessen werden soll. Für diesen Fall wird die Brücke so ausgelegt, dass die vier Widerstände im Arbeitspunkt gleich sind, die Brücke also abgeglichen ist (temperaturabhängiger Widerstand bei  $0^\circ\text{C}$ ). Die Abweichungen des Widerstandes vom Arbeitspunkt (Sollwert) werden dann zweckmäßigerweise mit  $\Delta R$  bezeichnet.

**Tabelle VI-1** Viertel-, Halb- und Vollbrücken mit  $+\Delta R$  oder  $\pm \Delta R$

| Brückenordnung                                                                      | exakt                                                                  | Näherung                              |
|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|
|    | $U_{d0} = -U_{sp} \frac{\Delta R}{4R + 2\Delta R}$                     | $\approx -U_{sp} \frac{\Delta R}{4R}$ |
|    | $U_{d0} = U_{sp} \frac{\Delta R}{4R + 2\Delta R}$                      | $\approx U_{sp} \frac{\Delta R}{4R}$  |
|   | $U_{d0} = -U_{sp} \frac{\Delta R}{2R + \Delta R}$                      | $\approx -U_{sp} \frac{\Delta R}{2R}$ |
|  | $U_{d0} = -U_{sp} \frac{\Delta R}{2R}$                                 |                                       |
|  | $U_{d0} = -U_{sp} \frac{2R \cdot \Delta R}{4R^2 - (\Delta R)^2}$       | $\approx -U_{sp} \frac{\Delta R}{2R}$ |
|  | $U_{d0} = -U_{sp} \frac{\Delta R(2R - \Delta R)}{4R^2 - (\Delta R)^2}$ | $\approx -U_{sp} \frac{\Delta R}{2R}$ |
|  | $U_{d0} = -U_{sp} \frac{\Delta R}{R}$                                  |                                       |

Setzt man in Gleichung (VI.7)  $R_2 = R_3 = R_4 = R$  und  $R_1 = R + \Delta R$  ein, so folgt für  $U_{d0}$ :

$$U_{d0} = U_{sp} \cdot \left( \frac{R^2 - (R + \Delta R) \cdot R}{(R + \Delta R + R) \cdot 2R} \right)$$

$$= U_{sp} \cdot \frac{-\Delta R \cdot R + R^2 - R^2}{(2R + \Delta R) \cdot 2 \cdot R} \quad (\text{VI.15})$$

$$U_{d0} = U_{sp} \cdot \frac{-\Delta R}{(4R + 2 \cdot \Delta R)}$$

$\Delta R$  ist mit Vorzeichen einzusetzen! Das bedeutet, dass bei einer Widerstandsabnahme von  $R_1$ , d. h.  $R_1 - \Delta R$ , die Spannung  $U_{d0}$  positiv ist (Bild VI-6b). Die Dimensionierung  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$  für  $\Delta R = 0$  ist sinnvoll, weil hierfür gilt: Die Spannung in der Brückendiagonalen ist für  $\Delta R \neq 0$  maximal. Zwischen der Spannung  $U_{d0}$  und der Widerstandsänderung  $\Delta R$  besteht kein linearer Zusammenhang. Je nach Anwendungsfall und zulässiger Messabweichung kann unter Umständen mit einem linearen Zusammenhang gerechnet werden:

$$U_{d0} \approx U_{sp} \cdot \frac{-\Delta R}{4R} \quad \text{für } |\Delta R| \ll R \quad (\text{VI.16})$$

Die beschriebene Brücke wird auch als *Viertelbrücke* bezeichnet, weil nur *ein* Widerstand veränderlich ist. In der Praxis werden Brückenschaltungen häufig so eingesetzt, dass zwei oder vier Widerstände veränderlich sind und Widerstandsänderungen mit positivem und negativem Vorzeichen gleichzeitig auftreten. Für diese *Halb-* oder *Vollbrücken* sind die Änderungen in positiver und negativer Richtung in der Regel gleich groß ( $|\Delta R| = |\Delta R|$ ). In Tabelle VI-1 sind die verschiedenen Brückenanordnungen zusammengestellt. Ist der Zusammenhang zwischen  $U_{d0}$  und  $\Delta R$  nichtlinear, kann er häufig durch eine lineare Abhängigkeit angenähert werden.

### 6.1.5 Wheatstone-Messbrücke im Ausschlagverfahren mit Widerstand in der Brückendiagonalen

Bei der Berechnung der Spannung  $U_{d0}$  wurde der Strom in der Brückendiagonalen bisher zu Null angenommen. Ist dagegen ein Widerstand  $R_d$  vorhanden (Bild VI-9a), empfiehlt sich zur Berechnung der Spannung in der Brückendiagonalen das Verfahren mit Ersatzspannungsquelle und Ersatzinnenwiderstand, bezogen auf die Anschlusspunkte A und B (Bild VI-9b). Die Ersatzspannung  $U_E$  ist die Leerlaufspannung und damit die Spannung  $U_{d0}$ , die für einen unendlich großen Widerstand  $R_d$  berechnet worden ist (Gleichung VI.15). Der Ersatzinnenwiderstand  $R_{iE}$  ergibt sich, wenn die Spannungsquelle „kurzgeschlossen“ und der Gesamtwiderstand zwischen A und B bestimmt wird. Er lässt sich direkt ablesen.

$$R_{iE} = (R_1 \parallel R_2) + (R_3 \parallel R_4) \quad (\text{VI.17})$$

Für den Fall, dass alle 4 Widerstände gleich groß sind ( $R$ ) und dass eventuelle Widerstandsänderungen  $\pm \Delta R$

unberücksichtigt bleiben, was wegen der kleinen Werte zulässig ist, folgt für  $R_{iE}$ :

$$R_{iE} = (R \parallel R) + (R \parallel R) = R \quad (\text{VI.18})$$

Wird jetzt ein Widerstand  $R_d$  in die Brückendiagonale zwischen die Anschlüsse A und B eingefügt, berechnen sich der Strom  $I_d$  in  $R_d$  und die Spannung  $U_d$  zu:

$$I_d = \frac{U_{d0}}{R_{iE} + R_d}; \quad U_d = I_d \cdot R_d \quad (\text{VI.19})$$

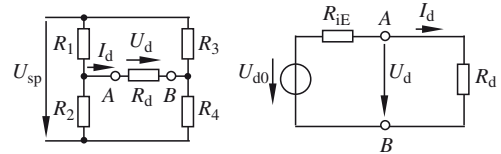


**Bild VI-9** Brückenersatzschaltung mit Widerstand in der Brückendiagonalen  
a) Schaltbild  
b) Ersatzschaltbild

Diese Art der Berechnung ist dann von Vorteil, wenn bei der Messung im Ausschlagverfahren in der Brückendiagonalen empfindliche Strommesser, z.B. Galvanometer oder Digitalvoltmeter im kleinsten Spannungsmessbereich eingesetzt werden.

## 6.2 Wechselstrom-Messbrücken zur Widerstands- und Impedanzmessung

Wechselstrommessbrücken dienen dazu, entweder ohmsche Widerstände oder Impedanzen zu messen. Die die Brücke speisende Spannung hat zweckmäßigerweise sinusförmigen Verlauf, weil nach Fourier keine Oberschwingungen auftreten und die Werte der Impedanzen eindeutig angegeben werden können. Außerdem ermöglichen Wechselspannungsverstärker für *eine* Frequenz eine erhöhte Störspannungsunterdrückung (siehe auch folgendes Kapitel).

### 6.2.1 Messung von ohmschen Widerständen

Die Brückenschaltung kann sowohl im Abgleich- als auch im Ausschlagverfahren eingesetzt werden. Es wird vorausgesetzt, dass die Widerstände keinen Blindanteil enthalten. Dann können die Gleichungen (VI.5) bis (VI.8) und (VI.14) mit dem Zusatz übernommen werden, dass alle Spannungen sinusförmigen Verlauf haben, also auch  $U_{d0}$ . Besonders bei der Verwendung der Brückenschaltung im Ausschlagverfahren liegen die auszuwertenden Spannungen in der Brückendiagonalen häufig im Bereich  $\mu\text{V} \dots \text{mV}$  und sind aufgrund von Störspannungen, die in der gesamten Messeinrichtung auftreten, schwierig zu messen. Ist dagegen  $u_{d0}$  sinusförmig mit der Frequenz  $f_0$ , wird eine Messeinrichtung verwendet, die nur Signale der Frequenz  $f_0$  auswertet und damit die Wirksamkeit von Störspannungen und Rauschen auf einen sehr begrenzten Frequenzbereich um  $f_0$  herum einschränkt. Driftvorgänge beispielsweise durch Temperaturänderungen oder Alterung besitzen Frequenzen im Bereich unterhalb 1 Hz und treten damit nicht mehr

störend in Erscheinung. Die Frequenz  $f_0$  wird in der Regel zu 420 Hz, 5 kHz oder 10 kHz gewählt. Die Frequenz von 420 Hz wird eingesetzt, damit man etwa in der Mitte zwischen der 7. und 8. Oberschwingung der Netzfrequenz von 50 Hz liegt (Fourierzerlegung z.B. von nichtsinusförmigen Verbraucherströmen am 50-Hz-Netz).

### 6.2.2 Messung von Impedanzen

Mit der Wechselstrommessbrücke lassen sich Impedanzen messen, die aus einer Induktivität  $L$  oder einer Kapazität  $C$  mit oder ohne ohmschen Anteil  $R$  bestehen. Dabei kann  $R$  parallel oder in Reihe zu  $L$  oder  $C$  angeordnet sein. Die Spannung  $\underline{U}_{d0}$  in der Brückendiagonalen ist nur dann Null, wenn sie nach Betrag und Phase Null ist. Damit muss sowohl ein Betrags- als auch ein Phasenabgleich durchgeführt werden. Messbrücken dieser Art besitzen also immer zwei Abgleichelemente, die wechselseitig solange einzustellen sind, bis die Spannung  $\underline{U}_{d0}$  Null ist. Da zwei Abgleichbedingungen vorhanden sind, können auch zwei unbekannte Größen für die zu messende Impedanz bestimmt werden.

Angewendet wird dieses Verfahren zur Bestimmung der Elemente von realen Induktivitäten und Kapazitäten. Das Ersatzschaltbild einer realen Induktivität besteht aus der Reihenschaltung der Induktivität mit einem ohmschen Widerstand, der im wesentlichen durch den Widerstand der Wicklung verursacht wird. Ein realer Kondensator wird durch den Kondensator mit einem parallelgeschalteten Widerstand dargestellt, wobei der Widerstand den Isolationswiderstand erfasst. Neben diesen anschaulichen Ersatzschaltbildern werden noch zwei weitere, weniger anschauliche, verwendet: In Reihe zu  $C$  wird ein Widerstand  $R_r$  bzw. parallel zu  $L$  ein Widerstand  $R_p$  geschaltet. Beide Darstellungsarten lassen sich ineinander umrechnen. Für den Abgleichfall gilt prinzipiell die gleiche Ableitung wie bei der Gleichstrom-Messbrücke mit dem Unterschied, dass an die Stelle der Widerstände teilweise oder insgesamt Impedanzen treten. Zur Berechnung setzt man für die Impedanzen die Summe aus einem Wirk- und einem Blindanteil ein:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= R_1 + jX_1; & \underline{Z}_2 &= R_2 + jX_2; \\ \underline{Z}_3 &= R_3 + jX_3; & \underline{Z}_4 &= R_4 + jX_4 \end{aligned} \quad (\text{VI.20})$$

Die Abgleichbedingung lautet:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_4 &= \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 \Rightarrow (R_1 + jX_1) \cdot (R_4 + jX_4) \\ &= (R_2 + jX_2) \cdot (R_3 + jX_3) \end{aligned} \quad (\text{VI.21})$$

$$\begin{aligned} R_1 \cdot R_4 - X_1 \cdot X_4 + j(R_1 \cdot X_4 + R_4 \cdot X_1) \\ = R_2 \cdot R_3 - X_2 \cdot X_3 + j(R_2 \cdot X_3 + R_3 \cdot X_2) \end{aligned} \quad (\text{VI.22})$$

Real- und Imaginärteil müssen jeweils Null sein.

$$\text{Realteil} = 0: \quad R_1 \cdot R_4 - X_1 \cdot X_4 = R_2 \cdot R_3 - X_2 \cdot X_3$$

$$\text{Imaginärteil} = 0: \quad R_1 \cdot X_4 + R_4 \cdot X_1 = R_3 \cdot X_2 + R_2 \cdot X_3 \quad (\text{VI.23})$$

Damit können beispielsweise Realteil  $R_1$  und Imaginärteil  $X_1$  von  $\underline{Z}_1$  aus den bekannten Größen  $R_2$  bis  $R_4$  und  $X_2$  bis  $X_4$  bestimmt werden.

Ist der reale Kondensator als Parallelschaltung aus  $R_p$  und  $1/j\omega C_p$  gegeben, lässt sie sich in eine äquivalente Reihenschaltung aus  $R_r$  (Realteil) und  $C_r$  (Imaginärteil) umrechnen und in die Gleichungen (VI.20) bis (VI.23) einsetzen. Dazu wird der Ausdruck der Parallelschaltung konjugiert komplex erweitert und in die Summe aus Real- und Imaginärteil zerlegt:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \frac{R_p \cdot \frac{1}{j\omega C_p}}{R_p + \frac{1}{j\omega C_p}} = \frac{R_p}{R_p j\omega C_p + 1} = \frac{R_p (1 - j\omega R_p C_p)}{R_p^2 \omega^2 C_p^2 + 1} \\ \underline{Z} &= \frac{R_p}{R_p^2 \omega^2 C_p^2 + 1} - j \frac{R_p^2 \omega C_p}{R_p^2 \omega^2 C_p^2 + 1} \\ &= \frac{R_p}{R_p^2 \omega^2 C_p^2 + 1} + \frac{1}{j\omega} \underbrace{\left[ \frac{R_p^2 \omega^2 C_p}{R_p^2 \omega^2 C_p^2 + 1} \right]}_{\frac{1}{C_r}} \\ \Rightarrow R_r &= \frac{R_p}{R_p^2 \omega^2 C_p^2 + 1}; & C_r &= \frac{R_p^2 \omega^2 C_p^2 + 1}{R_p^2 \omega^2 C_p} \end{aligned} \quad (\text{VI.24})$$

Die Abgleichbedingungen können auch in der Exponentialform dargestellt werden.

$$\underline{Z} = R + jX = |\underline{Z}| \cdot e^{j\varphi} = Z \cdot e^{j\varphi} \Rightarrow \quad (\text{VI.25})$$

$$\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_4 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 \quad \text{und} \quad \varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3 \quad (\text{VI.26})$$

Die Anwendungen von Messbrücken zur Widerstands- und Impedanzmessung werden in den Kapiteln VII.1 und VII.2 gezeigt.

### 6.3 Vergleich mit bekanntem Widerstand – Spannungsvergleich

Das vor allem in der Präzisionsmesstechnik angewendete Verfahren ist in Bild VI-10 dargestellt. Ein bekannter Widerstand  $R_N$  und der unbekannte Widerstand  $R_x$  sind in Reihe geschaltet und werden vom gleichen Strom durchflossen. Dann ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} U_N &= I \cdot R_N; & U_x &= I \cdot R_x \\ \text{ineinander eingesetzt folgt:} \end{aligned}$$

$$R_x = R_N \frac{U_x}{U_N} \quad (\text{VI.27})$$

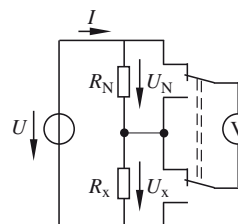


**Bild VI-10**  
Widerstands-  
messung durch  
Spannungsvergleich

Voraussetzung bei dieser Ableitung ist, dass der Innenwiderstand des Spannungsmessers groß gegenüber den Widerständen  $R_N$  und  $R_x$  ist. Kann er nicht vernachlässigt werden, ist die hierdurch verursachte Messabweichung um so kleiner, je mehr die zwei Widerstände in ihrem Wert übereinstimmen.

#### 6.4 Messung von Strom und Spannung

Werden an einem unbekannten Widerstand Strom und Spannung gleichzeitig gemessen, kann der Widerstandswert mit dem Ohmschen Gesetz berechnet werden. Bild VI-11 zeigt das Verfahren. Zur Erfassung von  $U$  und  $I$  sind zwei Messschaltungen möglich.

In der *spannungsrichtigen Schaltung* (Bild VI-11a) wird die am Widerstand anliegende Spannung  $U$  richtig gemessen, der Strommesser erfasst zusätzlich den Strom  $\Delta I$  durch den Spannungsmesser mit dem Innenwiderstand  $R_U$ . Die hierdurch verursachte systematische relative Messabweichung berechnet sich wie folgt:

Angezeigter (gemessener) Wert  $x_a = R_x \parallel R_U$ ; richtiger Wert  $x_r = R_x$ ; eingesetzt folgt:

$$f = \frac{R_x \parallel R_U}{R_x} - 1 = \frac{R_x \cdot R_U}{R_x + R_U} \cdot \frac{1}{R_x} - 1 = \frac{R_U - R_x - R_U}{R_x + R_U}$$

systematische relative Messabweichung

$$f = \frac{1}{1 + \frac{R_U}{R_x}} \quad (\text{VI.28})$$

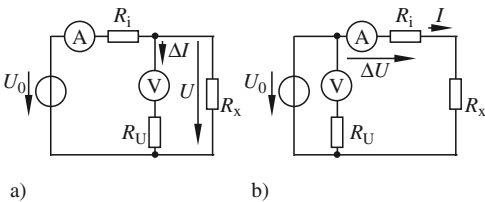


**Bild VI-11** Widerstandsbestimmung durch Strom- und Spannungsmessung  
a) spannungsrichtige Schaltung  
b) stromrichtige Schaltung

Die Messabweichung ist als systematische Messabweichung korrigierbar und um so kleiner, je größer der Innenwiderstand  $R_U$  des Messgerätes im Verhältnis zu dem zu messenden Widerstand  $R_x$  ist. Damit eignet sich dieses Verfahren besonders zum Messen kleiner Widerstände.

In der *stromrichtigen Schaltung* (Bild VI-11b) wird der Strom richtig gemessen, der Spannungsmesser misst zusätzlich den Spannungsfall  $\Delta U$  am Innenwiderstand  $R_i$  des Strommessers. Die relative systematische Messabweichung berechnet sich zu:

Angezeigter (gemessener) Wert  $x_a = R_i + R_x$ ; richtiger Wert  $x_r = R_x$ .

Setzt man diese Ausdrücke in die Formel für die relative Messabweichung ein, folgt:

Relative Messabweichung

$$f = \frac{R_i + R_x}{R_x} - 1 = \frac{R_i}{R_x} \quad (\text{VI.29})$$

Die Messabweichung ist als systematische Messabweichung korrigierbar und um so kleiner, je größer der unbekannte Widerstand  $R_x$  im Verhältnis zum Innenwiderstand  $R_i$  des Strommessers ist. Deshalb ist dieses Verfahren bevorzugt zur Messung großer Widerstände einsetzbar.

#### 6.5 Widerstandsmessung mit analogen Multimetern

Analoge Multimeter bieten die Möglichkeit, den Wert von Widerständen wenigstens überschlägig zu messen. Dazu werden zwei Verfahren benutzt.

*Spannungsvergleich oder Parallelverfahren:* Zunächst wird, siehe Bild VI-12, bei Leerlauf an den Messklemmen A und B ( $R_x \rightarrow \infty$ ) mit dem Potentiometer  $R_v$  Vollausschlag am Messinstrument eingestellt.  $R_U$  ist der Innenwiderstand des Messinstrumentes,  $U_{sp}$  wird von einer eingebauten Batterie geliefert. Dann gilt für  $U_0$ :

$$U_0 = U_{sp} \cdot \frac{R_U}{R_U + R_v} \quad (\text{VI.30})$$

Wird der unbekannte Widerstand  $R_x$  angeschlossen, ergibt sich für die Spannung  $U_x$ :

$$U_x = U_{sp} \cdot \frac{R_U \parallel R_x}{R_U \parallel R_x + R_v} \quad (\text{VI.31})$$

Löst man die Gleichung (VI.31) nach  $R_x$  auf und setzt für  $U_{sp}$  den entsprechend umgeformten Ausdruck aus Gleichung (VI.30) ein, so folgt

$$R_x = \frac{R_U \cdot R_v}{R_U + R_v} \cdot \frac{\frac{U_x}{U_0}}{1 - \frac{U_x}{U_0}} \quad (\text{VI.32})$$

Mit den Abkürzungen  $\beta = U_x/U_0$  und  $R_U \parallel R_v = R_{iv}$  ergibt sich die Gleichung (VI.33)

$$R_x = R_{iv} \cdot \frac{\beta}{1 - \beta} \quad (\text{VI.33})$$

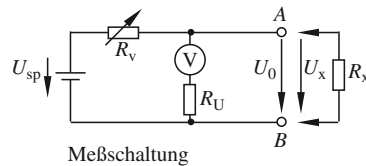


**Bild VI-12** Widerstandsmessung nach dem Prinzip des Spannungsvergleiches

In Bild VI-12 ist auch der daraus folgende Skalenverlauf dargestellt. Für  $U_x = U_0$  (Vollausschlag) geht  $R_x \rightarrow \infty$ ; für  $U_x = 0$  ist  $R_x = 0$ . Eine überschlägige Messung von  $R_x$  ist im Bereich  $0,1 \cdot R_{IU} < R_x < 10 \cdot R_{IU}$  möglich.

Durch entsprechende Wahl von  $R_v$  und  $R_{IU}$  (z.B. Vorwiderstände) lassen sich mehrere „Messbereiche“ einstellen. Nach dem Abtrennen des zu messenden Widerstandes ist das Instrument auszuschalten, weil sonst ein ständiger Strom durch das Instrument fließt und die Lebensdauer der Batterie herabsetzt.

**Stromvergleich oder Reihenverfahren:** Bei diesem Verfahren (Bild VI-13) wird der Strommesser bei Messbeginn und bei Kurzschluss zwischen den Messklemmen A und B durch Verändern des Widerstandes  $R_v$  auf Vollausschlag eingestellt. Dann ergibt sich für  $I_0$ :

$$I_0 = \frac{U_{sp}}{R_v + R_I} \quad (\text{VI.34})$$

$R_I$  ist der Innenwiderstand des Strommessers und  $U_{sp}$  die Spannung einer eingebauten Batterie. Mit dem unbekannten Widerstand  $R_x$  zwischen den Anschlüssen A und B fließt dann der Strom

$$I_x = \frac{U_{sp}}{R_v + R_I + R_x} \quad (\text{VI.35})$$

Gleichung (VI.35) wird nach  $R_x$  aufgelöst, und mit Gleichung (VI.34) folgt:

$$R_x = (R_v + R_I) \cdot \frac{1 - \frac{I_x}{I_0}}{\frac{I_x}{I_0}} \quad (\text{VI.36})$$

Mit den Abkürzungen  $I_x/I_0 = \beta$  und  $(R_v + R_I) = R_{II}$  ergibt sich:

$$R_x = R_{II} \cdot \frac{1 - \beta}{\beta} \quad (\text{VI.37})$$

Der sich daraus ergebende Skalenverlauf ist ebenfalls in Bild VI-13 dargestellt.

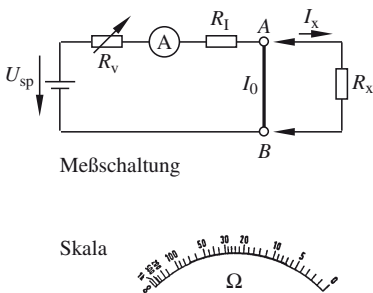


**Bild VI-13** Widerstandsmessung nach dem Prinzip des Stromvergleiches

Der unbekannte Widerstand  $R_x$  lässt sich überschlägig im Bereich  $0,1 \cdot R_{II} < R_x < 10 \cdot R_{II}$  messen. Nach Abtrennen des zu messenden Widerstandes ist der Strom

durch das Instrument Null, so dass die Lebensdauer der Batterie nicht dadurch verkürzt wird, dass das Instrument nicht ausgeschaltet wurde.

## 7 Leistungsmessung

Neben der Wirkleistung  $P$  sind vor allem in der Energietechnik noch die Blindleistung  $Q$  und die Scheinleistung  $S$  von Bedeutung. Zwischen ihnen besteht die Beziehung

$$S^2 = P^2 + Q^2 \quad (\text{VI.38})$$

Hier wurde vorausgesetzt, dass die Spannungs- und Stromverläufe sinusförmig sind.

### 7.1 Wirkleistungsmessung

Die Wirkleistung  $P$  ist für beliebige Spannungs- und Stromverläufe definiert über

$$\bullet \text{ Wirkleistung } P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt \quad (\text{VI.39})$$

Für den Fall, dass Spannung und Strom sinusförmigen Verlauf haben, ergibt sich

$$\bullet P = U \cdot I \cdot \cos \varphi \quad (\text{VI.40})$$

$U, I$  Effektivwerte von Spannung und Strom in V bzw. A,  $\cos \varphi$  Phasenwinkel zwischen  $U$  und  $I$

Ein positiver Winkel bedeutet, dass die Spannung dem Strom voreilt. Damit besitzen ideale Induktivitäten einen Phasenwinkel  $\varphi = +90^\circ$ , ideale Kapazitäten  $\varphi = -90^\circ$ .

Die Leistungsmessung erfolgt entweder analog mit einem elektrodynamischen Messwerk oder durch Auswertung der Beziehung nach Gleichung (VI.39) durch elektronische Baugruppen. Die Klemmenbezeichnungen sind DIN 43807 entnommen und in Bild VI-14 eingetragen. Die vom Strom durchflossene Spule wird im Schaltzeichen als waagerechter, durchgehender, dicker Leiter eingezeichnet und als *Strompfad* bezeichnet, der senkrechte dünnere Strich entspricht der Spannungsspule und heißt *Spannungspfad*.

#### 7.1.1 Wirkleistungsmessung bei Wechselstrom

Strom und Spannung werden nach Bild VI-14 gleichzeitig gemessen, so dass sich, wie bei der Widerstandsmessung im Kapitel VI.6.4, Bild VI-11, zwei mögliche Schaltungen ergeben: *Stromrichtige Schaltung* (Bild VI-14a) und *spannungsrichtige Schaltung* (Bild VI-14b). Die durch die Messschaltung entstehenden systematischen Messabweichungen nach Gleichung (VI.28) und (VI.29) sind auch hier gültig. Die Lastimpedanzen  $Z_L$  sind in der Regel vergleichsweise klein, so dass man nach Kapitel VI.6.4 die spannungsrichtige Schaltung verwenden sollte. In der Praxis dagegen wird vorwiegend die stromrichtige Schaltung eingesetzt, weil je ein Spannungs- und ein Strompfadanschluss am Leistungsmesser gekennzeichnet sind (Stern, Pfeil, ...) und die Vereinbarung gilt, dass die gekennzeichneten Anschlüsse zu verbinden und an einen der Außenleiter

L1, L2 oder L3 anzuschließen sind. Diese Regelung ist erforderlich, um bei der Aron-Schaltung eine Aussage über das Vorzeichen der gemessenen Leistung zu bekommen (Kapitel VI.7.1.4).

■ **Beispiel VI.2:** Ein Leistungsmesser mit den Messbereichen 100 V und 5 A wird im Spannungspfad mit 50 V und im Strompfad mit 10 A betrieben. Damit wird der Strompfad überlastet, obwohl der Leistungsmesser gerade Vollausschlag zeigt.

Um die Überlastung eines Leistungsmessers ohne eingebauten Überlastschutz erkennen zu können, wird die *vollständige Messschaltung* nach Bild VI-14c eingesetzt. Dazu schaltet man einen Strommesser in Reihe zum Strompfad und einen Spannungsmesser parallel zum Spannungspfad. Diese *Kontrollinstrumente* können die Klasse 2,5 oder 5 besitzen, da sie nur zum Erkennen der ungefähren Größe von Spannung und Strom dienen und gegebenenfalls eine Überlastung anzeigen. Da die Netzspannung relativ konstant ist, wird oft auf den zusätzlichen Spannungsmesser verzichtet. Leistungsmesser mit elektrodynamischem Messwerk besitzen in der Regel keinen Überlastschutz, so dass hier häufig die vollständige Messschaltung zum Einsatz kommt. Wird die Leistung auf elektronischem Wege gemessen, erübrigt sich der Einsatz der Kontrollinstrumente dann, wenn diese Geräte eine eingebaute Überlasterkennung besitzen. Hinweis: Die Begriffe „spannungsrichtig“ und „stromrichtig“ beziehen sich durchgehend auf die Verbraucherseite.

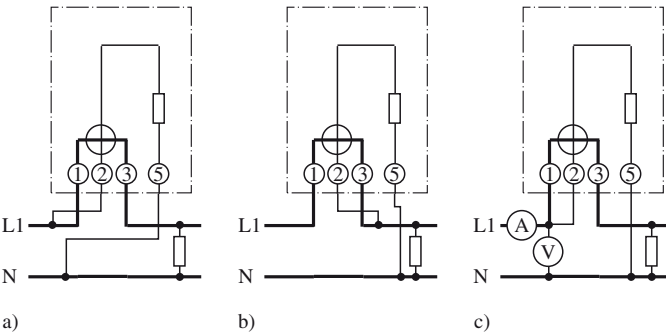


**Bild VI-14**  
Leistungsmesserschaltungen  
a) stromrichtig  
b) spannungsrichtig  
c) vollständige Messschaltung

### 7.1.2 Wirkleistungsmessung in Drehstromsystemen

Drehstromsystem ist die übliche Bezeichnung für ein dreiphasiges Wechselstromsystem. Die drei Spannungen haben untereinander einen Phasenwinkel von  $120^\circ$  bzw.  $240^\circ$ . Hier ist zu unterscheiden, ob das Drehstromsystem symmetrisch belastet ist (gleiche Impedanz der drei im Stern und/oder im Dreieck geschalteten Verbraucher), oder aber unsymmetrisch belastet ist (die drei an die Aussenleiter angeschlossenen Lastimpedanzen sind nicht gleich). Bei symmetrischer Last kann der Null- oder Neutralleiter entfallen!

### 7.1.3 Symmetrisch belastetes Drehstromsystem

Ist die Last im Stern geschaltet und der Sternpunkt zugänglich, wird der nicht gekennzeichnete Anschluss

des Spannungspfad an den Sternpunkt angeschlossen. Andernfalls wird eine Messschaltung nach Bild VI-15 eingesetzt. Die zwei externen Widerstände  $R_U$  sind gleich dem Widerstand des Spannungspfad und bilden einen künstlichen Sternpunkt (Bild VI-15). Der Null- oder Neutralleiter kann entfallen.

Auch hier wird in kritischen Fällen die *vollständige Messschaltung* eingesetzt, wobei die Kontrollinstrumente grundsätzlich so eingeschaltet werden, dass ein Strommesser in Reihe zu jedem Strompfad eines Leistungsmessers und ein Spannungsmesser parallel zu jedem Spannungspfad in die Schaltung eingefügt wird.

Da in der Regel die gesamte Wirkleistung  $P_{\text{ges}}$  gemessen werden soll, muss der vom Leistungsmesser gemessene Wert  $P_1$  mit 3 multipliziert werden. Es gibt Leistungsmesser, die diese Multiplikation intern vornehmen und damit die Gesamtwirkleistung anzeigen.

### 7.1.4 Beliebig belastetes Dreileiter-Drehstromsystem

Hier wird vorwiegend das *Zwei-Leistungsmesser-Verfahren* nach Aron eingesetzt. Die in Bild VI-16 dargestellte Anordnung der zwei Leistungsmesser in der Messschaltung kann man anhand der Momentanwerte von Strom und Spannung ableiten. Die Last ist im Stern geschaltet, der Index „\*“ kennzeichnet den Sternpunkt.

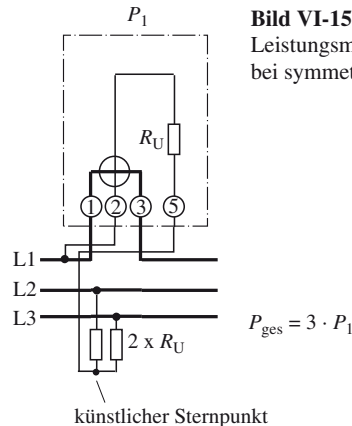
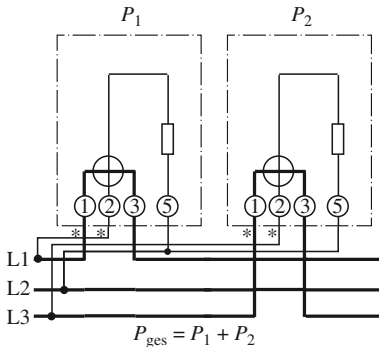
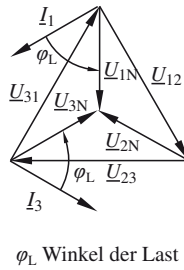


**Bild VI-15**  
Leistungsmesserschaltung bei symmetrischer Last





a)

 $\varphi_L$  Winkel der Last

b)

**Bild VI-16**

Zwei-Leistungsmesser-Verfahren nach Aron

- a) Anordnung der Leistungsmesser  
b) Zeigerdiagramm für den Sonderfall der symmetrischen Last in Sternschaltung

$$\begin{aligned}
 p &= u_{1*} \cdot i_1 + u_{2*} \cdot i_2 + u_{3*} \cdot i_3 \\
 i_1 + i_2 + i_3 &= 0 \Rightarrow i_2 = -i_1 - i_3 \\
 p &= i_1 \cdot (u_{1*} - u_{2*}) + i_3 \cdot (u_{3*} - u_{2*}) ; \\
 u_{1*} - u_{2*} &= u_{12} ; \quad u_{3*} - u_{2*} = u_{32} \\
 p &= i_1 \cdot u_{12} + i_3 \cdot u_{32}
 \end{aligned}
 \quad (VI.41)$$

Aus Gleichung (VI.41) folgt, dass kein Null- oder Neutralleiter angeschlossen sein darf, weil sonst die verwendete Beziehung  $i_1 + i_2 + i_3 = 0$  nicht mehr gilt. Der Übergang von den Momentanwerten zu den Effektivwerten wird z.B. beim elektrodynamischen Messwerk durch die Trägheit des mechanischen Systems, bestehend aus Drehspule mit Zeiger, bewirkt oder aber in elektronischen Messgeräten durch Mittelwertbildung.

Ausgedrückt durch  $U$ ,  $I$  und  $\cos \varphi$  ergibt sich die gesamte umgesetzte Wirkleistung  $P_{\text{ges}}$  für den allgemeinen Lastfall zu:

$$P_{\text{ges}} = U_{12} \cdot I_1 \cdot \cos \varphi_1 + U_{32} \cdot I_3 \cdot \cos \varphi_3 \quad (VI.42a)$$

Formelgrößen siehe Text

Darin ist  $\varphi_1$  der Winkel zwischen  $\underline{U}_{12}$  und  $\underline{I}_1$  und entsprechend  $\varphi_3$  der zwischen  $\underline{U}_{32}$  und  $\underline{I}_3$ . Die Ausschläge der zwei Leistungsmesser sind *vorzeichenrichtig* zu addieren, da auch negative Ausschläge möglich sind (siehe unten). In der Praxis ist der Fall der unsymmetrischen Last in Sternschaltung kritisch, da die Höhe der Spannungen an den Lastimpedanzen vom Wert der einzelnen Lastimpedanzen abhängt.

In Bild VI-16 ist das Zeigerdiagramm für symmetrische Last in Sternschaltung dargestellt. Die Phasenwinkel der drei Lastimpedanzen sind gleich. Bezeichnet man sie mit  $\varphi_L$  und zerlegt die zwei Winkel aus Gleichung (VI.42a) in die Summe oder Differenz aus dem Phasenwinkel  $\varphi_L$  der Last und dem Winkel von  $30^\circ$  (zwischen Leiterstrom und Mittelpunktspannung), so erhält man

$$\begin{aligned}
 P_{\text{ges}} &= U_{12} \cdot I_1 \cdot \cos (\varphi_L + 30^\circ) + U_{32} \cdot I_3 \\
 &\quad \times \cos (\varphi_L - 30^\circ); \\
 &\quad \text{symmetrische Last}
 \end{aligned}
 \quad (VI.42b)$$

$\varphi_L$  Winkel der Last

Hinweis:  $\underline{U}_{32}$  hat die entgegengesetzte Zeigerrichtung von  $\underline{U}_{23}$ .

Anhand des Lastfalles „Symmetrische Last“ wird auf einige Besonderheiten bei der Leistungsmessung nach Aron hingewiesen:

1. Nach Gleichung (VI.42b) hat *ein* Leistungsmesser einen negativen Ausschlag bei  $\varphi_L > 60^\circ$  oder  $\varphi_L < -60^\circ$ . Bei Zeigerinstrumenten muss dann der Spannungspfad umgepolt werden. Eine Umpolung des Strompfades ist möglich, aber ungünstig, da Ströme im Ampere-Bereich geschaltet werden müssen und die Unterbrechung von induktiven Verbrauchern wegen möglicher Spannungsüberhöhungen problematisch sein kann. Viele Leistungsmesser besitzen deshalb einen entsprechenden Umschalter im Spannungspfad. Die so abgelesene Leistung ist bei der Berechnung der Gesamtwirkleistung negativ einzusetzen.
2. Auch der Ausschlag Null ist bei *einem* Leistungsmesser möglich, wenn gilt:  $\varphi_L = 60^\circ$  oder  $\varphi_L = -60^\circ$ .
3. Beim Anschluss von idealen Blindwiderständen sind die Anzeigen der zwei Leistungsmesser *nicht Null*, da sie nicht den Winkel der Last mit  $+90^\circ$  oder  $-90^\circ$  erhalten, sondern einen um  $+30^\circ$  oder  $-30^\circ$  veränderten Winkel. Allerdings sind die Ausschläge der zwei Leistungsmesser entgegengesetzt gleich groß, so dass sich als Gesamtwirkleistung nach vorzeichenrichtiger Addition der korrekte Wert Null ergibt.

### 7.1.5 Beliebig belastetes Vierleiter-Drehstromsystem

Die Leistungsmessung geschieht durch drei Leistungsmesser, die nach Bild VI-17 angeschlossen werden. Dabei kann die Last aus einer beliebigen Kombination von Verbrauchern bestehen (Verbraucher im Dreieck und/oder im Stern geschaltet und/oder Wechselstromverbraucher). Die gesamte umgesetzte Wirkleistung  $P_{\text{ges}}$  ergibt sich aus der Summe der drei von den Leistungsmessern angezeigten Einzelwirkleistungen:  $P_{\text{ges}} = P_1 + P_2 + P_3$ .



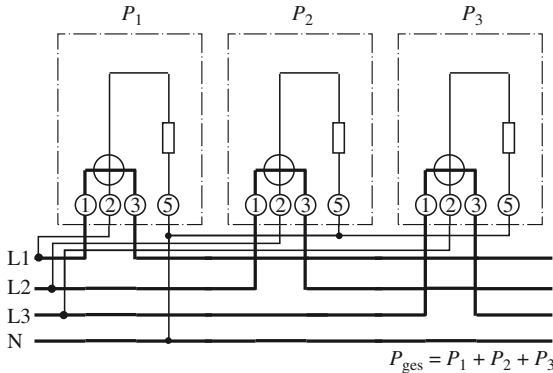


**Bild VI-17**

Leistungsmesserschaltung  
im beliebig belasteten Vierleitersystem

## 7.2 Blindleistungsmessung

Für sinusförmigen Spannungs- und Stromverlauf berechnet sich die Blindleistung  $Q$  zu

$$\bullet \text{ Blindleistung } Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi_L \quad (\text{VI.43})$$

$\varphi_L$ : Winkel der Last;  $U$ ,  $I$  Effektivwerte von Spannung und Strom in V bzw. A

In größeren Firmen muss die meist durch Motoren verursachte induktive Blindleistung kompensiert werden, weil die zugehörigen Ströme das Netz zusätzlich belasten.

### 7.2.1 Blindleistungsmessung bei Wechselstrom

Sie wird in der Praxis selten angewendet. Bei den analog anzeigenden Blindleistungsmessern wird ein Phasenschieber eingebaut, der im Spannungspfad eine Phasenverschiebung von  $90^\circ$  erzeugt ( $\sin \varphi = \cos(90^\circ - \varphi)$ ). Bei den digital anzeigenden Leistungsmessern wird der Phasenwinkel elektronisch gemessen und die Blindleistung nach Gleichung (VI.43) rechnerisch ermittelt.

### 7.2.2 Blindleistungsmessung in symmetrisch belasteten Dreileiter-Drehstromsystemen

Im Zeigerbild sind Spannung und Strom für einen ohmschen Verbraucher  $R_L$  eingetragen (Bild VI-18). Damit ist der Phasenwinkel der Last Null. Der Leis-

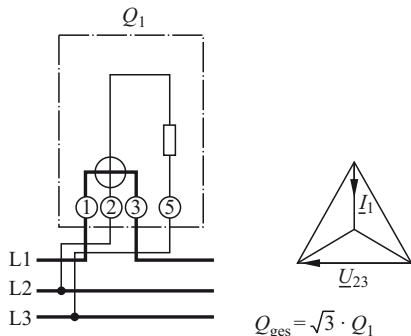


**Bild VI-18** Blindleistungsmessung im symmetrisch belasteten Dreileiter-Drehstromsystem; Zeigerbild für ohmsche Last

tungsmesser erhält aber die Spannung  $\underline{U}_{23}$  und den Strom  $\underline{I}_1$ , die den Winkel  $90^\circ$  zueinander haben. Er zeigt damit die Blindleistung für diesen Fall korrekt zu Null an. Andere Phasenwinkel der Last werden für die Blindleistungsmessung ebenfalls richtig erfasst. Wegen der symmetrischen Last kann der Nulleiter entfallen.

Die gesamte Blindleistung erhält man mit folgender Beziehung:

$$Q_{\text{ges}} = \sqrt{3} \cdot Q_1; \quad \text{symmetrische Last} \quad (\text{VI.44})$$

$Q_1$  vom Leistungsmesser angezeigte Blindleistung in Var;  $Q_{\text{ges}}$  gesamte Blindleistung in Var

Da die Spannung am Spannungspfad um den Faktor  $U_{23}/U_{\text{IN}} = \sqrt{3}$  zu groß ist, muss zur Berechnung der gesamten Blindleistung  $Q_{\text{ges}}$  zunächst durch  $\sqrt{3}$  geteilt und anschließend die gemessene Blindleistung  $Q_1$  mit 3 multipliziert werden. Das ergibt den Faktor  $3/\sqrt{3} = \sqrt{3}$  in Gleichung (VI.44).

### 7.2.3 Blindleistungsmessung in beliebig belasteten Vierleiter-Drehstromsystemen

Die Messschaltung nach Bild VI-19 entspricht der Aron-Schaltung bei der Wirkleistungsmessung. Die Gesamt-Blindleistung wird unabhängig von der Art der angeschlossenen Last richtig gemessen, wenn folgende Grundsätze beachtet werden:

1. Die angezeigten Blindleistungen  $Q_1$  und  $Q_2$  der zwei Leistungsmesser sind vorzeichenrichtig zu addieren und anschließend mit dem Faktor  $\sqrt{3}$  zu multiplizieren.
2. Beim Anschluss der zwei Leistungsmesser ist auf richtige Polung zu achten (Bild VI-19).

Der Faktor  $\sqrt{3}$  entsteht auf die gleiche Weise wie im symmetrisch belasteten Drehstromsystem, jetzt aber über den zu groß gemessenen Strom.

$$Q_{\text{ges}} = \sqrt{3} \cdot (Q_1 + Q_2), \quad \text{beliebige Last} \quad (\text{VI.45})$$

$Q_1$ ,  $Q_2$  von den Leistungsmessern angezeigte Blindleistung in Var;  $Q_{\text{ges}}$  gesamte Blindleistung in Var

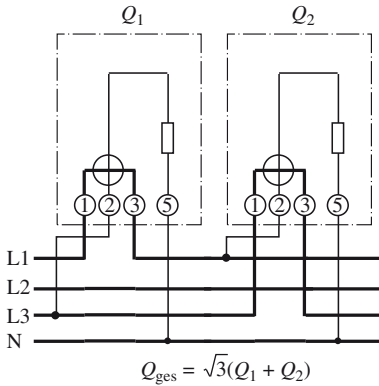


**Bild VI-19** Blindleistungsmessung im beliebig belasteten Drehstromsystem

### 7.3 Scheinleistungsmessung

Die Scheinleistung  $S$  ist das Produkt aus Spannung und Strom für  $\varphi_L = 0^\circ$ :

•  $Scheinleistung \ S = U \cdot I$  (VI.46)

Sie wird gemessen, indem entweder  $U$  und  $I$  getrennt gemessen und dann multipliziert werden, oder aber Spannungswandlers- und Strompfad erhalten je einen Gleichrichter mit anschließender Glättung im Spannungspfad. Dann werden beide Größen multipliziert, entweder analog im elektrodynamischen Messwerk oder analog oder digital auf elektronischem Wege im digital anzeigenden Leistungsmesser.

### 7.4 Messbereichserweiterung bei der Leistungsmessung

Für die Messbereichserweiterung von Spannungs- und Strompfad sind grundsätzlich die im Kapitel VI.3 aufgeführten Maßnahmen mit Vor- und Parallelwiderstand möglich. Allerdings wird der Einsatz von

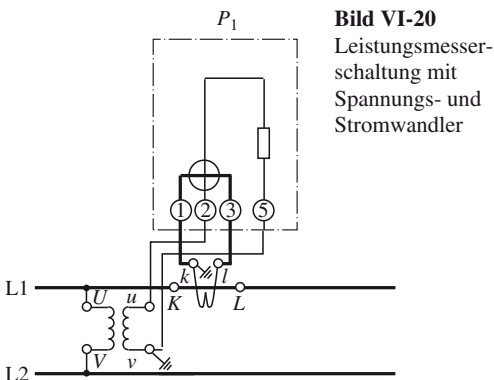


**Bild VI-20** Leistungsmessung mit Spannungswandlers- und Stromwandler

Spannungswandlers- und Stromwandlern bevorzugt, weil diese neben einer günstigeren Leistungsbilanz (keine Verluste an Vor- und Nebenwiderständen) eine galvanische Trennung zwischen Leistungskreis und Mess-

kreis bewirken. Bild VI-20 zeigt eine Leistungsmesserschaltung mit Spannungs- und Stromwandler. Eine Kenngröße für den Spannungswandler ist die Nennübersetzung  $k_{NU}$ .

- *Nennübersetzung des Spannungswandlers*

$$k_{NU} = \frac{U_{NP}}{U_{Ns}} \quad (VI.47)$$

$U_{NP}$  primärseitige Nennspannung in V;  $U_{Ns}$  sekundärseitige Nennspannung in V

Die sekundärseitige Nennspannung ist in der Regel zu 100 V festgelegt, wenn die primärseitige Nennspannung anliegt.

- *Nennübersetzung des Stromwandlers*

$$k_{NI} = \frac{I_{NP}}{I_{Ns}} \quad (VI.48)$$

$I_{NP}$  primärseitiger Nennstrom in A;  $I_{Ns}$  sekundärseitiger Nennstrom in A

Der sekundärseitige Nennstrom beträgt in der Regel 5 A bei primärseitigem Nennstrom.

Bei der Leistungsmessung mit Spannungs- und Stromwandlern ergibt sich die Beziehung zwischen der mit dem Leistungsmesser gemessenen Leistung  $P_1$  und der tatsächlich in der Lastimpedanz  $Z$  umgesetzten Wirkleistung  $P_Z$  aus

$$P_Z = k_{NU} \cdot k_{NI} \cdot P_1 \quad (VI.49)$$

$P_Z$  Wirkleistung in der Impedanz  $Z$  in W;  $k_{NU}$ ,  $k_{NI}$  siehe Gleichungen (VI.47, 48);  $P_1$  vom Leistungsmesser angezeigte Wirkleistung in W

Wichtig beim Einsatz von Stromwandlern ist, dass sie niemals sekundärseitig im Leerlauf betrieben werden dürfen, weil sonst sehr hohe lebensgefährliche Spannungen anliegen. Pro Spannungswandler können sekundärseitig mindestens drei Instrumente (Spannungspfade, Spannungsmesser) parallelgeschaltet werden; pro Stromwandler ebenfalls mindestens drei (Strompfade, Strommesser) in Reihe. Beide Wandler sind sekundärseitig zu erden, damit bei Fehlern im Wandler (sich verringende Übergangswiderstände zwischen Primär- und Sekundärwicklung) sekundärseitig keine unzulässig hohen Spannungen auftreten.

### 7.5 Leistungsfaktormessung

Der Leistungsfaktor  $\cos \varphi$  ist bei sinusförmigen Spannungen und Strömen gleich dem Kosinus des Winkels  $\varphi$  zwischen  $\underline{U}$  und  $\underline{I}$ . Er wird entweder rechnerisch über zwei der drei gemessenen Größen  $P$ ,  $Q$  und  $S$  über die Beziehungen  $\varphi = \arctan(Q/P)$  oder  $\varphi = \arccos(P/S)$  bestimmt, oder er wird mit einem entsprechend konstruierten  $\cos\varphi$ -Messgerät mit Kreuzspulmesswerk gemessen. Digital anzeigende Leistungsmesser setzen häufig das rechnerische Verfahren ein.

## 8 Messung der Arbeit

Die elektrische Arbeit  $W$  berechnet sich bei konstanter Leistung  $P$  zu:

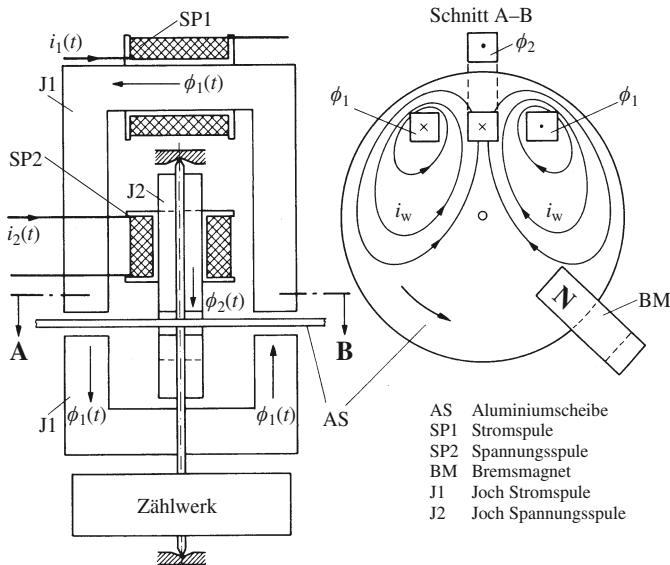


**Bild VI-21**  
 Prinzip eines Induktionszählers  
 für Wechselstrom

- **Arbeit**  $W = P \cdot t$  für  $P = \text{const}$  (VI.50a)

$W$  elektrische Arbeit in Ws bzw. kWh,  $P$  Leistung in W bzw. kW,  $t$  Zeit in s bzw. h

Ändert sich die Leistung mit der Zeit, müssen die Momentanwerte addiert werden. Mathematisch ausgedrückt heißt das, dass über die Momentanwerte  $p(t)$  der Leistung integriert werden muss:

- **Arbeit**  $W = \int_0^T p(t) dt$  (VI.50b)

$W$  elektrische Arbeit in Ws bzw. kWh,  $p(t)$  Momentanwert der Leistung in W bzw. kW (zeitabhängig),  $T$  Dauer der Erfassung in s bzw. h

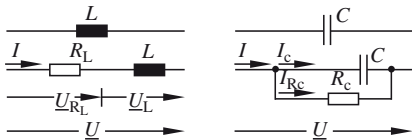
Die Messung der elektrischen Arbeit geschieht in jedem Haushalt zum Zweck der Gebührenerfassung mit einem *Elektrizitätszähler*, der nach dem Prinzip des *Induktionszählers* nach Bild VI-21 aufgebaut ist. Der von der Stromspule SP1 hervorgerufene sinusförmige magnetische Fluss  $\Phi_1$  und der von der Spannungsspule SP2 verursachte magnetische Fluss  $\Phi_2$  bewirken ein resultierendes Drehmoment für die Aluminiumscheibe, das dem Momentanwert der Wirkleistung proportional ist. Der Bremsmagnet BM erzeugt in der Scheibe Wirbelströme, die ein Gegendrehmoment proportional zur Drehzahl bewirken. Sind beide Drehmomente im Gleichgewichtszustand, ist der Momentanwert der Drehzahl der Scheibe dem Momentanwert der Wirkleistung proportional. Über ein Zählwerk werden die Momentanwerte addiert und damit die vom Elektrizitäts-Versorgungsunternehmen (EVU) gelieferte Arbeit gemessen. Sie wird aus praktischen Erwägungen nicht in Wattsekunden, sondern in Kilowattstunden angegeben.

Der dargestellte Induktionszähler ist für die Messung in Wechselstromkreisen ausgelegt, kann aber auf die Erfassung der Arbeit in Drehstromsystemen dadurch erweitert werden, dass die Spulenordnung dreimal (für jeden Aussenleiter getrennt) angebracht wird. Damit sind dann drei Spannungs- und drei Stromspulen vorhanden. Der Anschluss geschieht, wie bei der Leistungsmessung in Wechselstromkreisen oder Drehstromsystemen, nach Bild VI-14 oder Bild VI-17. Intern ist der Elektrizitätszähler für die stromrichtige Messschaltung verdrahtet. Die Proportionalitätskonstante zwischen der Anzahl der Umdrehungen der Aluminiumscheibe und der Arbeit heißt *Zählerkonstante* und wird auf dem Typenschild des Zählers in Umdrehungen/kWh angegeben.

Für die Elektrizitätszähler werden auch elektronische Geräte eingesetzt, die die Gleichung (VI.50b) mathematisch auswerten.  $u(t)$  und  $i(t)$  werden als Momentanwerte in allen 3 Leitern erfasst, multipliziert und integriert. Die Entwicklung dieser elektronischen Elektrizitätszähler war insofern schwierig, weil sie die geringe Ausfallrate, den geringen Messfehler auch bei nichtsinusförmigen Spannungen und vor allem Strömen und den geringen Preis der herkömmlichen Induktionszähler erreichen sollten. Ihr Vorteil liegt darin, dass der Momentanwert der Leistung unmittelbar zur Verfügung steht, dass Leistung und Arbeit jederzeit abrufbar und speicherbar sind und dass eine aktuelle Gebührenerfassung möglich ist. Im Bedarfsfall können die gemessenen Größen dazu dienen, Schaltvorgänge auszulösen (Großverbraucher in kritischen Versorgungsfällen zu- oder abschalten). Auch Blind- und Scheinleistung lassen sich erfassen, speichern und auswerten.

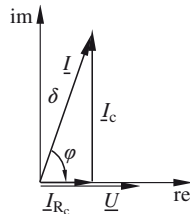
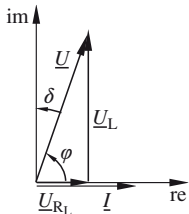
## 9 Messung von $L$ , $C$ , Gütefaktor und Verlustfaktor

In der Praxis hergestellte Induktivitäten und Kapazitäten sind keine idealen Bauelemente in dem Sinne, dass sie einen Phasenwinkel von genau  $+90^\circ$  oder  $-90^\circ$  zwischen  $\underline{U}$  und  $\underline{I}$  besitzen. Vielmehr treten Verluste auf, die in einem einfachen Ersatzschaltbild durch ohmsche Widerstände dargestellt werden (Bild VI-22). In Reihe zu der als ideal angenommenen Induktivität  $L$  liegt der Wirkwiderstand  $R_L$ , der im wesentlichen den Wicklungswiderstand der Spule erfasst. Es wird vorausgesetzt, dass die Spule keinen Eisenkern besitzt, weil dann durch die nichtlineare Beziehung zwischen der magnetischen Feldstärke  $H$  des Eisens und der Flussdichte  $B$  die Induktivität  $L$  vom Strom abhängt. Parallel zum Kondensator  $C$  liegt der Widerstand  $R_C$ , der den Isolationswiderstand darstellt. Damit ergeben sich die Zeigerdiagramme in Bild VI-22.



**Reihenersatzschaltung**

**Parallelersatzschaltung**



Komplexer  
**Widerstand:**  
 $\underline{Z}_L = R_L + j\omega L$

**Verlustwinkel:**  
 $\delta = \frac{\pi}{2} - |\varphi|$

**Verlustfaktor:**  
 $\tan \delta = \frac{P}{|Q|}$

Komplexer  
**Leitwert:**  
 $\underline{Y}_C = (1/R_C) + j\omega C$

**Verlustwinkel:**  
 $\delta = \frac{\pi}{2} - |\varphi|$

**Verlustfaktor:**  
 $\tan \delta = \frac{P}{|Q|}$

**Bild VI-22** Ersatzschaltbild und Zeigerdiagramm realer Spulen und Kondensatoren

Eine reale Spule kommt der idealen Spule umso näher, je kleiner  $R_L$  im Verhältnis zur Impedanz  $X_L = \omega \cdot L$  ist. Für dieses Verhältnis gilt  $(\omega \cdot L)/R_L = \tan \varphi$ . Damit könnte man durch die Angabe von  $\varphi$  oder  $\tan \varphi$  die Eigenschaft einer Spule charakterisieren mit der Tendenz, dass eine reale Spule der idealen umso näher kommt, je mehr sich  $\varphi$  dem Wert  $90^\circ$  oder  $\tan \varphi$  dem Wert  $\infty$  nähert. Aus praktischen Erwägungen heraus hat man nicht den Winkel  $\varphi$ , sondern den Ergänzungswinkel zu  $90^\circ$ ,  $\delta$ , gewählt.  $\tan \delta$

wird als *Verlustfaktor* bezeichnet, der Kehrwert  $1/\tan \delta$  als *Gütefaktor*  $Q$ . Für reales  $L$  und  $C$  ergibt sich

- Gütefaktor einer Spule  $Q = 1/\tan \delta = \omega \cdot L/R_L$
- Gütefaktor eines Kondensators  
 $Q = 1/\tan \delta = \omega \cdot C \cdot R_C$  (VI.51)

Zur Messung der Induktivität oder der Kapazität gibt es zwei prinzipiell unterschiedliche Messverfahren.

### 9.1 Messung von $|Z_L|$ oder $|Z_C|$

Dieses Messverfahren wird hauptsächlich in Vielfach-Messinstrumenten oder  $L$ - und  $C$ -Messgeräten der unteren Preisklasse eingesetzt. In den zu messenden Kondensator oder in die Spule wird ein sinusförmiger Strom bekannter Frequenz (z.B. 1 kHz) eingespeist. Die sich einstellende Spannung wird gemessen und ist dem Betrag der Impedanz proportional.

$$U_L = I \cdot \sqrt{R_L^2 + (\omega L)^2} = I \cdot Z_L$$

$$U_C = I \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R_C}\right)^2 + (\omega C)^2}} = I \cdot Z_C \quad (\text{VI.52})$$

Die gemessenen Impedanzen stimmen mit denen von Spule bzw. Kondensator um so mehr überein, je kleiner  $R_L$  und je größer  $R_C$  ist. Da bei Kondensatoren häufig  $R_C \gg 1/(\omega \cdot C)$  ist, ergeben sich dann relativ genaue Werte für  $C$ . Bei Induktivitäten sind in vielen Fällen Überslagsmessungen für  $L$  möglich.

### 9.2 Messung von $Z_L$ , $Z_C$ , Gütefaktor und Verlustfaktor

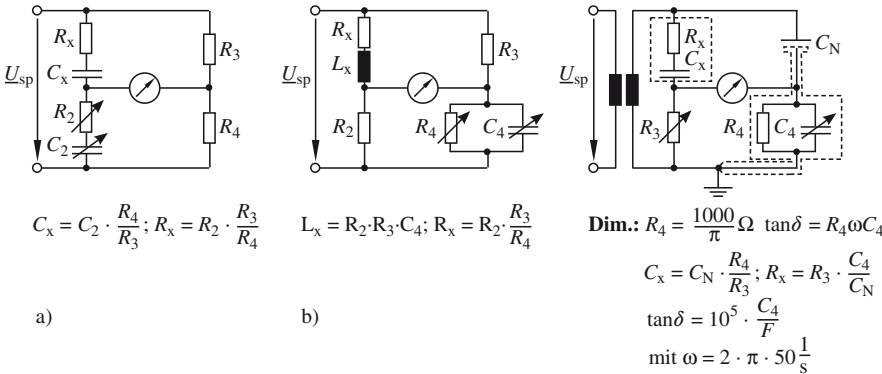
Die verwendeten Messverfahren messen in der Regel  $L$  und  $R_L$  bzw.  $C$  und  $R_C$ . Daraus wird  $Q$  oder  $\tan \delta$  entweder manuell errechnet oder durch ein in das Messgerät eingebautes Rechenprogramm bestimmt. Grundlage für die Messverfahren ist die Brückenschaltung, die nach Kapitel VI.6.2.2 und Gleichung (VI.23) die Möglichkeit bietet, zwei Größen einer Impedanz zu messen:

$$\text{Realteil} = 0: R_1 \cdot R_4 - X_1 \cdot X_4 = R_2 \cdot R_3 - X_2 \cdot X_3$$

$$\text{Imaginärteil} = 0: R_1 \cdot X_4 + R_4 \cdot X_1 = R_3 \cdot X_2 + R_2 \cdot X_3 \quad (\text{VI.53})$$

In Bild VI-23 sind drei Brückenarrangements dargestellt. Allgemein gilt, dass die zu messende Größe mit dem Index „x“ versehen ist und an der Stelle von  $Z_1$  angeordnet wurde. Die jeweils zwei Abgleichelemente sind wechselseitig solange zu verstellen, bis die Spannung in der Brückendiagonalen Null ist. Dann lassen sich mit den Gleichungen (VI.53) die zwei unbekannten Elemente bestimmen.

Bei der Kapazitätsmessbrücke ist das Reihenersatzschaltbild für den Kondensator angeben, das sich aber in das anschaulichere Parallelersatzschaltbild umrechnen lässt. Dieses Ersatzschaltbild hat den Vorteil, dass die folgende einfache Zuordnung der Elemente

**Bild VI-23** Beispiele für L- und C-Messbrücken

- a) Kapazitätsmessbrücke  
 b) Induktivitätsmessbrücke nach Maxwell-Wien  
 c) Schering-Messbrücke

von Gleichung (VI.53) nach den Elementen des Bildes VI-23a gilt:

$$\begin{aligned} R_1 &\rightarrow R_x; & X_1 &\rightarrow -1/(\omega \cdot C_x); & R_2 &\rightarrow R_2; \\ X_2 &\rightarrow -1/(\omega \cdot C_2); & R_3 &\rightarrow R_3; & R_4 &\rightarrow R_4; \\ X_3 &= X_4 = 0 \end{aligned}$$

■ **Beispiel VI.3:** Umrechnung eines Reihen-Ersatzschaltbildes in ein Parallel-Ersatzschaltbild.

$$\begin{aligned} Z &= R_r - j \frac{1}{\omega C_r} = \frac{R_r \cdot \omega \cdot C_r - j}{\omega C_r} \\ \frac{1}{Z} &= \frac{\omega C_r}{R_r \cdot \omega \cdot C_r - j} = \frac{\omega C_r (R_r \cdot \omega \cdot C_r + j)}{(R_r \cdot \omega \cdot C_r)^2 + 1} \\ &= \frac{R_r \cdot \omega^2 \cdot C_r^2}{(R_r \cdot \omega \cdot C_r)^2 + 1} + j \frac{\omega C_r}{(R_r \cdot \omega \cdot C_r)^2 + 1} = \frac{1}{R_p} + j \omega C_p \\ \Rightarrow R_p &= \frac{(R_r \cdot \omega \cdot C_r)^2 + 1}{R_r \cdot \omega^2 \cdot C_r^2}; & C_p &= \frac{C_r}{(R_r \cdot \omega \cdot C_r)^2 + 1} \end{aligned}$$

Die *Schering*-Messbrücke dient zum Messen von Hochspannungskondensatoren für die Energietechnik. Damit ist die Frequenz zu 50 Hz festgelegt, die Brückenspeisespannung kann mehrere kV betragen. Durch die angegebene Dimensionierung von  $R_4$  lässt sich der Verlustfaktor direkt messen. Dieser darf bei Hochspannungskondensatoren bestimmte Werte nicht überschreiten, denn die Erfahrung hat gezeigt, dass der Verlustfaktor eine Aussage liefert über die im Kabel enthaltenen Fehlstellen. Diese Fehlstellen können dazu führen, dass sich das Kabel z.B. stark erwärmt und sich damit selbst zerstört.

Moderne Messgeräte verwenden intern häufig die Brückenschaltungen zur Bestimmung von Real- und Imaginärteil des zu messenden Bauelementes. Der Nullabgleich geschieht vollautomatisch. Güte- und Verlustfaktor werden berechnet, das Ersatzschaltbild des Kondensators oder der Spule kann sowohl in der Paralleldarstellung ( $C_p$  und  $R_{Cp}$  oder  $L_p$  und  $R_{Lp}$  parallel) als auch in der Reihendarstellung ( $C_r$  und  $R_{Cr}$  oder  $L_r$  und  $R_{Lr}$  in Reihe) auf einem LCD-Bild-

schirm dargestellt werden. Die einzelnen Größen einschließlich Messfrequenz und Messstrom werden ebenfalls zahlenmäßig eingeblendet. Die Angabe des Messstromes ist wichtig für Spulen mit Eisenkern: Durch die Hysteresekennlinie hängt die Induktivität vom Messstrom ab; streng genommen ist die Induktivität eine Funktion des Momentanwertes des Stromes. Angegeben werden kann nur ein wie auch immer gebildeter „Mittelwert“ über eine Stromperiode.

Ein anderes Verfahren speist einen konstanten sinusförmigen Wechselstrom vorgegebener Frequenz in das zu messende Bauelement ein. Zwei Spannungsmesser mit phasempfindlichem Gleichrichter messen die Spannung über dem Bauelement und filtern jeweils die Inphase-Komponente der Spannung mit dem Strom (entspricht dem Wirkanteil) und die  $\pm 90^\circ$ -Komponente (entspricht dem induktiven oder kapazitiven Blindanteil) heraus. Daraus lassen sich dann die zu messenden Größen berechnen und anzeigen.

## 10 Messung magnetischer Größen

Die am häufigsten gemessenen magnetischen Größen sind der magnetische Fluss  $\Phi$  in Weber (1 Wb = 1 Vs), die magnetische Flussdichte  $B$  in Tesla (1 T = 1 Vs/m<sup>2</sup> = 1 Wb/m<sup>2</sup>), die magnetische Feldstärke  $H$  in A/m und die Permeabilität ( $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r = B/H$ ).

### 10.1 Magnetischer Fluss

**Zeitlich veränderlicher Fluss:** Handelt es sich um einen sinusförmig veränderlichen Fluss, der in seiner Gesamtheit durch eine bestimmte Fläche hindurchtritt (kein Streufluss), legt man um diese Fläche eine Spule mit  $N$  Windungen. In der Spule wird dann eine Spannung  $u(t)$  induziert:

$$u(t) = -N \cdot \frac{d\Phi(t)}{dt} \quad (\text{VI.54})$$

Mit  $\Phi(t) = \Phi_m \cdot \sin \omega t$  und  $d(\Phi(t))/dt = \omega \cdot \Phi_m \cdot \cos \omega t$  folgt für die Beziehung der Scheitelwerte  $u_m$  und  $\Phi_m$

$$u_m = -N \cdot \omega \cdot \Phi_m \quad (\text{VI.55})$$

Dieses Verfahren hat den Vorteil, dass an Form und Größe der Fläche, durch die der Gesamtfluss hindurchtritt, keine Bedingungen gestellt werden, da die Spule nur diese Fläche voll umfassen muss.

**Zeitlich konstanter Fluss:** Ist der zu messende magnetische Fluss zeitlich konstant, kann man den Strom, der den Fluss verursacht, ein- oder ausschalten. Durch diese Flussänderung wird eine Spannung in der benutzten Spule induziert. Der Momentanwert der induzierten Spannung hängt natürlich von dem zeitlichen Verlauf des Schaltvorgangs und damit vom zeitlichen Verlauf des Flusses  $\Phi(t)$  ab. Integriert man aber die Momentanwerte der Spannung mit einem elektronischen Integrierer, so ist der erhaltene Spannungswert  $u_{\text{ges}}$  dem Gesamtfluss  $\Phi_{\text{ges}}$  proportional.

Eine weitere Möglichkeit zur Flussmessung unabhängig vom zeitlichen Verlauf ist mit der bei der Messung der magnetischen Flussdichte  $B$  beschriebenen *Hall-Sonde* möglich. Diese misst zwar die magnetische Flussdichte  $B$ , wenn aber  $B$  auf der Fläche  $A$  konstant ist, erhält man  $\Phi$  durch Multiplikation mit der Fläche  $A$  ( $\Phi = B \cdot A$ ). Ist  $B$  nicht konstant auf  $A$ , teilt man die Fläche in kleine Teilflächen auf, misst die jeweilige Flussdichte  $B$  und summiert die erhaltenen Werte zum Gesamtfluss auf.

## 10.2 Magnetische Flussdichte

Die magnetische Flussdichte  $B$  wird zunehmend mit der *Hallsonde* gemessen (Bild VI-24). Der Strom  $I$  durchfließt ein Plättchen der Dicke  $d$ , wobei  $d$  klein ist gegenüber der Länge und der Breite. Das Plättchen wird senkrecht in der eingezeichneten Weise von einem Magnetfeld mit der Flussdichte  $B$  durchsetzt. Dann kann nach Bild VI-24 eine Spannung, die sogenannte *Hallspannung*, abgegriffen werden. Sie entsteht durch die *Lorentzkraft*, die auf die in einem Magnetfeld bewegten Elektronen eine Kraft ausübt und eine Ladungstrennung bewirkt.

$$U_H = (k_H \cdot I \cdot B)/d \quad (\text{VI.56})$$

$U_H$  Hallspannung in V;  $k_H$  Hallkonstante in  $\text{m}^3/\text{As}$ ;  $I$  Strom in A;  $B$  magnetische Flussdichte in  $\text{Vs}/\text{m}^2$ ;  $d$  Plattendicke in m

Die *Hallkonstante*  $k_H$  ist besonders groß bei den technologisch gut beherrschten Materialien Indium-

antimonid und Galliumarsenid. Sie liegt in der Größenordnung ( $10^2 \dots 10^3$ )  $\text{cm}^3/\text{A} \cdot \text{s}$ .

Die Hallsonde vom Typ RHY 10 (Siemens) hat einen Gehäusedurchmesser von 2,5 mm. Der Nennstrom ist 100 mA. Bei einer Flussdichte von 1 T ergibt sich eine Leerlauf-Hallspannung von etwa 100 mV. Der Innenwiderstand der Hallspannungsquelle und der Stromeinspeisungsseite betragen jeweils etwa 2  $\Omega$ . Häufig wird die Leerlauf-Empfindlichkeit angegeben: Ausgangsspannungsänderung zu Stromänderung  $\times$  Flussdichteänderung in der Einheit V/AT. Damit können unterschiedliche Hallsonden miteinander verglichen werden. Für die Sonde RHY 10 ergibt sich ein Wert von 0,1 V/(0,1 A  $\times$  1 T) = 1 V/AT. Das Vorzeichen der Hallspannung hängt von der Richtung des Magnetfeldes ab.

Weiterhin lassen sich zur Messung *magnetisch steuerbare Widerstände* (Feldplatten) verwenden. Werden sie von einem Magnetfeld durchsetzt, nimmt ihr Widerstand  $R$  mit zunehmender Flussdichte  $B$  zu. Die Abhängigkeit ist nichtlinear.

Die Feldplatte FP 30 N 60 E (Siemens) hat die äußeren Maße 3,2 mm  $\times$  1,2 mm. Der Widerstand beträgt bei  $B = 0$  etwa 50  $\Omega$ ; bei  $B = 0,3$  T ist er auf den Wert 1,4  $\cdot$  50  $\Omega$  angestiegen, bei  $B = 1$  T auf 5  $\cdot$  50  $\Omega$ . Durch eine Wechsel-Vormagnetisierung lassen sich Flussdichten im  $\mu\text{T}$ -Bereich messen. Der Widerstand ist ein reiner Wirkwiderstand, der *nicht* von der Richtung des Magnetfeldes abhängt.

## 10.3 Magnetische Feldstärke

In Materialien, in denen die Permeabilitätszahl  $\mu_r$  konstant ist ( $\mu_r \neq f(i)$ ), wird die magnetische Feldstärke dadurch bestimmt, dass man die magnetische Flussdichte  $B$  mit einem der oben genannten Verfahren misst und über die Beziehung  $B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H$  die Feldstärke errechnet.

In ferromagnetischen Materialien ändert sich die Permeabilitätszahl  $\mu_r$  mit der Flussdichte  $B$ . Zur Messung nutzt man aus, dass in parallelen magnetischen Kreisen die magnetische Spannung gleich groß ist. Der eine Kreis ist der Kreis mit dem ferromagnetischen Material, der andere parallele Kreis ein Luftkreis. Wird in beiden Kreisen ein homogenes Feld erzeugt, bestimmt man die Feldstärke im Luftkreis und hat damit gleichzeitig den Wert für den anderen Kreis. Die Feldstärke im Luftkreis wird über die induzierte Spannung gemes-

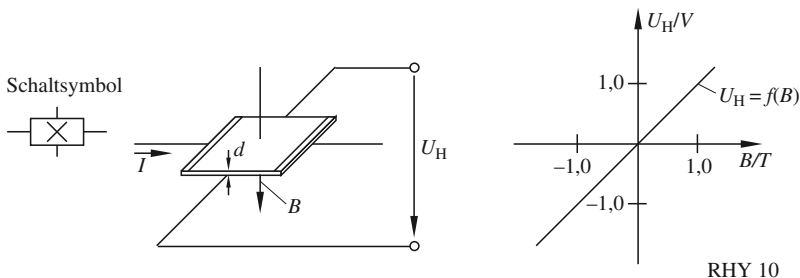


**Bild VI-24**

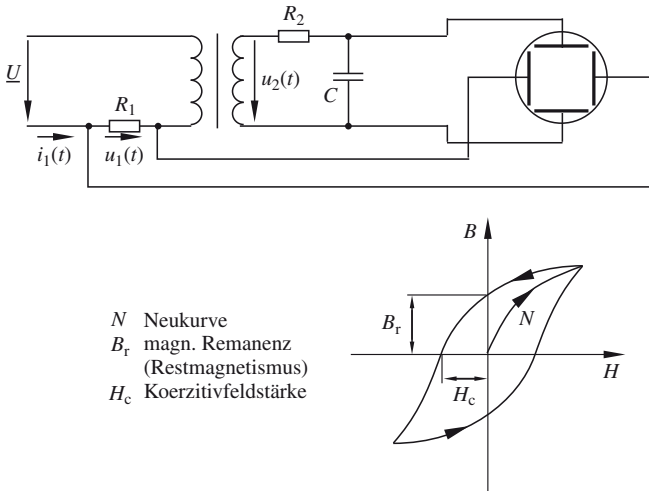
Hallsonde

a) Schaltsymbol

b) Aufbau

c) Kennlinie RHY 10 (Siemens)



**Bild VI-25**

Messung der Hystereseschleife

a) Messschaltung

b) Hystereseschleife

sen, indem von den Formeln (VI.55) und  $\Phi = B \cdot A = \mu \cdot H \cdot A$  Gebrauch gemacht wird.

#### 10.4 Permeabilität

Die magnetischen Eigenschaften ferromagnetischer Werkstoffe werden häufig durch die Magnetisierungskurven  $B = f(H)$  beschrieben. Ändert man die Feldstärke periodisch zwischen einem positiven und einem gleich großen negativen Wert, bekommt man die *Hystereseschleife* nach Bild VI-25.

Im Teil a) ist die Messschaltung zu deren Aufnahme dargestellt. Die magnetische Feldstärke  $H(t)$  ist dem Strom  $i_1(t) = I_m \cdot \sin \omega t$  in der Primärspule proportional. Dieser Strom wird als proportionaler Spannungsfall  $u_1(t) = i_1(t) \cdot R_1$  dem X-Verstärker eines Oszilloskops zugeführt. Damit ist  $u_1(t) = k \cdot H(t)$ . Die Flussdichte  $B(t)$  wird über  $\Phi(t)$  ermittelt. Für die in der Sekundärspule induzierte Spannung  $u_2(t)$  gilt nach Gleichung (VI.54):  $u_2(t) = -N \cdot d\Phi(t)/dt$ . Für  $\Phi(t) = \Phi_m \cdot \sin \omega t$  ergibt sich  $u_2(t) = -N \cdot \omega \cdot \Phi_m \cdot \cos \omega t = -N \cdot \omega \cdot B_m \cdot A \cdot \cos \omega t$ .

Zwischen  $B(t)$  und  $H(t)$  besteht aber noch eine Phasenverschiebung von  $90^\circ$ . Deshalb wird die Spannung  $u_2(t)$  zunächst über einen Tiefpass aus  $R_2$  und  $C$  geschickt und anschließend dem Y-Verstärker des Oszilloskops zugeführt. Dieser Tiefpass wirkt dann als Integrierer mit einer Phasenverschiebung von nahezu  $-90^\circ$ , wenn seine Grenzfrequenz wesentlich geringer ist als die Frequenz der den Transformator speisenden Spannung. Mit  $R_2 = 1 \text{ M}\Omega$  und  $C = 1 \mu\text{F}$  ergibt sich eine Grenzfrequenz von etwa 1 Hz, und damit ist diese Bedingung bei einer Transformatorspeisung mit 50 Hz erfüllt.

Über die Messung der Scheitelwerte von  $B$  und  $H$  nach einem der oben beschriebenen Verfahren kann auf der X- und Y-Achse eine Skalierung angebracht werden. Der dargestellten Hystereseschleife lässt sich die flussdichteabhängige Permeabilität gemäß  $B = \mu \cdot H$  entnehmen. Die von der Hystereseschleife eingeschlossene Fläche ist der für die Wirbelströme aufzubringenden Arbeit proportional. Weiterhin lassen sich die *Koerzitivfeldstärke*  $H_c$  und die *Remanenzflussdichte*  $B_r$  ablesen.



## VII Messverfahren zur Messung nichtelektrischer Größen

**Tabelle VII-1** Vor- und Nachteile des elektrischen Messens nichtelektrischer Größen

| Vorteile                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Nachteile                                                 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| Hohe Messgenauigkeit<br>Große Empfindlichkeit<br>Meist geringe Rückwirkung auf den Messkreis (sowohl elektrisch als auch mechanisch)<br>Gute Anpassungsmöglichkeit an die Messgröße<br>Einfache Messwertübertragung über 2-Draht-Leitung oder drahtlos<br>Einfache Speicherung, Registrierung und Weiterverarbeitung<br>Grenzfrequenz der Messeinrichtung wesentlich höher als die der zu messenden Größe<br>Große Ausgangsleistung durch elektrische Verstärker möglich<br>Geringere mechanische Abmessungen möglich | Meist Hilfsenergie erforderlich<br>Manchmal höherer Preis |

Die elektrische Messung nichtelektrischer Größen gewinnt zunehmend an Bedeutung, da einerseits sehr leistungsfähige Messverfahren entwickelt worden sind und andererseits die Messdatenverarbeitung auf elektrischem Wege in Rechnern geschieht und damit die Umsetzung der nichtelektrischen Größen in elektrische Größen zwingend notwendig ist. In Tabelle VII-1 sind einige Vor- und Nachteile der elektrischen Messung nichtelektrischer Größen gegenüber der nichtelektrischen Messung dargestellt. In Bild VII-1 ist eine Messeinrichtung zur Messung nichtelektrischer Größen mit den verwendeten speziellen Bezeichnungen dargestellt. Ein Teil der Begriffe wurde schon im Kapitel I.1 erläutert.

- **Messkette:** Die gesamte Messeinrichtung wird als *Messkette* bezeichnet. Sie beginnt bei dem *Messobjekt*, dessen nichtelektrische Größe, hier am Beispiel der Temperaturmessung dargestellt, gemessen werden soll. Die *Messgröße* Temperatur wird von einem *Sensor* oder *Messaufnehmer* erfasst, der das *erste* von mehreren *Messgliedern* ist. Der Sensor kann entweder *aktiv* oder *passiv* sein. Ein aktiver Sensor setzt die thermische Energie in

elektrische Energie um. So steht beim *Thermoelement* eine reale Spannungsquelle mit *temperaturabhängiger* Leerlaufspannung und Innenwiderstand zur Verfügung, der ein Strom entnommen werden kann. Beim passiven Sensor wird eine elektrische Größe durch die nichtelektrische Größe *beeinflusst* (in ihrem Wert geändert), wie das bei den temperaturabhängigen Widerständen, beispielsweise Widerstandsthermometern, NTC- und PTC-Widerständen, der Fall ist. Der sich ändernde Widerstandswert kann nicht direkt ausgewertet werden, sondern muss erst über einen Spannungsteiler oder einen eingepprägten konstanten Strom in eine auswertbare Spannungsänderung umgesetzt werden. Das geschieht in einem weiteren Messglied.

Manche Messeinrichtungen erfordern drei oder mehr Messglieder, wie z.B. die Kraftmessung mit *Dehnungsmessstreifen* (Kapitel VII.2.1). Die zu messende Kraft wird zunächst in eine Längenänderung, dann in eine Widerstandsänderung, diese in eine Spannungsänderung und schließlich in einen Zeigerausschlag umgesetzt. Ziel der Messtechnik ist es, bei aktiven Sensoren die nichtelektrische Energie direkt, also ohne Zwi-

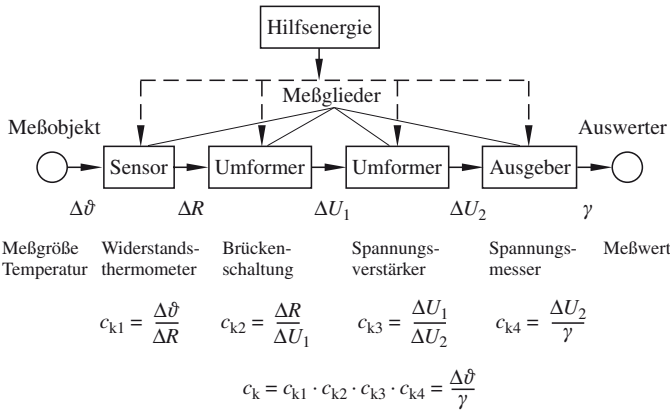


**Bild VII-1**  
Prinzip einer Messkette

schenschalten weiterer Energieformen, in elektrische Energie umzusetzen. Bei passiven Sensoren versucht man, die Zahl der Messglieder so klein wie möglich zu halten. Am Ende der Messkette steht der Ausgeber, der das Signal zur Anzeige und/oder zur Auswertung oder Weiterverarbeitung (Rechner) bereitstellt.

- **Messglied-, Messkettenkoeffizient:** Die Eigenschaften der einzelnen Messglieder werden durch den **Messgliedkoeffizienten**  $c_{ki}$  erfasst, der definiert ist als das Verhältnis von Eingangsgröße zu Ausgangsgröße. Das Verhalten der gesamten Messeinrichtung ergibt sich dann durch Multiplikation der einzelnen Messgliedkoeffizienten zum **Messkettenkoeffizienten**  $c_k$  (siehe Beispiel VII.1).

- **Beispiel VII.1:** Temperaturmessung mit Widerstandsthermometer; Bild VII-1 und Kapitel VII.1.1.  $R(\vartheta) = R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta) = R_0 + R_0 \cdot \alpha \cdot \Delta\vartheta$ ;  $R(\vartheta) - R_0 = \Delta R = R_0 \cdot \alpha \cdot \Delta\vartheta$ . Daraus ergibt sich der Messgliedkoeffizient  $c_{k1}$  mit  $\alpha = 4 \cdot 10^{-3}/^\circ\text{C}$  und  $R_0 = 100 \Omega$  zu:  $c_{k1} = \Delta R / \Delta\vartheta = 1/(R_0 \cdot \alpha) = 2,5 \text{ } ^\circ\text{C}/\Omega$ . Wird  $\Delta R$  in einer Viertelbrücke gemessen, so gilt für  $c_{k2}$  mit  $\Delta U_1 \approx U_{sp} \cdot \Delta R / (4 \cdot R)$  (Näherungslösung, siehe Tabelle VI-1; im folgenden als exakte Beziehung verwendet):  $c_{k2} = \Delta R / \Delta U_1 = 4 \cdot R / U_{sp} = 40 \Omega/\text{V} = 40 \text{ m}\Omega/\text{mV}$  (mit  $U_{sp} = 10 \text{ V}$ ). Ein eventuell erforderlicher Spannungsverstärker mit der Ausgangsspannung  $\Delta U_2$  ist gekennzeichnet durch  $c_{k3} = \Delta U_1 / \Delta U_2 = 1 \text{ mV}/1000 \text{ mV}$  („Verstärkung“  $1/c_{k3} = 1000$ ). Abweichend von Bild VII-1 wird der Zusammenhang zwischen  $\Delta U_2$  des Verstärkers und dem Strom  $\Delta I$  eines Zeigerinstrumentes über  $c_{k4}$  zugeordnet:  $c_{k4} = \Delta U_2 / \Delta I = 1 \text{ mV}/10 \mu\text{A}$  („Innenwiderstand“  $c_{k4} = 100 \Omega$ ). Schließlich werden Strom und Ausschlag  $\Delta y$  über  $c_{k5}$  erfasst:  $c_{k5} = 10 \mu\text{A}/\text{Skt}$ . Den Zusammenhang zwischen der Temperatur und den Skalenteilen erhält man durch Multiplikation der 5 Messgliedkoeffizienten zum Messkettenkoeffizienten  $c_k$ :

$$c_k = c_{k1} \cdot c_{k2} \cdot c_{k3} \cdot c_{k4} \cdot c_{k5} \\ = (2,5 \text{ } ^\circ\text{C}/\Omega) \cdot (40 \text{ m}\Omega/\text{mV}) \cdot (1 \text{ mV}/1000 \text{ mV}) \cdot (1 \text{ mV}/10 \mu\text{A}) \cdot (10 \mu\text{A}/\text{Skt}) \\ c_k = 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}/\text{Skt}$$

In Bild VII-1 wird  $\Delta U_2$  auf einen Spannungsmesser gegeben. Dann gilt  $c_{k4} = \Delta U_2 / \gamma$ ,  $c_k = \Delta\vartheta / \gamma$ .

Hinweise:

1. Die Messgliedkoeffizienten werden in der Regel auch dann mit Einheiten angegeben, wenn sie dimensionslos sind, siehe  $c_{k3}$ .
2. Teile oder Vielfache der Einheiten sind beliebig wählbar, sollten sich aber an der Praxis orientieren:  $c_{k4} = 1 \text{ mV}/10 \mu\text{A} = 1 \text{ V}/10 \text{ mA} = 100 \text{ V}/\text{A}$ . Hier entspricht die Angabe  $1 \text{ mV}/10 \mu\text{A}$  am ehesten den in der Schaltung auftretenden Größen.
3. Die Bedeutung (Definition) eines Messglied- oder Messkettenkoeffizienten lässt sich in der Regel an seinen Einheiten ablesen.
4. Auch wenn „Skt.“ (Skalenteile) keine Einheit ist, wurde sie hier zum besseren Verständnis verwendet.

## 1 Messaufnehmer

Zunächst werden die physikalischen Prinzipien einiger wichtiger Aufnehmer aus messtechnischer Sicht dargestellt.

### 1.1 Ohmsche Aufnehmer

Es werden Widerstände betrachtet, die im hier vorkommenden Frequenzbereich weder eine kapazitive

noch eine induktive Komponente besitzen. Der elektrische Widerstand  $R$  berechnet sich zu

$$R = \frac{l}{\gamma \cdot A} = \frac{\varrho \cdot l}{A} \quad (\text{VII.1})$$

$l$  Länge des Leiters in m,  $A$  Querschnittsfläche des Leiters in  $\text{m}^2$ ,  $\gamma$  elektrische Leitfähigkeit in  $1/(\Omega \cdot \text{m})$ ,  $\varrho$  spezifischer elektrischer Widerstand in  $\Omega \cdot \text{m}$

Um den Wert des Widerstandes zu ändern, gibt es mehrere Möglichkeiten:

1. **Ändern der Länge  $l$ :** Über einen Schleifkontakt wird nur ein Teil des Gesamtwiderstandes  $R$  erfasst. Das Prinzip ist vom Potentiometer her bekannt, wobei das Verändern der Schleiferstellung entweder durch eine Drehbewegung (Drehpotentiometer mit Teilwiderstand  $R_x$ , Bild VII-2a) oder eine Linearbewegung (Linearpotentiometer, „Flachbahnpotentiometer“ mit Teilwiderstand  $R_x$ , Bild VII-2a, b) erfolgen kann. Im einfachen Fall besteht der Widerstand aus einer Kohleschicht oder aus leitfähigem Kunststoff. Über einen Schleifkontakt aus Metall wird der Teilwiderstand abgegriffen.

Besonders zuverlässig sind Drahtpotentiometer nach Bild VII-2b. Allerdings können die über den Schleifer abgegriffenen Widerstandswerte nur stufig eingestellt

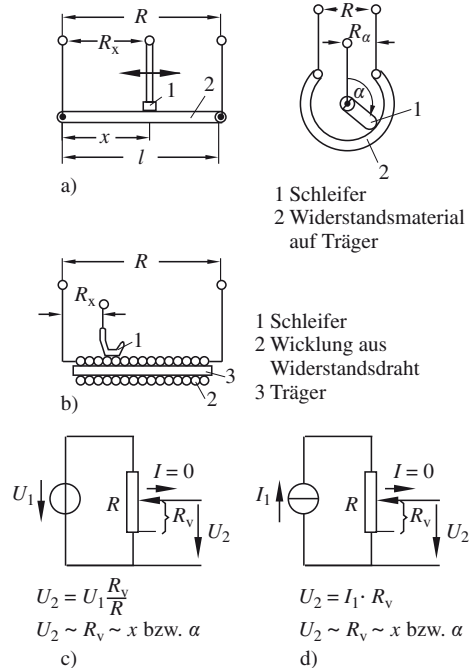


**Bild VII-2** Potentiometer

- a) Schichtpotentiometer
- b) Drahtpotentiometer
- c) Auswerteschaltung mit Spannungsquelle
- d) Auswerteschaltung mit Stromquelle

werden. Die messtechnische Erfassung des Widerstandswertes geschieht entweder über einen Spannungsteiler (Bild VII-2c), eine Stromquelle (Bild VII-2d) oder in einer Brückenschaltung (Kapitel VI.6.1, Tabelle VI-1 und Gleichung VI.16). Hat das Spannungsmessgerät (Bilder VII-2c, d) einen entsprechend hohen Eingangswiderstand ( $I \approx 0$ ), besteht eine lineare Beziehung zwischen Widerstandswert und zugeordneter Spannung. Damit kann man mit diesen Potentiometern Längen und Drehwinkel erfassen.

■ **Beispiel VII.2:** Ein Draht-Potentiometer mit  $R = 1000 \, \Omega$  besteht aus  $N = 1000$  Windungen. Dann kann der über den Schleifer abgegriffene Widerstand in Stufen von  $1000 \, \Omega/N = 1 \, \Omega$  eingestellt werden. Dabei wird angenommen, dass der Schleifer ideal von Windung zu Windung übergreift. Man beachte, dass der relative Fehler durch diese Stufigkeit dann besonders groß ist, wenn kleine Widerstandswerte abgegriffen werden und ein Widerstandswert genau in der Mitte zwischen zwei abgreifbaren Werten eingestellt werden soll. Die maximal mögliche Abweichung zwischen Ist- und Sollwert beträgt  $\pm 0,5 \, R/N$ , hier also  $\pm 0,5 \, \Omega$ , unabhängig vom abgegriffenen Widerstandswert. Der maximal mögliche relative Fehler nimmt also mit abnehmendem abgegriffenem

Widerstandswert zu. So ergibt sich bei einem einzustellenden Widerstandswert von  $20,5 \, \Omega$  ein relativer Fehler von  $\pm 0,5 \, \Omega/20,5 \, \Omega \approx \pm 2,4 \, \%$ . Deshalb werden manchmal Potentiometer mit einem Drehwinkel von  $270^\circ$  eingesetzt, wobei für die eigentliche Messung nur der Bereich von  $180^\circ$  bis  $270^\circ$  ausgenutzt wird. Dadurch bleibt der Fehler durch die Stufigkeit in vorgegebenen Grenzen.

2. **Ändern von  $\gamma$  oder  $q$ :** Die elektrische Leitfähigkeit bzw. der spezifische Widerstand kann durch Temperatureinwirkung (Widerstandsthermometer, NTC-, PTC-Widerstände), Lichteinwirkung (Fotowiderstände), mechanische Dehnung oder Stauchung (Dehnungsmessstreifen) und Magnetfeldeinwirkung (magnetfeldabhängige Widerstände) geändert werden (Tabelle VII-2).

3. **Ändern der Fläche  $A$ :** Hier ist im wesentlichen der bereits im vorigen Kapitel genannte und im Kapitel VII.2.1 näher beschriebene *Dehnungsmessstreifen* zu nennen. Die relative Dehnung  $\Delta l/l$  eines elektrischen Leiters hat auch eine relative Flächenänderung zur Folge, die über die Querkontraktionszahl im „*K-Faktor*“ erfasst ist.

**Tabelle VII-2** Messung elektrischer und nichtelektrischer Größen durch Widerstandsänderungen

| Einflussgröße                                                                    | Widerstandsänderung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Temperatur $T$                                                                   | $R(T)$ Widerstand bei der Temperatur $T$<br>$R_0$ Widerstand bei der Temperatur $T_0$ , häufig $0 \, ^\circ\text{C}$<br>Abhängigkeit des Widerstandes von der Temperatur:<br>1. $R(T) = R_0(1 + A(T - T_0) + B(T - T_0)^2)$ , gilt allgemein für metallische Leiter, z.B. Cu, Pt, Ni.<br>Näherung: $R(T) \approx R_0(1 + A(T - T_0))$ , für $A$ wird hier auch $\alpha$ verwendet.<br>$A$ (bzw. $\alpha$ ), $B$ Materialkonstanten; $A$ im Bereich $(3 \dots 6) \cdot 10^{-3} \, \text{K}^{-1}$ , $B$ im Bereich $(-1 \dots +10) \cdot 10^{-6} \, \text{K}^{-2}$ ; Silizium-Temperatursensoren $A \approx 7,7 \cdot 10^{-3} \, \text{K}^{-1}$ , $B \approx 19 \cdot 10^{-6} \, \text{K}^{-2}$ ; $R_0$ im Bereich $(1 \dots 10) \, \text{k}\Omega$ .<br>2. $R(T) = R_0 \exp(B(1/T - 1/T_0))$ , gilt für spezielle Materialien, hier NTC-Widerstand, $B$ Materialkonstante in der Größenordnung $3000 \, \text{K}$ bis $4000 \, \text{K}$ .<br>3. $R(T) = R_N \exp(\alpha(T - T_N))$ , gilt für spezielle Materialien, hier PTC-Widerstand, näherungsweise in einem begrenzten, technisch ausgenutzten Temperaturbereich $T_{\max} \geq T \geq T_N$ gültig; Typenspektrum für $T_N$ im Bereich von ca. $-20 \, ^\circ\text{C}$ bis $350 \, ^\circ\text{C}$ und für $R_N$ im Bereich von ca. $1 \, \Omega$ bis $100 \, \text{k}\Omega$ ;<br>$\alpha$ Materialkonstante im Bereich $(0,1 \dots 0,7) \, \text{K}^{-1}$ oder meist angegeben in der Form $(10 \dots 70) \, \%/ \text{K}$ . |
| Licht, hier Beleuchtungsstärke $E$                                               | $R(E) = R_0(E/E_0)^{-\gamma}$ ;<br>$R(E)$ Widerstand bei der Beleuchtungsstärke $E$ ; $R_0$ Widerstand bei der Beleuchtungsstärke $E_0$ ; $\gamma$ Materialkonstante im Bereich $0,5 \dots 1,2$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| Kraft, hier mechanische relative Dehnung $\Delta l/l$ eines elektrischen Leiters | $\Delta R/R = K \cdot \Delta l/l$ ;<br>$K$ Materialkonstante, mit „ <i>K-Faktor</i> “ bezeichnet; bei Dehnungsmessstreifen (DMS) gilt: $K \approx 2$ . $\Delta R/R$ relative Widerstandsänderung des DMS; $\Delta l/l$ relative Längenänderung von DMS und Werkstück, auf den der DMS aufgeklebt ist.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| Magnetfeld, hier magnetische Flussdichte $B$                                     | $R_B = R_0(1 + k \cdot B^2)$ ;<br>$R_B$ Widerstand bei der Flussdichte $B$ ; $R_0$ Widerstand bei der Flussdichte $0$ ; $k$ Materialkonstante, angegeben wird meist $R_B/R_0$ , liegt bei $B = 1 \, \text{T}$ im Bereich $5$ bis $15$ ; $R_0$ im Bereich ca. $10 \, \Omega$ bis $1 \, \text{k}\Omega$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |

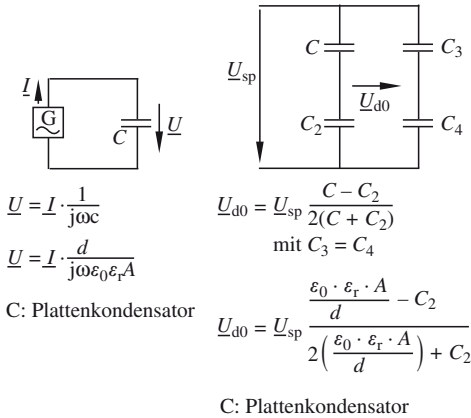


**Bild VII-3** Messschaltungen für kapazitive Aufnahme

## 1.2 Kapazitive Aufnehmer

Die Kapazität eines Plattenkondensators berechnet sich unter Vernachlässigung der Randeﬀekte nach der Formel

$$C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot A/d \quad (\text{VII.2})$$

$\epsilon_r$  Dielektrizitätszahl;  $A$  Plattenfläche in  $\text{m}^2$ ;  $d$  Plattenabstand in m

Hierin können  $\epsilon_r$ ,  $A$  und  $d$  verändert werden. Aus der sich dann ändernden Kapazität kann bei bekanntem rechnerischem Zusammenhang die zu messende Größe bestimmt werden. Dies sind in der Regel: 1. Längen oder Abstände, erfasst über  $d$ , 2. Drehwinkel, gemessen über  $A$  nach dem Prinzip des Drehkondensators, und 3. Füllstände in Behältern, erfasst über das von Luft verschiedene  $\epsilon_r$  des eingefüllten Mediums.

Gemessen wird zunächst die Kapazität  $C$  nach Bild VII-3 entweder durch Erfassen des Spannungsfalls an dieser Kapazität bei Speisung aus einer sinusförmigen Wechselstromquelle bekannter Frequenz oder durch Einfügen in eine Wechselstrommessbrücke. Die entsprechenden Formeln sind in Bild VII-3 eingetragen. Zur Berechnung der Spannung  $U_{d0}$  in der Brückendiagonalen wird Gleichung (VI.7) verwendet, wobei für die Widerstände  $R_1$  bis  $R_4$  die Wechselstromwiderstände  $Z_1 = 1/j\omega C_1$  bis  $Z_4 = 1/j\omega C_4$  der als ideal angenommenen Kondensatoren eingesetzt werden.  $C_3$  und  $C_4$  sind hier gleich groß gewählt worden; sie können auch unterschiedliche Werte aufweisen und damit dem Messaufbau angepasst werden. Der mathematische Zusammenhang zwischen der Kapazität  $C$  und der zu messenden Größe wird in die Skala analog anzeigender Messgeräte eingearbeitet oder bei digital anzeigenden Messgeräten softwaremäßig berücksichtigt.

## 1.3 Induktive Aufnehmer

Die Induktivität  $L$  einer Spule nach Bild VII-4a mit der Länge  $l$ , der Querschnittsfläche  $A = r^2 \cdot \pi$ , der Windungszahl  $N$  und einem Material innerhalb der

Spule mit der Permeabilität  $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$  berechnet sich für  $r \ll l$  näherungsweise aus

$$L \approx N^2 \mu_0 \mu_r \cdot A/l \quad (\text{VII.3})$$

$N$  Windungszahl;  $\mu_r$  Permeabilitätszahl;  $A$  Spulenquerschnittsfläche in  $\text{m}^2$ ;  $l$  Spulenlänge in m

Im Gegensatz zu den kapazitiven Aufnehmern kann in der Praxis nur die Permeabilitätszahl  $\mu_r$  geändert werden, indem ein Material mit  $\mu_r \neq 1$  mehr oder weniger tief in die Spule eingetaucht wird. Die Möglichkeit, die Induktivität durch Abgreifen von Teilwindungen über Schleifkontakte zu ändern, wird kaum angewendet, da hierfür die Potentiometergeber besser geeignet sind. Die Messverfahren zur Messung der Induktivität  $L$  nach Bild VII-4b entsprechen denen der kapazitiven Aufnehmer. Die Ableitung von  $U_{d0}$  geschieht auf die gleiche Weise wie zu Bild VII-3b beschrieben. Es gilt  $L_3 = L_4$ . Induktive Aufnehmer werden bevorzugt zur Messung von Längen bzw. Abständen eingesetzt.

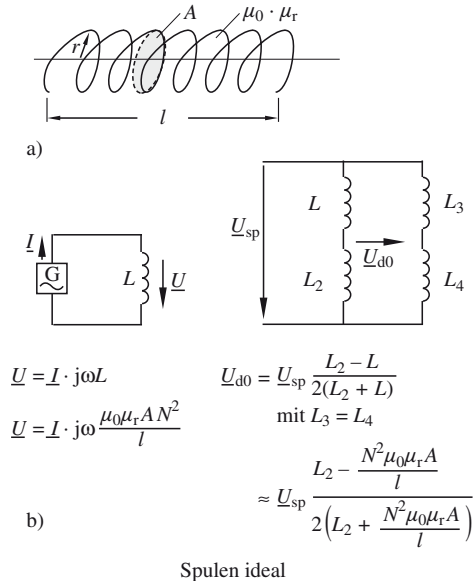


**Bild VII-4** Induktive Aufnahme

- Zur Berechnung der Induktivität
- Messschaltungen

## 1.4 Optische Aufnehmer

Einheiten für die lichttechnischen Größen sind das Lumen (lm) und das Lux (lx).

Ein Lumen ist die Einheit des Lichtstromes  $\Phi$ , der die gesamte von einer Lichtquelle abgegebene Strahlungsleistung darstellt. Ein Lux ist die Einheit der Beleuchtungsstärke  $E$  unter Berücksichtigung der beleuchteten Fläche.

Beleuchtungsstärke  $E = \text{Lichtstrom } \Phi / \text{Fläche } A$ ;

$$1 \text{ lx} = 1 \text{ lm/m}^2 \quad (\text{VII.4})$$

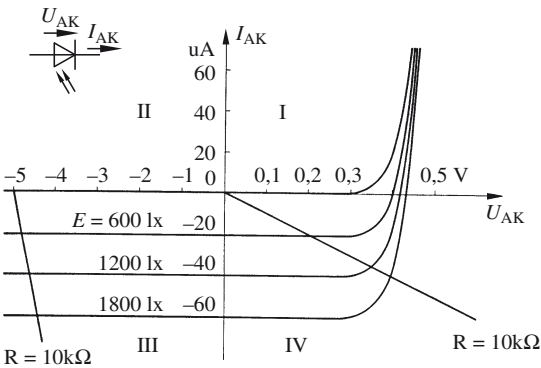
Licht ist der vom Auge wahrnehmbare Teil der Strahlung. Da die von einer Lichtquelle ausgesendete Strahlung meist aus einem Gemisch verschiedener Frequenzen und damit Farben besteht, muss der optische Aufnehmer auf diesen Frequenzbereich abgestimmt werden; er muss dort seine größte *spektrale Empfindlichkeit* aufweisen.

Zu den wichtigen optischen Aufnehmern zählen: Fotowiderstand (wurde bereits bei den ohmschen Aufnehmern behandelt), Fotodiode und Fotovervielfacher.

1.4.1 Fotodiode

Sie kann entweder aktiv oder passiv betrieben werden (Bild VII-5). Die typische Kennlinie ist im Teil a dargestellt. Zum Kennlinienfeld im IV. Quadranten gehört die Schaltung b, in der die Fotodiode als aktives Element geschaltet ist. Der von ihr gelieferte Strom ist der Beleuchtungsstärke  $E$  proportional. Durch Einfügen eines Widerstandes  $R$  kann eine proportionale Spannung  $U_L \sim E$  abgegriffen werden. Nähert sich allerdings die Spannung über der Fotodiode ihrer Schwellspannung, wirkt dies wie eine parallel liegende Diode und ergibt die nach rechts steil ansteigenden Kennlinienabschnitte. Im III. Quadranten wird die Fotodiode mit der Schaltung nach Bild VII-5c in Sperrichtung und damit passiv betrieben. Der Sperrstrom steigt mit steigender Beleuchtungsstärke  $E$ , wobei der Zusammenhang zwischen Sperrstrom und Beleuchtungsstärke linear ist. Über einen Widerstand  $R$  kann eine entsprechende Spannung  $U_R$  erzeugt werden.

Beide Betriebsarten sind zur Messung der Beleuchtungsstärke  $E$  geeignet, wobei der passive Betrieb zwar eine Hilfsspannungsquelle erfordert, aber durch die in Sperrichtung vorgespannte Diode eine kleine Sperrschichtkapazität und damit eine hohe Grenzfrequenz für Wechselgrößen von 10 ... 100 MHz erreicht wird. In der aktiven Betriebsart erhält man nur wenige kHz.



BPW 20

a)

1.4.2 Fotovervielfacher

Die Wirkungsweise besteht darin, dass Lichtquanten aus einer fotoempfindlichen Kathode Elektronen (entsprechend einem Strom  $i_k$ ) auslösen, die auf ihrem Weg zu einer ersten Anode beschleunigt werden, und zwar so, dass jedes Elektron beim Auftreffen mehrere Elektronen (Vervielfachungsfaktor  $n$ ) auslöst. Diese Elektronen werden wiederum auf ihrem Weg zu einer zweiten Anode beschleunigt, wo sich die Vervielfachung wiederholt. Insgesamt sind bis zu  $k = 10$  Anoden vorhanden, so dass der Anodenstrom an der letzten Anode  $i = i_k \cdot n^k$  beträgt. Fotovervielfacher sind so empfindlich, dass sich bei einem Verstärkungsfaktor  $n^k = 10^8$  einzelne Lichtquanten nachweisen lassen.

Die für die Messtechnik wichtigen Eigenschaften der drei aufgeführten Aufnehmer sind in Tabelle VII-3 zusammengestellt. Der Temperatureinfluss wurde nur grob klassifiziert angegeben, da er von der jeweiligen Beleuchtungsstärke abhängt.

1.5 Ladungsliefernde Aufnehmer

Bei bestimmten Kristallen (z.B. Quarz oder Bariumtitanat) oder organischen Polymeren (z.B. Polyvinylidendifluorid PVDF) treten zwei Effekte auf.

1. *Piezoelektrischer Effekt*: Durch mechanische Verformung tritt an den gegenüberliegenden Seiten eines Plättchens eine Ladungsverschiebung und damit eine Polarisation auf (Bild VII-6a). Da der elektrische Widerstand der Materialien sehr hoch ist ( $\rho > 10^{13} \Omega \cdot \text{cm}$ ), hat eine Ladungsänderung  $\Delta Q$  eine Spannungsänderung  $\Delta U$  gemäß  $\Delta Q = C \cdot \Delta U$  zur Folge, wobei man diese Spannung über entsprechend angebrachte Elektroden abgreifen kann. Damit ist die Spannung eine Funktion der Verformung oder der die Verformung bewirkenden Größe, z.B. einer Kraft. Die Ladungsänderung ist der Kraftänderung proportional.

$$\Delta Q = k_p \cdot \Delta F \Rightarrow \Delta F = C_p \cdot \Delta U / k_p;$$
$$k_p \approx (2 \dots 250) \cdot 10^{-12} \text{ A} \cdot \text{s/N} \tag{VII.5}$$

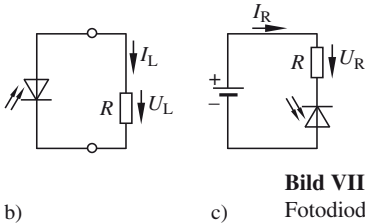


Bild VII-5

- Fotodiode  
a) Kennlinie  
b) aktive Betriebsart  
c) passive Betriebsart

**Tabelle VII-3** Eigenschaften von optischen Aufnehmern

| Aufnehmer                                                                     | Fotowiderstand | Fotodiode aktiv | Fotodiode passiv | Fotovervielfacher |
|-------------------------------------------------------------------------------|----------------|-----------------|------------------|-------------------|
| Grenzfrequenz in Hz                                                           | $10^2$         | $10^3$          | $10^8$           | $10^2$            |
| Stromempfindlichkeit in $\mu\text{A}/\text{lx}$                               | $10^2$         | $10^{-1}$       | $10^{-1}$        | $10^5$            |
| Material                                                                      | CdS            | Si              | Si               | Sb, Cs            |
| max. spektrale Empfindlichkeit bei der Wellenlänge $\lambda$ in $\mu\text{m}$ | 0,65           | 0,85            | 0,85             | 0,4               |
| Temperatureinfluss auf die Messgröße                                          | groß           | mittel          | mittel           | sehr klein        |

Darin ist  $k_p$  die *piezoelektrische Konstante*. Die durch eine konstante Kräfteinwirkung entstandene Spannung steht allerdings nicht beliebig lange zur Verfügung, da sich die Ladungen über den endlichen Widerstand  $R_i$  des Piezomaterials ausgleichen. Das elektrische Ersatzschaltbild zeigt Bild VII-6b.

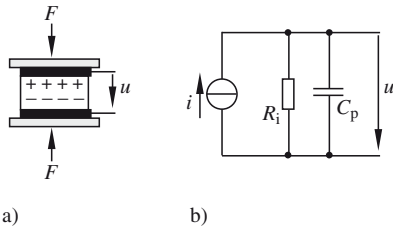


**Bild VII-6** Piezoelement

- a) Aufbau  
b) Ersatzschaltbild

■ **Beispiel VII.3:** Ein Piezomaterial hat folgende Daten:  
 $k_p = 10^{-11} \text{ A} \cdot \text{s}/\text{N}$ , Fläche  $A = 10 \text{ cm}^2$ , Dicke  $d = 1 \text{ mm}$ ,  
 $\varrho = 10^{14} \Omega \cdot \text{cm}$ ,  $\varepsilon_r = 5$ ,  $F = 10 \text{ N}$   
Daraus lassen sich folgende Größen berechnen:  
Innenwiderstand  $R_i = \varrho \cdot d/A = (10^{14} \cdot 0,1/10) \Omega \cdot \text{cm} \cdot \text{cm}/\text{cm}^2$   
 $= 10^{12} \Omega$   
Kapazität  $C_p = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot A/d = (8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 5 \cdot 10^{-3}/10^{-3}) \text{ F} = 44 \text{ pF}$   
Ladung  $Q = k_p \cdot F = 10^{-11} \cdot 10 \text{ A} \cdot \text{s} = 10^{-10} \text{ A} \cdot \text{s}$   
Spannung  $U = 10^{-10} \text{ A} \cdot \text{s}/44 \text{ pF} = 2,27 \text{ V}$   
Entladezeitkonstante  $\tau = R_i \cdot C_p = 10^{12} \cdot 44 \cdot 10^{-12} \text{ s} = 44 \text{ s}$

Soll die Entladezeitkonstante durch ein angeschlossenes Spannungsmessgerät nicht wesentlich verringert werden, ist der Innenwiderstand des Spannungsmessgerätes größer als  $R_i$  zu wählen. Häufig wird die zu messende Spannung zunächst einem elektronischen Messverstärker mit entsprechend hohem Eingangswiderstand zugeführt und erst anschließend gemessen.

**2. Pyroelektrischer Effekt:** Bei den genannten Materialien wird eine Polarisierung auch durch Temperaturänderungen hervorgerufen. Der formelmäßige Zusammenhang lautet:

$$\Delta Q = k_q \cdot A \cdot \Delta T \quad (\text{VII.6})$$

$k_q$  pyroelektrische Konstante in  $\text{As}/(\text{m}^2 \text{ K})$ ;  $A$  Fläche in  $\text{m}^2$ ;  $\Delta T$  Temperaturänderung in K

Dieser Effekt wird häufig bei den *Bewegungsmeldern* eingesetzt. Eine sich nähernde Person bewirkt durch ihre Körperwärme eine Änderung der Umgebungstemperatur, die von dem pyroelektrischen Aufnehmer erfasst wird.

■ **Beispiel VII.4:** Eine  $50 \mu\text{m}$  dicke Scheibe liefert mit  $k_q = 2 \cdot 10^{-4} \text{ As}/(\text{m}^2 \text{ K})$ ,  $\varepsilon_r = 50$  und  $\Delta T = 1 \text{ K}$ :  
 $\Delta U = \Delta Q/C = k_q \cdot A \cdot \Delta T/(\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot A/d) = k_q \cdot \Delta T \cdot d/(\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r)$   
 $= 2 \cdot 10^{-4} \cdot 1 \cdot 50 \cdot 10^{-6}/(8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 50) \text{ V} = 20 \text{ V}$

Das Ersatzschaltbild ist gleich dem des Piezoelementes in Bild VII-6b.

## 1.6 Thermische Aufnehmer

Zu den wichtigsten thermischen Aufnehmern gehören temperaturabhängige Widerstände (Ohmsche Aufnehmer), pyroelektrische Aufnehmer (Ladungsliefernde Aufnehmer) und Thermoelemente.

### 1.6.1 Thermoelemente

Verbindet man zwei elektrisch leitende, unterschiedliche Materialien nach Bild VII-7a punktförmig miteinander und hat diese Verbindungsstelle die Temperatur  $T_M$ , so entsteht dort eine Thermospannung (*Seebeck-Effekt*).

$$\text{Thermospannung } U_{\text{th}} = k_{\text{AB}} \cdot T_M \quad (\text{VII.7})$$

$k_{\text{AB}}$  Thermoempfindlichkeit der Materialien A und B in  $\text{V/K}$  oder  $\text{mV}/100 \text{ K}$ ;  $T_M$  Temperatur der Verbindungsstelle

Sie ist der Temperatur der Verbindungsstelle proportional. Die Konstante  $k_{\text{AB}}$  ist die *Thermoempfindlichkeit* und wird in der Regel in  $\text{mV}/100 \text{ K}$  angegeben. Die Indizierung gibt die Richtung der Spannung, bezogen auf die Materialien A und B, an. Ist  $k_{\text{AB}}$  positiv, hat Material A das positivere Potenzial gegenüber Material B. In der Praxis bezieht man zur Angabe der Thermoempfindlichkeit die einzelnen Materialien (x) auf das Bezugsmaterial Platin (Pt) und gibt dann  $k_{\text{APt}}$  an. Zur Bestimmung von  $k_{\text{AB}}$  bildet man die Differenz:

$$k_{\text{AB}} = k_{\text{APt}} - k_{\text{BPt}} \quad (\text{VII.8})$$



In der Praxis treten Thermospannungen grundsätzlich bei Temperaturdifferenzen auf. Insofern entspricht Bild VII-7a nicht der Wirklichkeit. Vielmehr muss die entstehende Spannung gemessen oder anderweitig ausgewertet werden. Dazu wird an die zwei freien Enden nach Bild VII-7b ein Messgerät angeschlossen, von dem angenommen werden soll, dass es einen durchgehenden elektrischen Kreis aus einem Material besitzt (Beispiel: Drehspulmesswerk mit Cu-Zuleitungen, Cu-Anschlussklemmen, internen Cu-Leitern, Cu-Drehspule). Dann entsteht an jeder Verbindungsstelle zweier unterschiedlicher Materialien eine Thermospannung, deren Wert nach Gleichung (VII.7) eingesetzt wird. Die drei Teilspannungen werden zur Gesamt-Leerlaufspannung  $U_{th0}$  addiert (Strom durch das Messgerät zu Null angenommen).

$$U_{th0} = U_1 + U_2 + U_3 = k_{CA} \cdot T_1 + k_{AB} \cdot T_2 + k_{BC} \cdot T_3;$$

mit Gleichung (VII.8) folgt daraus

$$U_{th0} = (k_{CPt} - k_{APt}) T_1 + (k_{APt} - k_{BPt}) T_2 + (k_{BPt} - k_{CPt}) T_3$$

und nach einer Umformung und entsprechender Zusammenfassung

$$U_{th0} = k_{CPt}(T_1 - T_3) + k_{APt}(T_2 - T_1) + k_{BPt}(T_3 - T_2).$$

Sorgt man dafür, dass die beiden zum Messgerät führenden Verbindungsstellen die gleiche Temperatur besitzen, also  $T_1 = T_3$  und wählt die für die Praxis

anschaulichen Bezeichnungen  $T_1 = T_3 = T_V$  als Temperatur der Vergleichsstelle und  $T_2 = T_M$  als Temperatur der Messstelle, dann vereinfacht sich die Formel zu:

$$U_{th0} = k_{APt}(T_M - T_V) + k_{BPt}(T_V - T_M)$$

Schließlich wird unter Verwendung von Gleichung (VII.8) daraus:

$$U_{th0} = (k_{APt} - k_{BPt}) \cdot (T_M - T_V) = k_{AB} \cdot (T_M - T_V) \tag{VII.9}$$

Die Spannung  $U_{th0}$  ist der Temperaturdifferenz  $T_M - T_V$  proportional. Um die Temperatur  $T_M$  messen zu können, muss die Temperatur  $T_V$  bekannt sein. In der Praxis wird die Temperatur  $T_V$  der Vergleichsstelle durch z.B. „Eiswasser“ mit 0 °C (genau +0,01 °C) hergestellt und die zwei Verbindungsstellen in dieses Eis-Wasser-Gemisch eingetaucht.

In Bild VII-7c sind zwei gängige Ausführungsformen von Thermoelementen zum Messen auch in Flüssigkeiten dargestellt. Um die Vergleichsstelle aus dem Anschlusskopf an einen geeigneteren Ort zu verlegen, werden Ausgleichsleitungen nach Bild VII-7d verwendet, die aus dem gleichen Material wie das eigentliche Thermoelement bestehen, aber billiger und flexibel sind. Damit entstehen im Anschlusskopf keine Thermospannungen.

Der in der Messschaltung nach Bild VII-7e fließende Strom berechnet sich aus  $I = U_{th0}/(R_i + R_v)$ , worin  $R_i$

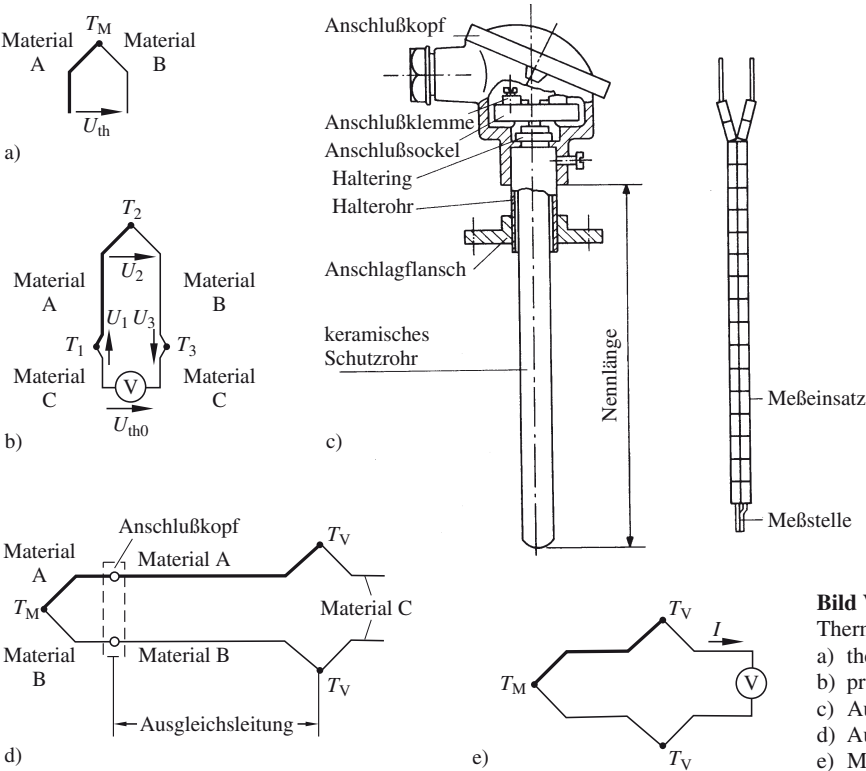


**Bild VII-7**  
Thermoelemente  
a) theoretisches Prinzip  
b) praktisches Modell  
c) Ausführungsformen  
d) Ausgleichsleitung  
e) Messschaltung



der Innenwiderstand des Thermoelementes und  $R_I$  der des Messinstrumentes ist. Der Innenwiderstand des Thermoelementes ergibt sich durch den ohmschen Widerstand der Thermoelementanordnung.

**Tabelle VII-4** Thermoempfindlichkeit geeigneter Thermoelement-Materialien

| Material $x$ | $k_{xPt}$ in mV/100 K |
|--------------|-----------------------|
| Konstantan   | $-3,47 \dots -3,04$   |
| Nickel       | $-1,9 \dots -1,3$     |
| Platin       | 0,0                   |
| Kupfer       | +0,75                 |
| Eisen        | +1,9                  |
| Nickel-Chrom | +2,2                  |
| Silizium     | +42 $\dots$ +50       |

In Tabelle VII-4 sind die Thermoempfindlichkeiten einiger Materialien gegenüber Platin eingetragen. Zwar sind theoretisch alle elektrischen Leiter untereinander zu Thermoelementen zu kombinieren, aber nur wenige Paarungen erfüllen die in der Praxis gestellten Forderungen: Die Verbindungsstelle muss schweißbar, die Schweißstelle muss über lange Zeit chemisch und mechanisch stabil und die Thermoempfindlichkeit sollte so groß wie möglich sein.

■ **Beispiel VII.5:** Ein Thermoelement aus der Materialkombination Eisen-Konstantan liefert bei einer zu messenden Temperatur  $T_M = 800^\circ\text{C}$  und einer Temperatur der Vergleichsstelle von  $T_V = 0^\circ\text{C}$  eine Thermo-Leerlaufspannung von  $U_{H0} = (k_{Fe\text{ Konst}}) \times (T_M - T_V) \approx 5,2 \cdot (800 - 0) \text{ K} \cdot \text{mV}/100 \text{ K} = 41,6 \text{ mV}$ .

Da die entstehenden Thermospannungen relativ klein sind, ist Silizium ein bevorzugtes Thermoelementmaterial. Allerdings gibt es bei der Fertigung zur Zeit noch technologische Probleme, die den Einsatz erschweren. Tabelle VII-5 enthält häufig verwendete Materialkombinationen und deren Eigenschaften.

**Tabelle VII-5** Eigenschaften häufig verwendeter Thermoelemente

| Materialkombination A-B                                | Typ     | maximal messbare Temperatur in $^\circ\text{C}$ | $k_{AB}$ in mV/100 K |
|--------------------------------------------------------|---------|-------------------------------------------------|----------------------|
| Eisen-Konstantan                                       | J       | ca. 800                                         | ca. 5,2              |
| Kupfer-Konstantan                                      | T       | ca. 400                                         | ca. 4,2              |
| Nickelchrom-Nickel                                     | K       | ca. 1300                                        | ca. 3,7              |
| Platinrhodium-Platin, verschiedene Legierungen möglich | R, S, B | ca. 1700 $\dots$ 1800                           | ca. 0,6 $\dots$ 1,1  |

**1.7 Chemische Aufnehmer**

Chemische Aufnehmer werden zunehmend für Messungen im Zusammenhang mit Prozesssteuerungen und der Umweltmesstechnik eingesetzt. Hier sollen einige wenige vorgestellt werden: pH-Wert-Messeinrichtung mit Glaselektrode, Aufnehmer zur Messung der Sauerstoffkonzentration und Aufnehmer zur Messung von Gaskonzentrationen allgemein.

**1.7.1 pH-Wert-Messeinrichtung mit Glaselektrode**

Der pH-Wert ist der mit  $-1$  multiplizierte dekadische Logarithmus der Konzentration von  $\text{H}^+$ -Ionen. Eine Lösung mit dem pH-Wert 7 ist neutral (z.B. Trinkwasser), ein pH-Wert  $< 7$  kennzeichnet saure, ein pH-Wert  $> 7$  alkalische Flüssigkeiten.

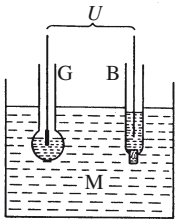
Den Aufbau einer Messsonde zeigt Bild VII-8. Die Glaselektrode G ist mit einer Flüssigkeit vorgegebener Wasserstoffionenkonzentration  $\text{pH}_0$  gefüllt und nach unten hin so dünn, dass eine gewisse Leitfähigkeit (Widerstand  $10^7 \dots 10^{10} \Omega$ ) zur Flüssigkeit mit der gesuchten Konzentration  $\text{pH}_x$  besteht. Die Bezugsselektrode B ist mit einer speziellen Salzlösung gefüllt und steht über das poröse Glasgefäß in relativ guter elektrischer Verbindung mit der Messflüssigkeit. Für die sich einstellende Spannung  $U_{\text{pH}}$  ist folgender Zusammenhang gefunden worden:

$U_{\text{pH}} = 2 \cdot 10^{-4} \times T \cdot (\text{pH}_0 - \text{pH}_x) \text{ V/K}$ . Mit  $T = 273 \text{ K}$ , entsprechend  $0^\circ\text{C}$ , folgt daraus

$U_{\text{pH0}} = 0,0546 \cdot (\text{pH}_0 - \text{pH}_x) \text{ in V} \tag{VII.10}$

Unterscheiden sich beide pH-Werte um 1 ( $\text{pH}_0 > \text{pH}_x$ ), beträgt die Spannung 54,6 mV. Da der Innenwiderstand dieser Spannungsquelle im Bereich  $10^7 \dots 10^{10} \Omega$  liegt, muss das Messgerät zur Spannungsmessung einen wesentlich höheren Eingangswiderstand aufweisen. Deshalb setzt man häufig spezielle Messverstärker mit entsprechend hohen Eingangswiderständen ein.

Die Glaselektrode hat nur eine begrenzte Lebensdauer und muss jeweils nach einigen Jahren ausgetauscht werden. Deshalb hat man nach weiteren Messmöglichkeiten gesucht. Zurzeit sind pH-Wert-Aufnehmer



G Glaselektrode enthält  
Flüssigkeit mit  $\text{pH}_0$   
B Bezugselektrode  
M Meßflüssigkeit mit  $\text{pH}_x$   
U Meßspannung

### Bild VII-8

Messung des  
pH-Wertes mit  
Glaselektroden

mit Feldeffekttransistor in der Entwicklung, die zwar eine höhere Lebensdauer, aber nicht die Zuverlässigkeit der Glaselektrodenausführung haben.

### 1.7.2 Aufnehmer zur Messung der Sauerstoffkonzentration

Erhitzt man Keramik aus Zirkonoxid ( $\text{ZrO}_2$ ) und Yttriumoxid ( $\text{Y}_2\text{O}_3$ ) auf mindestens  $350^\circ\text{C}$ , leitet sie Sauerstoffionen. Nach Bild VII-9a bringt man an den gegenüberliegenden Seiten poröse Platinelektroden an. Stehen die zwei Elektroden unter dem Einfluss unterschiedlicher Sauerstoff-Partialdrücke  $p_1$  und  $p_2$ , so entsteht eine Spannung

$$U_0 = 0,05 \cdot T \cdot \lg(p_2 / p_1) \cdot \frac{\text{mV}}{\text{K}} \quad \text{in mV} \quad (\text{VII.11})$$

$T$  Keramikt Temperatur in K;  $p_1, p_2$  Partialdrücke in Pa oder bar

Bei  $T = 800 \text{ K}$  und  $p_2 = 10 \cdot p_1$  ergibt sich ein Wert von  $U_0 = 40 \text{ mV}$ .

Eine Sonderausführung ist die aus der Automobiltechnik bekannte *Lambda-Sonde* (Bild VII-9b). Erhält der Motor genau soviel Sauerstoff, wie zur vollständigen Verbrennung des Kraftstoffes erforderlich ist, so ist  $\lambda = 1$ ; bei  $\lambda < 1$  fehlt Sauerstoff, und man spricht von „fettgemisch“, bei  $\lambda > 1$  ist zu viel Sauerstoff und damit ein „mageres Gemisch“ vorhanden. Durch Verwendung des Platin-Katalysators hat man erreicht, dass sich die Spannung an der Sonde im Bereich  $0,9 \leq \lambda \leq 1,1$  sehr stark ändert, nämlich von ca.  $1 \text{ V}$  auf  $40 \text{ mV}$  (Leerlaufkennlinie Bild VII-9b:  $p_1^*$  ist der Partialdruck des thermodynamischen Gleichgewichtes).

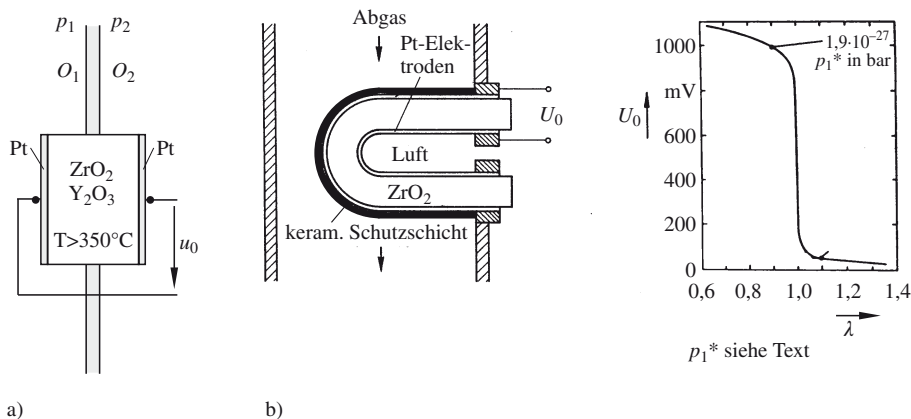
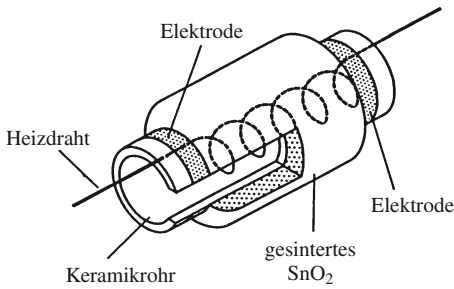


**Bild VII-9** Aufnehmer zur Messung der Sauerstoffkonzentration

a) Prinzip

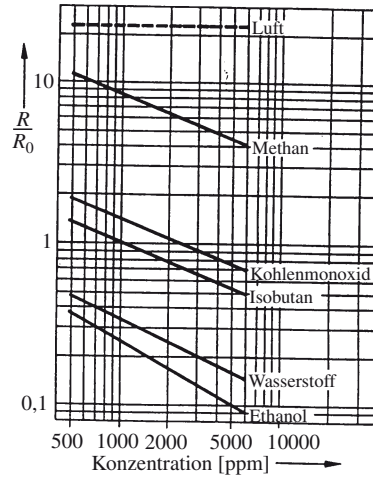
b) Lambda-Sonde (nach Unterlagen Fa. Bosch): Aufbau und Leerlaufspannung



a)

**Bild VII-10** Gassensor (Fa. Figaro)

- a) Aufbau  
b) Kennlinie



b)

## 2 Messverfahren

Ergänzend zu den im Kapitel „Messaufnehmer“ beschriebenen Messverfahren sollen hier einige weitere vorgestellt werden, wobei es sich um eine kleine Auswahl unter einer Vielzahl von eingesetzten Verfahren handelt. Dabei wird das der Messung zugrunde liegende Verfahren etwas ausführlicher gezeigt, um damit das Verständnis für hier nicht aufgeführte Verfahren zu erleichtern.

### 2.1 Kraftmessung mit Dehnungsmessstreifen (DMS)

Die Messung von Kräften geschieht in der Mehrzahl der Anwendungen mit Dehnungsmessstreifen, weil dieses Verfahren sehr genau und technisch ausgereift ist. Das Prinzip beruht darauf, dass ein Messkörper (z.B. ein Stab) durch die Einwirkung einer Kraft (Zug oder Druck) eine Längenänderung erfährt. Auf diesen Messkörper ist ein elektrischer Leiter aufgeklebt, der den Längenänderungen zwangsweise folgen muss. Dadurch wird der Leiter länger und dünner oder kürzer und dicker und ändert seinen elektrischen Widerstand. Der mathematische Zusammenhang zwischen der Widerstandsänderung und der Kraft lässt sich für verschiedene Messkörper ableiten, das Ergebnis wird im folgenden angegeben.

Dehnungsmessstreifen (DMS) werden nach Bild VII-11d entweder als Drahtgitter-DMS oder als Folien-DMS mit aufgedampftem Messdraht in den Vorzugswerten 120  $\Omega$ , 350  $\Omega$  und 600  $\Omega$  hergestellt. Bestimmte Anwendungen erfordern einen geeigneten DMS-Aufbau; so dient beispielsweise die DMS-Rosette zum Messen von mehrachsigen mechani-

schen Spannungsverteilungen. Der Zusammenhang zwischen der relativen Längenänderung  $\Delta l/l$  des Messkörpers und damit des DMS und der relativen Widerstandsänderung  $\Delta R/R$  ist gegeben durch

$$\Delta R/R = K \cdot \Delta l/l = K \cdot \varepsilon \quad \text{mit} \quad \varepsilon = \Delta l/l \quad (\text{VII.12})$$

Formelzeichen siehe Text

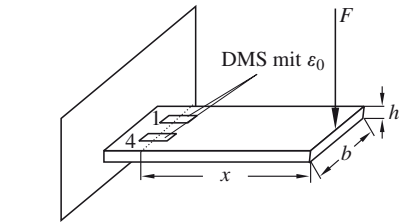
$K$  steht für  $K$ -Faktor. Sein Wert ist materialabhängig. Für metallische Leiter gilt  $K \approx 2$ . Die maximale relative Dehnung  $\varepsilon_{\max}$  beträgt für Metalle  $\approx 10^{-3}$ , damit man im elastischen Bereich bleibt. Daraus folgt die maximale relative Widerstandsänderung zu  $2 \cdot 10^{-3}$ . Um derart kleine Widerstandsänderungen messen zu können, werden DMS in Brückenschaltungen eingesetzt. Gleichung (VII.12) gilt auch für den Fall, dass der Messkörper gestaucht wird. Dann sind  $\Delta R/R$  und  $\varepsilon$  negativ einzusetzen, Bild VII-11b, c.

Ein Problem beim Einsatz von Dehnungsmessstreifen ist die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes. Bei einer Temperaturänderung von 1  $^{\circ}\text{C}$  errechnet sich die relative Widerstandsänderung von Kupfer mit  $\alpha = 4 \cdot 10^{-3}/\text{K}$  zu:

$$\begin{aligned} R &= R_0(1 + \alpha \cdot \Delta T) = R_0 + R_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T \\ \Rightarrow (R - R_0)/R_0 &= \Delta R/R_0 = \alpha \cdot \Delta T = (4 \cdot 10^{-3}/\text{K}) \cdot 1 \text{ K} \\ &= 4 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Damit bewirkt eine Temperaturänderung von 1/2  $^{\circ}\text{C}$  die gleiche Widerstandsänderung wie die maximal zulässige Dehnung  $\varepsilon_{\max}$ . Um dennoch mit DMS sinnvoll messen zu können, wird folgendermaßen vorgefahren:

Erstens wählt man als Material für die DMS Konstantan mit  $\alpha < |10^{-5} \text{ K}^{-1}|$ , und zweitens verwendet man in der Brückenschaltung zwei oder vier DMS. Beim Einsatz von zwei DMS spricht man von einer Halb-

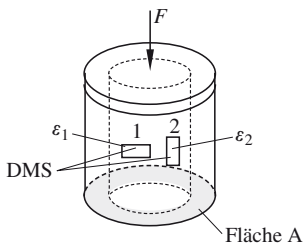


Für a), b), c) gilt:  
 $K \approx 2$ , materialabhängig  
 $\mu = 0,3$   
1,4 DMS gedehnt  
2 DMS gestaucht

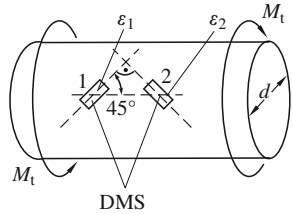
**Bild VII-11**

Anordnung von  
Dehnungsmessstreifen  
a) einseitig eingespannter Stab  
b) Kraftmessdose  
c) Torsionsstab  
d) Technische Ausführungen

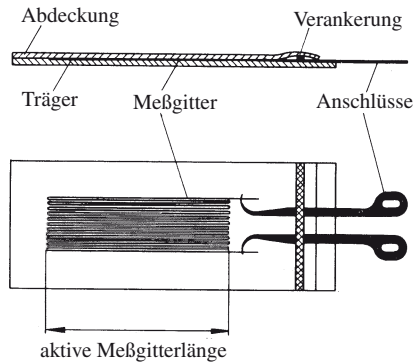
a) 
$$\epsilon_0 = -\epsilon_u = \frac{6 \cdot x \cdot F}{E \cdot b \cdot h^2} = \left( \frac{\Delta l}{l} \right)_0 = \frac{1}{K} \cdot \frac{\Delta R}{R}$$



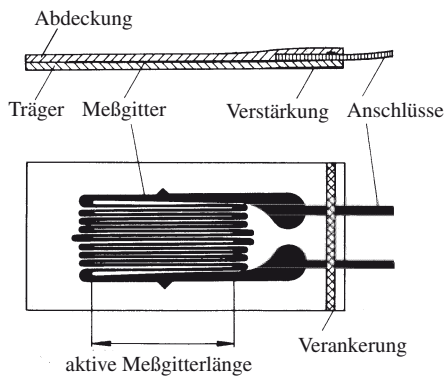
b) 
$$-\epsilon_2 = \frac{F}{A \cdot E} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{K} \cdot \frac{-\Delta R}{R}$$
  
$$\epsilon_1 = -\mu \cdot \epsilon_2$$



c) 
$$\epsilon_1 = M_t \frac{16(1+\mu)}{E \cdot \pi \cdot d^3} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{K} \cdot \frac{\Delta R}{R}$$
  
$$\epsilon_2 = -\epsilon_1$$



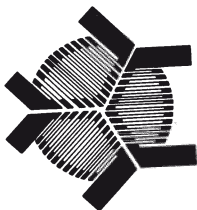
**DMS mit Drahtmeßgitter**



**DMS mit Folienmeßgitter**

d)

**DMS-Rosette**



brücke, bei vier DMS von einer Vollbrücke. Die zwei DMS in der Halbbrücke werden „untereinander“ angeordnet. Da sich deren Widerstände – gleiche Temperatur vorausgesetzt – gleichsinnig mit der

Temperatur ändern, wird die Spannung in der Brückendiagonalen von Temperaturänderungen unabhängig. Natürlich muss man dafür sorgen, dass ein DMS gedehnt, der andere gestaucht wird, da sich

andernfalls auch die Nutzsignale aufheben würden. Durch die gegensinnigen Widerstandsänderungen der DMS erhält man bei der Halbbrücke weiterhin ein größeres Ausgangssignal gegenüber dem Einsatz von nur einem DMS. Sind außerdem die Widerstandsänderungen bei Dehnung und Stauchung gleich groß ( $+\Delta R$  und  $-\Delta R$ ), ergibt sich ein linearer Zusammenhang zwischen der Widerstandsänderung und der Spannung  $U_{d0}$  in der Brückendiagonalen. Man wird deshalb die Halbbrücke der Viertelbrücke vorziehen. Kann man Dehnung und Stauchung nicht gleichzeitig mit zwei DMS erfassen, wählt man trotzdem zwei DMS, von denen einer die Dehnung oder Stauchung erfasst, der andere als „Dummy“ in innigem Wärmekontakt zum messenden DMS steht, aber nicht aufgeklebt wird. Er besorgt dann lediglich die Temperaturkompensation.

Bei der Verwendung von vier DMS in einer Vollbrücke gelten die gleichen Aussagen wie bei der Halbbrücke mit dem Zusatz, dass die Spannung in der Brückendiagonalen nochmals größer ist, maximal doppelt so groß, wenn  $+\Delta R$  und  $-\Delta R$  gegeben sind. Die Anordnung der DMS ist in der Brückenschaltung so zu wählen, dass sich die zwei gestauchten diagonal gegenüberliegen, ebenso die zwei gedehnten.

Als Messkörper (Bild VII-11a, b, c) werden in der Regel ein einseitig fest eingespannter Stab, ein in Längsrichtung mit einer Kraft beaufschlagter Zylinder, auch *Kraftmessdose* genannt, und ein tordierter Stab zur Messung des Drehmomentes verwendet. In Tabelle VII-6 sind die für diese Messkörper möglichen Anordnungen für DMS und die sich daraus ergebenden Spannungen  $U_{d0}$  aufgeführt. Dazu wurde in Gleichung (VI.7) für die Widerstände jeweils  $R_i \pm \Delta R_i$ ,  $i = 1 \dots 4$ , eingesetzt. Häufig sind die Widerstände  $R_i$  gleich groß, d.h.  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$ , weil die Brückenschaltung dann die größte Empfindlichkeit besitzt und damit maximales  $U_{d0}$  liefert. In Tabelle VII-6 ist diese Dimensionierung zugrunde gelegt. Für die genannten Messkörper gelten die folgenden Beziehungen:

1. *Einseitig fest eingespannter Stab*: Die Dehnung ist abhängig vom Ort des Aufklebens, die Abhängigkeit ist in Gleichung (VII.13) gegeben und in Bild VII-11a erläutert.

$$\sigma_o = \frac{6 \cdot x \cdot F}{b \cdot h^2} \quad \text{mit} \quad \sigma_u = -\sigma_o; \quad \sigma = \varepsilon \cdot E \quad (\text{VII.13})$$

$\sigma_o$  Spannung auf der Oberseite und  $\sigma_u$  Spannung auf der Unterseite des Balkens in  $\text{N/m}^2$ ;  $F$  Kraft in N;  $b$  Balkenbreite in m;  $h$  Balkenhöhe in m;  $x$  Aufklebeort der DMS, vom freien Balkenende aus gemessen;  $\varepsilon = \Delta l/l$  relative Dehnung oder Stauchung;  $E$  Elastizitätsmodul in  $\text{N/m}^2$

$\sigma_u = -\sigma_o$  gilt nur für den Fall, dass die DMS oben und unten genau untereinander aufgeklebt sind.

Ein Sonderfall ergibt sich, wenn der Balken nur von oben oder nur von unten zugänglich ist. Dann kann man zwei DMS aufkleben, die in der Brückenschaltung diagonal angeordnet werden müssen. Diese Anordnung ist weder temperaturkompensiert noch

liefert sie eine lineare Abhängigkeit zwischen  $U_{d0}$  und  $\Delta R/R$ . Einziger Vorteil: Die Spannung  $U_{d0}$  ist doppelt so groß wie beim Einsatz nur eines DMS. Bei der Vollbrücke müssen die zwei DMS oben genau nebeneinander angeordnet werden, und die zwei DMS unten müssen sich genau unter den zwei oberen befinden, damit gleiche Dehnungen oder Stauchungen erfolgen und die berechnete Abhängigkeit gültig ist.

2. *Kraftmessdose*: Bei Dehnung ( $+\varepsilon$ ) oder Stauchung ( $-\varepsilon$ ) eines Zylinders in Längsrichtung findet gleichzeitig eine Umfangsabnahme ( $-\Delta U/U$ ) oder -zunahme ( $+\Delta U/U$ ) in Querrichtung statt. Beide haben entgegengesetztes Vorzeichen und sind über die *Querkontraktionszahl*  $\mu = 0,3$  miteinander verknüpft:  $\Delta U/U = -0,3 \cdot \varepsilon$ . Kraftmessdosen werden als Vollbrücke aufgebaut und sind damit temperaturkompensiert. Die Abhängigkeit zwischen  $\Delta R/R$  und  $U_{d0}$  ist wegen  $\mu \neq 1$  nichtlinear.

Der Zusammenhang zwischen  $\varepsilon$  und der Kraft  $F$  ergibt sich mit dem *Hookeschen Gesetz* und der Beziehung „Spannung gleich Kraft pro Fläche“ zu

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{A \cdot E} \quad (\text{VII.14a})$$

$E$  Elastizitätsmodul in  $\text{N/m}^2$ ;  $A$  Fläche des Zylinders in  $\text{m}^2$ ;  $F$  Kraft in N

Darin ist  $A$  die Querschnittsfläche des Voll- oder Hohlzylinders. In der Regel werden Hohlzylinder verwendet, da sie gegenüber Vollzylindern bei gleicher Querschnittsfläche eine größere Stabilität aufweisen.

3. *Tordierter Stab*: Die relative Widerstandsänderung  $\Delta R/R$  hängt mit dem Torsionsmoment  $M_t$  wie folgt zusammen:

$$\frac{\Delta R}{R} = K \cdot M_t \cdot \frac{16 \cdot (1 + \mu)}{E \cdot \pi \cdot d^3} \quad (\text{VII.14b})$$

$K$   $K$ -Faktor ( $K \approx 2$ );  $\mu$  Querkontraktionszahl ( $\mu = 0,3$ );  $E$  Elastizitätsmodul in  $\text{N/m}^2$ ;  $d$  Torsionsstabdurchmesser in m;  $M_t$  Torsionsmoment in Nm

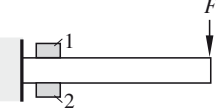
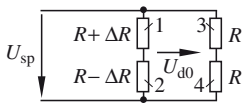
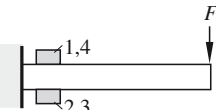
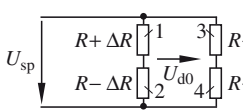
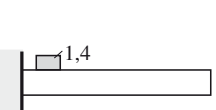
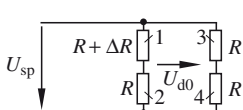
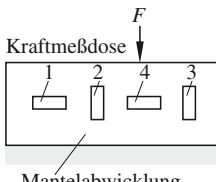
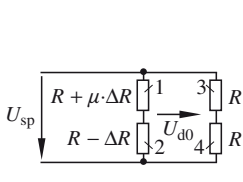
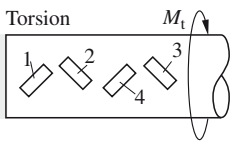
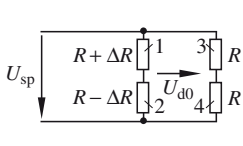
Bei der gezeigten Anordnung von 4 DMS sind deren Dehnung und Stauchung entgegengesetzt gleich groß, so dass sich ein linearer Zusammenhang zwischen  $\Delta R/R$  und  $U_{d0}$  ergibt.

Da die Spannung in der Brückendiagonalen bei allen drei aufgeführten Messkörpern maximal einige mV beträgt, verwendet man häufig zur Speisung der Brücke eine sinusförmige Wechselspannung mit 420 Hz oder 10 kHz. Dann kann zur Messung der Brückendiagonalspannung ein selektiver Wechselspannungsverstärker mit phasenempfindlichem Gleichrichter eingesetzt werden, so dass Messfehler durch Störeinflüsse verringert werden.

## 2.2 Füllstandsmessung und Messung der Foliendicke

Das Prinzip beruht darauf, dass das Dielektrikum Luft eines Plattenkondensators durch einen Stoff mit  $\varepsilon_r > 1$  verdrängt wird. Damit ändert sich die Kapazität der

Tabelle VII-6 Messkörper mit Dehnungsmessstreifen

| einseitig eingespannter Stab                                                       |                                                                                    |                                                                 |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
|   |   | $U_{d0} = -U_{sp} \frac{\Delta R}{2R}$                          |
|   |   | $U_{d0} = -U_{sp} \frac{\Delta R}{R}$                           |
|   |   | $U_{d0} = -U_{sp} \frac{\Delta R}{2R + \Delta R}$               |
|   |   | $U_{d0} = -U_{sp} \frac{\Delta R(1+\mu)}{2R + \Delta R(\mu-1)}$ |
|  |  | $U_{d0} = -U_{sp} \frac{\Delta R}{R}$                           |

Gesamtanordnung. Bild VII-12 zeigt zwei Modelle. Das erste dient zur Messung der Füllstandshöhe, das zweite zur Messung der Foliendicke von Kunststofffolien.

In der Praxis hat sich bewährt, die *relative* Änderung der Kapazität  $\Delta C/C_0$  in Abhängigkeit von der gesuchten Füllstandshöhe  $h$  oder Foliendicke  $d$  anzugeben. Dabei ist  $C_0$  die Kapazität für  $h = 0$  oder  $d = 0$ . Die angegebenen Formeln sind entsprechend dargestellt.

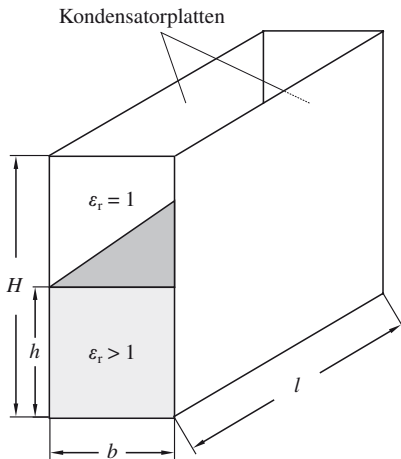
1. *Füllstandsmessung:* Es wird ein rechteckförmiger Behälter verwendet, bei dem zwei gegenüberliegende Seiten mit Folie beklebt oder bedampft sind und bei einem elektrisch leitenden Schüttgut oder einer elektrisch leitenden Flüssigkeit mit einer Kunststoff-Isolierschicht versehen sind. Von Vorteil ist, dass die Messeinrichtung nicht in den Füllraum hineinragt und damit nicht beschädigt werden kann und auch den Füllvorgang nicht behindert. Ist die Oberfläche durch eine Kunststoffschicht abgedeckt, können auch aggressive Medien eingefüllt werden. Bei körnigem Schütt-

gut ist die obere Füllhöhe nicht eindeutig festgelegt, kann aber meist durch Erfahrungswerte oder durch Glätten der Oberfläche ausreichend genau erfasst werden.

2. *Foliendicke:* Man kann zeigen, dass die Kapazität der Anordnung *nicht* davon abhängt, *wo* sich die Folie innerhalb der Kondensatorplatten befindet. Die Dicke  $d$  der Folie wird über die Kapazität der Kondensatoranordnung gemessen und bei einer Abweichung vom Sollwert entsprechend eingestellt, wenn sie sich auf dem Weg von der Spritzdüse zu der Aufwickelrolle befindet. Dabei darf die Folie nicht berührt werden, da sie noch heiß ist und sich im Zustand der Vernetzung befindet.

2.3 Drehzahlmessung

Die Drehzahl wird in  $\text{min}^{-1}$  angegeben, die Drehfrequenz in  $\text{s}^{-1}$ . Zur Messung der Drehzahl kann im einfachsten Fall ein Impuls pro Umdrehung erzeugt und die Zahl der Impulse für genau eine Minute



$$C_0 = C(h=0) = \frac{\epsilon_0 \cdot H \cdot l}{b}$$

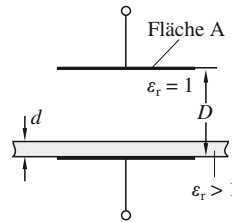
$$\Delta C = C(h>0) - C_0$$

$$= \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \cdot h \cdot l}{b} + \frac{\epsilon_0 (H-h) \cdot l}{b} - \frac{\epsilon_0 \cdot H \cdot l}{b}$$

$$= \frac{\epsilon_0 \cdot l}{b} \cdot h (\epsilon_r - 1)$$

$$\frac{\Delta C}{C_0} = \frac{h}{H} (\epsilon_r - 1)$$

a)



$$C_0 = C(d=0) = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{D}$$

$$\Delta C = C(d>0) - C_0$$

$$= \frac{\epsilon_0 \cdot A}{D} \cdot \frac{(\epsilon_r - 1) \cdot d}{d(1 - \epsilon_r) + \epsilon_r D}$$

( $C(d>0)$ : Reihenschaltung zweier Kondensatoren)

$$\frac{\Delta C}{C_0} = \frac{(\epsilon_r - 1) \cdot d}{d(1 - \epsilon_r) + \epsilon_r D}$$

b)

**Bild VII-12**  
Kapazitive Verfahren  
zur Messung von  
a) Füllstand  
b) Foliendicke

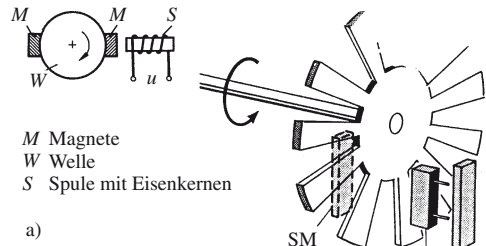
erfasst werden. Dieses Verfahren ist nur sinnvoll, wenn sich die Drehzahl innerhalb der Messzeit 1 min nicht ändert. Außerdem muss eine Minute gewartet werden, bis das Messergebnis zur Verfügung steht. In der Praxis werden deshalb pro Umdrehung mehrere Impulse erzeugt. Dann gilt folgender Zusammenhang zwischen der Zahl der Impulse und der Drehzahl:

$$\text{Impulzzahl } N = n \cdot p \cdot t \quad (\text{VII.15})$$

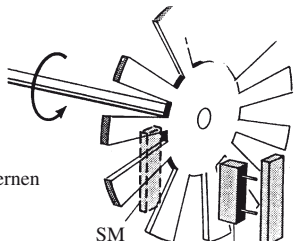
$N$  gezählte Impulse;  $n$  Drehzahl in  $\text{min}^{-1}$ ;  $p$  Zahl der Impulse pro Umdrehung;  $t$  Messzeit in min

Darin ist  $N$  die Zahl der in der Zeit  $t$  in einem elektronischen Zähler gezählten Impulse,  $n$  die gesuchte Drehzahl in  $\text{min}^{-1}$ ,  $p$  die Zahl der Impulse pro Umdrehung und  $t$  die Zeit in min, während der die Impulse gezählt werden. Man wird zweckmäßigerweise  $p \cdot t$  so wählen, dass sich als Einheit 1 min ergibt, denn dann entspricht die Zahl  $N$  der Drehzahl  $n$ . Setzt man voraus, dass der Fehler der Messeinrichtung vernachlässigbar klein ist, was in der Regel auch zutrifft, dann ergeben sich für  $p > 1$  folgende Vorteile:

1. Die Drehzahl als Zahl  $N$  steht in weniger als 1 Minute zur Verfügung und ermöglicht das Erfassen von Drehzahländerungen.
2. Bei unveränderter Messzeit steht die Drehzahl als Zahl  $N$  mit einer höheren Stellenzahl und damit höherer Genauigkeit zur Verfügung. Voraussetzung ist, dass sich die Drehzahl während der Messzeit nicht ändert.

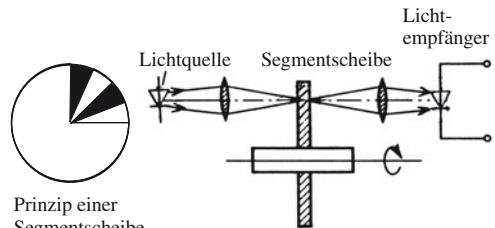


a)



SM Schaltmagnet  
RM Rücksetzmagnet  
SE Sensorelement

b)



Prinzip einer Segmentscheibe

c)

**Bild VII-13** Digitale Verfahren  
zur Drehzahlmessung  
a) Spannungsinduktion  
b) Fe-Blendenrad  
(nach Unterlagen Fa. VAC)  
c) optische Verfahren



Es stehen Messeinrichtungen mit einem maximalen  $p$  von etwa 5000 zur Verfügung (Bild VII-13c).

■ **Beispiel VII.6:** Eine Drehzahl wird mit einem Geber mit  $p = 120$  gemessen. Wählt man  $p \cdot t = 1$  min, dann verringert sich die Messzeit auf  $(1/120)$  min = 0,5 s, und die Zahl  $N$  der Impulse entspricht der Drehzahl in  $\text{min}^{-1}$ . Auf diese Weise ist auch das Erfassen der Drehzahlerhöhung von Motoren vom Einschaltmoment bis zum Erreichen der Nenndrehzahl möglich. Beträgt die Messzeit andererseits 1 min, erhält man bei einer (konstanten) Drehzahl von  $3000 \text{ min}^{-1}$  eine Anzeige  $N = 3000 \cdot 120 = 360\,000$ . Hier wird man zweckmäßigerweise  $p = 100$  wählen und erhält dann  $N = 300\,000$ . Bei entsprechender Kommasetzung ergibt sich die Drehzahl  $n = 3000,00 \text{ min}^{-1}$ .

In Bild VII-13 sind einige digitale Verfahren zur Drehzahlmessung dargestellt. Bild VII-13a zeigt eine Anwendung des Induktionsgesetzes. Nähert sich der Magnet der Spule, nimmt der magnetische Fluss zu, beim Entfernen ab. Durch diese Flussänderungen wird eine Spannung in der Spule induziert, die aber mit sinkender Drehzahl kleiner wird. Bei diesem Verfahren hat der Einsatz mehrerer Magnete auf der Welle noch den zusätzlichen Vorteil, dass die durch einen Magneten entstehende Unwucht bei mehreren Magneten verringert werden kann.

Eine Weiterentwicklung zeigt Bild VII-13b (nach Unterlagen der Fa. Vakuumschmelze). Durch den Einsatz magnetfeldabhängiger Schalter hängt die Signalhöhe nicht mehr von der Drehzahl ab. Das entsprechend geformte Rad muss an oder auf der Welle angebracht werden.

Der Vorteil der Verfahren nach Bild VII-13a und b liegt darin, dass sie sehr betriebssicher sind. Das gilt auch für das im Bild VII-13c dargestellte optische Verfahren. Als Lichtsender werden Leuchtdioden (LED) verwendet, und die Lichtempfänger sind Foto-

dioden. Auf der Welle werden industriell gefertigte Kunststoffscheiben mit Kreissegmenten angebracht, bei denen sich lichtdurchlässige und lichtundurchlässige Segmente abwechseln. Die Anzahl der auf einer Scheibe angeordneten Segmente kann bis zu maximal 10000 (5000 lichtdurchlässige und 5000 lichtundurchlässige) betragen.

Die analogen Verfahren zur Drehzahlmessung, die u.a. nach dem Prinzip des Wechselstromgenerators aufgebaut sind („Dynamoprinzip“), verlieren an Bedeutung, weil die Auswertung bzw. Anzeige auf digitalem Wege geschieht und der mechanische Verschleiß der Digitalverfahren geringer ist.

## 2.4 Durchflussmessung

Bei den in Bild VII-14 gezeigten Durchflussmessern ist der Momentanwert der Drehzahl der Flügel- oder Turbinenräder dem Momentanwert der Menge des durchfließenden Mediums und damit seiner Geschwindigkeit proportional. Zur Bestimmung des gesamten in einer gegebenen Zeit durchgeflossenen Mediums müssen die Momentanwerte der Drehzahl addiert werden, d.h., es muss die Gesamtzahl der Umdrehungen erfasst werden. Deshalb ist die Durchflussmessung verbunden mit einer Drehzahlmessung, wobei die erforderliche Summenbildung häufig über ein mechanisches Zählwerk geschieht („Wasserzähler“ im Haushalt). Beim Flügelradzähler werden die Flügel tangential angeströmt, beim *Woltmann*-Zähler axial.

Bei den Durchflussmessern nach dem Verdrängungsprinzip, wie sie bei den Gasmengenzählern im Haushalt angewendet werden, rollen zwei Ovalräder aufeinander und zur Messkammer hin ab und schließen ein

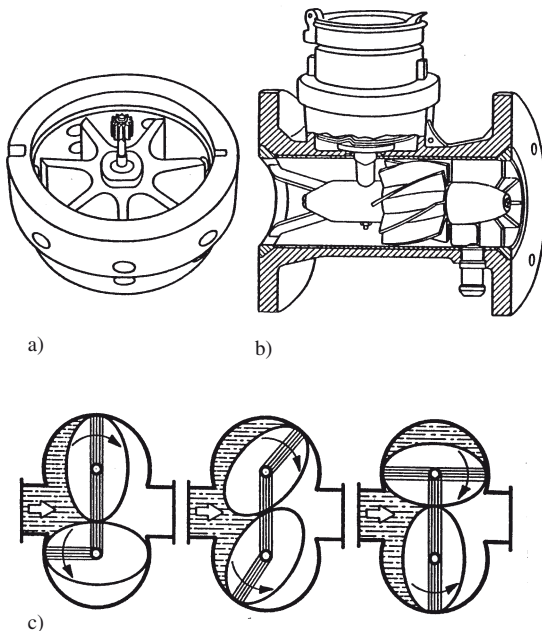


**Bild VII-14**

Durchflussmessung (nach Unterlagen Fa. Siemens (a, b) und Fa. Orlicke (c))

- a) Flügelradzähler
- b) Woltmannzähler
- c) Ovalradzähler

bestimmtes Volumen des Mediums ein (Ovalradzähler Bild VII-14c). Wird die Zahl der Umdrehungen erfasst, ist auch das insgesamt durchgeströmte Volumen des Mediums bekannt. Die Drehung der Ovalräder wird durch den Druck des anströmenden Mediums auf das untere Rad im Bild VII-14c links bewirkt.

Beim Prinzip der *magnetischen Induktion* nutzt man die Kraftwirkung auf bewegte elektrische Ladungen  $Q$  im Magnetfeld aus (Bild VII-15). Sie ist durch  $F_m = Q \cdot v \cdot B$  gegeben, wobei  $B$  und  $v$  senkrecht aufeinander stehen. Dann ist  $F_m$  wiederum senkrecht zu  $B$  und  $v$ . Die magnetische Flussdichte  $B$  wird durch einen von außen angebrachten Magneten erzeugt. Die erforderlichen elektrischen Ladungen  $Q$  stehen bei Flüssigkeiten durch die meist vorhandene Dissoziation in Form von Ionen zur Verfügung. In die Wand des Rohres werden an zwei gegenüberliegenden Stellen elektrische Kontakte in das elektrisch nichtleitende Rohr eingebracht, an denen die Spannung abgegriffen wird. Die elektrische Kraft ist durch  $F_e = Q \cdot E = Q \cdot U/d$  gegeben. Es gilt  $F_m = F_e$  und damit  $v = U/(B \cdot d)$ . Der Durchfluss, also das pro Zeiteinheit durchströmende Volumen  $V'$  in  $\text{m}^3/\text{s}$  errechnet sich bei gegebener Strömungsgeschwindigkeit  $v$  und der Fläche  $A$  aus  $V = v \cdot A = v \cdot d^2 \cdot \pi/4$ . Dann folgt für das pro Zeiteinheit durchströmende Volumen  $V'$ :

$$V' = (d^2 \cdot \pi/4) \cdot (U/(B \cdot d)) = (d \cdot \pi/4) \cdot (U/B) \quad (\text{VII.16})$$

$d$  Rohrdurchmesser in m,  $U$  gemessene Spannung an den Elektroden in V,  $B$  magnetische Flussdichte in  $\text{Vs/m}^2$

■ **Beispiel VII.7:** Ein Dauermagnet erzeugt eine Flussdichte von  $B = 0,1 \text{ Vs/m}^2$ ; der Rohrdurchmesser beträgt  $d = 5 \text{ cm}$ . Bei einer Strömungsgeschwindigkeit des Mediums von  $v = 0,1 \text{ m/s}$  ergibt sich eine Spannung von  $U = 10^{-1} (\text{Vs/m}^2) \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 10^{-1} (\text{m/s}) = 5 \cdot 10^{-4} \text{ V} = 500 \text{ } \mu\text{V}$ . Für  $V'$  folgt daraus  $V' = (5 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \pi/4) \times (5 \cdot 10^{-4} \text{ V})/(10^{-1} \text{ Vs/m}^2) = 1,96 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ .

Die entstehenden Spannungen liegen im  $\mu\text{V}$ - oder  $\text{mV}$ -Bereich. Der Innenwiderstand dieser Spannungsquelle ist sehr groß (Megaohm-Bereich). Deshalb sind geeignete Maßnahmen zur Störunterdrückung erforderlich.

Bei der *Ultraschall-Durchflussmessung* nach Bild VII-16 erzeugen zwei Ultraschallsender (S1, S2) kurze Ultraschallimpulse, die auf die zugeordneten Empfänger (E1, E2) gerichtet sind und von diesen empfangen werden.  $c$  ist die Geschwindigkeit, mit der sich der Ultraschall in dem im Rohr befindlichen Medium ausbreitet, wenn dieses ruht. Strömt das Medium mit der Geschwindigkeit  $v$  durch das Rohr, breiten sich die Schallwellen vom Sender S1 langsamer als mit  $c$  aus. Der genaue Wert ergibt sich aus  $c_1 = c - v \cdot \cos \alpha$ . Entsprechend folgt für die Geschwindigkeit der von S2 ausgesendeten Schallimpulse  $c_2 = c + v \cdot \cos \alpha$ . Mit der Entfernung  $L$  der zwei Sender und Empfänger voneinander folgt für die Laufzeiten

$$t_1 = \frac{L}{c - v \cdot \cos \alpha}; \quad t_2 = \frac{L}{c + v \cdot \cos \alpha} \quad (\text{VII.17})$$

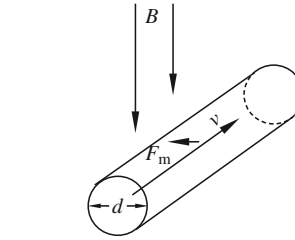
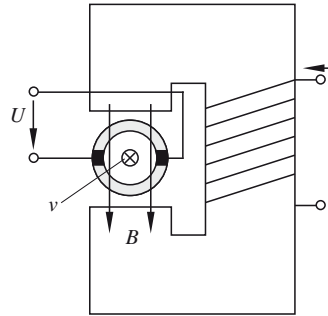


**Bild VII-15**  
Durchflussmessung nach dem Prinzip der magnetischen Induktion



Die Laufzeitdifferenz berechnet sich zu

$$t_1 - t_2 = 2 \cdot L \cdot \frac{v \cdot \cos \alpha}{c^2 - v^2 \cdot \cos^2 \alpha} \quad (\text{VII.18})$$

In Flüssigkeiten kann der Term  $v^2 \cdot \cos^2 \alpha$  in Gleichung (VII.18) vernachlässigt werden, so dass sich als Näherungslösung ergibt

$$t_1 - t_2 \approx 2 \cdot L \cdot \frac{v \cdot \cos \alpha}{c^2} \Rightarrow v \approx \frac{c^2 (t_1 - t_2)}{2 \cdot L \cdot \cos \alpha} \quad (\text{VII.19})$$

Das Messergebnis hängt allerdings noch von der Schallausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  ab. Um diese Abhängigkeit auszuschalten, hat man z.B. die Ansteuerung der Ultraschallsender so gewählt, dass ein Schallimpuls, von S1 ausgesendet und von E1 empfangen, sofort wieder von S2 ausgesendet wird, von E2 empfangen und unverzüglich von S1 ausgegeben

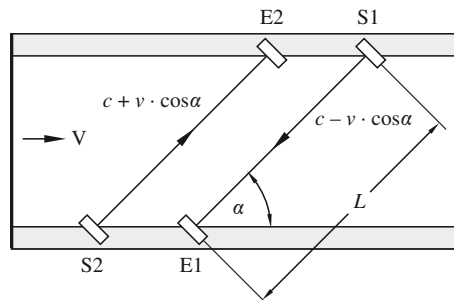


**Bild VII-16** Ultraschall-Durchflussmessung

wird. Für die Frequenzen  $f_1$  und  $f_2$  der Sender S1 und S2 folgt

$$f_1 = \frac{1}{t_1} = \frac{c - v \cdot \cos \alpha}{L}; \quad (\text{VII.20})$$

$$f_2 = \frac{1}{t_2} = \frac{c + v \cdot \cos \alpha}{L};$$

Aus der Differenz dieser zwei Frequenzen

$$f_2 - f_1 = \frac{2 \cdot v \cdot \cos \alpha}{L} \quad (\text{VII.21})$$

ergibt sich für die Strömungsgeschwindigkeit  $v$  unabhängig von der Schallgeschwindigkeit  $c$

$$v = \frac{L}{2 \cdot \cos \alpha} (f_2 - f_1) \quad (\text{VII.22})$$

## 2.5 Zeit- und Frequenzmessung

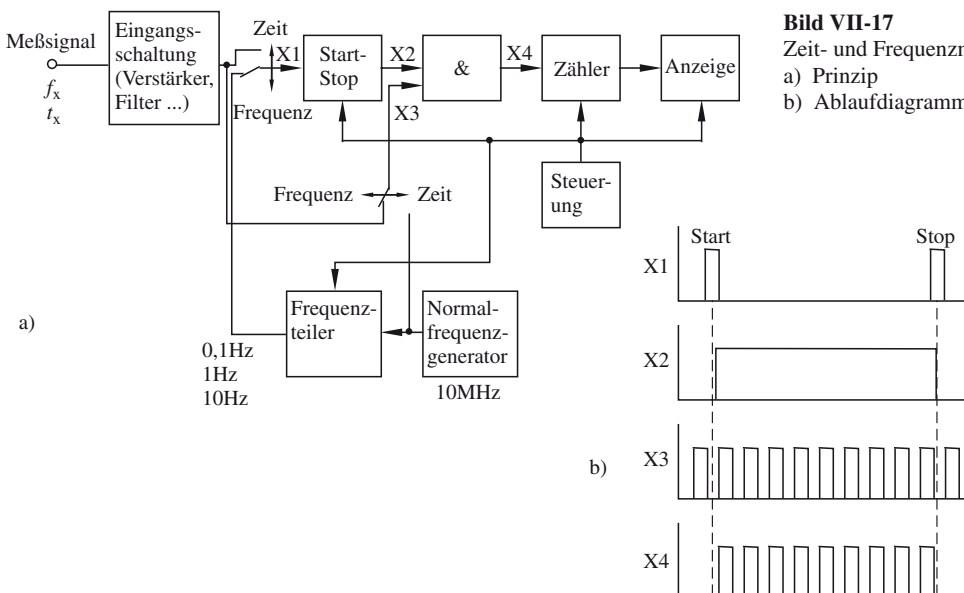
Die Messung der Zeit und der Frequenz geschieht auf digitalem Wege, wobei die Messeinrichtung die Messung von Zeit und Frequenz ermöglicht. Das Prinzip ist in Bild VII-17 dargestellt.

Ein Normalfrequenzgenerator stellt die Zeiteinheit in Form einer Sekunde oder dekadischer Teile oder Vielfache davon dar. Das periodische Signal mit der zu messenden Frequenz  $f_x$  wird zunächst einer Eingangsschaltung zugeführt, die den Spannungswert an die Erfordernisse der nachfolgenden Torschaltung anpasst. Sie enthält einen Abschwächer für große Signalamplituden, einen Verstärker für kleine Signalamplituden und eine Signalformstufe. Letztere wandelt das Eingangssignal in ein rechteckförmiges Signal mit gleicher Frequenz um. Weiterhin können frequenzselektive Filter zugeschaltet werden, die uner-

wünschte Störfrequenzanteile ausfiltern. Außerdem kann häufig ein Gleichanteil im Messsignal durch einen Kondensator unterdrückt werden (entsprechend den Schalterstellungen AC oder DC beim Oszilloskop). Die Torschaltung besteht aus einem UND-Glied und lässt das Signal mit der Frequenz  $f_x$  für die von der Zeiteinheit vorgegebene Zeit passieren. Die Impulse werden vom Zähler gezählt. Nach Schließen des Tores wird der Zählerstand in die Anzeige übernommen und sichtbar gemacht. Wählt man als Torzeit nicht eine Sekunde, sondern dekadische Teile oder Vielfache davon, muss in der Anzeige lediglich das Komma entsprechend gesetzt werden. Je kürzer die Torzeit gewählt wird, desto schneller steht das Messergebnis zur Verfügung, allerdings mit verminderter Stellenzahl, da in der vorgegebenen Zeit weniger Zählimpulse in den Zähler gelangen. Für genaue Messungen wird man deshalb Torzeiten von z.B. 10 s wählen.

Die Steuerung hat innerhalb eines Messzyklus hauptsächlich folgende Aufgaben: Setzen des Zählerstandes auf Null; Öffnen der Torschaltung für die eingestellte Zeit (...; 0,1 s; 1 s; 10 s; ...); Speichern des aktuellen Zählerstandes für die Anzeige in einem Anzeigespeicher; Ansteuerung der Anzeigen im meist verwendeten Multiplexverfahren; Ansteuerung eines weiteren Zählers zur Bereitstellung der Torzeit.

Die Torzeit wird dadurch gewonnen, dass ein Quarzoszillator auf einer relativ hohen Frequenz von 1 MHz oder 10 MHz schwingt. Diese Oszillatoren sind sehr frequenzstabil, wenn man die beiden wesentlichen Einflussgrößen „Temperatur“ und „Alterung“ so weit wie möglich ausschaltet. Die Temperaturabhängigkeit der Frequenz von  $\leq |\pm 10^{-5} \text{ K}^{-1}|$  kann durch Wahl einer optimalen Schnittebene für den



Quarz und durch Einbau in einen Thermostaten weiter verringert werden. Zur Herabsetzung der Frequenzänderung infolge Alterung von  $\leq |\pm 10^{-5} \text{ a}^{-1}|$  werden die Quarze dadurch künstlich gealtert, dass man sie etlichen Temperaturzyklen aussetzt. Zahl, Temperaturendwerte und Dauer dieser Zyklen sind Erfahrungswerte und werden von den Firmen i.a. nicht veröffentlicht. Ein Zyklus kann so aussehen: Durchfahren des Temperaturbereiches von 20 °C bis 80 °C und zurück mit einer Dauer von 2 bis 4 Stunden, und das insgesamt 20mal.

Die Frequenz des Quarzoszillators wird über einen Zähler aus mehreren Zähldekaden geteilt, wobei z.B. eine Frequenz von 1 Hz einer Periodendauer von 1 s entspricht und diese dann zur Öffnung der Torschaltung verwendet wird. Andere Töffnungszeiten werden durch Zu- oder Abschalten einzelner Zähldekaden erreicht.

Die Messung von Zeiten oder Periodendauern geschieht dadurch, dass das Eingangssignal mit der zu messenden Periodendauer  $t_x$  mit der ersten positiven Flanke die Torschaltung öffnet und mit der folgenden wieder schließt. Während das Tor geöffnet ist, zählt der Zähler die Impulse des Quarzoszillators (1 MHz oder 10 MHz). Damit ist sein Zählerstand der Periodendauer  $t_x$  proportional. Es ist deshalb wichtig, dass die Frequenz des Quarzoszillators möglichst hoch ist, damit der Zähler auch bei kleinen Periodendauern im  $\mu\text{s}$ -Bereich noch ausreichend Impulse zählen kann und so eine möglichst hohe Auflösung des Messwertes möglich ist.

Frequenzen  $> 10 \text{ kHz}$  und Periodendauern  $> 1 \text{ ms}$  sind mit einem Zähler mit einer Quarzfrequenz von 10 MHz und einer Torzeit von 1 s mit 4 oder mehr Stellen messbar. Hat das zu messende Signal dagegen Frequenzen  $< 10 \text{ kHz}$  oder Periodendauern  $< 1 \text{ ms}$ , ergibt die Anzeige weniger als 4 Stellen. Dann sollte man zur Frequenzmessung auf die Periodendauermessung und zur Periodendauermessung auf die Frequenzmessung übergehen. Die gewünschte Größe ergibt sich dann über eine Rechnung aus der Beziehung  $f = 1/T$ . Komfortable Zähler wenden dieses Verfahren bereits automatisch an.

## 2.6 Weg- und Winkelmessung

Mit den im Kapitel VII.1 vorgestellten ohmschen, kapazitiven und induktiven Aufnehmern können auch Wege (Abstände) und Drehwinkel gemessen werden.

In Bild VII-18 ist das jeweilige Messprinzip gezeigt. Wenn möglich, werden Differentialausführungen verwendet, da die Kennlinie einer angestrebten linearen Abhängigkeit nahe kommt.

Für die resistiven Wegaufnehmer stehen Ausführungen von einigen mm bis zu einem Meter zur Verfügung. Die Winkelaufnehmer werden auch für Winkel bis zu 360° gefertigt. Bei den induktiven Wegaufnehmern lässt sich erkennen, dass die Kennlinie der Differential-Ausführung bereichsweise nahezu linear

ist und außerdem positive und negative Wege vom Bezugspunkt aus messbar sind. Bei den kapazitiven Aufnehmern wird die Kapazität sowohl durch eine wegproportionale Abstandsänderung als auch durch eine wegproportionale Flächenänderung variiert. Verwendet man einen Differentialkondensator und misst

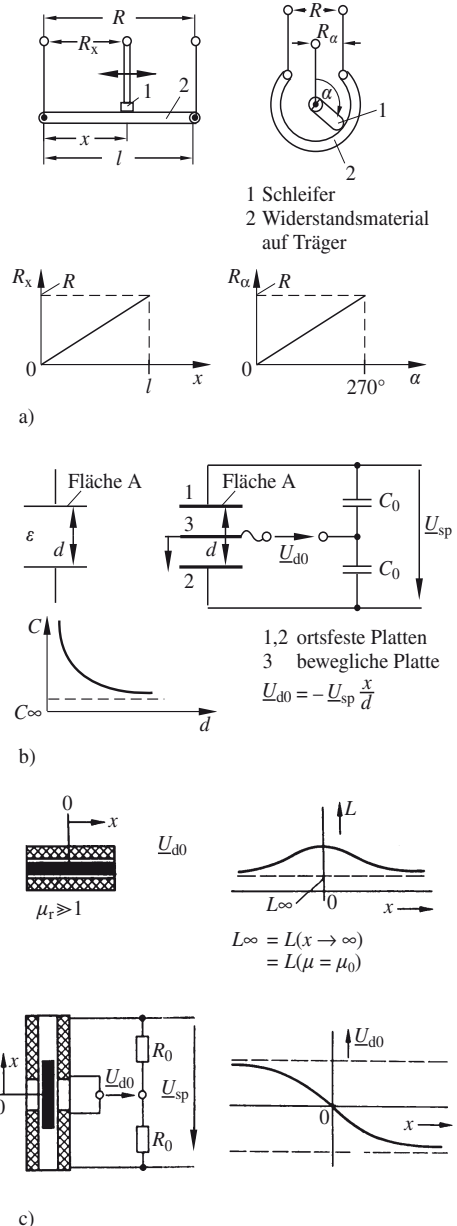


**Bild VII-18** Weg- und Winkelmessung: Prinzip und Kennlinie von  
a) ohmschen  
b) kapazitiven  
c) induktiven Aufnehmern

die Kapazitätsänderung in einer Wechselstrom-Brückenschaltung, erhält man einen linearen Zusammenhang zwischen Weg- und Kapazitätsänderung. Auch die induktiven Differentialausführungen werden zum Messen in Brückenschaltungen eingefügt.

Für die Wechselstrom-Messbrücken werden Frequenzen im kHz-Bereich verwendet, um den Einfluss von Oberschwingungen der 50-Hz-Energieversorgung klein zu halten. Außerdem lassen sich Filterschaltungen zur Messung der Spannung in der Brückendiagonalen mit kleineren Bauelementewerten realisieren.

Bei den *kodierten Weg- und Winkelaufnehmern* ist jeder Weglänge oder jedem Drehwinkel ein eindeutig kodiertes digitales Signal zugeordnet (Bild VII-19).

Diese Signale haben den Vorteil, dass sie auch in einer gestörten Umgebung eine weitgehend sichere Messsignalübertragung gestatten. Außerdem steht das Signal in einer für die Weiterverarbeitung in einem Rechner geeigneten Form zur Verfügung. Auch der Messaufbau ist relativ störunanfällig. Für die Kodierung der Scheiben wird häufig nicht der Binärcode verwendet, der eine eindeutig zugeordnete Stellenwertigkeit aufweist, sondern der Gray-Code, bei dem sich zwei benachbarte Codewörter nur in *einer* Stelle unterscheiden. Da die einzelnen Kodierungen bei Weg- oder Winkeländerungen nacheinander überstrichen werden, sind Übertragungsfehler einfach

erkennbar. Allerdings benötigt das Auswertegerät einen Codewandler.

*Inkrementale Wegaufnehmer* verwenden nach Bild VII-20a eine Leiste aus Glas oder Kunststoff (1), auf der in Querrichtung abwechselnd lichtdurchlässige und lichtundurchlässige Segmente aufgebracht wurden. Dieser Streifen wird an dem Gegenstand befestigt, dessen Weg gemessen werden soll. Das von einer Lichtquelle ausgesendete Licht wird bei Bewegung des Gegenstandes um eine Rasterlänge  $\Delta r$  durch die ortsfeste Leiste (2) einmal unterbrochen. Zählt man die Zahl der Hell-Dunkel-Wechsel oder der Dunkel-Hell-Wechsel und erhält den Wert  $n$ , so ist der zurückgelegte Weg  $n \cdot \Delta r$ .

Soll auch die *Richtung* des Weges von einem Bezugspunkt aus erfasst werden, bringt man nach Bild VII-20b auf dem ortsfesten Streifen (2) zwei Hell-Dunkel-Segmente an, die einen Abstand von  $\Delta r + \Delta r/4$  zueinander haben. Trifft das Maximum von  $u_1$  mit einer ansteigenden Spannung  $u_2$  zusammen, bewegt sich der Gegenstand nach rechts, bei einer Linksbewegung trifft das Maximum von  $u_1$  mit einer abfallenden Spannung  $u_2$  zusammen.

Zur Festlegung des Bezugswertes für den Weg ( $x = 0$ ) muss der Gegenstand in eine vorgesehene Position gebracht und der Zähler auf Null gesetzt werden. Auf die Streifen lassen sich Raster mit einem Abstand von minimal einigen  $\mu\text{m}$  aufbringen. Damit sind auch

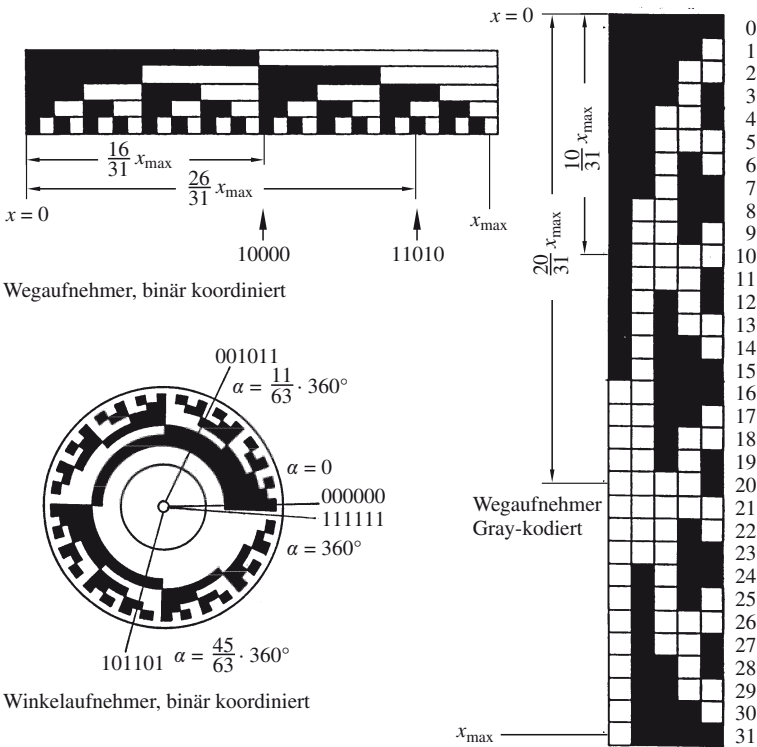
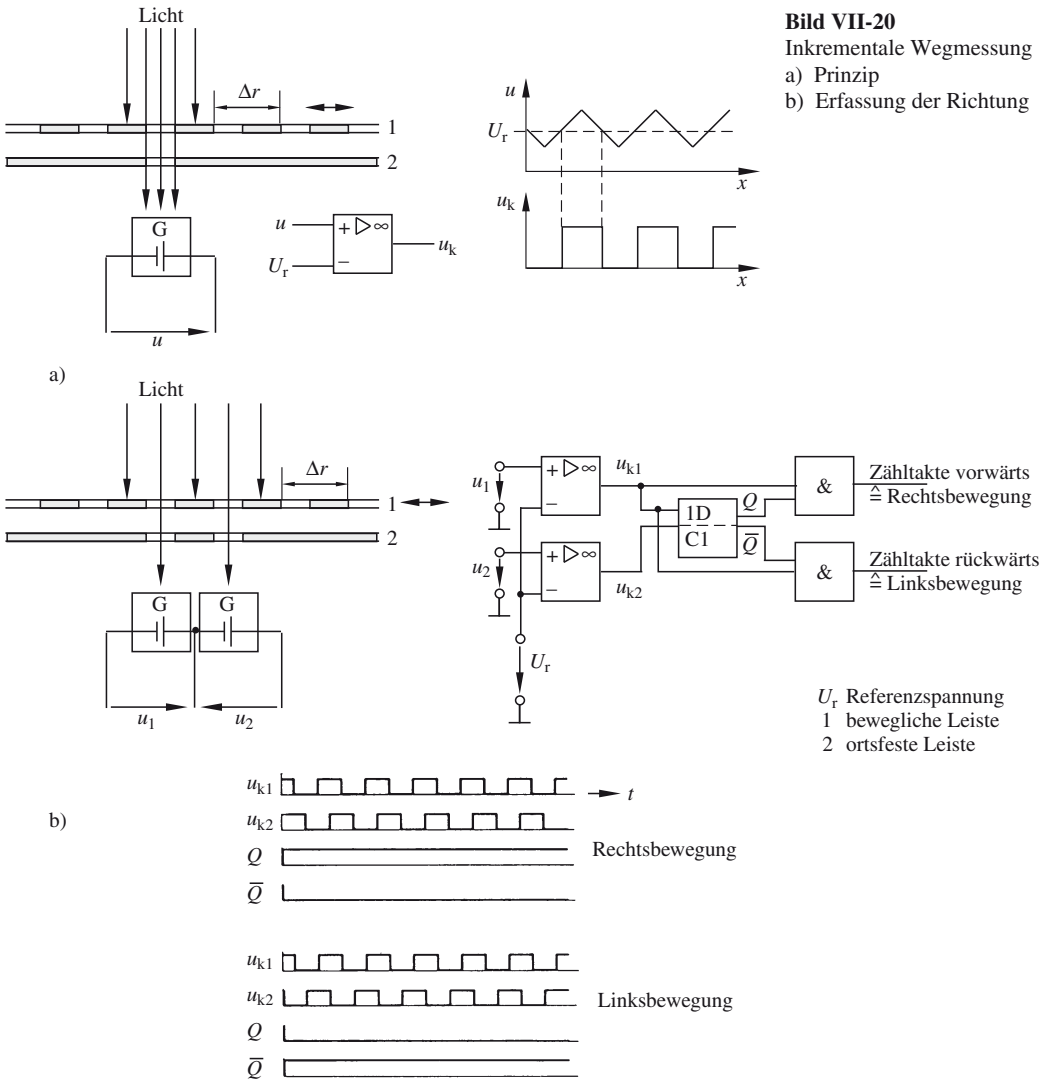


**Bild VII-19**  
Kodierte Weg- und  
Winkelaufnehmer



Wegmessungen bis zu dieser Größenordnung herab möglich.

## 2.7 Beschleunigungsmessung

Die Messung nutzt den Zusammenhang zwischen der Kraft  $F$  und der Beschleunigung  $a$  ( $F = a \cdot m$ ) aus. In Bild VII-21a ist ein gedämpftes Feder-Masse-System dargestellt. Wird das Gehäuse beschleunigt, ändert die Masse wegen ihrer Trägheit ihre Lage innerhalb des Gehäuses. Die zugeordnete Differentialgleichung lautet:

$$m \cdot \frac{d^2 y_M}{dt^2} + w \cdot \frac{dy_M}{dt} + c \cdot y_M = -m \cdot \frac{d^2 y_G}{dt^2} = -m \cdot a \quad (\text{VII.23})$$

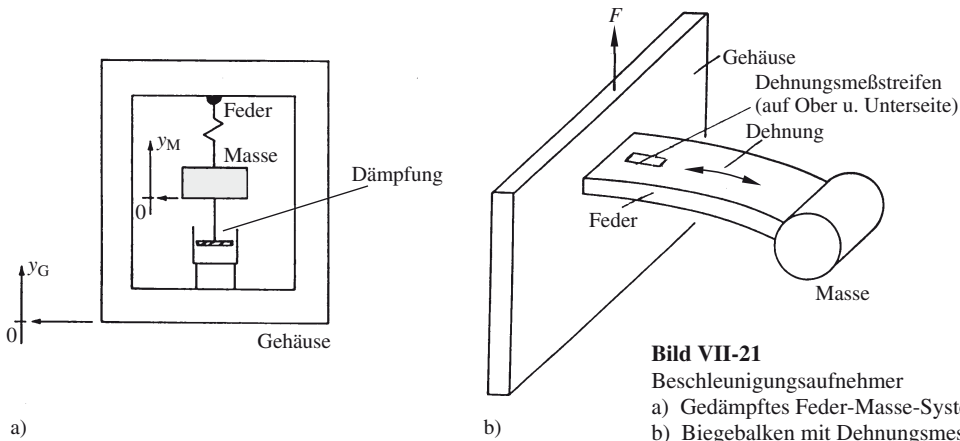
Formelzeichen siehe Text

Darin ist  $m$  die Masse des an der Feder aufgehängten Körpers,  $c$  die Federsteifigkeit (Federrate),  $w$  ein Maß für die Dämpfung und  $a$  die gesuchte Beschleunigung. Zu beachten ist, dass Gehäuse und Masse nicht starr miteinander verbunden sind und deshalb  $y_G$ - und  $y_M$ -Koordinaten eingesetzt worden sind. Je nach Dimensionierung erhält das System unterschiedliche Eigenschaften.

1. *Steife Feder und kleine Masse* ( $c$  groß und  $m$  klein):

Dann können die zwei ersten Summanden der linken Seite aus Gleichung (VII.23) vernachlässigt werden, und die Differentialgleichung geht näherungsweise über in

$$-a \approx c \cdot y_M / m \quad (\text{VII.24})$$

**Bild VII-21**

Beschleunigungsaufnehmer

a) Gedämpftes Feder-Masse-System

b) Biegebalken mit Dehnungsmessstreifen

Diese Dimensionierung ergibt einen Beschleunigungsaufnehmer, da die Auslenkung  $y_M$  der Beschleunigung  $a$  näherungsweise proportional ist. Die Eigenfrequenz  $\omega_0^2 = c/m$  dieses schwingungsfähigen Systems ist sehr groß.

2. *Kleine Masse, weiche Feder und große Dämpfung* ( $m$  und  $c$  klein,  $w$  groß):

Dann folgt in erster Näherung

$$\frac{w}{m} \cdot \frac{dy_M}{dt} \approx -\frac{d^2 y_G}{dt^2} \quad (\text{VII.25})$$

Integriert man beide Seiten, ergibt sich

$$\frac{w}{m} \cdot y_M \approx -\frac{dy_G}{dt} = -v_G \quad (\text{VII.26})$$

Damit hat man einen Geschwindigkeitssensor für die Geschwindigkeit  $v_G$  des Gehäuses realisiert.

3. *Große Masse, weiche Feder und geringe Dämpfung* ( $m$  groß,  $c$  und  $w$  klein):

In Gleichung (VII.23) bleibt nur noch zu berücksichtigen

$$\frac{d^2 y_M}{dt^2} \approx -\frac{d^2 y_G}{dt^2} = -a \quad (\text{VII.27})$$

Nach zweimaliger Integration folgt

$$y_M \approx y_G \quad (\text{VII.28})$$

Es handelt sich um einen Wegaufnehmer, der in dieser Form z.B. zur Messung von Erdbeben und zur Überwachung von Schwingtischen eingesetzt wird.

Eine weitere Ausführungsform ist in Bild VII-21b dargestellt. Gezeigt wird nur der eigentliche Aufnehmer ohne Gehäuse. Die Dimensionierung wird so vorgenommen, dass sich die Abhängigkeit aus Gleichung (VII.24) ergibt. Der Biegebalken wird mit Dehnungsmessstreifen auf Ober- und Unterseite beklebt. Die Widerstandsänderungen sind der Dehnung und diese wiederum der Kraft proportional. Die Kraft ist schließlich über die Masse mit der Beschleunigung verknüpft. Die Widerstände der Dehnungsmessstreifen werden in einer Brückenschaltung gemessen.

## VIII Messdatenaufbereitung

Die von den Messaufnehmern gelieferten elektrischen Größen sind häufig Spannungen im  $\mu\text{V}$ - oder  $\text{mV}$ -Bereich. Zur Weiterverarbeitung in Rechnern müssen sie zunächst auf Werte im  $\text{V}$ -Bereich verstärkt werden, weil die Analog-Digital-Umsetzer entsprechende Größen benötigen. Außerdem wird eine eventuell erforderliche Übertragung der Messgröße in analoger Form über größere Entfernungen mit geringem Fehler möglich. Zu diesem Zweck muss der Einfluss der stets vorhandenen Störungen auf das Messsignal so klein wie möglich gehalten werden. Theoretische

Untersuchungen und praktische Erfahrungen haben zu den im folgenden dargestellten Schaltungen geführt, die für eine Vielzahl von Messaufgaben anwendbar sind.

### 1 Verringerung der Störeinflüsse von außen

Unter Störungen sollen hier unerwünschte Signale verstanden werden, die von außen in den Messkreis gelangen. Das kann nach Bild VIII-1 induktiv oder



kapazitiv geschehen. Störquellen sind beispielsweise das 50-Hz-Wechselstromnetz, Gleichstromsteller für Motoren, Dimmer, Leuchtstofflampen, nahe gelegene Hochfrequenzsender oder Schaltvorgänge an Verbrauchern.

**Induktive Einwirkung:** Die Störspannung  $u_{\text{Stör}}$  hat im Leiter 1 einen Strom  $i_{\text{Stör}}$  zur Folge, dessen magnetischer Fluss  $\Phi_{\text{Stör}}$  in der Zuleitung zum Messverstärker (Leiter 2) eine Störspannung induziert, die sich dem Messsignal überlagert. Um die induzierte Störspannung klein zu halten, sollte der Abstand  $d$  möglichst groß und die vom Leiter 2 eingeschlossene Fläche  $A$  möglichst klein gemacht werden. Letzteres erreicht man z.B. durch Verdrillen der Hin- und Rückleitung von Leiter 2. Allerdings hat das den Nachteil, dass die Kapazität zwischen diesen Leitern größer wird und die im Messsignal enthaltenen hohen Frequenzanteile schwächt.

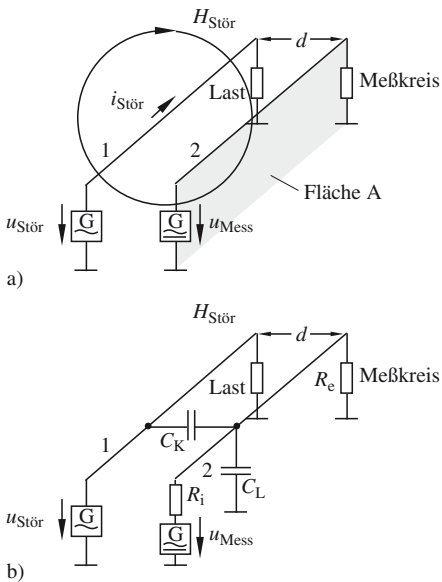


**Bild VIII-1** Einwirken von Störungen in einem Messkreis  
a) induktiv  
b) kapazitiv

**Kapazitive Einwirkung:** Zwischen den zwei Leitern 1 und 2 (Bild VIII-1b) besteht die durch den Aufbau bedingte Koppelkapazität  $C_K$ , die mit der Parallelschaltung aus der Kapazität des Leiters 2, dem Eingangswiderstand  $R_e$  des Messverstärkers und dem Innenwiderstand  $R_i$  der Signalquelle  $u_{\text{Mess}}$  einen Spannungsteiler bildet. Der Einfluss von  $C_K$  ist um so kleiner, je größer  $d$  ( $C_K \sim 1/d$ ) und  $C_L$  und je kleiner  $R_e$  und  $R_i$  sind.

Die genannten Maßnahmen zur Störspannungsverringern sind nur in begrenztem Maße anwendbar, sodass man grundsätzlich die Zuleitung vom Mess-

wertaufnehmer zum Verstärker abschirmt (Bild VIII-2a). Dann wird bei induktiver Einwirkung eine Spannung in der Abschirmung induziert, die aber nicht mehr in den Messkreis gelangt. Bei kapazitiver Einwirkung entsteht die Koppelkapazität zur Abschirmung und damit gegen den gemeinsamen Bezugspunkt („Masse“). Allerdings bildet nun die Abschirmung mit dem Innenleiter eine Kapazität  $C_{LS}$ , so dass eine frequenzabhängige Spannungsteilung zwischen  $R_i$  und  $C_{LS}$  stattfindet. Um die Kapazität  $C_{LS}$  unwirksam zu machen, wird das Potential der Abschirmung auf dem gleichen Wert gehalten wie das des Innenleiters, und zwar über eine nachgeführte Spannungsquelle (Impedanzwandler mit Operationsverstärker) mit dem Innenwiderstand  $\approx 0$  (Bild VIII-2b). Dann ist die Spannung an  $C_{LS}$  ebenfalls  $\approx 0$  und dieser Kondensator ohne Wirkung.

Eine besondere Bedeutung kommt dem Anschluss mit den gebräuchlichen Bezeichnungen „Erde, Masse, Systemerde oder Gehäuse“ zu. An diesen Anschluss, der in der Regel mit dem Gehäuse verbunden ist und der außerdem mit „Erde“ (meist über den Schutzleiter) in Verbindung steht, wird die Abschirmung der Leitungen gelegt. Dabei werden die Abschirmungen nur an einer Seite, zweckmäßigerweise an der Verstärkereingangsseite, mit diesem Punkt verbunden.

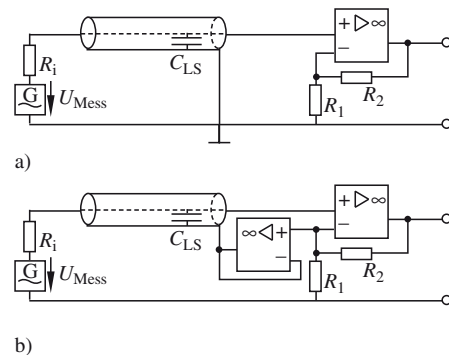


**Bild VIII-2** Abschirmung von Signalleitungen  
a) Grundsicherung  
b) Abschirmung mit nachgeführtem Potential

Bild VIII-3a zeigt zunächst den Fall, dass die Abschirmung an beiden Enden mit Masse verbunden ist. Da die beiden Masseanschlüsse in der Regel nicht auf gleichem Potential liegen, sondern einen Potentialunterschied  $\Delta u_p$  aufweisen, überlagert dieser sich dem Nutzsignal  $u_{\text{Mess}}$ . Wird dagegen die Abschirmung nur einseitig an Masse angeschlossen und der untere Anschluss der Messspannungsquelle getrennt von der Masse zum Eingang des Verstärkers geführt, ist der Potentialunterschied wirkungslos. Deshalb sind auch die Masseanschlüsse einzelner Baugruppen und weiterer Abschirmungen *sternförmig* in einem Punkt

zusammenzuführen (Bild VIII-3b). Bei Baugruppen, die sowohl einen Analog- als auch einen Digitalteil enthalten (A-D- oder D-A-Umsetzer), sind in der Regel die Masseanschlüsse für den Analog- und den Digitalteil getrennt herausgeführt, damit die relativ hohen Ströme im Digitalteil in der Masseleitung des Analogteiles keinen Spannungsfall hervorrufen. Er würde sich sonst dem Analogsignal überlagern.

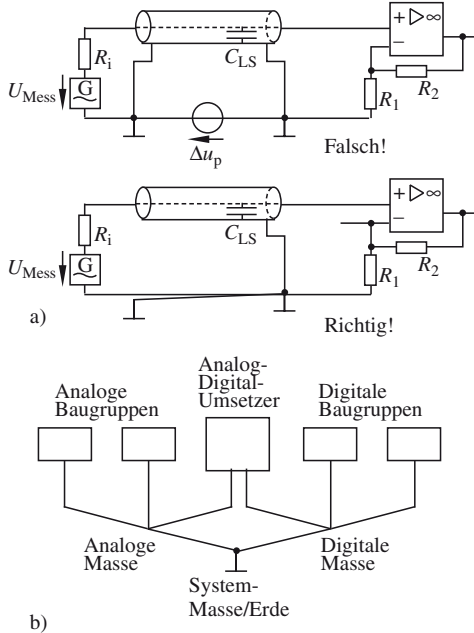


**Bild VIII-3** Erdung von Messsystemen  
a) Wirkung einer Erdschleife  
b) sternförmige Erdung, Analog- und Digitalteil getrennt

## 2 Messverstärker

Als Messverstärker werden Operationsverstärker eingesetzt, die geeignet ausgesucht und beschaltet werden. Da die zu verstärkenden Spannungen häufig im mV- oder  $\mu\text{V}$ -Bereich liegen, dürfen die durch den Verstärker selbst hervorgerufenen „inneren“ Störungen nicht in die Größenordnung des Nutzsignals kommen, denn sie werden um den gleichen Faktor verstärkt wie das Nutzsignal. Damit bleibt das Verhältnis von Nutz- zu Störsignal am Ein- und Ausgang des Verstärkers gleich. Als wichtigste innere Störquellen sind zu nennen:

**Rauschen des Verstärkers:** Das Rauschen wird hervorgerufen durch thermische Vorgänge in den Widerständen und Halbleitern, die nach statistischen Gesetzen ablaufen. Es tritt prinzipiell bei Temperaturen oberhalb 0 K auf und lässt sich in zwei Anteile aufteilen: *Weißes Rauschen*, das für alle Frequenzen die gleiche Amplitude aufweist, und *1/f-Rauschen*,

dessen Amplituden mit steigender Frequenz abnehmen. Durch die Wahl geeigneter technologischer Verfahren bei der Fertigung der Verstärker lässt sich das Rauschen in gewissen Grenzen verringern. Weiterhin kann man bei Verstärkern des gleichen Typs Unterschiede im Rauschen feststellen, so dass sich das Aussuchen rauscharmer Verstärker aus einer großen Stückzahl lohnen kann. Die am Eingang handelsüblicher Verstärker auftretende Rauschspannung ist von der Bandbreite  $B$  abhängig und liegt bei  $B = 1 \text{ kHz}$  in der Größenordnung  $100 \text{ nV}$  bis  $10 \mu\text{V}$  (siehe auch Kapitel Nachrichtentechnik, I.4.11.1).

**Offsetspannung:** Durch innere Unsymmetrien, die eine statistische Verteilung haben, ist die Ausgangsspannung nicht Null, wenn die Eingangsspannung Null ist. Dem Nutzsignal ist damit eine Fehlspannung (Gleichspannung) überlagert. Durch Anlegen einer entgegengesetzt gleich großen Spannung (Offsetspannung) an den Eingang des Verstärkers lässt sich diese Fehlspannung kompensieren. Sie ist eine verstärker-spezifische Kenngröße und kann wegen der statistischen Verteilung durch Aussuchen entsprechender Exemplare klein gehalten werden. Je nach Verstärkertyp und Fertigungsverfahren liegt die Offsetspan-

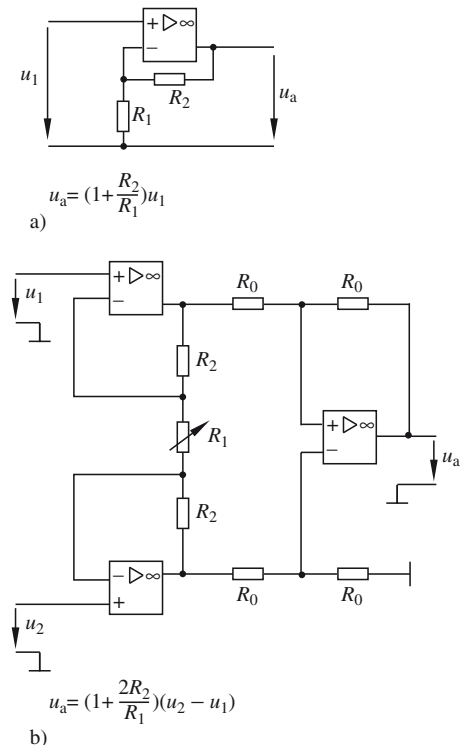


**Bild VIII-4** Messverstärker mit Operationsverstärkern  
a) Nichtinvertierender Verstärker  
b) Messverstärker oder Instrumentation Amplifier

nung im Bereich  $\pm 5 \text{ mV} \dots \pm 0,5 \text{ }\mu\text{V}$ . Am Ausgang des Verstärkers tritt die Offsetspannung aber multipliziert mit der am Operationsverstärker eingestellten Verstärkung auf. Operationsverstärker mit Offsetspannungen im unteren  $\mu\text{V}$ -Bereich werden entweder bei der Fertigung durch Lasertrimmung von Widerstandsbahnen abgeglichen oder es werden selbstabgleichende Verstärker eingesetzt, die ihre aktuelle Offsetspannung messen und automatisch kompensieren (siehe Drift) oder sie werden gegen Aufpreis aus einer Vielzahl gefertigter Exemplare ausgesucht.

*Drift:* Kenngrößen ändern sich unter der Einwirkung von Einflussgrößen. Für die hier betrachteten Messverstärker ist besonders die Abhängigkeit der Offsetspannung von der Temperatur und der Zeit wichtig. Es wurden deshalb für besonders kritische Anwendungen Baugruppen entwickelt, bei denen der eigentliche Verstärker seine Funktion periodisch für kurze Zeit unterbricht, den Momentanwert seiner Offsetspannung selbsttätig ermittelt und diese an seinen Eingang zur Kompensation anlegt.

Messverstärker mit Operationsverstärkern werden häufig in zwei Schaltungen nach Bild VIII-4 einge-

setzt. Im Teil a) handelt es sich um einen nichtinvertierenden Verstärker, dessen Verstärkung  $v$  durch das Widerstandsverhältnis bestimmt ist ( $v = 1 + R_2/R_1$ ). Der Eingangswiderstand der Schaltung ist gleich dem des Operationsverstärkers. Geeignet ist diese Schaltung für Messspannungen, deren einer Anschluss mit dem Erdschluss des Operationsverstärkers verbunden werden kann.

Soll dagegen die Spannung in der Brückendiagonalen einer Rückenschaltung verstärkt werden und muss ein Anschluss der Brückenspeisespannung geerdet werden, ist eine Schaltung nach Bild VIII-4a nicht möglich, weil aus Gründen der Störspannungsverringern auch der übliche Masseanschluss des Operationsverstärkers mit dem Erdschluss verbunden werden sollte. Dann wird eine Kombination aus drei Operationsverstärkern nach Bild VIII-4b verwendet. Die Verstärkung ergibt sich zu:

$$u_a = (1 + 2R_2/R_1) \cdot (u_2 - u_1) \quad (\text{VIII.1})$$

Für eine hohe Gleichtaktunterdrückung ist es wichtig, dass gleich bezeichnete Widerstände nach Bild VIII-4b in ihrem Wert um weniger als  $\pm 1\%$  voneinander abweichen.

## IX Bussysteme für die Messtechnik

Die hier betrachteten Bussysteme werden bevorzugt in der Messtechnik eingesetzt und dienen dazu, den Befehls- und Messdatenverkehr zwischen Messgeräten und der Erfassungs- und Verarbeitungsstation (Rechner) zu organisieren.

### 1 Grundbegriffe

Ergänzend zu den im Kapitel Nachrichtentechnik, XVI.1, genannten Begriffen werden einige weitere dargestellt.

Die Befehls- und Datenworte können seriell oder parallel und synchron oder asynchron übertragen werden. Die Umwandlung von parallel anstehenden Digitalworten in serielle und umgekehrt geschieht über Schieberegister.

*Serielle Übertragung:* Es genügt eine Zweidrahtleitung zur Übertragung, wenn der Takt aus dem Bitmuster zurückgewonnen werden kann, andernfalls überträgt man den Takt über eine dritte Leitung (Kapitel Nachrichtentechnik, V.4.4.7). Beginn und Ende des Wortes werden i.a. über ein Start- und ein Stopbit gekennzeichnet. Der Informationsaustausch lässt sich vereinfachen und beschleunigen, wenn noch einige zusätzliche Leitungen zur Verfügung stehen. So hat die serielle Rechnerschnittstelle V.24 (auch mit RS-232 bezeichnet) insgesamt 8 Leitungen. Die serielle Übertragung wird bevorzugt für die Überbrückung größerer Entfernungen eingesetzt.

*Parallele Übertragung:* Die in der Regel 8 Bit breiten Worte werden über 8 parallele Leiter übertragen. Damit wird die Übertragung beschleunigt, erfordert aber einen höheren Aufwand an Leitungen. Bei der parallelen „Centronics“-Rechnerschnittstelle (LPT) sind 8 Datenleitungen und 9 Steuerleitungen sowie 8 Masseleitungen vorhanden. Diese Schnittstelle wurde zunächst speziell für die Ansteuerung eines Druckers entwickelt und dann universell für Peripheriegeräte, wie Streamer, Scanner und externe Datensicherungsgeräte, eingesetzt. Sie wird nur noch in Ausnahmefällen, z.B. bei bestehenden Anlagen, eingesetzt.

*Synchrone Übertragung:* Der Datenfluss geschieht kontinuierlich, und die einzelnen Bits lassen sich anhand des parallel übertragenen Taktsignals eindeutig zuordnen. Synchronisationszeichen kennzeichnen Anfang und Ende der Übertragung. Ein Übertragungsprotokoll stellt die erfolgreiche Übertragung sicher.

*Asynchrone Übertragung, Handshake-Verfahren:* Im einfachsten Fall sind für diese Art der Übertragung zunächst zwei Leitungen erforderlich, von denen die eine die bevorstehende Übertragung eines Datenwortes durch den Sender signalisiert und die andere nach erfolgter Übertragung die erfolgreiche Übernahme durch den Empfänger meldet. Die Daten werden über weitere Leitungen parallel oder seriell übertragen.

**Tabelle IX-1** Spannungspegel der seriellen Rechnerschnittstelle V.24

| Daten                                                      | Steuersignale                                              |
|------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| Low $\cong (-3 \dots -15) \text{ V}$ typ. $-10 \text{ V}$  | Low $\cong (+3 \dots +15) \text{ V}$ typ. $+10 \text{ V}$  |
| High $\cong (+3 \dots +15) \text{ V}$ typ. $+10 \text{ V}$ | High $\cong (-3 \dots -15) \text{ V}$ typ. $-10 \text{ V}$ |

*Zugriff „Client-Server“:* Der Client, z.B. der Benutzerrechner, fordert einen Dienst an, z.B. ein Anwenderprogramm oder eine Datenblattsammlung, den der Server zur Verfügung stellt.

*Zugriff „Peer-to-Peer“:* Alle Rechner sind gleichberechtigt, und jeder stellt jedem seine freigegebenen Ressourcen zur Verfügung.

Sind mehr als zwei Geräte (ein Rechner und/oder weitere Rechner/Messgeräte) miteinander verbunden, kann es zu Kollisionen kommen, wenn gleichzeitig mehrere Geräte bzw. Rechner auf die gemeinsame Verbindungsleitung zugreifen. Hier sollen nur einige Prinzipien zum reibungslosen Ablauf des Datenverkehrs kurz dargestellt werden. Beim *Token-Verfahren* wird ein „Zeichen“ zentral vergeben und weitergereicht. Nur der momentane Besitzer des Zeichens kann Daten senden. Die Haltezeit des Zeichens ist zeitlich beschränkt. Greifen z.B. beim Peer-to-Peer-Netzwerk mehrere Rechner/Geräte gleichzeitig auf die Leitung zu, wird ein Signalpegel auf der Leitung verändert (Open-Collector-Verknüpfung aller Geräte), so dass alle Geräte den Zugriff beenden und jeder einzelne nach einer statistisch vorgegebenen Zeit einen erneuten Verbindungsaufbau startet. Eine Verbesserung ergibt sich, wenn ein spezieller Übertragungskanal belegt werden kann und dies von den

anderen Geräten eindeutig erkannt wird. Ein Übertragungsprotokoll sorgt dafür, dass jedes Gerät innerhalb einer bestimmten Zeit eine Verbindung aufbauen kann.

*Serielle Rechnerschnittstelle V.24 oder RS-232:* Die Daten werden üblicherweise seriell und asynchron, mit Blocks zu je 7 oder 8 Datenbits plus Start- und Stopbit, übertragen. Am Rechner befindet sich ein 25- oder 9-poliger Sub-D-Stecker. Die Spannungspegel zeigt Tabelle IX-1.

Für die Verbindung von nur zwei Geräten (Rechner zum Messgerät) kann eine Verbindung über ein *Nullmodem-Kabel* ausreichend sein.

*Parallele oder Centronics-Rechnerschnittstelle:* Die Signale werden mit TTL-Pegel (0 V, +5 V) asynchron im Handshake-Verfahren übertragen.

**2 IEC-Bus**

Die folgenden Begriffe werden verwendet:

*Talker:* Das Gerät ist z.Zt. nur als Sender (Sprecher) tätig.

*Listener:* Das Gerät ist z.Zt. nur als Empfänger (Hörer) tätig.

Tabelle IX-3 stellt die verwendeten Busbefehle dar.

**Tabelle IX-2** Daten IEC-Bus

| Daten                                 |                                                                       | Erläuterungen, Ergänzungen                                                          |
|---------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Normen                                | IEEE-488<br>IEC 625                                                   | 24poliger Stecker*)<br>25poliger Stecker*)                                          |
| max. Gerätezahl                       | 15                                                                    | 1 Controller; 14 Messgeräte                                                         |
| max. Leitungslänge insgesamt          | 20 m                                                                  |                                                                                     |
| max. Leitungslänge zwischen 2 Geräten | 2 m                                                                   | Verbindung der Geräte über Stecker-Buchse-Kombination                               |
| Übertragungsrate                      | 20 ... 1000 kByte/s                                                   | evtl. schnelle Treiber erforderlich                                                 |
| Leitungen                             | 8 Datenleitungen: D0 ... D7<br>3 Steuerleitungen<br>5 Steuerleitungen | für parallele Übertragung<br>Datenübergabe/Handshake**)<br>Steuerung Datenaustausch |
| Steuersignale                         | TTL-Pegel: (0 ... 1,4) V<br>(2,5 ... 5) V                             | negative Logik; Open-Collector-Verbindung aller Teilnehmer                          |
| Daten                                 | TTL-Pegel: (0 ... 1,4) V<br>(2,5 ... 5) V                             | positive Logik                                                                      |

\*) sonst völlig gleichwertig; \*\*) in Tabelle IX-3

**Tabelle IX-3** Befehle am IEC-Bus

| Befehl | Bedeutung          | Funktion                                         |
|--------|--------------------|--------------------------------------------------|
| REN    | remote enable      | Gerätebedienung nur über IEC-BUS                 |
| ATN    | attention          | Gerätenachrichten oder Schnittstellennachrichten |
| SRQ    | service request    | Dienstanforderung                                |
| EOI    | end of identify    | letztes Byte der Übertragung                     |
| IFC    | interface clear    | Rücksetzen der Geräte in Ausgangszustand         |
| DAV*)  | data valid         | Daten sind gültig                                |
| NRFD*) | not ready for data | nicht zur Datenaufnahme bereit                   |
| NDAC*) | no data accepted   | Daten nicht übernommen                           |

\*) Handshake-Befehle

**Tabelle IX-4** Befehle innerhalb der Schnittstelleninformationen

| Universalbefehle | Bedeutung                 | Funktion                   |
|------------------|---------------------------|----------------------------|
| LLO              | local lockout             | Sperren der Bedienelemente |
| DCL              | device clear              | Rücksetzen                 |
| PPU              | parallel poll unconfigure | Ende Statusabfrage         |
| SPE              | serial poll enable        | Statusabfrage              |
| SPD              | serial poll disable       | Sperren Statusabfrage      |

| Adressierte Befehle | Bedeutung               | Funktion                |
|---------------------|-------------------------|-------------------------|
| GTL                 | go to local             | manueller Gerätebetrieb |
| GET                 | group execute trigger   | Trigger für Messstart   |
| SDC                 | select device clear     | Rücksetzen Listener     |
| PPC                 | parallel poll configure | Listenerkonfiguration   |

| Weitere Befehle | Bedeutung        | Funktion                                |
|-----------------|------------------|-----------------------------------------|
| UNL             | unlisten         | Adressen aller Listener-Geräte gelöscht |
| UNT             | untalk           | Adressen aller Talker-Geräte gelöscht   |
| LAD $x$         | listener address | Empfängeradresse $x$                    |
| TAD $x$         | talker address   | Senderadresse $x$                       |

Jedes der angeschlossenen Messgeräte erhält eine nur ihm zugeteilte Identifikationsnummer (möglich sind 1 bis 14, einstellbar über Schalter an jedem Gerät), mit dem es individuell erkannt und angesprochen werden kann. Es wird unterschieden zwischen Geräte- und Schnittstelleninformationen.

Geräteinformationen: Messbereichseinstellungen, Messdaten, Statusabfragen.

Schnittstelleninformationen: Sie gliedern sich wie folgt auf:

- Universalbefehle: Sie wirken auf alle angeschlossenen Geräte.
- Adressierte Befehle: Mit dem Befehl wird die Geräteadresse übertragen, so dass nur das angesprochene Gerät entsprechend reagiert.
- Weitere Befehle: Sie lassen sich den genannten zwei Befehlsarten nicht eindeutig zuordnen.

Damit könnte die Datenübertragung über den IEC-Bus prinzipiell so aussehen wie in Tabelle IX-5 beschrieben:

**Tabelle IX-5** Prinzipieller Ablauf einer Datenübertragung über den IEC-Bus

| Steuerbefehle/Steuerleitungen |                    |                    |                    |                    | Datenleitungen<br>D0 ... D7                               | Erläuterungen                                                                    |
|-------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|-----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| ATN                           | REN                | SRQ                | IFC                | EOI                |                                                           |                                                                                  |
| 0                             | 0                  | 0                  | 0                  | 0                  | –                                                         | Ausgangszustand                                                                  |
| 0                             | 1                  | 0                  | 0                  | 0                  | –                                                         | Gerätebedienung über IEC-Bus aktivieren                                          |
| 1                             | 1                  | 0                  | 1                  | 0                  | –                                                         | Geräte in den Ausgangszustand setzen                                             |
| 1                             | 1                  | 0                  | 0                  | 0                  | UNL                                                       | Adressen aller Listener-Geräte werden gelöscht                                   |
| 1                             | 1                  | 0                  | 0                  | 0                  | LAD 1<br>LAD 2<br>usw.                                    | Gerät 1 als Listener<br>Gerät 2 als Listener<br>usw.                             |
| 1                             | 1                  | 0                  | 0                  | 0                  | TAD 3                                                     | Gerät 3 als Talker; die vorhergehende<br>Talkeradresse wird automatisch gelöscht |
| 0<br>0<br>...<br>0            | 1<br>1<br>...<br>1 | 0<br>0<br>...<br>0 | 0<br>0<br>...<br>0 | 0<br>0<br>...<br>1 | Datenwort 1<br>Datenwort 2<br>...<br>Letztes<br>Datenwort |                                                                                  |
| 1                             | 1                  | 0                  | 0                  | 0                  | UNL                                                       | Adressen aller Listener-Geräte werden gelöscht                                   |

**3 DIN-Messbus**

Dieser Bus ist relativ einfach aufgebaut und wurde für Anwendungen in der Messtechnik entwickelt. Seine Kenndaten sind in DIN 66348, Teil 2, enthalten. Tabelle IX-6 listet einige Eigenschaften auf.

**4 Aktuator-Sensor-Interface (ASI)**

ASI ist von einer größeren Anzahl von Unternehmen als Schnittstelle im Bereich der Prozesssteuerung eingeführt worden. Es werden nur binäre Elemente miteinander vernetzt, so dass es vom Prinzip her Ein-

**Tabelle IX-6** Einzelheiten zum DIN-Messbus (DIN 66348, Teil 2)

| Kenngröße                  | Daten                                                           | Erläuterungen                                                                                                      |
|----------------------------|-----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Organisation               | 1 Master, Slaves                                                | Regelfall: Rechner als Master, Messgeräte als Slaves                                                               |
| maximale Teilnehmerzahl    | 32                                                              |                                                                                                                    |
| Übertragungsart            | seriell, asynchron                                              |                                                                                                                    |
| Datenwortlänge             | 7 bit + Paritätsbit                                             |                                                                                                                    |
| Prüfverfahren              | Paritätsbit + Blockprüfung (DIN 66022, 66219)                   | evtl. Polynomprüfung möglich (DIN 66219)                                                                           |
| Betriebsart                | Blockübertragung mit Start-Stop-Betrieb, max. 128 Byte je Block |                                                                                                                    |
| Übertragungsrate           | typisch 9,6 kbit/s; bis zu 1 Mbit/s möglich                     |                                                                                                                    |
| maximale Bus-Leitungslänge | 500 m                                                           | mit Repeatern einige km; Busleitung an den Enden mit Widerständen abgeschlossen (100 ... 510 Ω; DIN 66348, Teil 2) |

**Tabelle IX-6** (Fortsetzung)

| Kenngröße                                                      | Daten                                                                                             | Erläuterungen                                                                                                                      |
|----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| maximale Leitungslänge<br>Gerät-Bus                            | ca. 5 m                                                                                           |                                                                                                                                    |
| Verbindungsleitung<br>(Busleitung und Verbindung<br>Gerät-Bus) | 5adrig + Abschirmung:<br>2 für Senden<br>2 für Empfangen<br>1 für Betriebserde<br>1 für Schirmung | Signalleitungen paarweise verdreht;<br>Betriebserde: Verbindung der<br>potentialfreien Bezugspunkte<br>untereinander               |
| Spannungspegel                                                 | ähnlich Tabelle IX-1;<br>Einzelheiten u.a. in EIA RS-485                                          | Galvanische Trennung zwischen<br>Bus und Geräten vorgeschrieben                                                                    |
| Steckverbindung                                                | Sub-D-Stecker, 15-polig,<br>abgeschirmt, am Gerät                                                 | Pin-Nr. Belegung<br>1 Abschirmung<br>2 Sender-Daten<br>9 Sender-Daten<br>4 Empfänger-Daten<br>11 Empfänger-Daten<br>8 Betriebserde |

schränkungen im Funktionsumfang gibt. Sind diese Einschränkungen ohne Bedeutung, ergibt sich ein kostengünstiges und unkompliziertes System. Bild IX-1 stellt den prinzipiellen Aufbau dar, Tabelle IX-7 listet einige Eigenschaften auf. Weitere Einzelheiten können der Literatur entnommen werden [www.as-interface.net].

Kernstück des ASI-Systems ist ein Slave-Chip, der die Sensoren S bzw. Aktuatoren A (Bild IX-1) an die ASI-Leitung ankopplelt. Er kann in den Sensor/ Aktuator eingebaut werden, wenn nur ein Element zum Einsatz kommt (Bild IX-1, unten links), oder es wird ein Modulbaustein in den ASI-Slave integriert,

so dass maximal vier S/A-Elemente verwendet werden können (Bild IX-1, unten rechts). Ein Sensor kann z.B. der Grenzwertschalter für eine maximal zulässige Temperatur sein, ein Aktuator der Ein-Aus-Schalter für eine Heizung. Der ASI-Master verbindet die ASI-Leitung mit dem Steuergerät, das ein Rechner, aber auch eine speicherprogrammierbare Steuerung (SPS) sein kann. Aus dem prinzipiellen Aufbau folgt, dass das ASI-System hierarchisch unterhalb der Feldbussysteme anzusiedeln ist und die Aufgabe hat, den Verdrahtungsaufwand (Stichwort „Kabelbaum“) zu verringern.

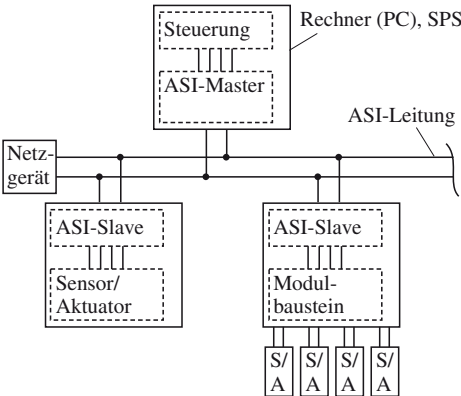


**Bild IX-1**  
Prinzipieller Aufbau des ASI-Systems



Tabelle IX-7 Einzelheiten zum ASI-System

| Eigenschaft                          | Daten                                                                                                                                | Erläuterungen                                                                                                                                                                                               |
|--------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Organisation                         | 1 Master; max. 31 Slaves                                                                                                             | je Slave max. 4 binäre Sensoren/Aktuatoren; 5-bit-Adresse erforderlich                                                                                                                                      |
| Übertragungsart                      | seriell                                                                                                                              | mit Start- und Stopbit                                                                                                                                                                                      |
| Datenwortlänge                       | Masteraufruf: 14 bit; Slaveantwort: 7 bit                                                                                            | siehe auch Bild IX-2                                                                                                                                                                                        |
| Prüfverfahren (siehe auch Bild IX-2) | Startbitfehler<br>Alternierungsfehler<br>Pausenfehler<br>Informationsfehler<br>Paritätsfehler<br>Endebitfehler<br>Aufruflängenfehler | 1. Impuls stets negativ<br>strenger Wechsel pos./neg.<br>Pause: max. 1 Impulslänge<br>folgt aus Kodeeigenschaft<br>gerade Parität (posit. Imp.)<br>letzter Impuls stets positiv<br>Zeiten definierter Pause |
| Verbindungsleitung                   | Energieversorgung (24 V DC) und Datenübertragung über gemeinsame Zweidrahtleitung, nicht abgeschirmt                                 | Entkopplung über Parallelschaltung $R$ mit $L$ je Leiter (39 $\Omega$ , 50 $\mu\text{H}$ )                                                                                                                  |
| Übertragungsrate                     | 167 kbit/s; davon 53,3 kbit/s für Daten                                                                                              | Systemreaktionszeit max. 5 ms (bei 31 Slaves); verringert sich mit abnehmender Slaveanzahl                                                                                                                  |
| maximale Leitungslänge               | 100 m                                                                                                                                | Repeater für größere Leitungslängen                                                                                                                                                                         |
| Steckverbindung                      | M 12, vierpolig, nach IEC 947-5-2 Anhang D                                                                                           |                                                                                                                                                                                                             |
| Netz-Topologie                       | Linie, Baum und deren Kombinationen                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                             |
| Energieversorgung der Slaves         | 24 V DC; max. ca. 100 mA je Slave; max. ca. 2 A insgesamt                                                                            | bei höherem Gesamtstrom größere Leitungsquerschnitte erforderlich                                                                                                                                           |
| Modulationsart                       | Sensor: Non-Return-to-Zero-Kode (NRZ);<br>daraus Manchester-II-Kode, übertragen in Alternierender Puls-Modulation (APM)              | siehe Nachrichtentechnik, Kap. V.4.4;<br>Impulse in $(\sin^2 x)$ -Form                                                                                                                                      |

Die genannte Modulationsart erfordert eine geringe Kanalbandbreite. Durch die in Bild IX-2 dargestellte Kodierung ist eine sehr effektive Fehlererkennung möglich: Bis zu 3 Fehler pro Nachricht werden sicher

erkannt, 4 und 5 Fehler mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,9999 %. Die Korrektur erfolgt dann über eine erneute Datenübermittlung.

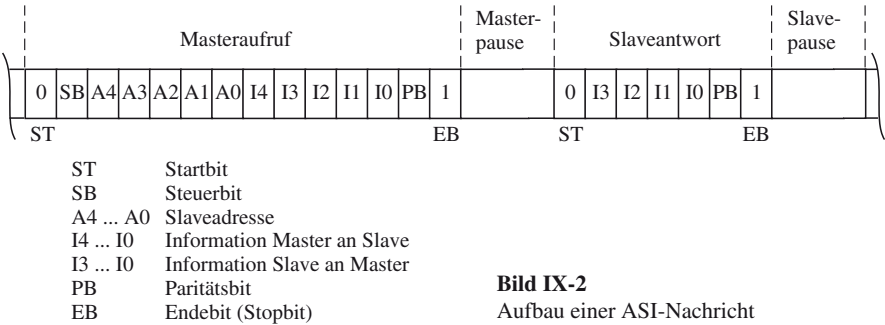


Bild IX-2  
Aufbau einer ASI-Nachricht

## 5 CAN-BUS

Dieser Bus (CAN, Controller Area Network) wurde ursprünglich für die Automobiltechnik entwickelt. Die dort zur Übertragung anstehenden Daten sind in nicht unerheblichen Maße Messwerte, so dass der Einsatz für die Messdatenübertragung auch außerhalb des Automobils naheliegt. Aus dem Einsatz in der Automobiltechnik ergeben sich die folgenden Eigenschaften:

- Niedriger Preis durch die hohen Stückzahlen
- Hohe Zuverlässigkeit und Sicherheit in der Datenübertragung (Datenpaketaufbau)
- Hohe Störsicherheit gegenüber Störungen von außen
- Relativ einfache Verdrahtung durch 3adrige Leitung, auch 2adrig und 1adrig (Übertragung über Lichtleiter) möglich

Tabelle IX-8 listet in Auszügen einige Eigenschaften des CAN-Busses auf.

**Tabelle IX-8** Einzelheiten zum CAN-Bus (Auszug)

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Topologie:</b><br>Bus                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | <b>Teilnehmerzahl:</b><br>maximal 64 (durch Standard-Treiberbausteine begrenzt);<br>durch Repeater zu erhöhen                                                                                                                        |
| <b>Takt:</b><br>NRZ-Codierung;<br>keine Taktübertragung;<br>ständige Flankensynchronisation, auch über Frame-(Rahmen-)Beginn;<br>erzwungener Takt nach 5 aufeinander folgenden Bits ohne Wechsel                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | <b>Teilnehmerberechtigung:</b><br>alle Teilnehmer gleichberechtigt<br><b>Busbelegung:</b><br>gemäß festgelegter Prioritätenliste (wichtige Daten haben Vorrang)                                                                      |
| <b>Leitungswiderstand:</b><br>120 $\Omega$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | <b>Zugriffszeit auf die Daten:</b><br>erhöht sich mit wachsender Teilnehmerzahl                                                                                                                                                      |
| <b>Kabellänge:</b><br>40 m bei 1 MBit/s; 1 km bei 50 kBit/s                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | <b>Ausgänge der Teilnehmer:</b><br>Wired-AND-Verknüpfung                                                                                                                                                                             |
| <b>Signalübertragung:</b><br>Differenzspannung;<br><0,5 V $\rightarrow$ High-Pegel<br>>0,9 V $\rightarrow$ Low-Pegel                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <b>Datenbits:</b><br>maximal 8 Byte (64 Bit)                                                                                                                                                                                         |
| <b>Schnittstelle:</b><br>ISO 11898, 11519                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | <b>Datenübertragung:</b><br>Seriell                                                                                                                                                                                                  |
| <b>2 Ausführungen:</b><br>Low Speed (max. 125 kBit/s)<br>High Speed (max. 1 MBit/s)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | <b>3adriges Kabel:</b><br>2 Leiter für Differenzspannung, 1 Leiter für Masse (Bezugspunkt)                                                                                                                                           |
| <b>Frame-Länge:</b><br>64 Bit (Daten) + 30 Bit (Steuerdaten) + 10 Bit (Leerzeit) = 104 Bit                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | <b>Beispiel Übertragungsrate:</b><br>500 kBit/s $\rightarrow$ 2 $\mu$ s/Bit;<br>Verarbeitungszeit im Rechner:<br>92 $\mu$ s (geschätzt)<br>Neuer Datenblock aussendbar nach:<br>(104 Bit) (2 $\mu$ s/Bit) + 92 $\mu$ s = 300 $\mu$ s |
| <b>Fehlererkennung in mehreren Stufen</b> (hier eine Auswahl): <ul style="list-style-type: none"> <li>– 15 Bits zur Fehlererkennung, Hamming-Distanz 6</li> <li>– Prüfung der Struktur des übertragenen Frames</li> <li>– Prüfung, ob mindestens <i>ein</i> Empfänger das Signal empfangen hat (Empfänger quittieren den erfolgreichen Frame-Empfang oder senden andernfalls eine Fehlermeldung)</li> <li>– Jeder Sender prüft, ob sein momentan geforderter Pegel auch tatsächlich auf der Busleitung vorhanden ist (u.a. zur Kurzschluss- und Kollisionserkennung)</li> <li>– Fehlerzähler trennt Teilnehmer beim Erreichen eines kritischen Wertes vom Bus</li> <li>– Beim Erkennen eines Fehlers wird der Frame erneut angefordert</li> </ul> |                                                                                                                                                                                                                                      |

■ **Beispiel IX.1:** Nach dem Beispiel in Tabelle IX-8 kann ein neuer Datenblock nach etwa 300  $\mu\text{s}$  ausgesendet werden. Bei einer Gefahrensituation und der höchsten Priorität des Datenframes steht er auch nach 300  $\mu\text{s}$  zur Anwendung bereit. Führt das Fahrzeug mit der Geschwindigkeit 100 km/h, hat es in 300  $\mu\text{s}$  einen Weg von etwas weniger als 2 cm zurückgelegt.

## 6 USB-Übertragung

Bei dieser Übertragung wird die von den Rechnern eingesetzte USB-Schnittstelle verwendet. Die Vorteile sind:

Sehr schnelle Datenübertragung, USB 2.0 mit maximal 400 MBit/s und USB 3.0 mit maximal 5 GBit/s. Die in der Praxis tatsächlich erreichten Werte sind niedriger und hängen ab von den Komponenten des Gesamtaufbaus der Übertragungsstrecke. Die Systeme 3.0, 2.0 und 1.1 (kaum noch eingesetzt, da technisch überholt) sind in der Regel untereinander abwärtskompatibel.

Vorhandensein von Peripheriebausteinen.

Verfügbarkeit von Literatur, Modellentwicklungen.

Die Geräte können an jeden Rechner angeschlossen und die vorhandenen Daten weiterverarbeitet werden. Weiterhin kann das Messgerät ferngesteuert werden.

## 7 LAN (Local Area Network)

Es handelt sich hierbei um eine Entwicklung, die ursprünglich für die Rechnernetzung einschließlich Peripheriegeräten z.B. in Firmen vorgesehen war. Dieses System bietet sich zur (Mit-)Benutzung an, wenn Messgerätedaten an unterschiedliche Rechner, Server oder Drucker zwecks Weiterverarbeitung oder Archivierung gesendet werden sollen und günstigenfalls schon eine Vernetzung über ein LAN besteht. Durch den Einsatz von Drahtlosverbindungen (Wireless Local Area Network, WLAN) hat sich der Einsatzbereich weiter vergrößert. Es können auch mobile Messstationen in einem lokal begrenzten Bereich (Firmengelände) ihre Messdaten an Auswertestationen senden. Die übermittelten Daten können verschlüsselt werden. Der Vorteil dieses Systems ist auch, dass Daten in beiden Richtungen versendet werden können. Damit lassen sich Messgeräteparameter einstellen (Messbereich, Abtastrate, ...). Die Datenübertragungsraten liegen momentan bei maximal 1 GBit/s (theoretisch) bzw. (400 ... 600) MBit/s (praktisch).

Wie bei Druckern weit verbreitet werden Messgeräte zunehmend mit den beiden Schnittstellen USB und LAN versehen.

# X Probleme bei der Digitalisierung analoger Messwerte

Messwerte liegen häufig in analoger Form als Spannungswerte vor. Sie werden in eine digital kodierte Form umgesetzt, wenn

- eine (nahezu) fehlerfreie Übertragung erforderlich ist (siehe dazu auch Kapitel Nachrichtentechnik, V.4.4 und XVII.1);
- Signalverläufe gespeichert werden sollen (Speicheroszilloskop);
- eine Weiterverarbeitung (Rechner, PC) erfolgen soll;
- Messungen mit sehr geringem Messfehler notwendig sind (Vorteil Digitalmessgerät gegenüber Zeigmessgerät).

Die zu diesem Zweck eingesetzten Analog-Digital-Umsetzer sind an anderer Stelle dieses Buches beschrieben. Hier soll auf einige Probleme, die durch den Umsetzvorgang entstehen, aus messtechnischer Sicht eingegangen werden. Inwieweit die einzelnen Anteile bei der Anwendung noch berücksichtigt werden müssen, hängt davon ab, ob es sich um ein fertiges Gerät (z.B. Digitalvoltmeter) oder einen zu entwickelnden Messaufbau handelt.

## 1 Fehler bei der Digitalisierung

Der Analog-Digital-Umsetzer hat den Eingangsspannungsbereich  $0 \dots +\hat{u}_{\text{AD}}$  (Unipolarausführung) bzw.  $-\hat{u}_{\text{AD}} \dots +\hat{u}_{\text{AD}}$  (Bipolarausführung). Bei einem  $N$ -Bit-Umsetzer beträgt die kleinste Quantisierungsstufe  $\hat{u}_{\text{AD}}/(2^N - 1)$  (unipolar) bzw.  $2 \cdot \hat{u}_{\text{AD}}/(2^N - 1)$  (bipolar). Daraus ergeben sich die Fehlergrenzen  $F$  (absolut) und  $f$  (relativ), wenn der Momentanwert der Spannung bei einem Unipolarsignal mit  $u_{\text{S}}$  bezeichnet wird bzw. bei einem Bipolarsignal mit  $u_{\text{S}^+}$  (größter positiver Signalwert) und  $-u_{\text{S}^-}$  (Bipolarsignal, kleinster negativer Signalwert), zu:

$$F_{\text{u}} = \pm \frac{1}{2} \cdot \hat{u}_{\text{AD}} \frac{1}{2^N - 1} \quad (\text{unipolar})$$

bzw.

$$F_{\text{b}} = \pm \frac{1}{2} \cdot \hat{u}_{\text{AD}} \frac{2}{2^N - 1} \quad (\text{bipolar}) \quad (\text{X.1})$$

$$f_{\text{u}} = \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{u}_{\text{AD}}}{u_{\text{S}}} \cdot \frac{1}{2^N - 1} \quad (\text{unipolar})$$

bzw.

$$f_b = \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{u}_{AD}}{u_s + |-u_s|} \cdot \frac{2}{2^N - 1} \quad (\text{bipolar}) \quad (\text{X.2})$$

Formelzeichen siehe Text

Aus Gleichung (X.2) geht hervor, dass für eine kleine Fehlergrenze die Zahl  $N$  möglichst groß und der Wert der Signalspannung nur geringfügig kleiner als der Spannungsbereich des Umsetzers sein sollte. Bei kleinen Signalspannungen  $u_s$  kann für  $u_s \ll \hat{u}_{AD}$  durch Zuschalten eines geeigneten Spannungsverstärkers die Fehlergrenze  $f_u$  bzw.  $f_b$  entsprechend klein gehalten werden.

## 2 Signal-Quantisierungs-Geräuschabstand

Im Kapitel Nachrichtentechnik, V.4.4.5, Bild V-33, ist das Quantisierungsrauschen (Quantisierungsgeräusch) für den Fall eines sinusförmigen Signalverlaufes dargestellt. Der Verlauf der Quantisierungsrauschspannung  $u_{NQ}$  (Bild X-1) ist abhängig vom Nutzsignalverlauf  $u_s$ , kann aber näherungsweise durch einen sägezahnförmigen Verlauf erfasst werden, der mit  $x_0$  periodisch ist. Ihr Effektivwert  $U_{NQ}$  berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} U_{NQ} &\approx \sqrt{\frac{1}{x_0} \cdot \int_0^{x_0} \left[ \hat{u}_x \left( 1 - \frac{x}{x_0} \right) \right]^2 dx} \\ &= \hat{u}_x \sqrt{\frac{1}{3}} \approx \hat{u}_{AD} \cdot \frac{1}{2^N} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

mit

$$\hat{u}_x \approx \hat{u}_{AD} \cdot \frac{1}{2^N} \quad (\text{X.3})$$

Formelzeichen siehe Bild X-1, Gleichung (X.2) und Text

Für den Signal-Quantisierungs-Geräuschabstand (das Signal-Rausch-Verhältnis)  $a_{SQ}$  ergibt sich:

$$a_{SQ} = 20 \cdot \lg \left[ \frac{U_s}{U_{NQ}} \right] \approx 20 \cdot \lg \left[ \frac{U_s}{\hat{u}_{AD}} \cdot 2^N \cdot \sqrt{3} \right] \quad (\text{X.4})$$

$U_s$  Effektivwert der Signalspannung  $u_s$ ;  $U_{NQ}$  Effektivwert der Quantisierungsrauschspannung;  $\hat{u}_{AD}$  maximale Eingangsspannung des A-D-Umsetzers (siehe Text zu Gleichung (X.2))

Für eine sinusförmige Signalspannung  $u_s$  mit dem Scheitelwert  $\hat{u}_{AD}$  und dem Effektivwert  $U_s = \hat{u}_{AD} / \sqrt{2}$  folgt daraus die im Kapitel Nachrichtentechnik, V.4.4.5, angegebene Gleichung (V.43):

$$\begin{aligned} a_{SQ_{\text{Sinus}}} &\approx 20 \cdot \lg \left[ \frac{\hat{u}_{AD}}{\hat{u}_{AD} \cdot \sqrt{2}} \cdot 2^N \cdot \sqrt{3} \right] \\ &= 20 \cdot \lg \left[ 2^N \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \right] \approx 20 \cdot \lg [2^N] \quad (\text{X.5}) \end{aligned}$$

Formelzeichen siehe Gleichung (X.4)

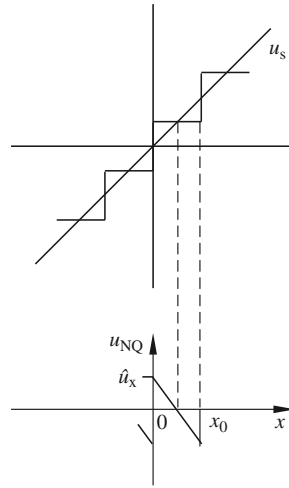


**Bild X-1**

Zur Ableitung des Effektivwertes der Quantisierungsrauschspannung  $u_{NQ}$

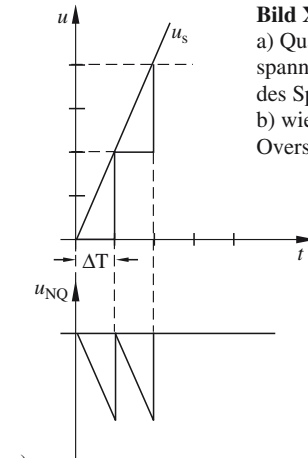
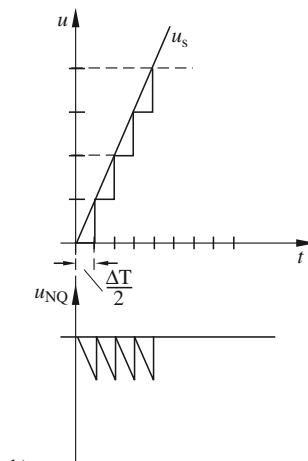


**Bild X-2**

a) Quantisierungsrauschspannung  $u_{NQ}$  des Spannungsverlaufes  $u_s$   
b) wie a), aber mit Oversampling, OSR = 2

a)



b)

- **Oversampling:** Die Signalabstastfrequenz  $f_{ab} = (2,2 \dots 4) \cdot f_{M \max}$  nach Shannon (siehe Kapitel Nachrichtentechnik, V.4.4.2, Aliasing-Effekt und Gleichung (V.35)) wird um einen Faktor, die *Oversamplingrate*  $OSR$ , erhöht. Unter der Voraussetzung, dass sich zwei benachbarte Signalamplitudenwerte ohne Oversampling um mehr als den Wert einer Quantisierungsstufe unterscheiden, wird durch die erhöhte Abstastfrequenz ein „Zwischenwert“ nach Bild X-2 eingefügt und damit die Quantisierungsrauschspannung  $u_{NQ}$  im Bereich dieses Abtastwertes verringert. Für den Fall, dass die Amplitudenverringern von  $u_{NQ}$  bei *allen* Abtastwerten auftritt, verringert sich der Effektivwert  $U_{NQ}$  um den Faktor  $1/\sqrt{OSR}$ .

### 3 Verbesserung des Signal-Rausch-Verhältnisses

Neben dem Quantisierungsgeräusch sind dem zu messenden Signal noch weitere Rauschanteile überlagert, die sowohl vom Messsignal selber als auch vom Messaufbau herrühren. Für die Wirkung aller Anteile zusammen werden deren Effektivwerte ( $U_{N1}$ ,  $U_{N2}$ ) errechnet und, da sie voneinander unabhängig (unkorreliert) sind, in folgender Weise zum resultierenden Signal-Rausch-Verhältnis  $a_{SN}$  verknüpft:

$$a_{SN} = 20 \cdot \lg \left[ \frac{U_S}{\sqrt{U_{N1}^2 + U_{N2}^2 + \dots}} \right] \quad (X.6)$$

$U_S$  Effektivwert der Signalspannung,  $U_{N1}$ ,  $U_{N2}$  Effektivwerte zweier Rausch-(Stör-)Spannungen (unkorreliert)

Handelt es sich bei den zu messenden Größen um Gleichsignale, kann durch  $n$ -faches Messen und Mittelwertbildung das Signal-Rausch-Verhältnis  $a_{SN(n)}$  verbessert werden [X.1]:

$$a_{SN(n)} = 20 \cdot \lg \left[ \frac{U_S}{U_N} \cdot \sqrt{n} \right] \quad (X.7)$$

$n$  Zahl der Messungen für die Mittelwertbildung,  $U_S$  Effektivwert der Signalspannung,  $U_N$  Effektivwert der Rausch-(Stör-)Spannung

Das Verfahren kann auch bei periodischen Wechselsignalen mit konstanter Kurvenform angewendet werden, sofern durch ein geeignetes Triggersignal die zeitliche Zuordnung und damit die Mittelwertbildung für ein oder mehrere Signalwerte erfolgen kann.

Für die Messung von Gleichgrößen besteht weiterhin die Möglichkeit, den Frequenzbereich von Störungen bzw. Rauschen und damit deren Wirkung auf das Nutzsignal durch Filter auf sehr niedrige Werte einzugrenzen.

### 4 Abtast-Halte-Glied

Über ein Abtast-Halte-Glied muss der analoge Eingangswert für den Umsetzer solange konstant gehalten werden, bis der Umsetzvorgang abgeschlossen ist. Im Kapitel Nachrichtentechnik, V.4.4.3, ist dargestellt, inwieweit sich diese Forderung mit nichtidealen Bauteilen erfüllen lässt.

### 5 Aliasing

Der mit Aliasing bezeichnete Effekt bei der Abtastung von periodischen Signalverläufen ist im Kapitel Nachrichtentechnik, V.4.4.2, Aliasing-Effekt dargestellt.

### 6 Erfassung von Momentanwerten

Über ein Antialiasing-Filter wird erreicht, dass die höchste im gegebenen Signalverlauf vorkommende Frequenz  $f_{M \max}$  beträgt. Die größte Steigung ergibt sich für  $0^\circ$  bzw.  $180^\circ$ :

$$\begin{aligned} u &= \hat{u} \cdot \sin(2\pi \cdot f_{M \max} \cdot t) \Rightarrow \frac{du}{dt} \\ &= \hat{u} \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_{M \max} \cdot \cos(2\pi \cdot f_{M \max} \cdot t) \end{aligned} \quad (X.8)$$

Zwei benachbarte Abtastwerte unterscheiden sich um so mehr, je kleiner die Abtastfrequenz  $f_{ab}$  ist und je näher man sich am Nulldurchgang des Signalanteiles mit der Frequenz  $f_{M \max}$  befindet. Die größte Differenz ergibt sich für den (theoretischen) Fall  $f_{ab} = 2 \cdot f_{M \max}$  zu  $2 \cdot \hat{u}$ , wenn genau der positive und der negative Scheitelwert erfasst werden (Kapitel Nachrichtentechnik, V.4.4.2, Aliasing-Effekt). Eine *Abschätzung* des *maximal möglichen* Unterschiedes  $\Delta u_{\max}$  zweier benachbarter Abtastwerte erhält man für folgende Annahmen: 1.  $f_{ab} \gg f_{M \max}$ ; 2. Das abzutastende Signal ist sinusförmig mit  $f = f_{M \max}$  (nur höchstmögliche Signalfrequenz vorhanden). In der Umgebung des Nulldurchganges ergibt sich mit der Näherung  $u(t) \approx \hat{u} \cdot 2\pi \cdot t/T$  und der Beziehung  $T = 1/f_{M \max}$ :

$$\begin{aligned} \Delta u_{\max} &= u(t = t_1) - u(t = 0) = u\left(\frac{1}{f_{ab}}\right) - u(t = 0) \\ &\approx \hat{u} \cdot 2\pi \cdot \frac{f_{M \max}}{f_{ab}} \end{aligned}$$

Für den maximalen relativen Fehler folgt daraus:

$$f_{\max} = \frac{\Delta u_{\max}}{\hat{u}} \approx 2\pi \cdot \frac{f_{M \max}}{f_{ab}} \quad (X.9)$$

$f_{M \max}$  Frequenz des höchsten sinusförmigen Signalanteiles,  $f_{ab}$  Abtastfrequenz

Der Einfluss dieses Fehlers ist dann von besonderer Bedeutung, wenn Momentanwerte, d.h. Signal- bzw. Messwerte in Echtzeit, erfasst werden sollen.

# XI PC-gestützte Messverfahren und Messsignalanalyse

Der Rechner oder PC wird in der Messtechnik zunehmend eingesetzt, um

1. umfangreichere statistische Berechnungen zur Verringerung der Fehlergrenzen auszuführen,
2. die funktionale Abhängigkeit einer Messreihe in einem Diagramm optimal darzustellen,
3. Kenngrößen des Signalverlaufes zu ermitteln,
4. das Messsignal zu analysieren, damit die gewünschte Größe möglichst fehlerfrei bestimmt wird, und
5. häufig vorkommende Messabläufe zu automatisieren.

Die Messwerte gelangen entweder manuell in den Rechner, z.B. durch die Eingabe einer Messwerttabelle über die Tastatur, oder aber der Rechner kommuniziert über ein Bussystem (siehe Kapitel IX) mit der Messeinrichtung und liest die Messwerte automatisch ein. Es hängt vom verwendeten Programm zur Messwerterfassung und Messsignalanalyse ab, welche der im folgenden aufgeführten Funktionen ausführbar sind bzw. welche zusätzlichen Funktionen noch zur Verfügung stehen.

## 1 Statistische Verfahren zur Messsignalauswertung

Im Kapitel I.3.3 und I.3.4 sind der arithmetische Mittelwert und die Standardabweichung von Messwerten aufgeführt:

• *arithmetischer Mittelwert*  $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$  (XI.1)

• *Standardabweichung*

$$s = + \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (\text{XI.2})$$

$n$  Anzahl der Messungen;  $x_i$  die einzelnen Messwerte

Sie lassen sich mit einem entsprechenden Rechnerprogramm berechnen.

Sind den Messwerten zufällige Messabweichungen überlagert, ergibt sich (theoretisch, für  $n \rightarrow \infty$ ) die Normal- oder Gaußsche Verteilung:

• *Normalverteilung*

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{XI.3})$$

$\bar{x}$  siehe Gleichung (XI.1),  $\sigma^2 = s^2$  (siehe Gleichungen (I.8a, b) und (XI.2))

Da die Zahl der Messwerte endlich ist und sie nur bedingt die Normalverteilung erfüllen, ist das folgende Testverfahren entwickelt worden:

- *Chi-Quadrat-Test:* Vereinfacht ausgedrückt werden die Differenzen zwischen den einzelnen Messwerten und den zugeordneten Werten der Normalverteilung gebildet, quadriert und addiert.

Überschreitet die Summe einen kritischen Wert, sind die Messwerte nicht normalverteilt.

- *Vertrauensgrenzen:* Weiterhin können die Vertrauensgrenzen errechnet werden, wobei die erforderlichen Zahlenwerte (siehe Kapitel I.7, Tabelle I-3 und DIN 1319 Teil 3) im Programm abgespeichert sind:

$$\text{Obere Vertrauensgrenze} \quad \bar{x} + \frac{t}{\sqrt{n}} \cdot s \quad (\text{XI.4a})$$

$$\text{Untere Vertrauensgrenze} \quad \bar{x} - \frac{t}{\sqrt{n}} \cdot s \quad (\text{XI.4b})$$

- *Quantile, Median, Zentralwert:* Ein  $\alpha$ -Quantil teilt eine nach der Größe der Werte geordnete Wertetabelle (Stichprobe) so in zwei Teile, dass  $\alpha \cdot 100\%$  der Werte unterhalb und  $(1 - \alpha) \cdot 100\%$  oberhalb der Trennungslinie liegen. Häufig wird das 0,50-Quantil ( $\alpha = 0,50$ ) verwendet, das die Wertetabelle halbiert. Es wird auch mit Median oder Zentralwert bezeichnet. Angewendet werden Quantile, um die Lage von einzelnen Messwerten bezüglich einer Gesamtheit zu erfassen (daher die Bezeichnung „Lagemaß“). Sie werden von Ausreißern relativ wenig beeinflusst (sie sind robust).

## 2 Graphische Darstellung

- *Approximation:* Mit geeigneten Rechnerprogrammen werden die vorliegenden Messwerte (Tabelle oder direkt eingelesen) in Form eines Diagramms dargestellt. Da die funktionale Abhängigkeit in vielen Fällen mathematisch nicht vorgegeben ist, muss eine geeignete Formel gefunden werden. Dazu wählt der Anwender aus einer Vielzahl von möglichen Funktionen eine ihm geeignet erscheinende aus. Beispiele hierfür sind:

*Potenzreihendarstellung:*

$$y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \dots$$

*Exponentialdarstellung:*

$$y = b_0 + b_1 \cdot e^{\frac{x}{b_2}}$$

*Geradendarstellung:*

$$y = c_0 + c_1 \cdot x$$

*Logarithmische Darstellung:*

$$y = d_0 + d_1 \cdot \log\left(\frac{x}{d_2}\right) \quad (\text{XI.5})$$

Im allgemeinen Fall geht die gewählte Funktion *nicht* durch alle vorgegebenen Messpunkte, was in der Praxis auch nicht unbedingt wünschenswert ist (sonst beeinflussen „Ausreißer“ den Verlauf überproportional). Das Rechnerprogramm ermittelt die Zahlenwerte für die Abweichungen zwischen den

einzelnen Messwerten und der gewählten Kurvenannäherung, quadriert und addiert sie. Eine geeignete Kurvenform ist in der Regel diejenige, bei der diese Summe ein Minimum erreicht. Das Verfahren wird auch mit „kleinste Summe der Abweichungs- bzw. Fehlerquadrate“ bezeichnet. Unter dieser Vorgabe optimiert das Programm anschließend die Koeffizienten  $a_0, a_1, a_2, a_3 \dots$  für die Potenzreihendarstellung,  $b_0 \dots b_2$  für die Exponentialdarstellung usw.

- **Regression:** Die funktionale Abhängigkeit wird in der Form  $y = a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_m \cdot x^m$  angenommen, und die Koeffizienten  $a_0$  bis  $a_m$  werden unter der Zielsetzung „kleinste Summe der Abweichungsquadrate“ bestimmt.

Für den Fall, dass  $n$  Messungen durchgeführt wurden, gilt folgender Ansatz, der sich in Matrizen-schreibweise darstellen lässt:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_1^2 + \dots + a_m \cdot x_1^m \\ &\dots \\ &\dots \\ y_n &= a_0 + a_1 \cdot x_n + a_2 \cdot x_n^2 + \dots + a_m \cdot x_n^m \\ \Rightarrow y &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^m \end{pmatrix}}_X \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}}_a = X \cdot a \quad (\text{XI.6}) \end{aligned}$$

Die gesuchte Koeffizientenmatrix  $a$  ergibt sich zu:

$$a = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot y \quad (\text{XI.7})$$

$X^T$  transponierte Matrix,  $(X^T \cdot X)$  Matrizenprodukt,  $(X^T \cdot X)^{-1}$  inverse Matrix des Matrizenproduktes  $(X^T \cdot X)$

Auf den Beweis, dass es sich bei dem dargestellten Rechengang tatsächlich um einen Kurvenverlauf mit der kleinsten Summe der Abweichungsquadrate handelt, wird hier verzichtet.

- **Lineare Regression:** Es wird vorausgesetzt, dass eine Abhängigkeit in der Form  $y = a_0 + a_1 \cdot x$  besteht. Die Koeffizienten  $a_0$  und  $a_1$  werden wiederum unter der Zielsetzung „kleinste Summe der Abweichungsquadrate“ ermittelt. Für die lineare Regression gilt in Gleichung (XI.6)  $m = 1$ , so dass die Matrix  $X$  nur die ersten zwei Spalten besitzt, von denen die erste wiederum nur aus Einsen besteht. Die Koeffizienten der gesuchten Geraden ergeben sich analog zu Gleichung (XI.7):

$$a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot y \quad (\text{XI.8})$$

$X^T$  transponierte Matrix,  $(X^T \cdot X)$  Matrizenprodukt,  $(X^T \cdot X)^{-1}$  inverse Matrix des Matrizenproduktes  $(X^T \cdot X)$

Die so ermittelte Gerade wird auch als *Ausgleichsgerade* bezeichnet.

- **Abweichungsgrenzen, Vertrauensbereich:** Diese Größen können meist vom Rechnerprogramm berechnet und in das Diagramm eingezeichnet werden.

- **Splines:** Lässt sich keine Kurvenform finden, die alle gegebenen Messwerte ausreichend genau annähert, zerlegt man den Wertebereich der Messwerte in mehrere Teilbereiche und sucht für jeden Teilbereich eine geeignete Kurvenform. Um an der Stoßstelle zweier benachbarter Kurven weder Sprünge noch Knickpunkte zu haben, müssen der Wert und die erste Ableitung beider Kurven im Verbindungspunkt gleich sein. Die so bestimmten Kurvenverläufe bezeichnet man mit Splines.

### 3 Ermittlung von Kenngrößen, Klassierung

Liegt dem Rechner der funktionelle Zusammenhang zweier Größen vor, können wichtige Kenngrößen durch Berechnen der zugeordneten mathematischen Formel ermittelt werden. Dazu gehören:

- Arithmetischer Mittelwert (Berechnung nach Gleichung (I.15));
- Effektivwert (Berechnung nach Gleichung (I.14));
- Extremwert (Maximalwert, Minimalwert; durch Berechnung der ersten und zweiten Ableitung und Vorzeichenerfassung);
- Gleichrichtwert (Betragsbildung und Berechnung nach Gleichung (I.15)).

Das Rechnerprogramm kann häufig auch Klassierungen durchführen, d.h. bei einem Kollektiv von gleichartigen Elementen (z.B. gemessenen Spannungswerten) die Häufigkeitsverteilung nach bestimmten Merkmalen (z.B. Abweichungen vom Sollwert) in vorgegebene oder vereinbarte Klassen feststellen (z.B. Abweichung (0 ... +1) %, (>+1 ... + 2) %) (DIN 1319 Blatt 1). Zur Klassierung gehören auch Begriffe wie Spitzenwert (relativ, absolut), Verweildauer (Zeitdauer, während der ein Wert einen Referenzwert überschritten/unterschritten hat) und Spannenwert (Differenz zwischen einem Maximalwert und dem benachbarten Minimalwert). Weitere Begriffe und Einzelheiten enthält DIN 45667.

### 4 Messsignalanalyse

Bei den nachfolgend dargestellten Verfahren sind die gemessenen Signalwerte zeitabhängig. Dabei kann das Messsignal selber zeitabhängig sein, oder aber ein zeitunabhängiges Messsignal wird von einem zeitabhängigen Störsignal überlagert. Es wird jeweils nur das Prinzip dargestellt, weitere Einzelheiten können den Kapiteln Nachrichtentechnik und Systemtheorie in diesem Buch sowie der einschlägigen Literatur entnommen werden. Gemeinsames Kennzeichen der aufgeführten Verfahren ist, dass sie aufwendige mathematische Berechnungen erfordern, womit sich der Einsatz eines Rechners anbietet.



## 4.1 Verfahren

- *Fourierzerlegung, Fouriertransformation:* Für periodische und nichtperiodische Signale werden die im Signalverlauf enthaltenen Frequenzanteile bestimmt. Mit der Fast-Fourier-Transformation (FFT) ist ein für den Rechnerinsatz besonders geeignetes Verfahren entwickelt worden (siehe auch Kapitel Nachrichtentechnik, I.4.9.2, I.4.9.3, und Kapitel Systemtheorie).
- *Autokorrelation, Kreuzkorrelation:* Das gemessene Signal wird bei der Autokorrelation zeitlich verschoben und mit dem nichtverschobenen Signal verglichen. Die Übereinstimmung ist maximal, wenn die Verschiebung Null ist. Bei der Kreuzkorrelation werden zwei Signalverläufe miteinander verglichen und auf Übereinstimmung untersucht (siehe auch Kapitel Nachrichtentechnik, I.4.11.2, und Systemtheorie).
- *Digitale Filter:* Sie haben den Vorteil, dass die Filtercharakteristik (Tiefpass, Bandpass, ...) und die Grenz- bzw. Resonanzfrequenzen softwaremäßig programmiert werden können und sich letztere auch auf sehr niedrige Werte einstellen lassen (siehe auch Kapitel Nachrichtentechnik, VI.2.7).

## 4.2 Anwendungen

### 4.2.1 Messung des Klirrfaktors

Nach der Fourierzerlegung des gemessenen periodischen Signalverlaufes wird der Klirrfaktor nach der Formel

$$\text{Klirrfaktor } k' = \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + \dots}}{U_1} \quad (\text{XI.9})$$

berechnet. Für eine weitere Definition des Klirrfaktors siehe Kapitel Nachrichtentechnik, I.4.12.3.

### 4.2.2 Geräuschmessung zur Schadenfrüherkennung

Die Lager von Motoren und Generatoren unterliegen dem Verschleiß. Bei einem notwendigen Austausch des Lagers sind weniger die Kosten für das Lager und den Austausch als vielmehr das entgangene Entgelt während der Ausfallzeit entscheidend. Es wird deshalb angestrebt, Lagerschäden möglichst früh zu erkennen und den Austausch optimal vorzubereiten (auszutauschendes Lager vorhanden, Außerbetriebnahme während einer Zeit geringer Auslastung). Das ist möglich, weil in der Regel zunächst nur geringe Schäden auftreten: Nur eine der im Kugellager vorhandenen 20 Kugeln ist defekt, und das Lager kann noch einige Tage oder Wochen weiter benutzt werden. Erst dann wird die Betriebssicherheit durch den Ausfall weiterer Kugeln verringert, bis schließlich durch das Blockieren des Lagers der Stillstand erzwungen und der Schaden maximal wird. Zur Schadenfrüherkennung nimmt man über ein Mikrofon das Geräusch des intakten Lagers auf und führt eine

Frequenzanalyse durch, die im Rechner als Sollmuster gespeichert wird. Die Geräuschmessung mit anschließender Analyse erfolgt jetzt periodisch, und das aktuell aufgenommene Spektrum wird mit dem gespeicherten Sollmuster verglichen. Mit jeder defekten Kugel ändert sich das Spektrum, so dass die oben geschilderten Maßnahmen rechtzeitig ergriffen werden können. Im Laufe der Zeit hat man Erfahrungen sammeln können, wie bestimmte Lagerschäden das Frequenzspektrum verändern, so dass das Messverfahren immer zuverlässiger geworden ist.

### 4.2.3 Abstandsmessung

Ein (bandbegrenztes) Rauschsignal wird von einem Mikrofon aufgenommen (S1), verstärkt und von einem Lautsprecher abgestrahlt (S2). Führt man mit S1 und S2 eine Kreuzkorrelation durch, ergibt sich ein Maximum für eine Zeitverschiebung  $t$  beider Signale zueinander, die genau der Laufzeit zwischen Mikrofon und Lautsprecher entspricht (siehe auch Kapitel Nachrichtentechnik, I.4.11.2, und Systemtheorie).

### 4.2.4 Erkennung periodischer Signale

Liegt ein durch z. B. Rauschen gestörter Signalverlauf vor, können darin enthaltene periodische Anteile dadurch erkannt werden, dass das Signal autokorreliert wird. Es ergeben sich Maxima im Abstand der Periodendauer des im Signal enthaltenen periodischen Anteils.

## 5 Automatisierung von Messabläufen

Besitzen die Messgeräte eine Schnittstelle zur Verwendung eines Bussystems nach Kapitel IX, können Messabläufe automatisiert werden. Der Rechner kann im einfachsten Fall die Messablaufsteuerung (Wahl des Messgerätes, Messbereichseinstellung, Messzeitpunkt) mit anschließender Messwertspeicherung übernehmen. Darüber hinaus können die Messwerte bearbeitet, analysiert und auf Grund der Ergebnisse erforderliche Steueraufgaben ausgeführt werden. Auf diese Weise laufen Industrieprozesse ab.

## Literaturverzeichnis

### Literatur allgemein:

- Bergmann, K.:* Elektrische Messtechnik. Verlag Vieweg Braunschweig/Wiesbaden. 6. Auflage 1996  
*Felderhoff, R.:* Elektrische und elektronische Messtechnik. Verlag Hanser München, Wien. 8. Auflage 2007  
*Schrüfer, E.:* Elektrische Messtechnik. Verlag Hanser München, Wien. 9. Auflage 2007  
*Hoffmann, J. (Hrsg.):* Taschenbuch der Messtechnik. Verlag Hanser München. 6. Auflage 2010

### Spezielle Literatur:

- [X.1] *Schrüfer, E.:* Signalverarbeitung. Verlag Hanser München, Wien. 1. Auflage 1990

# Energietechnik

## I Elektrische Maschinen

Elektrische Maschinen sind Energiewandler, deren Funktion auf den Gesetzen des Elektromagnetismus beruht. Zu den elektrischen Maschinen gehören die Transformatoren (ruhende elektrische Maschinen) und die rotierenden Maschinen, die elektrische Energie in mechanische Energie (Elektromotor) oder mechanische Energie in elektrische Energie (Generator) umformen. Nach der Stromart unterscheidet man Gleichstrom-, Drehstrom- und Einphasenwechselstrommaschinen.

### 1 Transformatoren

#### 1.1 Aufgaben eines Transformators

Mit Hilfe eines Transformators wird Wechsel- oder Drehstromleistung gegebener Spannung und Frequenz in solche höherer oder niedrigerer Spannung bei gleichbleibender Frequenz umgewandelt. Ohne die Transformatorentechnik ist der heutige Einsatz der elektrischen Energie in allen Bereichen unseres Lebens nicht denkbar. Die in den Kraftwerken erzeugte elektrische Energie wird durch Transformatoren auf Spannungsebenen umgewandelt, die einen rationellen Transport über weite Entfernungen ermöglichen. Transformatoren großer Leistung werden in den Netzen der Energieversorgungsunternehmen (EVU) eingesetzt. Im unteren Spannungsbereich werden Einphasen-Transformatoren in großer Stückzahl verwendet, um die für die dortigen Anwendungen erforderlichen Spannungen zu erzeugen. Ebenso wandeln Transformatoren Signale der Nachrichtentechnik um (Übertrager), oder sie dienen in der Messtechnik zur Anpassung der zu messenden Signale an den Messbereich des Messgerätes (Wandler). Obwohl Transformatoren kein rotierendes Teil besitzen, werden sie in der Energietechnik zum Bereich der Maschinen gezählt.

#### 1.2 Bauteile eines Transformators

Ein einfacher Transformator besteht aus einem geschlossenen Eisenkern und zwei Spulen, die auf diesen Kern gewickelt sind. Der Eisenkern besteht aus einzelnen, gegeneinander elektrisch isolierten speziellen Dynamoblechen, um den Wirbelstrom, der bei Wechselströmen entsteht, zu unterdrücken.

##### 1.2.1 Eisenkerne

Die Vielzahl der Einsatzgebiete der Transformatoren erfordert verschiedene Bauformen. Es gibt die *Kern-* oder *Mantelbauform*. In den Bildern Bild I-1 und Bild I-2 sind Einphasen-Transformatoren in verschiedenen Bauformen dargestellt.

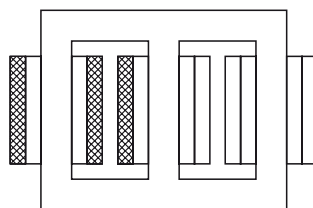


**Bild I-1**  
Einphasen-Kerntransformator

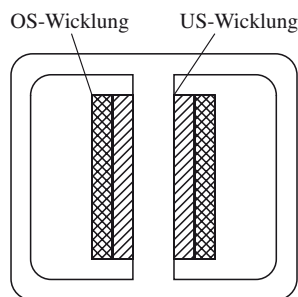


**Bild I-2**  
Einphasen-Manteltransformator

Beim *Einphasen-Kerntransformator* sind die beiden äußeren Schenkel mit jeweils der halben Windungszahl der Ober- und der Unterspannungsseite bewickelt.

Beim *Einphasen-Manteltransformator* befinden sich die beiden Wicklungen auf dem mittleren Schenkel. Der mittlere Schenkel wird wie von einem Mantel durch zwei Außenschkel umgeben.

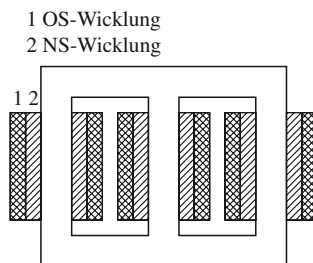


**Bild I-3**  
Drehstrom-Dreischekeltransformator

Beim *Drehstrom-Transformator* erfolgt die Aufteilung der Wicklungen auf die Schenkel des Transformators wie in Bild I-3 gezeigt. Die Sonderbauform des *Fünfschenkel-Transformators* findet man bei großen Energietransformatoren, da hierbei die Querschnitte der Joche nur ungefähr 58% der Säulenquerschnitte betragen. Dadurch verringert sich die Baugröße erheblich.

##### 1.2.2 Wicklungen

Im Aufbau der Wicklung unterscheidet man zwei Arten, die *Zylinderwicklung* und die *Scheibenwicklung*.

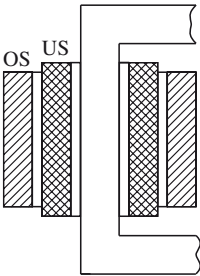


**Bild I-4**  
Zylinderwicklung

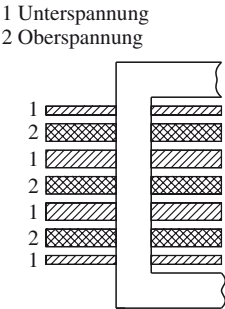


**Bild I-5**  
Scheibenwicklung

Bei der Zylinderwicklung wird die Röhre der Oberspannungswicklung über die der Unterspannungswicklung gestülpt (Bild I-4). Diese Wicklungsart findet man bei den meisten Transformatoren. Die Scheibenwicklung unterteilt die Ober- und Unterspannungswicklung in einzelne übereinander angeordnete Scheiben (Bild I-5).

**1.2.3 Kühlung**

Wie bei allen elektrischen Maschinen erzeugen die Transformatoren Verluste, die Wicklungen und Eisenkerne erwärmen. Diese Verluste müssen vom Transformator an die Umgebung abgeführt werden. Transformatoren werden in Trockentransformatoren und solche mit flüssigem oder gasförmigem Wärmeüberträger eingeteilt. Bei den Trockentransformatoren übernimmt die Umgebungsluft den Wärmetransport über Konvektion oder mittels Strahlung (Selbstkühlung). Neben der Selbstkühlung kann die Wärme durch künstlichen Zug, z.B. durch Lüfter, abgeführt werden (Zwangskühlung). Transformatoren mit flüssigem Wärmeüberträger, in der Hauptsache Öl, weisen gegenüber den Trockentransformatoren einige Vorteile auf. Infolge des größeren spezifischen Gewichts, der größeren spezifischen Wärme und der größeren Wärmeleitfähigkeit kann einerseits die erzeugte Wärmemenge der Wicklungen und des Eisenkerns besser abgeführt, zum anderen eine große Wärmemenge in der Kühlflüssigkeit gespeichert werden, was bei kurzzeitigen Überlastungen bedeutsam ist. Das im Transformator eingesetzte Kühlverfahren erkennt man am Typenschild. Die Bedeutung der Kurzzeichen sind in Tabelle I-1 aufgeführt.

**Tabelle I-1** Kühlmittel und Kurzzeichen

| Kühlmittel                                                                                                       | Kurzzeichen |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| Mineralöle oder entsprechende synthetische Flüssigkeiten mit einem Brennpunkt $\leq 300\text{ }^{\circ}\text{C}$ | O           |
| andere synthetische Flüssigkeiten                                                                                | L           |
| Gas, Brennpunkt $> 300\text{ }^{\circ}\text{C}$                                                                  | G           |
| Luft                                                                                                             | A           |
| Wasser                                                                                                           | W           |
| Kühlmittelbewegung                                                                                               |             |
| natürlich                                                                                                        | N           |
| erzwungen, gerichtet                                                                                             | D           |
| erzwungen, nicht gerichtet                                                                                       | F           |

■ **Beispiel:** Typenschildaufschrift AN Trockentransformator mit natürlicher Luftkühlung; OFAN Öltransformator mit erzwungener Ölkühlung und natürlicher Luftkühlung.

**1.3 Wirkungsweise eines Einphasen-Transformators**

In den Grundlagen der Elektrotechnik werden die Begriffe Selbstinduktion und gegenseitige Induktion anhand zweier gekoppelter Spulen erläutert. Ein Einphasen-Transformator besteht aus einer Wicklung auf dem linken Schenkel (Primärwicklung mit der Windungszahl  $N_1$ ) und einer Wicklung auf dem rechten Schenkel (Sekundärwicklung mit der Windungszahl  $N_2$ ).

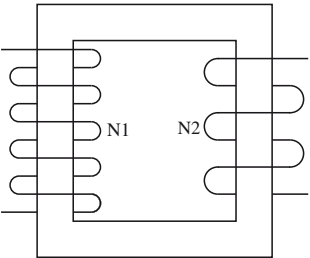
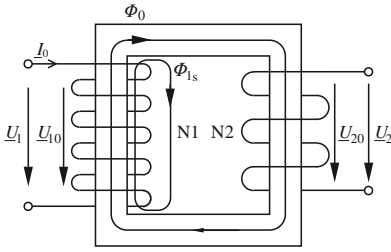


**Bild I-6**  
Einphasen-Transformator

Beide Wicklungen sind magnetisch über den geschlossenen Eisenkern miteinander verbunden (Bild I-6). Bei der weiteren Betrachtung des Transformators wird angenommen, dass die Primärwicklung an eine sinusförmige Wechselspannung  $U_1$  angelegt wird und alle anderen Größen ebenfalls einen sinusförmigen Verlauf aufweisen. Verzerrungen durch Sättigung und Oberschwingungen werden vernachlässigt.

**1.3.1 Leerlauf**

Bei offener Sekundärwicklung ( $I_2 = 0$ ) erregt der Strom  $I_1$ , der durch die Primärspule fließt, den magnetischen Fluss  $\Phi_1 = \Phi_\eta + \Phi_{1\sigma}$ .

**Bild I-7** Einphasen-Transformator im Leerlauf

Der Hauptfluss  $\Phi_h$  ist durch den Eisenkern mit beiden Spulen verkettet und induziert in den Spulen die Spannungen (Bild I-7):

*Leerlauf-Primärspannung*

$$U_{10} = j 4,44 \cdot f \cdot N_1 \cdot \Phi_h \quad \frac{U_{10}}{V} \left| \frac{f}{\text{Hz}} \right| \frac{N_1}{1} \left| \frac{\Phi_h}{\text{Vs}} \right| \quad (\text{I.1})$$

*Leerlauf-Sekundärspannung*

$$U_{20} = j 4,44 \cdot f \cdot N_2 \cdot \Phi_h \quad \frac{U_{20}}{V} \left| \frac{f}{\text{Hz}} \right| \frac{N_2}{1} \left| \frac{\Phi_h}{\text{Vs}} \right| \quad (\text{I.2})$$

*Übersetzungsverhältnis*

$$\ddot{u} = \frac{U_{10}}{U_{20}} = \frac{N_1}{N_2} \quad (\text{I.3})$$

Die beiden Spannungen sind phasengleich; ihre Beträge verhalten sich wie die Windungszahlen. Das Verhältnis der beiden Leerlaufspannungen  $U_{10}$  und  $U_{20}$  zueinander bezeichnet man als *Übersetzungsverhältnis*  $\ddot{u}$  des Transformators. Der Streufluss  $\Phi_{1\sigma}$  ist nur mit der Primärspule verkettet und induziert dort die *Selbstinduktionsspannung*.

*Selbstinduktionsspannung*

$$U_{1\sigma} = j 4,44 \cdot f \cdot N_1 \cdot \Phi_{1\sigma} \quad \frac{U_{1\sigma}}{V} \left| \frac{f}{\text{Hz}} \right| \frac{N_1}{1} \left| \frac{\Phi_{1\sigma}}{\text{Vs}} \right| \quad (\text{I.4})$$

Hieraus lässt sich die *Streuinduktivität* und die *Streu-reaktanz* berechnen.

*Streuinduktivität*

$$L_{1\sigma} = N_1 \cdot \frac{\Phi_{1\sigma}}{I_1} \quad \frac{L_{1\sigma}}{\frac{\text{Vs}}{\text{A}}} \left| \frac{N_1}{1} \right| \frac{\Phi_{1\sigma}}{\text{Vs}} \left| \frac{I_1}{\text{A}} \right| \quad (\text{I.5})$$

*Streu-reaktanz*

$$X_{1\sigma} = \omega \cdot L_{1\sigma} \quad \frac{X_{1\sigma}}{\Omega} \left| \frac{\omega}{\text{Hz}} \right| \frac{L_{1\sigma}}{\frac{\text{Vs}}{\text{A}}} \quad (\text{I.6})$$

Die Spannungsgleichung für den leerlaufenden Transformator lautet:

*Primärspannung*

$$\underline{U}_1 = (R_1 + jX_{1\sigma}) \cdot \underline{I}_1 + \underline{U}_{1h} \quad (\text{I.7})$$

*Sekundärspannung*

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_{20} \quad (\text{I.8})$$

$R_1$  ist der ohmsche Widerstand der Primärwicklung. Durch das ständige Ummagnetisieren des Eisenkerns entstehen dort Verluste. Diese Verluste berücksichtigt man durch einen Ersatzwiderstand  $R_{Fe}$ , der parallel zur Hauptinduktivität  $L_h$  angeordnet und vom Strom  $I_{Fe}$  durchflossen wird. Die in dem Widerstand  $R_{Fe}$  erzeugte Verlustleistung  $P_{Fe}$  wird auch als *Leerlaufleistung*  $P_0$  bezeichnet, da der Leerlaufstrom sehr gering ist und die Verluste am Widerstand  $R_1$  in diesem Fall vernachlässigbar klein sind.

*Leerlaufspannung*

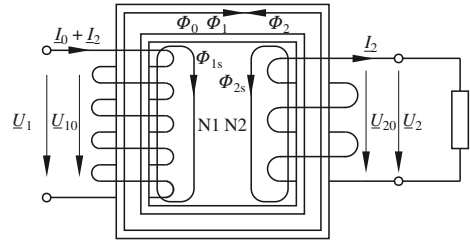
$$U_{10} = R_{Fe} \cdot I_{Fe} \quad (\text{I.9})$$

*Eisenverlustleistung (Leerlaufleistung)*

$$P_{Fe} = \frac{U_{10}^2}{R_{Fe}} \quad \frac{P_{Fe}}{W} \left| \frac{U_{10}}{V} \right| \frac{R_{Fe}}{\Omega} \quad (\text{I.10})$$

### 1.3.2 Belastung

Wird an den Klemmen der Sekundärspule ein Belastungswiderstand angeschlossen (Bild I-8), fließt durch die Sekundärspule ein Strom  $I_2$ .

**Bild I-8** Einphasen-Transformator bei Last

Dieser Strom erzeugt am Wirkwiderstand  $R_2$  der Sekundärspule und an der Streuinduktivität  $X_{2\sigma}$  einen Spannungsfall. Die Spannungsgleichungen des belasteten Transformators lauten:

*Primärspannung*

$$\underline{U}_1 = (R_1 + jX_{1\sigma}) \cdot \underline{I}_1 + \underline{U}_{1h} \quad (\text{I.11})$$

*Sekundärspannung*

$$\underline{U}_2 = -(R_2 + jX_{2\sigma}) \cdot \underline{I}_2 + \underline{U}_{20\sigma} \quad (\text{I.12})$$

Der Strom  $I_2$  verursacht eine magnetische Durchflutung  $\Theta_2 = N_2 \cdot I_2$ . Hierdurch wird ein magnetischer Fluss  $\Phi_2$  erzeugt, der entgegen  $\Phi_1$  gerichtet ist. Nach dem Durchflutungsgesetz gilt:

*resultierende Durchflutung*

$$\Theta_\mu = \Theta_1 - \Theta_2 \quad \frac{\Theta_\mu}{A} \left| \frac{\Theta_1}{A} \right| \frac{\Theta_2}{A} \quad (\text{I.13})$$

*Durchflutung im Primärkreis*

$$\underline{\Theta}_1 = N_1 (\underline{I}_1 - \underline{I}_{Fe}) \quad (\text{I.14})$$

Diese Formel gilt für alle Belastungsfälle, muss also ausgehend vom Leerlauf über verschiedene Belastungsfälle bis zum Kurzschluss Gültigkeit haben. Es folgt für den Leerlauf:

*Leerlauf Durchflutung*

$$\Theta_\mu = N_1 \cdot I_\mu = \Theta_{10} = N_1 \cdot (I_0 - I_{Fe}) \quad (I.15)$$

Im Belastungsfall mit  $I_2$  nimmt der Transformator aus dem Netz einen Strom  $I_1$  auf, der die Gegendurchflutung  $\Theta_2 = N_2 \cdot I_2$  kompensiert. Für den Primärstrom ergibt sich aus dem Durchflutungsgesetz nach Division durch  $N_1$ :

*Primärstrom*

$$I_1 = I_\mu + I_{Fe} + \frac{N_2}{N_1} \cdot I_2 \quad (I.16)$$

Für große Leistungstransformatoren ergibt ein Vergleich der Magnetisierungsdurchflutung  $\Theta_\mu$  mit der Durchflutung  $\Theta_{2N}$ , dass die durch den sekundären Nennstrom hervorgerufene Durchflutung viel größer ist als die Magnetisierungsdurchflutung. Damit gilt:

$$\Theta_1 = \Theta_\mu + \Theta_2 \approx \Theta_2 \quad (I.17)$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{\ddot{u}} \quad (I.18)$$

Die Ströme verhalten sich also umgekehrt zu ihren Windungszahlen. Geht man von einem idealen Transformator ohne Wirkverluste und Streuinduktivitäten aus, so ist die Scheinleistung, die auf der Primärseite vom Transformator aufgenommen wird, gleich der sekundären Scheinleistung.

$$S_1 = U_1 \cdot I_1 = S_2 = U_2 \cdot I_2 \quad (I.19)$$

Mit dieser Annahme ergeben sich folgende Abhängigkeiten:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} \quad (I.20)$$

$$\frac{U_1^2}{U_2^2} \cdot Z_1 = \frac{U_2^2}{U_2^2} \cdot Z_2 \quad (I.21)$$

$$\frac{U_1^2}{U_2^2} = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{N_1^2}{N_2^2} = \ddot{u}^2 \quad (I.22)$$

Die Widerstände der Sekundärseite verhalten sich mit dem Quadrat der Windungszahl umgekehrt zu denen der Primärseite. Berechnungen am Transformator oder das Zeichnen von Zeigerbildern erfordert einen großen Aufwand, da Primär- und Sekundärseite normalerweise eine andere Spannungsebene haben. Zeigerbilder müssten einen anderen Maßstab erhalten, die Berechnung muss umständlich ausgeführt werden. Dieses umgeht man, indem beide Seiten des Transformators auf eine Spannungsebene, die der Primärspannung oder die der Sekundärspannung, umgerechnet werden. Die Umrechnung der Sekundärgrößen

erfolgt mit dem Übersetzungsverhältnis  $\ddot{u}$ . Die umgerechneten Größen werden mit einem „‘“ gekennzeichnet. Durch die Umrechnung erhält man folgende Größen:

$$U'_2 = \ddot{u} \cdot U_2 \quad (I.23)$$

$$I'_2 = \frac{1}{\ddot{u}} \cdot I_2 \quad (I.24)$$

$$R'_2 = \ddot{u}^2 \cdot R_2 \quad (I.25)$$

$$X'_{2\sigma} = \ddot{u}^2 \cdot X_{2\sigma} \quad (I.26)$$

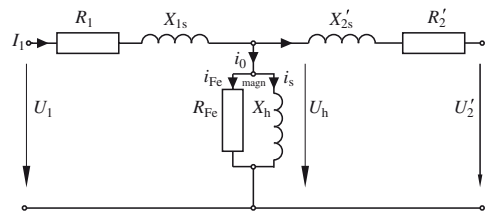


**Bild I-9** Vollständiges Ersatzschaltbild des Einphasen-Transformators

Mit Hilfe der umgerechneten Größen kann das Ersatzschaltbild und das Zeigerdiagramm so gezeichnet werden (Bild I-9), als handle es sich um einen Stromkreis mit einer Bezugsspannung. Die Größen in dem Ersatzschaltbild können durch zwei Versuche, *Kurzschluss-* und *Leerlaufversuch*, bestimmt werden.

### 1.3.3 Leerlaufversuch

Der Leerlaufversuch wird mit offenen Sekundär- oder Primärklemmen gefahren (Bild I-10). Bei offenen Primärklemmen wird die Nennspannung  $U_{2N}$  an die Sekundärklemmen angelegt und der sich einstellende Strom  $I_0$ , die Leistung  $P_0$  und der Leistungsfaktor  $\cos \varphi_0$  gemessen.

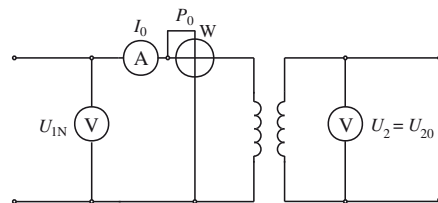


**Bild I-10** Schaltung im Leerlaufversuch mit Messanordnung

Mit den gemessenen Werten können, wenn sie auf Strangwerte umgerechnet sind, die *Hauptinduktivität*  $L_h$  und der fiktive *Eisenverlustwiderstand*  $R_{Fe}$  bestimmt werden. Dabei werden der Wirkwiderstand der Kupferwicklung und die induktive Streureaktanz vernachlässigt.

$$\text{Eisenverluststrom } I_{Fe} = I_0 \cdot \cos \varphi_0 \quad (I.27)$$

$$\text{Magnetisierungsstrom } I_{\text{magn}} = I_{10} \cdot \sin \varphi_0 \quad (I.28)$$

$$\text{Eisenverlustwiderstand } R_{\text{Fe}} = \frac{U_{10}}{I_{\text{Fe}}} \quad (I.29)$$

Blindwiderstand der Hauptinduktivität

$$X_h = \frac{U_{10}}{I_{\text{magn}}} \quad (I.30)$$

Wird der Leerlaufversuch nicht mit Nennspannung durchgeführt, muss der gemessene Leerlaufstrom  $I_{10}$  auf den eigentlichen Nennwert umgerechnet werden.

$$\text{Nenn-Leerlaufstrom } I_{10N} = I_{10} \cdot \left( \frac{U_{1N}}{U_{10}} \right) \quad (I.31)$$

Da der im Leerlauf fließende Strom im Verhältnis zum Nennstrom sehr gering ist, und um Vergleiche mit anderen Transformatoren herstellen zu können, wird für Transformatoren das *relative Leerlaufstromverhältnis*  $i_0$  angegeben.

relatives Leerlaufstromverhältnis

$$i_0 = \left( \frac{I_{0N}}{I_{1N}} \right) \cdot 100\% \quad \frac{i_0}{\%} \left| \frac{I_{0N}}{\text{A}} \right| \left| \frac{I_{1N}}{\text{A}} \right| \quad (I.32)$$

Die im Leerlaufversuch gemessene Wirkleistung  $P_0$  ist identisch mit der am Eisenverlustwiderstand erzeugten Leistung  $P_{\text{Fe}}$ . Findet der Leerlaufversuch bei Nennbedingungen statt, so gilt:

Eisenverlustleistung

$$P_{\text{Fe}} = P_{10N} = U_{1N} \cdot I_{10N} \cdot \cos \varphi_0 \quad \frac{P_{\text{Fe}}}{\text{W}} \left| \frac{P_{10N}}{\text{W}} \right| \left| \frac{U_{1N}}{\text{V}} \right| \left| \frac{I_{10N}}{\text{A}} \right| \quad (I.33)$$

Kann der Versuch nicht unter Nennbedingungen durchgeführt werden, muss die gemessene Leistung auf den Nennwert hochgerechnet werden.

$$P_{0N} = P_0 \cdot \left( \frac{U_{1N}^2}{U_{10}^2} \right) \quad (I.34)$$

■ **Beispiel:** Bei einem Einphasen-Transformator sind das relative Leerlaufstromverhältnis  $i_0 = 2\%$  und der Leistungsfaktor im Leerlauf  $\cos \varphi_0 = 0,1$  bekannt. Die Nenndaten des Transformators sind  $U_N = 60/10 \text{ kV}$ ;  $S_N = 1 \text{ MVA}$ . Wie groß ist der Eisenverlustwiderstand und die Hauptinduktivität bei  $f = 50 \text{ Hz}$ ?

$$I_{1N} = \frac{S_N}{U_{1N}} = \frac{1 \text{ MVA}}{60 \text{ kV}} = 16,67 \text{ A};$$

$$I_{10N} = \frac{i_0 \cdot I_{1N}}{100\%} = \frac{2\% \cdot 16,67 \text{ A}}{100\%} = 0,333 \text{ A}$$

Über den Leistungsfaktor können die Ströme durch den Eisenverlustwiderstand und die Hauptinduktivität berechnet werden.

$$I_{\text{Fe}} = I_{10} \cdot \cos \varphi_0 = 16,67 \text{ A} \cdot 0,1 = 1,667 \text{ A};$$

$$I_{\text{magn}} = I_{10} \cdot \sin \varphi_0 = 16,67 \text{ A} \cdot 0,99 = 16,58 \text{ A}$$

$$R_{\text{Fe}} = \frac{U_{1N}}{I_{\text{Fe}}} = \frac{60 \text{ kV}}{1,667 \text{ A}} = 35,99 \text{ k}\Omega;$$

$$X_h = \frac{U_{1N}}{I_{\text{magn}}} = \frac{60 \text{ kV}}{16,58 \text{ A}} = 3,61 \text{ k}\Omega$$

$$L_H = \frac{X_H}{2 \cdot \pi \cdot f} = \frac{3610 \text{ }\Omega}{2 \cdot \pi \cdot 50 \frac{1}{\text{s}}} = 11,49 \frac{\text{Vs}}{\text{A}}$$

### 1.3.4 Kurzschlussversuch

Beim Kurzschlussversuch wird eine Trafoseite kurzgeschlossen und an die andere Trafoseite eine variable Spannung angeschlossen (Bild I-11).

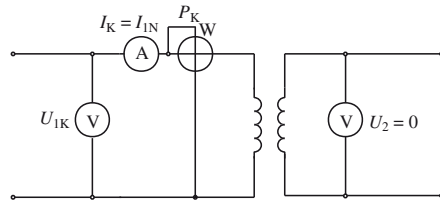


**Bild I-11** Schaltung im Kurzschlussversuch mit Messanordnung

Die Spannung wird hochgeregelt, bis im Transformator Nennstrom fließt. Gemessen werden die so eingestellte Spannung  $U_k$ , die aufgenommene Wirkleistung  $P_k$  und der Leistungsfaktor  $\cos \varphi_k$ .

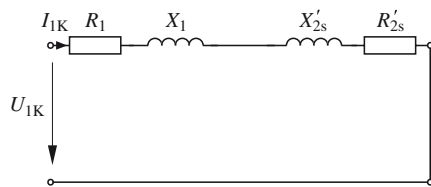


**Bild I-12** Ersatzschaltbild des Kurzschlussversuchs

Unter Vernachlässigung des Magnetisierungsstroms und der Eisenverluste ( $I_0 \ll I_N$ ) kann das Ersatzschaltbild des Transformators wie im Bild I-12 dargestellt werden. Die Größen  $R_1$ ;  $R'_2$ ;  $X_{S1}$ ;  $X'_{S2}$  werden durch Rechnung ermittelt.

$$\text{Kurzschlussimpedanz } Z_k = \frac{U_k}{I_k} \quad (I.35)$$

$$\text{Kurzschlusswiderstand } R_k = Z_k \cdot \cos \varphi_k \quad (I.36)$$

$$\text{Kurzschlussblindwiderstand } X_k = Z_k \cdot \sin \varphi_k \quad (I.37)$$

Bei Leistungstransformatoren gilt:

$$R_k = R_1 + R'_2 \quad (I.38)$$

$$R_1 = R'_2 = R_2 \cdot \ddot{u}^2 \quad (I.39)$$

$$\text{Widerstand der Primärwicklung } R_1 = \frac{R_k}{2} \quad (I.40)$$

$$\text{Widerstand der Sekundärwicklung } R_2 = \frac{R_k}{2 \cdot \ddot{u}^2} \quad (I.41)$$



$$X_k = X_{S1} + X'_{S2} \quad (1.42)$$

$$X_{S1} = X'_{S2} = X_{S2} \cdot \ddot{u}^2 \quad (1.43)$$

*Streublindwiderstand im Primärkreis*

$$X_{S1} = \frac{X_k}{2} \quad (1.44)$$

*Streublindwiderstand im Sekundärkreis*

$$X_{S2} = \frac{X_k}{2 \cdot \ddot{u}^2} \quad (1.45)$$

Erfolgt die Messung nicht unter Nennbedingungen ( $I_k \neq I_N$ ), müssen die ermittelten Werte auf Nennwerte umgerechnet werden.

$$\text{Nenn-Kurzschlussspannung } U_{kN} = U_k \cdot \left( \frac{I_{kN}}{I_k} \right) \quad (1.46)$$

$$\text{Nenn-Kurzschlussverluste } P_{kN} = P_k \cdot \left( \frac{I_{kN}}{I_k} \right)^2 \quad (1.47)$$

Die im Kurzschlussversuch ermittelte Verlustleistung  $P_k$  ist identisch mit der in den Wicklungen erzeugten Kupferverlustleistung  $P_{Cu}$ . Findet der Kurzschlussversuch mit Nennstrom statt, gilt:

$$\text{Kupferverluste } P_{Cu} = P_{1kN} = U_{1kN} \cdot I_{1N} \cdot \cos \varphi_k \quad (1.48)$$

Ferner wird aus den Messergebnissen die *relative Kurzschlussspannung*  $u_k$  bestimmt. Die relative Kurzschlussspannung gibt den Spannungsfall am Transformator bei Nennbetrieb an und liegt zwischen 4% und 16%.

*relative Kurzschlussspannung*

$$u_k = \left( \frac{U_{kN}}{U_N} \right) \cdot 100\% \quad \frac{u_k}{\%} \mid \frac{U_{kN}}{V} \mid \frac{U_N}{V} \quad (1.49)$$

Tritt am Transformator bei Nennbetrieb ein sekundärseitiger Kurzschluss auf, kann der hierbei fließende *Dauerkurzschlussstrom*  $I_D$  über die relative Kurzschlussspannung bestimmt werden.

*Dauerkurzschlussstrom*

$$I_D = \frac{I_N}{u_k} \cdot 100\% \quad \frac{I_D}{A} \mid \frac{I_N}{A} \mid \frac{u_k}{\%} \quad (1.50)$$

Erfolgt der Kurzschlussversuch nicht bei Transformatornennntemperatur von  $\vartheta = 75^\circ\text{C}$ , muss die ermittelte Kupferverlustleistung auf Nennntemperatur umgerechnet werden.

*Verlustleistung bei Nennntemperatur*

$$P_{Cu75} = P_{CuK} \cdot \frac{235 + 75}{235 + \vartheta_K} \quad \frac{P_{Cu75}}{W} \mid \frac{P_{CuK}}{W} \mid \frac{\vartheta_K}{^\circ\text{C}} \quad (1.51)$$

■ **Beispiel:** Bei einem Einphasen-Transformator sind die relative Kurzschlussspannung  $u_k = 4\%$  und der Leistungsfaktor im Kurzschluss  $\cos \varphi_k = 0,5$  bekannt. Die Nenndaten des Transformators sind  $U_N = 60/10 \text{ kV}$ ;  $S_N = 1 \text{ MVA}$ . Wie groß sind die Widerstände der Wicklungen, welchen Wert haben die Streuinduktivitäten bei  $f = 50 \text{ Hz}$ ? Wie hoch ist der im Kurzschlussfall sekundärseitig maximal fließende Strom?

$$I_{1N} = \frac{S_N}{U_{1N}} = \frac{1 \text{ MVA}}{60 \text{ kV}} = 16,67 \text{ A};$$

$$U_{kN} = \frac{u_k \cdot U_N}{100\%} = \frac{4\% \cdot 60 \text{ kV}}{100\%} = 2400 \text{ V}$$

$$Z_k = \frac{U_{kN}}{I_N} = \frac{2400 \text{ V}}{16,67 \text{ A}} = 144 \Omega$$

Über den Leistungsfaktor  $\cos \varphi_k$  können die Widerstände und Streuinduktivitäten berechnet werden.

$$R_k = Z_k \cdot \cos \varphi_k = 144 \Omega \cdot 0,5 = 72 \Omega;$$

$$X_k = Z_k \cdot \sin \varphi_k = 144 \Omega \cdot 0,866 = 124,7 \Omega$$

$$R_1 = \frac{R_k}{2} = \frac{72}{2} \Omega = 36 \Omega; \quad R'_2 = \frac{R_k}{2} = \frac{72}{2} \Omega = 36 \Omega;$$

$$R_2 = \frac{R'_2}{\ddot{u}^2} = \frac{36 \Omega}{\left( \frac{60 \text{ kV}}{10 \text{ kV}} \right)^2} = 1 \Omega$$

$$X_{1\sigma} = \frac{X_k}{2} = \frac{124,7}{2} \Omega = 62,35 \Omega;$$

$$X'_{2\sigma} = \frac{X_k}{2} = \frac{124,7}{2} \Omega = 62,35 \Omega$$

$$X_{2\sigma} = \frac{X'_{2\sigma}}{\ddot{u}^2} = \frac{62,35 \Omega}{\left( \frac{60 \text{ kV}}{10 \text{ kV}} \right)^2} = 1,73 \Omega$$

Der bei diesem Trafo maximal fließende Strom berechnet sich zu

$$I_{D2} = \frac{I_{2N}}{u_k} \cdot 100\% = \frac{I_{1N} \cdot \ddot{u}}{u_k} \cdot 100\% = \frac{16,67 \text{ A} \cdot 6}{4\%} \cdot 100\% = 2500,5 \text{ A}$$

### 1.3.5 Wirkungsgrad

Der Wirkungsgrad eines Systems ergibt sich aus

$$\text{Wirkungsgrad } \eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} \quad (1.52)$$

Für den Transformator ergibt sich unter Berücksichtigung der Verluste:

*zugeführte Wirkleistung*

$$P_{zu} = P_{ab} + P_V = P_{ab} + P_{Fe} + P_{Cu} \quad (1.53)$$

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{ab} + P_{Fe} + P_{Cu}} \quad (1.54)$$

Die Eisenverluste  $P_{Fe}$  werden messtechnisch im Leerlaufversuch bestimmt. Sie sind gleich den Nennverlusten im Leerlauf  $P_{Fe} = P_{0N}$ . Da die Leerlaufverluste nur von der angelegten Spannung abhängig sind, müssen die Verluste bei Spannungsänderung entsprechend umgerechnet werden.

$$P_{Fe}^* = P_{Fe} \cdot \left( \frac{U}{U_N} \right)^2 \quad (1.55)$$

$P_{Fe}^*$  Eisenverluste bei beliebiger Spannung  $U$

Die Kupferverluste  $P_{Cu}$  sind identisch mit den Verlusten  $P_{kN}$  aus dem Kurzschlussversuch. Sie entstehen an den Wicklungen des Transformators und sind nur



abhängig vom Strom. Entspricht der Strom nicht dem Nennstrom, müssen die Kupferverluste entsprechend umgerechnet werden.

$$P_{\text{Cu}}^* = P_{\text{Cu}} \cdot \left( \frac{I}{I_N} \right)^2 \quad (\text{I.56})$$

$P_{\text{Cu}}^*$  Kupferverluste bei beliebigem Strom  $I$

Der Wirkungsgrad  $\eta$  des Transformators kann jetzt für jeden Arbeitspunkt bestimmt werden.

$$\eta = \frac{P_{\text{ab}}}{P_{\text{ab}} + P_{\text{Fe}} + P_{\text{Cu}}^*} = \frac{P_{\text{ab}}}{P_{\text{ab}} + P_{\text{Fe}} \cdot \left( \frac{U}{U_N} \right)^2 + P_{\text{Cu}} \cdot \left( \frac{I}{I_N} \right)^2} \quad (\text{I.57})$$

Der *optimale Wirkungsgrad* des Transformators ergibt sich, wenn die Eisenverluste gleich den Kupferverlusten sind. Für den Normalbetrieb kann davon ausgegangen werden, dass die Spannung  $U$  der Nennspannung entspricht und konstant ist ( $P_{\text{Fe}}^* = P_{\text{Fe}}$ ). Der optimale Wirkungsgrad stellt sich ein, wenn gilt:

$$P_{\text{Fe}} = P_{\text{Cu}} \cdot \left( \frac{I}{I_N} \right)^2 \quad (\text{I.58})$$

$$I = I_N \cdot \sqrt{\frac{P_{\text{Fe}}}{P_{\text{Cu}}}} = I_N \cdot \sqrt{a} \quad a = \frac{P_{\text{Fe}}}{P_{\text{Cu}}} \quad (\text{I.59})$$

$$P_{\text{ab}} = P_N \cdot \sqrt{a} \quad (\text{I.60})$$

Eine Aussage über den wirtschaftlichen Einsatz eines Transformators kann über den Wirkungsgrad nicht erfolgen, da der Trafo nicht ständig gleichmäßig belastet wird. Eine wirtschaftliche Betrachtung erfolgt mit dem *Jahreswirkungsgrad*  $\eta_a$ .

$$\text{Jahreswirkungsgrad } \eta_a = \frac{W_{\text{ab}}}{W_{\text{ab}} + W_{\text{Fe}} + W_{\text{Cu}}} \quad (\text{I.61})$$

elektrische Jahresarbeit

$$W_{\text{ab}} = P_{\text{ab}} \cdot t_B \quad \frac{W_{\text{ab}}}{W_{\text{h}}} \left| \frac{P_{\text{ab}}}{W} \right| \frac{t_B}{h} \quad (\text{I.62})$$

Jahres-Leerlaufarbeit

$$W_{\text{Fe}} = P_{\text{Fe}} \cdot t_E \quad \frac{W_{\text{Fe}}}{W_{\text{h}}} \left| \frac{P_{\text{Fe}}}{W} \right| \frac{t_E}{h} \quad (\text{I.63})$$

Jahres-Wirkverlustarbeit

$$W_{\text{Cu}} = P_{\text{Cu}} \cdot t_B \quad \frac{W_{\text{Cu}}}{W_{\text{h}}} \left| \frac{P_{\text{Cu}}}{W} \right| \frac{t_B}{h} \quad (\text{I.64})$$

$t_B$  Betriebszeit;  $t_E$  Einschaltzeit

■ **Beispiel:** Bei einem Einphasen-Transformator sind die Kurzschlussspannung  $U_{\text{ik}} = 1500 \text{ V}$  und der Leistungsfaktor im Kurzschluss  $\cos \varphi_k = 0,5$  bekannt. Die Nenndaten des Transformators sind  $U_N = 60/10 \text{ kV}$ ;  $S_N = 1 \text{ MVA}$ . Wie hoch ist der Wirkungsgrad im Nennbetrieb bei  $\cos \varphi = 1$ , wenn die Leerlaufverluste  $P_{\text{FeN}} = 10 \text{ kW}$  betragen und die Kurzschlussspannung bei  $I_{\text{ik}} = 0,625 \cdot I_N$  ermittelt wurde?

$$I_{1N} = \frac{S_N}{U_{1N}} = \frac{1 \text{ MVA}}{60 \text{ kV}} = 16,67 \text{ A}$$

$$P_{\text{kN}} = I_N \cdot U_{\text{kN}} \cdot \cos \varphi_k = 16,67 \text{ A} \cdot 1500 \text{ V} \cdot \left( \frac{16,67 \text{ A}}{0,625 \cdot 16,67 \text{ A}} \right) \cdot 0,5 = 20 \text{ kW}$$

$$\eta_N = \frac{P_{\text{ab}}}{P_{\text{ab}} + P_{\text{FeN}} + P_{\text{CuN}}} = \frac{1 \text{ MW}}{1 \text{ MW} + 10 \text{ kW} + 20 \text{ kW}} = 0,97$$

## 1.4 Aufbau und Schaltung von Drehstrom-Transformatoren

### 1.4.1 Wirkungsweise

In Drehstromnetzen werden zum Transformieren von Spannungen Drehstrom-Transformatoren eingesetzt.

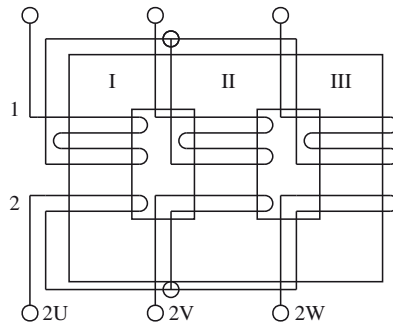


Bild I-13 Drehstrom-Transformator

Bei den Drehstrom-Transformatoren werden drei Einphasen-Transformatoren auf einem gemeinsamen Eisenkern mit drei Schenkeln gewickelt (Bild I-13). Die Schenkel des Transformators sind, da sie in einer Ebene angeordnet werden, unterschiedlich lang. Diese Anordnung führt zu unterschiedlichen Magnetisierungsströmen. Bei symmetrischer Last sind die Unterschiede so gering, dass der Drehstrom-Transformator in seinem Betriebsverhalten wie ein Einphasen-Transformator betrachtet werden kann. Im Drehstromtransformator können die Wicklungen im Dreieck oder im Stern geschaltet werden. Aus dieser Schaltungsart ergibt sich beim Berechnen der Größen des Transformators, dass sämtliche Rechnungen vorzugsweise im Strang erfolgen sollten.

Für die *Dreiecksschaltung* gilt:

$$S_{N \text{ Str}} = \frac{1}{3} \cdot S_N \quad (\text{I.65})$$

$$U_{N \text{ Str}} = U_N \quad (\text{I.66})$$

$$I_{N \text{ Str}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot I_N \quad (\text{I.67})$$

Für die *Sternschaltung* gilt:

$$S_{N \text{ Str}} = \frac{1}{3} \cdot S_N \quad (\text{I.68})$$

$$U_{N\text{ Str}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot U_N \tag{I.69}$$

$$I_{N\text{ Str}} = I_N \tag{I.70}$$

$S_N$  Gesamtnennscheinleistung;  $S_{N\text{ Str}}$  Nennscheinleistung eines Strangs (Phase);  $U_N$  Außenleiternennspannung;  $U_{N\text{ Str}}$  Strangennennspannung;  $I_N$  Leiternennstrom;  $I_{N\text{ Str}}$  Strangennennstrom

1.4.2 Schaltgruppen

Beim Drehstromtransformator können die Wicklungen auf der Oberspannungsseite (primär) und auf der Unterspannungsseite (sekundär) unterschiedlich geschaltet werden. Neben der *Dreieckschaltung* und der *Sternschaltung* wird auf der Unterspannungsseite die *Zickzackschaltung* eingesetzt. Die eingesetzten Schaltungsarten werden am Transformator durch Buchstaben kenntlich gemacht (Tabelle I-2).

Tabelle I-2 Kurzzeichen der Wicklungsschaltung

|                    | OS | US |
|--------------------|----|----|
| Dreieck            | D  | d  |
| Stern              | Y  | y  |
| Zickzack           | –  | z  |
| Sternpunkt geerdet | N  | n  |

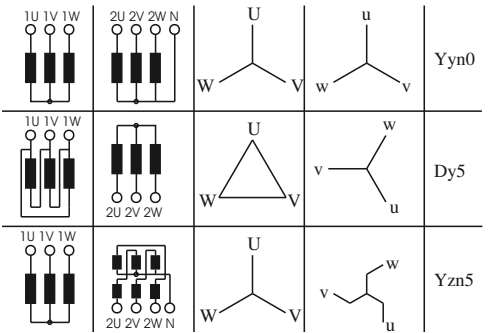


Bild I-14 Auswahl von Schaltgruppen

Die gebräuchlichsten Schaltgruppen nach VDE 0532 sind in Bild I-14 dargestellt. Die nach den Buchstaben stehende Zahl gibt die Phasenverschiebung der Unterspannungsseite gegen die Oberspannungsseite an. Die Verschiebung kann durch Multiplikation der nachgestellten Zahl mit dem Winkel 30° berechnet werden.

■ Beispiel:

$Yy0 \rightarrow 0 \cdot 30^\circ = 0^\circ; \quad Dy5 \rightarrow 5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$

1.4.3 Unsymmetrische Belastungen

Jeder Transformator muss sowohl im elektrischen als auch im magnetischen Gleichgewicht sein, d.h., die in den einzelnen Schenkeln des Transformators

auf tretenden Flüsse müssen sich immer zum Fluss im Leerlauf ergänzen. Unsymmetrische Belastungen führen bei einigen Schaltungsarten zu Streuflüssen, die das Transformatorgehäuse unzulässig erwärmen können. Transformatoren mit den Schaltgruppen Yyn, Dyn, Yzn und Dzn können unsymmetrische Lasten problemlos übertragen.

1.5 Parallelschalten von Transformatoren

Sollen mehrere Transformatoren parallelgeschaltet werden, müssen folgende Bedingungen nach VDE 0532 eingehalten werden:

Übersetzungsverhältnis muss gleich sein und Schaltgruppen müssen passen, sonst treten Ausgleichsströme im Leerlauf auf.

Kurzschlussspannungen gleich bei maximaler Abweichung von 10% ( $u_{k1} \cong u_{k2}$ ), sonst erfolgt eine unterschiedliche Lastaufteilung. Nennleistungsverhältnis nicht kleiner als 1:3.

Die Zusammenschaltung zweier Transformatoren mit unterschiedlichen Schaltgruppen kann nach VDE 0532 Teil 10 erfolgen. Sind zwei Transformatoren mit unterschiedlichen Spannungen zusammengeschaltet (Stufenschalter nicht auf gleicher Stellung), fließt zwischen den Transformatoren ein Ausgleichsstrom folgender Höhe:

Ausgleichsstrom

$$I_a = \frac{\Delta u}{\left( \frac{u_{k1}}{I_{1N}} \right) + \left( \frac{u_{k2}}{I_{2N}} \right)} \quad \frac{\Delta u}{\%} \left| \frac{u_{K1}}{\%} \right| \left| \frac{I_a}{A} \right| \left| \frac{I_{1N}}{A} \right| \tag{I.71}$$

$\Delta u$  [%] Abweichung der Trafospannungen  $U_1, U_2$

Dieser Ausgleichsstrom fließt schon im Leerlauf und erzeugt Verluste. Außerdem reduziert er die übertragbare Leistung der Transformatoren, da er sich ebenfalls zum Laststrom addiert. Die Parallelschaltung von Transformatoren mit unterschiedlicher Kurzschlussspannung  $u_K$  führt dazu, dass der Transformator mit der kleineren Kurzschlussspannung einen prozentual höheren Anteil der Last übernehmen muss. Die Lastaufteilung wird wie folgt berechnet:

rel. Ersatzkurzschlussspannung

$$u_{k\text{ ers}} = \frac{S_{N\text{ ges}}}{\left\{ \left( \frac{S_{N1}}{u_{k1}} \right) + \left( \frac{S_{N2}}{u_{k2}} \right) + \left( \frac{S_{N3}}{u_{k3}} \right) \right\}} \quad \frac{u_{k\text{ ers}}}{\%} \left| \frac{u_{k1}}{\%} \right| \left| \frac{S_N}{VA} \right| \tag{I.72}$$

$$S_1 = S_{N1} \cdot \frac{(u_{k\text{ ers}} \cdot S_{\text{ges}})}{(u_{k1} \cdot S_{N\text{ ges}})} \tag{I.73}$$

$u_{k\text{ ers}}$  relative Ersatzkurzschlussspannung der Parallelschaltung  
 $S_{N\text{ ges}}$  Summe der Trafonennleistungen  $S_1 + S_2 + \dots$   
 $S_{\text{ges}}$  tatsächlich abgenommene Scheinleistung der Parallelschaltung

■ **Beispiel:** Die Transformatoren T1 mit  $U_N = 10/0,4$  kV,  $S_N = 630$  kVA,  $u_k = 4\%$  und T2 mit  $U_N = 10/0,4$  kV,  $S_N = 1000$  kVA und  $u_k = 4,5\%$  werden parallelgeschaltet. Alle weiteren Voraussetzungen einer Parallelschaltung sind gegeben. Welche maximale Last darf diese Parallelschaltung übertragen, ohne dass einer der Transformatoren überlastet wird?

Ermittlung der relativen Ersatzkurzschlussspannung:

$$u_{k \text{ ers}} \frac{S_{N \text{ ges}}}{\left\{ \left( \frac{S_{N1}}{u_{k1}} \right) + \left( \frac{S_{N2}}{u_{k2}} \right) \right\}} = \frac{1630 \text{ kVA}}{\left( \frac{630 \text{ kVA}}{4\%} + \frac{1000 \text{ kVA}}{4,5\%} \right)} = 4,29\%$$

Da keiner der Transformatoren überlastet werden darf, muss das

Produkt  $\frac{(u_{k \text{ ers}} \cdot S_{N \text{ ges}})}{(u_k \cdot S_N)}$  mit der kleinsten relativen Kurzschlussspannung den Wert 1 ergeben.

Scheinleistung

$$S_{N \text{ ges}} = \frac{(u_{k1} \cdot S_N)}{u_{k \text{ ers}}} = \frac{4\% \cdot 1630 \text{ kVA}}{4,29\%} = 1519,8 \text{ kVA}$$

## 1.6 Transformaterschutz

Der Schutz von Transformatoren kann über vorge-schaltete Schutzeinrichtungen (Sicherungen, elektronische Schutzrelais) oder über direkt am Transformator eingebaute Schutzgeräte erfolgen. Zu diesen im Trafo eingebauten Schutzgeräten gehört der *Buchholzschutz* ebenso wie eine *Temperaturüberwachung*. Der Buchholzschutz ist eine sehr einfache, aber wirksame Schutzmethode. Treten an den Isolationen der Spulen Schwachstellen auf und kommt es dadurch zu Windungsschlüssen, so entstehen als Folgewirkung dieser Schlüsse Teilentladungen, die Zersetzungsgase produzieren. Diese Gase werden im Buchholzschutz aufgefangen. Ab einer bestimmten Gasmenge erfolgt über Schwimmerkontakte eine Meldung oder die Abschaltung des Transformators. Ein innerer Lichtbogen (Kurzschluss) hat zur Folge, dass eine starke Ölströmung im Transformator auftritt. Diese Ölströmung bewirkt am Stauschieber im Buchholzrelais eine Kontaktgabe. Der Transformator wird sofort abgeschaltet. Die Temperaturmessung verhindert bei Wechselbelastungen eine thermische Zerstörung des Transformators, indem die jeweils zulässige Temperatur über Grenzkontakte eingestellt wird. Bei einer Überschreitung dieser Temperatur wird der Transformator abgeschaltet.

## 1.7 Überlastung von Transformatoren

Transformatoren sind so ausgelegt, dass sie ihre Nenndaten bei Dauerbetrieb über 24 h und einer bestimmten Kühlmitteltemperatur (normalerweise 20 °C) ohne Schädigung der Isolation und anderer Betriebsgeräte aufrecht erhalten können. Für den Notfallbetrieb können Transformatoren überlastet werden, d.h., sie können kurzfristig eine Leistung höher als die Nennleistung abgeben (VDE 0536 oder Herstellerangaben). Erfolgt dieser Notbetrieb nach einer Nennbelastung, muss der Betreiber eine Verkürzung der Lebensdauer des Transformators in Kauf nehmen. Erfolgt eine Überlastung nicht aus dem Nennbetrieb

heraus, kann anhand von Diagrammen die mögliche Überlast, die nicht zur Verminderung der Lebensdauer führt, bestimmt werden.

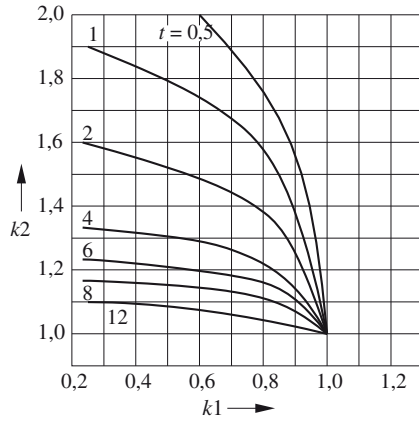


**Bild I-15**  $k_1$  und  $k_2$  für Öltransformatoren bei 20 °C Umgebungstemperatur

Zur Ermittlung der möglichen Überlast  $S_2$  muss die vorausgegangene Belastung des Transformators  $S_1$  für  $(24 - t)$  Stunden und die Nennleistung bekannt sein. Jetzt kann aus den Gleichungen (I.74) und (I.75) die mögliche Überlast mit der maximalen Überlastzeit als Parameter aus dem Bild I-15 ermittelt werden.

$$\text{Faktor der Vorbelastung } K_1 = \frac{S_1}{S_N} \quad (\text{I.74})$$

$$\text{Faktor der Überlast } K_2 = \frac{S_2}{S_N} \quad (\text{I.75})$$

Sollte der Transformator mit Überlast betrieben werden, muss der Strom auf das 1,5fache begrenzt werden (Notfallbetrieb: 2fache des Nennstroms).

■ **Beispiel:** Wie lange kann ein Drehstromöltransformator mit  $S_N = 1000$  kVA eine Überlast von 200 kVA übernehmen, wenn der Transformator mit einer Dauerlast von  $S = 800$  kVA betrieben wird?

$$K_1 = \frac{S_1}{S_N} = \frac{800 \text{ kVA}}{1000 \text{ kVA}} = 0,8; \quad K_2 = \frac{S_2}{S_N} = \frac{1200 \text{ kVA}}{1000 \text{ kVA}} = 1,2$$

Nach Bild I-15 ergibt sich eine Überlastzeit von ungefähr 5 h.

## 1.8 Aufstellen von Transformatoren

Beim Aufstellen von Transformatoren ist darauf zu achten, dass sie leicht zugänglich sind, die Sicherheitsabstände eingehalten werden, die Austauschbarkeit gewährleistet ist, eine ausreichende Belüftung oder Klimatisierung vorhanden ist und die Geräuschentwicklung berücksichtigt wird.

Bei Transformatoren mit Isolierflüssigkeiten als Kühlmittel sind Auffangwannen oder Gruben vorzusehen, die die gesamte Isolierflüssigkeit und auftretendes Wasser aufnehmen können (Pumpensumpf

vorsehen). Bei Transformatoren mit mehr als 1000 l brennbarer Isolierflüssigkeit ist zwischen Transformator und Grube eine Schottervorlage anzuordnen. Nähere Angaben im AGI Blatt J 11 (Arbeitsgemeinschaft Industriebau e.V.).

## 1.9 Sondertransformatoren

Zu den Sondertransformatoren zählen diejenigen Transformatoren, die aufgrund ihrer Bauart besondere Eigenschaften aufweisen oder nicht alle Anforderungen eines Transformators erfüllen.

### 1.9.1 Spartransformatoren

Bei *Spartransformatoren* weisen Ober- und Unterspannungswicklung einen gemeinsamen Teil auf, der als *Parallelwicklung* bezeichnet wird (Bild I-16).

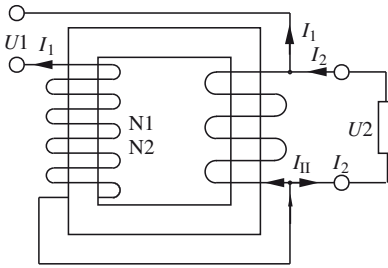


**Bild I-16** Spartransformator

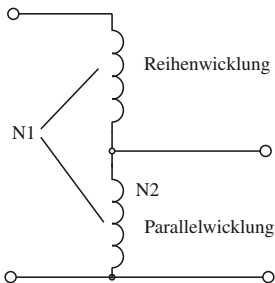


**Bild I-16 a**  
Ersatzschaltbild  
eines Spartrans-  
formators

Der weitere Anteil der Wicklung ist auf die Oberspannung beschränkt und heißt *Reihenwicklung*. Beide Wicklungsteile sind in Reihe geschaltet und sitzen auf einem gemeinsamen Eisenkern. Die elektrische Leistung wird beim Spartransformator nicht nur magnetisch übertragen, sondern je nach Übersetzungsverhältnis auch direkt über die galvanische Verbindung. Hieraus resultieren zwei Leistungsbegriffe: die *Durchgangsleistung*  $S_{ND}$  und die *Typen- oder Eigenleistung*  $S_{NE}$ . Für den Einphasenspartransformator gilt:

*Durchgangsleistung*

$$S_{ND} = U_{1N} \cdot I_{1N} \quad \frac{S_{ND}}{\text{VA}} \left| \frac{U_{1N}}{\text{V}} \right| \left| \frac{I_{1N}}{\text{A}} \right| \quad (\text{I.76})$$

*Eigenleistung*

$$S_{NE} = (U_{1N} - U_{2N}) \cdot I_{1N} \quad (\text{I.77})$$

Die Eigenleistung ist derjenige Leistungsanteil, der über den magnetischen Kreis übertragen werden muss. Der Vorteil des Spartransformators gegenüber einem Volltransformator ist, dass durch die kleinere Eigenleistung erhebliche Materialeinsparungen erzielt werden. Ein Nachteil ist, dass die Ober- und Unterspannungsseite galvanisch miteinander gekoppelt sind. Eingesetzt werden Spartransformatoren als Kuppeltransformatoren zwischen dem 380 kV- und dem 220 kV-Netz, um Spannungen nach längeren Leitungen hochzutransformieren, als Anlasstransformator für Asynchronmotoren und als Vorschaltgerät für Natrium-Dampflampen.

■ **Beispiel:** Ein Spartransformator soll in einem 110 kV-Drehstromnetz den Spannungsfall der Leitung von  $U_L = 1 \text{ kV}$  ausgleichen. Die zu übertragende Leistung beträgt 10 MVA. Der Spannungsfall auf der Leitung ist als Strangspannung zu betrachten. Der Spartransformator wird normalerweise in den Strang als Einphasen-Transformator eingeschaltet. Zur Berechnung der Durchgangsleistung ist deshalb die Strangspannung des Netzes zu berechnen.

$$\text{Strangspannung } U_{\text{Str}} = \frac{U_N}{\sqrt{3}} = \frac{110 \text{ kV}}{\sqrt{3}} = 63,51 \text{ kV}$$

$$\text{Nennstrom } I_N = \frac{S_N}{\sqrt{3} \cdot U_N} = \frac{10 \text{ MVA}}{\sqrt{3} \cdot 110 \text{ kV}} = 52,5 \text{ A}$$

$$\text{Durchgangsleistung } S_{ND} = 63,51 \text{ kV} \cdot 52,5 \text{ A} = 3,34 \text{ MVA}$$

$$\text{Eigenleistung } S_{NE} = \Delta U \cdot I_{1N} = 1 \text{ kV} \cdot 52,5 \text{ A} = 52,5 \text{ kVA}$$

### 1.9.2 Drosselspulen

Drosselspulen werden häufig als Reihendrosselspulen zur Begrenzung von Kurzschlussströmen eingesetzt. Die Drosselspulen werden als kurzschlussstrombegrenzende Spulen stets ohne Eisenkern gebaut, damit die im Kurzschluss auftretenden hohen Feldstärken keine Sättigungserscheinungen hervorrufen. Kennzeichnet wird die Drosselspule durch ihren Spannungsfall im Nennbetrieb  $\Delta U_{N\text{Str}}$ , dem Nennstrom  $I_N$ , der Eigenleistung und der Bauleistung.

$$\text{Eigenleistung } S_E = 3 \cdot \Delta U_{N\text{Str}} \cdot I_N \quad (\text{I.78})$$

$$\text{Bauleistung } S_D = \sqrt{3} \cdot U_N \cdot I_N \quad (\text{I.79})$$

Übliche Baugrößen liegen bei einem prozentualen Spannungsfall  $\Delta u_N$  im Nennbetrieb von 3 bis 10%.

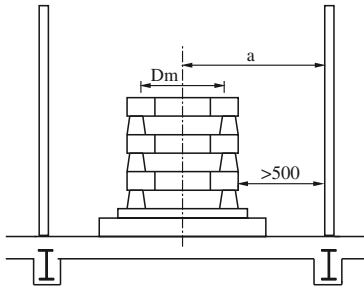
*prozentualer Spannungsfall*

$$\Delta u_N = \frac{\Delta U_{N\text{Str}}}{U_N} \cdot \sqrt{3} \cdot 100 \% \quad (\text{I.80})$$

Der für eine Drosselspule benötigte Spannungsfall ergibt sich aus der Reduzierung der Kurzschlussleistung nach der Drosselspule.

$$\Delta u_N = 1,1 \cdot 100\% \cdot S_D \cdot \frac{S_{K1}'' - S_{K2}''}{S_{K1}'' \cdot S_{K2}''} \quad (\text{I.81})$$

$S_{K1}''$  Kurzschlussleistung ohne Drosselspule;  $S_{K2}''$  Kurzschlussleistung mit Drosselspule

**Bild I-16 b**

Aufstellung einer Strombegrenzungsspule;

a Abstand der Drosselspulen-Mittelachse zum Metallteil

Bei der Aufstellung von Drosselspulen ist darauf zu achten, dass die Stromwärmeverluste abgeführt werden können. Die Drosselspule muss soweit von Metallteilen entfernt aufgestellt werden, dass keine unzulässige Erwärmung solcher Teile durch Wirbelströme auftreten kann. Der Abstand zu Konstruktionsteilen aus Stahl sowie Eisenarmierungen sollte mehr als 500 mm betragen. Kann nicht auf metallische Konstruktionsteile verzichtet werden, sollten diese durch nichtleitende Materialien getrennt werden. Ferner sollte die magnetische Feldstärke den Wert von  $H = 20 \text{ A/cm}$  nicht überschreiten. Zur Ermittlung der Feldstärke kann folgende Formel benutzt werden:

*Feldstärke*

$$H = 0,1 \cdot \frac{I_N \cdot N \cdot D_m}{a^2} \quad \frac{\frac{\text{A}}{\text{cm}}}{\frac{\text{A}}{\text{cm}}} \quad \frac{\text{cm}}{\text{cm}} \quad \frac{\text{cm}}{\text{cm}} \quad \frac{N}{-} \quad (1.82)$$

$D_m$  mittlerer Durchmesser der Drosselspule;  $a$  Abstand der Drosselspulenmittelachse zum Metallteil;  $N$  Windungszahl der Drosselspule

■ **Beispiel:** Die Kurzschlussleistung an einer Verteilung soll von  $S_{K1} = 600 \text{ MVA}$  auf  $S_{K2} = 100 \text{ MVA}$  reduziert werden. Die Nennspannung ist  $U_N = 10 \text{ kV}$ , der Nennstrom  $I_N = 600 \text{ A}$ . Welche Daten muss die Kurzschlussdrosselspule haben?

Der prozentuale Spannungsfall berechnet sich zu:

$$\begin{aligned} \Delta u_N &= 1,1 \cdot 100\% \cdot S_D \cdot \frac{S_{K1}'' + S_{K2}''}{S_{K1}'' \cdot S_{K2}''} \\ &= 1,1 \cdot 100\% \cdot \sqrt{3} \cdot 10\,000 \text{ V} \cdot 600 \text{ A} \\ &\quad \times \frac{600 \cdot 10^6 \text{ VA} - 100 \cdot 10^6 \text{ VA}}{600 \cdot 10^6 \text{ VA} \cdot 100 \cdot 10^6 \text{ VA}} = 9,53\% \end{aligned}$$

Der Spannungsfall an der Drossel sollte mindestens 9,53% betragen. Die Eigenleistung der Spule hat dann folgenden Wert:

$$S_E = 3 \cdot \Delta u_N \cdot I_N = 3 \cdot \frac{9,53\% \cdot 10\,000 \text{ V}}{100\% \cdot \sqrt{3}} \cdot 600 \text{ A} = 0,99 \text{ MVA}$$

### 1.9.3 Streufeldtransformatoren

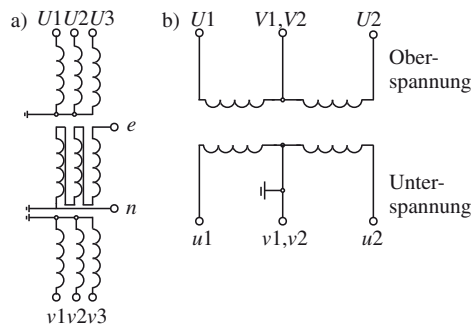
Streufeldtransformatoren haben eine hohe Kurzschlussspannung. Dadurch wird erreicht, dass im Transformator bei auftretendem Kurzschluss kein hoher Strom fließen kann, der den Transformator zerstört. Dieses Verhalten nennt man auch *spannungsweich*. Zu den Streufeldtransformatoren gehören Klingel-, Spielzeug-, Schutz-, Zünd- und Schweißtransformatoren sowie Transformatoren für Leuchtöhrenanlagen.

## 1.10 Messwandler

Messwandler sollen Spannungen und Ströme in elektrischen Anlagen für Mess-, Schutz- und Verrechnungszwecke auf messbare Werte mit genormten Messbereichen umwandeln. Die wesentlichen Anforderungen sind sichere Trennung zwischen Mittelspannungsnetz und Messstromkreis und eine möglichst genaue Abbildung der zu messenden Größen. Diese Forderungen werden bisher überwiegend mit *induktiven Wandlern* gelöst. Induktive Wandler sind Spezialtransformatoren kleiner Leistung entsprechend dem Leistungsbedarf der angeschlossenen Messeinrichtung. Die elektrischen Eigenschaften von Wandlern lassen sich wie bei Transformatoren erklären, wobei Spannungswandler fast im Leerlauf arbeiten ( $R_i \gg \gg$ ) und Stromwandler fast im Kurzschluss ( $R_i \ll \ll$ ). Messwandler sind entsprechend ihrer Genauigkeit in Klassen eingeteilt. Normwerte sind: Klassen 0,1–0,2–0,5–1,0–3,0–5,0–10. Ferner werden die Wandler noch nach der Art ihres Einsatzes unterschieden. Soll der Wandler für Messungen eingesetzt werden, wird das mit einem „M“ hinter der Klasse verdeutlicht. Wandler für Schutzaufgaben erhalten ein „P“ hinter der Klasse (z.B. die Klasse 1,0 M oder Klasse 1,0 P). Zur Veranschaulichung, bis zu welchem Strom die Klassengenauigkeit eingehalten wird, steht hinter der Einsatzart noch der Faktor, bezogen auf den Nennstrom, bis zu dem die Klassengenauigkeit nicht überschritten wird. Beispiel: Klasse 5P10 bedeutet, dass der Wandler bis  $10 \cdot I_N$  einen Messfehler  $< 5\%$  hat.

### 1.10.1 Spannungswandler

Spannungswandler werden mit induktiver und kapazitiver Übersetzung gebaut. Die Grundsicherungen von Spannungswandlern in Drehstromnetzen und die Schaltzeichen sind in Bild I-17 dargestellt.

**Bild I-17** Schaltungen von Spannungswandlern

- a) drei einpolig isolierte Wandler mit Hilfswicklung in offener Dreiecksschaltung
- b) zwei zweipolig isolierte Wandler in V-Schaltung

Da der Strom im Sekundärkreis des Spannungswandlers sehr klein ist ( $R_i \gg \gg$ ), folgt, dass bei einem Kurzschluss im Sekundärkreis des Spannungswand-

lers die Kurzschlussströme zur Zerstörung des Wandlers führen können. Spannungswandler werden zwei- oder einpolig isoliert gefertigt. Zweipolig isolierte Wandler (Anschluss zwischen zwei Außenleitern) besitzen eine Primärwicklung, die mit allen Anschlüssen entsprechend dem Isolationspegel des Hochspannungsnetzes isoliert ist. Bei einpolig isolierten Wandlern (Anschluss zwischen Außenleiter und Erde) ist nur eine Klemme der Primärwicklung für die volle Netzspannung isoliert. Der zweite Anschluss wird geerdet. Als Isoliermittel für Spannungswandler wird Gießharz eingesetzt.

1.10.2 Stromwandler

Stromwandler werden hauptsächlich als induktive Wandler gebaut. Die Schaltzeichen und Schaltungen von Stromwandlern sind in Bild I-18 dargestellt.

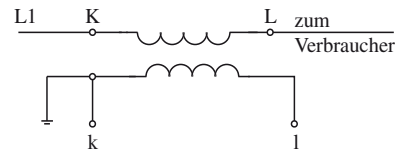


Bild I-18 Schaltung eines Stromwandlers

Da der Stromwandler nahezu im Kurzschluss betrieben wird, entsteht beim Öffnen der Sekundärseite an den Sekundärklemmen eventuell eine Überspannung, die zur Gefährdung von Personen und zum Überschlag führen kann. Die genormten Ströme der Sekundärseite sind: Messkern 5A, 1A (2A), 0,5A; Schutzkern 5A, 1A. Stromwandler werden in den verschiedensten Ausführungen hergestellt. Nach Art der Wicklung unterscheidet man zwischen den *Einleiterstromwandlern*, die primär nur eine Windung besitzen, und den *Wickelstromwandlern*, bei denen die Primär- und Sekundärwicklungen aus vielen Windungen bestehen. Der Vorzug der Einleiterstromwandler liegt in ihrer großen Kurzschlussfestigkeit, da auf einen ohne Schleife durch den Kern geführten Leiter praktisch keine mechanischen Beanspruchungen wirksam werden. Der Wickelstromwandler lässt sich dagegen besser bei kleinen primären Strömen einsetzen. Er kann durch Umschaltlaschen in der Primärwicklung an verschiedene Nennströme angepasst werden. In einem Stromwandler lassen sich mehrere Kerne unterbringen, die für verschiedene Aufgaben eingesetzt werden, so z.B. ein Kern für Messungen und ein Kern für Schutzaufgaben.

2 Drehstrommaschinen

Werden an einem Ständer drei Spulensysteme in einem Winkel von 120° angeordnet und schließt man diese Spulen an ein Drehspannungssystem wie in Bild I-19 dargestellt an, so erzeugt der dann fließende

Strom eine resultierende Durchflutung, die sich um den Ständer dreht und im Luftspalt ein umlaufendes Feld (Drehfeld) erzeugt.

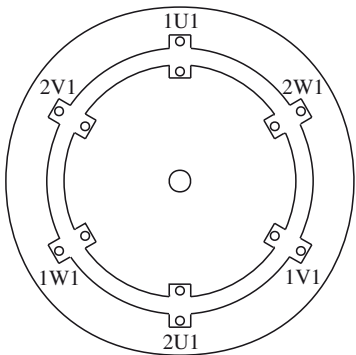


Bild I-19 Grundaufbau einer zweipoligen Drehfeldmaschine

Dieses Drehfeld hat, bei drei Spulen im Ständer, einen Winkel von 360° überstrichen, wenn die Spannung eine Periode durchlaufen hat. Die Umlaufgeschwindigkeit des Drehfeldes ist also von der Frequenz der angelegten Spannung abhängig. Ordnet man sechs Spulen, die um 60° verdreht sind, im Ständer an (Bild I-20), benötigt das Drehfeld zwei Perioden, bis es einen Winkel von 360° überstrichen hat.

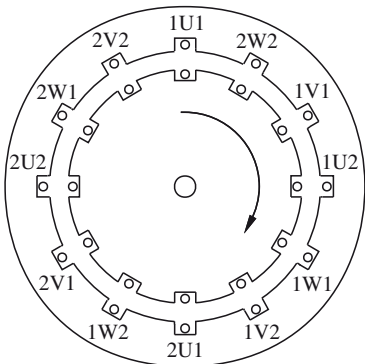


Bild I-20 Grundaufbau einer vierpoligen Drehfeldmaschine

Damit ist die Umlaufgeschwindigkeit des Drehfeldes auch von der Anzahl der im Ständer vorhandenen Pole abhängig.

$$\text{Drehzahl } n = \frac{f \cdot 60}{p} \quad \frac{n}{\text{min}^{-1}} \left| \frac{f}{\text{Hz}} \right| \frac{p}{-} \quad (\text{I.83})$$

*n* Drehzahl des Drehfeldes; *f* Frequenz der Netzspannung; *p* Anzahl der Polpaare

Die Anzahl der Polpaare kann aus dem Winkel zwischen den Ständerspulen ermittelt werden.



**Tabelle I-3** Zusammenhang zwischen Polpaarzahl und Drehzahl

| Polpaarzahl | Polzahl | Anzahl der Spulen | Winkel zwischen den Spulen in ° | Zeit für eine Umdrehung des Drehfeldes |
|-------------|---------|-------------------|---------------------------------|----------------------------------------|
| 1           | 2       | 3                 | 120                             | 1 T                                    |
| 2           | 4       | 6                 | 60                              | 2 T                                    |
| 3           | 6       | 9                 | 40                              | 3 T                                    |
| p           | 2p      | 3p                | $\frac{360^\circ}{3p}$          | p T                                    |

## 2.1 Die Drehstromasynchronmaschine

Die Drehstromasynchronmaschine spielt in der Antriebstechnik eine überragende Rolle, da sie aufgrund ihres einfachen Aufbaus nahezu wartungsfrei ist und durch die Frequenzumrichtertechnik problemlos gesteuert werden kann. Asynchronmaschinen gibt es von Leistungen <1 kW bis in den MW-Bereich. Die Asynchronmaschine ist eine Drehfeldmaschine und besitzt daher im Ständer eine Drehstromwicklung. Der Läufer ist ebenfalls mit einer Drehstromwicklung ausgestattet, die beim *Schleifringläufer* über Schleifringe und Bürsten herausgeführt wird, beim *Kurzschlussläufer* aus Profilstäben (Kupfer oder Bronze) besteht, die an den Enden verbunden sind. Bei kleineren Maschinen werden die Läuferwicklungen im Spritzgussverfahren aus Aluminium hergestellt.

### 2.1.1 Wirkungsweise der Asynchronmaschine

Die Betrachtung der Asynchronmaschine im Stillstand zeigt ein Verhalten wie ein Transformator. Das Drehfeld im Ständer induziert im Läufer eine Spannung und diese wiederum einen Strom. Die ohmschen Verluste kennzeichnen die Ständer- oder Läuferwicklung, die Streuinduktivitäten entstehen an den Wickelköpfen und an den Nuten.

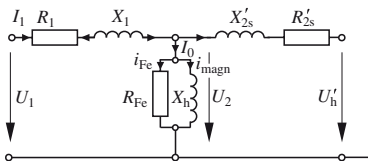


**Bild I-21** Vollständiges Ersatzschaltbild der Drehstromasynchronmaschine als Käfigläufer (Läuferspulen kurzgeschlossen) im Stillstand

Das Ersatzschaltbild der Asynchronmaschine ist im Stillstand also identisch mit dem Trafoersatzschaltbild (Bild I-21). Bei der Betrachtung der Asynchronmaschine bei sich drehendem Läufer kann das Trafoverhalten nicht mehr ohne weiteres herangezogen werden. Durch die induzierte Spannung im Läufer

wird ein Stromfluss hervorgerufen, der mit dem umlaufenden Ständerdrehfeld eine Kraft auf den Läufer ausübt.

$$F = I_L \cdot B_{St} \cdot l \cdot \sin \alpha \quad \begin{array}{c|c|c|c} F & I_L & B_{St} & l \\ N & A & \frac{Vs}{m^2} & m \end{array} \quad (I.84)$$

$I_L$  Läuferstrom;  $B_{St}$  Ständerfluss;  $l$  Länge der Spulen im Feld;  $\alpha$  Winkel zwischen  $I$  und  $B$  normal  $90^\circ$

Das hieraus resultierende Drehmoment beschleunigt den Läufer in Richtung des Drehfeldes.

$$M = F \cdot \frac{d}{2} \quad \begin{array}{c|c|c|c} M & F & d \\ Nm & N & m \end{array} \quad (I.85)$$

$d$  Läuferdurchmesser

Da der Läufer ebenfalls in Richtung des Drehfeldes bewegt wird, entsteht in ihm ein geringerer Stromfluss ( $U_i = B \cdot v \cdot l$ ) und somit ein kleineres resultierendes Moment. Hat der Läufer die gleiche Drehzahl wie das Drehfeld erreicht, ist  $I = 0 \Rightarrow M = 0$ . Bedingt durch Reibungs- und Widerstandsverluste im Läufer, muss immer ein Drehmoment zur Deckung der Verluste vorhanden sein. Der Läufer kann also niemals synchron mit dem Ständerdrehfeld mitlaufen. Der Unterschied zwischen der synchronen Drehzahl und der tatsächlichen Drehzahl des Läufers wird als *Schlupf*  $s$  bezeichnet.

$$\text{Schlupf } s = \frac{n_0 - n_L}{n_0} = \frac{f - f_L}{f} = \frac{\Delta f}{f} \quad (I.86)$$

$$\text{synchrone Drehzahl } n_0 = \frac{f \cdot 60}{p}; \quad \text{Läuferdrehzahl } n_L = \frac{f_L \cdot 60}{p}$$

### 2.1.2 Betriebsverhalten der Asynchronmaschine

Das Betriebsverhalten der Drehstromasynchronmaschine ist nicht mehr mit dem des Transformators zu vergleichen, da diese Maschine eine elektrische Leistung in eine mechanische Leistung umformt. Damit das Verhalten der Asynchronmaschine deutlicher wird, betrachtet man verschiedene Betriebszustände und verallgemeinert hieraus das Verhalten.



### 2.1.2.1 Spannungsgleichung, Ersatzschaltbild

Im Stillstand der Asynchronmaschine gilt das Transformatorersatzschaltbild und die Transformatorgleichung im Kurzschluss. Die Ständerspannungsgleichung lautet:

Ständerspannung

$$\underline{U}'_2 = 0 = -\underline{I}'_2 \cdot (R'_2 + jX'_{s2}) + \underline{I}_0 \cdot \left\{ \frac{(R_{Fe} \cdot jX_H)}{(R_{Fe} + jX_H)} \right\} \quad (I.87)$$

Die Läuferspannungsgleichung lautet:

Läuferspannung

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \cdot (R_1 + jX_{s1}) + \underline{I}_0 \cdot \left\{ \frac{(R_{Fe} \cdot jX_H)}{(R_{Fe} + jX_H)} \right\} \quad (I.88)$$

Die induktiven Widerstände  $X'_{s2}$  und  $X_H$  sowie die Eisenverluste  $R_{Fe}$  sind proportional zur Frequenz zwischen Ständer und Läufer. Da sich diese Frequenz mit steigender Drehzahl verringert, verringern sich auch die Widerstände.

Ständer-Läufer-Impedanz

$$X_H^* = 2 \cdot \pi \cdot \Delta f \cdot L_H \quad (I.89)$$

$$X_H^* = 2 \cdot \pi \cdot \Delta f \cdot L_H \cdot \frac{f}{f} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\Delta f}{f} \cdot f \cdot L_H \quad (I.90)$$

$$X_H^* = s \cdot X_H \quad (I.91)$$

$$\text{mit } s = \frac{\Delta f}{f} \quad \text{und} \quad X_H = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L_H$$

Diese Beziehung kann gleichermaßen für die Streuinduktivität  $X_s$  und den Eisenverlustwiderstand  $R_{Fe}$  aufgestellt werden. Für die Ständerspannungsgleichung ergibt sich hieraus:

Ständerspannung

$$\underline{U}'_2 = 0 = -\underline{I}'_2 \cdot (R'_2 + jsX'_{s2}) + \underline{I}_0 \cdot \left\{ \frac{(sR_{Fe} \cdot jsX_H)}{(sR_{Fe} + jsX_H)} \right\} \quad (I.92)$$

$$\underline{U}'_2 = 0 = -\underline{I}'_2 \cdot \left( \frac{R'_2}{s} + jX'_{s2} \right) + \underline{I}_0 \cdot \left\{ \frac{(R_{Fe} \cdot jX_H)}{(R_{Fe} + jX_H)} \right\} \quad (I.93)$$

Die Gleichung (I.93) ergibt sich aus der Gleichung (I.92) durch Ausklammern des Schlupfes  $s$ . Den ohmschen Widerstand im Läuferkreis der Gleichung (I.94) kann man wie folgt aufteilen:

$$\text{Ständerwirkwiderstand } \frac{R'_2}{s} = R'_2 + \frac{1-s}{s} \cdot R'_2 \quad (I.94)$$

Das Ersatzschaltbild der Asynchronmaschine ist identisch mit dem des Transformators (Bild I-22). Der auf der Sekundärseite angeordnete Widerstand

$$R'_2 \cdot \frac{(1-s)}{s} \quad \text{entspricht einem Lastwiderstand beim}$$

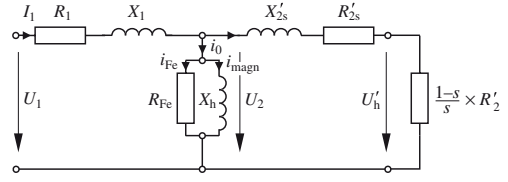


**Bild I-22** Vollständiges Ersatzschaltbild der Drehstromasynchronmaschine als Käfigläufer

Transformator. Die in diesem Widerstand umgesetzte Leistung ist die an der Welle der Maschine abgegebene oder aufgenommene mechanische Leistung einschließlich der Reibungsverluste.

### 2.1.2.2 Leistungsfluss

Die von einer Asynchronmaschine aufgenommene Wirkleistung berechnet sich wie folgt:

aufgenommene Wirkleistung

$$P_{zu} = P_{el} = 3 \cdot U_{Str1} \cdot I_{Str1} \cdot \cos \varphi \quad (I.95)$$

Von dieser Leistung werden die im Ständer auftretenden Verluste  $P_{Cu1}$  und  $P_{Fe}$  abgezogen. Die verbleibende Leistung wird über den Luftspalt als *Luftspaltleistung*  $P_\delta$  übertragen. Die an der Welle abgegebene Leistung ist die Luftspaltleistung abzüglich der im Läufer auftretenden Verluste  $P_{Cu2}$ .

Luftspaltleistung

$$P_\delta = P_{el} - (P_{Cu1} + P_{Fe}) = 3 \cdot I'^2_{2Str} \cdot \frac{R'_2}{s} = 3 \cdot U_H \cdot I'_2 \cdot \cos \varphi_2 \quad (I.96)$$

Kupferverlustleistung im Läufer

$$P_{Cu2} = 3 \cdot I'^2_{2Str} \cdot R'_2 = s \cdot P_\delta \quad (I.97)$$

mechanisch abgebbare Leistung

$$P_{ab} = P_{mech} = P_\delta - P_{Cu2} = P_\delta - s \cdot P_\delta = (1-s) \cdot P_\delta \quad (I.98)$$

Die mechanische Leistung der Asynchronmaschine ist also stark schlupfabhängig, d.h., für den Schlupf  $s = 1$  (Stillstand) kann an der Welle keine Leistung abgegeben werden. Die gesamte Leistung, die über den Luftspalt transportiert wird, setzen die Läuferwicklungen in Verlustwärme um. Beim Schlupf  $s = 0$  (Synchronismus) ist die über den Luftspalt transportierte Leistung Null, da der Widerstand im Ständerkreis gegen  $\infty$  geht  $\left( \frac{R'_2}{s} \Rightarrow \infty \right)$ . Zwischen  $s = 1$  und

$s = 0$  durchwandert die Luftspaltleistung ein Maximum, das beim *Kippschlupf*  $s_K$  auftritt. Der Wirkungsgrad  $\eta$  des Asynchronmotors ergibt sich aus dem Verhältnis der abgegebenen zur aufgenommenen Wirkleistung.

Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} = \frac{P_{mech}}{P_\delta + P_{Fe} + P_{Cu1}} \cong \frac{P_\delta - P_{Cu2}}{P_\delta} = 1 - s \quad (I.99)$$

Das an der Welle auftretende Drehmoment berechnet sich zu:

**Motormoment**

$$M = \frac{P_{\text{mech}}}{2 \cdot p \cdot n} \quad \frac{P_{\text{mech}}}{\text{W}} \left| \frac{n}{\text{sec}^{-1}} \right| \frac{M}{\text{Nm}} \quad (\text{I.100})$$

$$M = \frac{P_{\delta}}{2 \cdot p \cdot n_0} \quad (\text{I.101})$$

Die Gleichung (I.101) ergibt sich durch Ersetzen von  $n = (1 - s) \cdot n_0$  und  $P_{\text{mech}} = (1 - s) \cdot P_{\delta}$ .

### 2.1.2.3 Betriebskennlinien

Mit den Gleichungen I.89 und I.94 kann die Betriebskennlinie des Asynchronmotors berechnet werden. Diese Berechnung erfordert jedoch einen hohen Rechenaufwand. Deshalb wird die Betriebskennlinie des Asynchronmotors über ein vereinfachtes Ersatzschaltbild (Bild I-23) ermittelt.

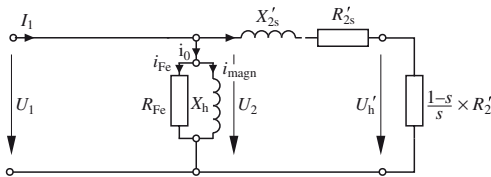


**Bild I-23** Vereinfachtes Ersatzschaltbild der Drehstromasynchronmaschine als Käfigläufer

Hierbei werden die Ständerverluste und Ständerstreuinduktivitäten vernachlässigt, was für Maschinen >15 kW beim Betrieb mit Nennfrequenz keinen großen Einfluss auf die Kennlinie hat. Bei kleineren Maschinen werden die Betriebskennlinien für erste Betrachtungen hinreichend genau erfasst. Nach dem vereinfachten Ersatzschaltbild ist die Spannung an der Hauptinduktivität gleich der Netzspannung und somit der Magnetisierungsstrom  $I_0$  nur von der Höhe der angelegten Spannung abhängig. Da der Strom im Ständerkreis auch direkt von der angelegten Spannung abhängig ist, ergibt sich für das Moment folgende Abhängigkeit:

$$M = \frac{d}{2} \cdot F = I_2' \cdot B_{\text{St}} \cdot l \cdot \frac{d}{2} \cdot \sin \alpha;$$

$$B_{\text{St}} \approx I_0 \approx U_H; \quad I_2' \approx U_H \Rightarrow M \approx U_H^2$$

Ebenso wie die Luftspaltleistung hat das Moment sein Maximum beim Kippschlupf. Dieses Moment wird als *Kippmoment*  $M_k$  bezeichnet. Die Spannungsgleichung des vereinfachten Ersatzschaltbildes ergibt sich zu:

$$\underline{U}_{\text{Str1}} = \underline{U}_H = \underline{I}'_{\text{Str2}} \cdot \left( \frac{R_2'}{s} + jX_s' \right) \quad (\text{I.102})$$

Die Stromgleichung zu:

$$\underline{I}'_{\text{Str2}} = \frac{\underline{U}_H}{\left( \frac{R_2'}{s} + jX_s' \right)}$$

$$= \underline{U}_H \cdot \left[ \frac{\frac{R_2'}{s}}{\left( \left( \frac{R_2'}{s} \right)^2 + X_s'^2 \right)} - j \frac{X_s'}{\left( \left( \frac{R_2'}{s} \right)^2 + X_s'^2 \right)} \right] \quad (\text{I.103})$$

Aus der Gleichung erkennt man, dass der Strom für  $s = \infty$  einen Maximalwert annimmt und für  $s = 0$  Null wird.

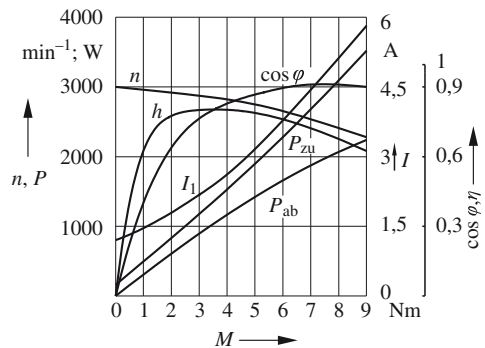


**Bild I-24** Belastungskennlinie eines 1 kW-Drehstrom-Asynchronmotors

Der Leistungsfaktor steigt mit sinkendem Schlupf bis zu einem Maximalwert und fällt dann wieder. Die Abhängigkeiten von  $I_2'$ ,  $M$ ,  $P$  und  $\cos \varphi$  vom Schlupf sind im Bild I-24 dargestellt.

### 2.1.3 Kurzschlussläufer

Die Läuferwicklungen beim Kurzschluss- oder Käfigläufer bestehen aus Stäben, die in eine vorgefertigte Nut eingelegt oder gespritzt werden. Die gebräuchlichsten Nutformen sind der Rundstab, Hochstab und Doppelstab (Bild I-25).

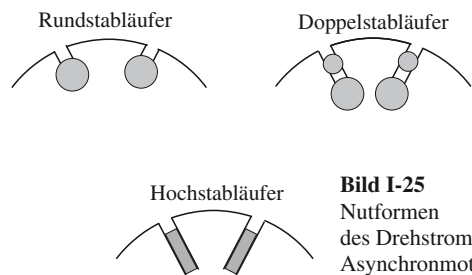
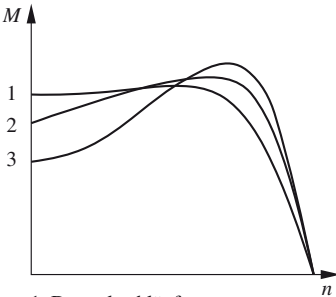


**Bild I-25**  
Nutformen des Drehstrom-Asynchronmotors

Der Rundstabläufer hat praktisch die gleichen Eigenschaften wie ein Läufer mit gewickelten Spulen. Beim Hochstab- oder Doppelstabläufer bewirkt die

Form der Nuten, dass nicht mehr alle Nutabschnitte von der gleichen Anzahl von Feldlinien geschnitten werden. Hieraus resultiert, dass die tiefer liegenden Nutbereiche von mehr Feldlinien, die Bereiche in der Nähe des Luftspaltes dagegen von weniger Feldlinien umschlossen sind. Als Folge dieser ungleichmäßigen Feldlinienverteilung ist die Selbstinduktivität am unteren Nutbereich größer als am Luftspalt. Die Induktionsspannung ist also am Luftspalt am geringsten. Der Strom ist nicht mehr gleichmäßig in der Nut verteilt, sondern wird in Richtung Luftspalt gedrängt. Als Folge dieser *Stromverdrängung* wird der Wirkwiderstand größer, die Streuinduktivität kleiner. Der resultierende Scheinwiderstand wird kleiner, der Strom im Läufer also größer. Ausschlaggebend ist jedoch, dass das Läufermoment wesentlich stärker steigt als der Strom, da das Moment im Anlauf von der im Luftspalt umgesetzten Wirkleistung abhängig ist. Hat der Käfigläufer nicht einen Rundstab, sondern eine andere Stabform, so bezeichnet man den Käfigläufermotor auch als *Stromverdrängungsläufer*.



- 1 Doppelstabläufer
- 2 Hochstabläufer
- 3 Rundstabläufer

**Bild I-26** Drehzahl-Drehmomentkennlinien verschiedener Nutformen des Drehstrom-Asynchronmotors

Der Stromverdrängungsläufer hat jedoch den Nachteil, dass im Bereich der synchronen Drehzahl die Streuinduktivität im Gegensatz zum Normalmotor größer und somit der Leistungsfaktor schlechter ist. Ebenso ist das Kippmoment kleiner als bei stromverdrängungsfreien Motoren. Die realen Drehmoment-Drehzahlkennlinien dieser Maschinen sind im Bild I-26 dargestellt. Im Bereich kleiner Drehzahlen fällt auf, dass das Moment von seinem Anlaufwert leicht abfällt und dann bis zum Kippmoment ansteigt. Diese Verminderung des Moments verursachen Oberwellenmomente, die sich dem Grundmoment überlagern. Die Oberwellen werden bei der theoretischen Betrachtung der Asynchronmaschine vernachlässigt, da ihr Einfluss nur im unteren Drehzahlbereich auftritt. Das durch den Momentenabfall entstehende minimale Moment bezeichnet man als *Sattelmoment*. Beim Anfahren der Maschine ist darauf zu achten, dass das

Gegenmoment nicht größer als das Sattelmoment wird (nähere Festlegungen in VDE 0530).

**2.1.3.1 Anlassverfahren**

Befindet sich der Läufer der Asynchronmaschine im Stillstand (Anlauf), wird ein hoher Strom (6–8 facher Nennstrom) aus dem Netz aufgenommen. Dieser Strom verursacht auf den Zuleitungen einen erhöhten Spannungsfall. Deshalb versucht man, diesen Strom zu verringern. Möglichkeiten der Anlaufstrombegrenzung sind die Senkung der Ständerspannung, der Stern-Dreieckanlauf und die Beschaltung mit einem Widerstand im Ständerkreis. Durch Verändern der *Ständerspannung* kann die Höhe des Stroms und des Moments beeinflusst werden. Da der Motor normalerweise für die angelegte Netzspannung gekauft wurde, ist eine Spannungsänderung nur in eine Richtung möglich.

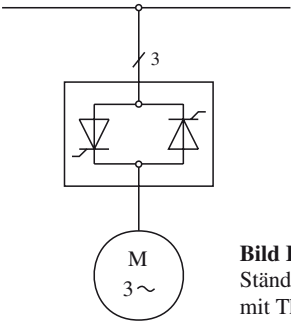


**Bild I-27** Ständerspannungsänderung mit Thyristorsteller

Die Ständerspannung kann durch einen Transformator (Spartrafo) oder durch einen Thyristorschalter (Bild I-27) verändert werden. Bei der Spannungsverringerung verändert sich der Strom proportional zur Spannung, das Moment jedoch quadratisch ( $I \approx U$ ;  $M \approx U^2$ ). Eine Anlaufschaltung durch Spannungssenkung ist aus diesen Gründen nur für leichte Anlaufbedingungen möglich.

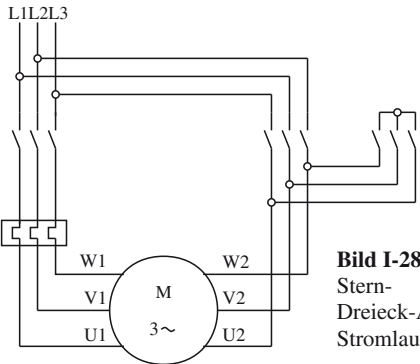


**Bild I-28** Stern-Dreieck-Anlauf-Stromlaufplan

Beim *Stern-Dreieck-Anlauf* (Bild I-28) werden die Ständerwicklungen während des Anlaufvorganges im Stern geschaltet. Hierdurch liegt an den Wicklungen

eine geringere Spannung (Strangspannung) an, und es fließt ein kleinerer Strom. Mit dem Strom verringert sich jedoch das Anlaufmoment

$$\text{Stromverhältnis} \quad \frac{I_Y}{I_\Delta} = \frac{\frac{U}{\sqrt{3} \cdot Z}}{\frac{\sqrt{3} \cdot U}{Z}} = \frac{1}{3} \quad (\text{I.104})$$

$$\text{Momentenverhältnis} \quad \frac{M_Y}{M_\Delta} = \frac{\left(\frac{U}{\sqrt{3}}\right)^2}{U^2} = \frac{1}{3} \quad (\text{I.105})$$

Der Stern-Dreieck-Anlauf darf nur bei leichten Anlaufbedingungen eingesetzt werden, wenn der Motor mit verminderter Last anläuft, da beim Umschalten von Stern- auf Dreieckschaltung ein Stromstoß auftritt, der annähernd gleich dem Anlaufstrom sein kann.

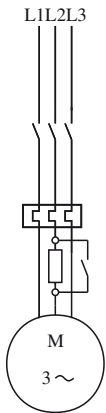


**Bild I-29**  
Stromlaufplan der KUSA-Schaltung

Schaltet man einen Widerstand in einen Strang (Bild I-29), so verhält sich der Asynchronmotor wie ein Wechselstrommotor mit Hilfswicklung. Diese Schaltung wird auch *KUSA-Schaltung* (Kurzschlussläufer-Sanftanlauf) genannt. Durch den Widerstand in einem Strang wird das Drehfeld in ein elliptisches Feld verwandelt, und das Moment sinkt mit zunehmendem Widerstand. Der Strom in dem mit dem Widerstand behafteten Strang sinkt zwar, dafür steigen jedoch die Ströme in den anderen beiden Strängen. Durch die KUSA-Schaltung erhält man ein kleineres Moment, jedoch keine kleineren Ströme.

### 2.1.3.2 Bremsverfahren

Mögliche Bremsverfahren für den Asynchronmotor sind die Abbremsung über mechanische Bremsen, die Gleichstrombremsung, die Gegenstrombremsung und die übersynchrone Bremsung. Bei der *mechanischen Bremsung* wird der Motor nicht belastet. Nachteil dieser Bremsart ist, dass die Bremsbeläge einem hohen Verschleiß unterliegen und somit ein hoher Wartungs- und Ersatzaufwand notwendig ist. Diese Bremsart sollte nur als Zusatz- oder Notbremse eingesetzt werden.

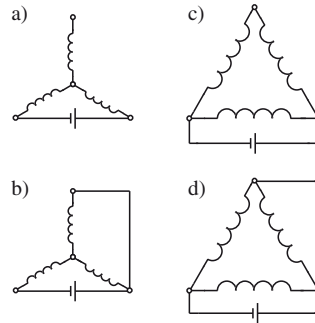


**Bild I-30** Schaltung zum Gleichstrombremsen von Asynchronmotoren

Die *Gleichstrombremsung* ist die effektivste Bremsmethode. Hierbei wird der Motor vom Netz getrennt und die Ständerwicklungen nach Bild I-30 an einen Gleichstrom niedriger Spannung angeschlossen. Das sich dabei einstellende Moment kann aus der Drehzahl-Drehmomentenkennlinie ermittelt werden, indem die Drehzahl  $n$  durch die Bremsdrehzahl  $n_{BG} = n_0 - n$  ersetzt wird. Der Bremsgleichstrom  $I_{BG}$  sollte den 2,5fachen Wert des Nennstromes nicht überschreiten. Bei dieser Bremsart ist kein Anlauf in entgegengesetzter Richtung möglich, und die Wärmeentwicklung in den Spulen ist gering. Anhaltswerte für die Berechnung des Gleichstroms sind in Gleichung I.106 und Tabelle I-4 zusammengefasst.

$$\text{Bremsgleichstrom} \quad I_{BG} \leq k \cdot I_N \cdot 1,5 \quad (\text{I.106})$$

**Tabelle I-4** Faktor zur Bestimmung des Gleichstroms beim Gleichstrombremsen von Asynchronmotoren

| Schaltungsart | a     | b    | c    | d    |
|---------------|-------|------|------|------|
| $k$ -Faktor   | 1,225 | 1,41 | 2,21 | 2,45 |

Die Gleichspannung berechnet sich nach Gleichung I.108 und Tabelle I-5

$$\text{Bremsgleichspannung} \quad U_{GI} = C \cdot I_{BG} \cdot R_{Str_{warm}} \quad (\text{I.107})$$

$$U_{GI} = 1,3 \cdot C \cdot I_{BG} \cdot R_{Str_{kalt}} \quad (\text{I.108})$$

**Tabelle I-5** Faktor zur Bestimmung der Gleichspannung beim Gleichstrombremsen von Asynchronmotoren

| Schaltungsart | a | b   | c     | d   |
|---------------|---|-----|-------|-----|
| $C$ -Faktor   | 2 | 1,5 | 0,667 | 0,5 |

■ **Beispiel:** Ein Drehstromasynchronmotor mit einem Nennstrom  $I_N = 50 \text{ A}$  und einem Strangwiderstand  $R_{St} = 2 \Omega$  wird im warmen Zustand über eine Gleichstrombeschaltung nach Schaltungsart b abgebremst. Welcher Gleichstrom darf maximal zugelassen und welche Gleichspannung sollte an die Wicklungen angelegt werden?

Für Schaltungsart b gilt:

$$I_{BG} \leq k \cdot I_N \cdot 1,5 = 1,41 \cdot I_N \cdot 1,5 = 1,41 \cdot 50 \text{ A} \cdot 1,5 = 105,75 \text{ A}$$

$$U_{GI} = C \cdot I_{BG} \cdot R_{Strom} = 1,5 \cdot 105,75 \text{ A} \cdot 2 \Omega = 317,25 \text{ V}$$

Die *Gegenstrombremsung* hat eine extreme Bremswirkung. Hierbei werden zwei Phasen des Ständers vertauscht. Am Ständer stellt sich ein gegenläufiges Drehfeld ein, das versucht, den Läufer mitzureißen. Der Schlupf wird größer 1. Wird eine Gegenstrombremsung aus einer Nenndrehzahl nahe der Leerlaufdrehzahl ausgeführt, ist die thermische Motorbelastung zweimal so groß wie beim Anlauf. Bei der Gegenstrombremsung wird die mechanische Leistung und zusätzlich die aufgenommene elektrische Leistung in Wärme umgewandelt. Deshalb muss überprüft werden, ob der Bremsvorgang länger als 5 s dauert, da die Maschine sonst thermisch überlastet wird. Damit die Maschine nicht in entgegengesetzte Richtung anlauft, muss ein Drehzahlwächter den Bremsvorgang überprüfen und die Netzspannung kurz vor dem Stillstand abschalten.

Die *übersynchrone Bremsung* kann nur eingesetzt werden, wenn die Last den Motor antreibt. Die Asynchronmaschine arbeitet dann als Generator und hat einen Schlupf  $s < 0$ ; der Läufer dreht also schneller als das Ständerfeld. Dieser Bremsvorgang hat wenig Stromwärmeverluste. Eingesetzt wird er bei Dahlanderantrieben, bei Frequenzumrichterantrieben und bei einer Beschleunigung der Maschine durch die Last, wie z. B. bei Hebezeugen.

### 2.1.3.3 Drehzahlsteuerung

Eine Drehzahländerung des Käfigläufermotors kann durch Verändern der Ständerspannung, Veränderung der Frequenz und geeignetes Umschalten von Spulengruppen in der Ständerwicklung erfolgen.

### 2.1.3.4 Ständerspannungsänderung

Die *Ständerspannungsänderung* lässt eine Drehzahlsteuerung nur bis zum Kippeschlupf zu. Einschränkungen: Die Verluste vergrößern sich, der Wirkungsgrad sinkt, und es besteht die Möglichkeit, dass durch

Lastwechsel ein Gegenmoment auftritt, das größer als das Kippmoment ist und damit zum Stillstand des Motors führt. Spannungsverminderung wird bei getakteten Motoren eingesetzt. Läuft der Motor im Leerlauf, kann der Leerlaufstrom durch eine Spannungsverminderung gesenkt werden. Dadurch treten weniger Verluste in der Primärwicklung und in den Zuleitungen auf.

### 2.1.3.5 Frequenzänderung

Eine Frequenzänderung hat zur Folge, dass die synchrone Drehzahl der Maschine entsprechend der Beziehung  $n_0 = f/p$  beeinflusst wird. Da durch eine Frequenzänderung die Höhe der induktiven Widerstände ebenfalls verändert wird, muss neben der Frequenz auch die Spannung in gleicher Richtung variiert werden. Zur Drehzahlsteuerung von Asynchronmaschinen werden deshalb Frequenzumrichter eingesetzt, bei denen durch geeignete Maßnahmen die Frequenz und die Spannung parallel beeinflusst werden. Zum Einsatz gelangen zwei Arten von Frequenzumrichtern, der *Spannungswischenkreisumrichter* und der *Stromzwischenkreisumrichter*.

Beim *Stromzwischenkreisumrichter* (Bild I-31) wird die Netzspannung über eine gesteuerte Gleichrichterbrücke in eine Gleichspannung mit variabler Höhe umgewandelt. Auf der Motorseite wird die Gleichspannung in 120°-Rechteckblöcke (mit der entsprechenden Frequenz) auf die Wicklungsstränge des Motors gegeben. Eine Induktivität im Gleichstromkreis bestimmt die Höhe des Gleichstroms. Die Motorspannung stellt sich annähernd sinusförmig mit überlagerten Kommutierungsspitzen ein. Die Oberschwingungen des Stroms weisen ihre höchsten Amplituden bei den niedrigen Ordnungszahlen auf. Bei Teilbelastung gehen die Oberschwingungen anteilig zurück, da sie stromabhängig sind. Um die Oberschwingungen klein zu halten, sollte ein zwölfpulsiger Umrichter eingesetzt werden. Stromzwischenkreisumrichter werden bei mittleren und größeren Leistungen eingesetzt, da sie Bremsenergie in das Netz zurückspeisen können. Im Gegensatz zum

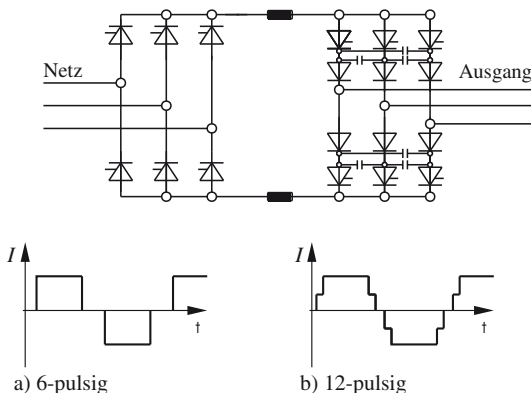


**Bild I-31**  
Stromzwischenkreisumrichter

U-Umrichter kann der I-Umrichter nicht mehrere Motore gleichzeitig versorgen. Der U-Umrichter nimmt Blindleistung aus dem Netz auf und gibt Oberwellen an das Netz ab.

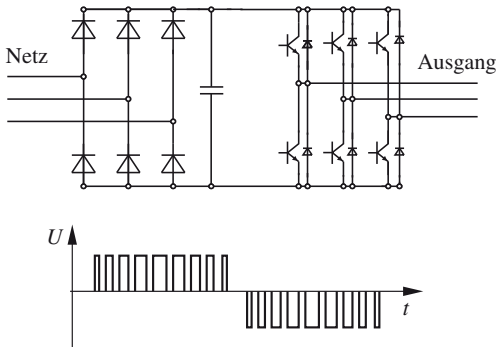


Bild I-32 Spannungswischenkreisumrichter

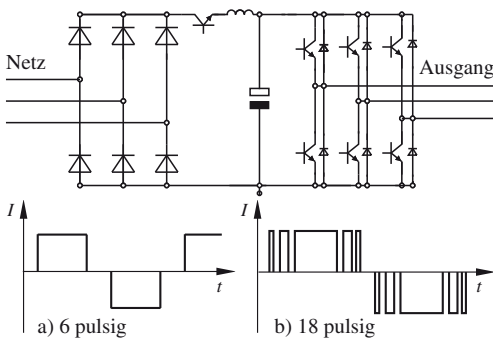


Bild I-32 a Spannungswischenkreisumrichter in PAM-(Chopper-)Schaltung

Beim *Spannungswischenkreisumrichter* (Bild I-32) wird über einen Gleichrichtersatz eine Gleichspannung konstanter Höhe aus dem Drehstromnetz erzeugt. Diese Gleichspannung wird mit elektronischen Schaltern (Transistoren, Thyristoren) in eine Wechselspannung mit veränderbarer Frequenz und Spannung umgeformt. Eine veränderbare Spannung wird erzeugt, indem die Pulsbreite der Ausgangsimpulse verändert wird (Pulsweitenmodulation, PWM). Bei dieser Steuerungsart werden Oberschwingungen niedriger Ordnungszahlen weitgehend unterdrückt (5, 7, 11). Die der Pulsfrequenz entsprechenden Oberschwingungen bleiben jedoch unabhängig von der Grundfrequenz in voller Amplitude wirksam. Im Strom bilden sich ebenfalls Oberschwingungen aus, die aus den vorhandenen Spannungsüberschwingungen und den induktiven Einflüssen (Wicklung) resultieren. Moderne Frequenzumrichter arbeiten mit Pulsfrequenzen im kHz-Bereich. Dadurch werden die Stromüberschwingungen stark verringert, da die Induktivitäten einen hohen Widerstand in diesem Frequenzbereich darstellen. Bei der PWM schalten

moderne MOS-FET's oder IGBT's Spannungsimpulse von 500 V in 200 ns (Änderungsgeschwindigkeit von 2500 V/μs) auf die Ausgänge des Frequenzumrichters. Wenn diese Potentialsprünge ungefiltert an die Ausgangsklemmen gegeben werden, wirken sie sich direkt auf die Motorzuleitung aus. Mit den Leitungsinduktivitäten und -kapazitäten entstehen Schwingkreise, die von den Rechteckimpulsen des Frequenzumrichters immer wieder angeregt werden und sich unkontrolliert aufschaukeln können. Eben solche Vorgänge können mit den Streuinduktivitäten und Wicklungskapazitäten des Motors auftreten. Die Folge dieser Schwingungen sind Störstrahlungen, die durch eine abgeschirmte Leitung gemildert werden können. Hierdurch entstehen aber weitere Kapazitäten, die wiederum Schwingkreise aufbauen. Durch die hohe Spannungsänderungsgeschwindigkeit können ferner Spannungsspitzen entstehen, die die Isolation des Motors beanspruchen und zerstören können. Durch kapazitive Ableitungen werden Messanordnungen beeinflusst. Filter am Ausgang des Frequenzumrichters können diese Vorgänge vermeiden oder mindern. Sie dürfen die Frequenzen unter 100 Hz jedoch nicht beeinflussen! Je höher die Schaltfrequenz, desto besser der Einfluss der Filter. Je kleiner die Schaltfrequenz, desto teurer die Filter. Optimale Schaltfrequenzen liegen bei 20 kHz. Für Frequenzumrichter ohne Filter kann ein 10 m langes Motorkabel schon als lange Leitung betrachtet werden. Die Spannung am Anfang der Leitung ist dann nicht mehr gleich der Spannung am Ende (in der 50 Hz-Technik liegt die Grenze bei 50 km).

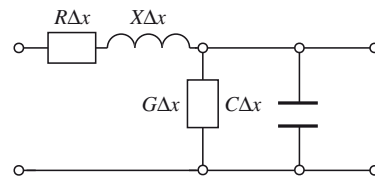


Bild I-33 Ersatzschaltbild Leitungsstück

Für einen Leitungsabschnitt gilt folgendes Ersatzschaltbild (Bild I-33). Für hohe Frequenzen kann  $R \rightarrow 0$  und  $G \rightarrow \infty$  gesetzt werden.

■ **Beispiel:** Mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v$  und dem Wellenwiderstand  $Z$  ergeben sich für ein Kabel NYY-I 4 × 2,5 mm<sup>2</sup> mit  $R = 14 \, \Omega/\text{km}$ ,  $L = 0,7 \, \text{H/km}$  und  $C = 100 \, \text{nF/km}$  folgende Werte:

Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$v = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad \frac{\frac{\text{Vs}}{\text{As}}}{\frac{\text{C}}{\text{V}}} \frac{\frac{\text{m}}{\text{s}}}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} \quad (I.109)$$

Wellenwiderstand

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \frac{\frac{\text{Vs}}{\text{As}}}{\frac{\text{C}}{\text{V}}} \frac{\frac{\text{Z}}{\Omega}}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} \quad (I.110)$$

$$\Rightarrow Z = 84 \, \Omega \text{ und } v = 120 \, \text{m}/\mu\text{s}$$



Ist die Leitung nicht mit dem Wellenwiderstand abgeschlossen, liegt eine Fehlanpassung vor, d.h., Teile des Signals werden am Leitungsende reflektiert. Für einen Umrichter mit  $R_i \ll Z$  und einem Motor mit  $R_i \gg Z$  ist die Verbindungsleitung beidseitig nicht angepasst. Der Reflexionsfaktor berechnet sich zu:

$$\text{Umrichterreflexionsgrad } r = \frac{R_i - Z}{R_i + Z} \cong -1 \quad (\text{I.111})$$

$$\text{Motorreflexionsgrad } r = \frac{R_i - Z}{R_i + Z} \cong 1 \quad (\text{I.112})$$

Am Motor wird die Spannung erhöht (Faktor 2), am Umrichter wird sie umgedreht.

Ein Spannungssprung wird nach einer Laufzeit  $t_l = l/v$  am Kabelende reflektiert.

$$U_{2,1} = \vec{U}_2 + \vec{U}_2 = 2 \cdot U_2 \quad (\text{I.113})$$

Am Kabelanfang wird die Welle erneut reflektiert und in der Polarität umgekehrt.

Für hohe Frequenzen wird die Motorinduktivität groß und die Motorkapazität klein. Daher wird die Spannungsflanke verkleinert und auf eine Sinuswelle mit einer Wellenlänge der 4fachen Kabellänge heruntergedämpft. Diese Sinusschwingung nimmt exponential ab.

*Frequenz der Sinusschwingung*

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{4l} = \frac{1}{4l \cdot \sqrt{L \cdot C}} \quad (\text{I.114})$$

Für eine Länge von 100 m folgt eine Frequenz von  $f = 300$  kHz. Durch den Frequenzumrichter wird neben der 50 Hz-Sinusschwingung eine Sinusschwingung von 300 kHz auf das Kabel gegeben. Diese hochfrequente Schwingung führt zu Störstrahlungen auf benachbarte Betriebsmittel.

Soll die Ausbildung einer hochfrequenten Sinusschwingung vernachlässigbar klein bleiben, muss die Anstiegszeit der Spannung über dem 10fachen der Signallaufzeit liegen, also unter 10 m Kabellänge (ohne Filter). Nach VDE 0530 T 1 Beiblatt 2 treten keine Motorschäden auf, wenn  $U < 1000$  V und  $du/dt < 500$  V/ $\mu$ s ist. Schnelle Halbleiterschalter reduzieren zwar die Schaltverluste im Umrichter, erhöhen aber die Verluste im Motor. Deshalb muss auch die Wärmeklasse der Motoren berücksichtigt werden.  $Y = 90^\circ$ ;  $A = 105^\circ$ ;  $E = 120^\circ$ ;  $B = 130^\circ$ ;  $F = 155^\circ$ ;  $H = 180^\circ$  (Grenztemperatur). Durch hohe oder sich schnell ändernde Spannung wird die Isolation einer schnelleren Alterung unterzogen! Beim Einsatz von Frequenzumrichtern zur Steuerung eines DAsM müssen einige Fakten beachtet werden:

Mit der Drehzahl ändert sich auch die Kühlwirkung des auf der Motorwelle mitlaufenden Lüfters. Bei kleinen Drehzahlen tritt dadurch eine schlechtere Kühlung des Motors ein, die nur zum Teil durch Abnahme der Eisenverluste ausgeglichen wird. Bei Drehzahlerhöhung über die Nenndrehzahl nehmen die Eisenverluste stärker zu als die Kühlwirkung des Lüfters.

Die Umrichterausgangsspannungen und -ströme sind mit Oberwellen behaftet, die im Motor Zusatzverluste verursachen.

Die Motorgeräusche können durch die Oberwellen höher werden. Der Maximaldrehzahl sind durch mechanische Vorgaben Grenzen gesetzt (Kugellager, kritische Drehzahl).

Die Vorteile gegenüber dem Gleichstrommotor sind: Verschleißfrei, hohe Schutzart, höhere Überlastbarkeit, schneller unsteuerbar.

Baugrößen zur Zeit bei U-Umrichter bis 900 kVA, bei I-Umrichtern bis 3,4 MVA.

### 2.1.3.6 Polumschaltung

Die Umschaltung von Spulen im Ständer erfordert getrennte Wicklungen, woraus sich eine geringere Ausnutzung des Wicklungsmaterials ergibt. Die Aufteilung der Wicklung in verschiedene Bereiche (Dahlander) ermöglicht ebenfalls die Veränderung der Drehzahl. Die Drehzahländerungsmöglichkeiten sind bei diesen Maschinen abhängig von der Polpaarzahl und können nur unter  $3000 \text{ min}^{-1}$  liegen. Da die Läuferpolpaarzahl entsprechend der des Ständers ausgeführt werden muss, eignen sich hauptsächlich Käfigläufermotore für die Polumschaltung. Eine Besonderheit der Dahlanderschaltung ist die Ausführung der Wicklungen als *Polamplitudenmodulationswicklung* (PAM-Wicklung). Diese Wicklungsform lässt eine höhere Ausnutzung des eingesetzten Materials zu.

### 2.1.4 Der Schleifringläufer

Beim Schleifringläufer sind die Läuferspulen gewickelt und über Schleifringe herausgeführt. Es ist somit möglich, die Läuferwicklung zu beschalten oder eine Fremdspannung an diese Wicklung anzuschließen. Ein großer Nachteil des Schleifringläufers im Verhältnis zum Käfigläufer ist der erheblich höhere Wartungsaufwand.

#### 2.1.4.1 Anlassverfahren

Die für den Käfigläufer eingesetzten Anlassverfahren können überwiegend auch für den Schleifringläufer eingesetzt werden. Durch die Möglichkeit der Beschaltung der Läuferspulen bietet sich beim Schleifringläufer als Anlassverfahren die Beschaltung mit Vorwiderständen an. Für das Motormoment gilt:

$$\text{Motormoment } M \approx P_\delta = 3 \cdot I_2' \cdot \frac{R_2'}{s} \quad (\text{I.115})$$

Ein gleiches Moment erhält man, wenn bei einer Veränderung von  $R_2'$  der Schlupf  $s$  gleichermaßen geändert wird. Hieraus ergibt sich:

$$\frac{R_2'}{s} = \frac{(R_2' + R_v')}{s^*} \quad (\text{I.116})$$

$$R_v = R_2' \left( \frac{s^*}{s} - 1 \right) \quad \text{für } s^* > s \quad (\text{I.117})$$



Durch einen zusätzlichen Läuferwiderstand kann der Anlaufstrom begrenzt und gleichzeitig das Anlaufmoment erhöht werden. Durch eine stufenweise Verringerung der Größe des Vorwiderstandes kann der Motor nun angelassen werden.

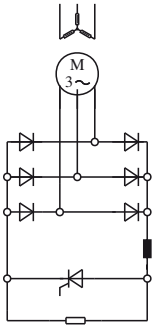


**Bild I-34**  
Widerstandsanlassen von  
Schleifringläufermotoren

Der Anlassvorgang erfolgt durch Widerstandskaskaden, die über Schütze abgeschaltet werden, oder durch einen Thyristorschalter (Bild I-34), der den Widerstand stufenlos zu- oder abschalten kann. Bei dieser Anlaufvariante werden zusätzliche Verluste im Vorwiderstand  $P_{R_v} = 3 \cdot I_2^2 \cdot R_v$  erzeugt, die abgeführt werden müssen.

Das maximale Anlaufmoment wird erreicht, wenn der Vorwiderstand folgenden Wert hat:

$$\text{Läufervorwiderstand } R_v = R_2 \cdot \left( \frac{1}{s_K} - 1 \right) \quad (\text{I.118})$$

Hierbei läuft der Motor mit Kippmoment an. Nachteile dieser Anlaufvariante sind, dass im Vorwiderstand eine erhebliche Verlustleistung erzeugt wird und die Schaltung recht aufwendig ist.

#### 2.1.4.2 Bremsverfahren

Zusätzlich zu den bekannten Bremsverfahren des Käfigläufermotors kann beim Schleifringläufer die Kennlinie beim Gleichstrombremsen durch Vorschaltwiderstände so verändert werden, dass der Motor mit Kippmoment abgebremst wird.

#### 2.1.4.3 Drehzahlsteuerung

Eine zusätzliche Möglichkeit, die Drehzahl und das Moment des Schleifringläufers zu ändern, bietet die Änderung der Läuferspannung (Untersynchrone Kaskade, USK). Hierbei werden die herausgeführten Läuferspulen an einen Gleichrichter, der eine Gleichspannung erzeugt, angeschlossen (Bild I-35).

Diese Gleichspannung ist über einen nachgeschalteten Wechselrichter und Transformator mit dem Netz verbunden. Die erzeugte Gleichspannung verhält sich zur Läuferspannung folgendermaßen:

Gleichspannung des Läuferkreises

$$U_{=} = \left( \frac{\sqrt{2} \cdot 3}{\pi} \right) \cdot U_L \quad (\text{I.119})$$

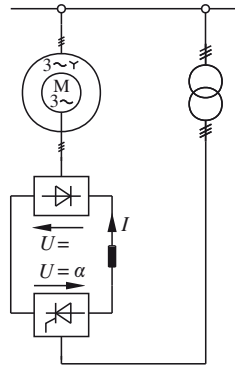


**Bild I-35**  
Untersynchrone  
Kaskade bei Schleifring-  
läufermotoren

Verändert sich der Schlupf, so verändert sich auch die gleichgerichtete Läuferspannung.

$$U_{=} = s \cdot U_{=} \quad (\text{I.120})$$

Diese Gleichspannung muss betragsgleich mit der am Wechselrichter erzeugten Spannung sein.

$$\text{Wechselrichterspannung } U_{=} = -U_{=} \quad (\text{I.121})$$

Die am Wechselrichter erzeugte Spannung muss nun wiederum mit der Netzspannung gleich sein.

$$U_{=} = U_T \cdot \cos \alpha \quad (\text{I.122})$$

$\alpha$  Zündwinkel des Wechselrichters

$$\text{Netzspannung } U_T = U_T \cdot \left[ \frac{\pi}{(3 \cdot \sqrt{2})} \right] \quad (\text{I.123})$$

Da die Läuferspannung am Gleichrichter nicht umgekehrt werden kann, ist mit dieser Schaltung nur unterschynchroner Betrieb möglich ( $0 \leq s \leq 0,5$ ). Hieraus ergibt sich, dass der Motor mit dieser Beschaltung nicht ohne Hilfsmittel anlaufen kann. Der Motor muss bis zur halben Drehzahl mit einem Anlasswiderstand hochgefahren werden. Aus der Bedingung für die Spannungen im Gleichstromkreis ergibt sich für den Zündwinkel  $\alpha$  ein Wert zwischen  $90^\circ \leq \alpha \leq 150^\circ$ .

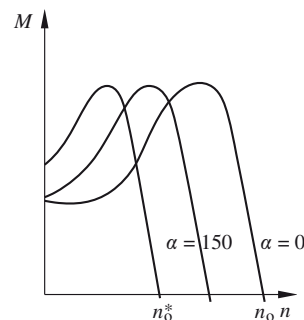


**Bild I-36** Drehzahl-Drehmomenten Kennlinie  
für verschiedene Ansteuerwinkel der  
Untersynchrone Kaskade  
bei Schleifringläufermotoren

Durch diese Steuerung wird die Drehzahl-Drehmomentenkennlinie in ihrer Form erhalten (Bild I-36); es stellt sich abhängig vom Ansteuerwinkel eine neue Leerlaufdrehzahl  $n_0^*$  ein.

$$n_0^* = n_0 \cdot \left[ 1 + \left( \frac{U_{=f}}{U_{=}} \cdot \cos \alpha \right) \right] \quad (\text{I.124})$$

Ein Teil der in dem Läufer übertragenen Wirkleistung kann wieder an das Netz abgegeben werden. Da diese Art der Drehzahlsteuerung sehr aufwendig ist, wird sie nur bei größeren Maschinen (20 kW ... 20 MW) eingesetzt.

## 2.2 Linearmotor

In der Antriebstechnik wird normalerweise eine geradlinige Bewegung aus einer drehenden Bewegung eines Motors abgeleitet. Der *Linearmotor* formt die elektrische Energie direkt in eine geradlinige Bewegung um, ein Getriebe kann entfallen.

### 2.2.1 Aufbau des Linearmotors

Beim Linearmotor wird der Ständer als flaches, doppeltes oder einseitiges Blechpaket gebaut. Zwischen, oberhalb oder unterhalb des Ständerblechpaketes liegt der gestreckte Läufer (Läuferschiene), die Reaktionsschiene.

a) Kurzständer, Reaktionsschiene auf dem ganzen Weg



b) Kurzläufer, Ständer auf dem ganzen Weg

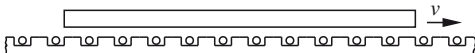


**Bild I-37** Linearmotor als

- a) Kurzständer
- b) Kurzläufermotor

Durch die gestreckte Anordnung (Bild I-37) wird das Drehfeld in ein *Wanderfeld* (Schubfeld) umgeformt. Neben dem asynchronen Linearmotor kann auch ein Synchron- oder Gleichstromlinearmotor aufgebaut werden. Beide haben in der technischen Anwendung jedoch keine Bedeutung. Beim asynchronen Linearmotor wird im Ständer das Wanderfeld aufgebaut, indem die Spulen durch ein Drehstromnetz gespeist werden. Das Wanderfeld hat eine Synchrongeschwindigkeit  $v_s$ . Es wandert während einer Periode um die Strecke eines Polpaares  $2 \cdot \tau_p$  (doppelte Polteilung).

*Synchrongeschwindigkeit*

$$v_s = 2 \cdot \tau_p \cdot f$$

$$\frac{v_s}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} \left| \frac{\tau_p}{\text{m}} \right| \frac{f}{\frac{1}{\text{s}}} \quad (\text{I.124 a})$$

$\tau_p$  Polteilung;  $f$  Netzfrequenz

Die Polzahl hat im Gegensatz zum Asynchronmotor keinen Einfluss auf die Synchrongeschwindigkeit. Das Wanderfeld induziert in den Läufer (Reaktionschiene) eine Spannung, die einen Strom fließen lässt. Strom und Wanderfeld bilden eine magnetische Kraft, die zu einer geradlinigen Bewegung führt. Wie beim Asynchronmotor tritt beim asynchronen Linearmotor ein Schlupf  $s$  zwischen Wanderfeld und Bewegungsgeschwindigkeit  $v$  auf.

*Bewegungsgeschwindigkeit*

$$v = (1 - s) \cdot 2 \cdot \tau_p \cdot f \quad (\text{I.124 b})$$

*Vorteile eines Linearmotors:* Kein Getriebe erforderlich, daher weniger Verluste; Kühlung sehr gut, da der Läufer nur kurz erwärmt wird; Läufer nicht mehr am Gerät; Bremsen wie beim Asynchronmotor.

*Nachteile:* Luftspalt ist größer als beim Asynchronmotor, dadurch größere Magnetisierungsströme, größere Verluste; Läufer muss den gesamten Weg abdecken, dadurch hohe Kosten; die Speisefrequenz muss variabel sein (Anlauf, Abbremsen). Eine Realisation hat der Linearmotor beim Transrapid gefunden. Hier wird jedoch der Ständer mit dem Läufer vertauscht. In die Schiene sind die Drehstromspulen eingebaut, und im Fahrzeug befindet sich die Läuferschiene. Dieser Aufbau hat den Vorteil, dass dem Fahrzeug die Antriebsenergie nicht über Schleifringe zugeführt werden muss.

## 2.3 Drehstromsynchronmaschinen

Im Unterschied zur Asynchronmaschine (DAsM) wird bei der Synchronmaschine (DSM) das Polrad (Läufer) mit Gleichstrom erregt. Der Ständer besitzt wie bei der DAsM eine Drehstromwicklung. Da der Strom im Polrad nicht über den Luftspalt induziert, sondern von einer Gleichspannung erzeugt wird, ist die Läuferfrequenz  $f_2 = 0$ . Die Frequenz des Ständers wird aus der Drehzahl und den Polpaarzahlen bestimmt, wenn es sich um einen Generator handelt, sonst bestimmen die Frequenz und die Polpaare die Drehzahl. Ein weiterer Vorteil der DSM ist, dass der zur Erregung des Läufers benötigte Strom nicht aus dem Netz als Blindleistung bezogen werden muss, sondern aus einem Gleichstromnetz stammt. Deshalb kann der Luftspalt der DSM etwas vergrößert werden. Die Größe des Luftspalts der DSM liegt zwischen 0,5 cm und 11,5 cm; im Vergleich dazu bei DAsM  $< 0,3$  cm. Beim Einsatz der DSM als Generator wird die Polpaarzahl von der Antriebsmaschine bestimmt. Als Antriebsmaschinen dienen Dieselmotoren mit  $n = 1000 \dots 1800 \text{ min}^{-1}$ , Wasserturbinen mit  $n = 100 \dots 400 \text{ min}^{-1}$  und Dampf- oder Gasturbinen mit  $n = 3000 \text{ min}^{-1}$ . Die Erregung der DSM kann über eine direkt auf der Welle angebrachte Erregermaschine, meist eine *Außenpolmaschine*, oder über Umrichter direkt aus dem Netz erfolgen. Die DSM kann als *Außen-* oder *Innenpolmaschine* gebaut werden. Bei der Außenpolmaschine liegen die Erre-

gerwicklungen im Ständer, und der Läufer nimmt die Drehstromwicklung auf. Bei der Innenpolmaschine nimmt der Ständer die Drehstromwicklung und der Läufer die Erregerwicklung auf. Ferner wird die DSM als *Schenkelpol* (geringe Drehzahl) oder als *Turboläufer* (hohe Drehzahl) gebaut.

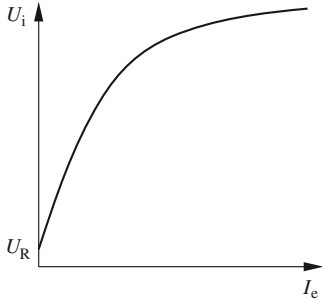


**Bild I-38** Leerlaufkennlinie  $U_i - f(I)$  der Synchronmaschine

Da die Erregung der DSM aus einem Gleichstromnetz entnommen wird, hängt die Leerlaufspannung nur vom fließenden Erregerstrom ab. Die Abhängigkeit ist im Bild I-38 dargestellt.

### 2.3.1 Wirkungsweise der Synchronmaschine

Bei der DSM besteht der Ersatzstromkreis aus dem im Ständer enthaltenen Widerstand, der Streuinduktivität des Ständers und der Spannung  $U_i$  (Bild I-39).

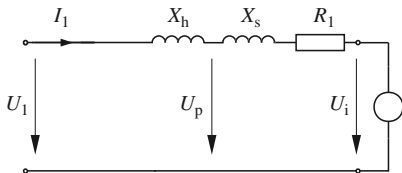


**Bild I-39** Ersatzschaltbild der Drehstromsynchronmaschine

Die Spannung  $U_i$  setzt sich aus dem stromabhängigen Spannungsfall an der Hauptinduktivität und der durch das Polrad induzierten Spannung  $U_p$  zusammen. Vernachlässigt man die Abhängigkeit der Hauptinduktivität von der Sättigung und setzt den Widerstand zu Null, so vereinfacht sich der Ersatzstromkreis der DSM wie im Bild I-40 dargestellt.

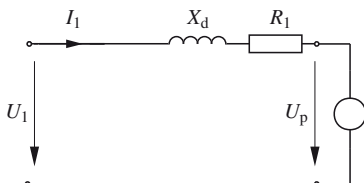


**Bild I-40** Vereinfachtes Ersatzschaltbild der Drehstromsynchronmaschine

Die Polradspannung  $U_p$  berechnet sich zu:

*Polradspannung*

$$U_p = B \cdot l \cdot v \cdot N \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} N & v & l & B & U_p \\ - & \frac{\text{m}}{\text{s}} & \text{m} & \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} & \text{V} \end{array} \quad (\text{I.125})$$

Durch entsprechende Ausführung des Polrades erzielt man einen sinusförmigen Verlauf der Polradspannung. Beim DS-Motor hängt die Drehzahl wie bei der DAsM von der Polpaarzahl des Polrades ab ( $n = fp$ ). Beim DS-Generator hängt die erzeugte Frequenz von der Polpaarzahl und der Drehzahl des Polrades ab ( $f = n \cdot p$ ). Wird die DSM an ein Drehstromnetz angeschlossen, fließt im Ständer ein Drehstrom, der zusammen mit dem induzierten Strom vom Polrad ein resultierendes Drehfeld erzeugt. Dieses Drehfeld rotiert mit synchroner Drehzahl parallel zum Polrad,

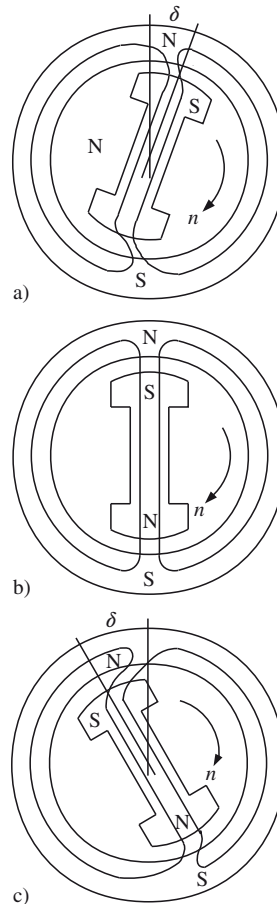


**Bild I-41** Stellung des Polrades der Synchronmaschine bei

- a) Generatorbetrieb
- b) Leerlauf
- c) Motorbetrieb

wenn die DSM nicht belastet wird. Im motorischen Zustand verschiebt sich das Polrad um einen nacheilenden Winkel  $\delta$ , dem *Polradwinkel*, entsprechend der Last. Hierdurch wird das Polrad vom resultierenden Magnetfeld wie durch ein Gummiband bei synchroner Drehzahl hinterhergezogen.

Im generatorischen Zustand verschiebt sich das Polrad um einen voreilenden Winkel und zieht somit das resultierende Drehfeld hinter sich her (Bild I-41). Wird die DSM als Generator eingesetzt, muss die an den Klemmen abgegebene Spannung immer einen konstanten Wert haben. Der Erregerstrom muss ständig der Belastung nachgeführt werden. Das kann eine erhebliche Erhöhung des Erregerstroms gegenüber dem Leerlauf zur Folge haben. Der Erregerstrom kann jedoch nicht immer schnell genug nachgeführt werden. Deshalb können bei plötzlichen Laständerungen Spannungsschwankungen auftreten.

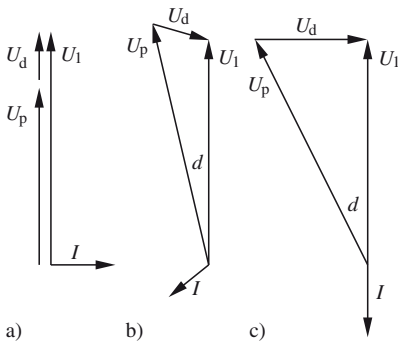


**Bild I-42** Belastung eines verlustlosen Synchrongenerators

- a) im Leerlauf untererregt
- b) bei Belastung kapazitiv
- c) bei rein ohmscher Belastung

Bei steigender Belastung wird die Klemmenspannung sinken, bei sinkender Belastung wird die Klemmenspannung ansteigen. Im Bild I-42 sind verschiedene Betriebszustände einer DSM dargestellt. Aus Bild I-42 erkennt man, dass die Spannung  $U_1$  mit der Spannung  $U_p$  in Phase liegt, wenn ein reiner Blindstrom fließt. Wird ein Wirkstrom gefordert, verschieben sich die Spannungen zueinander; im motorischen Bereich wandert die Spannung  $U_p$  in Richtung der negativen, imaginären Achse (der Winkel  $\delta$  wird negativ); im generatorischen Bereich wandert die Spannung  $U_p$  in Richtung der positiven, imaginären Achse (der Winkel  $\delta$  wird positiv). Da die Spannung  $U_p$  über den Erregerstrom eingestellt wird, kann durch Veränderung des Stromes  $I_E$  die Spannung  $U_p$  variiert werden. Durch Übererregen ( $U_p > U_1$ ) wird der Strom  $I_1$  so gelegt, dass sich die Maschine wie eine Kapazität verhält. Durch Untererregen ( $U_p < U_1$ ) verhält sich die Maschine wie eine Induktivität. Man erkennt, dass der Strom  $I_1$  annähernd in Phase

oder in Gegenphase mit der Netzspannung  $U_1$  ist. Neben der Wirkleistung wird auch Blindleistung abgegeben oder verbraucht. Dieses ist jedoch nicht beliebig regulierbar.

#### Regeln für die Synchronmaschine:

Blindleistung kann nur über die Erregung gesteuert werden. Wirkleistung kann nur durch Änderung der mechanisch zu- oder abgeführten Leistung an der Welle eingestellt werden. Diese beiden Kriterien können nicht nur einzeln, sondern auch zusammen zum Steuern der Maschine eingesetzt werden.

Hieraus ergeben sich folgende Betriebszustände der Maschine:

In Netzen sind meist induktive Verbraucher vorhanden, somit kann über die DSM ein Ausgleich der Blindleistung erzeugt werden, indem man die Maschine im übererregten Zustand betreibt. Wird im über- oder untererregten Zustand keine Wirkleistung abgenommen, betreibt man den sogenannten *Phasenschieberbetrieb* ( $\cos \varphi = 0$ ). Synchronmaschinen sind generell im Stern geschaltet, da die dritte Oberwelle bei dieser Schaltung nicht auftritt. Bei Dreieckschaltung würde die dritte Oberwelle einen Kreisstrom in den Wicklungen erzeugen, der erhebliche Verluste zur Folge hätte.

### 2.3.2 Spannungsgleichung der Synchronmaschine

Nach vollständigem Ersatzschaltbild lautet die Spannungsgleichung für den Ständer:

*Ständerspannung*

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \cdot (R_1 + jX_{S1}) + [(I_1 + \underline{I}_e) \cdot jX_H] \quad (\text{I.126})$$

*Polradspannung*

$$\underline{U}_p = \underline{I}_e \cdot jX_H \quad (\text{I.127})$$

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \cdot (R_1 + j[X_{S1} + X_H]) + \underline{U}_p \quad (\text{I.128})$$

Die Spannung  $U_p$  wird als Polradspannung bezeichnet. Sie ist diejenige Spannung, die vom Erregerfeld in die Drehstromspulen induziert wird. Fasst man die Induktivitäten der Gleichung (I.129) zusammen und vernachlässigt den Widerstand  $R_1$ , ergibt sich die vereinfachte Spannungsgleichung der DSM

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \cdot jX_d + \underline{U}_p \quad (\text{I.129})$$

### 2.3.3 Anlauf und Synchronisation

Im Leerlaufbetrieb ist der Ständerstrom  $I_1 = 0$ , die Klemmenspannung gleich der Polradspannung  $U_1 = U_p$ . Bei offenen Klemmen ist die Klemmenspannung abhängig von der Erregung. Wird die Synchronmaschine an ein Netz konstanter Spannung angeschlossen und die Polradspannung gleich der Klemmenspannung eingestellt, so ist der Ständerstrom gleich Null. Eine Erhöhung der Polradspannung hat zur Folge, dass das Spannungsgleichgewicht nicht

mehr vorhanden ist. Es muss ein Ständerstrom fließen, der an dem induktiven Widerstand der Maschine einen Spannungsfall  $U_{xd}$  erzeugt. Dieser Spannungsfall stellt das Spannungsgleichgewicht in Phasenlage und Größe wieder her.

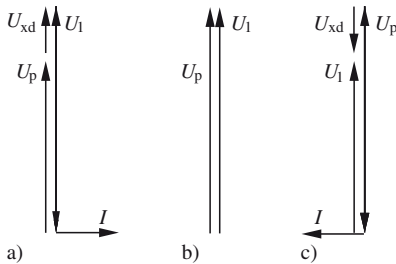


**Bild I-43** Synchronmaschine im Phasenschieberbetrieb

- a) untererregt, induktiv
- b) Leerlauf
- c) übererregt kapazitiv

Man nennt diesen Betriebszustand *Phasenschieberbetrieb*, da die Maschine bei  $U_p > U_1$  einen kapazitiven Strom aus dem Netz aufnimmt (kompensiert) und für  $U_p < U_1$  einen induktiven Strom aufnimmt (Bild I-43). Die DSM wird als Phasenschieber in Verbrauchernähe eingesetzt, um das Übertragungssystem von der Bereitstellung von Blindleistung zu entlasten. Setzt man die DSM als Motor ein, erfolgt kein Anlauf ohne Hilfseinrichtungen, da das Ständerfeld den Läufer so schnell überstreicht, dass kein resultierendes Moment gebildet werden kann. Bei größeren Maschinen erfolgt der Anlauf mit Anwurfmotoren. Hat der Anwurfmotor die DSM soweit beschleunigt, dass die synchrone Drehzahl erreicht ist, kann die Maschine unter folgenden Bedingungen an das Netz geschaltet werden: gleiche Spannungen; gleiche Phasenlage; gleiche Phasenfolge; gleiche Frequenz. Eine weitere Hilfseinrichtung ist eine zusätzliche Käfigwicklung im Läufer. Wird die Netzspannung angelegt, läuft die Maschine asynchron hoch und geht nach Erreichen der Leerlaufdrehzahl in den Synchronismus über. Bei diesem Anlaufverfahren ist zu beachten, dass die Erregerwicklungen über einen Widerstand kurzgeschlossen werden müssen, da sonst eine unzulässig hohe Spannung in den Spulen durch das Drehfeld induziert wird. Nach Erreichen der synchronen Drehzahl verhält sich der unbelastete Motor wie ein Phasenschieber. Wird der Motor belastet, muss über den Luftspalt eine Wirkleistung übertragen werden; das Netz muss Wirkleistung liefern. Die Belastung bremst die Welle ab, es entsteht zwischen Läuferfeld und Ständerfeld ein Winkel. Dieser Winkel erzeugt eine Kraft zwischen den beiden Feldern; mit dem Läuferadius wird ein Moment auf die Welle  $M = F \cdot r$  übertragen. Ein Moment bedeutet, dass Wirkleistung übertragen wird. Da die

Synchronmaschine „keine“ Wirkleistungsverbraucher besitzt, wird die gesamte aus dem Netz aufgenommene Wirkleistung an die Welle weitergegeben.

### 3 Einphasen-Asynchronmotoren

Einphasen-Asynchronmotoren (Wechselstrommotoren) werden wegen des einfachen Einphasenanschlusses dort eingesetzt, wo preiswerte und robuste Motoren benötigt werden. Der Einphasenmotor hat einen ähnlichen Aufbau wie ein Drehstrommotor. Der Läufer ist immer als Kurzschlussläufer ausgebildet. Man unterscheidet den *einsträngigen Motor* und den *zweisträngigen Motor*.

#### 3.1 Einsträngiger Motor

Beim einsträngigen Motor besteht die Ständerwicklung im einfachsten Fall nur aus einem Wicklungsstrang, der Arbeitswicklung. Diese Wicklung ist auf die Klemmen  $U_1$  und  $U_2$  herausgeführt. Sie erzeugt beim Anlegen einer Wechselspannung ein Wechselfeld; der Motor kann nicht anlaufen. Soll der Motor zum Drehen gebracht werden, muss er in eine beliebige Richtung angeworfen werden (Anwurfmotor). Nach diesem Anwurfvorgang bleibt der Motor im Betrieb. Der einsträngige Motor hat sehr schlechte Betriebswerte. Seine abgegebene Leistung beträgt nur etwa 50% bis 60% der eines gleich großen Drehstrommotors, das Kippmoment liegt bei 40% eines Drehstrommotors und der Leistungsfaktor ist sehr gering. Aus diesen Gründen wird diese Motorform nur sehr selten eingesetzt.

#### 3.2 Zweisträngiger Motor

Beim zweisträngigen Motor wird zusätzlich zur Arbeitswicklung eine um  $90^\circ$  elektrisch versetzte Hilfswicklung angeordnet. Durch diese Hilfswicklung (Klemme  $Z_1$  und  $Z_2$ ) sollte ein Strom fließen, der zum Strom durch die Arbeitswicklung eine Phasenverschiebung von  $90^\circ$  hat. Dadurch erreicht man, dass beim Anlegen der Spannungen im Motor ein magnetisches Feld entsteht, das sich ähnlich dem Drehfeld um den Ständer bewegt. Durch die Hilfswicklung kann der Motor selbständig anlaufen; die Betriebseigenschaften verbessern sich. Am häufigsten wird der zweisträngige Motor als *Kondensatormotor* oder als *Spaltpolmotor* ausgeführt.

#### 3.3 Kondensatormotor

Wird ein Kondensator vor die Hilfswicklung geschaltet, ist der Strom in der Hilfswicklung voreilend zum Strom in der Arbeitswicklung. Soll bei dieser Anordnung ein Kreisdrehfeld erzeugt werden, müsste die Spannung der Hilfswicklung  $U_H$  gegenüber der Spannung der Arbeitswicklung  $U_A$  um genau  $90^\circ$  voreilend sein. Die Ströme müssten zu ihren Spannungen die gleiche Phasenlage haben, und die Durchflutung der Wicklungen müsste gleich sein. Diese Bedingungen

lassen sich nicht im gesamten Betriebsbereich des Motors verwirklichen, da durch den Schlupf sowohl die Widerstände und Ströme als auch der Phasenwinkel in den beiden Zweigen verändert werden. Man wählt deshalb den Nennbetriebspunkt für die Symmetriebedingung. Als Richtwert für die in den Hilfsstrang einzuschaltende Betriebskapazität  $C_B$  gilt:  $C_B \approx 25 \mu\text{F}$  bis  $35 \mu\text{F}$  je kW Motorleistung an 230 V.

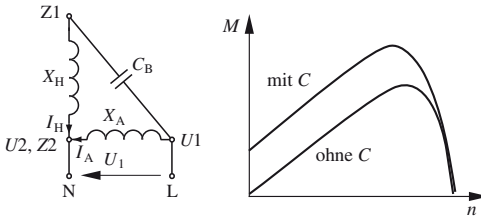


**Bild I-44** Schaltbild und Drehzahl-, Drehmomentverlauf eines Kondensatormotors mit Betriebskondensator

Im Bild I-44 ist die Schaltung eines Kondensatormotors mit Betriebskondensator dargestellt. Bei der Auswahl der Kondensatoren sind die Vorschriften nach DIN 48501 und VDE 0560 zu beachten, da die Spannung am Kondensator stets größer ist als die Speisenspannung des Netzes. In der Praxis kommen Kondensatorspannungen von bis zu 550 V vor, obwohl die Netzspannung nur 230 V beträgt. Kondensatormotoren laufen selbstständig an und weisen verbesserte Betriebseigenschaften gegenüber dem Anwurfmotor auf. Allerdings ist im Vergleich zum Drehstrommotor das Anlauf- oder Kippmoment noch sehr gering. Eine Erhöhung des Anlaufmomentes kann durch eine Reihenschaltung eines weiteren Kondensators (Anlaufkondensator) zum Betriebskondensator erreicht werden. Dieser Kondensator verschiebt den Symmetriepunkt zum Anlaufpunkt. Der Nachteil dieser Beschaltung ist jedoch, dass durch die hohe Kapazität in Verbindung mit der Spule der Blindwiderstand herabgesetzt wird und damit ein höherer Strom erzeugt wird, der den Motor zu stark erwärmt. Aus diesem Grund wird der Anlaufkondensator über eine geeignete Einrichtung beim Erreichen einer vorgegebenen Drehzahl abgeschaltet.

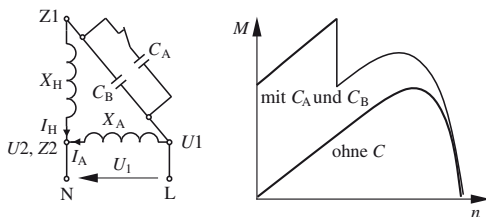


**Bild I-45** Schaltbild und Drehzahl-, Drehmomentverlauf eines Kondensatormotors mit Betriebs- und Anlaufkondensator

Der Anlaufkondensator sollte die dreifache Kapazität des Betriebskondensators haben. Im Bild I-45 ist die Schaltung eines Kondensatormotors mit Anlauf- und Betriebskondensator dargestellt.

### 3.4 Spaltpolmotor

Der Spaltpolmotor ist dem Prinzip nach ein Einphasenmotor. Der Läufer hat – wie ein normaler Asynchronmotor – einen Kurzschlusskäfig. Der Ständer ist durch ausgeprägte Pole mit konzentrischen Wicklungen und durch einen Kupfer- oder Aluminiumring, der teilweise vom Hauptfluss durchsetzt wird, gekennzeichnet (Bild I-46).

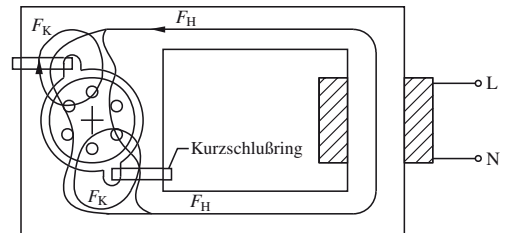


**Bild I-46** Prinzipdarstellung des Spaltpolmotors mit Kurzschlussring

Dieser Ring dient als Hilfsphase. In ihn wird ein Strom induziert, der ein Magnetfeld aufbaut, das dem Hauptfeld entgegengesetzt ist. Durch die Phasenverschiebung zwischen Hauptfluss und Ringfluss entsteht ein sich um den Ständer bewegendes Feld. Dieses Feld ermöglicht ein selbstständiges Anlaufen des Spaltpolmotors. Eingesetzt wird der Spaltpolmotor wegen seines geringen Anzugsmomentes für Kleinantriebe.

### 4 Drehstrommotor im Einphasenbetrieb

Der einphasige Betrieb eines Drehstrommotors kann durch eine Störung, aber auch gewollt, herbeigeführt werden. Ohne zusätzliche Beschaltung verhält sich ein Drehstrommotor im Einphasenbetrieb wie ein Einphasen-Asynchronmotor. Er läuft nicht selbstständig an, das Motormoment wird kleiner, die aufgenommene Leistung wird bei gleicher Belastung höher als im dreiphasigen Betrieb. Somit steigen die Verluste im Motor, und er erwärmt sich. Soll ein Drehstrommotor am Einphasennetz betrieben werden, muss, wie beim Einphasen-Asynchronmotor, eine Beschaltung mit einem Kondensator erfolgen. Diese Schaltung wird *Steinmetzschaltung* genannt.

Bei der Steinmetzschaltung wird ein Kondensator entsprechend Bild I-47 parallel zu einer Drehstromwicklung geschaltet. Dadurch erzielt man einen selbstständigen Anlauf des Motors mit ungefähr 25% bis 35% des Nennanlaufmomentes. Bei folgender Auslegung der Kapazität kann der Motor mit etwa 75% bis 80% seiner Nennleistung betrieben werden.



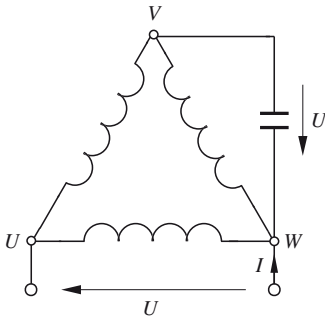


**Bild I-47** Schaltung eines Asynchronmotors im Einphasenbetrieb (Steinmetzschaltung)

**Tabelle I-6** Kapazität in Abhängigkeit von der Nennspannung

| $C_B$ (μF/kW) | $U_N$ (V) |
|---------------|-----------|
| 220           | 127       |
| 70            | 230       |
| 25            | 380       |

Ein höheres Anlaufmoment erzielt man durch einen Anlaufkondensator, der die zweifache Kapazität des Betriebskondensators aufweist. Dieser Kondensator sollte nach erfolgreichem Anlauf abgeschaltet werden.

## 5 Sonderbauformen

Zu den Sonderbauformen von Drehstrommotoren gehören der *Schrittmotor* und der *Servomotor*.

### 5.1 Schrittmotor

Der Schrittmotor entspricht in seinem Aufbau und seiner Wirkungsweise dem Synchronmotor. Mit dem Schrittmotor kann je nach Bauform ein elektrischer Impuls in eine Drehbewegung mit definiertem Winkel umgeformt werden.

Der Schrittmotor ist aus einem Läufer, bestehend aus Permanentmagneten, und einem Ständer mit mehreren, voneinander unabhängigen Spulen, aufgebaut. Im Bild I-48 ist ein Schrittmotor in unipolarer Ausführung dargestellt. Werden die Spulen A1 und B1 erregt, nimmt der Läufer die Stellung „I“ ein. Wird anstelle der Spule A1 die Spule A2 erregt, dreht sich der Läufer in die Position „II“. Der Läufer hat seine Position um den Winkel  $\alpha$  (Schrittwinkel) verändert. Wird anstelle von B1 die Spule B2 erregt, dreht sich der Läufer wiederum um den Winkel  $\alpha$  in die Stellung „III“. Wird als nächster Schaltschritt die Spule A1 wieder erregt, dreht sich der Läufer in die Position „IV“. Der nächste Schritt, Erregung A1 und B1, bringt den Läufer wieder in die Ausgangsposition zurück. Der Schrittmotor hat nach vier Schritten seine

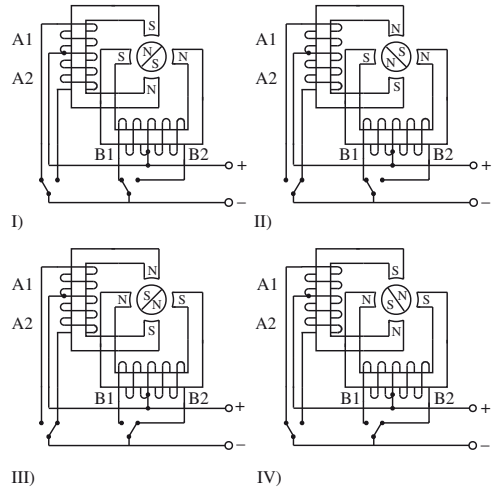


**Bild I-48** Schrittmotor

Ausgangsposition erreicht. Dieses Beispiel zeigt, dass ein Schrittmotor mit zwei Phasen im Ständer und einem Polpaar im Läufer pro Schritt einen Winkel von  $90^\circ$  zurücklegen kann. Der Schrittwinkel  $\alpha$  hängt also von der Polpaarzahl und der Phasenzahl des Motors ab.

$$\text{Schrittwinkel } \alpha = \frac{360^\circ}{2 \cdot m \cdot p} \quad (\text{I.130})$$

$p$  Polpaarzahl des Läufers;  $m$  Phasenzahl des Ständers

Neben dem *Vollschrittbetrieb* (bei einem Schrittmotor mit  $90^\circ$  Schrittwinkel sind vier Schritte für eine Umdrehung notwendig) kann der *Halbschrittbetrieb* eingesetzt werden. Beim Halbschrittbetrieb wird nach jedem zweiten Schritt eine Spule abgeschaltet. Das führt dazu, dass sich der Rotor in eine Zwischenlage (einen halben Schritt) bewegt. Im Halbschrittbetrieb können anstatt der vier Schritte acht Schritte ausgeführt werden. Eine weitere Verfeinerung stellt der *Mini- oder Mikroschrittbetrieb* dar. Hierbei wird der Strom in den einzelnen Phasen schrittweise vermindert oder erhöht. Dadurch kann ein Vollschritt in kleine Einzelschritte unterteilt werden. Die genaue Steuerung dieser Schritte benötigt eine umfangreiche Steuerlogik und ist deshalb sehr teuer. Machbar ist heute eine Auflösung eines Vollschritts in bis zu 250 Einzelschritte.

### 5.2 Servomotor

Der Maschinenbau fordert in zunehmendem Maße Motoren, die kurzzeitig die Drehzahl verändern können. Hierzu eignen sich besonders die Servomotoren. Mit ihnen lassen sich Winkel, Wege und Lagen hochdynamisch und beschleunigungsoptimal einstellen. Der Servomotor kann als *Scheibenläufer-* oder *Stabankermotor* gefertigt werden. Mit Ausnahme des Drehstrom-Asynchronmotors sind Servomotoren fast ausschließlich mit Permanentmagneten bestückt.



Das *Impuls-* oder *Spitzendrehmoment*  $M_{\text{Imp}}$  ist das maximal zulässige Drehmoment, bei dem weder mechanische noch elektrische Grenzwerte überschritten werden. Es kann bis zum zehnfachen Wert des Nennmomentes betragen. Der *Kurzzeit-* oder *Impulsstrom*  $I_{\text{Imp}}$  ist der Strom, der das Impulsdrehmoment erzeugt. Bei Drehstrommotoren ist die Strombegrenzung auf den Scheitelwert dieses Stroms einzustellen. Der Regelungsfaktor  $k_N$  gibt an, wie sich die Motordrehzahl bei konstanter Klemmenspannung ändert, wenn an der Welle eine zusätzliche Belastung auftritt.

*Regelungsfaktor*

$$k_N = \frac{\Delta n}{\Delta M} \quad \frac{n}{\text{min}^{-1}} \quad \frac{M}{\text{Nm}} \quad \frac{k_N}{\frac{1}{\text{min Nm}}} \quad (\text{I.131})$$

Je kleiner der Regelungsfaktor  $k_N$  ist, desto weniger Einfluss haben Momentenänderungen auf die Drehzahl.

### 5.2.1 Scheibenläufermotor

Der Scheibenläufermotor ist nach Bild I-49 aufgebaut. Das Magnetsystem besteht aus axial angeordneten Dauermagneten, die Ankerscheibe aus Leiterbahnen, die auf die Scheibe aufgeklebt oder durch fotochemische Ätzverfahren aufgebracht werden.

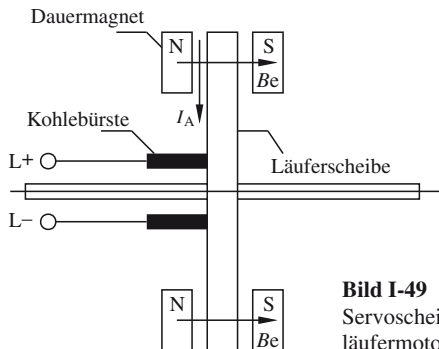


**Bild I-49**  
Servoscheibenläufermotor

Die Stromzuführung erfolgt über axial angeordnete Kohlebürsten. Im Gegensatz zum herkömmlichen Motor sind die Richtungen von Ankerstrom und Ständerfluss vertauscht, das Funktionsprinzip ist aber erhalten geblieben. Die magnetische Kraft entsteht durch Zusammenwirken des Ständerflusses und des Ankerstroms. Durch die relativ große Scheibenoberfläche kann die erzeugte Verlustwärme sehr gut abgeführt werden. Scheibenläufermotoren sind daher gut geeignet für Anwendungen, die kurze Baulängen, hohe Beschleunigungen, große Wellendurchmesser und geringe Induktivität fordern.

### 5.2.2 Stabankermotoren

Stabankermotoren (Bild I-50) gleichen in ihrer Bauweise den herkömmlichen Gleichstrommotoren. Die Erregung wird wie bei den Scheibenläufermotoren durch Dauermagnete erzeugt.

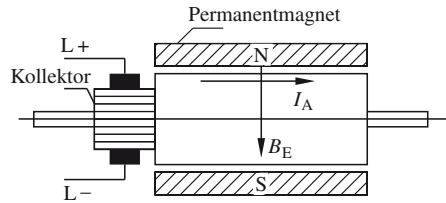


**Bild I-50** Servo-Stabankermotor

Durch geeignete Formgebung des Ankers und der Kommutatorstege kann der Stabankermotor bis zu Drehzahlen von  $0,2 \text{ min}^{-1}$  eingesetzt werden. Kleine Ankerdurchmesser ergeben kleine Massenträgheitsmomente und somit kleine mechanische Zeitkonstanten. Nachteil des Stabankermotors ist, dass das Spitzendrehmoment im Bereich hoher Drehzahlen zu reduzieren ist, da die Kommutierungsgrenze leicht erreicht wird (Strom muss gesenkt werden  $\Rightarrow U_i = \Delta I / \Delta t$ ). Ferner treten bei diesem Motortyp Bürsten- und Kommutatorverschleiß auf (wartungsintensiv). Eine Alternative zu dem Stabankermotor mit Kommutator ist der *bürstenlose Gleichstrom-Servomotor* (Bild I-51).

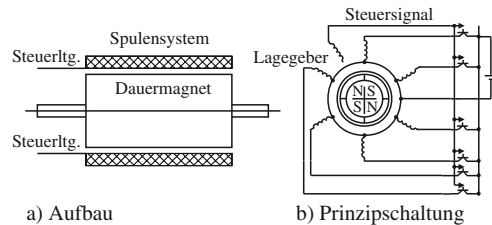


**Bild I-51** Bürstenloser Servomotor

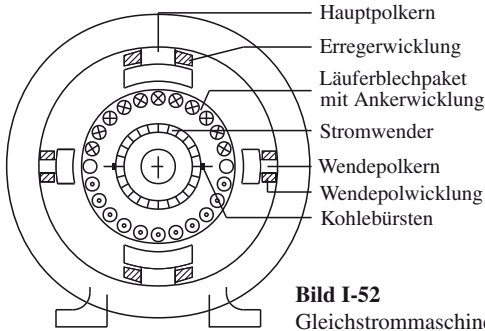
Bei diesem Motortyp ist die Erregung in den Rotor und die Wicklungen in den Stator eingebaut. Die Drehbewegung wird durch eine elektronische Kommutierungseinrichtung erzeugt, die die Statorspulen entsprechend der vorgegebenen Drehzahl mit einem getakteten Gleichstrom versorgt. Ein reibungsloser Betrieb dieser Maschine ist nur mit einem Lagegeber möglich. Der Lagegeber meldet der Steuerelektronik die jeweilige Lage des Rotors. Vorteile des bürstenlosen Gleichstrom-Servomotors sind wegfallende Bürstengeräusche und kein Verschleiß oder Abbrand an den Bürsten, stufenlos steuerbares Moment und Drehzahl, schneller Reversierbetrieb und hohe Schutzart.

## 6 Gleichstrommaschinen

Gleichstrommaschinen werden wegen ihrer günstigen Betriebseigenschaften für regelbare Antriebe eingesetzt. Nachteil der Gleichstromantriebe gegenüber den Drehstromantrieben ist, dass für die Rotorwicklung ein Stromwender vorhanden sein muss. Trotz der daraus resultierenden hohen Wartungskosten hat sich der Gleichstrommotor bei großen Leistungen gegenüber den umrichter-gesteuerten Drehstrommotoren behauptet.

## 6.1 Aufbau und Wirkungsweise

Der Aufbau einer Gleichstrommaschine ist im Bild I-52 dargestellt. Ein drehbar gelagerter Rotor (Anker) ist mit Spulen bewickelt, die die Spannung über einen Schleifkontakt (Kollektor, Bürsten) zugeführt bekommen.



Der Anker dreht durch ein Magnetfeld, das von feststehenden Spulen (Stator) erzeugt wird. Beim Antrieb der Gleichstrommaschine wird in den Ankerspulen eine Spannung  $U_i$  induziert. Bei Beschaltung des Kollektors mit einem Widerstand treibt diese Spannung einen Strom durch die Spule. Die am äußeren Widerstand messbare Spannung errechnet sich aus der Induktionsspannung und dem Spannungsfall der Spule.

$$\text{Klemmenspannung } U = U_i - I \cdot R_a \quad (\text{I.132})$$

$R_a$  Widerstand im Ankerkreis

Die Gleichstrommaschine arbeitet also als Generator. Wird dagegen an dem Kollektor eine Spannung angelegt, treibt diese Spannung einen Strom durch die Ankerspulen. Der Ankerstrom erzeugt mit dem Statorfeld ein magnetisches Moment, die Maschine fängt an, sich zu drehen. Dreht sich die Maschine, induziert das Statorfeld wiederum eine Spannung in den Ankerwicklungen, die den Strom verringert.

$$\text{Netzspannung } U = U_i + I \cdot R_a \quad (\text{I.133})$$

Die Gleichstrommaschine arbeitet als Motor. Die induzierte Spannung  $U_i$  berechnet sich zu

induzierte Spannung

$$U_i = B \cdot l \cdot v \quad (\text{I.134})$$

$$\frac{U_i}{V} = \frac{B}{Vs} \cdot \frac{l}{m} \cdot \frac{v}{\frac{m}{s}}$$

$$U_i = -N \cdot \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \quad \frac{U_i}{V} = \frac{N}{-} \cdot \frac{\Phi}{Vs} \cdot \frac{t}{s} \quad (\text{I.135})$$

Bei der Gleichstrommaschine sind die mechanischen Daten des Stators und des Ankers konstant, sie verändern sich während des Betriebes nicht. Die Veränderung des magnetischen Flusses nach der Zeit kann über die Drehzahl erfasst werden. Die Gleichung

(I.135) für die in den Ankerspulen induzierte Spannung verändert sich unter diesen Voraussetzungen:

$$U_i = k_1 \cdot \Phi \cdot n \quad \frac{U_i}{V} = \frac{k_1}{-} \cdot \frac{\Phi}{Vs} \cdot \frac{n}{s^{-1}} \quad (\text{I.136})$$

$k_1$  Maschinenkonstante der Gleichstrommaschine

Die Leistungsbilanz der Gleichstrommaschine ergibt sich, wenn die Spannungsgleichungen (I.133) und (I.134) mit dem fließenden Strom multipliziert werden.

$$\text{Generator } U \cdot I = I \cdot U_i - I^2 \cdot R_a \quad (\text{I.137})$$

$$P_{el} = P_{mech} - P_v \quad (\text{I.138})$$

$$\text{Motor } U \cdot I = I \cdot U_i + I^2 \cdot R_a \quad (\text{I.139})$$

$$P_{el} = P_{mech} + P_v \quad (\text{I.140})$$

Das an der Gleichstrommaschine vorhandene Drehmoment berechnet sich zu:

$$\text{Drehmoment } M = \frac{P_{mech}}{2 \cdot \pi \cdot n} \quad \frac{M}{Nm} = \frac{P}{W} \cdot \frac{n}{s^{-1}} \quad (\text{I.141})$$

Gleichung (I.140) eingesetzt in Gleichung (I.142) ergibt:

$$\text{Drehmoment } M = \frac{U_i \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot n} \quad \frac{U_i}{V} \cdot \frac{I}{A} \cdot \frac{n}{s^{-1}} = \frac{M}{Nm} \quad (\text{I.142})$$

Wird die induzierte Spannung durch Gleichung (I.136) ersetzt, ergibt sich für das Drehmoment der Gleichstrommaschine:

$$M = \frac{k_1 \cdot \Phi \cdot n \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot n} \quad (\text{I.143})$$

$$M = \frac{k_1 \cdot \Phi \cdot I}{2 \cdot \pi} \quad (\text{I.144})$$

■ **Beispiel:** Von einem Gleichstrommotor sind folgende Werte bekannt:  $U_N = 200 \text{ V}$ ;  $I_N = 10 \text{ A}$ ;  $P_N = 1,9 \text{ kW}$ ;  $n_N = 1800 \text{ min}^{-1}$ . Wie groß ist der Ankerwiderstand  $R_a$ , die im Nennbetrieb induzierte Spannung  $U_{iN}$  und das Nennmoment  $M_N$ ?

$$M_N = \frac{P_N}{2 \cdot \pi \cdot n_N} = \frac{1900 \text{ VA}}{2 \cdot \pi \cdot 1800 \text{ min}^{-1} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}} = 10,08 \text{ Ws};$$

$$U_{iN} = \frac{P_N}{I_N} = \frac{1900 \text{ VA}}{10 \text{ A}} = 190 \text{ V}$$

$$U_N = U_{iN} + I_N \cdot R_a \Rightarrow R_a = \frac{U_N - U_{iN}}{I_N} = \frac{200 \text{ V} - 190 \text{ V}}{10 \text{ A}} = 1 \Omega$$

### 6.1.1 Ankerrückwirkungen

Durchströmt ein Strom die Ankerspule, wird von ihm ein Magnetfeld aufgebaut, das quer zum Feld des Stators liegt. Beide Felder ergeben zusammen ein nicht mehr symmetrisch von einem Statorpol zum anderen verlaufendes, sondern ein verzerrtes Feld (Bild I-53).

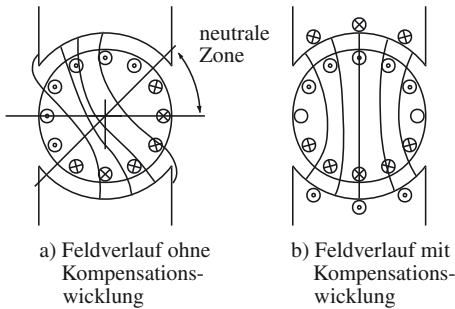


Bild I-53 Feldverlauf Gleichstrommaschine

Der Stromwender liegt nicht mehr in der *neutralen Zone*, also nicht mehr im Winkel von  $90^\circ$  zum Gesamtfeld der Maschine. Dadurch wird am Generator nicht mehr die maximale Spannung abgenommen und bei Motorbetrieb nicht mehr das maximale Drehmoment erzeugt. Ferner erfolgt die Stromwendung nicht mehr im spannungslosen Zustand der Wicklung. Durch den bei der Stromwendung auftretenden Kurzschluss kann es zum *Bürstenfeuer* an den Kommutatorstegen kommen. Diese Ankerrückwirkungen lassen sich durch Einbau der *Wendepole* beseitigen. Wendepole sind immer direkt im Bereich der Stromwendung angebracht. In diesen Bereichen wird der Strom in den Spulen von  $+I$  nach  $-I$  oder umgedreht geändert. Da diese Stromänderung relativ schnell erfolgt, wird in der jeweiligen Spule eine Spannung erzeugt ( $U_i \sim di/dt$ ). Je höher die Drehzahl der Maschine, desto größer die induzierte Spannung. Das hätte eine Funkenbildung zwischen den Bürsten und Kommutatorlamellen zur Folge (Bürstenfeuer). Zur Vermeidung des Bürstenfeuers wird durch die Wendepole ein Magnetfeld aufgebaut, das eine Gegenspannung im Bereich der Stromwender erzeugt, die der induzierten Spannung entgegenwirkt. Der Wendepol wird vom Ankerstrom durchflossen, damit beide induzierten Spannungen bei unterschiedlichen Betriebszuständen gleich sind. Eine weitere Aufgabe der Wendepole ist, die Verschiebung des Hauptfeldes im Bereich der Bürsten zu kompensieren. Bei großen, schnellaufenden Maschinen können die Ankerrückwirkungen nicht allein durch die Wendepole aufgefangen werden. Deshalb müssen zusätzlich *Kompensationswicklungen* eingebaut werden. Die Kompensationswicklungen sind in den Polschuhen der Maschine untergebracht und werden ebenfalls vom Ankerstrom durchflossen. Durch die Kompensationswicklung werden Feldverzerrungen im Bereich der Polschuhe verhindert.

## 6.2 Betriebsverhalten von Gleichstrommaschinen

Die Gleichstrommaschinen unterscheidet man nach der Zusammenschaltung der Spulensysteme des Ankerkreises und des Stators. Haben Anker und Stator eine

separate Spannungsversorgung, handelt es sich um eine *fremderregte Maschine*. Haben beide Systeme dieselbe Spannungsversorgung und sind parallelgeschaltet, handelt es sich um eine *Nebenschlussmaschine*. Sind die Anker- und die Statorspule in Reihe geschaltet, handelt es sich um eine *Reihenschlussmaschine*.

### 6.2.1 Nebenschlussmotor

Für den fremderregten Motor (Nebenschlussmotor) gelten die im Abschnitt 6.1 angeführten Grundgleichungen. In Bild I-54 sind die Schaltungen der Maschinen dargestellt.

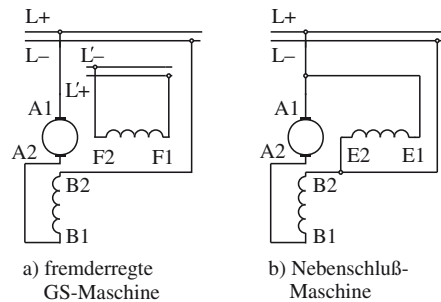


Bild I-54 Schaltungen von Gleichstrom-Maschinen

Die Erregerwicklung liegt jeweils an einer konstanten Spannung. Damit sind Erregerstrom und Erregerfeld konstant (Ankerrückwirkungen vernachlässigt). Nach Gleichung (I.136) ergibt sich für die Drehzahl

$$\text{Drehzahl } n = \frac{U_i}{\Phi \cdot k_1} \quad (\text{I.145})$$

$$n = \frac{U - I \cdot R_a}{\Phi \cdot k_1} \quad (\text{I.146})$$

$$n = \frac{U}{\Phi \cdot k_1} - \frac{I \cdot R_a}{\Phi \cdot k_1} \quad (\text{I.147})$$

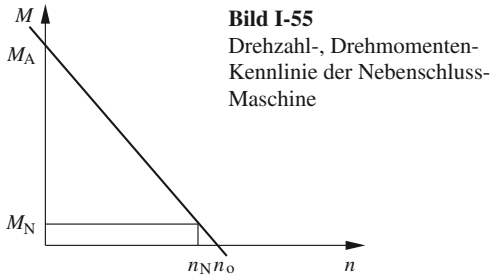
Durch Ersetzen von  $I$  durch die umgeformte Gleichung (I.145) folgt

$$n = \frac{U}{\Phi \cdot k_1} - \frac{M \cdot R_a}{\Phi^2 \cdot k_1 \cdot k_2} \quad (\text{I.148})$$

$$\text{Maschinenkonstante } k_2 = \frac{k_1}{2 \cdot \pi} \quad (\text{I.149})$$

Der Motorbetrieb stellt sich bei positivem Moment und positiver Drehzahl ein (Bild I-55). Der Nennbetrieb ( $U_N$ ;  $\Phi_N$ ;  $R_a$ ) liegt im Bereich von  $0,9 \dots 0,99 \cdot n_0$  (kleine bis große Maschinen). Aus diesem Grund wird nur der Teil der Kennlinie im Bereich der Leerlaufdrehzahl betrachtet. Für den Leerlaufpunkt ( $M = 0$ ) gilt:

$$\text{Leerlaufdrehzahl } n_0 = \frac{U_N}{k_1 \cdot \Phi_N} \quad (\text{I.150})$$

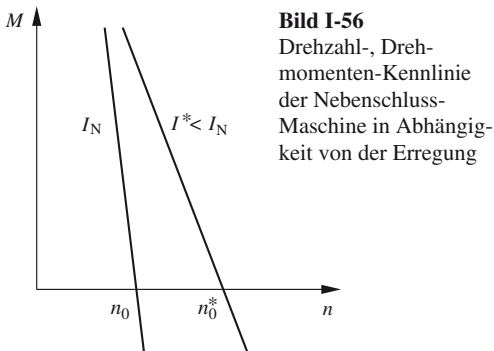
**Bild I-55**

Drehzahl-, Drehmomenten-Kennlinie der Nebenschluss-Maschine

Für den Anlaufpunkt ( $n = 0$ ) gilt:

$$\text{Anlaufmoment } M_A = \frac{k_2 \cdot \Phi_N \cdot U_N}{R_a} \quad (\text{I.151})$$

Da die induzierte Spannung im Anlauf gleich Null wird, hängt die Größe des Anlaufstroms nur noch von  $U_N$  und  $R_a$  ab. Hieraus ergibt sich, dass ein fremderregter Gleichstrommotor im Anlauf einen Zusatzwiderstand zur Strombegrenzung erhalten muss. Bereiche oberhalb vom Anlaufmoment auf der Kennlinie sind nicht zugelassen. Hierbei müsste das Lastmoment größer als das Anlaufmoment werden. Der Motor würde entgegen seiner ursprünglichen Richtung gedreht, der entstehende Strom wäre so groß, dass die Motorwicklungen verbrennen würden. Eine *Drehzahlsteuerung* bei der fremderregten Gleichstrommaschine und der Gleichstromnebenschlussmaschine ist durch folgende Maßnahmen möglich: Änderung der Spannung, des Flusses, des Ankerwiderstandes oder der magnetischen Erregung. Da die Nennerregung meist im Bereich der Sättigung liegt, kann eine Änderung nur durch Schwächung der Erregung erfolgen. Das wird durch einen Vorwiderstand im Erregerkreis möglich. Durch eine Feldschwächung verschiebt sich die Leerlaufdrehzahl zu höheren Werten.

**Bild I-56**

Drehzahl-, Drehmomenten-Kennlinie der Nebenschluss-Maschine in Abhängigkeit von der Erregung

Wenn mit Feldschwächung gearbeitet wird, muss darauf geachtet werden, dass die Drehzahl nicht in Bereiche gelangt, die zur mechanischen Zerstörung der Maschine führt (Bild I-56). Das Anlaufmoment wird kleiner, da es proportional von  $\Phi$  abhängig ist.

Soll bei höherer Drehzahl das gleiche Lastmoment abgenommen werden, muss der Ankerstrom erhöht werden. Das geht für den Dauerbetrieb jedoch nur bis zu  $I_N$ . Es folgt für das Moment:

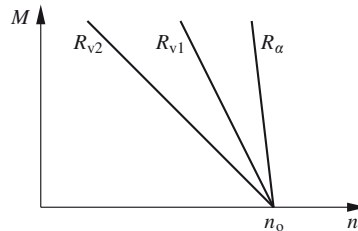
$$M^* = k_2 \cdot \Phi^* \cdot I_N \quad (\text{I.152})$$

$$\frac{M^*}{M_N} = \frac{\Phi^*}{\Phi_N} \quad (\text{I.153})$$

Durch die Erhöhung der Drehzahl erfolgt die Kommutierung an den Wendepolen schneller, und die Stromänderungsgeschwindigkeit nimmt zu ( $dI/dt$ ). Hieraus folgt eine höhere Induktionsspannung, die zu Funkenüberschlägen an den Kommutatorlamellen und zum Bürstenrundfeuer führen kann. Aus diesen Gründen wird die maximale Drehzahl in der Praxis auf  $3 \cdot n_0$  beschränkt. Mit einem zusätzlichen Widerstand  $R_v$  im Ankerkreis wird der Ankerstrom heruntergesetzt. Da das Moment direkt proportional zum Ankerstrom ist ( $M \sim I_a$ ), folgt für die Abhängigkeit vom Vorwiderstand:

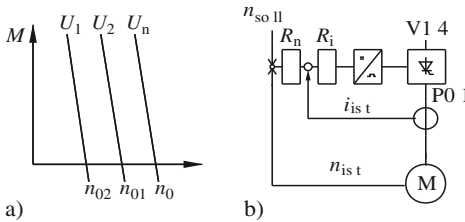
$$M \approx \frac{1}{R_a + R_v} \quad (\text{I.154})$$

Eine Drehzahlsteuerung der fremderregten Gleichstrommaschine wird in der Praxis kaum durchgeführt, da durch Vorschalten eines Widerstandes zusätzliche Verluste an diesem entstehen ( $P_{vz} = I^2 \cdot R_v$ ). Ferner ist die Drehzahl im Nennbereich durch Widerstandsregelung kaum variierbar.

**Bild I-57** Drehzahl-, Drehmomenten-Kennlinie der Nebenschluss-Maschine in Abhängigkeit vom Ankerkreiswiderstand

Der Zusatzwiderstand dient nur zum Hochfahren der Maschine, um einen hohen Anlaufstrom zu vermeiden (Kennlinie Bild I-57). Durch die Änderung der Ankerspannung kann die Drehzahl der Maschine kontinuierlich von Null bis zur Nenndrehzahl gefahren werden (Bild I-58).

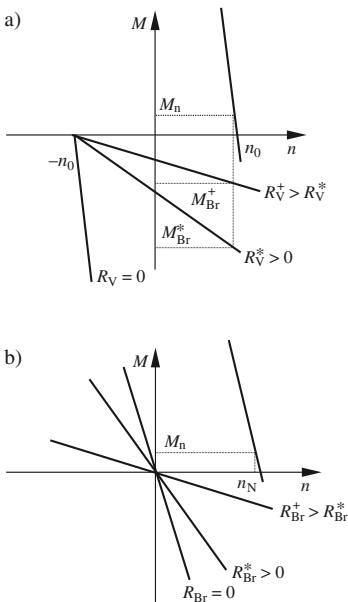
Durch Umpolen der Ankerspannung ist auch ein Drehzahlbereich von  $-n_0 \leftrightarrow +n_0$  möglich. Die Spannungsregelung wurde früher mit einem Leonard-Umformer realisiert. Heute werden Thyristorschaltungen eingesetzt. Durch den Einsatz der modernen Elektronik ist eine Rückspeisung von Energie in das Netz möglich, wenn der Gleichrichter bei Lastbremsung als Wechselrichter eingesetzt wird. Die Steue-

**Bild I-58**

- a) Drehzahl-, Drehmomenten-Kennlinie der Nebenschluss-Maschine in Abhängigkeit von der Spannung  
 b) Thyristorschaltung zur Spannungsänderung

rung der Drehzahl durch Spannungsänderung ist ohne Zusatzverluste möglich!

Das Abbremsen von *fremderregten* Gleichstrommaschinen kann auf verschiedene Arten erfolgen. Beim *mechanischen Bremsen* oder *Wirbelstrombremsen* wird Energie auf ein Bremssystem gegeben, das direkt auf die Welle wirkt. Beim *Nutzbremsen* muss die Drehzahl über der Leerlaufdrehzahl liegen. Dann werden Moment und Ankerstrom negativ. Diese Bremsart wird beispielsweise bei Gefällestecken ausgenutzt (Förderbänder, Triebfahrzeuge). Der Motor geht in den generatorischen Zustand über. Beim *Widerstandsbremsen* wird der Motor vom Netz abgeschal-

**Bild I-59** Drehzahl-, Drehmomenten-Kennlinie der Nebenschluss-Maschine

- a) beim Gegenstrombremsen  
 b) beim Widerstandsbremsen

tet, und im Ankerkreis wird ein Widerstand eingeschaltet. Aus der Maschengleichung folgt:

$$U = U_i + I \cdot R_a \Rightarrow U = 0 \Rightarrow U_i = -I \cdot R_a \quad (I.155)$$

Im Bremsbetrieb wird der Strom umgekehrt (Momentenumkehr). Beim *Gegenstrombremsen* wird die Ankerspannung umgekehrt. Hierdurch kehren sich auch Strom und Moment um. Die Gleichung hierfür lautet:

$$-U = I^* \cdot R_a + U_i^* \Rightarrow U_i^* = U_i \Rightarrow -I^* \cdot R_a = U + U_i \quad (I.156)$$

Damit der Strom (\$I^\*\$) im Bremsbetrieb nicht zu groß wird, muss ein Bremswiderstand in den Ankerkreis geschaltet werden.

Beim *Gegenstrombremsen* muss im Nulldurchgang der Drehzahl abgeschaltet werden, da die Maschine sonst beschleunigt wird und entgegengesetzt anläuft. Im Bild I-59 sind verschiedene Bremskennlinien dargestellt.

■ **Beispiel:** Von einem Gleichstromnebenschlussmotor sind bekannt: \$U\_N = 200\$ V; \$I\_N = 10\$ A; \$P\_N = 1,9\$ kW; \$n\_N = 1800\$ min\$^{-1}\$; \$R\_a = 1\$ \$\Omega\$; \$U\_{iN} = 190\$ V. Wie groß ist die Leerlaufdrehzahl \$n\_0\$, der Anlaufstrom \$I\_a\$, der Strom beim Gegenstrombremsen \$I^\*\$ und der Strom beim Widerstandsbremsen ohne Zusatzwiderstand?

$$n_N = \frac{U_{iN}}{\Phi_N \cdot k_1} \Rightarrow \Phi_N \cdot k_1 = \frac{U_{iN}}{n_N} = \frac{U_{i0}}{n_0}$$

$$\Rightarrow n_0 = \frac{U_{i0}}{U_{iN}} \cdot n_N = \frac{200 \text{ V}}{190 \text{ V}} \cdot 1800 \text{ min}^{-1} = 1894,7 \text{ min}^{-1}$$

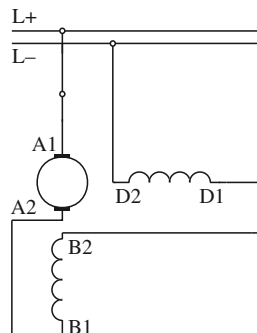
$$U_N = I_A \cdot R_a + U_{iA} \Rightarrow I_A = \frac{U_N - U_{iA}}{R_a} = \frac{200 \text{ V} - 0 \text{ V}}{1 \Omega} = 200 \text{ A}$$

$$-I^* \cdot R_a = U_N + U_{iN} \Rightarrow I^* = -\frac{U_N + U_{iN}}{R_a} = \frac{200 \text{ V} + 190 \text{ V}}{1 \Omega} = 390 \text{ A}$$

$$U_{iN} = -I \cdot R_a \Rightarrow I = \frac{U_{iN}}{R_a} = \frac{190 \text{ V}}{1 \Omega} = 190 \text{ A}$$

## 6.2.2 Reihenschlussmotor

Die Schaltung des Reihenschlussmotors ist in Bild I-60 dargestellt.

**Bild I-60**

Schaltung einer Reihenschluss-Maschine

Es gelten die Grundgleichungen der Gleichstrommaschine. Für den *Ankerkreiswiderstand* gilt jedoch:

$$\text{Ankerkreiswiderstand} \quad \sum R_a = R_a + R_b + R_d \quad (I.157)$$

\$R\_b\$ Widerstand der Wendepolwicklung; \$R\_d\$ Widerstand der Erregerwicklung

Da die Erregerwicklung in Reihe mit dem Ankerkreis geschaltet ist, gilt hier die Beziehung  $\Phi = f(I)$ . Für den linearen Bereich der Magnetisierungskennlinie kann die Beziehung in eine linearabhängige Form überführt werden:

$$\text{Erregerfluss} \quad \Phi = c \cdot I \quad (\text{I.158})$$

Gleichung (I.137) und Gleichung (I.158) ergeben:

Induktionsspannung

$$U_i = k_1 \cdot \Phi \cdot n = k_1 \cdot c \cdot I \cdot n = k_3 \cdot I \cdot n \quad (\text{I.159})$$

$$\text{Maschinenkonstante} \quad k_3 = k_1 \cdot c \quad (\text{I.160})$$

Weiter kann für die mechanische Leistung und das Moment folgende Umformung der Grundgleichung vorgenommen werden:

$$\text{mechanische Leistung} \quad P_{\text{mech}} = k_3 \cdot n \cdot I^2 \quad (\text{I.161})$$

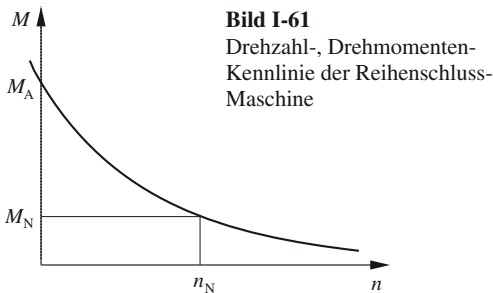
$$\text{Motormoment} \quad M = k_4 \cdot I^2 \quad (\text{I.162})$$

$$\text{Maschinenkonstante} \quad k_4 = \frac{k_3}{2 \cdot \pi} \quad (\text{I.163})$$

Aus den Gleichungen (I.162) und (I.163) geht hervor, dass beide vom Quadrat des Stromes abhängig sind. Eine Drehmoment-Drehzahlabhängigkeit kann über die Spannungsgleichung hergestellt werden.

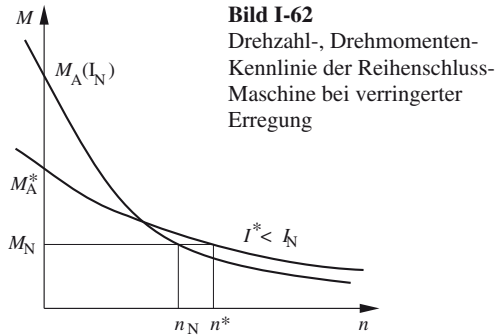
$$\text{Motordrehzahl} \quad n = \frac{U}{k_3 \cdot I} - \frac{\sum R_a}{k_3} \quad (\text{I.164})$$

$$\text{Motormoment} \quad M = \frac{k_4 \cdot U^2}{(k_3 \cdot n + \sum R_a)^2} \quad (\text{I.165})$$

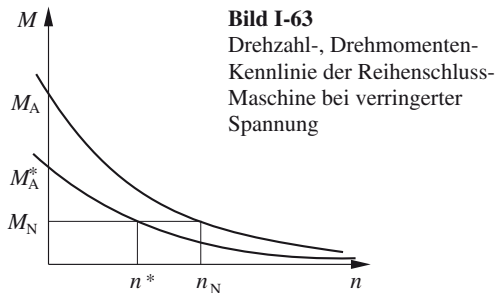


Aus der Gleichung (I.165) und der dazugehörigen Kennlinie (Bild I-61) erkennt man, dass die Drehzahl für ein sinkendes Gegenmoment steigt. Für ein Gegenmoment  $M_G = 0$  steigt die Drehzahl  $n \Rightarrow \infty$ ; der Motor „geht durch“. Der Reihenschlussmotor muss also immer mit einem Gegenmoment betrieben werden, damit er nicht durch zu hohe Drehzahlen zerstört wird. Da das Drehmoment  $M \sim I^2$  ist, steht beim Anlauf ein sehr hohes Moment zur Verfügung. Der Reihenschlussmotor wird für Antriebe eingesetzt, die im Anlauf ein hohes Moment erfordern (Elektrofahrzeuge, Hebezeuge). Eine Drehzahlsteuerung des Reihenschlussmotors erfolgt über eine Feldschwächung, eine Spannungsänderung oder einen Vorwiderstand im Ankerkreis.

Eine Schwächung des Erregerfeldes kann nur erfolgen, wenn ein Widerstand parallel zur Spule geschaltet wird. Dieser Widerstand  $R_p$  muss niederohmig ausgeführt werden, da  $R_D$  auch niederohmig ist.



Durch eine Feldschwächung wird das Anlaufmoment ebenfalls geschwächt. Im Nennbetrieb erfolgt bei gleichem Moment eine Drehzahlerhöhung (Bild I-62). Eine Spannungsänderung (Absenkung) bewirkt, dass weniger Strom durch die Maschine fließt und somit eine Verkleinerung des Anlaufmoments auftritt. Ebenfalls wird bei gleichem Moment die Drehzahl der Maschine reduziert.



Die Drehzahl-Drehmomentenkurve (Bild I-63) wird zu kleineren Werten verschoben.

Eine Widerstandsänderung hat die gleichen Auswirkungen auf das Verhalten der Maschine wie eine Spannungsänderung.

Bei der Reihenschlussmaschine ist keine Nutzbremse möglich (keine konstante Spannung). Das Abbremsen der Maschine erfolgt über die Widerstands- oder Gegenstrombremsung. Bei der Widerstandsbremsung wird der Motor vom Netz genommen und der Ankerkreis umgepol. Da der Stromfluss bei der Netztrennung unterbrochen wird, die Maschine aber mit ungefähr gleicher Drehzahl weiter läuft, erzeugt die verbleibende Remanenzspannung einen Stromfluss im Motor. Dieser Strom fließt gleichlaufend durch die Erregerwicklung und erzeugt wiederum eine Induktionsspannung im Anker. Durch die Umpolung des Ankers fließt der Strom entgegengesetzt durch den Anker und erzeugt mit dem Erregerfeld ein



Moment entgegen der Drehrichtung. Mit sinkender Drehzahl werden  $U_i$  und damit auch der Strom kleiner.

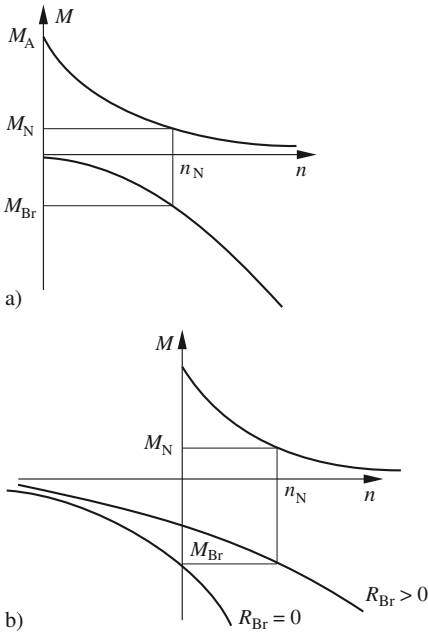


**Bild I-64** Drehzahl-, Drehmomenten-Kennlinie der Reihenschluss-Maschine im Bremsbetrieb

- a) mit Vorwiderstand  
b) Gegenstrombremsen

Beim Gegenstrombremsen wird die Ankerwicklung umgepolt und ein Bremswiderstand in den Kreis eingeschaltet, der zu hohe Ströme verhindern soll. Im Bild I-64 sind die Kennlinienverläufe der Bremsvorgänge dargestellt.

■ **Beispiel:** Von einem Gleichstromreihenschlussmotor sind folgende Daten bekannt:  $U_N = 200 \text{ V}$ ;  $I_N = 10 \text{ A}$ ;  $P_N = 1,9 \text{ kW}$ ;  $n_N = 1800 \text{ min}^{-1}$ ;  $\Sigma R_a = 1 \Omega$ .

Das Nennmoment berechnet sich zu:

$$M_N = \frac{P_N}{2 \cdot \pi \cdot n_N} = \frac{1900 \text{ VA} \cdot 60 \frac{\text{s}}{\text{min}}}{2 \cdot \pi \cdot 1800 \frac{1}{\text{min}}} = 10,08 \text{ Ws}$$

Über das Nennmoment und den Nennstrom können die Motor-konstanten berechnet werden:

$$k_3 = 2 \cdot \pi \cdot k_4 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{M_N}{I_N^2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 10,08 \text{ Ws}}{10^2 \text{ A}^2} = 0,633 \frac{\text{Vs}}{\text{A}}$$

Da die Momente quadratisch von den Strömen abhängen, kann der Strom bei halbem Moment bestimmt werden:

$$I^* = I_N \cdot \sqrt{\frac{M_N}{M^*}} = 10 \text{ A} \cdot \sqrt{\frac{10,08 \text{ Ws}}{0,5 \cdot 10,08 \text{ Ws}}} = 10 \text{ A} \cdot \sqrt{\frac{1}{0,5}} = 7,07 \text{ A}$$

Um die neue Drehzahl berechnen zu können, muss zuerst die Induktionsspannung bestimmt werden:

$$U_i^* = U_N - I^* \cdot \Sigma R_a = 200 \text{ V} - (7,07 \text{ A} \cdot 1 \Omega) = 192,93 \text{ V}$$

Die Drehzahl bei halbem Nennmoment berechnet sich jetzt wie folgt:

$$n^* = \frac{U_i^*}{k_3 \cdot I^*} = \frac{192,93 \text{ V} \cdot 60 \frac{\text{s}}{\text{min}}}{0,633 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} \cdot 7,07 \text{ A}} = 2586,6 \text{ min}^{-1}$$

### 6.2.3 Doppelschlussmotor

Der Doppelschlussmotor besitzt im Gegensatz zu den anderen Gleichstrommaschinen zwei Erregerwicklungen (Bild I-65).

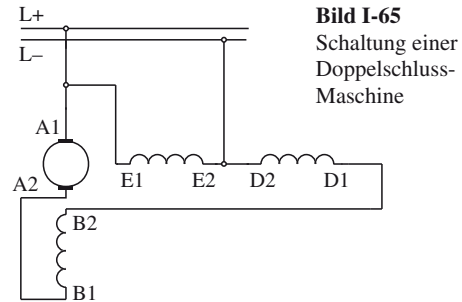


**Bild I-65**

Schaltung einer Doppelschluss-Maschine

Diese Erregerwicklungen sind als Nebenschluss- und als Reihenschlusswicklung ausgeführt. Je nachdem, welches Verhalten beim Motor überwiegen soll, wird eine der Wicklungen stärker ausgelegt. Der Doppelschlussmotor hat den Vorteil, dass auch bei einem Reihenschlussverhalten ein „Durchgehen“ der Maschine ausgeschlossen ist, da die Nebenschlusswicklung eine definierte Leerlaufdrehzahl vorgibt.

### 6.3 Betriebsverhalten von Gleichstromgeneratoren

Obwohl der Einsatz von Gleichstromgeneratoren durch die Entwicklung der Leistungselektronik stark zurückgegangen ist, soll hier ein Überblick über das Betriebsverhalten der verschiedenen Generatoren gegeben werden.

Ebenso wie bei den Motoren unterscheidet man zwischen fremderregtem Generator, Nebenschlussgenerator und Reihenschlussgenerator. Für die folgenden Betrachtungen wird angenommen, dass die Antriebsdrehzahl konstant ist. Die Spannung, die sich an den Generatorklemmen im unbelasteten Betrieb einstellt (Leerlaufspannung  $U_0$ ), entspricht der induzierten Spannung  $U_i$  nach Gleichung (1.136).

Im Bild I-66 ist die Abhängigkeit der Leerlaufspannung vom Erregerstrom dargestellt. Ausgehend von der Remanenzspannung  $U_R$  folgt die Spannungskurve entsprechend der Magnetisierungskennlinie dem Erregerstrom. Wird der Generator belastet, fließt durch die Ankerspule ein Strom, der in den Ankerwicklungen einen Spannungsfall  $U_a = I \cdot R_a$  verursacht und ebenfalls ein Ankerquerrfeld (Feldschwächung) führt. Aus diesen Gründen sinkt die Klemmenspannung bei Belastung am Generator.



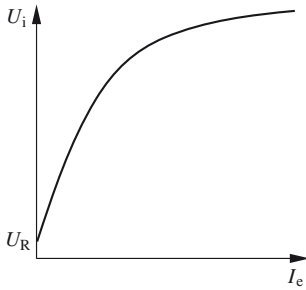


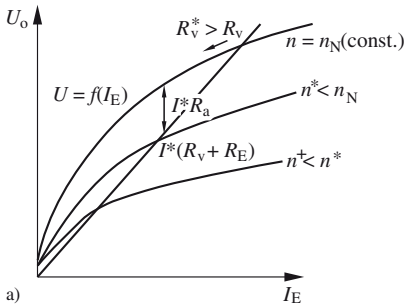
**Bild I-66**  
Leerlaufkennlinie  
 $U_i$ - $f(I)$  des Gleich-  
stromgenerators

### 6.3.1 Fremderregter Generator

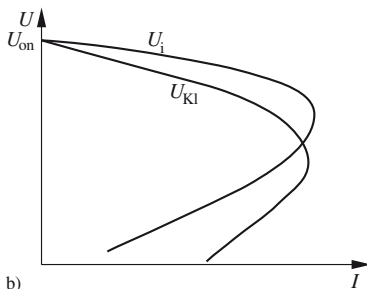
Soll der fremderregte Generator mit konstanter Klemmenspannung betrieben werden, muss der Erregerstrom kontinuierlich nachgeregelt werden. Kann die Erregung nicht nachgeführt werden, sinkt die Klemmenspannung. Da die Erregung jedoch nur indirekt von der Belastung abhängig ist (Feldschwächung), liefert der fremderregte Generator bei Belastung eine verhältnismäßig konstante Klemmenspannung. Die Klemmenspannung schwankt je nach Größe der Maschine zwischen 10% und 2%.

### 6.3.2 Nebenschlussgenerator

Beim Nebenschlussgenerator ist keine Fremdspannungsquelle vorhanden, die den Erregerstrom liefert.



a)



b)

**Bild I-67** Kennlinie  $U$ - $f(I)$  des Gleichstrom-  
generators

- a) Leerlaufkennlinie für verschiedene Drehzahlen mit Lastwiderstand
- b) Belastungskennlinie für eine Drehzahl

Der Generator muss die Erregerspannung selbst liefern. Wird der Generator mit konstanter Drehzahl angetrieben, erzeugt der vorhandene Restmagnetismus eine Remanenzspannung  $U_R$ . Diese Spannung treibt einen Strom durch den Erregerkreis. Dieser Strom erzeugt eine höhere Induktionsspannung, die einen höheren Erregerstrom zur Folge hat. Dieser Vorgang hält so lange an, bis ein Gleichgewicht zwischen der Induktionsspannung und dem Spannungsfall an den Widerständen des Erregerkreises herrscht.

$$\text{Induktionsspannung } U_i = I_e \cdot (R_a + R_e) \quad (\text{I.166})$$

Aus der Kennlinie Bild I-67 ist abzulesen, dass der stabile Betriebspunkt für die Leerlaufspannung vom Widerstand des Leerlaufkreises und der Drehzahl der Maschine abhängt. Für kleine Drehzahlen kann ein Punkt erreicht werden, an dem keine Selbsterregung der Maschine einsetzt.

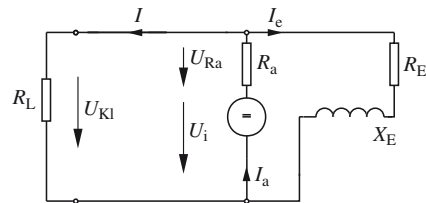


**Bild I-68** Ersatzschaltbild  
des Nebenschlussgenerators

Ist die Polung der Erregerwicklung falsch angeschlossen, wird durch den Erregerstrom eine Spannung induziert, die der Remanenzspannung entgegenwirkt. Das Ersatzschaltbild des Nebenschlussgenerators ist in Bild I-68 dargestellt. Es gelten folgende Gleichungen für den Erreger- oder Ankerkreis:

$$\text{Ankerkreisspannung } U = U_i - R_a \cdot (I + I_e) \quad (\text{I.167})$$

$$\text{Erregerkreisspannung } U = I_e \cdot R_e \quad (\text{I.168})$$

Unter der Voraussetzung  $I \gg I_e$  und  $R_e \gg R_a$  ergibt sich:

$$R_a \cdot I = U_i - I_e \cdot R_e \quad (\text{I.169})$$

Wird ein Widerstand  $R_L$  an den leerlaufenden Generator angeschlossen, fließt über den Widerstand  $R_a$  nicht nur der Erreger-, sondern auch der Laststrom. Das hat zur Folge, dass Klemmenspannung und treibende Spannung für den Erregerstrom sinken. Je nach Größe von  $I \cdot R_a$  stellt sich ein neuer Betriebspunkt am Generator ein. Die Kennlinie zeigt, dass die Klemmenspannung mit steigender Last bis zum Nullpunkt (Kurzschluss) kontinuierlich sinkt. Der Nebenschlussgenerator liefert im Kurzschluss einen Strom, der nicht größer als der Nennstrom wird.

### 6.3.3 Reihenschlussgenerator

Da der Reihenschlussgenerator seine Erregung durch den im Anker fließenden Strom erhält, kann der Generator nur im Kurzschluss angefahren werden. Die vor-

handene Remanenzspannung erzeugt einen Strom im kurzgeschlossenen Generatorkreis, der die Generatorspannung erhöht. Bei Belastung des Reihenschlussgenerators schwankt die Klemmenspannung sehr stark mit dem Laststrom, der gleichzeitig Erregerstrom ist. Ein Einsatz dieses Generatortyps ist nicht zu empfehlen.

6.3.4 Doppelschlussgenerator

Der Doppelschlussgenerator hat, wie der Doppelschlussmotor, zwei Erregerwicklungen, die auf dem gleichen Polkern übereinandergewickelt sind. Eine der Wicklungen wird mit der Ankerspule in Reihe geschaltet, die andere Wicklung parallel. Je nach Schaltung und Auslegung der Wicklungen spricht man von einem *kompondierten* Generator. Der Reihenschlussanteil der Wicklung erzeugt ein Feld in Richtung des Nebenschlussfeldes. Die Reihenschlusswicklung ist kleiner als die Nebenschlusswicklung. Dadurch wird die Spannung nahezu konstant gehalten. Der *überkompondierte* Generator hat einen starken Reihenschlussanteil; die Spannung steigt mit zunehmender Belastung. Der *gegenkompondierte* Generator hat die Reihenschlusswicklung so geschaltet, dass das Reihenfild dem Feld der Nebenschlusswicklung entgegenwirkt. Mit zunehmender Belastung sinkt die Spannung.

6.4 Gleichstrommaschine  
am Wechsel- oder Drehstromnetz

Häufig steht kein geeignetes Gleichstromnetz für den Betrieb einer Gleichstrommaschine zur Verfügung. Die benötigte Gleichspannung wird deshalb aus dem vorhandenen Wechsel- oder Drehstromnetz durch Gleichrichterschaltungen erzeugt. In diese Gleichrichterschaltungen können Dioden oder ansteuerbare Ventile (Transistor, Thyristor) eingesetzt werden. Über die ansteuerbaren Ventile besteht die Möglich-

keit, die Höhe der Gleichspannung zu verändern. Einen Überblick über diese *stromrichter gespeisten Gleichstromantriebe* gibt Tabelle I-7.

Durch die beliebige Ansteuerbarkeit dieser Stromrichter kann die Drehzahl der Gleichstrommaschinen durch eine Spannungsänderung geregelt werden. Ferner kann durch geeignete Maßnahmen eine Rückspeisung von Energie in das Netz erfolgen (Mehrqadrantenantriebe). Zur optimalen Nutzung dieser Methode sollten die Anker- und Erregerwicklungen durch getrennte Spannungsquellen versorgt werden.

6.4.1 Wechselstrombrücken

Wird die Gleichspannung aus dem Einphasenwechselstromnetz erzeugt, stehen die nachfolgend dargestellten Gleichrichterschaltungen zur Verfügung.

6.4.1.1 Einquadrantenantrieb (1-Q-Betrieb)

Der Einquadrantenantrieb wird durch eine halbge- steuerte Einphasen-Brückenschaltung erreicht. Hierbei wird die Hälfte der Dioden durch steuerbare Ventile ersetzt. Die Maschine kann nur als Motor im I. oder III. Quadranten betrieben werden. Unterschieden wird bei dieser Brückenschaltung zwischen der symmetrischen und der unsymmetrischen Schaltung. Bei der *unsymmetrischen Einphasen-Brückenschaltung* (Bild I-69) können die Ventile mit einem Zündwinkel von  $\alpha = 0^\circ$  bis  $\alpha = 180^\circ$  angesteuert werden. Hierdurch ergibt sich eine Gleichspannung von 100% bis 0%.

Die *symmetrische Brückenschaltung* (Bild I-70) lässt nur einen Zündwinkel von maximal  $150^\circ$  zu, da sonst Kippgefahr besteht. Der Unterschied der beiden *symmetrischen Brückenschaltung* (Bild I-71) lässt nur einen Zündwinkel von maximal  $150^\circ$  zu, da sonst Kippgefahr besteht. Der Unterschied der beiden Gleichrichterschaltungen besteht darin, dass sich der Ankerstrom bei der symmetrisch gesteuerten Brücke

Tabelle I-7 Stromrichter für Gleichstrommaschinen

| Bezeichnung                                                 | Betriebsbereiche                                             | Zusatzmaßnahmen                                                            |
|-------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| Einquadrantenantrieb mit Einfachstromrichter, halbgesteuert | I. oder III. Quadrant, nur Motorbetrieb                      | keine                                                                      |
| Einquadrantenantrieb mit Einfachstromrichter, vollgesteuert | I., IV. oder III., II. Quadrant, Motor- und Generatorbetrieb | keine                                                                      |
| Mehrqadrantenantrieb, Einfachstromrichter vollgesteuert     | I., IV. und III., II. Quadrant, Motor- und Generatorbetrieb  | Umschaltung im Ankerkreis, momentenfreie Pause 0,1 s bis 0,2 s             |
| Mehrqadrantenantrieb, Einfachstromrichter vollgesteuert     | I., IV. und III., II. Quadrant, Motor- und Generatorbetrieb  | Umschaltung im Erregerkreis, momentenfreie Pause 0,5 s bis 2 s             |
| Mehrqadrantenantrieb, Zweifachstromrichter vollgesteuert    | I., IV. und III., II. Quadrant, Motor- und Generatorbetrieb  | kreisstromfreie Gegenparallelschaltung, momentenfreie Pause 2 ms bis 10 ms |
| Mehrqadrantenantrieb, Zweifachstromrichter vollgesteuert    | I., IV. und III., II. Quadrant, Motor- und Generatorbetrieb  | kreisstromführende Kreuzschaltung, keine momentenfreie Pause               |

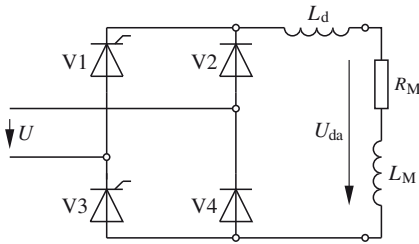


**Bild I-69** Unsymmetrische halbgesteuerte Einphasen-Brückenschaltung

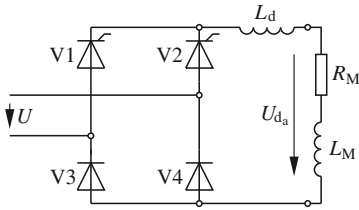


**Bild I-70** Symmetrische halbgesteuerte Einphasen-Brückenschaltung

gleichmäßig auf Thyristoren und Dioden aufteilt, bei der unsymmetrischen Brücke bewirken die zu einem Freilaufzweig angeordneten Dioden eine Entlastung der Thyristoren. Die mit diesen Brücken erzeugte Gleichspannung berechnet sich zu:

*Gleichspannung nach der Brücke*

$$U_{di\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot U \cdot (1 + \cos \alpha) \quad (\text{I.170})$$

Die maximale Drehzahl erreicht die Maschine bei  $\alpha = 0^\circ$ . Die für die Maschine angegebene Nennleistung gilt für Nennspannung und Nennstrom bei vollkommen geglätteter Gleichspannung. Pulsierende Gleichspannungen enthalten Wechselstromanteile, die zusätzliche Verluste in der Maschine erzeugen. Für den Betrieb von Gleichstrommaschinen an Stromrichtern geben die Hersteller deshalb einen *Zuschlagsfaktor*  $F$  (der Faktor  $F$  ist aus den Herstellerlisten zu ermitteln) an, mit dem die Nennleistung für Stromrichterbetrieb berechnet werden muss.

*Maschinenleistung bei Stromrichterbetrieb*

$$P_T = M_N \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{n_N}{60} \cdot F \quad (\text{I.171})$$

#### 6.4.1.2 Zweiquadrantenantrieb (2-Q-Betrieb)

Der Zweiquadrantenantrieb wird durch eine vollgesteuerte Einphasen-Brückenschaltung aufgebaut (Bild I-72).

Alle Gleichrichterdioden werden durch steuerbare Ventile ersetzt. Die Zündimpulse für die Ventile werden aus dem Verlauf der Netzspannung abgeleitet. Abwechselnd zündet man zwei diagonal angeordnete Thyristoren, wodurch die beiden anderen gelöscht

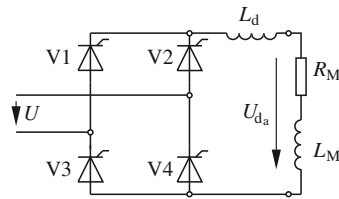


**Bild I-71** Vollgesteuerte Einphasen-Brückenschaltung

werden. Im Gleichrichterbetrieb (I. oder III. Quadrant) steht für den Motor eine Spannung  $U_{di\alpha}$  zur Verfügung, deren Höhe abhängig vom Steuerwinkel der Thyristoren ist.

$$\text{Brückenspannung } U_{di\alpha} = \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos \varphi \quad (\text{I.172})$$

Bei einem Zündwinkel von  $\alpha = 90^\circ$  ist die Gleichspannung  $U_{di\alpha} = 0$ . Es steht kein Moment mehr zur Verfügung, der Motor steht. Wird der Winkel  $\alpha$  über  $90^\circ$  vergrößert, geht die Maschine in den Generatorbetrieb und die Brückenschaltung in den Wechselrichterbetrieb über; die Maschine arbeitet im IV. oder II. Quadranten. Als maximaler Zündwinkel sollte  $\alpha = 150^\circ$  nicht überschritten werden, da die Freierdezeit der Ventile zu berücksichtigen ist. Eine Momentenumkehr ist mit dieser Schaltung nicht ohne weiteres möglich, daher kein generatorisches Bremsen.

#### 6.4.1.3 Vierquadrantenantrieb (4-Q-Betrieb)

Beim Vierquadrantenbetrieb wird ebenfalls eine vollgesteuerte Einphasen-Brückenschaltung eingesetzt.

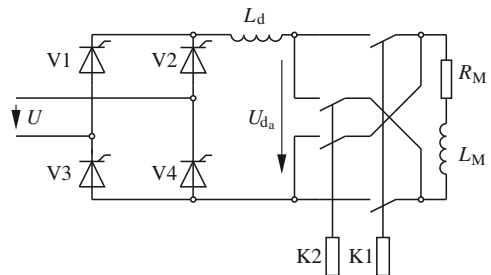


**Bild I-72** Vollgesteuerte Einphasen-Brückenschaltung mit Wendeschützkomination für Vierquadrantenbetrieb

Über eine Wendeschützkomination im Ankerkreis kann die Spannung am Motor umgepolt und somit die Drehrichtung umgedreht werden (Bild I-73). Hierdurch ist ein Betrieb der Maschine in allen vier Quadranten möglich. Eine Umschaltung sollte möglichst stromlos erfolgen, um Schaltüberspannungen und Drehmomentenstöße zu verhindern. Hierzu muss der Strom im Ankerkreis gemessen und der Istwert der Umschalteneinrichtung übermittelt werden. Ein Umschaltvorgang läuft wie folgt ab:

Der Steuerwinkel sollte auf  $150^\circ$  gebracht werden. Der dann herrschende Wechselrichterbetrieb lässt den Strom schnell auf Null abklingen. Im Stromnulldurchgang werden die Zündimpulse gesperrt, es wird umgeschaltet. Ist die Umschaltung abgeschlossen, werden die Zündimpulse mit einem Winkel von  $150^\circ$  wieder freigegeben. Durch eine Verringerung des Zündwinkels auf  $90^\circ$  bremst die Maschine bis zum Stillstand ab. Bei einem Winkel  $\alpha < 90^\circ$  kann die Maschine in entgegengesetzter Richtung hochfahren. Der Vierquadrantenbetrieb ist ebenfalls durch eine Umkehr der Erregerspannung möglich. Hierbei ist jedoch eine längere Pause zwischen den Schaltvorgängen einzuhalten!

### 6.4.2 Drehstrombrücken

Steht dem Betreiber ein Drehstromnetz zur Verfügung, bieten sich folgende Brückenschaltungen zur Erzeugung von Gleichstromnetzen an.

#### 6.4.2.1 Zweiquadrantenbetrieb (2-Q-Betrieb)

Wird eine vollgesteuerte Drehstrombrückenschaltung nach Bild I-74 eingesetzt, so ergibt sich der Wert der Gleichspannung zu:

$$\text{Brückenspannung } U_{di\alpha} = \frac{3}{\pi} \cdot \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos \alpha \quad (\text{I.173})$$

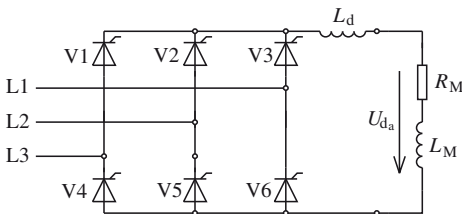


**Bild I-73** Vollgesteuerte Drehstrom-Brückenschaltung

Diese Brückenschaltung ermöglicht kleine Transformatorbauformen. In der gleichgerichteten Spannung sind nur Oberschwingungen mit Frequenzen vorhanden, die ein Vielfaches der sechsfachen Netzfrequenz betragen. Der Stellbereich ist wesentlich größer als bei der Wechselstrombrücke, und die Stromflussdauer beträgt in allen Brückenzeigen  $120^\circ$  (kein Lückbetrieb vorausgesetzt).

#### 6.4.2.2 Vierquadrantenbetrieb (4-Q-Betrieb)

Mit den Wechselstrombrücken ist der Bremsbetrieb nur durch ein Umpolen der Erreger- oder Ankerspannung möglich. Das eignet sich nicht für Antriebe, die eine schnelle Drehrichtungsumkehr verlangen. Wird eine schnelle Drehrichtungsumkehr verlangt, kann die Drehstrombrücke in Gegenparallelschaltung nach Bild I-75 eingesetzt werden.

Hierbei wird eine Stromumkehr durch zwei Drehstrombrücken, die mit entgegengesetzten Ventilrichtungen aufgebaut sind, ermöglicht. Die beiden Drehstrombrücken arbeiten parallel, jedoch mit einem

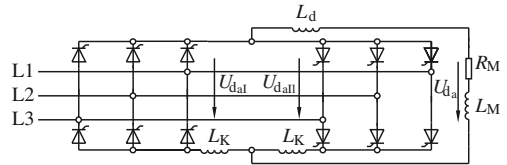


**Bild I-74** Vollgesteuerte Drehstrom-Brückenschaltung in Gegenparallelschaltung

Zündwinkel, der gewährleistet, dass sich der Mittelwert der beiden Brückenspannungen in jedem Zeitpunkt vom Betrag her gleicht, jedoch ein entgegengesetztes Vorzeichen hat. Soll die Gleichspannung  $U_{da}$  verändert werden, müssen beide Zündwinkel  $\alpha_I$  und  $\alpha_{II} = 180^\circ - \alpha_I$  entsprechend verstellt werden. Da die beiden Teilspannungen der Brücken nicht in jedem Zeitpunkt gleich sind, stellt sich über die Teilstromrichter ein Strom ein, der durch diese Wechselspannungskomponente erzeugt wird. Dieser Strom wird durch die Kreisdrossel  $L_K$  begrenzt. Bei Antrieben mit größeren Leistungen wird ein Teilstromrichter nicht angesteuert, somit können die Kreisströme vermieden werden. Die Umschaltung erfordert hier jedoch eine gewisse Totzeit.

### 6.5 Universalmotor

Ein Universalmotor ist ein kleiner Reihenschlussmotor, der mit Gleich- und Wechselstrom betrieben werden kann. Im Unterschied zum reinen Gleichstrommotor ist das Ständerblechpaket zur Vermeidung von Wirbelströmen aus Dynamoblech zusammengesetzt. Die Baugröße des Universalmotors geht bis zu einer Leistung von ungefähr 2000 W. Die Drehzahlbereiche sind anders als beim Einphasenwechselstrommotor nicht frequenzabhängig. Universalmotoren werden mit Drehzahlen von  $1500 \text{ min}^{-1}$  bis  $30000 \text{ min}^{-1}$  gebaut. Wird der Motor mit Wechselstrom betrieben, entsteht in der Erregerwicklung neben dem ohmschen Widerstand noch der induktive Widerstand. Dadurch gehen Drehzahl und Leistung beim Übergang von Gleich- auf Wechselstrom zurück.

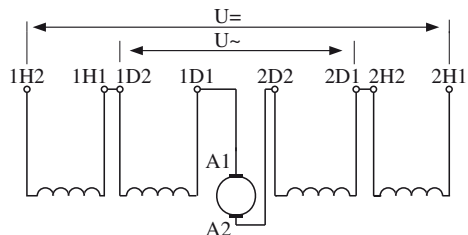


**Bild I-75** Schaltung eines Universalmotors

Soll die Leistung für Gleich- und Wechselstrom konstant gehalten werden, muss die Maschine eine höhere Windungszahl für den Gleichstrombetrieb erhalten (Bild I-76).

7 Auswahl von Motoren

Wird ein Motor für einen Antrieb ausgewählt, müssen vorher einige Vorgaben geklärt sein. Bekannt sein müssen die für den Antrieb maßgebende Drehzahl/Drehmomentenkennlinie, die geforderte Dauerleistung, die geforderte Drehzahl, die mögliche Spannungsversorgung des Motors, der Aufstellungs-ort, die Betriebsart des Antriebs, eventuell erforderliche Zusatzmaßnahmen und der notwendige Motorschutz.

7.1 Auswahl unter Berücksichtigung der Normen

In den DIN- und VDE-Vorschriften werden dem Betreiber Vorgaben gemacht, die zur Auswahl von geeigneten Motoren herangezogen werden sollten.

7.1.1 Bauform und Baugrößen

Die Bauformen für elektrische Maschinen sind in DIN 42950 (alt) und in der DIN IEC 34 Teil 7 festgelegt. Die DIN IEC 34 unterscheidet zwei Code-tabellen für die Bezeichnung der Bauformen. In Tabelle I-8 und Bild I-76 sind die gebräuchlichsten Bauformen und Baugrößen aufgeführt.

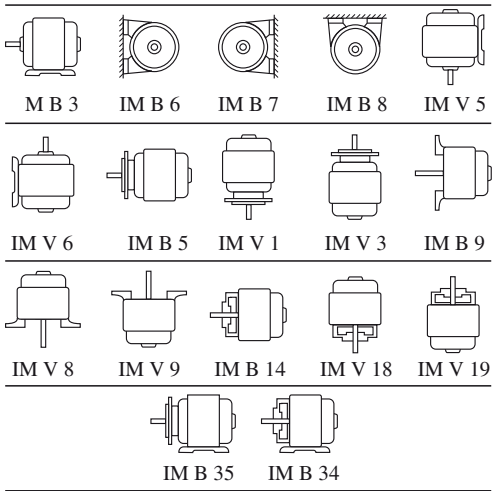


Bild I-76 Die gebräuchlichsten Bauformen für Drehstrommotoren

7.1.2 Schutzart

Durch die Wahl einer geeigneten Schutzart wird verhindert, dass schädigende Einwirkung von Wasser, Fremdkörpern und Staub das Betriebsverhalten des Motors verändern. Weiter muss die Berührung von rotierenden Teilen im Inneren eines Motors und das Berühren von spannungsführenden Teilen verhindert

Tabelle I-8 Gegenüberstellung der Kurzzeichen für die Bauformen nach DIN IEC 34 Teil 7 und der alten DIN 42950

| DIN IEC 34 Teil 7 |         | DIN 42950 |
|-------------------|---------|-----------|
| IM B 3            | IM 1001 | B 3       |
| IM V 5            | IM 1011 | V 5       |
| IM V 6            | IM 1031 | V 6       |
| IM B 6            | IM 1051 | B 6       |
| IM B 7            | IM 1061 | B 7       |
| IM B 8            | IM 1071 | B 8       |
| IM B 35           | IM 2001 | B 3/B 5   |
| IM B 34           | IM 2101 | B 3/B 14  |
| IM B 5            | IM 3001 | B 5       |
| IM V 1            | IM3011  | V 1       |
| IM V 3            | IM 3031 | V 3       |
| IM B 14           | IM 3601 | B 14      |
| IM V 18           | IM 3611 | V 18      |
| IM V 19           | IM 3631 | V 19      |
| IM B 10           | IM 4001 | B 10      |
| IM V 10           | IM 4011 | V 10      |
| IM V 14           | IM 4031 | V 14      |
| IM V 16           | IM 4131 | V 16      |
| IM B 9            | IM 9101 | B 9       |
| IM V 8            | IM 9111 | V 8       |
| IM V 9            | IM 9131 | V 9       |

werden. Die Schutzarten sind in der DIN 40050 zu EN 60529/VDE 0470 Teil 1 festgelegt. Als Kurzzeichen für die jeweilige Schutzart steht die Abkürzung IP (International Protection), gefolgt von zwei Kennziffern und zwei Buchstaben. Von den beiden Kennziffern gibt die erste Ziffer den Personen- oder Fremdkörperschutz an, die zweite Ziffer den Wasserschutz. Der dritte Buchstabe kann für einen zusätzlichen Schutz stehen, und der vierte Buchstabe stellt eine Ergänzung dar. Die ersten beiden Ziffern müssen nach dem IP-Zeichen vorhanden sein. Ist eine Ziffer nicht ausgeführt, muss sie durch ein X ersetzt werden. Der dritte und vierte Buchstabe muss nicht vorhanden sein.

**Tabelle I-9** Schutzarten

| erste Kenn-ziffer | Erklärung                                                                                                    | zweite Kenn-ziffer | Erklärung                                                          | dritter Buch-stabe | Erklärung                                                               | vierter Buch-stabe | Erklärung                                                                                                                                      |
|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|--------------------------------------------------------------------|--------------------|-------------------------------------------------------------------------|--------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 0                 | Kein Schutz                                                                                                  | 0                  | Kein Schutz                                                        |                    |                                                                         |                    |                                                                                                                                                |
| 1                 | Schutz gegen zufälliges groß-flächiges Berüh-ren; Schutz gegen Eindringen von Fremdkör-pern größer als 50 mm | 1                  | Schutz gegen senkrecht fallen-des Wasser                           | A                  | Geschützt gegen Zugang mit dem Handrücken (50 mm)                       | M                  | Betriebsmittel geprüft auf die schädliche Wir-kung durch Ein-tritt von Wasser, wenn die beweg-lichen Teile des Betriebsmittels in Betrieb sind |
| 2                 | Schutz gegen Berühren durch Finger; Schutz gegen Eindrin-gen von Fremd-körpern >12,5 mm                      | 2                  | Schutz gegen Tropfwasser bei Schrägstellung des Gerätes bis zu 15° | B                  | Geschützt gegen Zugang durch Finger (12 mm Durchmesser, 80 mm Länge)    | W                  | Geeignet zur Verwendung unter festgelegten Wetterbedingun-gen und ausge-stattet mit zusätz-lichen schützen-den Maßnahmen oder Verfahren        |
| 3                 | Schutz gegen Berühren mit Werkzeugen oder gegen Ein-dringen von Fremdkörpern von einer Dicke >2,5 mm         | 3                  | Schutz gegen Sprühwasser aus einem Winkel bis zu 60°               | C                  | Geschützt gegen Zugang mit Werkzeug (2,5 mm Durch-messer, 100 mm Länge) | H                  | Hochspannungs-betriebsmittel                                                                                                                   |
| 4                 | Schutz gegen Berühren mit Werkzeugen oder gegen Ein-dringen von Fremdkörpern von einer Dicke >1 mm           | 4                  | Schutz gegen Spritzwasser aus beliebigen Rich-tungen               | D                  | Geschützt gegen Zugang mit Draht (1,0 mm Durchmesser, 100 mm Länge)     | S                  | Betriebsmittel geprüft auf schäd-liche Wirkung durch Eindringen von Wasser, wenn die be-weglichen Teile im Stillstand sind                     |
| 5                 | Vollständiger Schutz gegen Berühren; Schutz gegen schädliche Staubablage-rungen                              | 5                  | Schutz gegen Strahlwasser aus allen Richtungen                     |                    |                                                                         |                    |                                                                                                                                                |
| 6                 | Vollständiger Schutz gegen Berühren; Schutz gegen Eindringen von Staub                                       | 6                  | Schutz gegen vorübergehende Überflutung, z.B. schwere See          |                    |                                                                         |                    |                                                                                                                                                |

**Tabelle I-9** Fortsetzung

| erste Kennziffer | Erklärung | zweite Kennziffer | Erklärung                                                      | dritter Buchstabe | Erklärung | vierter Buchstabe | Erklärung |
|------------------|-----------|-------------------|----------------------------------------------------------------|-------------------|-----------|-------------------|-----------|
| 7                |           | 7                 | Schutz gegen schädliches Eindringen von Wasser beim Eintauchen |                   |           |                   |           |
| 8                |           | 8                 | Schutz gegen jegliches Eindringen von Wasser                   |                   |           |                   |           |

**Tabelle I-10** Kühlungsarten von Motoren

| 1. Kennziffer | Bedeutung                                                                   | 2. Kennziffer | Bedeutung                                                                                                                                                             |
|---------------|-----------------------------------------------------------------------------|---------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 0             | Maschine mit freiem Luftein- und -austritt                                  | 0             | Selbstkühlung                                                                                                                                                         |
| 1             | Maschine mit Rohranschluss, ein Einlasskanal                                | 1             | Eigenkühlung (Ventilator)                                                                                                                                             |
| 2             | Maschine mit Rohranschluss, ein Auslasskanal                                | 2             | Eigenkühlung durch eine nicht auf der Welle angebrachten Belüftungseinrichtung                                                                                        |
| 3             | Maschine mit Rohranschluss, Ein- und Auslasskanal                           | 3             | Fremdkühlung durch eine an die Maschine angebaute Belüftungseinrichtung. Antrieb von der Maschine abhängig                                                            |
| 4             | Oberflächengekühlte Maschine (Umgebungsluft)                                | 4             |                                                                                                                                                                       |
| 5             | Maschine mit eingebautem Wärmetauscher (Kühlmittel Umgebungsluft)           | 5             | Fremdkühlung durch eine eingebaute Belüftungseinrichtung. Antrieb nicht von der Maschine abhängig                                                                     |
| 6             | Maschine mit aufgebautem Wärmetauscher (Kühlmittel Umgebungsluft)           | 6             | Fremdkühlung durch eine an die Maschine angebaute Belüftungseinrichtung. Antrieb nicht von der Maschine abhängig                                                      |
| 7             | Maschine mit eingebautem Wärmetauscher (Kühlmittel ist nicht Umgebungsluft) | 7             | Fremdkühlung durch eine nicht auf die Maschine aufgebaute Belüftungseinrichtung. Antrieb nicht von der Maschine abhängig oder durch Druckluft aus dem Versorgungsnetz |
| 8             | Maschine mit aufgebautem Wärmetauscher (Kühlmittel ist nicht Umgebungsluft) | 8             | Verdrängungskühlung (Fahrtwind)                                                                                                                                       |
| 9             | Maschine mit getrennt aufgestelltem Wärmetauscher                           |               |                                                                                                                                                                       |



**Tabelle I-11** Reduktionsfaktoren für die Nennleistung abhängig von der Höhe und Temperatur

| Aufstellungshöhe<br>über NN in m | Kühlmitteltemperatur (KT) in °C |       |      |      |      |      |
|----------------------------------|---------------------------------|-------|------|------|------|------|
|                                  | <30                             | 30–40 | 45   | 50   | 55   | 60   |
| 1000                             | 1,07                            | 1,00  | 0,96 | 0,92 | 0,87 | 0,82 |
| 1500                             | 1,04                            | 0,97  | 0,93 | 0,89 | 0,84 | 0,79 |
| 2000                             | 1,00                            | 0,94  | 0,90 | 0,86 | 0,82 | 0,77 |
| 2500                             | 0,96                            | 0,90  | 0,86 | 0,83 | 0,78 | 0,74 |
| 3000                             | 0,92                            | 0,86  | 0,82 | 0,79 | 0,75 | 0,70 |
| 3500                             | 0,88                            | 0,82  | 0,79 | 0,75 | 0,71 | 0,67 |
| 4000                             | 0,82                            | 0,77  | 0,74 | 0,71 | 0,67 | 0,63 |

**7.1.3 Kühlart**

Die Art der Kühlung von Maschinen ist nach DIN IEC 34 Teil 6 festgelegt. Diese DIN sieht zwei Kennzeichnungssysteme vor. Beide beginnen mit den Buchstaben IC (International Cooling). Bei der vollständigen Kennzeichnung folgen auf die Buchstaben IC zwei Blöcke mit je einem Buchstaben und zwei Ziffern, z.B. IC W 337 A 71. Die deutsche Norm empfiehlt dem Anwender bei luftgekühlten Maschinen die vereinfachte Kennzeichnung einzusetzen. Bei der vereinfachten Kennzeichnung beschreibt die erste Kennziffer die Art des Kühlmittelumlaufs, die zweite Ziffer die Art des Antriebs für den Kühlmittelumlauf.

Die für den Antrieb vorgegebene Kühlungsart gewährleistet bei einer Kühlmitteltemperatur (KT) von 40 °C und einer Aufstellungshöhe bis 1000 m, dass der Antrieb mit Nennleistung betrieben werden darf. Bei abweichenden Bedingungen ist die zulässige Leistung entsprechend nachstehender Tabelle zu bestimmen. Diese Angaben sind Richtwerte. Es ist von jedem Hersteller eine genaue Information über die Reduktionsfaktoren einzuholen!

Falls Motor und Antriebsmaschine nicht über ein Rohrsystem direkt ins Freie fremdbelüftet sind, muss die von den Maschinen erzeugte Wärmemenge über die Raumluft abgeführt werden. Hierzu ist eine gute Frischluftversorgung zur Kühlung der Maschinen notwendig. Ein oberflächengekühlter 110 kW-Motor mit 1500 min<sup>-1</sup> benötigt in einer Stunde ungefähr

2200 m<sup>3</sup> Kühlluft. Der erforderliche Kühlluftstrom berechnet sich nach folgender Formel:

*Kühlluftstrom*

$$\dot{V}_L = P_V \cdot \frac{0,77}{\Delta \vartheta}$$

$$\frac{\dot{V}_L}{\frac{\text{m}^3}{\text{s}}} \bigg| \frac{P_V}{\text{kW}} \bigg| \frac{\Delta \vartheta}{\text{K}} \quad (\text{I.174})$$

*P<sub>V</sub>* gesamte Verlustleistung; *Δθ* zulässige Temperaturdifferenz (Differenz zwischen Luftetrtritts- und zulässiger Raumtemperatur)

**7.1.4 Isolierstoffklassen**

In der DIN VDE 0530 sind die Isolierstoffe einschließlich der Tränkmittel in *Isolierstoffklassen* eingeteilt, denen genau festgelegte Temperaturwerte zugeordnet sind. Die höchstzulässige Dauertemperatur der Isolierstoffe setzt sich aus der Kühlmitteltemperatur und der Grenzübertemperatur der Wicklung zusammen. Weiter ist noch eine Erwärmungstoleranz zur Sicherheit zu berücksichtigen, da die Messungen nur einen Mittelwert der Erwärmung liefern. Bei den Grenztemperaturen wird davon ausgegangen, dass die Kühlmitteltemperatur den Wert 40 °C nicht übersteigt.

**7.1.5 Motorschutz**

Motoren müssen durch geeignete Maßnahmen gegen zu hohe Erwärmung geschützt werden. Dabei ist zu beachten, dass Sicherungen nur ein Schutz gegen Kurzschlüsse sind und nicht gegen zu hohe Erwärmung, da sie die Vorbelastung des Motors nicht

**Tabelle I-12** Grenztemperaturen von Isolierungen

| Klasse                | Y  | A   | E   | B   | F   | H   | C    |
|-----------------------|----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| Grenztemperatur in °C | 90 | 105 | 120 | 130 | 155 | 180 | >180 |

**Tabelle I-13** Betriebsarten

|                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| S1 – Dauerbetrieb                                                                  | Betrieb mit konstantem Belastungszustand, dessen Dauer ausreicht, den thermischen Beharrungszustand zu erreichen. Vorgabe ist die Leistung. Beispiel: S1; 50 kW                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| S2 – Kurzzeitbetrieb                                                               | Betrieb mit konstantem Belastungszustand, der aber nicht so lange dauert, dass der thermische Beharrungszustand erreicht wird. Mit einer nachfolgenden Pause, die so lange besteht, bis die Maschinentemperatur nicht mehr als 2 K von der Temperatur des Kühlmittels abweicht. Vorgabe ist die Leistung und die Betriebsdauer. Beispiel: S2; 20 min; 30 kW                                                                                             |
| S3 – Aussetzbetrieb ohne Einfluss des Anlaufvorganges                              | Betrieb, der sich aus einer Folge gleichartiger Spiele zusammensetzt, von denen jedes eine Zeit mit konstanter Belastung und eine Pause umfasst. Der Anlaufstrom beeinflusst die Erwärmung nicht merklich. Vorgabe ist die Leistung, die Einschaltzeit $t_B$ und die Spieldauer $t_S$ oder die relative Einschaltdauer $t_r$ , $t_r = t_B/t_S$ . Beispiel: S3; 10%; 50 min; 20 kW                                                                       |
| S4 – Aussetzbetrieb mit Einfluss des Anlaufvorganges                               | Betrieb, der sich aus einer Folge gleichartiger Spiele zusammensetzt, von denen jedes eine merkliche Anlaufzeit $t_A$ , eine Zeit mit konstanter Belastung und eine Pause $t_{St}$ umfasst. Vorgabe ist die relative Einschaltdauer, die Zahl der Anläufe pro Stunde und die Leistung. $t_r = (t_A + t_B)/(t_A + t_B + t_{St})$ . Beispiel: S4; 35%; 400 Anläufe; 25 kW                                                                                 |
| S5 – Aussetzbetrieb mit Einfluss des Anlaufvorganges und der elektrischen Bremsung | Betrieb, der sich aus einer Folge gleichartiger Spiele zusammensetzt, von denen jedes eine merkliche Anlaufzeit, eine Zeit mit konstanter Belastung, eine Zeit schneller elektrischer Bremsung $t_{Br}$ und eine Pause umfasst. Vorgabe wie bei der Betriebsart S4, jedoch mit der Angabe der Bremsart. $t_r = (t_A + t_B + t_{Br})/(t_A + t_B + t_{Br} + t_{St})$ . Beispiel: S5; 25%; 250 Spiele/h Gegenstrombremsung; 40 kW                          |
| S6 – Durchlaufbetrieb mit Aussetzbelastung                                         | Betrieb, der sich aus einer Folge gleichartiger Spiele zusammensetzt, von denen jedes eine Zeit mit konstanter Belastung und eine Leerlaufzeit umfasst. Es tritt keine Pause auf. Vorgabe wie Betriebsart S3. $t_r = t_B/t_S$ . Beispiel: S6; 20%; 45 kW                                                                                                                                                                                                |
| S7 – Ununterbrochener Betrieb mit Anlauf und elektrischer Bremsung                 | Betrieb, der sich aus einer Folge gleichartiger Spiele zusammensetzt, von denen jedes eine merkliche Anlaufzeit, eine Zeit mit konstanter Belastung und eine Zeit mit schneller elektrischer Bremsung umfasst. Es tritt keine Pause auf. Vorgabe wie Betriebsart S5, jedoch keine relative Einschaltzeit $t_r = 1$ . Beispiel: S7; 10 kW; 300 Reversierungen/h                                                                                          |
| S8 – Ununterbrochener Betrieb mit periodischer Drehzahländerung                    | Betrieb, der sich aus einer Folge gleichartiger Spiele zusammensetzt. Jedes Spiel umfasst eine Zeit mit konstanter Belastung und bestimmter Drehzahl. Anschließend eine oder mehrere Zeiten mit anderer Belastung, denen unterschiedliche Drehzahlen entsprechen. Vorgaben wie bei Betriebsart S5, jedoch für jede Drehzahl                                                                                                                             |
| S9 – Ununterbrochener Betrieb mit nichtperiodischer Last- und Drehzahländerung     | Betrieb, bei dem sich Belastung und Drehzahl innerhalb des zulässigen Betriebsbereiches nichtperiodisch ändern. Es treten häufig Belastungsspitzen auf, die weit über der Nennleistung liegen können. Vorgabe ist eine passend gewählte Dauerbelastung, deren Grundlage die Wurzel aus dem quadratischen Mittelwert der Leistung oder des Stromes sein sollte. $P = \sqrt{\frac{P_1^2 \cdot t_1 + P_2^2 \cdot t_2 + P_3^2 \cdot t_3}{t_1 + t_2 + t_3}}$ |

berücksichtigen. Zum Einsatz als Motorschutzgeräte kommen die thermischen Auslöser oder der Motorvollschutz. Bei größeren Motoren auch Relais, die das Wärmeabbild des Motors wiedergeben. Thermische Überlastungen eines Motors sind durch folgende Ursachen möglich:

Erhöhte Verluste durch die Art des Betriebes; Blockieren des Läufers während des Betriebes; Anschluss- und Schaltfehler; erhöhte Verluste durch

Netzstörungen; Phasenausfall; Netzspannung; Beeinträchtigung der Kühlung.

### 7.1.5.1 Thermischer Auslöser

Der thermische Auslöser (Motorschutzeschalter) befindet sich im Hauptstromkreis und wird vom Motorstrom durchflossen. Der Motorschutzschalter ist für kleinere und mittlere Antriebe geeignet. Die Kosten dieser Schutzeinrichtung sind gering. Die

Schutzfunktion ist jedoch nicht optimal, da der Motorschutzschalter nicht die Wicklungstemperatur direkt überwacht, sondern nur die Stromaufnahme des Motors. Fehlfunktionen des Motorschutzschalters können eintreten, wenn seine Belüftung nicht einwandfrei funktioniert. Dann kann der Motorschutzschalter bei erhöhter Umgebungstemperatur auslösen, ohne dass der Motor überlastet ist. Wird der Motorschutzschalter jedoch besser gekühlt als der Motor, so erfolgt keine Auslösung, obwohl der Motor überlastet wird.

7.1.5.2 Thermistor-Motorvollschutz

Von einem *Motorvollschutz* spricht man, wenn in den Wicklungssträngen des Ständers des zu schützenden Motors temperaturabhängige Widerstände eingebaut sind. Diese Widerstände sind meistens Kaltleiter (PTC). Der Kaltleiter wird so ausgelegt, dass ein definierter Strom bei Betriebstemperatur durch den Schutzkreis fließt. Erhöht sich die Wicklungstemperatur auf unzulässige Werte, steigt der Widerstand des Kaltleiters sehr stark an. Im zugehörigen Auslösegerät wird dieser Widerstandsanstieg durch einen Stromabfall registriert; der Motor wird vom Netz geschaltet oder es erfolgt eine Störungsmeldung. Dieser Schutz ist für *ständerkritische* Motoren ausreichend. *Läuferkritische* Motoren benötigen zusätzlich noch ein Überlastrelais. Das Überlastrelais schützt den Motor, wenn der Läufer festgebremst ist. Zusätzlich übernimmt es noch den Leitungsschutz.

7.1.6 Abstimmung des Motors auf die Arbeitsmaschine

Für die Auswahl eines geeigneten Motors für einen Antrieb müssen folgende Daten bekannt sein: Betriebsart; Anlauf-, Brems- und Umsteuervorgänge; Fremdträgheitsmomente; Momentenverlauf der Arbeitsmaschine; Drehzahlsteuerung; Netzverhältnisse; Aufstellungshöhe; Kühlmitteltemperatur; Bedarfsleistung

der Arbeitsmaschine. Die Nennleistung des Motors soll auf die Bedarfsleistung der Antriebsmaschine abgestimmt sein, da ein zu groß bemessener Motor einen höheren Anzugsstrom verursacht, wodurch größere Sicherungen und stärkere Leitungen erforderlich sind. Auch fährt der Motor in einem unwirtschaftlichen Betrieb, da der Leistungsfaktor und unter Umständen der Wirkungsgrad unter Teillast schlechter sind. Das Drehmoment der Antriebsmaschine ist aus entsprechenden Unterlagen des Herstellers zu entnehmen. In Bild I-77 sind einige typische Drehzahl-Drehmomentverläufe dargestellt.

*Kurve 1:* Drehmoment praktisch gleichbleibend, Leistung proportional der Drehzahl. Gilt z.B. für Hebezeuge, Kolbenpumpen und Verdichter bei Förderung gegen konstanten Druck, Kapselgebläse, Walzwerke, Förderbänder, Mühlen ohne Lüfterwirkung, Werkzeugmaschinen mit gleichbleibender Schnittkraft.

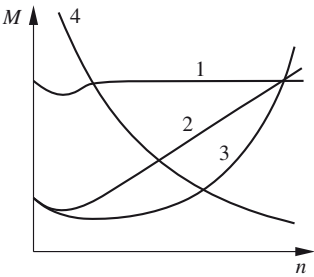


Bild I-77 Drehzahl-, Drehmomentkennlinien verschiedener Arbeitsmaschinen

*Kurve 2:* Drehmoment wächst proportional zur Drehzahl, Leistung proportional zum Quadrat der Drehzahl. Maschinen zum Glätten von Geweben und Papier, Heißmangel und Kalander.

Tabelle I-14 Überlastschutzeinrichtungen im Vergleich ( ++ sehr gut; + gut; – gering)

| Schutzeinrichtung                                    | Überlastschutz |                 |                | Kurzschlusschutz |         | Schalthäufigkeit |
|------------------------------------------------------|----------------|-----------------|----------------|------------------|---------|------------------|
|                                                      | Leitung        | Motor (Ständer) | Motor (Läufer) | Motor            | Leitung |                  |
| Sicherung, Leistungsschalter (Überlast; Kurzschluss) | ++             | ++              | ++             | ++               | ++      | –                |
| Sicherung; Schütz; Überlastschutz                    | ++             | ++              | ++             | ++               | ++      | ++               |
| Sicherung; Leistungsschalter (Überlast); Thermistor  | +              | ++              | +              | ++               | ++      | –                |
| Sicherung; Schütz; Thermistor                        | +              | ++              | +              | ++               | ++      | ++               |
| Sicherung; Schütz; Überlastschutz; Thermistor        | ++             | ++              | ++             | ++               | ++      | ++               |

*Kurve 3:* Drehmoment wächst proportional zum Quadrat der Drehzahl, Leistung proportional zur dritten Potenz der Drehzahl. Gilt für Kreispumpen, Ventilatoren, Kolbenmaschinen, die in ein offenes Rohrnetz fördern, Maschinen mit Schleudervirkung, Schiffsantriebe, Rührwerke.

*Kurve 4:* Drehmoment nimmt umgekehrt proportional zur Drehzahl ab, die Leistung ist konstant. Dieser Verlauf ist nur für Regelvorgänge interessant. Kommt bei Zerspanungsmaschinen, Aufwickel- und Rundschälmaschinen vor. Für den Anlauf ist das mittlere Lastmoment  $M_l$  aus dem Moment  $M_e$  nach beendetem Hochlauf zu bestimmen. Eine Überschlagsbestimmung für die angegebenen Kennlinien ergibt: Kurve 1:  $M_l = M_e$ ; Kurve 2:  $M_l = M_e/2$ ; Kurve 3:  $M_l = M_e/3$ ; Kurve 4:  $M_l$ . Ist das mittlere Hochlaufmoment  $M_m$  bekannt, ergibt sich für die Anlaufzeit  $t_a$  des Antriebs folgender Wert:

Anlaufzeit

$$t_a = \frac{\sum J \cdot n_0}{9,55 \cdot M_{bmi}} \quad \left| \frac{t_a}{s} \right| \left| \frac{J}{\text{kg m}^2} \right| \left| \frac{n_0}{\text{min}^{-1}} \right| \left| \frac{M_{bmi}}{\text{Nm}} \right| \quad (\text{I.175})$$

*mittleres Beschleunigungsmoment*

$$M_{bmi} = M_m - M_l \quad (\text{I.176})$$

$J$  Gesamtträgheitsmoment des Antriebes

Das Gesamtträgheitsmoment setzt sich aus dem Motorträgheitsmoment, dem Trägheitsmoment der Arbeitsmaschine und den Trägheitsmomenten von Kupplungen und Riemenscheiben, umgerechnet auf die Drehzahl der Motorwelle, zusammen. Kann wegen großer Trägheitsmomente/Lastmomente kein einwandfreier Anlauf erreicht werden, muss ein Sonderläufer oder ein größerer Motor eingesetzt werden, der dann aber bei Normalbetrieb schlechter ausgenutzt wird. Deshalb sollte ein Schleifringläufermotor, eine Anlaufkupplung oder ein Frequenzumrichter eingesetzt werden.

**7.1.6.1 Wartung von Maschinen**

Elektrische Maschinen haben nur wenige Teile, die einem Verschleiß unterliegen. Diese Verschleißteile bedürfen aber besonderer Beobachtung und regelmä-

**Tabelle I-15** Liste von Wartungsarbeiten in Abhängigkeit vom Motortyp

| Zeitraum            | Lager     |            | Maschinentyp |             |             | Wartungsarbeiten                                                                                                               |
|---------------------|-----------|------------|--------------|-------------|-------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                     | Wälzlager | Gleitlager | Käfig        | Schleifring | Stromwender |                                                                                                                                |
| alle 1 bis 2 Wochen | ×         |            |              |             |             | Lagergeräusch und Lagererwärmung kontrollieren                                                                                 |
|                     |           | ×          |              |             |             | Ölstandskontrolle                                                                                                              |
|                     |           |            |              |             | ×           | Kontrolle der Oberfläche des Stromwenders und der Bürsten einschließlich Halterung                                             |
| alle 1 bis 2 Monate |           |            |              | ×           | ×           | Oberflächenkontrolle der Schleifringe und des Stromwenders, der Bürsten, der Haltevorrichtung und der Bürstenabhebevorrichtung |
| alle 3 bis 4 Monate |           |            |              | ×           | ×           | Überprüfung des Bürstendrucks                                                                                                  |
|                     |           |            | ×            | ×           | ×           | Kontrolle der Anschlussklemmen                                                                                                 |
| jährliche Wartung   | ×         | ×          |              |             |             | Kontrolle der Lager und Messung der Lagertemperatur                                                                            |
|                     |           |            | ×            | ×           | ×           | Messung des Isolationswiderstandes der Wicklungen                                                                              |
|                     |           |            | ×            | ×           | ×           | Reinigung verschmutzter Wicklungen                                                                                             |
|                     |           |            | ×            | ×           | ×           | Messung der Wicklungstemperatur                                                                                                |
|                     |           |            |              | ×           | ×           | Kontrolle der Schleifringe und Stromwender mit Zubehör                                                                         |

ßiger Wartung. Insbesondere Lager sollten mit besonderer Sorgfalt gewartet werden, da sie einem ständigen Verschleiß unterliegen. Welche Wartungsarbeiten in welchen Abständen durchgeführt werden sollten, ist in Tabelle I-15 dargestellt. Die Angaben der Tabelle beziehen sich auf normale Betriebsbedingungen, also Dauerbetrieb über acht Stunden, Nennumgebungstemperatur und keine Verschmutzungen in der Kühlluft. Eine Veränderung der normalen Betriebsbedingungen ergibt andere Wartungsinter-

valle. Wartungs- und Kontrollarbeiten sollten in Motorstillstandszeiten durchgeführt werden. Neben den erwähnten Wartungs- und Kontrollarbeiten gehört auch die Überprüfung der Schutzgeräte in den Wartungsplan.

### 7.1.7 Störungsbeseitigung

Die folgende Tabelle soll dem Betreiber einige Hinweise geben, welche Ursache einer eventuell aufgetretenen Störung zugrunde liegt.

**Tabelle I-16** Störungen an Gleichstrommaschinen, ihre Ursache und Behebung

| Gleichstrommaschine    |                                       |                                                                     |
|------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| Störungsart            | Ursache                               | Abhilfe                                                             |
| Motor läuft nicht an   | Sicherung defekt                      | Sicherung ersetzen                                                  |
|                        | Bürsten liegen nicht auf              | Bürstensitz überprüfen, Bürstenhalter reinigen, Bürsten auswechseln |
|                        | Lager festgefressen                   | Lager auswechseln                                                   |
|                        | Anker- oder Feldwicklung unterbrochen | Durchgang überprüfen, Wicklung ersetzen                             |
| Motor läuft schwer an  | Körperschluss der Wicklung            | Auf Körperschluss prüfen (Kurbelinduktor), Wicklung erneuern        |
|                        | Erregerwicklung unterbrochen          | Erregerwicklung auf Durchgang prüfen                                |
|                        | Bürstenbrücke verstellt               | Bürstenbrückenstellung prüfen (Markierung beachten)                 |
| Unruhiger Lauf         | defekte Kugellager                    | Kugellager ersetzen                                                 |
|                        | verspannte Lagerschilder              | Befestigungsschrauben gleichmäßig nachziehen                        |
| Bürstenfeuer zu stark  | Motor überlastet                      | Belastung verringern                                                |
|                        | Kollektor unrund oder verschmutzt     | Kollektor abdrehen, Glimmerisolation auskratzen, Kollektor reinigen |
|                        | Wendepole falsch geschaltet           | Schaltung überprüfen                                                |
| Motor läuft zu schnell | Erregerwicklung hat Windungsschluss   | Wicklung erneuern                                                   |
|                        | Klemmenspannung zu hoch               | Gleichspannung verringern                                           |

**Tabelle I-17** Störungen an Asynchronmaschinen, ihre Ursache und Behebung

| Asynchronmotor                        |                                                                   |                                                       |
|---------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| Motor läuft nicht an                  | Schutz hat angesprochen                                           | Schutzgerät überprüfen, einschalten                   |
|                                       | Lager festgefressen                                               | Lager austauschen                                     |
| Motor läuft schwer an                 | Wicklungsstrang im Läufer unterbrochen                            | Wicklungsstränge auf Durchgang prüfen                 |
|                                       | Ständerwicklungen haben Phasen- oder Körperschluss                | Wicklungen überprüfen, austauschen                    |
|                                       | Klemmenspannung zu niedrig                                        | Spannungsfall auf Zuleitung überprüfen                |
| Motor wird im Leerlauf zu warm        | Windungsschluss                                                   | Strangwiderstände messen, defekten Strang austauschen |
|                                       | falsche Ständerschaltung bei zu hoher Betriebsspannung            | Ständer von Dreieck- auf Sternschaltung umschalten    |
| Motor wird im Dauerbetrieb zu warm    | Belastung zu hoch                                                 | Verringerung der Belastung                            |
|                                       | Eine Sicherung hat angesprochen (Zweiphasenlauf)                  | Klemmenspannung prüfen                                |
|                                       | Belüftung fehlt                                                   | Motor abstellen, bis Belüftung wieder vorhanden       |
| Motor brummt                          | Wicklungsstrang des Ständers hat Wicklungsschluss                 | Wicklung durchmessen, austauschen                     |
|                                       | Zweiphasenlauf                                                    | Klemmenspannung messen                                |
| Drehzahl sinkt bei Belastung stark ab | Am Klemmbrett sind zwei Phasen und der Mittelleiter angeschlossen | Klemmenspannung messen                                |
|                                       | Maschine überlastet                                               | Verringerung der Belastung                            |
|                                       | Läuferstäbe ausgelötet oder abgerissen                            | Läuferwicklung prüfen (Brandstellen)                  |
|                                       | Läuferblechpaket auf der Welle verschoben                         | Sitz des Läuferblechpaketes prüfen                    |

### 7.1.8 Anschlusskennzeichnungen von Maschinen

**Tabelle I-18** Gegenüberstellung von alten und neuen Bezeichnungen bei Maschinen

| Art der Maschine     |                           | neue Bezeichnung   | alte Bezeichnung |
|----------------------|---------------------------|--------------------|------------------|
| Transformator        | Oberspannung              | 1U1, 1V1, 1W1      | U, V, W          |
|                      |                           | 1U2, 1V2, 1W2      | X, Y, Z          |
|                      | Unterspannung             | 2U1, 2V1, 2W1      | u, v, w          |
|                      |                           | 2U2, 2V2, 2W2      | x, y, z          |
| Gleichstrommaschine  | Ankerwicklung             | A1–A2              | A–B              |
|                      | Wendepolwicklung          | B1–B2              | GW–HW            |
|                      | Geteilte Wendepolwicklung | 1B1–1B2<br>2B1–2B2 |                  |
|                      | Kompensationswicklung     | C1–C2              | GK–HK            |
|                      | Reihenschlusswicklung     | D1–D2              | E–F              |
|                      | Nebenschlusswicklung      | E1–E2              | C–D              |
|                      | fremderregte Wicklung     | F1–F2              | I–K              |
| Wechselstrommaschine | Dreiphasenmaschine        | U1, V1, W1         | U, V, W          |
|                      |                           | U2, V2, W2         | X, Y, Z          |
|                      | Schleifringläufer         | K, L, M            | u, v, w          |
|                      | Erregerwicklung           | F1–F2              | I, K             |
|                      | Kondensatormotor          | U1–U2              | U–V              |
|                      |                           | Z1–Z2              | W–Z              |

### Literaturhinweise

- [1] *Schröder (Hrsg.): Elektrische Antriebe Bd. 1.* Berlin: Springer 2002, ISBN 3-540-66846-2
- [2] *Giersch/Harthus/Vogelsang: Elektrische Maschinen.* Stuttgart: Teubner, ISBN 3-519.46821.2
- [3] *Constantinescu/Simon/Liviu (Hrsg.): Elektrische Maschinen und Antriebssysteme.* Wiesbaden: Vieweg 1999, ISBN 3-528-06426-9



II Elektrische Anlagen

1 Struktur der Elektrizitätswirtschaft

Die Struktur der Elektrizitätsversorgung der Bundesrepublik Deutschland setzt sich aus den öffentlichen Energieversorgern, den Eigenanlagen der Industrien und der Deutschen Bahn AG zusammen. Die öffentliche Stromversorgung übernehmen die Energieversorgungsunternehmen (EVU). Die EVU sind für ihre Geschäftsergebnisse eigenverantwortlich; an ihrem Kapital können sich die öffentliche Hand und private Geldgeber beteiligen. Das Aufsichtsrecht über die Elektrizitätswirtschaft liegt in staatlicher Hand. Jede Strompreiserhöhung muss von staatlicher Seite genehmigt werden. Die EVU haben die Pflicht, jedem Anspruch auf Stromversorgung nachzukommen (Kontrahierungszwang). Die EVU müssen auf Antrag jeden Haushalt, Landwirtschafts-, Gewerbe- und Industriebetrieb zu zumutbaren Bedingungen anschließen und jederzeit mit Elektrizität in der gewünschten Menge beliefern. Um eine wirtschaftliche Versorgung der Verbraucher zu erreichen, werden die Versorgungsgebiete der EVU in sogenannten Demar-

Elektrische Energie wird heute überall eingesetzt. In Tabelle II-1 ist aufgeführt, wo die elektrische Energie abgenommen wird.

Die erzeugte elektrische Energie teilte sich im Jahr 2002 auf folgende Primärenergieträger auf:

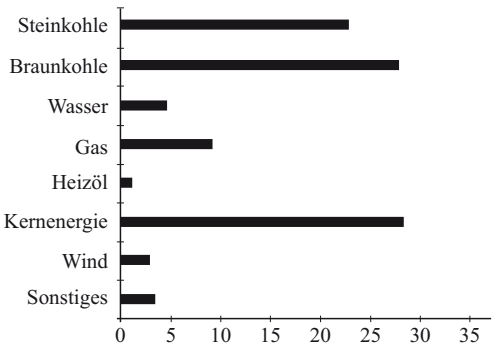


Bild II-1 Bruttostromerzeugung der BRD 2002 in Prozent aufgeteilt auf Primärenergieträger

Tabelle II-1 Aufteilung der verbrauchten elektrischen Energie auf einzelne Bereiche

| Verbrauchte elektrische Energie | 1991<br>(Petajoule) | 1995<br>(Petajoule) | 2000<br>(Petajoule) |
|---------------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| Gesamt                          | 14 611              | 14 269              | 14 190              |
| Produzierendes Gewerbe          | 8 817               | 8 228               | 8 200               |
| Dienstleistung                  | 1 982               | 2 091               | 2 182               |
| Private Haushalte               | 3 811               | 3 950               | 3 808               |

kationsverträgen festgelegt und räumlich bestimmt. Hieraus ergibt sich, dass jeder Verbraucher nur von einem EVU beliefert werden kann. Durch die europäische Gesetzgebung wurde mittlerweile jedem Verbraucher freigestellt sich ein geeignetes EVU (Stromlieferant) zu suchen. Die Demarkationsverträge sind somit nicht mehr voll wirksam. Die Stromtarife setzen sich aus dem *Verrechnungspreis*, dem *Leistungspreis* und dem *Arbeitspreis* zusammen. Zusätzlich werden noch Ausgleichsabgaben und Mehrwertsteuer berechnet.

*Verrechnungspreis:* Überlassung der Messeinrichtung.

*Leistungspreis:* Setzt sich aus einem festen und einem verbrauchsabhängigen Anteil zusammen. Der verbrauchsabhängige Anteil wird entweder pauschal oder mit einer 96 h- oder 15 min-Messung ermittelt.

*Arbeitspreis:* Wird pro bezogener Kilowattstunde berechnet.

*Zusammensetzung der alternativen Energien:* Wasser 48,9%; Wind 41,1%, Müll und Biomasse 9,5%; Sonne 0,5%. Insgesamt wurden 21 950 Mio. kWh an regenerativer Energie erzeugt (entspricht ungefähr 8% der EVU-Erzeugung). Die Energie durch Windkraftwerke wurde in ca. 12 000 Windanlagen erzeugt.

Tabelle II-2 zeigt die Entwicklung der einzelnen Energieträger, die zur Erzeugung elektrischer Energie eingesetzt werden.

Elektrische Energieanlagen dienen zur Versorgung der Verbraucher mit elektrischer Energie. Folgendes Schema zeigt den grundsätzlichen Verlauf des Energieflusses vom Erzeuger bis zum Verbraucher (Bild II-2).

Nach dem Kraftwerk wird die erzeugte Energie auf ein höheres Spannungspotential gebracht, um die Transportkosten des Stroms zu reduzieren. Transportiert wird die elektrische Energie hauptsächlich über

**Tabelle II-2** Entwicklung der eingesetzten Primärenergieträger zur Verstromung

| Jahr        | 1955  | 1973  | 1991 | 2000 | 2002  |
|-------------|-------|-------|------|------|-------|
| Steinkohle  | 54%   | 34%   | 28%  | 25%  | 23%   |
| Braunkohle  | 24,3% | 25%   | 29%  | 26%  | 27,5% |
| Wasser      | 15,8% | 5,2%  | 3%   | 4%   | 4,5%  |
| Gas         | 4,6%  | 15,8% | 7%   | 9%   | 9%    |
| Heizöl      | 1,3%  | 14,4% | 3%   | 1%   | 1%    |
| Kernenergie | –     | 3,9%  | 27%  | 30%  | 28,5% |
| Wind        | –     | –     | –    | 2%   | 3%    |
| Sonstiges   | –     | 1,7%  | 3%   | 3%   | 3,5%  |

(Quelle: DIW; statistisches Bundesamt; VDEW)

Freileitungen, in besonderen Fällen auch über Kabel. In Zentren des Energieverbrauchs wird die Spannung heruntertransformiert und über Verteiler an die Endkunden weitergeleitet. Um eine wirtschaftliche Energieversorgung gewährleisten zu können, sind folgende Voraussetzungen erforderlich: Erzeugung und Bedarf müssen einander entsprechen. Deckung der Grundlast mit Energie aus

Kraftwerken mit preisgünstiger Rohenergie. Erzeugung der Energie möglichst in der Region der Endverbraucher. Energieflussoptimierung mit Hilfe der Netzleittechnik.

Eine *Netzbelastungskurve* (Darstellung der Energieabnahme über einen Tag) eines EVU könnte den Verlauf nach Bild II-3 aufweisen. Die Netzbelastungskurve zeigt Bereiche mit kontinuierlicher Energieabnahme (Grundlast). Bereiche, in denen die Last nicht die gleiche Höhe im Tagesverlauf aufweist, bezeichnet man als *Mittellast*. Bereiche, bei denen nur kurzzeitig ein Laststoß auftritt, bezeichnet man als *Spitzenlast*. Zur Grundlastdeckung werden Atom-, Braunkohle- und Laufwasserkraftwerke eingesetzt, zur Mittellastdeckung Steinkohle- und Heizölkraftwerke und zur Spitzenlastdeckung Pumpspeicher- und Gasturbinenkraftwerke.

**2 Elektrische Energieerzeugung**

Die bei uns eingesetzte elektrische Energie wird hauptsächlich durch Umwandlung von sogenannten *Primärenergieträgern* erzeugt. *Regenerative Energieträger* setzen sich sehr langsam durch, da die Kosten der so erzeugten elektrischen Energie derzeit

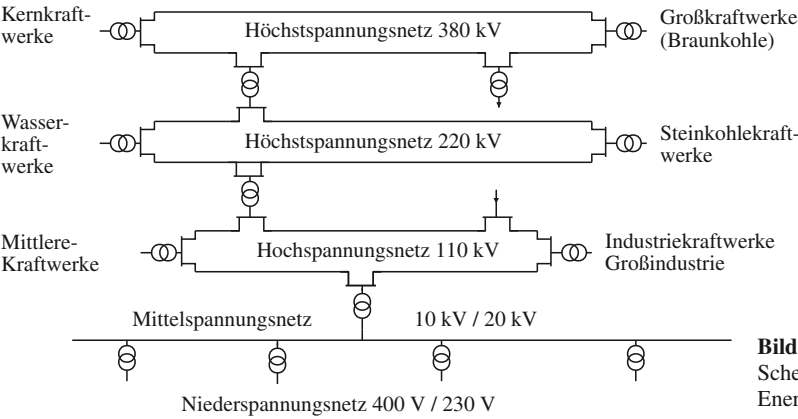


**Bild II-2**  
Schematischer Aufbau der Energieverteilung in der BRD

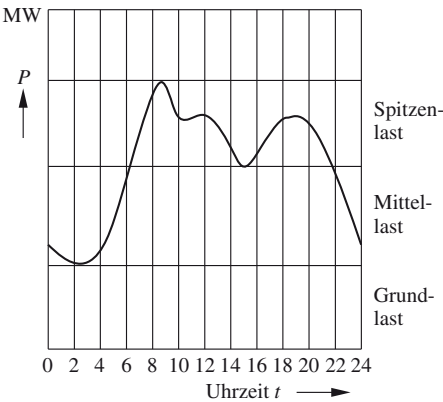


**Bild II-3** Tagesbelastungskurve

noch über den konventionellen Methoden zur Erzeugung elektrischer Energie liegen.

**2.1 Energiebedarf**

Der Energiebedarf der Weltbevölkerung ist in den Jahren 1900 bis 1950 um durchschnittlich 2,5% jährlich gestiegen. Von 1950 bis 1960 stieg der Energiebedarf um 4% und ab 1970 um 5,5% jährlich. Nach der Ölkrise im Jahr 1972 pendelte sich die Zunahme zwischen 2% und 3% pro Jahr ein. Derzeit werden auf der Welt 12 Milliarden Tonnen SKE (Steinkohleeinheiten) an Primärenergien verbraucht (Stand 1989). Die Energie wird hauptsächlich von nicht erneuerbaren Primärenergieträgern geliefert. So verteilte sich der Primärenergiebedarf der Welt im Jahr 1989 wie folgt auf: 39% Erdöl; 27% Kohle; 21%

Erdgas; 12% Kernenergie und Wasserkraft. Der Begriff *Steinkohleeinheit* (SKE) wurde gebildet, als Kohle der weitaus wichtigste Energieträger war. Eine Steinkohleeinheit entspricht der Energiemenge, die bei der vollständigen Verbrennung von einem Kilogramm Steinkohle bestimmter Qualität freigesetzt wird. Tabelle II-3 zeigt Energieinhalte der Energieträger.

2.3 Wärmekraftwerke

In Wärmekraftwerken herkömmlicher Bauart werden Primärenergieträger wie Öl, Gas oder Kohle verbrannt. Mit der hierbei erzeugten Wärme wird Wasser erhitzt, welches eine Dampfturbine antreibt. Der Wirkungsgrad dieser Energieumsetzung hängt im

**Tabelle II-3** Energieinhalte von jeweils einem Kilogramm bzw. m<sup>3</sup> verschiedener Energieträger

| Energieträger in kg                                | Energieinhalt in SKE | Energieinhalt in MJ   |
|----------------------------------------------------|----------------------|-----------------------|
| Braunkohle                                         | 0,31                 | 9,0                   |
| Holz                                               | 0,5                  | 14,7                  |
| Steinkohle                                         | 1                    | 29,3                  |
| Erdgas (m <sup>3</sup> )                           | 1,08                 | 31,7                  |
| Rohöl                                              | 1,45                 | 42,6                  |
| Heizöl, leicht                                     | 1,45                 | 42,7                  |
| Benzin                                             | 1,48                 | 43,5                  |
| Kernbrennstoff (Urandioxid, angereichert auf 3,2%) | 84022                | 2,4 · 10 <sup>6</sup> |

2.2 Energiereserven

Die zur Erzeugung eingesetzten Primärenergieträger sind Stoffe, die im Laufe der Erdgeschichte durch Umwandlung von Pflanzenteilen (Kohle, Erdöl) entstanden sind, oder die als Erz vorkommen (Uran). Da diese Energieträger nicht nachwachsen und nicht reproduzierbar sind, ist ihr Einsatz für die Erzeugung von Strom von den vorhandenen Vorkommen abhängig. Zum heutigen Zeitpunkt geht man von folgenden Ressourcen (wahrscheinlich vorhandene Vorräte) und Reserven (nachgewiesene Vorräte) aus:

starken Maße von der Differenz der Turbineneintritts- und -austrittstemperatur ab. Dampfturbinen arbeiten heute mit einer Eintrittstemperatur von ca. 600 °C und einer Austrittstemperatur von ca. 35 °C, Gasturbinen mit einer Eintrittstemperatur von ungefähr 1200 °C und einer Austrittstemperatur von 600 °C. Der Wirkungsgrad herkömmlicher Wärmekraftwerke liegt ohne Reinigung der Abgase bei ungefähr 40%. Kommt eine Abgasreinigung (Entstaubung, Entstickung, Entschwefelung) dazu, sinkt der Wirkungsgrad je nach Prozess um ungefähr 5%–10%. Um den Wirkungsgrad zu erhöhen, werden kombinierte Wär-

**Tabelle II-4** Weltenergieserven im Jahr 1990 (Millarden Tonnen SKE)

|            | Steinkohle | Ölschiefer | Braunkohle | Erdgas | Erdöl | Uran |
|------------|------------|------------|------------|--------|-------|------|
| Ressourcen | 8000       | 2000       | 1000       | 500    | 400   | 60   |
| Reserven   | 800        | 200        | 110        | 200    | 300   | 30   |

Teilt man die gesamten Energiereserven durch den derzeitigen Weltjahres-Energiebedarf von 12 Milliarden Tonnen SKE, ergibt sich ein Anhaltswert für die statistische Reichweite der Reserven. Die heute bekannten Reserven haben eine Reichweite von ca. 137 Jahren. Energiereserven durch die Kernfusion, durch Ausnutzung der Sonnenenergie und durch nachwachsende Rohstoffe können derzeit nur angenommen werden, da ein kostengünstiger Einsatz noch nicht möglich ist, weil die technische Realisation erst in der Zukunft erfolgen kann.

mekraftwerke geplant. Hierbei ist einer Gasturbine eine Dampfturbine nachgeschaltet; die nutzbare Temperaturdifferenz beträgt ungefähr 1000 °K. Der Wirkungsgrad wird dadurch auf über 50% erhöht. Als Nebeneffekt kann bei dieser Kraftwerksart die Reinigung der Abgase wesentlich einfacher ausgeführt werden. Eine weitere Erhöhung des Wirkungsgrades herkömmlicher Kraftwerke kann durch *Heizkraftwerke* erzielt werden. Bei diesen HKW wird eine *Kraft-Wärme-Kopplung* (KWK) eingesetzt. Die KWK arbeitet in der ersten Phase wie ein herkömmliches

Wärme­kraft­werk. Primäre­ner­gie­trä­ger wer­den ver­brannt. Ein Wär­me­trä­ger wird er­hitzt und treibt eine Tur­bine an. In der zwei­ten Phase wird der von der Tur­bine kom­men­de Wär­me­trä­ger zum Hei­zen von Woh­nun­gen oder zur Er­zeu­gung von Pro­zess­wär­me ein­ge­setzt. Fol­gen­de Ge­gen­über­stel­lung zeigt die Wirkungs­grade der ver­schie­de­nen Kraft­werk­stypen (Tabelle II-5):

Tabelle II-5 Vergleich verschiedener Dampfkraftwerkstypen

|                                | Verluste<br>in % | erzeugte Energie<br>in % | Transportverluste<br>in % | bereitgestellte<br>Energie in % |
|--------------------------------|------------------|--------------------------|---------------------------|---------------------------------|
| Zentrales Kraftwerk            | 64               | 36                       | 4                         | 32                              |
| Zentrales Heizkraftwerk        | 18               | 82                       | 7                         | 75                              |
| Dezentrales Blockheizkraftwerk | 13               | 87                       | 2                         | 85                              |

Die in der Tabelle II-5 angegebenen Zahlen sind Prozentangaben der eingesetzten Primärenergie. Beim Heizkraftwerk (HKW) und beim Blockheizkraftwerk (BHKW) sind die Zahlen Maximalwerte, die erreicht werden, wenn die angebotene Wärme auch abgenommen wird. Wärme­kraft­werke er­zeu­gen zur Zeit un­ge­fähr 57% der elek­tri­schen En­er­gie in Deutsch­land.

2.3.1 Konventionelle Dampfkraftwerke

In konventionellen Wärme­kraft­werken wird nor­mal­er­weise Steinkohle oder Braunkohle als Primär­ener­gie­trä­ger ein­ge­setzt. Hier­bei gibt es die Rost­feue­rung, die Koh­le­staub­feue­rung oder die Wir­bel­schicht­feue­rung.

Bei der *Rostfeuerung* wird die Kohle in Stücken auf wandernde Roste geschüttet. Die Kohle durchwandert den Brennraum, gibt ihre Energie an einen Dampf­er­zeu­ger ab und fällt am Ende der Roste als Schlacke in entsprechende Behälter.

Bei der *Kohlestaubfeuerung* wird die Kohle feingemahlen und mit der Verbrennungsluft in den Feuer­raum geblasen. Hierdurch wird eine bessere Ver­bren­nung und Regelung erreicht.

Bei der *Wirbelschichtfeuerung* wird die Kohle im körnigen Zustand in den Brennraum auf eine Loch­platte eingebracht. Durch die Loch­platte strömt von unten Luft, die die Kohle zum Schweben bringt oder in den Brennraum wirbelt. Durch Zufügen von Kalk und durch eine geringe Brenntemperatur (850 °C) entstehen so die wenigsten Schadstoffe.

Die durch die Verbrennung erzeugte Energie wird von einem En­er­gie­trä­ger (normalerweise Dampf) zu den Tur­binen ge­lei­tet. An den Tur­binen wird die En­er­gie in Be­we­gungs­en­er­gie um­ge­wandelt und treibt einen Ge­ner­ator an, der die Be­we­gungs­en­er­gie in elek­tri­sche En­er­gie um­wandelt. Bei diesen Umwandlungsvorgängen entstehen Verluste in Form von Wärme, die an die Um­ge­bung abgeleitet werden muss. Die größte Ver-

lustwärme entsteht dadurch, dass die Turbine nur einen Teil der im Dampf enthaltenen Energie ausnutzen kann. Die Restenergie muss über Kühltürme oder Wärme­tausch­er an die Um­ge­bung abge­ge­ben wer­den. Im Bild II-4 ist ein Kohlekraftwerk im Prinzip dargestellt. Neuere Steinkohlekraftwerke erreichen einen Wirkungsgrad von 39%–45% bei Investitionskosten von un­ge­fähr 2000 DM/kW.

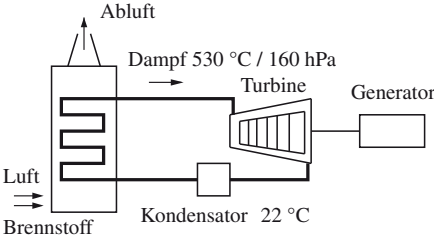


Bild II-4 Prinzip eines Dampfkraftwerks

2.3.2 Kombikraftwerke

Das Kombikraftwerk (GuD-Kraftwerk) ist eine Kombination aus einem Gasturbinen- und einem Dampf­tur­binen­kraft­werk. Bei diesem Kraftwerkstyp wird einer Gasturbine ein Dampfkessel nachgeschaltet.

Die Turbinenabgase heizen im Dampfkessel ein Medium auf, das eine Dampfturbine antreibt (Bild II-5). Auf diese Art werden Ausnutzungsgrade von über 58% erreicht. Eine weitere Möglichkeit des Einsatzes einer Gasturbine in Kombination mit einem Dampfkessel ist das sogenannte Repowering. Einem vorhandenen Wärme­kraft­werk wird eine Gasturbine vorgeschaltet. Die Abgase der Gasturbine dienen zum Vorwärmen der Verbrennungsluft. Hierdurch können Verbesserungen des Ausnutzungsgrades von bis zu 10% erzielt werden.

2.3.3 Kernkraftwerke

Kernkraftwerke (KKW) sind eine Sonderform der Wärme­kraft­werke. Bei den KKW wird als Primär­ener­gie­trä­ger angereichertes Uran eingesetzt. Der weitere Ablauf ist ähnlich dem der konventionellen Kraftwerke. Man unterscheidet Druckwasser-, Siedewasser- und gasgekühlte-graphitmoderierte Reaktoren. In Deutschland wird zur Zeit un­ge­fähr 29% der elek­tri­schen En­er­gie mit Kernreaktoren hergestellt. Um ein Gigawattjahr zu erzeugen, werden 160 t

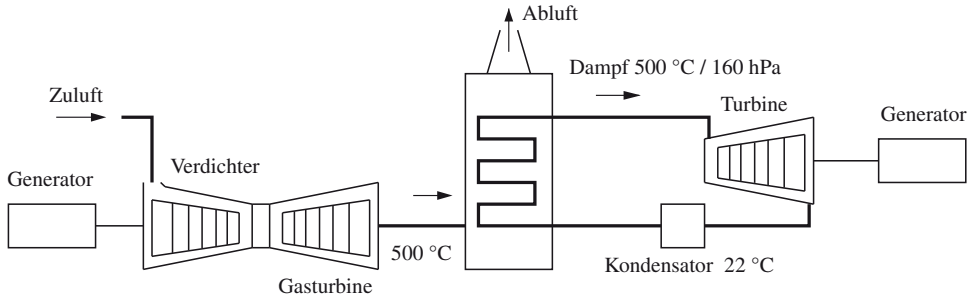


**Bild II-5** Prinzip eines Gas- und Dampfkraftwerks (GuD-Kraftwerk)

Natururan benötigt. Es fallen 20 t hochradioaktiver Abfall an. Die Reserve von Natururan gewährleistet ohne den Einsatz von Brutreaktoren eine Versorgung von ungefähr 100 Jahren oder 80 Terawattjahren. Ein Störfall (GAU) tritt nach statistischen Berechnungen alle 20000 Jahre pro Kraftwerksblock auf.

**2.3.3.1 Druckwasserreaktor**

Wasser wird als sogenannter Moderator und als Wärmeträger eingesetzt. Es wird unter einem so hohen Druck ( $p = 150 \text{ bar}$ ) gesetzt, dass es nicht mehr in die gasförmige Phase übergehen kann. Das durch die Kernspaltung erhitze Wasser erwärmt über einen Wärmetauscher das Wasser des Turbinenkreislaufs, welches die Turbine antreibt (Bild II-6).

**2.3.3.2 Siedewasserreaktor**

Beim Siedewasserreaktor ist ebenfalls Wasser der Moderator und Wärmeträger. Anders als beim Druckwasserreaktor wird das durch die Kernspaltung erhitze Wasser nicht unter hohem Druck gehalten und kann somit verdampfen. Dieser Wasserdampf treibt die Turbine direkt an. Der Nachteil dieses Reaktors ist, dass die Turbine vom radioaktiven Dampf durchströmt wird (Bild II-7).

**2.3.3.3 Hochtemperaturreaktor**

Bei diesem Reaktor werden die Kernbrennstäbe in einen Graphitklotz geschoben und mit einem Gas ( $\text{CO}_2$ ) beblasen. Als Wärmeträger wird also ein Gas

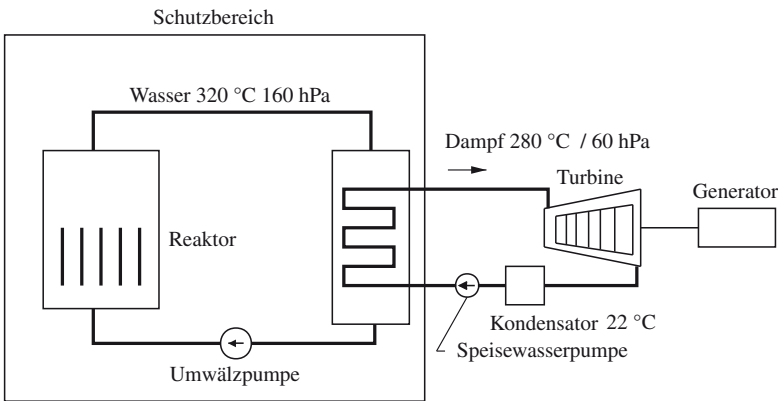


**Bild II-6**  
Prinzip eines Druckwasser-  
kernkraftwerks

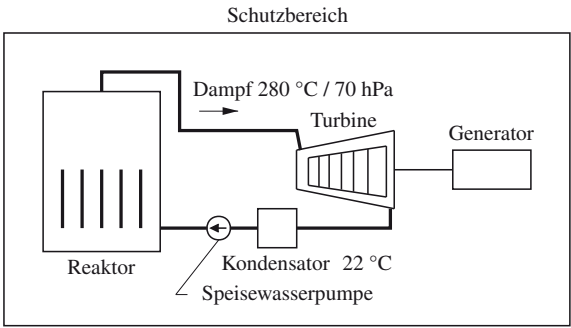
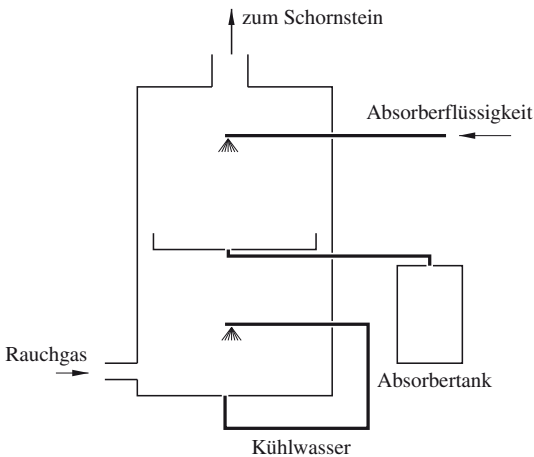


**Bild II-7**  
Prinzip eines Siedewasserkernkraftwerks

eingesetzt. Dieses Gas wird über einen Wärmetauscher geleitet. Wasser wird erhitzt und treibt eine Turbine an.

### 2.3.4 Umweltschutz

In zunehmendem Maße sind in den letzten Jahren Umweltschutzmaßnahmen für Kraftwerke eingesetzt worden. Maßnahmen für den Umweltschutz von Wärmekraftwerken sind der Bau von Entstickungs-, Entschwefelungs- und Entstaubungsanlagen.



*Entstaubungsanlagen* arbeiten hauptsächlich mit einem Elektrofilter (Bild II-8). Das Rauchgas wird zwischen Metallplatten (Niederschlagselektrode) durchgeleitet, zwischen denen sich profilierte Metallschienen (Sprühelektroden) befinden. Die Sprühelektroden werden an eine Gleichspannung von  $-30\,000\text{ V}$  bis  $-80\,000\text{ V}$  angeschlossen. Die Niederschlagselektroden werden geerdet und bilden den Pluspol. Durch den hohen Potentialunterschied entsteht an der Sprühelektrode ein hohes elektrisches

**Bild II-8**  
Prinzip einer REA  
nach dem Kalkstein/Gips-Verfahren  
Waschturm mit Kühlzone und Absorberteil

*Entschwefelungsanlagen* arbeiten hauptsächlich nach dem Nasswaschprinzip (Bild II-9). Hierbei wird das Rauchgas mit einer Waschsuspension besprüht, die das Schwefeldioxid durch eine chemische Reaktion weitgehend absorbiert. Hauptbestandteil dieser Entschwefelungsanlage ist der Wasch- oder Absorberturm, der eine Höhe von 40 m und einen Querschnitt von 15 m aufweisen kann. Die Waschlüssigkeit besteht aus einer Suspension von in Wasser gelöstem feingemahlenen Kalkstein ( $\text{CaCO}_3$ ). Teilweise wird anstelle des Kalksteins gebrannter Kalk eingesetzt. Nach der Wäsche ist das Rauchgas von ca. 95% des  $\text{SO}_2$  gereinigt. Durch die Wäsche entsteht als Endprodukt Kalziumsulfat-Dihydrat (Gips), nach folgender Reaktionsgleichung:

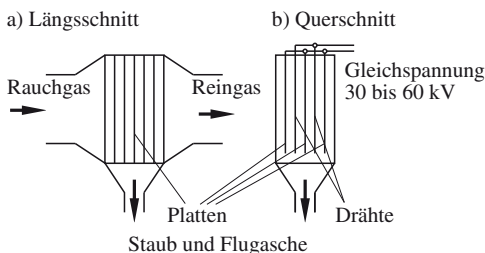
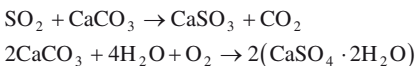


**Bild II-9** Prinzip eines Elektrofilters

Feld. Dadurch können Elektronen austreten und die vorbeifliegenden Staubpartikel negativ aufladen. Die negativ geladenen Staubteilchen werden von der Niederschlagselektrode angezogen und lagern sich dort an. In regelmäßigen Abständen wird die Niederschlagselektrode durch ein Klopferwerk zum Vibrieren gebracht, und der Staub fällt in einen Ascheabzug. Neben dieser Entstaubungsanlage wird noch ein Fliehkraftabscheider eingesetzt, der sich jedoch nur zum Herausfiltern großer Staubpartikel eignet. Es gibt zur Zeit mehr als 60 Pilot-Entstickungsanlagen in Deutschland. Durchgesetzt hat sich das

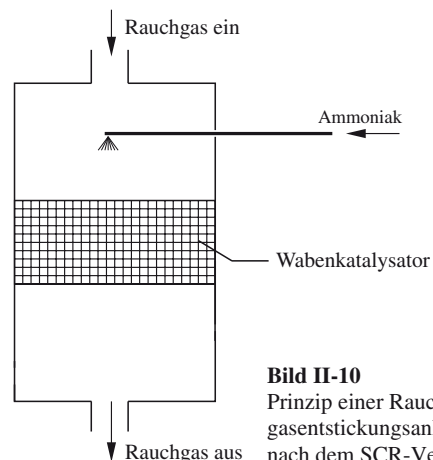
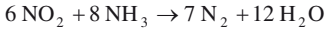
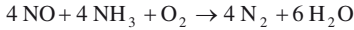


**Bild II-10**  
Prinzip einer Rauchgasentstickungsanlage  
nach dem SCR-Verfahren

SCR-Verfahren (Selective Catalytic Reduction), das die Stickoxide gezielt reduziert (Bild II-10). Rauchgase treten in den Reaktor ein, werden mit einem Gemisch aus Ammoniak ( $\text{NH}_3$ ) und Luft angereichert und durchströmen eine Katalysatorebene. Es laufen im wesentlichen zwei chemische Reaktionen ab:



Das Ergebnis dieses Verfahrens ist Stickstoff und Wasser. Die Katalysatoranlage wird als DENOX-Reaktor bezeichnet. Sie besteht aus vielen Keramikkörpern (Wabenkatalysator) mit einer Grundfläche von  $15 \times 15$  cm und einer Länge bis zu einem Meter. Der Gesamtkatalysator benötigt mehr als  $500 \text{ m}^3$  an Katalysatorelementen (über 2000 der Keramikkörper). Das keramische Basismaterial enthält Titanoxid ( $\text{TiO}_2$ ) und Verbindungen von Vanadium und Wolfram ( $\text{V}_2\text{O}_5$ ,  $\text{WO}_3$ ).

Eine weitere Katalysatortechnik setzt nicht Keramikkörper, sondern Plattenkatalysatoren aus einer Edelstahlverbindung ein. Durch diese Maßnahme kann der Ausstoß von Staub, Schwefeldioxid und Stickoxiden wesentlich verringert werden. Bei einer Stromerzeugung von 180 TWh ergibt sich von Jahr 1982 aus gesehen folgende Minderung:

**Tabelle II-6** Emissionsminderung von 1982 bis 1991

|                               | 1982 | 1989 | 1991 |
|-------------------------------|------|------|------|
| Bruttostromerzeugung in TWh   | 180  | 180  | 180  |
| Staub-Emission in kt          | 80   | 18   | 18   |
| $\text{SO}_2$ -Emission in Mt | 1,55 | 0,2  | 0,2  |
| $\text{NO}_x$ -Emission in Mt | 0,5  | 0,4  | 0,15 |

Die Reduktion von  $\text{CO}_2$  kann nur mit großem Aufwand direkt, also zur Zeit ausschließlich durch die Erhöhung des Ausnutzungsgrades der Primärenergie, erfolgen. Es wird angestrebt, die Primärenergieausnutzung auf ungefähr 0,25 kg SKE/kWh zu redu-

zieren. Zum Vergleich: Im Jahr 1950 betrug der Ausnutzungsgrad 0,6 kg SKE/kWh. Die eingesetzten Umweltschutzmaßnahmen erfordern jedoch einen Einsatz von Energie. Damit wird ein Teil der Wirkungsgradverbesserung wieder aufgehoben. Als Beispiel soll ein Steinkohlekraftwerk mit verschiedener Bruttoleistung dienen.

## 2.4 Wasserkraftwerke

In Deutschland waren im Jahre 1990 insgesamt 3826 Wasserkraftwerke am Netz, die zusammen eine Leistung von 2972 MW installierter Leistung aufwiesen. Von diesen Wasserkraftwerken wurden 591 von EVU mit einer Leistung von 2693 MW betrieben. Bei den Wasserkraftwerken bestehen die Unterschiede in den Fallhöhen des Wassers. Man unterscheidet zwischen Niederdruckanlagen (Fallhöhe < 25 m), Mitteldruckanlagen (Fallhöhe 25 m–100 m) und Hochdruckanlagen (Fallhöhe > 100 m).

Ferner wird noch die Art unterschieden, wie das Wasser eingesetzt wird. *Laufwasserkraftwerke* (Niederdruck) sind ständig in Betrieb und an Flussläufen mit hohem Wasseraufkommen oder hohem Gefälle zu finden. Eingesetzt wird die Kaplan turbine, deren Schaufeln entsprechend dem Wasseraufkommen verstellt werden können, und deren Wirkungsgrad auch bei weniger Wasseraufkommen noch relativ gut ist.

*Speicherkraftwerke* (Mittel- oder Hochdruck) nutzen den vorhandenen Niederschlag aus, indem das anfallende Wasser in Talsperren gespeichert und bei Bedarf über die Turbine (meist eine Pelton- oder Francisturbine bei Mitteldruck) abgeleitet wird. *Pumpspeicherkraftwerke* (Hochdruck) dienen zum Ausgleich von Spitzenlasten. In Schwachlasttälern wird Wasser in ein höher gelegenes Speicherbecken gepumpt. Bei Spitzenlastbedarf oder Ausfall eines Wärmekraftwerks wird die gespeicherte Energie in elektrische Energie umgewandelt.

*Gezeitenkraftwerke* (Niederdruck) nutzen die Bewegung des Meerwassers zwischen Ebbe und Flut aus. Bei Flut strömt das Wasser durch die Turbine in einen Speicher, von wo es bei Ebbe durch die Turbine wieder austritt. Um einen vernünftigen Kosten-

**Tabelle II-7** Wirkungsgradreduzierung durch Umweltschutzmaßnahmen

|                             | Kraftwerk I |        | Kraftwerk II |       |
|-----------------------------|-------------|--------|--------------|-------|
| Bruttoleistung MW           | 350         | 100%   | 800          | 100%  |
| elektrischer Eigenbedarf MW | 31          | 8,8%   | 52           | 6,5%  |
| Entstaubung MW              | 0,5         | 0,14%  | 1,7          | 0,21% |
| Entstickung MW              | 1,2         | 0,34%  | 1,7          | 0,21% |
| Entschwefelung MW           | 6           | 1,71%  | 10           | 1,25% |
| Eigenbedarf insgesamt MW    | 38,7        | 11,05% | 65,4         | 8,17% |



Nutzen-Effekt zu erhalten, ist ein Tidenhub von 10 m erforderlich.

An der elektrischen Energieerzeugung hatten Wasserkraftwerke in Deutschland im Jahr 1989 einen Anteil von ungefähr 5%. Der Wirkungsgrad beträgt  $\eta \approx 90\%$ . Da in Deutschland schon die meisten Wassereserven genutzt werden, ist eine weitere Steigerung nicht ohne den Einsatz großer Investitionen möglich.

## 2.5 Windkraftwerke

Die Erzeugung von elektrischer Energie durch Windkraftwerke ist stark an günstig gelegene Standorte gebunden. Die Windenergie ist eine nicht kontinuierlich vorhandene Energie. Eine konstante Energieversorgung kann allein durch Windenergie nicht gewährleistet werden. Die Kosten für Windenergie betragen zur Zeit in Deutschland für Kraftwerke mit einer Leistung von 100 ... 300 kW ungefähr 0,2 DM/kWh. Als Beispiel für eine Windkraftanlage dient die im Jahr 1991 fertiggestellte WKA 60 mit einer Spitzenleistung von 1,2 MW (Standort Kaiser-Wilhelm-Koog).

Technische Daten: Beginn der Rotordrehung bei 4,9 m/s Windgeschwindigkeit (Windstärke 3); Nenn-

leistung ab 6 m/s Windgeschwindigkeit (Windstärke 6); Nennleistung bis 24 m/s Windgeschwindigkeit (Windstärke 9); ab Windstärke 9 wird die Anlage abgeschaltet. Kleinere Anlagen setzen bei ungefähr 4 m/s Windgeschwindigkeit ein und erreichen ihre Nennleistung bei ungefähr 12–16 m/s.

Die Kosten einer Kleinanlage (3,6 kW) beliefen sich 1992 auf ungefähr 42 TDM ohne Montage. Einsatzgebiete für Windkraftanlagen sind Orte, an denen möglichst das ganze Jahr eine durchschnittliche Windgeschwindigkeit von über 4 m/s herrscht. Das ist in Deutschland nur an der Küste und in den Mittelgebirgen der Fall (Bild II-11).

## 2.6 Solarkraftwerke

Die Energieeinstrahlung der Sonne beträgt ein Vielfaches des derzeitigen Weltenergiebedarfs. Die Ausnutzung der Sonnenenergie ist jedoch durch die geringe Energiedichte je  $\text{m}^2$ , die Ungleichmäßigkeit der Einstrahlung und die derzeitigen hohen Kosten für die Anlagen in den Industrieländern Europas noch nicht wirtschaftlich. Die Nutzung kann auf zwei Arten erfolgen. Die erste Möglichkeit besteht darin, dass die Sonnenenergie aufgefangen und in thermische Energie umgewandelt wird. Dieses Verfahren setzen die *Sonnenwärmekraftwerke* ein. Wird die Sonnenenergie direkt in elektrische Energie umgewandelt, so bezeichnet man diese Kraftwerke als *photovoltaische Kraftwerke*.

### 2.6.1 Sonnenwärmekraftwerke

In Sonnenwärmekraftwerken werden die Sonnenstrahlen mit großen Reflektoren eingefangen, gebündelt und zum Erhitzen eines Wärmeträgers benutzt (Bild II-12).

Der Wärmeträger durchströmt wiederum eine Turbine und erzeugt elektrische Energie. Die Herstellungskosten liegen derzeit bei ungefähr 0,16 DM/Wh. Die solarthermischen Kraftwerke sind gut umweltverträglich. Sie emittieren keinerlei Schadstoffe und kaum Lärm, jedoch Abwärme der Kraftwerkskühlung. Der Landbedarf ist gering, da nur Platz für die Fundamente benötigt wird. Zwischen den Fundamenten kann Weidewirtschaft betrieben werden.

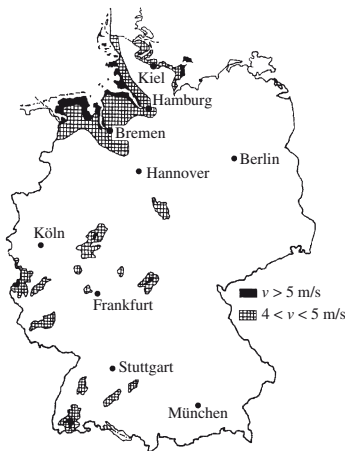


**Bild II-11** Geeignete Standorte zum Betrieb von Windkraftanlagen (Quelle: BMFT 1987)

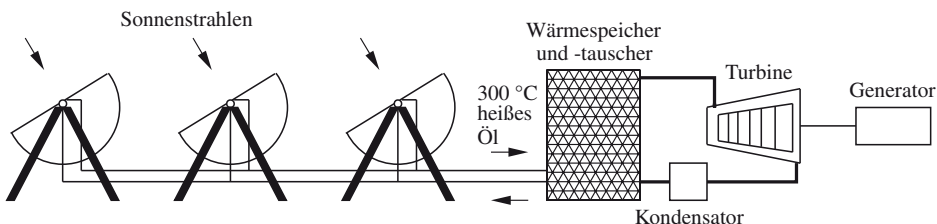


**Bild II-12** Prinzip einer Solarfarmanlage mit Ringkollektoren

### 2.6.2 Photovoltaische Kraftwerke

Bei diesen Kraftwerken wird die Lichtenergie der Sonne direkt in elektrische Energie umgesetzt. Bei Solarzellen werden heute bis zu 31% der eingestrahlten Sonnenenergie in elektrische Energie umgesetzt. Die Kosten dieser Solarzellen sind hoch. Solarzellen, die nur 12% der eingestrahlten Energie umsetzen, sind heute bereits kostengünstig zu fertigen. In Halbleitern werden die Photonen absorbiert und Ladungsträger mit Energie versehen. Die Energieausbeute beträgt bei Spitzenleistung ungefähr  $1 \text{ W}/100 \text{ cm}^2$  Solarzellenfläche. Die Herstellung von kristallinen Solarzellen ist material- und energieaufwendig und deshalb teuer. Vorteil der Solarzellen ist, dass sie praktisch überall installiert werden können. Die Größe der Einheiten ist beliebig zusammensetzbar. Durch die dezentrale Installation werden Leitungswege und somit Kosten gespart. Die Kosten für photovoltaische Anlagen betragen zur Zeit 0,3 bis 0,4 DM/kWh bei durchgehender Nutzung. Das bedeutet bei optimistischer Schätzung für unsere Breitengrade Kosten von ungefähr 1,00 ... 1,50 DM/kWh. Da die Solarzellen überwiegend auf Dächern und an Fassaden montiert werden, erwächst kein Landbedarf. Es entstehen beim Betrieb keine Emissionen. Vollständiges Recycling ist möglich. Sollten die Solarzellen brennen, können giftige Dämpfe entstehen, wenn die Zellen aus Gallium-Arsenid oder Kadmium-Sulfid hergestellt worden sind.

### 2.6.3 Solar-Wasserstoff-Anlage

In der Solar-Wasserstoff-Anlage wird die elektrische Energie, die von Solarzellen geliefert wird, genutzt, um in einer Elektrolyse Wasser in Wasserstoff und Sauerstoff zu spalten. Diese Anlagenform befindet sich zur Zeit im Versuchsstadium.

## 2.7 Sonstige Kraftwerke

### 2.7.1 Biomasse

Unter Biomasse versteht man im energetischen Sinn alle pflanzlichen und tierischen Stoffe sowie deren

Umwandlungsprodukte und Abfälle, aus denen sich Energie gewinnen lässt. Der Einsatz von Biomasse zur Erzeugung von elektrischer Energie kann durch direktes Verbrennen oder Umwandlung in Gas und anschließendes Verbrennen erfolgen. Ferner können Gase, die beim Verfaulen von Biomasse entstehen, eingesetzt werden. Die Belastung der Umwelt ist geringer als bei Wärmekraftwerken, da bei den Biomassekraftwerken ein  $\text{CO}_2$ -Kreislauf vorhanden ist und die Biomasse weniger Asche erzeugt und weniger Schwefel enthält. Einer vermehrten Nutzung von Biomasse stehen jedoch Nachteile entgegen. Ein Anbau von Energie-Biomasse entzieht der Weltbevölkerung landwirtschaftliche Flächen für die Nahrungsmittelproduktion. Die Energiebilanz ist nicht positiv, da der Energieertrag kleiner ist als der Energieaufwand für Anbau und Verarbeitung. Der Einsatz von Biomasse lohnt nur, wenn die Biomasse direkt verwertet werden kann. Die Beimischung von Ethanol aus dem Anbau von Raps oder Zuckerrüben zum Benzin ist eine weitere Möglichkeit des Einsatzes von Biomasse. Hierbei würden jedoch 10% der deutschen Ackerfläche benötigt, um 5% des Benzinanteils zu substituieren.

### 2.7.2 Brennstoffzellen

Brennstoffzellen arbeiten ähnlich wie Batterien, nur wird der Energieträger fortwährend ersetzt. In einer *Phosphorsäurezelle* wird  $\text{H}_2$  an einer gasdurchlässigen Anode oxidiert. Die dabei entzogenen Elektronen fließen in einem externen Stromkreis durch einen elektrischen Verbraucher und geben dabei elektrische Leistung ab. Die  $\text{H}^+$ -Ionen lösen sich in der Phosphorsäure. An der Kathode zersetzt sich Sauerstoff in  $\text{OH}^-$ -Ionen und nimmt dabei ein Elektron aus dem externen Stromkreis auf. Die  $\text{OH}^-$ - und die  $\text{H}^+$ -Ionen verbinden sich an der Kathode in der Phosphorsäure zu Wasserdampf. Der Wasserdampf wird kontinuierlich aus der Phosphorsäure abgetrennt.

Die so erzeugte Energie ist identisch mit der Reaktionsenthalpie der Gesamtreaktion  $2 \text{H}_2 + \text{O}_2 \rightarrow$

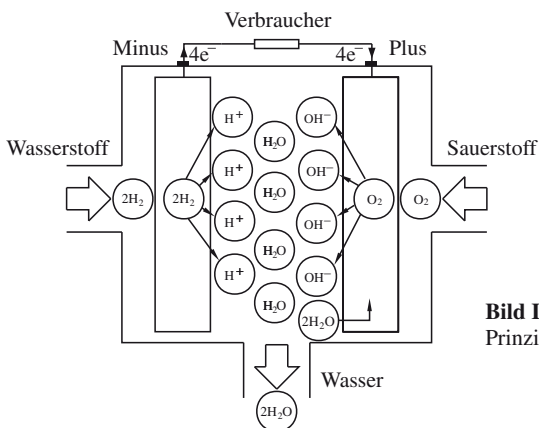


**Bild II-13**  
Prinzip einer Wasser-Sauerstoff-Brennstoffzelle

$2\text{H}_2\text{O} + \text{Energie}$  (Bild II-13). Der Wirkungsgrad heutiger Brennstoffzellen liegt bei ungefähr 50%. Die Betriebstemperatur der Phosphorzelle beträgt 200 °C. Als zukunftsträgliche Variante der Brennstoffzellen gilt die *Festoxid-Brennstoffzelle*. Eine Keramik aus Zirkonoxid, die nur Sauerstoff durchlässt, dient als Elektrolyt. Im Betrieb wird die Kathode mit Luft versorgt. Bei Temperaturen von 800 °C bis 1000 °C werden die Luftsauerstoffatome ionisiert (+2e). Die Sauerstoffionen wandern durch das Elektrolyt zur Anode, geben dort die zwei Elektronen ab und reagieren mit den Brennstoffatomen. Zwischen Anode und Kathode entsteht ein Potentialgefälle von ungefähr 1 V. Verbindet man die beiden Elektroden miteinander, kann ein Strom fließen. In dieser Brennstoffzelle dient Erdgas als Energielieferant. Mögliche Varianten der Brennstoffzelle sind in Tabelle II-8 aufgelistet.

Neutron umgewandelt. Hierbei wird eine sehr große Energiemenge freigesetzt. Deuterium (D oder  $^2\text{H}$ ) enthält 1 Proton und 1 Neutron und kommt auf der Erde natürlich im Wasser als schweres Wasser  $\text{D}_2\text{O}$  vor. Tritium (T oder  $^3\text{H}$ ) enthält 1 Proton und 2 Neutronen und kommt auf der Erde nicht natürlich vor (1,8 kg), da es radioaktiv ist und mit einer Halbwertszeit von 12 Jahren zerfällt. Es wird in Kernreaktoren durch Kernspaltung gewonnen oder entsteht in der Hochatmosphäre, zerfällt aber direkt in  $^3\text{He}$ .  
Fusion:  $\text{T (1p, 2n)} + \text{D (1p, 1n)} = \text{He (2p, 2n)} + \text{n} + \text{Energie}$ . Zur Zeit ist man noch nicht in der Lage, die Kernfusion über längere Zeit aufrecht zu erhalten. Aus heutiger Sicht rechnet man mit einem wirtschaftlichen Einsatz der Kernfusion in ungefähr 40 Jahren.

**Tabelle II-8** Brennstoffzellen: Temperaturbereiche und Brenngase

| Brennstoffzellentyp | Temperatur in °C | Brenngas                      | Oxidant           |
|---------------------|------------------|-------------------------------|-------------------|
| Alkalisch           | 60–90            | Wasserstoff reinst            | Sauerstoff reinst |
| Membran             | 60–80            | Wasserstoff                   | Sauerstoff, Luft  |
| Phosphorsäure       | 160–220          | Erdgas, Wasserstoff           | Sauerstoff, Luft  |
| Karbonatschmelzen   | 600–650          | Erdgas, Kohlegas, Wasserstoff | Sauerstoff, Luft  |
| Oxidkeramisch       | 800–1000         | Erdgas, Kohlegas, Wasserstoff | Sauerstoff, Luft  |

Gegenüber konventionellen Wärmekraftwerken weisen Brennstoffzellen drei grundlegende Unterschiede auf:  
Der thermodynamische Wirkungsgrad der Energieumwandlung von Wasserstoff und Sauerstoff in elektrische Energie ist bei niedrigen Betriebstemperaturen am höchsten.  
Der Wirkungsgrad der elektrochemischen Energieumwandlung nimmt im Teillastbereich zu. Brennstoffzellen können also auch bei geringer Belastung sehr effektiv betrieben werden.  
Brennstoffzellenkraftwerke lassen sich modular aus kleinen Standardbausteinen hoher Leistungsfähigkeit aufbauen. Wird die Brennstoffzelle in Form eines Brennstoffzellen-Blockheizkraftwerkes eingesetzt, kann die bei der chemischen Reaktion erzeugte Abwärme für Heizzwecke genutzt werden, und der Ausnutzungsgrad der Primärenergie erhöht sich bis zu 90%.  
Heute stehen Einheiten von Brennstoffzellen-Blockheizkraftwerken mit einer elektrischen Leistung von 200 kW als Pilotanlagen in Dorsten, Dortmund und Darmstadt.

**2.7.3 Fusionsreaktor**

Im Fusionsreaktor werden Deuterium (schwerer Wasserstoff) und Tritium (überschwerer Wasserstoff) bei ungefähr 100 Millionen Grad zu Helium und einem

**3 Elektrische Energieverteilung**

Für die Übertragung und Verteilung von elektrischer Energie werden hauptsächlich *Drehstromnetze* verwendet, in besonderen Fällen auch *Einphasennetze* oder *Gleichstromnetze*. Die Frequenz, mit der die Drehstromnetze betrieben werden, ist in den meisten Ländern 50 Hz. Länder wie die USA oder Japan benutzen eine Frequenz von 60 Hz. In Deutschland werden bevorzugt folgende Netzspannungen eingesetzt: Niederspannungsnetze 400 V (230 V), 500 V, 660 V; Mittelspannungsnetze 10 kV, 20 kV (35 kV); Hochspannungsnetze 110 kV, 220 kV, 380 kV. Der weitaus größte Teil der Verbraucher elektrischer Energie ist für den Anschluss an das Niederspannungsnetz vorgesehen. Nur Verbraucher größerer Leistung werden an ein Mittelspannungsnetz angeschlossen. Die Niederspannungsnetze speist man über Transformatoren aus dem Mittelspannungsverteilnetz. Die Mittelspannungsnetze werden entweder von regionalen Kraftwerken oder von einem Hochspannungsverteilnetz gespeist. Diese Hochspannungsnetze sind in einem europäischen Verbund zusammengeschlossen. Die drei Stromsysteme, die heute zur Anwendung gelangen, sind Drehstrom, Einphasen-Wechselstrom und Gleichstrom. Die wichtigsten Anwendungsgebiete und ihre Erzeugung zeigt Tabelle II-9.

**Tabelle II-9** Stromformen, Anwendungen und Erzeugung

|                        | Anwendung                                                                                                                                                                                                                | Erzeugung                                                                         |
|------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| Drehstrom              | Energieübertragung, Energieerzeugung, Energieverteilung, Verbraucher mit großen Leistungen, Motoren                                                                                                                      | Synchrongenerator                                                                 |
| Einphasen-Wechselstrom | Haushaltsgeräte, Werkzeuge, Werkzeugmaschinen, Verbraucher mit kleinen Leistungen, Beleuchtung, Frequenz $16\frac{2}{3}$ Hz, Fahrmotore für Bahnen                                                                       | Entnahme aus dem Drehstromnetz, Synchrongenerator, Umrichter, rotierende Umformer |
| Gleichstrom            | Elektrolyse, Galvanotechnik, Antriebe, Bahnmotore, Erregung von Magneten, Erregung von Synchronmaschinen, Elektrofilter, Farbspritzen, Steuerungen, Computer, Energieübertragung (Hochspannungs-Gleichstrom-Übertragung) | Batterien, Brennstoffzellen, Gleichrichter, Gleichstromgenerator                  |

**3.1.1 Gleichstromnetz**

Gleichstromnetze werden als Zwei- oder Dreileiternetze betrieben. Ausnahmen bilden Energiekabel, die im Meer verlegt sind. Dann reicht ein Leiter aus; der zweite Leiter wird durch das Meerwasser gebildet.

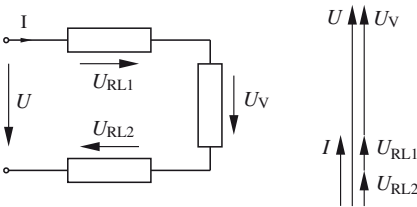


**Bild II-14** Gleichstromnetz mit Zeigerbild von Strom und Spannung

In Gleichstromnetzen entstehen nur Wirkverluste; Spannung und Strom haben gleiche Phasenlage (Bild II-14). Werden Gleichstromkabel zur Energieübertragung eingesetzt, benötigen sie nur im Einschaltvorgang einen Ladestrom für die vorhandene Kapazität. Gleichstromkabel können also mit hoher Spannung betrieben werden und dabei weite Entfernungen überbrücken. Eingesetzt wird das Gleichstromnetz in der Energieverteilung hauptsächlich bei längeren Seekabelverbindungen (Ostseekabel) oder als Kupplung zwischen großen Verteilnetzen (Ost-Westeuropa).

**3.1.2 Wechselstromnetz**

Einphasen-Wechselstromnetze werden als Zweileitersysteme betrieben, die symmetrisch oder unsymmetrisch zur Erde geschaltet sind. Zur Energieübertragung eignet sich das Einphasen-Wechselstromnetz nur für kleine Leistungen mit der Ausnahme des Bahnstromnetzes. Beim Bahnstromnetz wird diese Netzform eingesetzt, da nur ein einziger Stromabnehmer erforderlich ist.

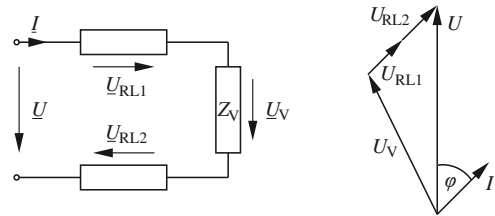


**Bild II-15** Wechselstromnetz mit Zeigerbild von Strom und Spannung (Leitung nur mit R)

Im Einleiter-Wechselstromnetz kann zwischen Strom und Spannung je nach Verbraucher eine Phasenverschiebung entstehen (Bild II-15). Im Einphasen-Wechselstromnetz wird Blindleistung transportiert, die einen Einsatz für größere Leistungen unwirtschaftlich werden lässt.

**3.1.3 Drehstromnetz**

Das Drehstromnetz ist entweder als Dreileiter- (Leiter L1; L2; L3) oder als Vierleitersystem (Leiter L1; L2; L3; N) geschaltet. Im Drehstromnetz ergeben sich *Außenleiterspannungen*  $U_{L1L2}, U_{L2L3}, U_{L3L1} = U$  und *Strangspannungen*  $U_{L1N}, U_{L2N}, U_{L3N} = U_{Str}$ . Werden die Außenleiterspannungen zu den Strangspannungen ins Verhältnis gesetzt, erhält man den

*Verkettungsfaktor*  $U_{L1L2}/U_{L1N} = \sqrt{3}$ . Als Nennspannung der Betriebsmittel wird immer die verkettete Spannung angegeben.

Bei symmetrischer Belastung ist zu jedem Zeitpunkt die Summe der Ströme gleich Null. Bei *Dreieckschaltung* (Bild II-16) der Verbraucher gilt:

*Leiterstrom*  $I = \sqrt{3} \cdot I_{Str}$  (II.1)

*Symmetriebedingung*  $I = I_1 = I_2 = I_3$  (II.2)

*Leiterspannung*  $U = U_{Str}$  (II.3)

Bei *Sternschaltung* (Bild II-17) der Verbraucher gilt:

*Leiterspannung*  $U = \sqrt{3} \cdot U_{Str}$  (II.4)

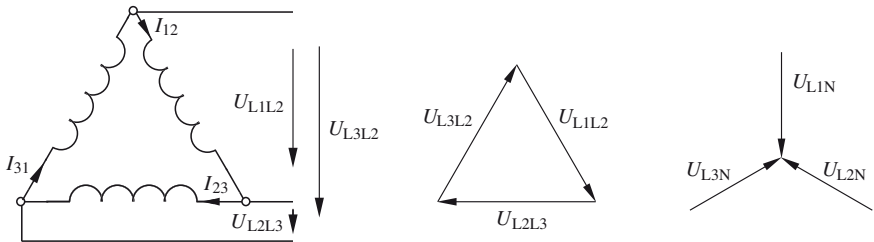


Bild II-16 Dreiecksschaltung mit Zeigerbild der Spannungen

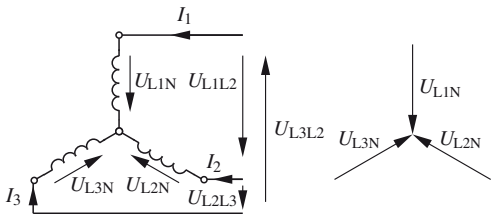


Bild II-17 Sternschaltung mit Zeigerbild der Sternspannungen

Symmetriebedingung  $U = U_{12} = U_{23} = U_{31}$  (II.5)

Leiterstrom  $I = I_{\text{Str}}$  (II.6)

Ist bei einer unsymmetrischen Belastung im Drehstromnetz der Verbraucher im Stern geschaltet und der Sternpunkt über einen Neutralleiter geerdet, so wird der Neutralleiter von einem Differenzstrom durchflossen, der abhängig von der Unsymmetrie des Verbrauchers ist. Die Strangstroms und Spannungen verändern sich entsprechend den Verbrauchern (Bild II-18).

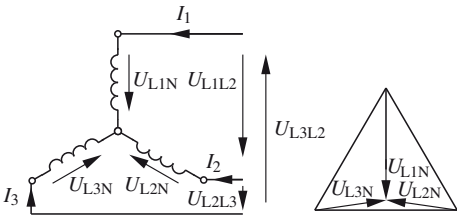


Bild II-18 Sternschaltung mit Zeigerbild der Sternspannungen bei unsymmetrischen Belastungen

Der Vorteil des Drehstromnetzes gegenüber dem Einphasen-Wechselstromnetz besteht darin, dass im symmetrischen Betrieb mit den drei Leitern L1, L2, L3 die gleiche Leistung übertragen werden kann wie mit drei Einphasensystemen, die jedoch sechs Leiter dafür benötigen. Berechnungen von Drehstromnetzen können bei vorliegender Symmetrie durch Netzreduktion einphasig vorgenommen werden.

3.2 Netzstrukturen

Die elektrischen Netze zur Übertragung und Verteilung der elektrischen Energie sollten stets so gestaltet werden, dass sie die Aufgabe der Energieverteilung

optimal erfüllen. Bedingt durch die Zunahme von immer größeren Kraftwerkseinheiten muss immer mehr Energie vom Ort der Erzeugung zum Verbraucher transportiert werden. Um Energie wirtschaftlich zu verteilen, muss die Nennspannung der Übertragungsleitungen entsprechend erhöht werden, da sich die Wirtschaftlichkeit und Zuverlässigkeit mit zunehmender Spannung erhöht. Übertragungsleitungen mit hohen Nennspannungen erfordern jedoch einen großen Platzbedarf für die Trasse. Ferner steigt mit zunehmender Spannung die Kurzschlussleistung, die von den Netzkomponenten beherrscht werden muss. Deshalb werden den gebräuchlichsten Spannungsebenen bestimmte Übertragungsfunktionen zugeordnet (Tabelle II-10).

Tabelle II-10 Spannungsebene, Übertragungsleistung und Länge

|                     |    |    |     |     |     |
|---------------------|----|----|-----|-----|-----|
| Spannung in kV      | 10 | 20 | 110 | 220 | 380 |
| Leistung in MW      | 2  | 2  | 70  | 150 | 500 |
| Leitungslänge in km | 8  | 20 | 40  | 200 | 400 |

Unabhängig von der Spannungsebene ist die Struktur des Netzes stets so zu gestalten, dass ein Fehler die Versorgung mit elektrischer Energie nicht unterbricht. Erst ein zweiter Fehler muss zur Unterbrechung führen.

3.2.1 Strahlennetz

Das Strahlennetz ist die einfachste Netzform. Von einem bestimmten Einspeisepunkt führen Leitungen strahlenförmig, oder auch vielfach verzweigt, zu den Verbrauchern (Bild II-19).

Die Verbraucher werden also einseitig gespeist. Die Leitungsquerschnitte sollten bei Neuanlagen gleich sein, um eine spätere Umwandlung der Netzform zu ermöglichen.

*Vorteile:* Übersichtliche Leitungsführung; kostengünstige Ausführung bei Abstufung des Leitungsquerschnittes; einfacher Leitungsschutz; einfache Blindleistungskompensation.

*Nachteile:* Geringer Lastausgleich; schlechte Spannungshaltung; geringe Versorgungssicherheit; begrenzte Erweiterungsmöglichkeiten; selektives Abschalten gestörter Netzteile nicht möglich.

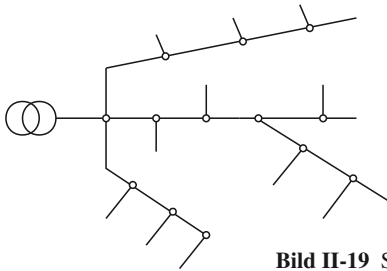
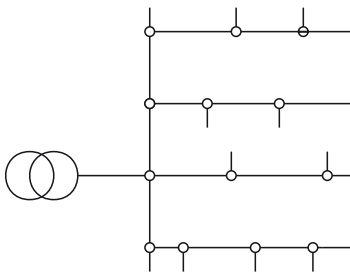


Bild II-19 Strahlennetz

**Anwendungsgebiete:** Räumlich begrenzte Versorgungsgebiete; Hausinstallation; ländliche Versorgungsgebiete; Industriegebiete mit Verbrauchern gleicher Anschlusswerte ohne hohe Lastspitzen (Textilfabriken, Druckereien, feinmechanische Werkstätten).

### 3.2.2 Ringnetz

Beim Ringnetz werden die Verbraucher zweiseitig gespeist (Bild II-20). Die Leitungen werden in Form von Ringen, ausgehend vom einspeisenden Netz, verlegt.

Bild II-20  
Ringnetz

Die Querschnitte der Leitungen sollen so bemessen sein, dass die Versorgung der Verbraucher auch einseitig erfolgen kann. Im Betrieb werden die Ringe teilweise offen gefahren. Diese Fahrweise vereinfacht den Netzschutz und lässt gleichzeitig die Möglichkeit offen, bei einer Störung nur defekte Abschnitte freizuschalten.

**Vorteile** (gegenüber Strahlennetz): Leitungsreserven; höhere Versorgungssicherheit; verbesserter Lastausgleich; geringere Spannungsunterschiede; Möglichkeit selektiver Ausschaltung gestörter Netzteile.

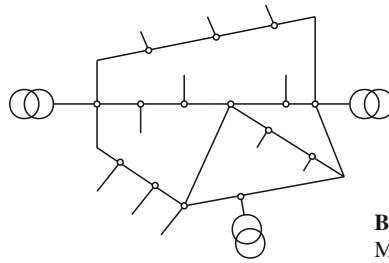
**Nachteile:** Versorgung nur über eine Station, daher bei deren Ausfall größeres Gebiet ohne Versorgung; erhöhte Ansprüche an Schutz; erhöhte Aufwendungen an Blindstromkompensation.

**Anwendungsgebiete:** Nieder- und Mittelspannungsnetze der EVU; Industrienetze; 110 kV-Netze in Großstädten.

### 3.2.3 Maschennetz

Das Maschennetz entsteht durch den Zusammenschluss aller Leitungen innerhalb eines Versorgungsbezirks (Bild II-21).

Die Leitungen werden an den Knotenpunkten über Sicherungen oder Leistungsschalter miteinander ver-

Bild II-21  
Maschennetz

bunden. Die Einspeisung des Netzes erfolgt über Stationen, die in den Schwerpunkten des Energiebedarfs aufgestellt sind. Vorteilhaft sind einheitliche Leitungsquerschnitte und gleiche Ausbildung der Knotenpunkte, die es ermöglichen, die Schwerpunkstationen bei Bedarf örtlich zu versetzen. Beim Maschennetz muss gewährleistet sein, dass im Fehlerfall eine rasche und selektive Abschaltung des defekten Netzabschnittes erfolgt.

**Vorteile:** Hohe Versorgungssicherheit; Leitungsreserven; große räumliche Netzausdehnung möglich; beliebig erweiterbar; geringe Spannungsschwankungen; guter Lastausgleich.

**Nachteile:** Hohe Investitionskosten; hohe Kurzschlussleistung; hohe Anforderungen an den Netzschutz; hohe Anforderungen an die Schaltgeräte; schwierige Netzauslegung.

**Anwendungsgebiete:** Niederspannungsnetze in Industriebetrieben mit großer Lastdichte; Netze mit Verbrauchern, die große Laststöße verursachen; Mittelspannungsnetze der Industrie oder der EVU, die eine hohe Versorgungssicherheit fordern; 110 kV-Verteilungsnetz der Landesversorgung.

### 3.2.4 Verbundnetz

Die öffentliche Stromversorgung wird durch die EVU abgedeckt, deren Versorgungsgebiete durch Verträge abgegrenzt sind. In Deutschland gibt es über 900 EVU, von denen 679 beim Spitzenverband der Elektrizitätswirtschaft VDEW erfasst sind. Von diesen erzeugen 53 Unternehmen nur Energie, 364 Unternehmen erzeugen und verteilen Energie und 262 Unternehmen verteilen nur Energie. Unter den 53 Unternehmen, die nur Energie erzeugen, gibt es die 8 Unternehmen der Deutschen Verbund Gesellschaft (DVG): Preag (Preußische Elektrizitäts AG); HEW (Hamburgische Electricitäts-Werke); VEW (Vereinigte Elektrizitäts-Werke Westfalen AG); RWE (Rheinisch Westfälisches Elektrizitätswerk AG); Badenwerk AG; Bayernwerk AG; EVS Energieversorgung Schwaben AG; BEWAG Berliner Licht- und Kraft AG. Diese acht Unternehmen liefern ungefähr 80% der gesamten benötigten elektrischen Energie. Damit die Energie zwischen den Erzeugern ausgetauscht werden kann, wurde das Verbundnetz installiert. Das Verbund- oder Übertragungsnetz ist ausschließlich zum Transport der Energie vom Erzeuger (Kraftwerke, insgesamt 1235 in der alten BRD, davon 50%



unter 1 MW) zum Leitungsspannwerk oder zwischen den Leitungsspannwerken gedacht. Hierbei wird keine Energie an Verbraucher abgegeben. Neben der DVG gibt es noch die ARE (Zusammenschluss der regionalen EVU) und die VKU (Zusammenschluss der kommunalen EVU). Von den 679 erfassten EVU sind 442 Unternehmen der öffentlichen Hand (95% Anteil und mehr), 112 sind gemeinschaftliche Unternehmungen (unter 95% öffentlich, unter 75% Anteil in privater Hand), und 113 EVU sind private Unternehmungen (mehr als 75% Anteil in privater Hand). Auf dem Gebiet der ehemaligen DDR wurde die VEAG mit 14 regionalen EVU gegründet (ein Zusammenschluss der Bayernwerke, des RWE und der Preag).

**Vorteile des Verbundsystems:** Hohe Kraftwerksleistung, dadurch geringere Investitionen; geringere Betriebskosten; höhere Wirtschaftlichkeit; gleichmäßige Netzauslastung; kleinere mitlaufende Reserve; hohe Sicherheit vor Versorgungsunterbrechungen. Um die Vorteile des Verbundsystems richtig ausnutzen zu können, sind alle angeschlossenen Kraftwerksbetreiber verpflichtet, Reserven vorzuhalten.

Die **Sekundenreserve** (Schnellregelung) sorgt dafür, dass jedes Kraftwerk seine Leistung innerhalb von 5 s um 1,25% und innerhalb der folgenden 5 s um 2,5% erhöhen kann (Turbinenventile werden nicht vollständig geöffnet).

Die **Minutenreserve** wird durch schnellregelbare Kraftwerke (Gasturbine, Pumpspeicher) bereitgestellt.

Die **Stunden- oder Langzeitreserve** unterstützt durch eine Erhöhung der Kraftwerksleistung der Grund- und Mittellastkraftwerke die geforderte Dauerlast.

**Nachteile:** Zentrale Lenkungsstelle; Steuerung nur mit Leitrechner möglich.

**Aufgaben:** Übertragung großer Leistung über weite Entfernungen; Energieaustausch zwischen Kraftwerken; Energiesammelschiene zwischen Kraftwerken und Verbrauchsschwerpunkten.

## 4 Betriebsmittel der Energietechnik

Folgende Betriebsmittel werden in den Netzen hauptsächlich eingesetzt: Mittelspannungskabel; Mittelspannungsschaltanlagen; Mittelspannungsschaltgeräte; Sekundärschutzgeräte; Transformatoren; Drosselspulen; Sternpunktbildner; Niederspannungskabel; Niederspannungsschaltanlagen; Niederspannungsschaltgeräte; Leitungen; Motore; Generatoren; Batterien; Gleichrichter; Wechselrichter.

Der Einsatz dieser Betriebsmittel erfolgt unter den unterschiedlichsten Bedingungen. Es ist deshalb wichtig, die Größe und Art der Betriebsmittel den Gegebenheiten anzupassen.

### 4.1 Bemessung und Auswahl

Für die Bemessung und Auswahl der Betriebsmittel und Geräte elektrischer Anlagen gelten verschiedenartige, teilweise einander widersprechende Forderungen. Einerseits sollen die Betriebsmittel aus wirtschaft-

lichen Gründen nicht überdimensioniert werden, andererseits müssen sie in Hinblick auf die Sicherheit und Verfügbarkeit den ungünstigsten Bedingungen und Beanspruchungen standhalten. Außerdem müssen Sicherheitsvorschriften eingehalten werden. Für die Bemessung und Auswahl der Betriebsmittel und Geräte gelten folgende Kriterien:

Beanspruchung der Isolation im ungestörten Betrieb bei Ausgleichsvorgängen (z.B. durch Gewitterüberspannung); Erwärmung im Dauerbetrieb (Stromtragfähigkeit); Erwärmung durch Kurzschlussströme (thermisch); mechanische Beanspruchung; Ein- und Ausschaltvermögen; Spannungsfall bei Höchstlast; Sicherheitsvorschriften und Schutzmaßnahmen; Verfügbarkeit; Wartungsaufwand und Reparaturzeit; Erichtungs- und Betriebskosten; Umweltbelastung; Umgebungseinflüsse (Temperatur, Feuchtigkeit, Luftdruck, Staub, Gase, Dämpfe, Verschmutzung).

## 4.2 Kabel, Leitungen und Schienen

Bei Freileitungen, Kabeln, Leitungen und Schienen handelt es sich um Betriebsmittel, die zum Transport oder zum Verteilen der elektrischen Energie dienen. Kabel und Leitungen werden in elektrischen Energieanlagen stets dann verlegt, wenn die für eine Isolierung der spannungsführenden Leiter gegeneinander oder gegen Erde notwendige Distanz in Luft nicht zur Verfügung steht, oder wenn es die Schutzmaßnahme gegen direktes Berühren spannungsführender Teile erfordert. Im Gegensatz zu Kabeln besitzen Leitungen eine nicht so hohe mechanische Festigkeit und dürfen nicht im Erdreich und Rüttelbeton verlegt werden.

### 4.2.1 Freileitungen

Die wesentlichen Elemente einer Freileitung stellen Maste, Leiterseile und Isolatoren dar. Im Drehstromnetz werden die drei Leiter L1, L2, L3 insgesamt als Leitersystem bezeichnet. Bei Masten unterscheidet man Tragmaste und Abspannmaste. Die Tragmaste dienen dazu, die vertikalen Kräfte der Seile aufzunehmen. Die Abspannmaste können dagegen vertikale und horizontale Kräfte aufnehmen. Sie halten die Seile in einer definierten Spannung und bilden gleichzeitig die Anfangs- oder Endpunkte von Leiterseilen, die nur in bestimmten Längen gefertigt werden. Die Größe der Maste richtet sich nach der Nennspannung des Netzes, da für höhere Spannungen ein größerer Abstand zwischen den Leiterseilen erforderlich ist. Die einzuhaltenden Abstände sind in DIN VDE 0210/0211 festgelegt. Neben dem Gewicht der Leiterseile muss der Mast sein Eigengewicht und auftretende Fremdlasten, verursacht durch Wind und Eis, aufnehmen können. Als Leiterseile werden hauptsächlich Aluminium-Stahl-Verbundseile eingesetzt, da diese Materialkombination hinreichend große Spannweiten zwischen den Masten ermöglicht. Leiter der Verbundseile sind die Aluminiumdrähte, die außen um die Stahldrähte gewickelt sind. Die



Stahladröhte befinden sich im Kern des Leiterseils und dienen der Festigkeitssteigerung. Die Kennzeichnung der Verbundseile erfolgt nach ihren Querschnittsan teilen (mm<sup>2</sup>), z.B. Al/St 300/50, d.h., im Kern des Seils sind Stahladröhte mit einem Gesamtquerschnitt von 50 mm<sup>2</sup>, um diesen Kern sind Aluminiumadröhte gewickelt, die einen Gesamtquerschnitt von 300 mm<sup>2</sup> haben. Sollen höhere Ströme übertragen werden, werden *Bündelleiter* eingesetzt.

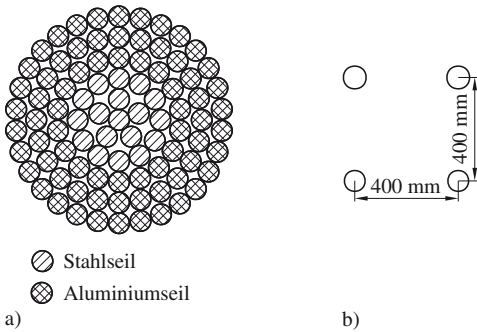


**Bild II-22** Leiterseil

- a) Verbundseil
- b) Viererbündel

Die Bündelleiter setzen sich aus mehreren Leiterseilen der gleichen Phase zusammen. Sie sind entweder als Zweier-, Dreier- oder Viererbündel angeordnet (Bild II-22). Um den Abstand zwischen dem Bündel auch bei Wind zu gewährleisten, sind alle 50 bis 80 m Distanzhalter eingebaut. Auf den Mastspitzen ist (ab Spannungen von 110 kV aufwärts) ein *Erdseil* verlegt. Dieses Erdseil dient dazu, auftretende Kurzschlussströme parallel zur Erde abzuführen (Verringerung der Schrittspannung in der Erde), ferner gewährleistet es einen Blitzschutz für die Leiterseile. Im Kern können Lichtwellenleiter angeordnet sein, die eine Kommunikation zwischen den einzelnen Netzknoten ermöglichen. Die Isolatoren zwischen den Masttraversen und den Leiterseilen müssen die auftretenden mechanischen und elektrischen Kräfte beherrschen. Aufgebaut sind die Isolatoren in der Hauptsache aus einzelnen Kappenisolatoren, die zusammen die notwendige Isolationsstrecke bilden. Durch entsprechende Formgebung müssen die Isolatoren gewährleisten, dass keine Überschläge oder Kriechströme auftreten. Die Freileitungsseile sind bei der Ausführung Al/St für eine Betriebstemperatur von maximal 80 °C ausgelegt. Durch geeignete Schutzmaßnahmen (Überstromschutz, Kurzschlussstromschutz) ist zu gewährleisten, dass diese Temperatur nicht überschritten wird. Der Betriebstemperatur sind Stromwerte zugeordnet, die aus entsprechenden Tabellen entnommen werden können. Die Stromwerte beziehen sich auf die Betriebstemperatur bei einer definierten Umgebungstemperatur, einer definierten Windgeschwindigkeit und einer definierten Sonneneinwirkung.

#### 4.2.2 Kabel

Bei Starkstromkabeln unterscheidet man die Spannungsebene und den Isolierwerkstoff. Im Hochspannungsbereich bis 525 kV werden überwiegend Kabel mit einer Papier-Öl-Isolation eingesetzt. In Städten (110 kV-Ringnetz) setzt man bevorzugt Gasdruckkabel ein. Beim Gasdruckkabel liegt das Kabelsystem in einem Stahlrohr, das mit SF<sub>6</sub> (Schwefel-Hexafluorid-Gas) oder mit Stickstoff gefüllt ist. Das Gas dient als Isolierung und Kühlung, da die Gasmoleküle in die auf dem Leiter angebrachte Papierschicht eindringen. Im Spannungsbereich bis 170 kV ist neben den erwähnten Isolierstoffen das VPE (vernetztes Polyäthylen) als Isolierstoff immer weiter verbreitet. Im Spannungsbereich bis 60 kV werden heute ausschließlich Kabel mit einer Kunststoffisolierung eingesetzt. Für die Spannungen 275 kV werden ebenfalls schon VPE-isolierte Kabel eingesetzt, für 400 kV sind Teststrecken mit VPE-isoliertem Kabel in Betrieb (Ladeleistung 8,1 MVA/km; C = 0,18 µF/km; I<sub>C</sub> = 12,4 A/km). Die langfristige Entwicklung liegt auf dem Gebiet der Hochtemperatur-supraleitenden-Kabel. Aus heutiger Sicht könnten damit die Übertragungsverluste um den Faktor 6 reduziert werden. Der Einsatz solcher HTSL-Kabel ist zur Zeit jedoch noch mit zu hohen Kosten (Kühlung) verbunden. Starkstromkabel werden als Ein-, Drei- oder Vierleiterkabel mit Kunststoffisolierung oder massegetränkter Papierisolation hergestellt. Die Bezeichnung der Kabel ist noch nicht harmonisiert, es gelten daher die in Tabelle II-13 festgelegten Bezeichnungen.

##### 4.2.2.1 Leiterwerkstoffe

Als Leiterwerkstoff werden Kupfer oder Aluminium verwendet. Bei hohen thermischen oder elektrischen Beanspruchungen setzt man Sonderkabel mit Flüssigkeitskühlung oder Gasdruckkabel ein.

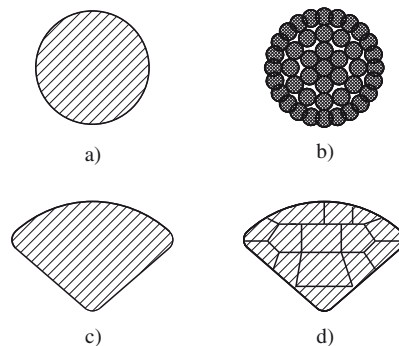


**Bild II-23** Leiterformen

- a) eindrätig
- b) mehrdrätig rund
- c) sektorförmig
- d) mehrdrätig sektorförmig

Übliche Leiterformen der Starkstromkabel: Sektorleiter eindräftig; Sektorleiter mehrdräftig; Rundleiter eindräftig; Rundleiter mehrdräftig (Bild II-23).

*Sektorleiter* werden hauptsächlich in Niederspannungskabeln eingesetzt, um eine bessere Ausnutzung des Kabelquerschnitts zu erreichen.

*Rundleiter* setzt man in den Mittel- und Hochspannungskabeln ein, um eine günstigere Feldverteilung zu erzielen.

4.2.2.2 Leiterisolierung

Die Leiterisolierung bei Niederspannungskabeln besteht aus Polyvinylchlorid (PVC), bei Mittelspannungskabeln aus PVC, Polyäthylen (PE), vernetztem Polyäthylen (VPE) oder getränktem Papier. Neuerdings werden immer mehr halogenfreie Isolierungen (HX) eingesetzt, um bei auftretenden Bränden einen Austritt von Chlor-Wasserstoff-Gas (HC) und Ruß zu verhindern. Das halogenfreie Kabel hat eine hohe Brandwiderstandsklasse (mit FE und Zahl 180 heißt, das Kabel hält 180 min dem Feuer stand, ohne einen Kurzschluss zu verursachen). Die gemeinsame Aderumhüllung kann bei Niederspannungskabeln aus einer gummi- oder PVC-haltigen Mischung bestehen. Bei Mittelspannungskabeln verwendet man die gleichen Isolierstoffe wie zur Aderisolierung. Um die Feldverteilung bei Mittelspannungskabeln zu verbessern, wird bei aus Einzeldrähten aufgebauten Leitern die Leiteroberfläche oft durch eine leitfähige Schicht umhüllt. Aus gleichem Grund wird auch eine leitfähige Schicht außen auf die gemeinsame Aderumhüllung aufgebracht. Wegen der geringen Leitfähigkeit dieser Schicht werden bei Kunststoffkabeln zusätzliche metallene Schirme eingebaut, die bei Störungen (z.B. Erdschluss) die auftretenden Fehler-

4.2.2.3 Aufbau

Nach der Zuständigkeit der jeweiligen Herstellernorm gibt es Leitungen und Kabel, deren Aufbau und technische Daten in den zur Zeit noch geltenden deutschen Normen festgelegt sind. Außerdem gibt es Leitungen, die aufgrund internationaler Vereinbarungen von vielen Ländern der Erde anerkannt sind. Wesentliche Merkmale des Aufbaus sind anhand verschieden aufgebauter Kennzeichnungsschlüssel erkennbar. Die nach deutschen Normen gefertigten Leitungen und Kabel besitzen eine Kennzeichnung auf Basis eines aus Buchstaben aufgebauten Schlüssels, dem stets ein N (für Normen) vorangestellt ist. Die Bedeutung weiterer Buchstaben ist in Tabelle II-13 dargestellt.

4.2.2.4 Erwärmung

Wird ein Leiter vom Strom durchflossen, entstehen Stromwärmeverluste. Diese Verluste erhöhen die Leitertemperatur. Ist die Temperatur des Leiters höher als die ihn umgebende Materie, gibt der Leiter Energie an seine Umgebung ab, und die Erwärmung des Leiters nimmt weniger stark zu. Ab einer bestimmten Leitertemperatur gibt der Leiter sämtliche in ihm erzeugte Wärmeenergie an die Umgebung ab. Damit hat der Leiter seine zum Strom gehörende Betriebstemperatur erreicht.

zugeführte Wärme

$$Q_{zu} = \frac{I^2 \cdot l \cdot t}{A \cdot \chi} \quad \frac{Q_{zu}}{Ws} \left| \frac{l}{m} \right| \left| \frac{t}{s} \right| \left| \frac{A}{mm^2} \right| \left| \frac{\chi}{\frac{m}{mm^2 \cdot \Omega}} \right| \quad (II.7)$$

Tabelle II-11 Abmessung des Schirms bei Hochspannungskabeln

|                                         |        |         |         |
|-----------------------------------------|--------|---------|---------|
| Nennquerschnitt des Außenleiters in mm² | 25–120 | 150–300 | 400–500 |
| Nennquerschnitt des Schirms in mm²      | 16     | 25      | 35      |

ströme fortleiten. Übliche Werte für Schirmquerschnitte nach Tabelle II-11.

Bei Niederspannungskabeln wird der bei einigen Kabeltypen eingebaute Schirm (NYCY; NYCWY) nicht nur zum Ableiten von Fehlerströmen benutzt, sondern dient außerdem als Schutz (PE)-, Neutral (N)- oder PEN-Leiter. Der konzentrische Leiter (Schirm) besteht meist aus Kupfer, auch wenn die übrigen Leiter des Kabels aus Aluminium bestehen. Folgende Schirmquerschnitte sind hierbei vorgeschrieben:

gespeicherte Wärme

$$Q_{sp} = q \cdot c \cdot l \cdot A \cdot \Delta T \quad \frac{Q_{sp}}{Ws} \left| \frac{q}{\frac{kg}{dm^3}} \right| \left| \frac{c}{\frac{kJ}{kg \cdot K}} \right| \left| \frac{l}{m} \right| \left| \frac{A}{mm^2} \right| \left| \frac{T}{K} \right| \quad (II.8)$$

Für einen Zeitbereich von ungefähr 5 s kann bei Kabeln und Leitungen davon ausgegangen werden,

Tabelle II-12 Abmessungen des Schirms bei Niederspannungskabeln

|                                         |                        |    |                   |
|-----------------------------------------|------------------------|----|-------------------|
| Nennquerschnitt des Außenleiters in mm² | 1,5–16                 | 25 | 35–240            |
| Nennquerschnitt des Schirms in mm²      | gleich dem Außenleiter | 16 | 0,5 · Außenleiter |

**Tabelle II-12** Normierte Kurzzeichen für Kabel

| Kurzzeichen | Bedeutung                                                           |
|-------------|---------------------------------------------------------------------|
| N           | Normleitung oder -kabel                                             |
| A           | Aluminiumleiter                                                     |
| Y           | Leiter- oder Mantelisolierung aus PVC                               |
| 2Y          | Leiter- oder Mantelisolierung aus Polyethylen (PE)                  |
| 2X          | Leiter- oder Mantelisolierung aus vernetztem Polyethylen (VPE)      |
| HX          | Leiter- oder Mantelisolierung aus vernetztem halogen-freiem Polymer |
| F           | flache Leitungsform                                                 |
| M           | Leitungsmantel für mittlere mechanische Beanspruchung               |
| C           | konzentrischer Leiter                                               |
| CW          | wendelförmig aufgebrachter konzentrischer Leiter                    |
| -J          | Zusatz mit grünelbem Leiter (Schutzleiter)                          |
| -O          | Zusatz ohne grünelben Leiter                                        |
| RE          | eindrahtiger Rundleiter                                             |
| RM          | mehrdrahtiger Rundleiter                                            |
| SE          | eindrahtiger Sektorleiter                                           |
| SM          | mehrdrahtiger Sektorleiter                                          |
| RF          | feindrahtiger Rundleiter                                            |

dass die erzeugte Wärmemenge nur im Leiter gespeichert wird. Hieraus berechnet sich eine Erhöhung der Leitertemperatur.

*Temperaturdifferenz*

$$\Delta T = \frac{I^2 \cdot t \cdot K}{A^2}$$

|               |               |               |                                                            |                         |
|---------------|---------------|---------------|------------------------------------------------------------|-------------------------|
| $\frac{T}{K}$ | $\frac{I}{A}$ | $\frac{t}{s}$ | $\frac{K}{\frac{\text{mm}^4 \cdot K}{\text{s} \cdot A^2}}$ | $\frac{A}{\text{mm}^2}$ |
|---------------|---------------|---------------|------------------------------------------------------------|-------------------------|

(II.9)

$Q$  Wärmemenge;  $I$  Strom;  $t$  Zeit;  $\chi$  spezifischer Leitwert;  $l$  Leiterlänge;  $A$  Leiterquerschnitt;  $c$  spezifische Wärme;  $\rho$  Dichte;  $T$  Temperatur;  $K$  Materialkonstante ( $\text{Cu} = 5 \cdot 10^{-3}$ ;  $\text{Al} = 11,57 \cdot 10^{-3}$ )

Zulässige Kabelendtemperaturen bei Kupferleitern sind für eine PVC-Isolation 160 °C und für eine VPE-Isolation 250 °C. Im Kurzschlussfall kann, wenn der Kurzschlussstrom bekannt ist, die sich einstellende Kabeltemperatur mit Hilfe der Formel (II.9) berechnet werden. Im Normalbetrieb stellt sich bei genügend langer Belastung ein stationärer Temperaturzustand am Kabel ein. Dann ist die im Kabel erzeugte

Wärmemenge gleich der vom Kabel abgegebenen Wärmemenge.

*stationärer Zustand*  $Q_{\text{zu}} = Q_{\text{ab}}$

(II.10)

*abgegebene Wärme*

$$Q_{\text{ab}} = \alpha \cdot \pi \cdot d \cdot l \cdot \Delta T \cdot t$$

|                                   |                                                             |                 |                      |               |                      |                      |
|-----------------------------------|-------------------------------------------------------------|-----------------|----------------------|---------------|----------------------|----------------------|
| $\frac{Q_{\text{ab}}}{\text{Ws}}$ | $\frac{\alpha}{\frac{\text{W}}{\text{K} \cdot \text{m}^2}}$ | $\frac{\pi}{-}$ | $\frac{d}{\text{m}}$ | $\frac{T}{K}$ | $\frac{l}{\text{m}}$ | $\frac{t}{\text{s}}$ |
|-----------------------------------|-------------------------------------------------------------|-----------------|----------------------|---------------|----------------------|----------------------|

(II.11)

$\alpha$  Wärmeübergangszahl;  $d$  Kabelaußendurchmesser

Setzt man die Gleichungen (II.7) und (II.12) gleich, ergibt sich die Temperaturdifferenz des Kabels zur Umgebungsluft für den stationären Zustand.

*Temperaturdifferenz*

$$\Delta T = \frac{A}{\alpha \cdot \chi \cdot \pi \cdot d} \cdot \left( \frac{I}{A} \right)^2$$

(II.12)

Die für die Erwärmung angestellten Betrachtungen gelten für Einleiterkabel. Bei Mehrleiterkabeln verändern sich zugeführte und gespeicherte Wärmemenge um den Faktor der Adernzahl.

- **Beispiel:** In einem Kabel NYY-O  $3 \times 95 \text{ mm}^2$  fließt ein Kurzschlussstrom von  $I_k = 20 \text{ kA}$ . Wie schnell muss das Kabel bei einer Umgebungstemperatur von  $20^\circ\text{C}$  durch die Schutzeinrichtung abgeschaltet werden?

$$\Delta T = \frac{I^2 \cdot t \cdot K}{A^2} \Rightarrow t = \frac{\Delta T \cdot A^2}{I^2 \cdot K} = \frac{140 \text{ K} \cdot (95 \cdot 3)^2 \text{ mm}^4}{(20\,000 \text{ A} \cdot 3)^2 \cdot 0,005 \frac{\text{mm}^4 \cdot \text{K}}{\text{s} \cdot \text{A}^2}} = 0,632 \text{ s}$$

Welche Betriebstemperatur  $\theta$  stellt sich am Kabel ein, wenn der Dauerstrom  $I_B = 200 \text{ A}$  beträgt? Wärmeübergangszahl

$\alpha = 9 \frac{\text{W}}{\text{K} \cdot \text{m}^2}$ ; Kabeldurchmesser  $d = 35 \text{ mm}$ ; spezifischer Leitwert  $\kappa = 56 \frac{\text{m}}{\text{mm}^2 \cdot \Omega}$ .

$$\Delta T = \frac{A}{\alpha \cdot \chi \cdot \pi \cdot d} \cdot \left( \frac{I}{A} \right)^2 = \frac{3 \cdot 95 \text{ mm}^2}{9 \frac{\text{W}}{\text{K} \cdot \text{m}^2} \cdot 56 \frac{\text{m}}{\text{mm}^2 \cdot \Omega} \cdot \pi \cdot 35 \text{ mm}} \cdot \left( \frac{3 \cdot 200 \text{ A}}{3 \cdot 95 \text{ mm}^2} \right)^2 = 22,79 \text{ K}$$

Kabelendtemperatur  $\theta = 42,79^\circ\text{C}$ .

#### 4.2.2.5 Verlegung

Bei der Auswahl von Kabelanlagen ist darauf zu achten, dass die zulässige Erwärmung der Kabel bei Nennbetrieb oder bei Kurzschlussbelastung nicht überschritten wird. Die Belastung der Kabel soll so bemessen werden, dass die im Kabel erzeugte Wärme unter den gegebenen Verhältnissen sicher abgeführt werden kann. Sämtliche entlang der Verlegungsstrecke die Wärmeabfuhr beeinträchtigende Einflüsse müssen deshalb bei der Auslegung des Kabels berücksichtigt werden. Diese Einflüsse sind z.B.: Anhäufung mehrerer Kabel; Umgebungstemperatur; verschiedene Bodenarten; Verlegung an einer Wand, auf Pritschen oder in einem Kanal.

Die nach VDE tabellierten Werte für die Belastbarkeit von Kabeln oder von Systemen gelten für einzeln verlegte Kabel und setzen gleichmäßige Umgebungsbedingungen voraus. Die Tabellen für die Strombelastbarkeit von Kabeln haben als Grundlage die DIN VDE 0298 Teil 2 11/79.

#### 4.2.2.6 Verlegung in Erde

Bei der Verlegung der Kabel in Erde liegt der Tabelle II-14 die sogenannte EVU-Last zugrunde. Nach 10 Stunden Vollast folgt periodisch eine mindestens gleich lange Periode mit 60% Vollast. Daraus ergibt sich der *Belastungsgrad*  $m = 0,7$ . Weicht die Last von der EVU-Last ab, sind die Tabellen mit den angegebenen Faktoren umzurechnen. Dann ergibt sich der Belastungsgrad  $m$  über die vorliegende Lastverteilung von 24 Stunden aus folgender Gleichung:

$$\text{Belastungsgrad } m = \frac{1}{24 \cdot I_{\max}} \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt \quad (\text{II.13})$$

$I_{\max}$  Tageshöchstwert als Mittelwert der Lastspitze über 15 min;  $I(t)$  Strom als Funktion der Zeit

Bei Kabelhäufung, einem spezifischen Erdbodenwärmewiderstand  $R_{\text{th}E} \neq 1 \frac{\text{K} \cdot \text{m}}{\text{W}}$  und bei Abdeckung

der Kabel mit Abdeckhauben sind die in der Tabelle II-14 angegebenen Werte ebenfalls umzurechnen. Für die in der Tabelle II-13 aufgeführten Belastbarkeitswerte werden folgende Betriebsbedingungen zugrunde gelegt: Bettungstiefe 0,7–1,2 m; Erdbodentemperatur  $20^\circ\text{C}$ ; spezifischer Erdbodenwärmewiderstand  $R_{\text{th}E} = 1 \frac{\text{K} \cdot \text{m}}{\text{W}}$ ; Belastungsgrad  $m = 0,7$ .

Weichen die Verlegebedingungen von denen der Tabelle II-14 ab, muss der in der Tabelle angegebene Stromwert mit den Faktoren  $f_1$  und  $f_2$  multipliziert werden. Es ergibt sich ein neuer Stromwert, der für die maximale Belastung des Kabels maßgebend ist.

$$\text{maximale Kabelbelastung } I_Z = I_{\text{Tab}} \cdot f_1 \cdot f_2 \quad (\text{II.14})$$

Sind die Kabel mit Kabelabdeckhauben mit Lufteinchluss verlegt, muss der errechnete Stromwert zusätzlich mit dem Faktor 0,9 multipliziert werden.

- **Beispiel:** 4 Kabelsysteme NYY-O  $3 \times 1 \times 150 \text{ mm}^2$  sind in Erde im Abstand von 7 cm als Dreiecksbündel verlegt. Belastungsgrad  $m = 0,85$ ; Erdbodenwärmewiderstand  $R_{\text{th}E} = 1,0 \frac{\text{K} \cdot \text{m}}{\text{W}}$ ; Erdbodentemperatur  $\theta_E = 25^\circ\text{C}$ . Welcher maximale Strom darf über das Kabel geführt werden?

$$I_Z = I_{\text{Tab}} \cdot f_1 \cdot f_2 = 366 \text{ A} \cdot 0,93 \cdot 0,62 = 211 \text{ A}$$

Faktor  $f_1$  aus Tabelle II-16, Faktor  $f_2$  aus Tabelle II-18. Da in dieser Anordnung vier Systeme parallel geschaltet sind, kann ein Strom von  $I_Z = 4 \cdot 211 \text{ A} = 844 \text{ A}$  übertragen werden.

#### 4.2.2.7 Verlegung in Luft

Bei Verlegung der Kabel in Luft gilt Dauerlast als normale Betriebsweise. Die angegebenen Stromstärken beziehen sich auf frei in Luft verlegte Kabel. Wärmeabgabe durch Strahlung und Konvektion wird nicht behindert, die Umgebungstemperatur steigt nicht, und fremde Wärmequellen fehlen. Folgende Voraussetzungen sollten erfüllt sein: Abstand der Kabel von Wand, Boden oder Decke mindestens 2 cm; bei nebeneinanderliegenden Kabeln Abstand mindestens 2facher Kabeldurchmesser; bei übereinanderliegenden Kabeln Abstand zwischen den Lagen mindestens 20 cm; Abstand zwischen den Kabeln mindestens 2facher Durchmesser; Schutz gegen direkte Sonnenbestrahlung, keine Erhöhung der Raumtemperatur durch die Kabelverlustwärme; Umgebungstemperatur  $30^\circ\text{C}$ . Für abweichende Verhältnisse sind die in den Tabellen II.20 bis II.21

**Tabelle II-13** Belastbarkeit von Kabeln bei Erdverlegung (in A)

| Isolierwerkstoff                         | PVC  |     |              |                  |                     |
|------------------------------------------|------|-----|--------------|------------------|---------------------|
| Anordnung                                | 1 ×  | 2 × | 3 × oder 4 × | 3 × 1 als Bündel | 3 × 1 nebeneinander |
| Nennquerschnitt<br>Cu in mm <sup>2</sup> |      |     |              |                  |                     |
| 1,5                                      | 40   | 32  | 26           | –                | –                   |
| 2,5                                      | 54   | 42  | 34           | –                | –                   |
| 4                                        | 70   | 54  | 44           | –                | –                   |
| 6                                        | 90   | 68  | 56           | –                | –                   |
| 10                                       | 122  | 90  | 75           | –                | –                   |
| 16                                       | 160  | 116 | 98           | 107              | 127                 |
| 25                                       | 206  | –   | 128          | 137              | 163                 |
| 35                                       | 249  | –   | 157          | 165              | 195                 |
| 50                                       | 296  | –   | 185          | 195              | 230                 |
| 70                                       | 365  | –   | 228          | 239              | 282                 |
| 95                                       | 438  | –   | 275          | 287              | 336                 |
| 120                                      | 499  | –   | 313          | 326              | 382                 |
| 150                                      | 561  | –   | 353          | 366              | 428                 |
| 185                                      | 637  | –   | 399          | 414              | 483                 |
| 240                                      | 743  | –   | 464          | 481              | 561                 |
| 300                                      | 843  | –   | 524          | 542              | 632                 |
| 400                                      | 986  | –   | 600          | 624              | 730                 |
| 500                                      | 1125 | –   | –            | 698              | 823                 |

**Tabelle II-14** Umrechnungsfaktoren  $f_1$  bei Verlegung in Erde mit VPE-Kabel

| Erdboden-<br>temperatur<br>°C | spezifischer Erdbodenwärmewiderstand<br>0,7 K · m/W |      |      |      |      | spezifischer Erdbodenwärmewiderstand<br>1,0 K · m/W |      |      |      |      |
|-------------------------------|-----------------------------------------------------|------|------|------|------|-----------------------------------------------------|------|------|------|------|
|                               | Belastungsgrad                                      |      |      |      |      | Belastungsgrad                                      |      |      |      |      |
|                               | 0,5                                                 | 0,6  | 0,7  | 0,85 | 1,0  | 0,5                                                 | 0,6  | 0,7  | 0,85 | 1,0  |
| 5                             | 1,24                                                | 1,21 | 1,18 | 1,13 | 1,07 | 1,11                                                | 1,09 | 1,07 | 1,03 | 1,00 |
| 10                            | 1,23                                                | 1,19 | 1,16 | 1,11 | 1,05 | 1,09                                                | 1,07 | 1,05 | 1,01 | 0,98 |
| 15                            | 1,21                                                | 1,17 | 1,14 | 1,08 | 1,03 | 1,07                                                | 1,05 | 1,02 | 0,99 | 0,95 |
| 20                            | 1,19                                                | 1,15 | 1,12 | 1,06 | 1,00 | 1,05                                                | 1,02 | 1,00 | 0,96 | 0,93 |
| 25                            |                                                     |      |      |      |      | 1,02                                                | 1,00 | 0,98 | 0,94 | 0,90 |
| 30                            |                                                     |      |      |      |      |                                                     |      | 0,95 | 0,91 | 0,88 |

**Tabelle II-15** Umrechnungsfaktoren  $f_1$  bei Verlegung in Erde mit PVC-Kabel

| Erdboden-<br>temperatur<br>°C | spezifischer Erdbodenwärmewiderstand<br>0,7 K · m/W |      |      |      |      | spezifischer Erdbodenwärmewiderstand<br>1,0 K · m/W |      |      |      |      |
|-------------------------------|-----------------------------------------------------|------|------|------|------|-----------------------------------------------------|------|------|------|------|
|                               |                                                     |      |      |      |      |                                                     |      |      |      |      |
| 5                             | 1,29                                                | 1,26 | 1,22 | 1,15 | 1,09 | 1,13                                                | 1,11 | 1,08 | 1,04 | 1,00 |
| 10                            | 1,27                                                | 1,23 | 1,19 | 1,13 | 1,06 | 1,11                                                | 1,08 | 1,06 | 1,01 | 0,97 |
| 15                            | 1,25                                                | 1,21 | 1,17 | 1,10 | 1,03 | 1,08                                                | 1,06 | 1,03 | 0,99 | 0,94 |
| 20                            | 1,23                                                | 1,18 | 1,14 | 1,08 | 1,01 | 1,06                                                | 1,03 | 1,00 | 0,96 | 0,91 |
| 25                            |                                                     |      |      |      |      | 1,03                                                | 1,00 | 0,97 | 0,93 | 0,88 |
| 30                            |                                                     |      |      |      |      |                                                     |      | 0,94 | 0,89 | 0,85 |

**Tabelle II-16** Umrechnungsfaktoren  $f_2$  bei Verlegung in Erde, einadrige Drehstromsysteme in gebündelter Anordnung und 7 cm Abstand zueinander, Isolierung VPE

| Anzahl der<br>Systeme | spezifischer Erdbodenwärmewiderstand<br>0,7 K · m/W |      |      |      |      | spezifischer Erdbodenwärmewiderstand<br>1,0 K · m/W |      |      |      |      |
|-----------------------|-----------------------------------------------------|------|------|------|------|-----------------------------------------------------|------|------|------|------|
|                       | Belastungsgrad                                      |      |      |      |      | Belastungsgrad                                      |      |      |      |      |
|                       | 0,5                                                 | 0,6  | 0,7  | 0,85 | 1,0  | 0,5                                                 | 0,6  | 0,7  | 0,85 | 1,0  |
| 1                     | 1,09                                                | 1,04 | 0,99 | 0,93 | 0,87 | 1,11                                                | 1,05 | 1,00 | 0,93 | 0,87 |
| 2                     | 0,97                                                | 0,9  | 0,84 | 0,77 | 0,71 | 0,98                                                | 0,91 | 0,85 | 0,77 | 0,71 |
| 3                     | 0,88                                                | 0,8  | 0,74 | 0,67 | 0,61 | 0,89                                                | 0,82 | 0,75 | 0,67 | 0,61 |
| 4                     | 0,83                                                | 0,75 | 0,69 | 0,62 | 0,56 | 0,84                                                | 0,76 | 0,70 | 0,62 | 0,56 |
| 5                     | 0,79                                                | 0,71 | 0,65 | 0,58 | 0,52 | 0,80                                                | 0,72 | 0,66 | 0,58 | 0,52 |
| 6                     | 0,76                                                | 0,68 | 0,62 | 0,55 | 0,50 | 0,77                                                | 0,69 | 0,63 | 0,55 | 0,50 |

**Tabelle II-17** Umrechnungsfaktoren  $f_2$  bei Verlegung in Erde, einadrige Drehstromsysteme in gebündelter Anordnung und 7 cm Abstand zueinander, Isolierung PVC

| Anzahl der<br>Systeme | spezifischer Erdbodenwärmewiderstand<br>0,7 K · m/W |      |      |      |      | spezifischer Erdbodenwärmewiderstand<br>1,0 K · m/W |      |      |      |      |
|-----------------------|-----------------------------------------------------|------|------|------|------|-----------------------------------------------------|------|------|------|------|
|                       | Belastungsgrad                                      |      |      |      |      | Belastungsgrad                                      |      |      |      |      |
|                       | 0,5                                                 | 0,6  | 0,7  | 0,85 | 1,0  | 0,5                                                 | 0,6  | 0,7  | 0,85 | 1,0  |
| 1                     | 1,01                                                | 1,02 | 0,99 | 0,93 | 0,87 | 1,04                                                | 1,05 | 1,00 | 0,93 | 0,87 |
| 2                     | 0,94                                                | 0,89 | 0,84 | 0,77 | 0,71 | 0,97                                                | 0,91 | 0,85 | 0,77 | 0,71 |
| 3                     | 0,86                                                | 0,79 | 0,74 | 0,67 | 0,61 | 0,89                                                | 0,81 | 0,75 | 0,67 | 0,61 |
| 4                     | 0,82                                                | 0,75 | 0,69 | 0,62 | 0,56 | 0,84                                                | 0,76 | 0,70 | 0,62 | 0,56 |
| 5                     | 0,78                                                | 0,71 | 0,65 | 0,58 | 0,52 | 0,80                                                | 0,72 | 0,66 | 0,58 | 0,52 |
| 6                     | 0,75                                                | 0,68 | 0,62 | 0,55 | 0,50 | 0,77                                                | 0,69 | 0,63 | 0,55 | 0,50 |

**Tabelle II-18** Belastbarkeit von Kabeln bei Luftverlegung (in A)

| Isolierwerkstoff                         | PVC  |     |              |                  |                     |
|------------------------------------------|------|-----|--------------|------------------|---------------------|
| Anordnung                                | 1 ×  | 2 × | 3 × oder 4 × | 3 × 1 als Bündel | 3 × 1 nebeneinander |
| Nennquerschnitt<br>Cu in mm <sup>2</sup> |      |     |              |                  |                     |
| 1,5                                      | 26   | 20  | 18,5         | 20               | 25                  |
| 2,5                                      | 35   | 27  | 25           | 27               | 34                  |
| 4                                        | 46   | 37  | 34           | 37               | 45                  |
| 6                                        | 58   | 48  | 43           | 48               | 57                  |
| 10                                       | 79   | 66  | 60           | 66               | 78                  |
| 16                                       | 105  | 89  | 80           | 89               | 103                 |
| 25                                       | 140  | 118 | 106          | 118              | 137                 |
| 35                                       | 174  | 145 | 131          | 145              | 169                 |
| 50                                       | 212  | 176 | 159          | 176              | 206                 |
| 70                                       | 269  | 224 | 202          | 224              | 261                 |
| 95                                       | 331  | 271 | 244          | 271              | 321                 |
| 120                                      | 386  | 314 | 282          | 314              | 374                 |
| 150                                      | 442  | 361 | 324          | 361              | 428                 |
| 185                                      | 511  | 412 | 371          | 412              | 494                 |
| 240                                      | 612  | 484 | 436          | 484              | 590                 |
| 300                                      | 707  | –   | 481          | 549              | 678                 |
| 400                                      | 859  | –   | 560          | 657              | 817                 |
| 500                                      | 1000 | –   | –            | 749              | 940                 |

**Tabelle II-19** Umrechnungsfaktor  $f_2$  bei Verlegung von Drei- oder Vierleiterkabeln auf dem Boden

| Anzahl der Kabel nebeneinander ohne Abstand | 1    | 2    | 3    | 6    | 9    |
|---------------------------------------------|------|------|------|------|------|
|                                             | 0,90 | 0,84 | 0,80 | 0,75 | 0,73 |

**Tabelle II-20** Umrechnungsfaktor  $f_2$  bei Verlegung von Drei- oder Vierleiterkabeln auf Kabelwannen

| Anzahl der Kabelwannen übereinander mit mindestens<br>20 cm Abstand |      |      |      |      |      |
|---------------------------------------------------------------------|------|------|------|------|------|
| 1                                                                   | 0,95 | 0,84 | 0,80 | 0,75 | 0,73 |
| 2                                                                   | 0,95 | 0,80 | 0,76 | 0,71 | 0,69 |
| 3                                                                   | 0,95 | 0,78 | 0,74 | 0,70 | 0,68 |
| 6                                                                   | 0,95 | 0,76 | 0,72 | 0,68 | 0,66 |



angegebenen Umrechnungsfaktoren anzuwenden. Bei Abweichungen der Umgebungstemperatur vom vorausgesetzten Wert von 30 °C gilt für die zulässige Belastung:

$$I'_Z = I_Z \cdot \sqrt{\frac{t_L - t_U}{t_L - t_{UN}}} \tag{II.15}$$

$I'_Z$  Belastung bei abweichender Umgebungstemperatur;  $I_Z$  Belastung bei Nenntemperatur (30 °C);  $t_L$  zulässige Grenztemperatur;  $t_U$  Umgebungstemperatur;  $t_{UN}$  30 °C

Weichen die Verlegebedingungen von denen der Tabelle II-19 ab, muss der in der Tabelle angegebene Stromwert mit den Faktoren  $f_2$  für die Verlegebedingung und  $f_1$  für die abweichende Temperatur gemäß Formel (II.16) multipliziert werden. Es ergibt sich ein neuer Stromwert, der für die maximale Belastung des Kabels maßgebend ist.

*maximale Kabelbelastung*  $I_Z = I_{Tab} \cdot f_1 \cdot f_2$  (II.16)

■ **Beispiel:** Drei Kabel NYY-I 4×240 mm<sup>2</sup> werden über eine Kabeltrasse geführt. Umgebungsbedingungen: 40 °C.

- a) Verlegung auf dem Boden ohne Abstand,
- b) auf einer Kabelwanne ohne Abstand.

Welcher maximale Strom darf über ein Kabel geführt werden?

a)  $I_Z = I_{Tab} \cdot f_1 \cdot f_2 = 436 \text{ A} \cdot 0,8 \cdot \sqrt{\frac{70^\circ - 40^\circ}{70^\circ - 30^\circ}} = 302 \text{ A}$

b)  $I_Z = I_{Tab} \cdot f_1 \cdot f_2 = 436 \text{ A} \cdot 0,8 \cdot \sqrt{\frac{70^\circ - 40^\circ}{70^\circ - 30^\circ}} = 302 \text{ A}$

- a) Faktor  $f_2$  aus Tabelle II-20
- b) Faktor  $f_2$  aus Tabelle II-21

In beiden Anordnungen darf der Stromwert 302 A nicht überschreiten. Da drei Kabel parallelgeschaltet sind, kann diese Anordnung 906 A übertragen.

4.2.2.8 Überstromschutz

Nach Ermittlung der Strombelastbarkeit der einzusetzten Kabel sind geeignete Überstromschutzorgane auszuwählen, die die Kabel vor betriebsmäßiger Überlast und vollkommenem Kurzschluss schützen. Es wird deshalb zwischen dem *Überlastschutz* und dem *Kurzschlusschutz* unterschieden. Überstromschutzorgane können schützen bei Überlast *und*

Kurzschluss, nur bei Überlastschutz oder nur bei Kurzschluss.

4.2.2.8.1 Überlastschutz

Zum Schutz bei Überlast von Kabeln und Leitungen, die nicht im Erdreich verlegt sind, gibt die VDE 0100 Teil 430 Werte für die einzusetzenden Schutzorgane an. In der Tabelle II-19 werden Angaben für den Betrieb mit Dauerlast gemacht.

*Stromkreise mit Dauerlast:* Beleuchtungsstromkreise für gewerbliche Anlagen; gewerblich genutzte Elektrowärmegeräte; Zuleitungen zu Speicherheizgeräten; Druckerhöhungspumpen.

*Stromkreise ohne Dauerlast:* Hauptleitungen; Zuleitungen zu Aufzugsmotoren; Steckdosenstromkreise.

Beleuchtungsstromkreise im Haushalt können nach Belastungsart höher abgesichert werden. Zum Schutz vor Überlast müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

*Nennstromregel*  $I_B < I_N < I_Z$  (II.17)

*Auslöseregel*  $I_2 < 1,45 \cdot I_Z$  (II.18)

$I_B$  zu erwartender Betriebsstrom;  $I_Z$  Strombelastbarkeit der Leitung oder des Kabels;  $I_N$  Nennstrom des Schutzorgans;  $I_2$  der Strom, der eine Auslösung des Schutzorgans unter den in den Gerätebestimmungen festgelegten Bedingungen bewirkt (großer Prüfstrom)

Der Strom  $I_2$  ist für Leitungsschutzsicherungen der Betriebsklasse gL und für Leitungsschutzschalter Typ L in Tabelle II-21 dargestellt.

Nach VDE 0660 ergibt eine Verknüpfung zwischen der Nennstromregel und der Auslöseregel folgende Formel:

$I_N = f \cdot I_Z$  (II.19)

$I_N$  Nennstrom der Überstromschutzeinrichtung;  $I_Z$  Strombelastbarkeit;  $f$  Faktor

Schutzorgane zum Schutz gegen Überlast müssen am Anfang jedes Stromkreises und an allen Stellen eingebaut werden, an denen die Strombelastbarkeit gemindert wird, sofern ein vorgeschaltetes Schutzorgan den Schutz nicht sicherstellen kann. Überlastschutzorgane können jedoch dann an beliebiger Stelle

**Tabelle II-21** Abhängigkeit des großen Prüfstroms vom Nennstrom des Schutzorgans

| Nennstrom $I_N$ in A        | bis 4           | über 4 bis 10   | über 10 bis 25   | über 25         |
|-----------------------------|-----------------|-----------------|------------------|-----------------|
| großer Prüfstrom $I_Z$ in A | $2,1 \cdot I_N$ | $1,9 \cdot I_N$ | $1,75 \cdot I_N$ | $1,6 \cdot I_N$ |

**Tabelle II-22** Verknüpfungsfaktor zwischen Nennstrom- und Auslöseregel

| Nennstrom in A                                                                                   | bis 4 | über 4 bis 10 | über 10 bis 25 | über 25 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|---------------|----------------|---------|
| Faktor $f$ für Schmelzsicherungen nach DIN VDE 0636 und Leitungsschutzschalter nach DIN VDE 0641 | 0,69  | 0,76          | 0,83           | 0,91    |
| Faktor $f$ für Leistungsschalter nach DIN VDE 0660                                               | 1,0   |               |                |         |

Schutzorgane zum Schutz gegen Überlast müssen am Anfang jedes Stromkreises und an allen Stellen eingebaut werden, an denen die Strombelastbarkeit gemindert wird, sofern ein vorgeschaltetes Schutzorgan den Schutz nicht sicherstellen kann. Überlastschutzorgane können jedoch dann an beliebiger Stelle des Stromkreises angeordnet werden, wenn der Leitungsabschnitt vor dem Überlastschutzorgan im Falle eines Kurzschlusses geschützt ist und weder Abzweige noch Steckvorrichtungen enthält. Überlastschutzorgane dürfen entfallen, wenn die Leitung durch Überlastschutzorgane vorgeschalteter Stromkreisabschnitte wirksam geschützt ist (gilt nicht für feuer- und explosionsgefährdete Räume). Überlastschutzorgane dürfen für Verbindungsleitungen zwischen elektrischen Maschinen, Anlassern, Transformatoren, Gleichrichtern, Akkumulatoren und deren Schaltanlagen entfallen (Verbindungsleitung muss für Nennlast ausgelegt sein). Überlastschutzorgane dürfen für Freileitungen und Erdkabel in Verteilungsnetzen entfallen. Eine Leitung braucht keinen Überlastschutz, wenn sie einen Verteiler speist und die Summe der Nennströme aller dort vorhandenen Sicherungen den Überlastschutz der Leitung gewähren. Parallel geschaltete Kabel dürfen durch ein gemeinsames Überlastschutzorgan gegen Überlast geschützt werden. Dies ist jedoch nur dann zulässig, wenn sie gleicher Art und gleich lang sind, gleichen Querschnitt und keine Abzweige haben. Bei parallelgeschaltetem Kabel mit ungleichem Querschnitt kann ein gemeinsames Schutzorgan nach folgender Beziehung berechnet werden:

zulässiger Strom der Parallelschaltung

$$I_Z = I_{Z1} \left( 1 + \left( \frac{A_2}{A_1} \right) + \left( \frac{A_3}{A_1} \right) + \dots + \left( \frac{A_n}{A_1} \right) \right) \quad (\text{II.20})$$

$I_Z$  zulässige Gesamtbelastung des parallel geschalteten Systems;  $I_{Z1}$  zulässige Belastung der Leitung  $L_1$  mit dem Querschnitt  $A_1$ , wobei als Leitung 1 die Leitung mit der höchstzulässigen Belastung (querschnittstärkste Leitung) des Systems zu setzen ist;  $A_1$  Querschnitt der Leitung 1;  $A_2$  Querschnitt der Leitung 2;  $A_3$  Querschnitt der Leitung 3;  $A_n$  Querschnitt der  $n$ -ten Leitung

Eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung des Schutzorgans ist die Addition der Querschnitte

resultierender Leitungsquerschnitt

$$A_{\text{res}} = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n \quad (\text{II.21})$$

Die Festlegung des Schutzorgans erfolgt nach den Tabellen II.14 bis II.21 und dem errechneten Querschnitt  $A_{\text{res}}$ , wobei nicht genormte Querschnitte entweder abzurunden sind oder  $I_Z$  durch Interpolation ermittelt wird.

■ **Beispiel:** Drei Kabel NYY-I  $4 \times 240 \text{ mm}^2$  werden über eine Kabeltrasse geführt. Umgebungsbedingungen:  $40^\circ \text{C}$ .

- Verlegung auf dem Boden ohne Abstand;
- auf einer Kabelwanne ohne Abstand.

Welcher maximale Strom darf über ein Kabel geführt werden und wie müssen die Kabel abgesichert werden?

$$\text{a) } I_Z = I_{\text{Tab}} \cdot f_1 \cdot f_2 = 436 \text{ A} \cdot 0,8 \cdot \sqrt{\frac{70^\circ - 40^\circ}{70^\circ - 30^\circ}} = 302 \text{ A}$$

$$\text{b) } I_Z = I_{\text{Tab}} \cdot f_1 \cdot f_2 = 436 \text{ A} \cdot 0,8 \cdot \sqrt{\frac{70^\circ - 40^\circ}{70^\circ - 30^\circ}} = 302 \text{ A}$$

In beiden Anordnungen darf der Stromwert 302 A nicht überschreiten. Da drei Kabel parallelgeschaltet sind, kann diese Anordnung 906 A übertragen. Als Schutzorgan darf eine Sicherung benutzt werden, da die Kabel gleichen Querschnitt und gleiche Länge haben. Für den Nennstrom der Sicherung folgt:  $I_N = f \cdot I_Z = 0,91 \cdot 906 \text{ A} = 824,5 \text{ A}$ . Der nächste Sicherungsnormwert liegt bei 800 A. Über die Kabelstrecke kann ein Betriebsstrom von maximal 800 A übertragen werden.

■ **Beispiel:** Drei Kabel NYY-I  $4 \times 50 \text{ mm}^2$ , NYY-I  $4 \times 150 \text{ mm}^2$  und NYY-I  $4 \times 95 \text{ mm}^2$  liegen parallel und versorgen gemeinsam einen Verbraucher. Die Verlegung erfolgt in Erde bei Nennbedingungen. Wie groß muss der Nennstrom der gemeinsamen Sicherung sein? Nach der Querschnittsmethode (Gleichung II.22) gilt:

$$A_{\text{res}} = A_1 + A_2 + A_3 = 50 \text{ mm}^2 + 150 \text{ mm}^2 + 95 \text{ mm}^2 = 295 \text{ mm}^2$$

Nach der Tabelle II-14 für die Belastbarkeit von Kabeln bei Erdverlegung gilt für  $300 \text{ mm}^2 \Rightarrow I_Z = 524 \text{ A}$  und für  $240 \text{ mm}^2 \Rightarrow I_Z = 464 \text{ A}$ . Hieraus folgt:

$$\Delta I = 60 \text{ A}; \quad \Delta A = 60 \text{ mm}^2 \Rightarrow \frac{\Delta I}{\Delta A} = 1 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$$

Für den Querschnitt  $295 \text{ mm}^2$  ergibt sich eine Strombelastbarkeit von

$$295 \text{ mm}^2 - 240 \text{ mm}^2 = 55 \text{ mm}^2 \Rightarrow 464 \text{ A} + 55 \text{ mm}^2 \cdot 1 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2} = 519 \text{ A} = I_Z$$

$$I_N = f \cdot I_Z = 0,91 \cdot 519 \text{ A} = 472 \text{ A}$$

Der Sicherungsnennstrom darf den Wert 472 A nicht überschreiten ( $I_N = 400 \text{ A}$ ). Nach der Ersatzmethode (Gleichung II.21) ergibt sich:

$$I_Z = I_{Z1} \left( 1 + \left( \frac{A_2}{A_1} \right) + \left( \frac{A_3}{A_1} \right) \right) = 353 \text{ A} \left( 1 + \left( \frac{95}{150} \right) + \left( \frac{50}{150} \right) \right) = 353 \text{ A} \cdot 1,967 = 694 \text{ A}$$

$$I_N = f \cdot I_Z = 0,91 \cdot 694 \text{ A} = 631 \text{ A}$$

Der Nennstrom der Sicherung darf in diesem Fall den Wert 631 A nicht überschreiten ( $I_N = 630 \text{ A}$ ).

#### 4.2.2.8.2 Kurzschlusschutz

Der Kurzschlusschutz muss durch ein Schutzorgan gewährleistet werden, das den Stromkreis abschaltet, bevor eine schädliche Erwärmung der Leiterisolation oder der Anschluss- und Verbindungsstellen eintritt. Das Schutzorgan muss mindestens ein Ausschaltvermögen besitzen, das dem größten Strom bei vollkommenem Kurzschluss entspricht. Der größte Kurzschlussstrom kann durch Berechnung, durch Untersuchung an einer Netznachbildung, durch Messung oder anhand von Angaben des zuständigen EVU bestimmt werden. Das Schutzorgan muss am Leitungsanfang angeordnet sein. Eine Versetzung vom Anfang um maximal 3 m ist allerdings unter bestimmten Voraussetzungen zulässig. Als Abschaltkriterium für das Schutzorgan ist der kleinste einpolige Kurzschlussstrom bei vollkommenem Kurzschluss maßgebend. Die Ausschaltzeit  $t$ , in der die Kabel oder Leitungen beim Auftreten eines Kurzschlusses

abzuschalten sind, können bei Kurzschlüssen bis 5 s Dauer nach Gleichung (II.9) oder Gleichung (II.22) ermittelt werden:

maximale Kurzschlussdauer

$$t = \frac{k^2 \cdot A^2}{I^2}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} t & k & A & I \\ \hline \text{s} & \frac{\text{A} \cdot \sqrt{\text{s}}}{\text{mm}^2} & \text{mm}^2 & \text{A} \end{array}$$

(II.22)

A Leiterquerschnitt; I Strom bei vollkommenem Kurzschluss; k Materialbeiwert nach Tabelle II-24

**Tabelle II-23** Faktor k für verschiedene Isolierstoffe nach VDE 0100 T 540

|                   | Werkstoff der Isolierung |        |        |        |
|-------------------|--------------------------|--------|--------|--------|
| Leitermaterial    | G                        | PVC    | VPE    | IIK    |
| Anfangstemperatur | 60 °C                    | 70 °C  | 90 °C  | 85 °C  |
| Endtemperatur     | 200 °C                   | 160 °C | 250 °C | 220 °C |
| Cu                | 141                      | 115    | 143    | 134    |
| Al                | 87                       | 76     | 94     | 89     |
|                   | Werkstoff der Isolierung |        |        |        |
| Leitermaterial    | G                        | PVC    | VPE    | IIK    |
| Anfangstemperatur | 30 °C                    | 30 °C  | 30 °C  | 30 °C  |
| Endtemperatur     | 200 °C                   | 160 °C | 250 °C | 220 °C |
| Cu                | –                        | 143    | 176    | 166    |
| Al                | –                        | 95     | 116    | 110    |

Die Isolierwerkstoffe und ihre höchstzulässige, am Leiter auftretende Temperatur:

Gummi G 200 °C; Polyvinylchlorid PVC 160 °C; vernetztes Polyäthylen VPE 250 °C; Butyl-Kautschuk IIK 220 °C.

Nach Ermittlung der benötigten Abschaltzeit des Schutzorgans muss aus den von den Herstellern der Schutzorgane veröffentlichten Listen ein geeignetes Gerät ausgesucht werden. Sollte die zu erwartende Abschaltzeit unter 0,1 s betragen, muss das Produkt ( $k^2 \cdot A^2$ ) größer sein als der vom Hersteller des Schutzorgans angegebene Wert ( $I^2 \cdot t$ ).

thermischer Energiewert

$$k^2 \cdot A^2 \geq I^2 \cdot t$$

(II.23)

Schutzorgane für den Schutz bei Kurzschluss müssen am Anfang jedes Stromkreises sowie an allen Stellen eingebaut werden, an denen die Kurzschlussstrombelastbarkeit gemindert wird, sofern ein vorgeschaltetes Schutzorgan den geforderten Schutz bei Kurzschluss nicht sicherstellen kann.

■ **Beispiel:** Wann muss ein Kabel NYY-I 4×95 mm<sup>2</sup> bei einem Kurzschluss von 10 kA abgeschaltet werden, wenn es vor dem Kurzschluss mit Dauerlast betrieben wurde?

Abschaltzeit

$$t = \frac{k^2 \cdot A^2}{I^2} = \frac{\left(115 \frac{\text{A} \cdot \sqrt{\text{s}}}{\text{mm}^2}\right)^2 \cdot (95 \text{ mm}^2)^2}{(10\,000 \text{ A})^2} = 1,19 \text{ s}$$

4.2.3 Leitungen

Leitungen sind im Gegensatz zu Kabeln nicht so hoch mechanisch belastbar. Nach DIN VDE 0100 Teil 523 sind für Leitungen Mindestquerschnitte vorgeschrieben, deren Größe von der Verlegungsart abhängig ist (Tabelle II-24).

**Tabelle II-24** Mindestquerschnitt in Abhängigkeit von der Verlegungsart

| Verlegungsart                                                                                                 | Mindestquerschnitt in mm <sup>2</sup> |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|-----|
|                                                                                                               | Cu                                    | Al  |
| feste, geschützte Verlegung                                                                                   | 1,5                                   | 2,5 |
| Leitungen in Schaltanlagen und Verteilern bei Stromstärken bis 2,5 A<br>über 2,5 A bis 16 A<br>über 16 A      | 0,5                                   | –   |
|                                                                                                               | 0,75                                  | –   |
|                                                                                                               | 1,0                                   | –   |
| bewegliche Leitungen für den Anschluss von Geräten bis 1 A Stromaufnahme, maximale Länge der Leitung 2 m      | 0,1                                   | –   |
| bewegliche Leitungen für den Anschluss von Geräten bis 2,5 A Stromaufnahme, maximale Länge der Leitung 2 m    | 0,5                                   | –   |
| bewegliche Leitungen für den Anschluss von Geräten bis 10 A Stromaufnahme                                     | 0,75                                  | –   |
| bewegliche Leitungen für den Anschluss von Geräten über 10 A bis 16 A Stromaufnahme, Mehrfachsteckdosen, usw. | 1,0                                   | –   |

**Tabelle II-25** Kurzübersicht über Kurzzeichen des vereinheitlichten Kennzeichnungssystems

| Kennzeichnung       | H – harmonisierte Bestimmung | A – anerkannter nationaler Typ             |                           |
|---------------------|------------------------------|--------------------------------------------|---------------------------|
| Nennspannung        | 03 – 300/300 V               | 05 – 300/500 V                             | 07 – 450/750 V            |
| Isolierhülle Mantel | V – PVC                      | R – Natur und/oder synthetischer Kautschuk | S – Silikonkautschuk      |
| Leiterart           | –U – eindrahtiger Leiter     | –R – mehrdrahtiger Leiter                  | –F – feindrahtiger Leiter |

**Tabelle II-26** Verlegungsarten von Leitungen nach DIN VDE 0298 Teil 4

| Verlegungsart | Ausführung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|---------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| A             | Verlegung in wärmedämmenden Wänden,<br>– Aderleitungen und mehrdrige Leitungen im Elektroinstallationsrohr,<br>– Aderleitungen im Elektroinstallationsrohr in geschlossenen Fußbodenkanälen,<br>– ein- und mehrdrige Mantelleitungen im Elektroinstallationsrohr,<br>– ein- oder mehrdrige Mantelleitungen im Elektroinstallationsrohr im Fußboden.                           |
| B1            | Verlegung in Elektroinstallationsrohren oder -kanälen,<br>– Aderleitungen im Elektroinstallationsrohr oder -kanal auf der Wand und im Elektroinstallationsrohr in belüfteten Fußbodenkanälen,<br>– Aderleitungen, einadrige Mantelleitungen und mehrdrige Leitungen im Elektroinstallationsrohr im Mauerwerk.                                                                 |
| B2            | Verlegung in Elektroinstallationsrohren oder -kanälen,<br>– mehrdrige Leitungen im Elektroinstallationsrohr oder -kanal auf der Wand oder auf dem Fußboden.                                                                                                                                                                                                                   |
| C             | Direkte Verlegung,<br>– mehrdrige Leitungen auf der Wand oder auf dem Fußboden,<br>– einadrige Mantelleitungen auf der Wand oder auf dem Fußboden,<br>– mehrdrige Leitungen in der Wand oder unter Putz,<br>– Stegleitungen unter Putz.                                                                                                                                       |
| E             | Verlegung frei in der Luft. Die ungehinderte Wärmeabgabe wird gewährleistet.<br>– bei Abständen der Leitungen von der Wand $\geq 0,3$ d,<br>– bei nebeneinanderliegenden Leitungen mit einem Zwischenraum von mindestens 2fachem Leitungsdurchmesser,<br>– bei übereinanderliegenden Leitungen mit einem senkrechten Zwischenraum von mindestens 2fachem Leitungsdurchmesser. |

Im Gegensatz zu den Kabeln sind die Bezeichnungen der Leitungen vereinheitlicht worden (Tabelle II-25). Ebenso wie bei Kabeln ist bei Leitungen die Strombelastbarkeit in Tabellen niedergelegt. Richtwerte für die Strombelastbarkeit von Leitungen sind in DIN VDE 0298 Teil 4 festgelegt. In der VDE wird die Verlegung von Leitungen in fünf Verlegungsarten getrennt.

Für die Werte in der Tabelle II-27 gelten Dauerbetrieb bei 30 °C Umgebungstemperatur und eine zulässige Betriebstemperatur von 70 °C (PVC). Der Nennstrom der Überstromschutzeinrichtung wird nach DIN VDE 0100 Teil 430 berechnet. Weicht die Umgebungstemperatur von dem festgelegten Wert ab, müssen die Werte der Tabelle II-27 mit dem Faktor  $f_2$  der Tabelle II-28a multipliziert werden.

**Tabelle II-27** Strombelastbarkeiten von Kupferleitungen und -kabeln für feste Verlegung nach Tabelle II-26 (in A)

| Anzahl der belasteten Adern    | 2     |       |       |       | 3     |       |       |       | 2     |       |       |       | 3     |       |       |       | 2     |       |       |       | 3     |       |       |       |
|--------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Verlegeart                     | A     |       |       |       | B1    |       |       |       | B2    |       |       |       | C     |       |       |       | E     |       |       |       |       |       |       |       |
| Querschnitt in mm <sup>2</sup> | $I_Z$ | $I_N$ | $I_Z$ | $I_N$ | $I_Z$ | $I_N$ | $I_Z$ | $I_N$ | $I_Z$ | $I_N$ | $I_Z$ | $I_N$ | $I_Z$ | $I_N$ | $I_Z$ | $I_N$ | $I_Z$ | $I_N$ | $I_Z$ | $I_N$ | $I_Z$ | $I_N$ | $I_Z$ | $I_N$ |
| 1,5                            | 15,5  | 13    | 13    | 13    | 17,5  | 16    | 15,5  | 13    | 15,5  | 13    | 14    | 13    | 19,5  | 16    | 17,5  | 16    | 20    | 20    | 18,5  | 16    |       |       |       |       |
| 2,5                            | 19,5  | 16    | 18    | 16    | 24    | 20    | 21    | 20    | 21    | 20    | 19    | 16    | 26    | 25    | 24    | 20    | 27    | 25    | 25    | 25    |       |       |       |       |
| 4                              | 26    | 25    | 24    | 20    | 32    | 32    | 28    | 25    | 28    | 25    | 26    | 25    | 35    | 35    | 32    | 32    | 37    | 35    | 34    | 32    |       |       |       |       |
| 6                              | 34    | 32    | 31    | 25    | 41    | 40    | 36    | 35    | 37    | 35    | 33    | 32    | 46    | 40    | 41    | 40    | 48    | 40    | 43    | 40    |       |       |       |       |
| 10                             | 46    | 40    | 42    | 40    | 57    | 50    | 50    | 50    | 50    | 50    | 46    | 40    | 63    | 63    | 57    | 50    | 66    | 63    | 60    | 63    |       |       |       |       |
| 16                             | 61    | 63    | 56    | 56    | 76    | 80    | 68    | 63    | 68    | 63    | 61    | 50    | 85    | 80    | 76    | 63    | 89    | 80    | 80    | 80    |       |       |       |       |
| 25                             | 80    | 80    | 73    | 63    | 101   | 100   | 89    | 80    | 90    | 80    | 77    | 63    | 112   | 100   | 96    | 80    | 118   | 100   | 101   | 100   |       |       |       |       |
| 35                             | 99    | 80    | 89    | 80    | 125   | 125   | 111   | 100   | 110   | 100   | 95    | 80    | 138   | 125   | 119   | 100   | 145   | 125   | 126   | 125   |       |       |       |       |
| 50                             | 119   | 100   | 108   | 100   | 151   | 125   | 134   | 125   | –     | –     | –     | –     | –     | –     | –     | –     | –     | –     | 153   | 125   |       |       |       |       |
| 70                             | 151   | 125   | 136   | 125   | 192   | 160   | 171   | 160   | –     | –     | –     | –     | –     | –     | –     | –     | –     | –     | 196   | 160   |       |       |       |       |
| 95                             | 182   | 160   | 164   | 160   | 232   | 200   | 207   | 200   | –     | –     | –     | –     | –     | –     | –     | –     | –     | –     | 288   | 250   |       |       |       |       |
| 120                            | 210   | 200   | 188   | 160   | 269   | 250   | 239   | 250   | –     | –     | –     | –     | –     | –     | –     | –     | –     | –     | –     | –     |       |       |       |       |

**Tabelle II-28a** Umrechnungsfaktor  $f_2$  für verschiedene Temperaturen

| Umgebungstemperatur in °C | Faktor $f_2$ |
|---------------------------|--------------|
| über 20 bis 25            | 1,06         |
| über 25 bis 30            | 1,00         |
| über 30 bis 35            | 0,94         |
| über 35 bis 40            | 0,87         |
| über 40 bis 45            | 0,79         |
| über 45 bis 50            | 0,71         |
| über 50 bis 55            | 0,61         |
| über 55 bis 60            | 0,5          |

**Tabelle II-28b** Umrechnungsfaktor  $f_1$  für Häufung in den Verlegungsarten B1, B2 und C

| Anzahl der belasteten Leitungen | Faktor $f_1$ |
|---------------------------------|--------------|
| 1                               | 1,0          |
| 2                               | 0,79         |
| 3                               | 0,69         |
| 4                               | 0,63         |
| 6                               | 0,56         |
| 8                               | 0,52         |
| 10                              | 0,49         |
| 14                              | 0,43         |

Werden bei den Verlegungsarten B1, B2 und C mehr als eine Leitung zusammen verlegt (Häufung), müssen die Belastbarkeitswerte nach Tabelle II-28b mit dem Faktor  $f_1$  multipliziert werden.

■ **Beispiel:** Ein Verbraucher mit einem Nennstrom  $I_N = 15,5\text{ A}$  (Einstellwert des Überlastrelais) soll über eine NYM-Leitung mit Energie versorgt werden. Die Leitung wird mit 7 weiteren Leitungen nach Verlegungsart C auf der Wand verlegt. Umgebungstemperatur 40 °C. Welchen Querschnitt muss die Leitung haben?

Faktor  $f_1$  für Häufung ergibt bei 8 Leitungen  $f_1 = 0,52$ . Faktor  $f_2$  für andere Umgebungstemperaturen ergibt  $f_2 = 0,87$ . Der erforderliche Strom  $I_Z$  nach Strombelastbarkeitstabelle ergibt sich zu:

$$I_Z = \frac{I_N}{f_1 \cdot f_2} = \frac{15,5\text{ A}}{0,52 \cdot 0,87} = 34,3\text{ A}$$

Nach Verlegungsart C muss die Leitung einen Querschnitt von  $A = 6\text{ mm}^2$  haben.

#### 4.2.3.1 Spannungsfall auf Kabeln und Leitungen

Für die nach den vorgegebenen Belastungs- und Schutzkriterien ausgewählten Kabel und Leitungen muss ein ordnungsgemäßer Betrieb sichergestellt werden. Hierzu dürfen bestimmte Grenzwerte der Spannung nicht unter- oder überschritten werden. In den Gerätebestimmungen ist eine Spannungsdifferenz von  $\pm 10\%$ , bezogen auf die Nennspannung des Betriebsmittels, zugelassen. Nach VDE 0100 Teil 520 ist der einwandfreie Betrieb einer Anlage bei einem Spannungsfall von maximal 4% gewährleistet. Für Anlagen im Wohnbereich fordern die EVU in den TAB (Technische Anschluss-Bedingungen) folgenden maximalen prozentualen Spannungsfall  $e$ :  $e = 0,5\%$  bis 100 kVA;  $e = 1,0\%$  bis 250 kVA;  $e = 1,25\%$  bis 400 kVA;  $e = 1,5\%$  über 400 kVA. In Verbrauchsanlagen ist nach DIN 18015 Teil 1 ein Spannungsfall von 3% zulässig. Berechnung des Spannungsfalls:

*Gleichstrom*

$$\Delta U = \frac{2 \cdot l \cdot I}{\chi \cdot A} \quad \begin{array}{c|c|c|c} l & I & A & \chi \\ \hline \text{m} & \text{A} & \text{mm}^2 & \frac{\text{m}}{\Omega \cdot \text{mm}^2} \end{array} \quad (\text{II.24})$$

*Einphasen-Wechselstrom*

$$\Delta U = \frac{2 \cdot l \cdot I \cdot \cos \varphi}{\chi \cdot A} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} l & I & A & \chi & \varphi \\ \hline \text{m} & \text{A} & \text{mm}^2 & \frac{\text{m}}{\Omega \cdot \text{mm}^2} & ^\circ \end{array} \quad (\text{II.25})$$

*Drehstrom*

$$\Delta U = \frac{\sqrt{3} \cdot l \cdot I \cdot \cos \varphi}{\chi \cdot A} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} l & I & A & \chi & \varphi \\ \hline \text{m} & \text{A} & \text{mm}^2 & \frac{\text{m}}{\Omega \cdot \text{mm}^2} & ^\circ \end{array} \quad (\text{II.26})$$

Der absolute Spannungsfall  $\Delta U$  in Volt wird durch folgende Beziehung in den prozentualen Spannungsfall  $e$  umgerechnet:

$$\text{prozentualer Spannungsfall } e = \frac{\Delta U \cdot 100\%}{U} \quad (\text{II.27})$$

$\Delta U$  Spannungsfall;  $l$  Leitungslänge;  $I$  Strom;  $A$  Querschnitt;  $\chi$  spezifische Leitfähigkeit;  $U$  Nennspannung;  $\varphi$  Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung

Gleichstrom (Bild II-24):

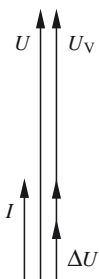


**Bild II-24**  
Zeigerbild der Spannungen bei Gleichstromleitungen

*Gesamtspannung*

$$U = \Delta U + U_V \quad (\text{II.28})$$

*Leitungsspannungsfall*

$$\Delta U = I \cdot 2 \cdot R_L = I \cdot 2 \cdot \frac{l}{\chi \cdot A} \quad (\text{II.29})$$

*Leistungsverlustleistung*

$$\Delta P = \Delta U \cdot I = I^2 \cdot 2 \cdot \frac{l}{\chi \cdot A} \quad (\text{II.30})$$

Einphasen-Wechselstrom (Bild II-25):

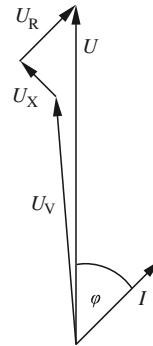


**Bild II-25**  
Zeigerbild von Strom und Spannung bei Wechselstromleitungen

*Leitungsspannungsfall*

$$\Delta U = 2 \cdot (U_R + jU_X) \quad (\text{II.31})$$

*realer Leitungsspannungsfall*

$$\Delta U = 2 \cdot I \cdot (R_{\Sigma} \cdot \cos \varphi + X_{\Sigma} \cdot \sin \varphi) \quad (\text{II.32})$$

*Leistungsverlustleistung*

$$\Delta P = 2 \cdot I^2 \cdot R_{\Sigma} \quad (\text{II.33})$$

Drehstrom (Bild II-26):

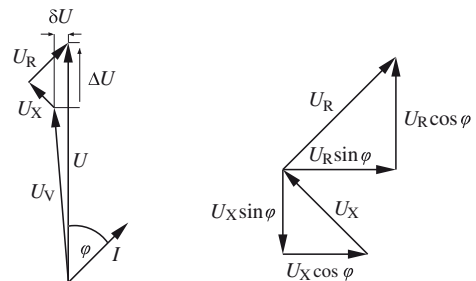


**Bild II-26** Zeigerbild von Strom und Spannung bei Drehstromleitungen

$$\Delta U = \sqrt{3} \cdot I \cdot (R_{\Sigma} \cdot \cos \varphi + X_{\Sigma} \cdot \sin \varphi) \quad (\text{II.34})$$

$$\Delta P = 3 \cdot I^2 \cdot R_{\Sigma} \quad (\text{II.35})$$

$$\delta U = \sqrt{3} \cdot I \cdot (X_{\Sigma} \cdot \cos \varphi - R_{\Sigma} \cdot \sin \varphi) \quad (\text{II.36})$$

$\delta U$  induktiver Anteil am Spannungsfall;  $R_{\Sigma} = r' \cdot l$ ;  $X_{\Sigma} = x' \cdot l$ ;  $r'$  längenbezogener Wechselstromwiderstand;  $x'$  längenbezogener Wechselstromblindwiderstand

■ **Beispiel:** Ein Kabel mit  $A = 120 \text{ mm}^2$ ;  $r' = 0,184 \text{ } \Omega/\text{km}$ ;  $x' = 0,08 \text{ } \Omega/\text{km}$ ;  $l = 350 \text{ m}$  wird mit einem Strom  $I = 180 \text{ A}$  ( $\cos \varphi = 0,9$ ) beaufschlagt. Wie hoch sind der Spannungsfall und die Leistungsverluste am Kabel bei a) Drehstrom 380 V, b) Einphasenwechselstrom 220 V und c) Gleichstrom 220 V?

a)  $\Delta U = \sqrt{3} \cdot I \cdot (R_{\Sigma} \cdot \cos \varphi + X_{\Sigma} \cdot \sin \varphi) = \sqrt{3} \cdot 180 \text{ A}$   
 $\times ((0,35 \text{ km} \cdot 0,184 \text{ } \Omega/\text{km}) \cdot 0,9$   
 $+ (0,35 \text{ km} \cdot 0,08 \text{ } \Omega/\text{km}) \cdot 0,44) = 21,9 \text{ V}$   
 $\Delta P = 3 \cdot I^2 \cdot R_{\Sigma} = 3 \cdot 180^2 \text{ A}^2 \cdot 0,35 \text{ km} \cdot 0,184 \text{ } \Omega/\text{km} = 6,26 \text{ kW}$   
 $P_{\text{ges}} = \sqrt{3} \cdot U \cdot I = \sqrt{3} \cdot 380 \text{ V} \cdot 180 \text{ A} = 118,5 \text{ kW}$

b)  $\Delta U = 2 \cdot I \cdot (R_{\Sigma} \cdot \cos \varphi + X_{\Sigma} \cdot \sin \varphi) = 2 \cdot 180 \text{ A}$   
 $\times \left( \left( 0,35 \text{ km} \cdot 0,184 \frac{\Omega}{\text{km}} \right) \cdot 0,9 \right.$   
 $\left. + \left( 0,35 \text{ km} \cdot 0,08 \frac{\Omega}{\text{km}} \right) \cdot 0,44 \right) = 25,3 \text{ V}$   
 $\Delta P = 2 \cdot I^2 \cdot R_{\Sigma} = 2 \cdot 180^2 \text{ A}^2 \cdot 0,35 \text{ km} \cdot 0,184 \frac{\Omega}{\text{km}} = 4,17 \text{ kW}$   
 $P_{\text{ges}} = U \cdot I = 220 \text{ V} \cdot 180 \text{ A} = 39,6 \text{ kW}$

c)  $\Delta U = I \cdot 2 \cdot R_L = I \cdot 2 \cdot \frac{l}{\chi \cdot A}$   
 $= 180 \text{ A} \cdot 2 \cdot \frac{350 \text{ m}}{56 \frac{\text{m}}{\text{mm}^2} \cdot 120 \text{ mm}^2} = 18,75 \text{ V}$   
 $\Delta P = \Delta U \cdot I = I^2 \cdot 2 \cdot \frac{l}{\chi \cdot A}$   
 $= 180^2 \text{ A}^2 \cdot 2 \cdot \frac{350 \text{ m}}{56 \frac{\text{m}}{\text{mm}^2} \cdot 120 \text{ mm}^2} = 3,375 \text{ kW}$   
 $P_{\text{ges}} = U \cdot I = 220 \text{ V} \cdot 180 \text{ A} = 39,6 \text{ kW}$

4.2.3.2 Verlegung von Kabeln und Leitungen

Bei der Verlegung von Kabeln und Leitungen ist die VDE 0100 Teil 520 zu beachten. Sie hat so zu erfolgen, dass eine Gefährdung von Personen und Umwelt ausgeschlossen ist. Die Verlegung in Bauwerken ist in DIN 18015 festgelegt. Beim Verlegen von Kabeln und Leitungen sind die höchstzulässigen Biegeradien zu beachten. Ferner ist sicherzustellen, dass ihre Eigenschaften nicht gemindert werden. Deshalb sind folgende Einflüsse zu beachten:  
Verminderung der Strombelastbarkeit; mechanische, thermische und chemische Beschädigungen; Einwirkungen des Erdreichs; Bodenbewegungen, Schwingungen, Erschütterungen; dynamische Beanspruchungen durch Stoßkurzschlussströme; Streuströme und Korrosion.

Beim Ziehen von Kabeln sind die höchstzulässigen Zugbeanspruchungen nach den Herstellervorgaben einzuhalten. Sollte eine Verlegung bei Außentemperaturen  $< 5^{\circ}\text{C}$  notwendig werden, müssen sie vor dem Ziehen in einem erwärmten Raum gelagert werden.

4.2.3.3 Ersatzschaltung von Kabeln und Leitungen

Als Ersatzschaltbild von Kabeln und Freileitungen kann die  $\Pi$ - oder T-Ersatzschaltung eingesetzt werden (Bild II-27).

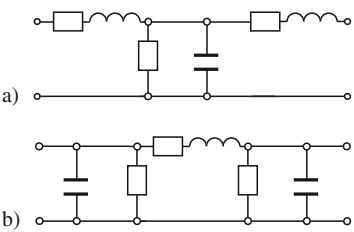


Bild II-27 Ersatzschaltbild Leitungsstück

- a) T – Ersatzschaltung
- b)  $\Pi$  – Ersatzschaltung

Kabel oder Freileitungen setzen sich aus Widerständen, Induktivitäten und Kapazitäten zusammen. In Tabelle II-29 sind einige Werte dargestellt.

4.2.4 Sammelschienen

Neben Kabeln, Leitungen und Freileitungen sind Stromschienen zum Transport von elektrischer Energie einsetzbar. Da Stromschienen starr und schwierig zu verlegen sind, beschränkt man sich beim Einsatz hauptsächlich auf Schaltanlagen. Neben Kurzschlussströmen und dem Dauerstrom muss die maximal auftretende Sammelschienenentemperatur bekannt sein, da die starre Verlegung keine großen Längenänderungen durch Temperaturexpansion zulässt. Für die Stromschienen in Schaltanlagen wird die Dauerstrombelastbarkeit nach DIN 43671 für Kupfer und nach DIN 43670 für Aluminium bestimmt werden. Für fabrikfertige Schienensysteme gibt der Hersteller die Dauerstrombelastbarkeit vor (DIN VDE 0100 Teil 523). Einen Auszug aus der DIN zeigt Tabelle II-32 für Leitermaterial E-CuF30.

Tabelle II-29 Kenndaten von Kabeln

| Querschnitt in $\text{mm}^2$ | Typ         | Wirkwiderstand in $\Omega/\text{km}$ | Induktiver Widerstand in $\Omega/\text{km}$ | Kapazität in $\text{nF}/\text{km}$ |
|------------------------------|-------------|--------------------------------------|---------------------------------------------|------------------------------------|
| 0,4 kV 4×35                  | NY Y        | 0,52                                 | 0,09                                        | –                                  |
| 10 kV 3×35                   | Gürtelkabel | 0,52                                 | 0,12                                        | 300                                |
| 20 kV 3×70                   | Hochstädter | 0,27                                 | 0,13                                        | 280                                |



**Tabelle II-29** Belastbarkeit von Stromschienen bei Frequenzen bis 60 Hz Wechselstrom

| Breite×Dicke<br>mm | Querschnitt<br>mm <sup>2</sup> | Schienenanzahl<br>gestrichen |      | Schienenanzahl<br>blank |      |
|--------------------|--------------------------------|------------------------------|------|-------------------------|------|
|                    |                                | 1                            | 2    | 1                       | 2    |
| 20×5               | 100                            | 319                          | 560  | 274                     | 500  |
| 30×5               | 150                            | 447                          | 760  | 379                     | 672  |
| 40×5               | 200                            | 573                          | 952  | 482                     | 836  |
| 50×5               | 250                            | 697                          | 1140 | 583                     | 994  |
| 20×10              | 200                            | 497                          | 924  | 427                     | 825  |
| 30×10              | 300                            | 676                          | 1200 | 573                     | 1060 |
| 40×10              | 400                            | 850                          | 1470 | 715                     | 1290 |
| 50×10              | 500                            | 1020                         | 1720 | 852                     | 1510 |
| 60×10              | 600                            | 1180                         | 1960 | 985                     | 1720 |
| 80×10              | 800                            | 1500                         | 2410 | 1240                    | 2110 |
| 100×10             | 1000                           | 1810                         | 2850 | 1490                    | 2480 |
| 120×10             | 1200                           | 2110                         | 3280 | 1740                    | 2866 |
| 160×10             | 1600                           | 2700                         | 4130 | 2220                    | 3590 |
| 200×10             | 2000                           | 3290                         | 4970 | 2690                    | 4310 |

Die in der Tabelle II-29 aufgeführten Werte beziehen sich auf eine Umgebungstemperatur von 35 °C und eine Schienentemperatur von 65 °C. Die Anordnung der Schienen ist für die Strombelastbarkeit maßgebend. Bei der Belastbarkeit der Stromschienen spielt die Frequenz des Stroms eine Rolle. Können die in der Tabelle II-29 vorausgesetzten Umgebungsbedingungen oder Materialbeiwerte nicht eingehalten werden, muss der Tabellenwert über Korrekturfaktoren korrigiert werden. Folgende Korrekturfaktoren müssen bei Abweichungen von den Normalbedingungen angewandt werden:

$k_1$  Korrekturfaktor für leitfähigkeitsabhängige Belastungsänderungen;  $k_2$  Korrekturfaktor für andere Luft- und/oder Schienentemperaturen;  $k_3$  Korrekturfaktor für aus der Anordnung bedingte thermische Belastungsänderung;  $k_4$  Korrekturfaktor für bei Wechselstrom elektrisch aus der Anordnung bedingte Belastungsänderung;  $k_5$  Korrekturfaktor für standortabhängige Einflüsse.

Für die Strombelastbarkeit gilt dann:

*Dauerstrombelastung*

$$I_{\text{Dauer}} = I_{\text{Tabelle}} \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot k_4 \cdot k_5 \quad (\text{II.37})$$

Für Frequenzen  $f_x > 50$  Hz sind die Belastungswerte nach der Formel zu ermitteln.

*Dauerstrombelastung frequenzabhängig*

$$I_{\text{Dauer } x} = I_{\text{Dauer } 50} \cdot \sqrt{\frac{50}{f_x}} \quad (\text{II.38})$$

Bei der Auswahl der Stromschienen und der Festlegung der Anordnung ist zu beachten, dass bei Schienen für Wechselstrom die Stromverdrängung eine Widerstandserhöhung zur Folge hat, die durch Wahl einer anderen Profilform oder durch eine andere Anordnung der Leiter klein gehalten werden kann. Das Verhältnis der Strombelastbarkeit von verschiedenen Profilen zeigt Bild II-28. Wenn es die Strom-

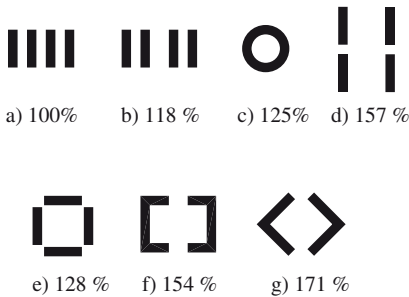


**Bild II-28** Verschiedene Stromschienenanordnungen und die entsprechenden Strombelastbarkeiten bei gleichem Querschnitt

**Tabelle II-30** Umrechnungsfaktor  $k_2$  in Abhängigkeit von der Schienen- und Umgebungstemperatur

| Schienentemperatur in °C | Lufttemperatur in °C |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|--------------------------|----------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|                          | 0                    | 10   | 20   | 30   | 40   | 45   | 50   | 55   | 60   | 65   |
| 55                       | 1,47                 | 1,30 | 1,14 | 0,92 | 0,67 | 0,55 | 0,35 | –    | –    | –    |
| 60                       | 1,54                 | 1,37 | 1,22 | 1,01 | 0,78 | 0,68 | 0,58 | 0,34 | –    | –    |
| 65                       | 1,60                 | 1,47 | 1,29 | 1,10 | 0,88 | 0,79 | 0,67 | 0,51 | 0,32 | –    |
| 70                       | 1,65                 | 1,51 | 1,36 | 1,18 | 0,98 | 0,89 | 0,80 | 0,65 | 0,50 | 0,33 |
| 80                       | 1,77                 | 1,63 | 1,49 | 1,34 | 1,15 | 1,07 | 0,99 | 0,86 | 0,76 | 0,64 |
| 90                       | 1,88                 | 1,74 | 1,61 | 1,46 | 1,31 | 1,24 | 1,15 | 1,05 | 0,97 | 0,86 |
| 100                      | 1,98                 | 1,84 | 1,72 | 1,58 | 1,45 | 1,38 | 1,30 | 1,20 | 1,14 | 1,04 |
| 110                      | 2,06                 | 1,94 | 1,82 | 1,69 | 1,56 | 1,50 | 1,43 | 1,34 | 1,28 | 1,20 |
| 120                      | 2,15                 | 2,03 | 1,91 | 1,79 | 1,66 | 1,61 | 1,54 | 1,46 | 1,40 | 1,34 |
| 125                      | 2,18                 | 2,07 | 1,95 | 1,84 | 1,71 | 1,65 | 1,59 | 1,52 | 1,46 | 1,40 |

stärke zulässt, werden zwecks einfacher Montage eine oder zwei Flachschiene je Leiter verlegt. Zwei Schienen sind im Hinblick auf die Verluste am günstigsten und deshalb zu bevorzugen. Für größere Stromstärken haben sich vier Flachschiene als günstige Anordnung erwiesen. Der Abstand zwischen der zweiten und dritten Schiene ist zu vergrößern, um eine bessere Stromverteilung zu erreichen. Eine Vergrößerung von 10 auf 30 mm bringt noch keine wesentliche Verbesserung. Es hat sich gezeigt, dass die Stromanteile der einzelnen Schienen bei einem Abstand von 70 mm nur noch um  $\pm 7\%$  voneinander abweichen. Die Belastung der vier Schienen sieht dann folgendermaßen aus:

**Tabelle II-31** Stromverteilung bei vier Parallelschiene

| Schiene                            | 1    | 2    | 3    | 4    |
|------------------------------------|------|------|------|------|
| Stromaufnahme in % vom Gesamtstrom | 26,7 | 23,3 | 23,3 | 26,7 |

Reichen vier Flachschiene nicht aus, sollte auf andere Profile ausgewichen werden. Bei Verwendung von weiteren Flachschiene würde sich ein verhältnismäßig großer Querschnitt ergeben, der noch dazu sehr unwirtschaftlich ist. Eine Anordnung von sieben Schienen ergibt zum Beispiel folgende Stromaufteilung:

**Tabelle II-32** Stromverteilung bei sieben Parallelschiene

| Schiene                            | 1    | 2    | 3   | 4   | 5   | 6    | 7    |
|------------------------------------|------|------|-----|-----|-----|------|------|
| Stromaufnahme in % vom Gesamtstrom | 25,6 | 14,2 | 7,5 | 5,4 | 7,5 | 14,2 | 25,6 |

**4.2.4.1 Längenausdehnung von Stromschiene**

Durch die beim Stromfluss auftretenden Verluste  $I^2 \cdot R$  ergeben sich bei Stromschiene Temperaturerhöhungen. Sie rufen bei Leitern eine Längenausdehnung hervor.

*Längenausdehnung*

$$\Delta l = l_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T \qquad \frac{l_0}{\text{m}} \left| \frac{\Delta l}{\text{m}} \right| \frac{\Delta T}{\text{K}} \left| \frac{\alpha}{\text{K}^{-1}} \right| \qquad (\text{II.39})$$

$l_0$  Länge der Leiter bei Verlegetemperatur;  $\Delta T$  Temperaturunterschied zwischen Verlegetemperatur und Umgebungstemperatur;  $\alpha$  linearer Wärmeausdehnungskoeffizient ( $\alpha_{\text{Cu}} = 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ ;  $\alpha_{\text{Al}} = 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ )

Die temperaturabhängige Längenänderung kann bedeutende mechanische Beanspruchungen in den Leitern, an deren Stützpunkten und an Geräteanschlüssen hervorrufen, wenn in längeren Leitungszügen keine Ausdehnungsstücke vorgesehen werden. Die auftretenden Kräfte können nach Gleichung II.41 berechnet werden.

$$\Delta l = l_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T = \frac{F \cdot l_0}{E \cdot A} \Rightarrow F = \alpha \cdot E \cdot A \cdot \Delta T \quad (\text{II.40})$$

$E$  Elastizitätsmodul  $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ ,  $A$  Leiterquerschnitt  $\text{mm}^2$

Aus Gleichung (II.40) folgt die spezifische Beanspruchung  $F'$  für den Temperaturunterschied von einem Kelvin und pro  $\text{mm}^2$  Querschnittsfläche.

spezifische Beanspruchung

$$F' = \alpha \cdot E \quad \frac{\frac{F'}{\text{N}}}{\text{K} \cdot \text{mm}^2} \bigg| \frac{\alpha}{\text{K}^{-1}} \bigg| \frac{E}{\text{N}}}{\text{mm}^2} \quad (\text{II.41})$$

#### 4.2.4.2 Kurzschlussfestigkeit

Schaltanlagen müssen dem auftretenden Kurzschlussstrom bis zum Auslösen des übergeordneten Schaltgeräts gewachsen sein. Die Hauptkräfte dabei müssen die Sammelschienen, die Befestigungsmittel und die Schaltgeräte aufnehmen. Beim Erstellen von Schaltanlagen müssen die Beanspruchungen der Sammelschienen und ihrer Abstützungen untersucht werden. Das kann durch Prüfung am Schaltfeld oder durch Berechnung erfolgen.

#### 4.2.4.3 Mechanische Kurzschlussfestigkeit

Die Stromkraft zwischen den Hauptleitern, die vom gleichen Strom durchflossen werden, ist nach Bild II-29:

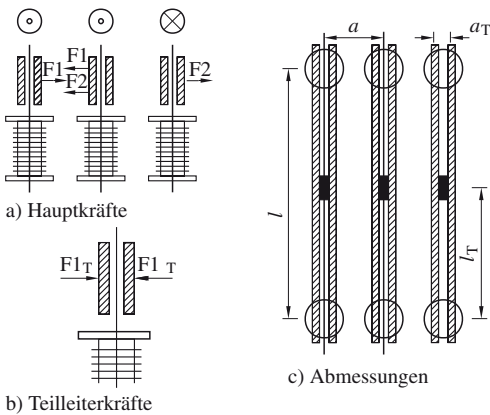


**Bild II-29** Kraftwirkung auf Stromschienen

Hauptleiterkraft

$$F = \left( \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \right) \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \left( \frac{l}{a} \right) \quad \frac{\frac{F}{\text{N}}}{\frac{\frac{\mu_0}{\text{H}}}{\text{m}} \bigg| \frac{I}{\text{A}} \bigg| \frac{l}{\text{cm}} \bigg| \frac{a}{\text{cm}}} \quad (\text{II.42})$$

Im Kurzschluss ist  $I_1 = I_2 = I_p$ ; daraus folgt für ein Schienensystem mit einem Hauptleiter:

$$F = \left( \frac{\mu_0}{2 \pi} \right) \cdot I_p^2 \cdot \left( \frac{l}{a} \right) \quad \frac{\frac{F}{\text{N}}}{\frac{\frac{\mu_0}{\text{H}}}{\text{m}} \bigg| \frac{I}{\text{A}} \bigg| \frac{l}{\text{cm}} \bigg| \frac{a}{\text{cm}}} \quad (\text{II.43})$$

Bei der Berechnung von  $F_H$  in Drehstromanlagen kann für  $I_p$  der Wert  $0,93 \cdot I_{p3}$  eingesetzt werden. Setzen sich die Hauptleiter aus Einzelleitern zusammen, ist die Stromkraft zwischen den Teilleitern:

$$\text{Teilleiterkraft} \quad F_T = \left( \frac{\mu_0}{2 \pi} \right) \cdot \frac{I_p^2}{t^2} \cdot \left( \frac{l_T}{a_T} \right) \quad (\text{II.44})$$

$a_T$  Teilleitermittenabstand;  $a$  Hauptleitermittenabstand;  $l$  Stützabstand;  $l_T$  größter Abstand eines Zwischenstücks vom Stützpunkt oder vom benachbarten Zwischenstück;  $F_H$  Stromkraft zwischen den Hauptleitern;  $F_T$  Stromkraft zwischen den Teilleitern;  $I_p$  Stoßkurzschlussstrom;  $t$  Anzahl der Teilleiter

Die Festigkeit von starren Stromleitern wird besonders durch ihr Schwingungsverhalten beeinflusst. Das ist wiederum von den Einspannbedingungen, der zulässigen plastischen Verformung und vom plastischen Gelenk abhängig. Die Biegespannung  $\sigma$  einer Stromschiene darf im Kurzschluss eine bestimmte Grenze nicht überschreiten, falls der Werkstoff nicht überbeansprucht werden soll. Bei Festlegung dieser Grenze wird davon ausgegangen, dass eine bleibende Durchbiegung der Schiene von 3 ... 5% der Stützlänge zulässig ist.

Beanspruchung der Stromschiene:

Hauptleiterbeanspruchung

$$\sigma_H = V_\sigma \cdot V_r \cdot \beta \cdot \frac{F_H \cdot l}{8 \cdot W} \quad \frac{\frac{\sigma}{\text{N}}}{\frac{\text{N}}{\text{cm}^2}} \bigg| \frac{F}{\text{N}} \bigg| \frac{l}{\text{cm}} \bigg| \frac{W}{\text{cm}^3} \quad (\text{II.45})$$

Teilleiterbeanspruchung

$$\sigma_T = V_{\sigma T} \cdot V_r \cdot \frac{F_T \cdot l_T}{8 \cdot W_T} \quad \frac{\frac{\sigma}{\text{N}}}{\frac{\text{N}}{\text{cm}^2}} \bigg| \frac{F}{\text{N}} \bigg| \frac{l}{\text{cm}} \bigg| \frac{W}{\text{cm}^3} \quad (\text{II.46})$$

$V_\sigma$  Verhältnis von dynamischer zu statischer Leiterbeanspruchung;  $V_r$  Verhältnis von dynamischer Beanspruchung mit erfolgloser dreipoliger Kurzunterbrechung (KU) der Energieversorgung zu dynamischer Beanspruchung ohne dreipolige KU;  $V_\beta$  Verhältnis von dynamischer zu statischer Kraft auf den Stützpunkt;  $\beta$  Faktor für die Hauptleiterbeanspruchung, abhängig von der Träger- und Befestigungsart;  $W$  Widerstandsmoment

Neben der Biegespannung, die eine Verformung der Schienen zur Folge hat, muss die Größe der Stützpunktbelastung ermittelt werden.

$$\text{Stützpunktbeanspruchung} \quad F_S = V_F \cdot V_r \cdot a \cdot F_H \quad (\text{II.47})$$

Eine Stromschiene gilt als kurzschlussicher verlegt, wenn die resultierende Leiterbeanspruchung  $\sigma_{\text{tot}}$  unterhalb der Streckgrenze liegt.

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_H + \sigma_T \quad (\text{II.48})$$

$$\sigma_{\text{tot}} \leq q \cdot R_{p0,2} \quad (\text{II.49})$$

$$\sigma_T \leq R_{p0,2} \quad (\text{II.50})$$

$R_{p0,2}$  Mindestwert der Streckgrenze;  $R'_{p0,2}$  Höchstwert der Streckgrenze;  $q$  Plastizitätsfaktor

■ **Beispiel:** Ein Sammelschienensystem aus Kupfer  $50 \times 10$  mit einem Stützabstand  $l = 30$  cm und einem Abstand zwischen den Hauptleitern  $a = 10$  cm wird mit einem Stoß-Kurzschlussstrom von  $I_{p3} = 40,33$  kA belastet. Hält das Schienensystem diese Belastung aus? Zusätzliche Angaben:  $W = 0,833$  cm<sup>3</sup> bei senkrecht stehender Schiene;  $\beta = 0,73$  bei mehreren Stützen;  $q = 1,83$  bei

senkrecht stehender Schiene;  $R_{p0,2} = 25\,000 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$  für E-Cu F30;

$V_o \cdot V_r = 1,8$  bei Drehstrom und dreipoligem Kurzschluss.

$$F = \left( \frac{\mu_0}{2\pi} \right) \cdot I_p^2 \cdot \left( \frac{l}{a} \right)$$

$$= \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ H}}{2 \cdot \pi} \cdot (0,93 \cdot 40,33 \cdot 10^3 \text{ A})^2 \cdot \frac{0,3 \text{ m}}{0,1 \text{ m}} = 844,1 \text{ N}$$

$$\sigma_H = V_o \cdot V_r \cdot \beta \cdot \frac{F_H \cdot l}{8 \cdot W} = 1,8 \cdot 0,73 \cdot \frac{844,1 \text{ N} \cdot 30 \text{ cm}}{8 \cdot 0,833 \text{ cm}^3} = 4993,2 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_{\text{tot}} \leq q \cdot R_{p0,2} \Rightarrow 4993,2 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} \leq 1,85 \cdot 25\,000 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

Das Sammelschienensystem hält diesem Kurzschluss stand.

Wird die Bedingung  $\sigma_{\text{tot}} > 0,8 \cdot R'_{p0,2}$  erfüllt, kann die Schiene nur statische Kräfte auf die Stützer übertragen, da sie vorher verformt wird. Liegt  $\sigma_{\text{tot}}$  jedoch weit unter  $0,8 \cdot R'_{p0,2}$ , muss das Frequenzverhalten der Schiene nach VDE 0103 Abschnitt 6.4 kontrolliert werden. Dabei sollte die mechanische Eigenschwingungszahl nicht in der Nähe der einfachen, doppelten oder dreifachen Netzfrequenz liegen ( $\pm 5\%$ ), damit keine Schäden durch Resonanz auftreten. Die Beanspruchung  $F_s$  der Stützer darf die vom Hersteller gewährleistete Mindestbruchlast (DIN 48113 VDE 0674 Teil 1) der Isolatoren nicht überschreiten. Für Stützisolatoren, die auf Umbruch beansprucht werden, ist der Abstand  $h$  des Kraftangriffspunktes zu beachten.

$$F_{\text{red}} = F_r \cdot k_{\text{red}} \quad (\text{II.51})$$

$F_r$  gewährleistete Mindestbruchkraft der Stützer;  $k_{\text{red}}$  Reduktionsfaktor für die zulässige Umbruchkraft

#### 4.2.4.4 Thermische Kurzschlussfestigkeit

Da die Größe des Kurzschlussstroms und sein zeitlicher Verlauf stark von der Art und dem Ort sowie dem Netzaufbau abhängig ist, wird zur Bemessung der Betriebsmittel der Begriff *thermisch wirksamer Kurzzeitstrom*  $I_{\text{th}}$  eingeführt (VDE 0103). Der Kurzzeitstrom ist der betriebsfrequente Wechselstrom (Effektivwert) konstanter Amplitude, der bei einer Stromflussdauer von der Größe der Kurzschlussdauer  $t_K$  die gleiche Wärmemenge erzeugt, wie der in seinen Gleich- und Wechselstromanteilen veränderliche Kurzschlussstrom. Zur Bestimmung des Kurzzeitstroms  $I_{\text{th}}$  wird der jeweils ungünstigste Kurzschlussfall, also der dreipolige Kurzschluss, zugrunde gelegt. Die Abkühlung des Leiters ist so gering, dass sie vernachlässigt werden kann. Empfohlene maximale Leitertemperaturen im Kurzschlussfall sind: blanke Leiter, massiv oder verseilt aus Cu oder Al 200 °C; Stahl 300 °C.

Es gilt für einen einzelnen Kurzschlussvorgang von der Kurzschlussdauer  $t_K$ :

$$\text{thermischer Kurzzeitstrom} \quad I_{\text{th}} = I''_{k3} \cdot \sqrt{m+n} \quad (\text{II.52})$$

Faktor  $m$  berücksichtigt die Wärmewirkung des Gleichstromgliedes; Faktor  $n$  berücksichtigt die Wärmewirkung der Wechselstromglieder. Die Abhängigkeit der Faktoren  $m$  und  $n$  von der Kurzschlussdauer  $t_K$  kann aus Diagrammen entnommen werden. Als Kurzschlussdauer  $t_K$  muss die Summe der Relais-Kommandozeiten und der Schalter-Gesamtausschaltzeit eingesetzt werden. Bei einem generatorfernen Kurzschluss ist  $I_k = I''_k$ . Damit wird  $n = 1$ . Bei einer Kurzschlussdauer von  $t_K > 1$  s liefert das Gleichstromglied keinen nennenswerten Anteil zur Wärmeentwicklung ( $m = 0$ ). Bei mehreren kurz aufeinanderfolgenden Kurzschlussvorgängen werden die thermisch wirksamen Kurzzeitströme  $I_{\text{th}i}$ , die zu den einzelnen Kurzschlussdauern  $t_{ki}$  gehören, zu einem resultierenden thermisch wirksamen Kurzzeitstrom  $I_{\text{th}}$  zusammengefasst.

$$\text{wirksamer Kurzzeitstrom} \quad I_{\text{th}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{I_{\text{th}i}^2 \cdot t_{ki}}{t_K}} \quad (\text{II.53})$$

$$\text{gesamte Kurzschlussdauer} \quad t_K = \sum_{i=1}^n t_{ki} \quad (\text{II.54})$$

Betriebsmittel gelten als thermisch kurzschlussfest, wenn gilt:

$$I_{\text{th}} \leq I_{\text{th}N} \quad \text{bei} \quad t_K \leq t_{KN} \quad (\text{II.55})$$

$$I_{\text{th}} \leq I_{\text{th}N} \cdot \sqrt{\frac{t_{KN}}{t_K}} \quad \text{bei} \quad t_K \geq t_{KN} \quad (\text{II.56})$$

$I_{\text{th}N}$  Nennkurzzeitstrom des Betriebsmittels;  $t_{KN}$  Nennkurzschlussdauer des Betriebsmittels (1 s)

### 4.3 Schaltanlagen

Als Schaltanlagen bezeichnet man die Gesamtheit der an einem Ort zu einer Einheit zusammengebauten Betriebsmittel. Schaltanlagen dienen zum Verbinden und Trennen von Freileitungen und Kabeln. In der *Hoch- und Höchstspannungsebene* dienen die Schaltanlagen hauptsächlich als Knotenpunkte für die Verteilung der Energie im Verbundnetz oder als Umspannanlagen, wenn sie die Verteilung auf niedrigere Spannungsebenen vornehmen. *Mittelspannungsschaltanlagen* befinden sich hauptsächlich in Ortsnetzen. Sie verteilen die elektrische Energie bis zu bestimmten Lastschwerpunkten. An diesen Lastschwerpunkten befinden sich Transformatorstationen, die die Energie auf die Niederspannungsebene heruntertransformieren. *Niederspannungsschaltanlagen* sind die elektrischen Verbindungs- und Verteilzentren beim Verbraucher.

### 4.3.1 Hochspannungsschaltanlagen

Hoch- und Höchstspannungsschaltanlagen sind bisher in Freiluftausführung errichtet worden. Dabei werden die Betriebsmittel auf Unterkonstruktionen aufgebaut, die dem Betriebspersonal eine Begehung der Anlage während des Betriebs ermöglichen. Einzuhaltende Mindestabstände der spannungsführenden Teile zur Erde oder untereinander sind durch die DIN VDE 0101 vorgeschrieben. Die Verbindung zwischen den einzelnen Betriebsmitteln wird bei Anlagen mit hoher Leistung in Rohrbauweise durchgeführt, andernfalls kommen Seilverbindungen zum Einsatz. Da die Schaltanlagen an Lastschwerpunkten installiert werden sollen, diese Schwerpunkte jedoch immer näher an Wohngebieten liegen, musste aus Kosten- und Umweltgründen eine andere Form der Schaltanlagen konzipiert werden. Heute werden Schaltanlagen im Bereich von Ballungsgebieten in *metallgekapelter Ausführung* gebaut. Die spannungsführenden Teile sind von einer Metallhülle umgeben. Die Hülle ist im Inneren mit Gas ( $\text{SF}_6$  Schwefel-Hexa-Fluorid) bis zu einem Druck von 2,5 bar gefüllt. Da  $\text{SF}_6$ -Gas im Vergleich zur Luft eine 2,5fach höhere Durchschlagsfestigkeit aufweist, können die in der VDE 0101 geforderten Mindestabstände zwischen spannungsführenden Teilen und Erdpotential erheblich unterschritten werden. Metallgekapelte Schaltanlagen werden fabrikfertig hergestellt; die erforderlichen Komponenten werden am Aufstellungsort, nach den örtlichen Transportgegebenheiten zusammengebaut. Der eigentliche Zusammenbau der Anlage findet in einer Schaltanlagenfabrik statt. Da bei diesen Anlagen die Mindestabstände nach VDE 0101 unterschritten werden dürfen, muss der Hersteller durch Prüfungen belegen, dass seine Anlage den geforderten Bedingungen nach VDE 0670 standhält. Die vom Hersteller vorzunehmende Prüfung der Anlage wird nach VDE als *Typprüfung* bezeichnet.

### 4.3.2 Mittelspannungsanlagen

Bei der Ausführung von Mittelspannungsschaltfeldern unterscheidet man zwischen den Bauformen nach VDE 0101 und nach VDE 0670. Die nach VDE 0670 gebauten Schaltfelder sind hinsichtlich Isoliervermögen, Schutz gegen Berühren, Stromtragfähigkeit, Schaltvermögens und mechanischer Funktionen nach den Vorschriften an einem Prototyp des Schaltfeldes zu prüfen (Typprüfung). Außerdem ist an jedem gebauten Schaltfeld eine Stückprüfung durchzuführen. Beim Bau von Schaltfeldern nach VDE 0101 ist die Einhaltung von Mindestabständen unter Spannung stehender Teile gegeneinander und gegen geerdete Teile vorgeschrieben.

#### 4.3.2.1 Bauart von Mittelspannungsschaltanlagen

Bauarten von Mittelspannungsschaltanlagen:

Anlagen mit *Festfeldern* mit Einfach- oder Doppelsammelschiene. Die Betriebsmittel wie Leistungsschalter und Lasttrennschalter sind fest eingebaut.

Anlagen mit *ausfahrbaren Schaltgeräten* (Schaltwagentechnik) mit Einfach- oder Doppelsammelschiene. Die Betriebsmittel, hauptsächlich der Leistungsschalter, sind ausfahrbar auf einem Schotwagen angeordnet.

Anlagen mit *fest eingebaute Betriebsmittel*, die jedoch mit einer hermetisch luft- und feuchtedichten Kapselung versehen sind. Als Betriebsmittel dient hier ausschließlich der Vakuumleistungsschalter mit Trenn- und Erdungsschalter.

Schaltanlagen können offen, gekapselt, gekapselt und geschottet ausgeführt werden. Bei der *offenen Anlage* ist die Vorderseite des Schaltfeldes bis zu einer Höhe von 1,80 m mit Blech abzudecken. Innere Schottwände im Bereich der Sammelschiene entfallen, nur das Schaltanlagenende wird durch ein Endblech oder mit Hartgipsplatten verschlossen. Den rückseitigen Abschluss bilden Gitter- oder Blechtüren. Diese Schaltfelder dürfen nur in abschließbaren elektrischen Betriebsräumen aufgestellt werden. Unter sicherheitstechnischen Gesichtspunkten sollte diese Bauweise nicht mehr eingesetzt werden.

Die *gekapselte Schaltanlage* ist vollständig von Blech umschlossen. Diese Schaltfelder zeichnen sich durch erhöhten Berührungsschutz aus. Die einzelnen Schaltfelder dieser Bauform sind größtenteils durch eine Schottwand aus Metall oder einer nicht metallischen Wand getrennt. Eingesetzt werden diese Anlagen mit festeingebauten Geräten in kleineren Abnehmerstationen oder in Netzstationen.

*Technische Daten:* Nennstrom der Sammelschiene bis 1250 A, Nennkurzzeitstrom 20,2 kA (1 s). Bei der *gekapselten* und *geschotteten Schaltanlage* (Bild II-30) sind die einzelnen Räume im Schaltfeld durch metallische Zwischenwände voneinander getrennt.

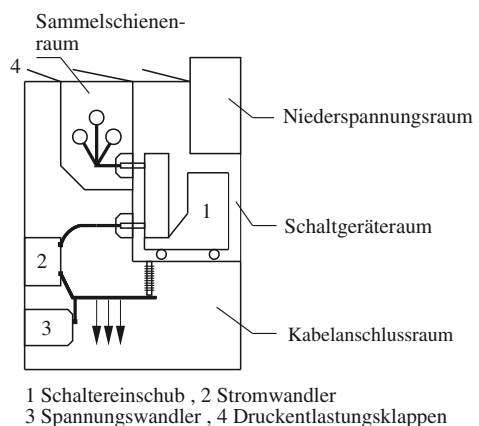


**Bild II-30** Gekapseltes und geschottetes Schaltfeld

So wird die Wirkung eines eventuell auftretenden Störlichtbogens auf den entsprechenden Entstehungsort innerhalb des Schaltfeldes begrenzt. Die Schottung der einzelnen Räume muss mindestens gleich

der Schottung der gesamten Schaltanlage sein. Diese Form der Schaltanlagentechnik bietet den größtmöglichen Schutz des Bedienpersonals vor Berühren spannungsführender Teile, vor möglichen Auswirkungen eines Störlichtbogens und eine hohe Versorgungssicherheit. Eingesetzt werden Anlagen mit ausfahrbaren Schaltgeräten als Schwerpunktstationen im EVU-Netz, als Kraftwerkseigenbedarfsanlagen und Abnehmerstationen mit hohem Leistungsbedarf.

*Technische Daten:* Nennstrom der Sammelschiene bis 5000 A; Nennkurzzeitstrom bis 60 kA (1 s).

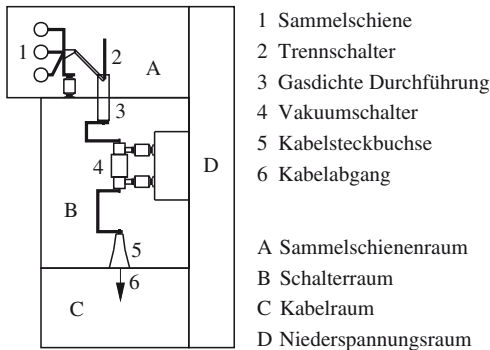


**Bild II-31** Gekapseltes mit Isoliergas gefülltes Schaltfeld (Isoliergas in den Räumen A und B)

Bei den Schaltanlagen mit einer *gasdicht metallgekapselten Sammelschiene* (Bild II-31) sind die einzelnen Räume durch Feststoffschottung voneinander getrennt. Sammelschiene und Schalterräume sind entweder mit  $\text{SF}_6$ , mit einem Gemisch aus  $\text{SF}_6$  und  $\text{N}_2$  oder mit Luft als Isoliermedium umgeben. Ausführungsvarianten dieses Schaltanlagentyps sind die einpolige oder die dreipolige Kapselung der Sammelschiene. Bei den einpolig gekapselten Schaltfeldern kann ein drei- oder zweipoliger Kurzschluss mit 99% Wahrscheinlichkeit ausgeschlossen werden. Bei diesen Anlagen sind die Sammelschienen von Umwelteinflüssen wie Staub, Feuchtigkeit, Ungeziefer weitgehend unabhängig. Für die Sammelschiene sollte jedoch eine Berechnung der Temperaturerhöhung im Vollastbetrieb, insbesondere bei Strömen  $> 2000$  A, durchgeführt werden. Ferner sollte bei den einpolig-gekapselten Anlagen die Auswirkung von Wirbelströmen auf die Kapselung untersucht werden.

*Technische Daten:* Nennstrom der Sammelschiene bis 3150 A; Nennkurzzeitstrom bis 31,5 kA (3 s).

#### 4.3.2.2 Störlichtbogenfestigkeit

Schaltanlagen müssen so konstruiert sein, dass im Fehlerfall das vor der Anlage stehende Bedienpersonal optimal geschützt ist. Die Auswirkung des Störlichtbogens hängt von der Lichtbogenarbeit ab. Sie ist das Produkt aus Lichtbogenstrom, Lichtbogenspannung und anstehender Zeit. Durch die freiwerdende

Energie entsteht ein innerer Überdruck und örtliche Erwärmungen; die Schaltanlage wird mechanisch und thermisch beansprucht. Bei der Zersetzung der Werkstoffe durch den Lichtbogen können heiße gas- und dampfförmige Spaltprodukte entstehen, die aus der Schaltanlage austreten. Grundsätzlich sollten Maßnahmen zur Verminderung der Wahrscheinlichkeit von inneren Lichtbögen getroffen werden. Besonders gefährdete Stellen sind Kabelendverschlüsse, Schraubverbindungen von Leitern, Messwandler und reine Feststoffisolierungen. Störungen im Bereich von Schaltgeräten beruhen meist auf Bedienungsfehlern oder auf unzureichender Wartung.

Folgende Maßnahmen sollten deshalb getroffen werden:

Mechanische und elektrische Verriegelung der Schaltgeräte; Kontrolle vor Inbetriebnahme neuer Anlagen; geschottete Schaltfelder; Einsatz fester Isolierstoffe in Bereichen geringer dielektrischer Beanspruchung; Schrumpfschlauchumhüllung von Schienen (fußpunktfrei); Einsatz von Seriengeräten.

Bei der Konstruktion und Planung von Schaltanlagen sollte darauf geachtet werden, dass die bei Entstehung eines Störlichtbogens freiwerdende Energie möglichst gering ist. Die Lichtbogenenergie ist abhängig vom Strom, der Zeit und der Lichtbogenbrennspannung. Die Lichtbogenbrennspannung ist bei Hochstromlichtbögen unabhängig vom Strom und proportional zu Lichtbogenlänge. Um die Lichtbogenenergie möglichst gering zu halten, sollten Maßnahmen getroffen werden, die Kurzschlussstrom und Brennspannung verringern und die Lichtbogenzeit verkürzen. Die Verringerung des Kurzschlussstroms kann mit vorgeschalteten Drosselspulen, Paralleleinspeisungen und Stoßkurzschlussstrombegrenzern erfolgen. Die Zeit bis zum Abschalten des Lichtbogens kann durch geeignete Schutzmaßnahmen verkürzt werden. Die Verringerung der Brennspannung (Lichtbogenlänge) kann durch möglichst kurze Elektrodenabstände erreicht werden. Da ein Störlichtbogen innerhalb von Schaltanlagen nicht ausschließbar ist, wurden Kriterien geschaffen, die eine Prüfung der Schaltanlagen unter gleichen Bedingungen gewährleisten. Diese Prüfung zeigt das Verhalten der Schaltanlage im Fehlerfall auf. Prüfbedingungen und Kriterien sind in der VDE 0670 Teil 6 beschrieben (früher Phela-Richtlinien).

Nach VDE 0670 Teil 6 werden folgende Kriterien bewertet:

Ordnungsgemäß gesicherte Türen, Abdeckungen usw. dürfen sich nicht öffnen; Teile dürfen nicht weggeschleudert werden (Druckentlastungskappen, Sichtfenster); in den äußeren Abschlusswänden dürfen unter der Lichtbogeneinwirkung keine Löcher durch Einbrennen, Zersplittern oder Aufreißen entstehen; durch Austreten heißer Gase dürfen sich keine senkrecht angebrachten Stoffindikatoren entzünden; die waagrecht angebrachten Indikatoren dürfen sich nicht entzünden; Erdverbindungen dürfen sich nicht



lösen. Über die Prüfung wird ein Protokoll erstellt, in dem der genaue Prüfverlauf, eine Anlagenbeschreibung und der Aufbau der Anlage wiedergegeben wird.

Die Personensicherheit hängt nicht nur von der Ausführung der Schaltanlage ab, sondern auch von den Aufstellungs- und Betriebsbedingungen. So kann es z.B. bei Anlagen mit hoher Kurzschlussleistung, die in kleinen Räumen untergebracht sind, zu erheblichen Beschädigungen an den Gebäuden kommen. Durch den Lichtbogen im Schaltfeld kommt es dort zu rascher Erwärmung der Umgebungsluft. Hierdurch wird das Gasvolumen im Brennraum explosionsartig vergrößert, was zu einer Druckerhöhung führt. Das würde in einem abgeschlossenen Volumen einen Druckanstieg zur Folge haben, der bis zur mechanischen Belastungsgrenze des Schaltfeldes ansteigen könnte.

Aufgabe der *Druckentlastungskappen* ist der Druckabbau im Schaltfeld. Die Klappen öffnen nach etwa 5...8 ms. Nach Öffnung strömt das heiße Gas in den Schaltanlagenraum, bis ungefähr 95% der Luftmenge den Brennraum verlassen hat und dort eine Temperatur von ungefähr 6000 K erreicht ist. Diese sogenannte Emissionsphase dauert rund 100 ms. Die Emissionsphase ist im Vergleich zu der bei Störlichtbogenversuchen angesetzten Versuchsdauer von 1 Sekunde sehr kurz. In der anschließenden thermischen Phase werden Elektrodenwerkstoffe und Isolierstoffe verbrannt und verdampft. Es kommt zu einem weiteren Ausstoß heißer Gase, die jetzt nahezu die Temperatur des Lichtbogens (6000 K) haben und deren Menge vom Anteil der Verdampfungsvorgänge abhängig ist. Durch Untersuchungen hat man festgestellt, dass das ausgestoßene Gasvolumen das 3fache Volumen des Lichtbogenbrennraumes erreicht. Nach Gleichung (II.59) ergibt sich für den Anlagenraum folgender Druckanstieg:

$$\text{ausgedehntes Volumen } V_a = 3 \cdot V_0 \quad (\text{II.57})$$

*Differenzdruck*

$$\Delta p = \left( \frac{V_a}{V_u} \right) \cdot p_0 = \left( \frac{3 \cdot V_0}{V_u} \right) \cdot p_0 \quad (\text{II.58})$$

$V_0$  Volumen des Lichtbogenbrennraums;  $V_a$  Volumen des ausgestoßenen Gases;  $V_u$  Volumen des Anlagenraums;  $p_0$  Druck im Anlagenraum vor Zündung des Lichtbogens;  $\Delta p$  Druckerhöhung nach Lichtbogenzündung im Anlagenraum

Die Widerstandsfähigkeit von planen Wänden (Ausfachung im Stahlbetonskelettbau) wurde für Gasbetonsteinmauerwerk und Kalksandsteinmauerwerk durch Versuche ermittelt. Die Versuche ergaben, dass Gasbetonmauerwerk von 12 cm Stärke bei einer Druckwelle von ungefähr 15 hPa nachgab, Kalksandsteinmauerwerk mit 1/2 Lochstein im Zementmörtel gab bei einer Druckwelle von 60 hPa nach, und Kalksandsteinmauerwerk aus 1/2 Lochstein im Kalkmörtel gab bei einer Druckwelle von 30 hPa

nach. Die Anhaltswerte zeigen, dass schon geringe Druckerhöhungen im Schaltanlagenraum zu dessen Zerstörung führen kann. Es sollte deshalb in jedem Anlagenraum für eine ausreichende Druckentlastung gesorgt werden.

■ **Beispiel:** Welcher Differenzdruck stellt sich in einem Raum von  $V_u = 63 \text{ m}^3$  ein, wenn ein Störlichtbogen in einem Schaltfeld mit einem Volumen  $V_0 = 0,5 \text{ m}^3$  ungefähr 1 s brennt? Wie erhöht sich der Druck bei einem Raumvolumen von  $V_u = 150 \text{ m}^3$

*Differenzdruck*

$$\Delta p = \left( \frac{3 \cdot V_0}{V_u} \right) \cdot p_0 = \frac{3 \cdot 0,5 \text{ m}^3 \cdot 0,1 \text{ MPa}}{63 \text{ m}^3} = 23 \text{ hPa}$$

*Differenzdruck*

$$\Delta p = \left( \frac{3 \cdot V_0}{V_u} \right) \cdot p_0 = \frac{3 \cdot 0,5 \text{ m}^3 \cdot 0,1 \text{ MPa}}{150 \text{ m}^3} = 1 \text{ hPa}$$

### 4.3.2.3 Schaltgeräte

Um Energie vom Erzeuger zum Verbraucher zu leiten, ist eine große Anzahl von Schaltgeräten erforderlich. Während mit dem Begriff Schaltgeräte elektrische Betriebsmittel zum Verbinden, Unterbrechen oder Trennen von Strompfaden bezeichnet werden, sind *Schalter* spezielle Schaltgeräte zum mehrmaligen Ein- und Ausschalten von Strompfaden. Bei Schaltern werden bewegliche Schaltstücke durch Bauelemente des Gerätes mechanisch geführt und legen beim Schalten stets denselben vorbestimmten Weg zurück.

Als gültige Bestimmung für Wechselstromschalter für Spannungen über 1 kV sind die VDE-Bestimmungen VDE 0670 maßgebend. Schalter werden ausgeführt als Trennschalter, Last- und Lasttrennschalter und als Leistungsschalter (Leistungstrenner). Entsprechend ihren unterschiedlichen Aufgaben werden unterschiedliche Anforderungen an das Ein- und Ausschaltvermögen gestellt. Für die Auswahl der Schaltgeräte sind folgende Begriffe von Bedeutung: Nennspannung; Nennstrom; Nennfrequenz; Nennisoliationspegel; Nennschaltfolge; Nennkurzschlussausschaltstrom (symmetrisch); Kurzschlussausschaltstrom (asymmetrisch); Nennkurzschlussdauer; Nennkurzschlussleistungseinschaltstrom; Nennkurzzeitstrom.

#### 4.3.2.3.1 Trennschalter

*Trennschalter* (DIN VDE 0670 Teil 2) stellen beim Ausschalten eine Trennstrecke her und dienen zum annähernd stromlosen Schalten oder zum Schalten von Strömen, wenn keine wesentliche Änderung der Spannung zwischen den Schaltstücken auftritt. Im eingeschalteten Zustand muss der Trennschalter, den Strom unter normalen Betriebsbedingungen und für eine festgelegte Zeit unter Bedingungen wie im Kurzschlussfall führen können. Die Trennstrecke muss ein Isoliervermögen aufweisen, das den in den Bestimmungen festgelegten Anforderungen entspricht. Die Trennstrecke muss entweder sichtbar oder aber ihr Vorhandensein durch eine Schalterstel-



lungsanzeige eindeutig erkennbar sein. Übliche Bauformen von Trennschaltern sind Klapptrennschalter und Schubtrennschalter.

#### 4.3.2.3.2 Last- und Lasttrennschalter

**Lastschalter** (DIN VDE 0670 Teil 301) haben ein Schaltvermögen, das den beim Ein- und Ausschalten von Betriebsmitteln und Anlagenteilen in ungestörtem Zustand auftretenden Beanspruchungen entspricht. **Lasttrennschalter** weisen in der Aus-Stellung eine zusätzliche Trennstrecke auf. Übliche Bauformen von Lastschaltern sind Messerlasttrennschalter, Kipprohr-Lasttrennschalter und Schublasttrennschalter. Zum Löschen der Betriebsströme werden am häufigsten Isolierstoff-Löschkammern verwendet. Lasttrennschalter werden nach ihrem konstruktiven Aufbau unterschieden: Verwendung derselben Kontaktanordnung zum Herstellen der Trennstrecke und zum Ausschalten des Belastungsstroms; gesonderte Schaltglieder zur Herstellung der Trennstrecke. Zum Schutz des Bedienpersonals wird in der DIN VDE 0670 Teil 301 gefordert, dass Lasttrennschalter zwei Einschaltungen mit dem Nenn-Kurzschlusseinschaltstrom durchführen können müssen, ohne zerstört zu werden.

#### 4.3.2.3.3 Leistungsschalter

**Leistungsschalter** (DIN VDE 0670 Teil 101 bis Teil 108) genügen den auftretenden Beanspruchungen, die beim Ein- und Ausschalten von Betriebsmitteln und Anlagenteilen im gestörten und ungestörten Zustand, insbesondere unter Kurzschlussbedingungen, auftreten. Im Mittel- und Hochspannungsleistungsschalter ist nicht, wie beim Niederspannungsleistungsschalter, die Umgebungsluft Schaltmedium, sondern es werden Medien wie Druckluft, Öl, Schwefelhexafluorid ( $\text{SF}_6$ ) und Vakuum ( $10^{-9}$  bar) zur Lichtbogenlöschung eingesetzt. Allen Schaltprinzipien, die mit einem Löschmittel arbeiten, ist gemeinsam, dass die Unterbrechung eines Stroms physikalische Wirkungsmechanismen erfordert, die im Vergleich zum ruhenden Lichtbogen mit einer Erhöhung des Energieumsatzes, also mit größeren Energieverlusten verbunden sind. Kontakte und Schaltkammer werden sehr hohen Temperaturen ausgesetzt, was zu entsprechendem Materialabtrag führt. Deshalb wird die Lebensdauer der Schaltkammer und der Kontakte durch Kurzschlusschaltungen stark beeinflusst.

Die gebräuchlichste Ausführungsart von Mittelspannungsleistungsschaltern ist der Vakuumschalter (Bild II-32). Der Einsatz der ölarmen und  $\text{SF}_6$ -Leistungsschalter ist auf einige Spezialfälle beschränkt.

Im Gegensatz zu den herkömmlichen Schaltprinzipien benötigt man beim **Vakuumschalter** kein Löschmedium und erzeugt deshalb nur einen geringen Energieumsatz bei der Lichtbogenlöschung. Der Strom fließt nach der Kontakttrennung bis zum nächsten Stromnulldurchgang über ein Plasma, das

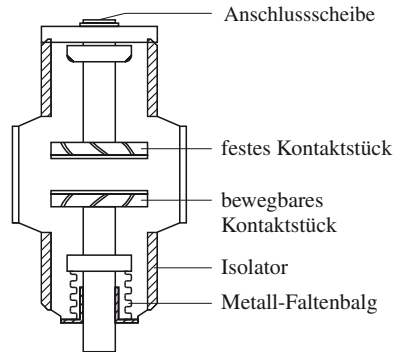


**Bild II-32** Schaltkammer eines Vakuumschalters

sich aus der Verdampfung von Kontaktmaterial bei der Kontakttrennung bildet. Die Ladungsträger des Plasmas kondensieren sehr rasch an den Kontakten oder den Metallflächen der Schaltkammer. Sie werden durch Ladungsträger ersetzt, die der Lichtbogen wiederum durch Verdampfen von Elektrodenmaterial in seinen Fußpunkten selbst erzeugt (Metalldampfbogen). Dieser Lichtbogen hat das Bestreben, sich in viele kleine einzelne Lichtbögen zu teilen, die dann nur noch eine kleine treibende Spannung benötigen und somit wenig Energieumsatz hervorrufen. Die Teillichtbögen verteilen sich über die gesamte Kontaktfläche, die dadurch kalt bleibt (Lichtbogen brennt diffus). Nähert sich der Stromwert dem Nulldurchgang, verlöschen immer mehr Teillichtbögen, bis der letzte Lichtbogen abreißt. Da die Ladungsträgerbildung im Bereich des Stromnulldurchgangs aussetzt, wird die Schaltstrecke schnell entionisiert. Damit ist die Lichtbogenlöschung vollzogen. Bei Stromstärken größer 10 kA geht der diffuse Lichtbogen in einen einzigen Lichtbogen über, der durch die höhere Stromstärke mehr Plasma erzeugt und an der Brennstelle Materialaufschmelzungen hervorruft. Da viel Material verdampft ist, tritt im Stromnulldurchgang keine Verfestigung ein; der Lichtbogen brennt weiter. Deshalb werden die Kontaktstücke so geformt, dass der Lichtbogen von seinem eigenen Magnetfeld auf eine Kreisbahn um den Kontakt gezwungen wird und somit nicht an einer Stelle stehen bleibt (Transversalmagnetkontakt). Es wird nicht soviel Material verdampft wie beim stehenden Lichtbogen, und die Strecke kann sich im Stromnulldurchgang verfestigen.

Vorteile des Vakuumschalters gegenüber den Leistungsschaltern mit anderen Löschmedien: Geringer Übergangswiderstand, da Kontaktfläche fremdschichtfrei; geringe Lichtbogenspannung und damit niedrige Schaltarbeit; rasche Wiederverfestigung der Schaltstrecke bei kleinem Kontaktabstand (6 bis 25 mm); geringer Platzbedarf (ungefähr 1,5 dm<sup>3</sup>, ölarm ungefähr 8,5 dm<sup>3</sup>); niedriger Kontaktmaterialverschleiß; hohe Schalthäufigkeit ohne Wartungs-

arbeiten; geringe Masse der Kontakte, darum kleinere Antriebe.

Die Einsatzgebiete des Vakuumleistungsschalters sind sehr vielfältig. Durch intensive Forschung kann der Vakuumleistungsschalter mittlerweile zum Schalten sämtlicher Verbraucher eingesetzt werden. Ausnahmen bilden Motore mit einem Anlaufstrom  $< 600$  A, wenn damit zu rechnen ist, dass der Motor während des Anlaufvorgangs abgeschaltet werden kann. In diesem Fall sind Überspannungsschutzmaßnahmen empfehlenswert. Ferner kann beim Schalten von Induktionsöfen eine Überspannungsschutzmaßnahme erforderlich werden.

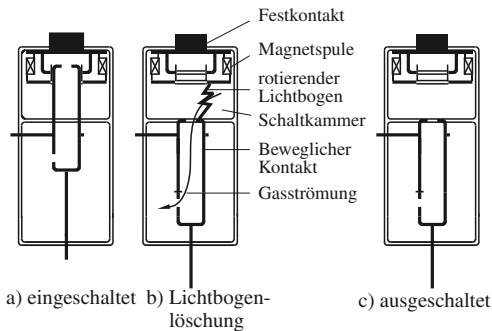


**Bild II-33** Schaltvorgang eines  $\text{SF}_6$ -Leistungsschalters

**Löschprinzip in Gasschaltern (Bild II-33):** Bei der Kontakttrennung wird ein Lichtbogen erzeugt, der das ihn umgebende Gas auf eine Temperatur von ungefähr 20000 K aufheizt. Der Lichtbogen wird durch den zurückgehenden Schaltkontakt in eine Düse hineingezogen. Das Löschmedium expandiert durch die Erhitzung des Lichtbogens sehr stark und wird durch die Düse an dem Lichtbogen vorbeigeleitet. Der Lichtbogen wird gekühlt (Energieentzug). Im Stromnulldurchgang entzieht diese Strömung dem Lichtbogen genügend Energie, um ein Abreißen des Lichtbogens zu bewirken. Durch den kalten Löschgasstrom wird der Strecke zwischen festem und beweglichem Kontakt soviel Energie entzogen, dass bei wiederkehrender Spannung keine neue Zündung des Lichtbogens möglich ist. Als Löschgas eignet sich  $\text{SF}_6$ , da es ein hohes Wärmeaufnahmevermögen hat. Es ist unbrennbar und hat eine hohe dielektrische Festigkeit. Außerdem ist es ein elektronegatives Gas, das freie Elektronen binden kann.

#### 4.3.2.3.4 Erdungsschalter

**Erdungsschalter (DIN VDE 0670 Teil 2)** schalten annähernd stromlos und eignen sich für das Erden und Kurzschließen ausgeschalteter Betriebsmittel und Anlagenteile. Erdungsschalter sind einschaltfest, d.h., werden sie auf einen Kurzschluss geschaltet, schließen sich die Kontakte und die Strombahnen halten den unter Kurzschlussbedingungen fließenden Strom über eine festgelegte Zeit.

#### 4.3.2.3.5 Sicherungen

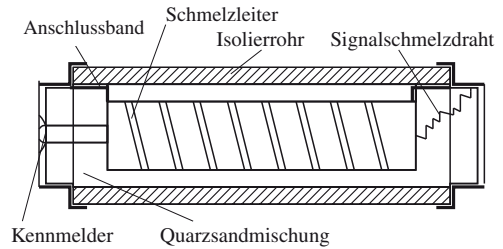


**Bild II-34** HH Sicherung Aufbau

**Sicherungen (DIN VDE 0670 Teil 4)** sind Schaltgeräte, bei denen die Strombahn durch Abschmelzen bestimmter Teile unter Wirkung eigener Stromwärme unterbrochen wird (Bild II-34), wenn der Strom in festgelegter Zeit einen bestimmten Wert überschreitet. Sicherungen begrenzen im Kurzschlussfall den auftretenden Kurzschlussstrom auf Werte, die weit unter dem unbeeinflussten Stoßkurzschlussstrom liegen. Diese Strombegrenzung gewährleistet einen wirksamen Schutz der nachgeschalteten Anlagen vor Schäden durch thermische und dynamische Beanspruchungen. Sicherungen werden in der Hauptsache zum Schutz von Transformatoren und Kondensatoren eingesetzt.

#### 4.3.2.3.6 $I_S$ -Begrenzer

**$I_S$ -Begrenzer** sind Schaltgeräte, die Stromkreise in sehr kurzer Zeit nach ihrer Auslösung auftrennen, den Strom auf eine parallel angeordnete Quarzsandsicherung in Spezialausführung kommutieren und dort löschen.

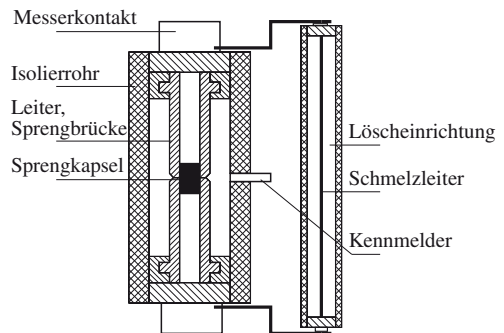


**Bild II-35** Aufbau des  $I_S$ -Begrenzers

Der  $I_S$ -Begrenzer (Bild II-35) besteht aus zwei in einem Isolierstoffgehäuse angeordneten, mit Längsschlitz versehenen Rohrstücken, die an ihrer einen Stirnfläche an die Stromanschlüsse angeschlossen und an der anderen zusammengelötet sind. Im Inneren dieser rohrförmigen Kontaktstücke befindet sich eine Sprengkapsel, die über ein Zündgerät durch Entladung eines Kondensators ausgelöst wird. Durch

den hohen Druck der Sprengung spreizen sich die Kontaktfinger und unterbrechen den Hauptstromkreis. Die Sicherung, die für eine kleine Nennstromstärke ausgelegt ist, begrenzt und löscht den kommutierten Kurzschlussstrom noch in seinem Anstieg. Da die Ausschalverzögerung des  $I_S$ -Begrenzers wesentlich unter 1 ms liegt, ist der Durchlassstrom klein und die strombegrenzende Wirkung sehr groß.  $I_S$ -Begrenzer werden in Mittelspannungsanlagen bis 36 kV eingesetzt und dienen zum raschen Auftrennen von Sammelschienen bei Schaltanlagen mit hoher Kurzschlussleistung.

#### 4.3.2.4 Schutzgeräte

Zum Schutz von Betriebsmitteln in Netzen >1 kV stehen unterschiedliche Schutzeinrichtungen zur Verfügung, deren Aufgabe es ist, Fehler zu erkennen und diese selektiv und schnell aus dem Netzverband abzuschalten, damit Fehlerauswirkungen so gering wie möglich bleiben. Die heute eingesetzten Schutzrelais werden hauptsächlich elektronisch ausgeführt.

##### 4.3.2.4.1 Überstromrelais/Überstromzeitrelais

Ströme oberhalb eines einstellbaren Schwellwertes werden ein- oder mehrphasig erfasst und nach einer einstellbaren Zeit abgeschaltet. Die Auslösezeit ist unabhängig davon, um wieviel der Schwellwert überschritten wurde (**Unabhängige Maximalstrom-Zeitrelais** = UMZ-Relais).

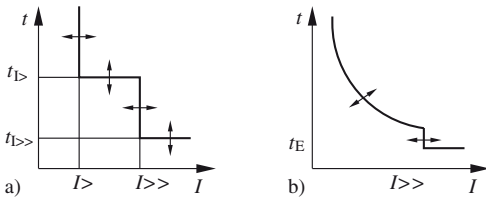


**Bild II-36** Kennlinien von

- a) UMZ-Relais
- b) AMZ-Relais

Zu den Überstromrelais gehört auch das AMZ-Relais (**Abhängige Maximalstrom-Zeitrelais**). Die Auslösezeit ist abhängig vom fließenden Strom. In Bild II-36 sind die Kennlinien der Überstromrelais dargestellt.

##### 4.3.2.4.2 Überlastrelais

Die Temperaturverhältnisse des Schutzobjektes werden mit gleicher thermischer Zeitkonstante nachgebildet. Vorbelastungen werden vom thermischen Abbild in dem Relais entsprechend den Erwärmungs- und Abkühlungskurven erfasst. Nach Überschreiten von einstellbaren Temperaturschwellen werden Melde- oder Auslösesignale abgegeben. Überlastrelais setzt man zum Schutz von thermisch gefährdeten Maschinen, Transformatoren und Motoren, seltener für Kabel ein.

##### 4.3.2.4.3 Differentialrelais

Die am Anfang und am Ende des Schutzobjektes gemessenen Ströme oder die von den Strömen abgeleiteten Spannungen werden nach Phasenlage und Größe einander angepasst und in einem Messwerk verglichen (Bild II-37).

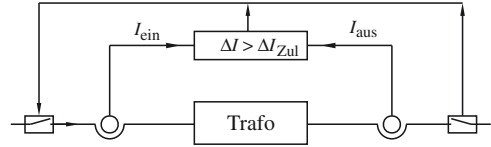


**Bild II-37** Anordnung eines Differentialrelais am Beispiel eines Transformators

Beim Überschreiten eines einstellbaren Verhältnisses von Differenz- zu Durchgangsstrom erteilt das Relais ein Auslösekommando. Differentialrelais sind als Transformator- und Generator-Differentialrelais verfügbar. Leitungsdifferentialrelais besitzen je Leitungsende Messwerke (Relais), die über Hilfsadern miteinander verbunden sind.

##### 4.3.2.4.4 Distanzrelais

Die Fehlerentfernung vom Relais wird über eine Widerstandsmessung, abgeleitet aus Kurzschlussstrom und -spannung, einem Auslösebereich zugeordnet. Entsprechend der am Relais einstellbaren Entfernungs-Zeit-Kennlinie löst das Relais den zugehörigen Leistungsschalter aus oder stellt eine Schutzreserve dar. Distanzrelais arbeiten in mehrseitig gespeisten und vermaschten Netzen ohne Hilfsverbindung selektiv mit kürzesten Auslösezeiten.

##### 4.3.2.4.5 Kurzunterbrechungsrelais

Erkennen Überstromzeitrelais oder Distanzrelais einen Fehler, wird diese Information zu einem KU-Relais weitergeleitet. Das KU-Relais schaltet den fehlerbehafteten Bereich ab und nach einer einstellbaren Pausenzeit von rund 300 ms wieder zu. In dieser Pausenzeit ist eine Lichtbogenfehlerstrecke entionisiert, und der Betrieb kann unterbrechungsfrei fortgeführt werden. Eine erfolglose Kurzunterbrechung führt zu einer endgültigen Abschaltung.

##### 4.3.2.4.6 Erdschlussrichtungsrelais

Aus der vektoriellen Zuordnung von Nullstrom und Nullspannung wird eine Richtungsanzeige gewonnen. Ein Vergleich der Anzeigen im Netz weist auf die Fehlerstelle hin. Weitere Schutzrelais: Vergleichsschutzeinrichtung; Sammelschienenenschutz; Frequenzrelais; Spannungsrelais; Schiefastrelais; Rückwärtsrelais.

#### 4.3.3 Anlagenräume

Bei der Planung von Innenraumanlagen ist neben den betrieblichen Erfordernissen darauf zu achten, dass die ausgewählten Räume grund- und hochwasserfrei

sind und guten Zugang für Bedienung, Transportmittel und Brandbekämpfung bieten. Die Wände, Decken und Fußböden müssen trocken sein. Verlegung von Rohrleitungen für Flüssigkeiten, Dampf und brennbare Gase in, über und unter Räumen für Schaltanlagen ist zu vermeiden. Unter Umständen müssen bauliche Maßnahmen zum Schutz der elektrischen Anlage durchgeführt werden. Die Innenflächen der Schalthauswände sind möglichst glatt herzustellen, damit Staubablagerungen vermieden werden. Das Mauerwerk ist zu verputzen, Betondecken mit glatter Untersicht können unverputzt bleiben. Der Fußbodenbelag muss leicht zu reinigen, druckfest, gleitsicher und abriebfest sein. Stufen oder schräge Fußbodenflächen sind in Schaltanlagenräumen unbedingt zu vermeiden. Fenster sind so anzuordnen, dass sie bedient werden können, ohne dass das Personal in den Gefahrenbereich spannungsführender Teile gerät. Bei Aufstellung der Schaltfelder an der Wand dürfen dort keine Fenster angeordnet werden (Ausnahme: Glasbausteine). Ausgänge und Türen sind so anzuordnen, dass der Fluchtweg aus der Anlage nicht mehr als 40 m beträgt. Bei mehr als 40 m Anlagenlänge müssen zwei Ausgänge vorgesehen werden, wovon einer ein Notausgang sein kann. Türen müssen nach außen aufschlagen und so beschaffen sein, dass der Zutritt unbefugter Personen jederzeit verhindert wird, während in der Anlage befindliche Personen diese jedoch ungehindert verlassen können. Die Türen müssen feuerhemmend und aus nichtbrennbaren Baustoffen hergestellt sein. Außen sind Türen mit Warnschildern WS 1 und Zusatzschild ZS 1 nach DIN 40008 Teil 3 zu versehen. Installationsleitungen sind so zu verlegen, dass sie durch Lichtbogeneinwirkung möglichst nicht gefährdet werden können. Teile der Installation, die gewartet werden müssen, sind so anzubringen, dass bei fachgerechtem und sorgfältigem Arbeiten keine Berührungsgefahr mit unter Spannung stehenden Anlagenteilen besteht. Die Belüftung des Anlagenraumes muss so vorgesehen werden, dass eine Raumtemperatur von  $+35\text{ °C}$  und eine relative Feuchte von 70%, bezogen auf  $35\text{ °C}$ , nicht überschritten wird. Die Raumtemperatur darf nicht unter Werte von  $-5\text{ °C}$  sinken. Die Einhaltung dieser Richtwerte vermeidet die Bildung von Schwitzwasser und hemmt die Korrosion von Bauelementen. Ferner wird hierdurch verhindert, dass die Kriechstrecken durch hohe Luftfeuchtigkeit herabgesetzt werden. In Gegenden mit starker Luftverschmutzung sind die Räume mit gefilterter Luft unter schwachem Überdruck zu halten. Lüftungsöffnungen müssen gegen Regen und Spritzwassereinfall gesichert sein. Bei Höhen bis ungefähr 2,50 m über dem Gelände sind außerdem hinter den Lüftungsöffnungen Stocherbleche anzubringen. Um Schäden an den Wänden und Decken des Schaltanlagenraumes bei einem Störlichtbogen zu verhindern, sollten Druckentlastungseinrichtungen vorgesehen werden, die folgende Kriterien erfüllen:

Im Normalfall geschlossen gegen das Eindringen von Kleintieren, Schnee und Regen; leichte, selbsttätige Öffnung der Einrichtung bei einem Überdruck  $<10\text{ hPa}$ ; Druckentlastung in eine Region, in der sich normalerweise keine Personen aufhalten, während der Druckentlastung dürfen sich keine Bauteile lösen. Die Anordnung der Schaltfelder richtet sich nach ihrer Anzahl, der Anlagenbauform und nach den Betriebsbedingungen.

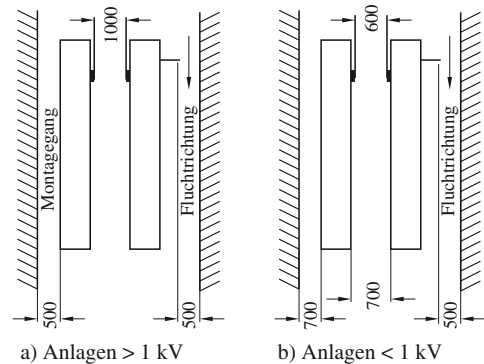


**Bild II-38** Mindestgangbreiten nach VDE 0101 und VDE 0100 T. 729

Die erforderlichen Mindestgangbreiten sind nach VDE 0101 einzuhalten (Bild II-38). Die Mindestgangbreite bei Innenraumanlagen ist in Abhängigkeit von der Ganglänge und der Art der Schutzvorrichtung zu wählen. Die Mindestbreite der Wege und Gänge darf nicht unterschritten werden, auch nicht durch hineinragende Teile wie Antriebe und Steuerschränke. Weiterführende Angaben über die Ausführung von Anlagenräumen können im AGI-Arbeitsblatt J11 nachgelesen werden. Da das Entstehen von Bränden in Schaltanlagenräumen nicht ausgeschlossen werden kann, sollte bei der Planung vorbeugender Brandschutz berücksichtigt werden. Hierzu gehören kleine Brandabschnitte, feuerhemmende und feuerbeständige Abtrennungen, Kabel- und Leitungsschottungen zu Nachbarräumen. Die Auswirkung eines Brandes auf die Umgebung hängt von der Brandbelastung (Brandlast) ab. Sie entspricht der theoretisch freisetzbaren Energie sämtlicher brennbarer Stoffe bezogen auf eine definierte Grundfläche ( $\text{kWh je m}^2$  Brandabschnittsfläche). Über die Verbrennungswärme von Kabeln und Leitungen geben Ausarbeitungen des Verbandes der Sachversicherer (VdS) Anhaltswerte.

#### 4.3.4 Niederspannungsschaltanlagen

Für den Bau von Niederspannungsschaltanlagen und Verteilern gelten verschiedene VDE-Normen, die sich wiederum auf andere VDE-Normen beziehen (Bild II-39).

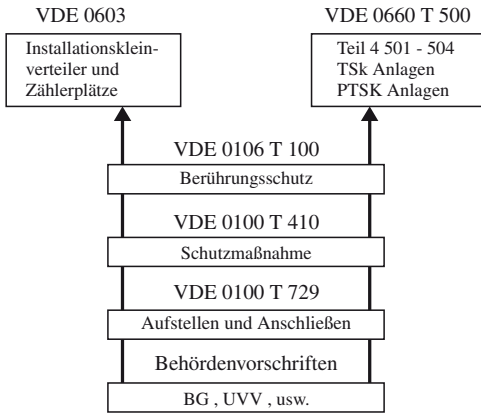


**Bild II-39** Überblick der VDE-Vorschriften für Niederspannungsschaltanlagen

#### 4.3.4.1 Niederspannungs-Schaltgeräte-kombinationen

Unter den Oberbegriff NSK fallen alle Niederspannungsanlagen bis 1000 V AC und bis 1000 Hz oder 1500 V DC einschließlich elektromechanische und elektronische Betriebsmittel. Eine Ausnahme bilden die Installationskleinverteilern. Bei den NSK-Anlagen wird unterschieden in *Typgeprüfte Schaltgerätekombination* (TSK) und *Partiell typgeprüfte Schaltgerätekombination* (PTSK). Für die Typprüfung sind folgende Voraussetzungen vorgeschrieben:

Umgebungstemperatur von Innenraumanlagen  $\leq 40^\circ\text{C}$ ; Mittelwert darf nicht  $> 35^\circ\text{C}$  und nicht  $< 5^\circ\text{C}$  sein (über 24 h gemessen). Abstände innerhalb der Anlagen müssen bei den TSK-Anlagen nach VDE 0110, bei den PTSK nach VDE 0660 (0100) ausgeführt werden. Die Erwärmung innerhalb der Schaltschränke ist bei den TSK-Anlagen durch Versuche zu überprüfen, bei denen die Grenztemperatur der Geräte nicht überschritten werden darf; bei PTSK-Anlagen muss die Anlagenerwärmung nach Anlage R VDE 0660 ermittelt oder durch eine Erwärmungsprüfung nachgewiesen werden. Schutzmaßnahmen müssen entsprechend VDE 0100 Teil 410 ausgeführt werden; Kurzschlusschutz der Anlage muss gewährleistet sein (Informationen über Kurzschlussfestigkeit der Anlage vom Hersteller); gegebenenfalls muss der Hersteller die zu verwendenden Sicherungseinsätze genau definieren. Nicht fabrikfertige Schaltanlagen und Verteiler müssen nach VDE 0100 Teil 510 und 729 errichtet werden; an ihnen muss eine Isolations- und eine Erwärmungsprüfung nach VDE 0660 T. 5 durchgeführt werden. Ferner muss die Kurzschlussfestigkeit und die Einhaltung der Schutzmaßnahme nachgewiesen werden.

##### 4.3.4.1.1 Niederspannungs-Schaltgeräte

Niederspannungsschaltgeräte unterscheiden sich von Hochspannungsschaltgeräten durch den geringeren

Isolieraufwand, eine teilweise erheblich höhere Schalthäufigkeit und höhere Ströme. Deshalb müssen andere Konstruktionskriterien beachtet werden als bei Hochspannungsschaltgeräten.

##### 4.3.4.1.1.1 Leistungsschalter

Leistungsschalter müssen unter betriebsmäßigen Bedingungen Ströme und Kurzschlussströme schalten können. Zum Schalten gehört das Einschalten, das Ausschalten und das Führen. Bei den NS-Leistungsschaltern wird unter zwei Bauarten unterschieden: dem *Nullpunktlöscher* und dem *strombegrenzenden Leistungsschalter*. Beim Nullpunktlöscher wird der zu schaltende Strom im Nulldurchgang gelöscht und zwar erst im eingeschwungenen Zustand. Beim strombegrenzenden Leistungsschalter wird der Strom vor Erreichen des Maximums geschaltet. Für die Auslegung der nachgeschalteten Betriebsmittel ist nur noch der Durchlassstrom  $I_D$  maßgebend. Neben den bislang bekannten offenen Leistungsschaltern für größere Leistungen und den gekapselten Leistungsschaltern für kleinere Leistungen wird in Anlehnung an die Mittelspannungstechnik ein Niederspannungsleistungsschalter mit Vakuumschaltkammer angeboten. Dieser Schalter hat gegenüber den herkömmlichen Schaltern den Vorteil, dass der Lichtbogen innerhalb der Vakuumkammer brennt, die Kontakte eine wesentlich höhere Anzahl von Kurzschluss- oder Nennstromschaltungen durchführen können; dieser Schalter ist weniger wartungsintensiv. Lichtbogen-ausblasräume entfallen, eine Gefährdung des Bedienpersonals kann auch bei offenen Schaltschränken ausgeschlossen werden.

Die wichtigen Daten für Niederspannungsleistungsschalter sind das *Bemessungs-Kurzschlusschaltvermögen*, der *Bemessungsstrom* und der *Bemessungs-kurzzeitstrom*. Bemessungs-Kurzschlussausschaltvermögen  $I_{cn}$  und Bemessungs-Kurzschlusseinschaltvermögen  $I_{cm}$  müssen mindestens dem an der Einbaustelle auftretenden unbeeinflussten Anfangs-Kurzschlusswechselstrom  $I'_k$  sein. Leistungsschalter, die als selektiver Schutz eingesetzt werden, müssen in der Schließstellung den Augenblickswert des unbeeinflussten Kurzschlussstroms (Stoßkurzschlussstrom  $i_p$ ) und den Kurzschlussstrom während der festgelegten Verzögerungszeit führen können. Angaben hierüber sind aus den Herstellerkatalogen zu entnehmen. Tritt eine Überlast oder ein Kurzschluss auf, muss der Schalter einen Auslöseimpuls erhalten. Je nach Bauart erfolgt dieses über Auslöser, die direkt in den Strombahnen eingebaut sind, oder über Relais, die den Arbeitsstrom- oder Unterspannungsauslöser des Schalters beeinflussen.

##### 4.3.4.1.1.2 Schütze

Schütze sind zum häufigen betriebsmäßigen Schalten mit betriebsmäßiger Überlast (Gebrauchskategorien) ausgelegt. Sie müssen durch geeignete Maßnahmen vor Kurzschlusseinwirkungen geschützt werden.



**Tabelle II-32** Gebrauchskategorien nach DIN VDE 0660 für Wechselstrom (AC) und Gleichstrom (DC)  
 $I_c$  Ein- und Ausschaltstrom;  $I_e$  Bemessungsbetriebsstrom

| Gebrauchskategorie | Typischer Anwendungsfall                                                                                 | Ein- und Ausschaltbedingungen |                |
|--------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|----------------|
|                    |                                                                                                          | $I_c/I_e$                     | $\cos \varphi$ |
| AC-1               | Nicht induktive oder schwach induktive Last                                                              | 1,5                           | 0,8            |
| AC-2               | Schleifringläufermotoren: Anlassen, Ausschalten                                                          | 4,0                           | 0,65           |
| AC-22              | Schalten gemischter ohmscher und induktiver Last einschließlich mäßiger Überlast                         | 4,0                           | 0,65           |
| AC-3               | Käfigläufermotoren: Anlassen, Ausschalten während des Laufes                                             | 8,0                           | 0,35–0,45      |
| AC-4               | Käfigläufermotoren: Anlassen, Gegenstrombremsen, Reversieren, Tippen                                     | 10,0                          | 0,35–0,45      |
| AC-5 a             | Schalten von Gasentladungslampen                                                                         | 3,0                           | 0,45           |
| AC-5 b             | Schalten von Glühlampen                                                                                  | 1,5                           |                |
| AC-6 a             | Schalten von Transformatoren                                                                             | 8,0–10,0                      | 0,35–0,45      |
| AC-6 b             | Schalten von Kondensatorbatterien                                                                        | siehe VDE                     | siehe VDE      |
| AC-7 a             | Schwach induktive Last in Haushaltsgeräten und ähnlichen Anwendungen                                     | 1,5                           | 0,8            |
| AC-7 b             | Motorlast für Haushaltsgeräte                                                                            | 8,0                           | 0,35–0,45      |
| AC-8 a             | Schalten von hermetisch gekapselten Kühlkompressoren mit manueller Rückstellung der Überlastauslöser     | 6,0                           | 0,35–0,45      |
| AC-8 b             | Schalten von hermetisch gekapselten Kühlkompressoren mit automatischer Rückstellung der Überlastauslöser | 6,0                           | 0,35–0,45      |
| DC-1               | Nicht induktive oder schwach induktive Last                                                              | 1,5                           |                |
| DC-13              | Steuern von Elektromagneten                                                                              | 1,5                           |                |
| DC-20              | Schließen und öffnen Leerlast                                                                            |                               |                |
| DC-21              | Schalten ohmscher Last                                                                                   |                               |                |
| DC-22              | Schalten gemischter ohmscher und induktiver Last einschließlich mäßiger Überlast                         |                               |                |
| DC-23              | Schalten stark induktiver Last                                                                           |                               |                |
| DC-3               | Nebenschlussmotoren: Anlassen, Gegenstrombremsen, Reversieren, Tippen, Widerstandsbremse                 | 4,0                           |                |
| DC-5               | Reihenschlussmotoren: Anlassen, Gegenstrombremsen, Tippen, Reversieren, Widerstandsbremse                | 4,0                           |                |
| DC-6               | Schalten von Glühlampen                                                                                  | 1,5                           |                |

Die Gebrauchskategorien sind in DIN VDE 0660 Teile 102, 107 und 200 festgelegt. In Tabelle II-33 ist ein Überblick der Gebrauchskategorien dargestellt.

Schütze müssen ohne Verschweißen der Kontakte und ohne starken Schaltstückabbrand den Bemessungseinschaltstrom ein- und ausschalten können. Die elektrische Lebensdauer eines Schützes ist durch die Anzahl der Schaltspiele unter den festgelegten Betriebsbedingungen vorgegeben. Bei Abweichungen erhöht oder mindert sich die Schützlebensdauer erheblich.

Die elektrische Lebensdauer eines Schützes ist durch die Anzahl der Schaltspiele unter den festgelegten Betriebsbedingungen vorgegeben. Bei Abweichungen erhöht oder mindert sich die Schützlebensdauer erheblich.

#### 4.3.4.1.1.3 Sicherungen

Sicherungen sind Schutzeinrichtungen, die ein nachgeschaltetes Betriebsmittel durch Abschmelzen eines oder mehrerer Schmelzleiter vor einem Überlast- oder Kurzschlussstrom schützen. In der DIN VDE 0636 sind für Sicherungen Kennlinienbereiche festgelegt. In diesen Zeit-Strom-Bereichen müssen Sicherungen auslösen. Die große Toleranz der Kennlinienfelder entsteht durch unvermeidbare Fertigungstoleranzen.

Niederspannungssicherungen werden nach ihren Betriebsklassen und Bauarten klassifiziert.

Bedeutung der Buchstaben: g Ganzbereichsschutz; a Teilbereichsschutz; L Kabel- oder Leitungsschutz; M Schaltgeräte (Motorschutz); R Halbleiterschutz; Tr Transformatorenschutz.

Sicherungen gibt es in verschiedenen Ausführungen: NH-Einsätze 500 V AC, 440 DC und 660 AC; D-Einsätze 500 AC, 600 DC (660 AC); DO-Einsätze 380 AC und 250 DC.

#### 4.3.4.1.1.4 Leitungsschutzschalter

Leitungsschutzschalter sind handbetätigte Schutzgeräte (ein Arbeitsstromauslöser kann teilweise angebaut werden) im Leistungsbereich bis 63 A Nennstrom und 415 V AC, 440 V DC. Es sind strombegrenzende Schalter mit fest eingestelltem thermisch-verzögertem und elektromagnetisch-unverzögertem Auslöser. Sie werden mit verschiedenen Auslösecharakteristiken nach DIN VDE 0641 geliefert. Die in Deutschland eingeführten Auslösekennlinien L und G sind durch die Auslösekennlinien B und C ersetzt worden.

#### 4.3.4.1.1.5 Fehlerstromschutzschalter

Fehlerstromschutzschalter (FI-Schalter Bild II-40) schalten den zu schützenden Anlagenbereich ab, wenn über die geerdeten, nicht zum Betriebsstromkreis gehörenden leitfähigen Anlagenteile oder über den menschlichen Körper ein Fehlerstrom (Differenzstrom) fließt, der den Auslösestrom des FI-Schutzschalters überschreitet.

Der Vorteil des FI-Schutzschalters gegenüber anderen Schutzgeräten in der Niederspannungstechnik ist,

dass geringe Fehlerströme ( $\Delta I = 0,01 \text{ A}$  bis  $1 \text{ A}$ ) erkannt werden und zu einer sofortigen Abschaltung führen. Dadurch kann der FI-Schutzschalter zum Schutz bei indirektem Berühren, bei einpoligem direktem Berühren ( $I_{AN} \leq 0,03 \text{ A}$ ), zum Erdschlussschutz oder zum Schutz gegen Brände durch Erdschlussfehlerströme eingesetzt werden.

Da immer mehr elektronische Bauelemente in den Netzen eingesetzt werden und diese Bauelemente Ströme erzeugen, die stark von der Sinusform abweichen, sind für den Schutz bei indirektem Berühren nach DIN VDE 0100 Teil 410 *pulsstromempfindliche Geräte* entsprechend DIN VDE 0664 zu verwenden. Diese Geräte lösen auch bei Gleichfehlerströmen aus, die innerhalb einer Periode der Netzfrequenz Null oder nahezu Null werden. In vielen Industrienetzen werden Schaltungen eingesetzt, bei denen im Fehlerfall glatte Gleichfehlerströme mit geringer Restwelligkeit auftreten können (Drehstrom-Gleichrichterschaltung). Hierfür dürfen die pulsstromempfindlichen Geräte nicht eingesetzt werden (DIN VDE 0160). Deshalb hat man einen FI-Schutzschalter entwickelt, der in Anlehnung an die pulsstromempfindliche FI-Schutzeinrichtung gefertigt wird. Diese *allstromsensitive FI-Schutzeinrichtung* hat eine Zusatzeinheit für die Erfassung von glatten Gleichfehlerströmen entsprechend IEC 479.

## 5 Schutzmaßnahmen

Maßnahmen zum Schutz vor den Gefahren der elektrischen Energie sind in VDE-Bestimmungen zusammengefasst worden. Sie gelten als „allgemein anerkannte Regeln der Technik“ und sind in diversen Gesetzen und Verordnungen als bindende Ausführungsnorm vorgeschrieben. Trotz dieser Rechtsvorschriften wird den VDE-Bestimmungen von juristischer Seite lediglich Rechtsnormqualität zugestanden. Das bedeutet, dass ein bloßer Verstoß gegen die VDE-Bestimmungen noch nicht strafbar ist; erst wenn dadurch ein Unfall ausgelöst wird, ist mit einer strafrechtlichen Verfolgung zu rechnen.

Wichtigste VDE-Vorschriften (Auswahl):

VDE 0100 Nennspannungen bis 1000 V; VDE 0101 Nennspannungen über 1000 V; VDE 0105 Betreiben von Starkstromanlagen. Darüber hinaus gibt es für spezielle Bereiche VDE-Vorschriften, die weiterreichende Anforderungen an die Errichtung von elektrischen Anlagen stellen als die oben genannten Vorschriften. Dazu gehören:

VDE 0107 (medizinisch genutzte Räume); VDE 0108 (Menschenansammlungen); VDE 0118 (Bergbau unter Tage); VDE 0165 (explosionsgefährdete Bereiche); VDE 0168 (Errichten elektrischer Anlagen in Tagebauen, Steinbrüchen und ähnlichen Betrieben); VDE 0800 (Fernmeldetechnik; Errichten und Betreiben).

Zu Maßnahmen, die eine Gefährdung des Menschen und der Tiere durch den elektrischen Strom auf ein

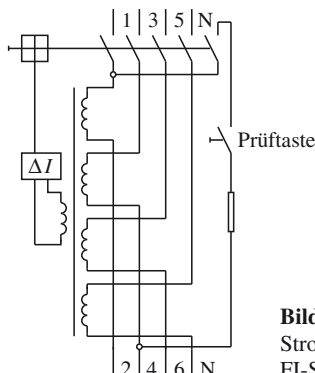


**Bild II-40**  
Stromlaufplan  
FI-Schutzschalter



tragbares Minimum reduzieren sollen, unterscheidet die VDE zwischen zwei Schwerpunkten: Schutz gegen direktes Berühren und Schutz gegen indirektes Berühren.

5.1 Wirkung des Stroms

Der elektrische Strom bewirkt beim Fließen durch den menschlichen Körper physikalische und physiologische Wirkungen. Physikalische Wirkungen: Strommarken an den Stromeintrittsstellen; innere Verbrennungen z.B. an Gelenken; Flüssigkeitsverlust, Verkochungen; Verbrennungen und Blendungen durch Lichtbogen. Physiologische Wirkungen: Muskelkontraktion, Nervenerschütterungen; Muskelverkrampfungen (Erstickungsgefahr); Blutdrucksteigerung; Herzstillstand; Herzkammerflimmern. Mediziner und Ingenieure beschäftigen sich damit, die Wirkung des Stroms auf den menschlichen Körper zu analysieren und gefährliche Grenzwerte aufzuzeigen. In Tabelle II-34 ist die Wirkung des elektrischen Stroms bei Längsdurchströmung auf den menschlichen Körper aufgezeigt (nach Koeppen):

Kleidung (Schuhe) ab. Nach Versuchen kann der Körperwiderstand Werte zwischen 300 Ω und 1000 Ω annehmen. Ein weiterer Einflussfaktor auf die Höhe des durch den Körper fließenden Stroms ist die Frequenz der Berührungsspannung.

5.2 Schutz gegen direktes Berühren

Der Schutz gegen direktes Berühren soll verhindern, dass betriebsmäßig unter Spannung stehende Anlagenteile berührt werden können. Das kann erreicht werden durch Aufbringen einer Isolierung (Kabel und Leitungen), Abdecken oder Umhüllen (Schaltanlagen, Stecker), Aufstellen von Hindernissen (Gittertüren, Geländer, Schutzbalken, aber nicht Farbmarkierungen am Boden!) oder durch Abstände (Freileitung). Werden Anlagen in Räume aufgestellt, die für jedermann zugänglich sind (Betriebsstätten), müssen die Schutzvorrichtungen mechanisch widerstandsfähig sein und zuverlässig befestigt werden. Türen oder Abdeckungen dürfen nur mit Werkzeug zu öffnen oder zu entfernen sein (Schraubendreher, Schlüssel). In Anlagenräumen (abgeschlossene elektrische Be-

Tabelle II-34 Wirkung des elektrischen Stroms auf den menschlichen Körper

| Stromstärke in mA | Wirkung                                                                                                          | Durchströmungsdauer |
|-------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| ≤ 1               | Strom gerade noch spürbar, kitzeln wie durch Ameisen                                                             |                     |
| ≤ 5               | Gefühl wie Einschlafen der Hand, schwache Versteifung                                                            |                     |
| 10                | Krämpfe, Loslassen unterhalb der Werte noch möglich                                                              | ab 2000 s           |
| 200               | Krämpfe, Loslassen unterhalb der Werte noch möglich                                                              | ab 10 ms            |
| 25                | Blutdrucksteigerung, Herzunregelmäßigkeit, Bewusstlosigkeit möglich                                              | ab 2000 s           |
| 50                | Blutdrucksteigerung, Herzunregelmäßigkeit, Bewusstlosigkeit möglich                                              | ab 10 s             |
| 50                | Tod durch Herzkammerflimmern, Herzstillstand, Atemstillstand                                                     | ab 1000 s           |
| 1000              | Tod durch Herzkammerflimmern, Herzstillstand, Atemstillstand                                                     | ab 10 ms            |
| 3000–8000         | Innere und äußere Verbrennungen, Herzstillstand während der Durchströmung. Tod durch Verbrennung oder Verkohlung |                     |

Mit Hilfe der Gleichung (II.60) kann der durch den Körper fließende Strom berechnet werden.

$$\text{Körperstrom } I = \frac{U}{Z} \tag{II.59}$$

U ist die vom Menschen berührte Spannung und Z der Widerstand des menschlichen Körpers. Der Widerstand hängt von der Höhe der Berührungsspannung, dem Stromweg durch den Körper, der Hautbeschaffenheit (dünn, dick, hornig, feucht) und der

etriebsstätten) müssen die Anlagen nur gegen zufälliges Berühren geschützt werden.

5.3 Schutz gegen indirektes Berühren

Der Schutz gegen indirektes Berühren soll bewirken, dass elektrisch leitende Anlagenteile, die betriebsmäßig nicht spannungsführend sind, keine gefährlichen Berührungsspannungen annehmen können oder im Fehlerfall eine Abschaltung der Spannung erfolgt.

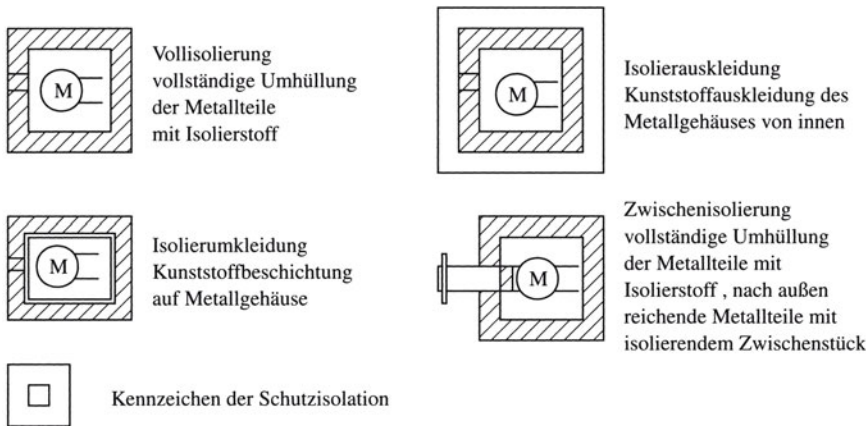


Bild II-41 Arten der Schutzisolation

Der Schutz gegen indirektes Berühren wird durch folgende Schutzmaßnahmen bewirkt: Schutzisolation; Schutztrennung; nichtleitende Räume; Schutzkleinspannung, Funktionskleinspannung; Schutz durch Abschalten oder Meldung, Übersstromschutzeinrichtung, FI-Schutzeinrichtung, Isolationsüberwachung, Schutzleitungssystem.

### 5.3.1 Schutzisolation

Schutzisolierte Geräte erkennt man an einem doppelten Quadrat auf dem Leistungsschild. Die Schutzisolation wird dadurch erreicht, dass die vorhandene Basisisolation verstärkt und eine zusätzliche Isolation zur Basisisolation aufgebracht wird.

Durch die Schutzisolation soll das Auftreten gefährlicher Spannungen an berührbaren, aus Metall bestehenden Teilen elektrischer Betriebsmittel verhindert werden (Bild II-41). Schäden an der Schutzisolation können deren Wirkung aufheben. Ferner kann die Schutzisolation durch eine nicht ordnungsgemäße Handhabung und Reparatur aufgehoben werden (Isolierteile werden durch metallische Teile ersetzt, Feuchtigkeit im Gerät). Beim Einsatz von schutzisolierten Handgeräten muss auch die Zuleitung den gleichen Anforderungen wie das Gerät genügen.

Beispiele für schutzisolierter Geräte: Isolierende Gehäuse (Kaffeemaschine, Haarfön, Leuchten, Bohrmaschine); vollisolierendes Installationsmaterial (Leitungen NYM, Schalter, Steckdosen, Verteiler).

In schutzisolierten Geräten darf ein Schutzleiter nicht angeschlossen werden, es sei denn, es ist eine besondere Stelle für den Schutzleiter gekennzeichnet. Wird der Schutzleiter innerhalb des schutzisolierten Gerätes an ein leitfähiges Teil angeschlossen, ist das Gerät nicht mehr schutzisoliert.

### 5.3.2 Schutztrennung

Die Schutztrennung ist eine Schutzmaßnahme, die hauptsächlich für Montagearbeiten in engen Räumen

eingesetzt wird. Die Schutzwirkung dieser Maßnahme kann nur mit Einschränkungen hervorgehoben werden.

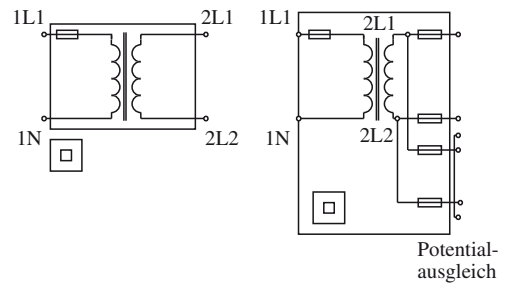


Bild II-42 Schaltungen für Schutztrennung

Durch einen Trenntransformator oder einen Motorgenerator (schutzisoliert) wird eine Trennung vom allgemeinen Netz vorgenommen (Bild II-42). Um eine optimale Schutzwirkung zu gewährleisten, müssen folgende Voraussetzungen erfüllt sein:

Es darf nur ein Verbraucher pro Trenntrafo oder Motorgenerator angeschlossen werden. Der geschützte Stromkreis darf nicht geerdet oder mit anderen Anlagenteilen verbunden werden. Die Steckdose darf keinen Schutzleiterkontakt haben (Schutzisolation). Bewegliche Leitungen zu den Verbrauchern müssen mindestens die Bauart H 07 RN-F (NMHöu) haben. Bei besonderer Gefährdung des Benutzers durch metallisch leitenden Standort (Kessel, Stahlgerüst) muss ein leitfähiges Verbrauchsmittelgehäuse durch einen besonderen Leiter (grün/gelb) *sichtbar* mit dem Standort verbunden werden.

Durch den Schutztrenntrafo wird eine erdfreie Sekundärspannung erzeugt. Tritt am Betriebsmittel ein Körperschluss auf, kann kein Strom fließen, da keine weitere leitende Verbindung zum Stromkreis besteht.

Bei einem weiteren Fehler im Stromkreis kann, da nun eine weitere Verbindung geschaffen wurde, ein erheblicher Stromfluss auftreten, wenn der Betreiber das Gerät berührt. Um die Wahrscheinlichkeit solcher Doppelfehler gering zu halten, darf nur ein Verbraucher an das Netz angeschlossen werden. Ferner sorgt der Leiter zwischen Gehäuse und Standort für eine Überbrückung des menschlichen Körpers und verhindert so gefährliche Berührungsspannungen. Bei der Schutztrennung darf das Produkt aus der Nennspannung in V und der Leitungslänge in m den Wert 100 000 nicht überschreiten. Die Leitungslänge sollte nicht größer als 500 m werden. Neben dieser klassischen Schutztrennung lässt die VDE 0100 Teil 410 auch den Anschluss mehrerer Verbraucher an einen Stromkreis zu. Die Körper dieser Verbraucher müssen über einen erdfreien Potentialausgleich miteinander verbunden werden. Weiter muss gewährleistet sein, dass ein vorgeschaltetes Sicherungsorgan bei einem zweiten Körperschluss innerhalb von 0,2 s auslöst.

### 5.3.3 Schutz durch nichtleitende Räume

Bei dieser Schutzmaßnahme (Bild II-43) soll das gleichzeitige Berühren zweier schadhafter Geräte verhindert werden.

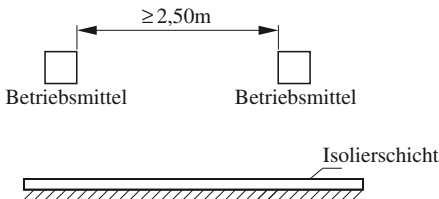


**Bild II-43** Schutz durch nichtleitende Räume

Hierzu ist es erforderlich, dass die im Raum vorhandenen Betriebsmittel mindestens einen Abstand von 2,50 m (außerhalb des Handbereiches 1,25 m) voneinander haben, und das gleichzeitige Berühren eines Betriebsmittels und eines fremden leitfähigen Teils ausgeschlossen ist. An die festeingebauten Betriebsmittel und an Steckdosen darf kein Schutzleiter angeschlossen werden. Die Betriebsmittel dürfen jedoch untereinander mit einem erdfreien Potentialausgleich verbunden werden. Fußboden und Wände müssen mindestens einen Isolationswiderstand von  $R_{ISO} = 50 \text{ k}\Omega$  bei Spannungen bis 500 V Wechsel- oder 750 V Gleichspannung und  $R_{ISO} = 100 \text{ k}\Omega$  bei Spannungen über 500 V Wechsel- und 750 V Gleichspannung aufweisen. Außerdem müssen Vorkehrungen getroffen werden, dass durch fremde, leitfähige Teile keine Spannung aus dem betreffenden Raum verschleppt werden kann.

### 5.3.4 Schutzkleinspannung

Schutzkleinspannung (SELV – safty extra low voltage) ist eine Schutzmaßnahme, bei der Stromkreise mit Nennspannungen bis 50 V Wechselspannung und

120 V Gleichspannung ungeerdet betrieben werden und bei Speisung aus Stromkreisen höherer Spannung von diesen galvanisch sicher getrennt sind (Bild II-44).

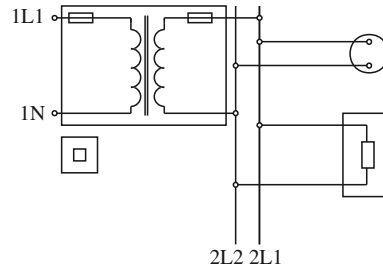


**Bild II-44** Schaltungen für Schutzkleinspannung

Wenn die SELV die Spannung von 25 V Wechsel- oder 60 V Gleichspannung überschreitet, muss ein Schutz gegen direktes Berühren sichergestellt werden. Erzeugt wird die Schutzkleinspannung mit:

Sicherheitstransformatoren nach DIN VDE 0551; Transformatoren mit sicherer elektrischer Trennung DIN VDE 0804; Umformern mit elektrisch getrennten Wicklungen nach DIN VDE 0530; Generatoren nach DIN VDE 0530 mit nicht elektrischem Antrieb; galvanischen Elementen, Akkumulatoren oder anderen elektrochemischen Stromquellen nach VDE 0510; elektronischen Geräten nach DIN VDE 0160, bei denen sichergestellt ist, dass die zulässigen Spannungsgrenzen im Fehlerfall (extern und intern) nicht überschritten werden.

Stecker von Geräten für Schutzkleinspannung dürfen nicht in Steckdosen oder Kupplungen einsteckbar sein, die mit anderen (höheren Spannungen) betrieben werden. Ebenso dürfen Steckdosen und Kupplungen keine Stecker von Betriebsmitteln anderer Spannungen aufnehmen können. Leitungen sollten getrennt von Leitungen anderer Stromkreise verlegt werden. Ist das nicht möglich, muss die Leitung durch einen geerdeten Metallschirm oder -mantel von den Leitungen anderer Stromkreise getrennt sein. In die Erdungsmaßnahme dürfen weder elektrische Leiter und andere aktive Teile, noch die Körper (Gehäuse) der Betriebsmittel einbezogen werden. Auch Verbindungen zwischen Körpern eines SELV-Stromkreises mit Schutzleitern oder Körpern anderer Stromkreise ist unzulässig. Durch diese strikte Trennung des SELV-Stromkreises von anderen Stromkreisen soll verhindert werden, dass höhere Spannungen über die Erdverbindung übertragen werden. Die Schutzkleinspannung ist vom Schutzwert her gesehen eine sehr gute Schutzmaßnahme, da auch beim Auftreten mehrerer Körperschlüsse keine größere Spannung als 50 V AC oder 120 V DC auftreten können. Da jedoch nur geringe Spannungen zulässig sind, kann diese Maßnahme nicht überall zur Anwendung kommen und

ist auf wenige Sonderfälle beschränkt (Kinderspielzeug, medizinische Geräte, leitende Kessel, nasse Räume).

### 5.3.5 Funktionskleinspannung

Die Funktionskleinspannung ist eine Schutzmaßnahme, bei der Stromkreise mit Nennspannungen bis 50 V AC und 120 V DC betrieben werden. Sie wird dann eingesetzt, wenn die an die Schutzkleinspannung gestellten Forderungen nicht erfüllt werden oder wenn Betriebsmittel aus Funktionsgründen geerdet werden müssen. Auch wenn Betriebsmittel (Schütze, Relais, Schalter) eine Isolierung gegenüber Stromkreisen höherer Spannung besitzen, die nicht derjenigen genügt, die für die Schutzkleinspannung gefordert ist, wird diese Schutzmaßnahme angewendet.

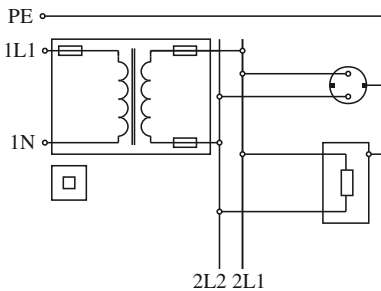


**Bild II-45** Schaltungen für Funktionskleinspannung

Funktionskleinspannungen (PELV – protectiv extra low voltage oder FELV – functional extra low voltage) können mit den in Bild II-45 dargestellten Schaltungen erzeugt werden. Funktionskleinspannung mit sicherer Trennung (PELV) liegt vor, wenn alle Bedingungen der Schutzkleinspannung erfüllt sind. Funktionskleinspannung ohne sichere Trennung (FELV) liegt vor, wenn eine sichere Trennung wie bei der Schutzkleinspannung nicht hergestellt werden kann. Im Gegensatz zur Schutzkleinspannung können bei der Funktionskleinspannung aktive Teile oder Körper geerdet sein. Es können Betriebsmittel (Schalter, Schütze, Transformatoren) eingesetzt werden, deren Isolierung gegenüber den Stromkreisen höherer Spannung nicht den Bedingungen entsprechen, die für Schutzkleinspannung gefordert sind, die also nicht sicher elektrisch getrennt sind. Beim Einsatz der Funktionskleinspannung ist der Schutz gegen direktes Berühren durch Isolierung oder durch Abdecken und Umhüllen der aktiven Teile sicherzustellen. Wird die Funktionskleinspannung von Geräten ohne sichere Trennung zur Primärseite erzeugt, müssen die Verbrauchsmittel in die Schutzmaßnahme des vorgelagerten Netzes einbezogen werden. Normalerweise sind Steuerungen von Schützen als Funktionskleinspannung einzustufen, da keine sichere Trennung zwischen Steuerspannung und geschalteter Spannung besteht.

Die *sichere Trennung* wird in der DIN VDE 0106 behandelt. Ein Stromkreis ist sicher getrennt, wenn ein einzelner Fehler nicht zum Übertritt der Spannung eines Stromkreises in einen anderen führt. Sie wird durch doppelte oder verstärkte Isolierung (DIN VDE 0160), durch Schutzschirmung oder durch eine Kombination aus beiden erreicht.

### 5.3.6 Schutz durch Abschalten und Melden

Beim Schutz durch Abschalten oder Melden spielt die vorhandene Netzform eine wesentliche Rolle (Bild II-46).

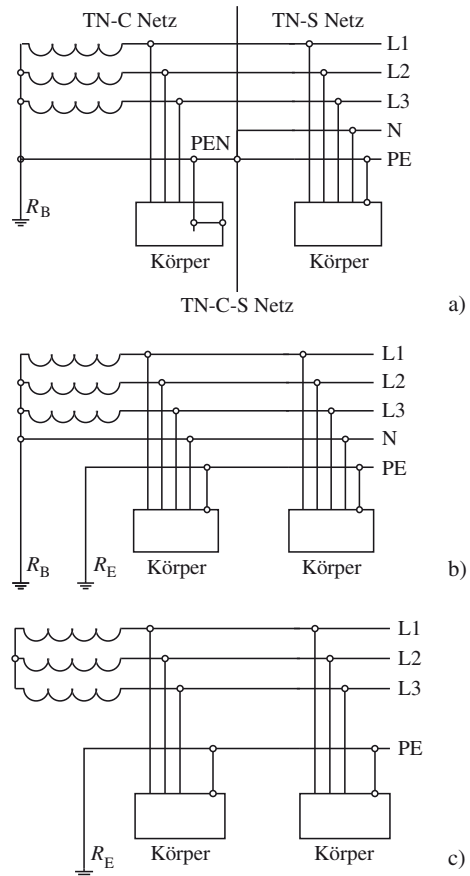


**Bild II-46**

- a) TN-Netz
- b) TT-Netz
- c) IT-Netz

Die VDE unterscheidet die Netzformen IT-Netz, TT-Netz und TN-Netz. Beim TN-Netz erfolgt noch eine Untergliederung zwischen TN-C-, TN-S- und TN-C-S-Netz. Bedeutung der Kurzzeichen: Erster Buchstabe: Erdungsbedingungen des speisenden Netzes; T direkte Erdung eines Punktes (Stern-

punkt des Transformators); I entweder Isolierung aller aktiven Teile von der Erde oder Verbindung eines Punktes über eine Impedanz (Sternpunkt des Transformators über Petersenspule oder hochohmigen Widerstand geerdet).

Zweiter Buchstabe: Erdungsbedingungen der Körper der elektrischen Anlage; T Körper direkt geerdet, unabhängig von der etwa bestehenden Erdung eines Punktes der Stromversorgung; N Körper direkt mit der Betriebs Erde verbunden.

In Wechselspannungsnetzen ist der geerdete Punkt im allgemeinen der Sternpunkt. Wichtig für die Schutzmaßnahme Abschalten und Melden ist, dass im Fehlerfall die dauernd zulässige Berührungsspannung 50 V bei Wechselspannung und 120 V bei Gleichspannung nicht überschreiten darf.

### 5.3.6.1 Überstromschutzeinrichtung

Der Schutz durch Überstromschutzeinrichtungen kann in allen Netzformen eingesetzt werden (Schutz durch Abschalten). Haupteinsatzgebiet ist jedoch das TN- und das TT-Netz (Bild II-47).

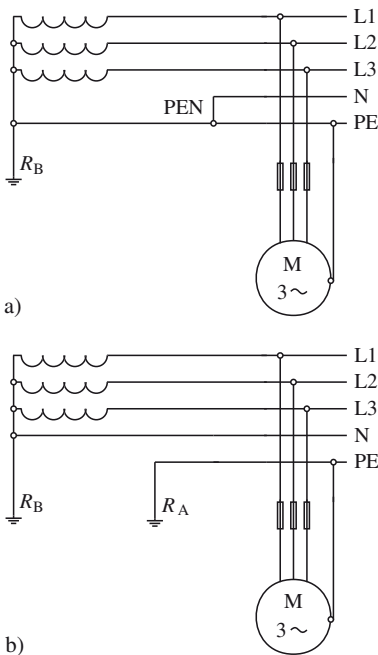


**Bild II-47**

- a) Schutz durch Abschalten im TN-Netz  
b) Schutz durch Abschalten im TT-Netz

Der Schutz kann nur gewährleistet werden, wenn im Fehlerfall ein Strom fließt, der zum Auslösen der Schutzeinrichtung führt. Im Fehlerfall muss also ein geschlossener Stromkreis aufgebaut werden, der diesen Fehlerstrom führen kann, ohne am defekten Gerät eine für den Betreiber gefährliche Berührungs-

spannung entstehen zu lassen. Das wird im TN-Netz durch Verbindung des Transformator-Sternpunktes mit jedem Körper erreicht. Als Verbindungsleitung dient der PEN-Leiter (früher MP-Leiter). Da der Trafosternpunkt zusätzlich geerdet ist, wird ein zusätzlicher Schutz erreicht. Alle nicht betriebsmäßig unter Spannung stehenden Teile von Betriebsmitteln oder Anlagen müssen direkt mit dem PEN-Leiter oder über einen besonderen Schutzleiter (PE) mit diesem verbunden werden.

Ein besonderer Schutzleiter ist im TN-Netz für Querschnitte  $> 10 \text{ mm}^2$  gefordert. Diese Forderung basiert auf der Tatsache, dass Leiter  $< 10 \text{ mm}^2$  mechanisch nicht sehr stabil sind und leicht ein Drahtbruch auftreten kann. Wenn ein Drahtbruch im PEN-Leiter auftritt, kann eine gefährliche Berührungsspannung auf die zu schützenden Körper übertragen werden, da neben der Schutzleiterfunktion auch der Betriebsstrom geführt werden muss. Das wird durch die Aufteilung auf PE- und N-Leiter verhindert. Ebenso sollte der PEN- oder der PE-Leiter mehrfach mit einer Erdverbindung versehen werden. Hierdurch wird die Sicherheit im Netz weiter erhöht. Als Kennzeichnung für den PEN- oder den PE-Leiter ist *grün/gelb* vorgeschrieben. Grün/gelb gekennzeichnete Leiter dürfen *ausschließlich* als PEN- oder PE-Leiter eingesetzt werden. Für das TN-Netz gelten folgende Bedingungen:

Die Fehlerspannung zwischen Körper und Erde darf 50 V bei Wechsel- und 120 V bei Gleichspannung nicht überschreiten; Stromkreise mit Steckdosen, Stromkreise bis 35 A Nennstrom und Stromkreise mit ortsveränderlichen Betriebsmitteln müssen bei einem Fehler innerhalb von 0,2 s abgeschaltet werden; alle anderen Stromkreise müssen bei einem Fehler in 5 s abgeschaltet werden; für die Stromkreisgleichung gilt  $Z_S \cdot I_a \leq U_0$  mit  $Z_S$  Impedanz der Fehlerschleife,  $I_a$  Abschaltstrom für die erforderliche Zeit und  $U_0$  Nennspannung gegen Erde.

Für das TT-Netz gelten folgende Bedingungen:

Die Fehlerspannung zwischen einzelnen Körpern und zwischen Körper und Erde darf 50 V bei Wechsel- und 120 V bei Gleichspannung nicht überschreiten; können Körper gleichzeitig berührt werden, müssen sie durch einen Schutzleiter miteinander verbunden werden; im Fehlerfall muss das Schutzorgan in mindestens 0,2 s abschalten; beim Einsatz eines FI-Schutzschalters sollte der Erdungswiderstand den Wert  $200 \Omega$  nicht überschreiten; für die Stromkreisgleichung gilt  $R_A \cdot I_a \leq U_L$  mit  $R_A$  Erdungswiderstand der Erder der Körper,  $I_a$  Abschaltstrom für die erforderliche Zeit und  $U_L$  zulässige Berührungsspannung.

■ **Beispiel:** Wie hoch darf die Impedanz der Fehlerschleife im TN-Netz sein, wenn die Nennspannung Leiter – Erde  $U_0 = 230 \text{ V}$  beträgt und ein Steckdosenstromkreis mit einer gL-Sicherung  $I_N = 16 \text{ A}$  und  $I_a = 170 \text{ A}$  bei 0,2 s abgesichert werden soll?

$$Z_S \cdot I_a \leq U_0 \Rightarrow Z_S \leq \frac{U_0}{I_a} = \frac{230 \text{ V}}{170 \text{ A}} = 1,35 \Omega$$

Wie hoch darf der Erdungswiderstand im TT-Netz werden, wenn gleiche Voraussetzungen wie oben vorliegen?

$$R_A \cdot I_a \leq U_L \Rightarrow R_A \leq \frac{U_L}{I_a} = \frac{50 \text{ V}}{170 \text{ A}} = 0,29 \Omega$$

### 5.3.6.2 FI-Schutzeinrichtung

Die FI-Schutzeinrichtung kann in allen Netzformen eingesetzt werden (Bild II-48).

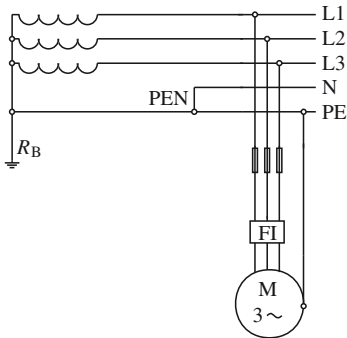


**Bild II-48** Schutz durch Abschalten im TN-Netz mit zusätzlichem FI-Schalter

Sie ermittelt den Differenzstrom zwischen Hin- und Rückleiter. Tritt im Netz ein Fehler auf, wird ein Teil des Stroms abgeleitet. Dieser Fehlerstrom benutzt nicht den Rückleiter des Netzes, sondern einen anderen Weg (Schutzleiter, menschlichen Körper). Überschreitet der Fehlerstrom einen bestimmten Wert, führt das zum Abschalten des Stromkreises durch den FI-Schutzschalter, da die Summe des Stroms im Hin- und Rückleiter nicht mehr Null wird. Zur Zeit sind FI-Schutzschalter mit einem Auslösestrom von 10 mA bis 1000 mA erhältlich. Der Einsatz von Geräten mit einem Auslösestrom  $\leq 30$  mA führt zu einem hohen Schutzgrad, da der Übergangswiderstand bei der höchsten zulässigen Berührungsspannung wesentlich höher sein darf als bei der Überstromschutzauslösung. Die Abschaltzeit der FI-Schutzschalter beträgt 20–60 ms. Betrachtet man die Auslösezeit und den Auslösestrom der FI-Schutzeinrichtung, so erkennt man, dass Geräte mit einem Auslösestrom  $\leq 30$  mA einen optimalen Schutz auch bei hohen Berührungsspannungen bieten, da nur der Ableitstrom von 30 mA als Auslösekriterium herangezogen wird. Werden in Netzen FI-Schutzschalter mit kleinem Auslösestrom eingesetzt, kann es zu Fehlauslösungen kommen, wenn schlecht isolierte Geräte eingesetzt werden, oder wenn die kapazitive Ableitung der Betriebsmittel zu groß wird. Hier hilft eine Unterteilung der Netzabschnitte in kleinere Einheiten.

■ **Beispiel:** Wie hoch darf die Impedanz der Fehlerschleife im TN-Netz sein, wenn die Nennspannung Leiter – Erde  $U_0 = 230$  V beträgt und ein Steckdosenstromkreis mit einer gL-Sicherung  $I_N = 16$  A und einem FI-Schutzschalter mit  $\Delta I_a = 30$  mA abgesichert werden soll?

$$Z_S \cdot I_a \leq U_0 \Rightarrow Z_S \leq \frac{U_0}{I_a} = \frac{230 \text{ V}}{0,03 \text{ A}} = 7,667 \text{ k}\Omega$$

Wie hoch darf der Erdungswiderstand im TT-Netz werden, wenn gleiche Voraussetzungen wie oben vorliegen?

$$R_A \cdot I_a \leq U_L \Rightarrow R_A \leq \frac{U_L}{I_a} = \frac{50 \text{ V}}{0,03 \text{ A}} = 1,667 \text{ k}\Omega$$

### 5.3.6.3 Isolationsüberwachung

Die Schutzmaßnahme Isolationsüberwachung entspricht der Schutzmaßnahme „Meldung“.

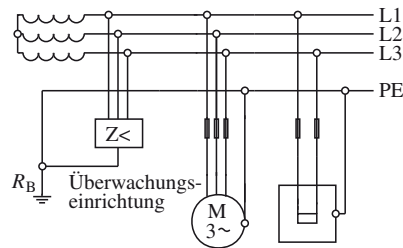


**Bild II-49** IT-Netz mit Verbrauchern und Schutzmaßnahmen

Diese Schutzmaßnahme darf nur im IT-Netz eingesetzt werden (Bild II-49), da hierbei ein erster Fehler nur gemeldet und nicht, wie im TT- oder TN-Netz, abgeschaltet werden muss. Eine zu hohe Berührungsspannung entsteht nicht, es können also alle eingeleiteten Arbeits- und Produktionsprozesse vollendet werden. Beim ersten Fehler im IT-Netz (Erdschluss) nimmt der Schutzleiter das Potential des den Fehler auslösenden Außenleiters an. Das stellt aber keine Gefahr dar, da über den Schutzleiter (Schutzleitungssystem) alle Körper und alle berührbaren Metallteile dieses Potential annehmen, somit auch keine Potentialdifferenzen überbrückt werden können. Bei einem zweiten Fehler in einem anderen Außenleiter muss eine Auslösung durch eine andere Schutzeinrichtung erfolgen, da gefährliche Berührungsspannungen zwischen zwei Körpern entstehen können (Bedingungen wie TN-Netz). Die Isolationsüberwachung ist also keine Schutzmaßnahme, die für sich allein eingesetzt werden kann. Nur in Verbindung mit der Überstromauslösung oder FI-Schutzschalter ist ein Schutz vor den Gefahren des elektrischen Stroms gegeben.

### 5.3.6.4 Zusätzlicher Potentialausgleich

Beim Einsatz eines IT-Netzes wird gefordert, dass alle Körper und Metallteile über einen Schutzleiter miteinander verbunden sind. Das bedeutet, dass alle metallischen Gehäuse der elektrischen Betriebsmittel über einen Schutzleiter miteinander zu verbinden sind. Ebenso müssen alle metallischen Konstruktionsteile mit diesem Schutzleiter verbunden werden (Rohre, Träger).



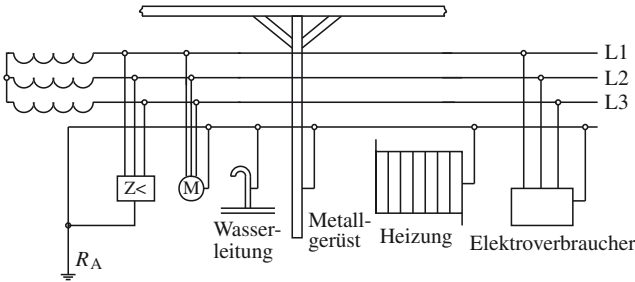


**Bild II-50**  
Zusätzlicher Potentialausgleich  
im IT-Netz

Der zusätzliche Potentialausgleich sollte mehrfach geerdet sein. Er sollte so beschaffen sein, dass bei einem zweiten Erdschluss im IT-Netz der dann fließende Kurzschlussstrom eine Auslösung der Schutzgeräte bewirkt und zwischen gleichzeitig berührbaren Betriebsmitteln oder Körpern keine gefährliche Berührungsspannung auftritt (Bild II-50).

**6 Arbeiten an elektrischen Anlagen**

Die Schutzmaßnahmen beziehen sich auf die Errichtung von elektrischen Anlagen. Der Schutz vor den Gefahren des elektrischen Stroms kann nicht nur auf die Errichtung beschränkt bleiben, sondern muss auch während des Betriebs und vor allem während erforderlicher Reparaturmaßnahmen gelten. Nach Fertigstellung und Inbetriebnahme der Anlage ist die VDE 0105 (Betrieb von Starkstromanlagen) für die Betreiber und Benutzer bindend.

Inhaltliche Aussagen der VDE 0105:

Elektrische Anlagen und Betriebsmittel sind in einem sicheren Zustand zu erhalten. Schädliche Rückwirkungen der Anlage und der Betriebsmittel auf andere Einrichtungen und die Umgebung sind zu verhindern.

Alle Tätigkeiten, die mit dem Betrieb von Starkstromanlagen zusammenhängen, müssen gefahrlos ausgeführt werden können. Der Betreiber oder Benutzer (Unternehmer) ist verantwortlich dafür, dass elektrische Anlagen in seinem Einflussbereich nur von einer Elektrofachkraft selbst oder unter Leitung und Aufsicht einer Elektrofachkraft betrieben werden. Die Arbeiten an elektrischen Anlagen dürfen von folgenden Personen ausgeführt werden: *Elektrofachkräften*, die auf Grund der fachlichen Ausbildung und Erfahrung mögliche Gefahren selbst erkennen können; *elektrotechnisch unterwiesene Personen* erhalten eine Belehrung durch eine Elektrofachkraft über mögliche Gefahren.

Zu den Personen, die bei Arbeiten an elektrischen Betriebsmitteln der Gefahr eines Elektrounfalls ausgesetzt sind, gehören im wesentlichen die Angehörigen der Elektroberufe, also Elektrofachkräfte und elektrotechnisch unterwiesene Personen. Ist die elektrische Anlage entsprechend den Normen und Vorschriften errichtet, ist die Gefahr eines elektrischen Unfalls sehr gering. Um den ordnungsgemäßen Zustand zu erhalten, müssen regelmäßige Kontrollen an den Betriebsmitteln erfolgen. In der VDE 0105

**Tabelle II-34** Übersicht von Prüffristen an elektrischen Anlagen

| Art des Betriebsmittels                                                          | Prüffrist                                   | Art der Prüfung                                                                    |
|----------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Elektrohandwerkzeug auf Baustellen                                               | 3 – 6 Monate, bei Mehrschichtbetrieb kürzer | Schutzmaßnahme, augenfällige Mängel                                                |
| Elektrohandwerkzeug im stationären Betrieb                                       | 6 Monate                                    | Schutzmaßnahme, augenfällige Mängel                                                |
| Büromaschinen                                                                    | 1 – 2 Jahre                                 | Schutzmaßnahme, augenfällige Mängel                                                |
| Fertigungseinrichtungen                                                          | 1 – 2 Jahre                                 | Sichtkontrolle und Prüfung des Schutzleiteranschlusses                             |
| Elektrische Anlagen und ortsfeste Betriebsmittel                                 | mindestens alle 4 Jahre                     | Schleifenwiderstand messen, Außenleiter gegen Neutralleiter und gegen Schutzleiter |
| FI-Schutzschalter<br>– bei nichtstationären Anlagen<br>– bei stationären Anlagen | täglich<br>alle 6 Monate                    | Durch Betätigen der Prüfeinrichtung                                                |



werden die erforderlichen Prüfungen an den elektrischen Anlagen und Betriebsmitteln, die von dem Fachpersonal durchzuführen sind, vorgeschrieben. In Tabelle II-35 sind einige Prüf Fristen aufgeführt. Die Zeitabstände dieser Prüfungen legen die für die Betriebe zuständigen Behörden fest (UVV; BG; El-Berg-V; Gewerbeaufsicht). Die bei den Kontrollen erkannten Mängel müssen sofort abgestellt werden. Falls eine dringende Gefahr besteht, muss dafür gesorgt werden, dass die Anlage oder das Betriebsmittel in seinem mangelhaften Zustand nicht verwendet wird (VBG 4). Hierzu ist meist eine Reparatur an den Betriebsmitteln notwendig. Diese Reparatur kann von Elektrofachkräften, unterwiesenen Personen oder Laien durchgeführt werden, eine Elektrofachkraft muss aber immer die Aufsicht übernehmen. Vor Reparaturbeginn sind Maßnahmen zu ergreifen, die eine Gefährdung des eingesetzten Personales verhindern. Folgende Maßnahmen müssen durchgeführt werden:

Freischalten (über 1 kV sichtbare Trennstrecke); gegen Wiedereinschalten sichern (Schild, Sperr-elemente); Spannungsfreiheit feststellen (Messgerät, vorher Funktion prüfen; nur durch Elektrofachkraft oder unterwiesenen Person); Erden und kurzschließen (sichtbar); benachbarte, unter Spannung stehende Teile abdecken oder abschränken (Gefahrenbereich). Es folgt eine Unterweisung des Personals über noch verbleibende Gefahrenpunkte.

Danach können die Arbeiten aufgenommen werden. Nach Beendigung der Arbeiten ist ein Zuschalten erst erlaubt, wenn die o.g. Maßnahmen in umgekehrter Reihenfolge aufgehoben wurden und sich die auf-sichtführende Person vom ordnungsgemäßen Zustand der Anlage oder des Betriebsmittels überzeugt hat. Teilweise lässt sich eine Reparatur nur bei nicht spannungsfreiem Zustand durchführen. Diese Ar-beiten dürfen nur von Elektrofachkräften oder elektro-technisch unterwiesenen Personen durchgeführt werden. Hierbei ist die Einhaltung strengster Sicher-heitsmaßnahmen gefordert. Selbstverständlich müssen Arbeiten an elektrischen Anlagen mit entsprechender Schutzausrüstung und Werkzeugen durchgeführt werden. (VDE 0680, An-lage 18; VDE 0682, Anlage 19).

7 Überprüfung der Schutzmaßnahme

Nach DIN VDE 0100 Teil 610 sind elektrische An-lagen vor der Inbetriebnahme einer *Erstprüfung* zu unterziehen. Vor der Erstprüfung müssen die nach DIN VDE 0100 Teil 510 geforderten Schaltungsunterlagen zur Verfügung stehen. Zu dieser Prüfung gehören: Besichtigung der Anlage; Erprobung der Anlage und Überprüfung der Schutzmaßnahme. Das Ergebnis der Prüfung wird in einem Protokoll festgehalten. Die Besichtigung der Anlage sollte bei vollständig abgeschalteter Anlage durchgeführt

Tabelle II-35 Wichtige Prüfungen nach DIN VDE 0100 Teil 610

| Schutzmaßnahme                                          | Prüfungsbestimmungen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|---------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Schutzkleinspannung                                     | Messgleichspannung $U = 250\text{ V}$ , sichere Trennung zwischen aktiven Teilen und aktiven anderen Stromkreisen, Isolationswiderstand $R_{\text{ISO}} \geq 0,25\text{ M}\Omega$                                                                                                                                                                                                         |
| Funktionskleinspannung                                  | Messgleichspannung $U = 250\text{ V}$ , sichere Trennung zwischen aktiven Teilen und aktiven anderen Stromkreisen, Isolationswiderstand $R_{\text{ISO}} \geq 0,25\text{ M}\Omega$                                                                                                                                                                                                         |
| Schutzisolierung                                        | Besichtigung der Isolierung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| Schutztrennung                                          | Messgleichspannung $U = 250\text{ V}$ , sichere Trennung zwischen aktiven Teilen und aktiven anderen Stromkreisen, Isolationswiderstand $R_{\text{ISO}} \geq 0,25\text{ M}\Omega$ ; bei $U = 500\text{ V}$ muss der Isolationswiderstand $R_{\text{ISO}} \geq 0,5\text{ M}\Omega$ sein, bei $U = 1000\text{ V}$ muss der Isolationswiderstand $R_{\text{ISO}} \geq 1\text{ M}\Omega$ sein |
| Hauptpotentialausgleich                                 | Messung; Verbindung zwischen fremden leitfähigen Teilen und Hauptpotential-ausgleichsschiene prüfen; Durchgängigkeit des Schutzleiters                                                                                                                                                                                                                                                    |
| TN-Netz<br>TT-Netz<br>IT-Netz                           | Messung des Isolationswiderstandes $R_{\text{ISO}} \geq 0,5\text{ M}\Omega$ bei $U_N \leq 500\text{ V}$ und $R_{\text{ISO}} \geq 1\text{ M}\Omega$ bei $U_N \geq 500\text{ V}$ ; Abschaltung der Überstromschutzorgane in der erforderlichen Zeit; Auslösung der FI-Schutteinrichtung mindestens beim Erreichen des festgelegten Differenzstroms                                          |
| Auswahl und Einstellung der Überstrom-Schutteinrichtung | Einflüsse nach DIN VDE 0100 Teil 430 und DIN VDE 0298 Teil 2 und Teil 4 (Häufung, Temperatur) sind für den Schutz gegen Überlast zu berücksichtigen. Die richtige Zuordnung der Schutzorgane für den Schutz bei Kurzschluss ist ge-mäß DIN VDE 0100 Teil 430 und Beiblatt 5 zur DIN VDE 0100 zu überprüfen.                                                                               |

werden. Sie hat den Zweck, zu überprüfen, ob die Einhaltung der Maßnahmen zum Schutz gegen gefährliche Körperströme nach VDE 0100 Teil 410 erfolgt ist. Nach dieser VDE wird überprüft, ob Trenn- und Schaltgeräte an den richtigen Stellen angeordnet sind, Brandschottungen ordnungsgemäß eingebracht wurden, Neutral- und Schutzleiter gekennzeichnet sind und ein leichter Zugang für die Bedienung und Wartung vorhanden ist. Eine Übersicht der wichtigsten Prüfungen nach DIN VDE 0100 Teil 610 gibt Tabelle II-36.

Werden bereits bestehende Anlagen erweitert oder geändert, so muss geprüft werden, ob die Erweiterung oder Änderung der Anlage den Normen entspricht und die Sicherheit der bestehenden Anlage durch diese Erweiterung oder Änderung nicht beeinträchtigt wird.

## 8 Kurzschlussberechnung (VDE 0102)

Tritt an irgendeiner Stelle eines Netzes eine Verbindung zwischen Leitern oder zwischen Leitern und Erde auf, spricht man von einem Kurzschluss. Der Strom wird durch die treibende Spannung und den noch vorhandenen Widerstand bestimmt. Da die Spannung als starr angenommen wird, bestimmt nur die Größe des Netzwidestandes die Höhe des Kurzschlussstroms. Ein Kurzschluss zwischen den drei Leitern eines Drehstromnetzes ist normalerweise der größte Kurzschlussstrom in einem Netz.

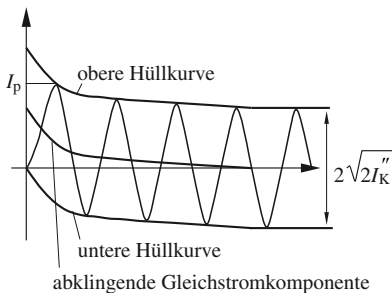


**Bild II-51** Zeitlicher Verlauf eines generatorfernen Kurzschlusses

Der maximale Kurzschlussstrom wird erreicht, wenn der Kurzschluss im Nulldurchgang der Spannung auftritt. Da es sich immer um ein Netz mit Induktivitäten handelt, treten Ausgleichsvorgänge auf, die mit einer Gleichstromkomponente  $i_{DC}$  behaftet ist (Bild II-51).

### Gleichstromkomponente

$$i_{DC} = \sqrt{2} \cdot I_K'' \cdot e^{-2\pi \cdot f \cdot t \cdot (R/X)} \quad (\text{II.60})$$

Nach Abklingen der Ausgleichsvorgänge stellt sich ein stationärer Kurzschluss  $I_K$  (dreipolig generatorfern) ein, der nach Gleichung (II.62) berechnet wird:

$$\text{dreipoliger Kurzschlussstrom } I_K = \frac{c \cdot U_N}{\sqrt{3} \cdot Z_K} \quad (\text{II.61})$$

Der Faktor  $c$  gibt eine Spannungsüberhöhung des Netzes an. In Niederspannungsnetzen ist dieser Faktor eins. Der Spitzenwert des Kurzschlussstroms ist der sogenannte *Stoßkurzschluss*  $I_p$ .

$$\text{Stoßkurzschluss } I_p = \kappa \cdot \sqrt{2} \cdot I_K'' \quad (\text{II.62})$$

Der Wert  $\kappa$  hängt vom Verhältnis des ohmschen Widerstandes zum Blindwiderstand ab.

$$\text{Systemkonstante } \kappa = 1,02 + (0,98 \cdot e^{-3(R/X)}) \quad (\text{II.63})$$

Die Voraussetzungen zur Kurzschlussstromberechnung sind:

Keine Änderung in der Art des Kurzschlusses; Stufentrafos sind auf die Hauptanzapfung eingestellt; Lichtbogenwiderstände werden nicht berücksichtigt. Die Kurzschlussströme werden mit Hilfe einer Ersatzspannungsquelle berechnet.

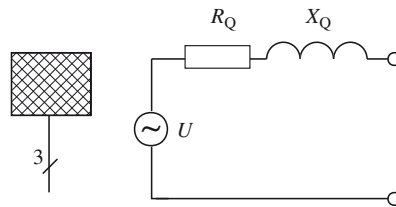


**Bild II-52** Netzersatzschaltung

Hierzu muss der Scheinwiderstand  $Z_K$  für jedes Betriebsmittel berechnet werden. Bei *Netzeinspeisungen* (Bild II-52) muss zur Berechnung der Kurzschlussimpedanz die Nennspannung  $U_{QN}$  und die Kurzschlussleistung  $S_{QK}''$  bekannt sein.

$$\text{Netzimpedanz } Z_Q = \frac{c \cdot U_{QN}^2}{S_{QK}''} \quad (\text{II.64})$$

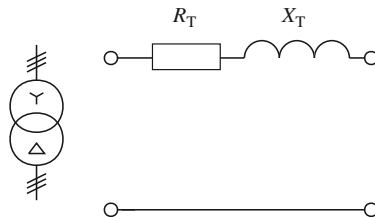


**Bild II-53** Transformatorersatzschaltung

Der Wirkwiderstand kann bei Netzeinspeisungen generell vernachlässigt werden. Bei *Transformatoren* (Bild II-53) sollten die relativen Kurzschlussspannungen  $u_K$  und die Nennleistung  $S_N$  bekannt sein.

$$\text{Trafoimpedanz } Z_T = \frac{u_K \cdot U_{TN}^2}{100\% \cdot S_{TN}} \quad (\text{II.65})$$

ohmscher Trafowiderstand  $R_T = \frac{u_R \cdot U_{TN}^2}{100 \% \cdot S_{TN}}$  (II.66)

Bei Transformatoren größerer Leistung (MVA) kann der Wirkwiderstand vernachlässigt werden.

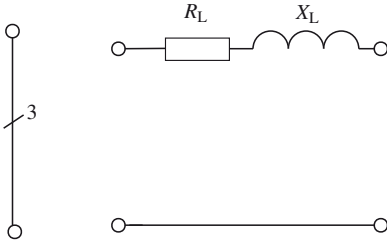


**Bild II-54** Leitungersatzschaltung

Leitungsimpedanzen (Bild II-54) berechnen sich aus dem bezogenen Impedanzwert und der Leitungslänge.

Leitungswiderstand  $R_L = r'_L \cdot l$  (II.67)

Leitungsreaktanz  $X_L = x'_L \cdot l$  (II.68)

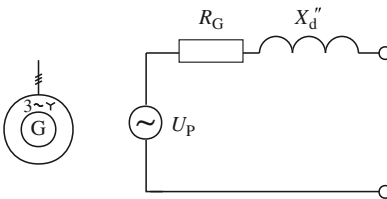


**Bild II-55** Synchronmaschinenersatzschaltung

Bei Synchronmotoren und -generatoren (Bild II-55) muss die relative Anfangsreaktanz  $x''_d$  bekannt sein.

Anfangsreaktanz der Synchronmaschine

$X''_d = \frac{x''_d \cdot U_N^2}{100 \% \cdot S_{GN}}$  (II.69)

Widerstand der Synchronmaschine

$R_G = k \cdot X''_d$  (II.70)

Der Faktor  $k$  kann nach Tabelle II-37 bestimmt werden.

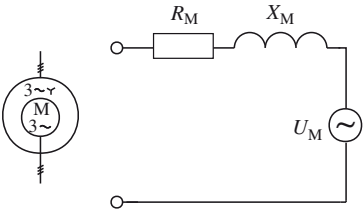


**Bild II-56** Stark vereinfachte Asynchronmotorersatzschaltung

Die Kurzschlussimpedanz der Asynchronmotoren (Bild II-56) hängt vom Verhältnis des Anlaufstroms zum Nennstrom ab.

Impedanz des Asynchronmotors

$Z_M = \frac{I_{MN}}{I_A} \cdot \frac{U_{MN}^2}{S_{MN}}$  (II.71)

Widerstand des Asynchronmotors

$R_M \approx 0,42 \cdot Z_M$  (II.72)

Nach VDE 0102 müssen Asynchronmotoren bei einer Kurzschlussstromberechnung nur berücksichtigt werden, wenn folgende Voraussetzung erfüllt ist:

$\Sigma I_{MN} > 0,01 \cdot I''_K$  ohne Motor (II.73)

$\frac{\Sigma P_{MN}}{\Sigma S_{TN}} \leq \frac{0,8}{\left[ \frac{c \cdot 100 \cdot S_{TN}}{S''_{QK}} \right] - 0,3}$  (II.74)

Gleichung (II.74) gilt, wenn Asynchronmotoren über Transformatoren auf die Kurzschlussstelle speisen. Stromrichter gespeiste Motore müssen nur berücksichtigt werden, wenn der Stromrichter auch im Wechselrichterbetrieb arbeiten kann.

Wird die Kurzschlussstelle über einen Transformator mit elektrischer Energie versorgt, müssen die von der Kurzschlussstelle aus gesehenen Impedanzen mit dem Quadrat der Trafoübersetzung angeglichen werden.

■ **Beispiel:** Nach nebenstehender Zeichnung ist ein dreipoliger Kurzschluss im Kurzschlusspunkt entstanden. Die Netzdaten lauten wie folgt:

$S''_{QK} = 350 \text{ MVA}; U_{N \text{ Trafo}} = 10 / 0,4 \text{ kV};$

$u_K = 4 \%; S_{N \text{ Trafo}} = 1250 \text{ kVA}$

Leitung 1:  $r' = 0,067 \frac{\Omega}{\text{km}}; x' = 0,08 \frac{\Omega}{\text{km}}; l = 1000 \text{ m}$

Leitung 2:  $r' = 0,150 \frac{\Omega}{\text{km}}; x' = 0,08 \frac{\Omega}{\text{km}}; l = 500 \text{ m}$

**Tabelle II-37** Faktor  $k$  in Abhängigkeit von Nennspannung und Nennleistung

| Generatornennspannung (kV) | Generatornennleistung (MVA) | $k$  |
|----------------------------|-----------------------------|------|
| > 1                        | > 100                       | 0,05 |
| > 1                        | < 100                       | 0,07 |
| < 1                        | –                           | 0,15 |

Da der Kurzschluss im Niederspannungsnetz aufgetreten ist, beträgt der Spannungsüberhöhungsfaktor  $c = 1$ . Die ohmschen Anteile von Netz und Transformator können vernachlässigt werden. Also ist die berechnete Impedanz in diesem Fall gleich der Reaktanz zu setzen.

$$Z_Q = \frac{c \cdot U_{QN}^2}{S_{QK}''} = \frac{1 \cdot 10\,000^2 \text{ V}^2}{350 \cdot 10^6 \text{ VA}} \cdot \frac{400^2 \text{ V}^2}{10\,000^2 \text{ V}^2} = 0,46 \text{ m}\Omega$$

$$Z_T = \frac{u_K \cdot U_{TN}^2}{100\% \cdot S_{TN}} = \frac{4\% \cdot 400^2 \text{ V}^2}{100\% \cdot 1250 \cdot 10^3 \text{ VA}} = 5,12 \text{ m}\Omega$$

$$R_{L1} = r_1' \cdot l_1 \cdot \frac{1}{\ddot{u}^2} = 0,067 \frac{\Omega}{\text{km}} \cdot 1 \text{ km} \cdot \frac{1}{25^2} = 0,11 \text{ m}\Omega$$

$$X_{L1} = x_1' \cdot l_1 \cdot \frac{1}{\ddot{u}^2} = 0,08 \frac{\Omega}{\text{km}} \cdot 1 \text{ km} \cdot \frac{1}{25^2} = 0,13 \text{ m}\Omega$$

$$R_{L2} = r_2' \cdot l_2 = 0,15 \frac{\Omega}{\text{km}} \cdot 0,5 \text{ km} = 75 \text{ m}\Omega$$

$$X_{L2} = x_2' \cdot l_2 = 0,08 \frac{\Omega}{\text{km}} \cdot 0,5 \text{ km} = 40 \text{ m}\Omega$$

Aus den berechneten Einzelwiderständen kann die Gesamtimpedanz des Kurzschlusspunktes bestimmt werden.

$$\begin{aligned} Z_K &= (R_{L1} + R_{L2}) + j(X_Q + X_{T1} + X_{L1} + X_{L2}) \\ &= [(0,11 + 75) + j(0,46 + 5,12 + 0,13 + 40)] \text{ m}\Omega \\ &= (75,11) \text{ m}\Omega + j(45,71) \text{ m}\Omega = 87,9 \text{ m}\Omega \cdot e^{j31,3^\circ} \end{aligned}$$

Aus der Kurzschlussimpedanz und der Netzspannung ergibt sich der dreipolige Kurzschlussstrom.

$$I_K = \frac{c \cdot U_N}{\sqrt{3} \cdot Z_K} = \frac{1 \cdot 400 \text{ V}}{\sqrt{3} \cdot 87,9 \text{ m}\Omega} = 2627 \text{ A}$$

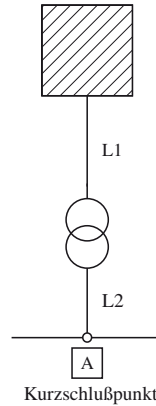


Bild II-57

### III Elektrische Energieanwendung

#### 1 Kompensationsanlagen

In elektrischen Wechsel- und Drehstromnetzen entsteht neben der Wirkleistung auch Blindleistung, die im Netz zwischen Verbraucher und Erzeuger hin und her pendelt. Der durch Blindleistung verursachte Strom belastet die Zuleitungen, erzeugt Spannungsfälle auf den Zuleitungen und Stromwärmeverluste. Es ist daher anzustreben, möglichst wenig umhervagabundierende Blindleistung auf dem Netz zu haben. Einige Verbraucher benötigen aber Blindleistung (Motoren, Transformatoren, auch Leitungen). Deshalb muss versucht werden, diese Blindleistung am Ort des Bedarfs bereitzustellen, ohne die Zuleitungen damit zu belasten. Da die meisten Verbraucher induktive Blindleistung benötigen, bietet sich die kapazitive Kompensation dieser Blindleistung an. Für die Leistungen gelten folgende Gleichungen III.1 bis III.3:

$$\text{Wirkleistung } P = S \cdot \cos \varphi \quad (\text{III.1})$$

$$\text{Blindleistung } Q = S \cdot \sin \varphi \quad (\text{III.2})$$

$$\text{Blindleistung } Q = P \cdot \tan \varphi \quad (\text{III.3})$$

Aus den Formeln ist ersichtlich, dass der Winkel  $\varphi$  (Leistungsfaktor  $\cos \varphi$ ) ein Maß für die Blindleistung

ist. Der Winkel  $\varphi$  gibt eine Verschiebung zwischen Strom und Spannung wieder. Ist diese Verschiebung groß, wird im Netz viel Blindleistung benötigt. Es ist daher anzustreben, einen möglichst kleinen Winkel zwischen Strom und Spannung zu fahren. Da in den Netzen unterschiedliche Verbraucher verschiedene Lastwechsel aufweisen, verändert sich bei jedem Lastwechsel der Leistungsfaktor  $\cos \varphi$  und somit auch der Winkel zwischen Strom und Spannung.

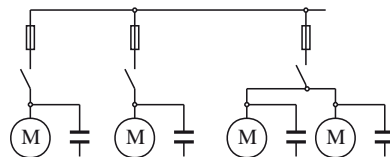


Bild III-1 Einzelkompensationsanlage

Es bieten sich drei Kompensationsarten an, und zwar die *Einzelkompensation*, die *Gruppenkompensation* und die *Zentralkompensation*.

Bei der Einzelkompensation (Bild III-1) wird der Kondensator direkt am Betriebsmittel angeschlossen und ist nur mit diesem Betriebsmittel gemeinsam am Netz.

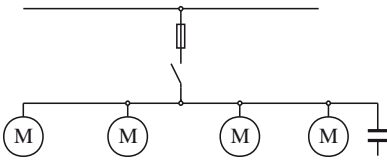


Bild III-2 Gruppenkompensationsanlage

Bei der Gruppenkompensation (Bild III-2) wird die Kompensationseinrichtung jeweils einer Verbrauchergruppe zugeordnet. Die Zentralkompensation (Bild III-3) wird überwiegend als Blindleistungsregelanlage eingesetzt.

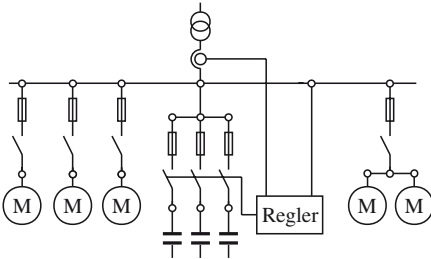


Bild III-3 Zentralkompensationsanlage

Sie ist normalerweise direkt einer Schaltanlage zugeordnet und kann verschiedene Kondensatorgruppen ein- oder ausschalten. Welche dieser Kompensationsarten die für den jeweiligen Zweck geeignete ist, hängt von den Verbrauchern und der Belastungsart ab. Bei großen Verbrauchern mit konstantem Leistungsbedarf und großer Einschaltdauer ist eine Einzelkompensation wirtschaftlich. Bei vielen kleinen Verbrauchern mit unterschiedlichem Leistungsbedarf und wechselnder Einschaltdauer ist eine Zentralkompensation vorteilhafter. Die Einzelkompensation wird hauptsächlich bei größeren Motoren und Transformatoren eingesetzt. Hierdurch werden die Zuleitungen und Schaltelemente vom Blindstrom entlastet. Bei der Kompensation eines Motors ist darauf zu achten, dass bei Teilbelastung keine Überkompensation und beim Auslauf nach erfolgter Abschaltung keine Selbsterregung des Motors auftritt. Deshalb wird der Motor nur bis 90% der Leerlaufblindleistung kompensiert. Im Vollastbetrieb ergibt diese Kompensation einen Leistungsfaktor von  $\cos \varphi \approx 0,9$ , im Leerlauf etwa 0,95 bis 0,98. Die erforderliche Kondensatorleistung ist

$$Q_C = 0,9 \cdot \sqrt{3} \cdot U \cdot I_0 \tag{III.4}$$

$I_0$  Leerlaufstrom des Motors

Eine weitere Möglichkeit, die Kondensatorleistung zu ermitteln, ist eine aus der Praxis abgeleitete Formel, wonach die Kondensatorleistung ungefähr das 0,35fache der Nennleistung des Motors betragen

Tabelle III-1 Faktor zur Ermittlung der erforderlichen Kondensatorleistung je kW Wirkleistung

| vorhandener $\cos \varphi$ | gewünschter $\cos \varphi$ |      |      |      |      |
|----------------------------|----------------------------|------|------|------|------|
|                            | 0,80                       | 0,85 | 0,90 | 0,92 | 0,94 |
| 0,50                       | 0,98                       | 1,11 | 1,25 | 1,31 | 1,37 |
| 0,60                       | 0,58                       | 0,71 | 0,85 | 0,91 | 0,97 |
| 0,70                       | 0,27                       | 0,40 | 0,54 | 0,60 | 0,66 |
| 0,80                       | –                          | 0,13 | 0,27 | 0,33 | 0,39 |
| 0,82                       | –                          | 0,08 | 0,21 | 0,27 | 0,33 |
| 0,84                       | –                          | 0,03 | 0,16 | 0,22 | 0,28 |
| 0,86                       | –                          | –    | 0,11 | 0,17 | 0,23 |
| 0,88                       | –                          | –    | 0,06 | 0,11 | 0,17 |
| 0,90                       | –                          | –    | –    | 0,06 | 0,12 |
| 0,92                       | –                          | –    | –    | –    | 0,06 |

sollte ( $Q_C \approx 0,35 \cdot P_N$ ). Anhand der Tabelle III-1 kann, ausgehend von dem vorhandenen Leistungsfaktor, die erforderliche kapazitive Blindleistung ermittelt werden, um den gewünschten Leistungsfaktor zu erhalten. Hierzu muss die vorhandene Wirkleistung mit dem ermittelten Faktor multipliziert werden.

■ **Beispiel:** Der vorhandene Leistungsfaktor von  $\cos \varphi_1 = 0,6$  bei  $P = 200$  kW soll auf einen Leistungsfaktor von  $\cos \varphi_2 = 0,9$  verbessert werden. Welche Kondensatorleistung muss dem Netz hinzugeschaltet werden?

$$Q_C = P \cdot \text{Faktor} = 200 \cdot 10^3 \text{ VA} \cdot 0,85 = 170 \cdot 10^3 \text{ VA}$$

Die Kondensatorleistung müsste dann 170 kvar betragen.

Bei Festkompensation von Transformatoren kann der Kondensator sowohl auf der Oberspannungsseite wie auch auf der Unterspannungsseite angeschlossen werden. Nach den Richtlinien vom VDEW sind Kondensatorleistungen nach Tabelle III-2 auf der Unterspannungsseite des Transformators anzuschließen. Werden Kondensatoren an der Unterspannungsseite des Transformators installiert, kann es bei Wegfall der induktiven Last zu Spannungserhöhungen kommen, wenn die Kondensatoren eingeschaltet bleiben. Nach Gleichung III.5 kann die Spannungserhöhung hinreichend genau berechnet werden.

Spannungserhöhung

$$\Delta u = u_k \cdot \frac{Q_C}{S_{NT}} \quad \frac{\Delta u}{\%} \Big| \frac{u_k}{\%} \Big| \frac{Q_C}{\text{VA}} \Big| \frac{S_{NT}}{\text{VA}} \tag{III.5}$$

■ **Beispiel:** Ein Transformator mit  $S_N = 315$  kVA,  $u_k = 4\%$  und  $U_N = 10/0,4$  kV wird mit einer Kondensatorleistung von  $Q_C = 180$  kvar beschaltet. Welche Spannungsüberhöhung tritt im Leerlauf auf?

$$\Delta u = u_k \cdot \frac{Q_C}{S_{NT}} = 4\% \cdot \frac{180 \cdot 10^3 \text{ VA}}{315 \cdot 10^3 \text{ VA}} = 2,28\%$$

**Tabelle III-2** Erforderliche Kondensatorleistung in Abhängigkeit von Trafoleistung und Spannung

| Bemessungsleistung des Transformators in kVA | Transformator mit Ober-spannung<br>Kondensatorleistung in kvar |          |          |
|----------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------|----------|
|                                              | 5–10 kV                                                        | 15–20 kV | 25–30 kV |
| 25                                           | 2                                                              | 2,5      | 3        |
| 50                                           | 3,5                                                            | 5        | 6        |
| 75                                           | 5                                                              | 6        | 7        |
| 100                                          | 6                                                              | 8        | 10       |
| 160                                          | 10                                                             | 12,5     | 15       |
| 250                                          | 15                                                             | 18       | 22       |
| 315                                          | 18                                                             | 20       | 24       |
| 400                                          | 20                                                             | 22,5     | 28       |
| 630                                          | 28                                                             | 32,5     | 40       |

Durch den Einsatz moderner Leistungselektronik sind in Drehstromnetzen sehr oft Oberwellen vorhanden. Durch Oberwellen kann es in kompensierten Netzen zu Resonanzerscheinungen kommen, die Überströme, erhöhte Spannungen und verzerrte Spannungsformen zur Folge haben.

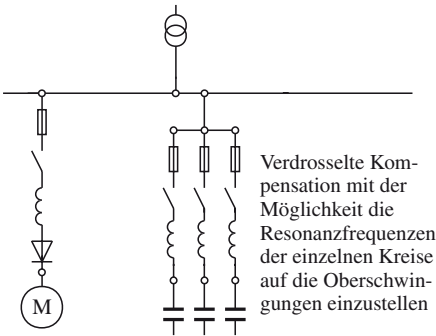


**Bild III-4** Verdrosselte Zentralkompensationsanlage

In Netzen mit Oberwellen ist es deshalb erforderlich, Kompensationsanlagen mit verdrosselten Kondensatoren einzusetzen (Bild III-4). Bei verdrosselten Kondensatoren wird dem Kondensator eine Drosselspule vorgeschaltet. Die Resonanzfrequenzen des Kondensators und der Drosselspule sollten unterhalb der ersten Oberwelle des Netzes liegen.

■ **Beispiel:** Im Netz ist die 5. Oberwelle vorhanden, also 250 Hz. Die Resonanzfrequenz sollte also im Bereich von 200 bis 220 Hz liegen. Alle Frequenzen oberhalb der 5. Oberwelle erzeugen an der verdrosselten Einheit nur noch induktive Ströme. Im Netz ergeben sich keine Resonanzen mehr.

Bei der Auslegung des Sicherungsorgans für Kondensatoranlagen sollte der Nennstrom der Sicherung den 1,6–1,8fachen Nennstrom der Kondensatoranlage haben.

**2 Beleuchtungsanlagen**

Beleuchtungsanlagen dienen dazu, Sicherheit und Arbeitsqualität zu erhöhen. Bei der Planung einer Beleuchtungsanlage ist darauf zu achten, dass die Beleuchtung dem jeweiligen Zweck unter optimalem Energieeinsatz entspricht. Wichtige Kriterien einer guten Beleuchtung sind Blendungsfreiheit, Leuchtdichteverteilung, Lichtfarbe, Gleichmäßigkeit und Farbwiedergabe. Kriterien zur Auswahl von Leuchten und Planung von Beleuchtungsanlagen werden von der „Fördergemeinschaft Gutes Licht“ entworfen und sind in der DIN 5035 sowie in der Publikation Nr. 3.5 der LiTG festgehalten.

**2.1 Grundgrößen der Lichttechnik**

Grundgrößen der Beleuchtungstechnik:

*Lichtstrom*  $\Phi$  in Lumen (lm),

*Lichtstärke*  $I$  in Candela (cd),

*Beleuchtungsstärke*  $E$  in Lux (lx).

Aus diesen Grundgrößen ergeben sich die Leuchtdichte und die Lichtausbeute nach den Gleichungen (III.6) und (III.7).

*Leuchtdichte*  $L = \frac{I}{A} \quad \frac{\frac{L}{\text{cd}}}{\frac{I}{\text{cd}}} \left| \frac{A}{\text{m}^2} \right| \quad \text{(III.6)}$

*Lichtausbeute*  $\eta_{\text{Li}} = \frac{\Phi}{P} \quad \frac{\frac{\eta}{\text{lm}}}{\frac{\Phi}{\text{lm}}} \left| \frac{P}{\text{W}} \right| \quad \text{(III.7)}$

Der *Lichtstrom*  $\Phi$  ist das von der Lichtquelle nach allen Seiten abgestrahlte Licht. Die *Lichtstärke*  $I$  ist ein Maß für die Intensität der Lichtstrahlung. Die *Lichtausbeute*  $\eta_{\text{Li}}$  ist ein Maß für das Verhältnis von erzeugtem Lichtstrom zur eingesetzten elektrischen Leistung. Die *Leuchtdichte*  $L$  einer Lichtquelle oder einer beleuchteten Fläche ist für den im Auge entstehenden Lichtreiz verantwortlich und damit für den im Gehirn hervorgerufenen Helligkeitseindruck. Mittel-

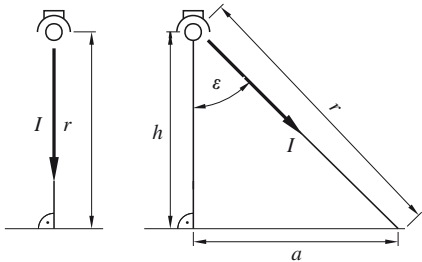


**Bild III-5** Beleuchtungsstärke in einem Punkt bei senkrechtem und bei schrägem Lichteinfall

werte von Leuchtdichten sind in Tabelle III-3 zusammengefasst.

Die *Beleuchtungsstärke*  $E$  ist ein Maß für das auf eine Fläche treffende Licht. Die Beleuchtungsstärke beträgt 1 lx, wenn senkrecht einfallendes Licht mit einem Lichtstrom von 1 lm gleichmäßig auf eine Fläche von 1 m<sup>2</sup> trifft.

Da sich der Lichtstrom in der Praxis normalerweise nicht gleichmäßig über die Fläche verteilt, ist die nach der Flächenformel ermittelte Beleuchtungsstärke als *mittlere Beleuchtungsstärke*  $E_m$  aufzufassen. Die Beleuchtungsstärke in einem Punkt wird aus der Entfernung zur Lichtquelle und der Stärke der Lichtquelle berechnet (Bild III-5).

Beleuchtungsstärke

$$E = \frac{I}{r^2} \cdot \cos \varepsilon = \frac{I}{h^2} \cdot \cos^3 \varepsilon$$

(III.8)

Nach dem fotometrischen Entfernungsgesetz nimmt die Beleuchtungsstärke mit dem Quadrat der Entfernung ab. Dieses Gesetz gilt jedoch nicht für flächige

Lichtquellen wie Leuchtenbänder oder Leuchtenflächen. Auch zusätzlich durch Begrenzungsflächen reflektiertes Licht wird durch die Punktbeleuchtungsformel nicht erfasst.

In DIN 5053 sind Beleuchtungsstärken für verschiedene Raumarten vorgegeben. Tabelle III-4 listet eine Auswahl der Raumarten auf.

Die Beleuchtung sollte so beschaffen sein, dass Gegenstände auf einer Arbeitsfläche gleichmäßig beleuchtet werden. Eine direkte oder indirekte Blendung sollte möglichst vermieden werden. Außerdem soll die Nennbeleuchtungsstärke in einem Raum (Raumzone) als Mittelwert in einer Höhe von 0,85 m über dem Fußboden konstant sein.

2.2 Lichtquellen

Die zur Lichterzeugung eingesetzten Lichtquellen werden als *Lampen* bezeichnet. Unter den Lampen gibt es eine große Auswahl, die von preiswerten Glühlampen mit einer Lichtausbeute von 20 lm/W bis hin zu Niederdruck-Natriumdampflampen mit einer Lichtausbeute von bis zu 183 lm/W reicht.

Tabelle III-3 Mittelwerte für Leuchtdichten

| Strahlendes Objekt                    | Leuchtdichte in cd/cm <sup>2</sup> |
|---------------------------------------|------------------------------------|
| Sonne                                 | ungefähr 150 000                   |
| klarer Himmel                         | 0,2 bis 1,2                        |
| Mond                                  | ungefähr 0,25                      |
| Glühlampe klar                        | 100 bis 2000                       |
| Leuchtstofflampe                      | 0,3 bis 1,3                        |
| Xenon-Hochdrucklampe                  | 15 000 bis 95 000                  |
| gut beleuchtete Straße                | $0,2 \cdot 10^{-3}$                |
| untere Grenze der Hellempfindlichkeit | $1 \cdot 10^{-8}$                  |

Tabelle III-4 Beleuchtungsstärken für verschiedene Raumarten

| Art des Raumes                      | Beleuchtungsstärke in lx |
|-------------------------------------|--------------------------|
| Büroraum – normal                   | 500                      |
| Büroraum – Großraumbüro             | 750 bis 1000             |
| Zeichenraum                         | 750                      |
| Verkehrswege in Gebäuden            | 100                      |
| Maschinenräume, Energieverteilräume | 100                      |
| Räume zur Montage feinsten Teile    | 1500                     |



## 2.3 Glühlampen

Glühlampen stehen bis zu einer Leistungsaufnahme von 2000 W zur Verfügung. Das Glühlampenlicht wird zur allgemeinen Wohnraumbeleuchtung und für spezielle, stimmungsbetonte Lichteffekte eingesetzt. Die Lichterzeugung erfolgt durch Temperaturstrahlung eines auf etwa 2500 °C erhitzten Wolframdrahtes. Die Lebensdauer einer Glühlampe beträgt ungefähr 1000 h bei einer Lichtausbeute zwischen 9 bis 15 lm/W. Sie benötigt keine zusätzlichen Betriebsmittel. In neueren Glühlampen wird ein Halogen eingebracht. Die Lichterzeugung erfolgt wie bei der normalen Glühlampe; durch das Halogen wird eine Kolbenschwärzung verhindert und die Lebensdauer der Lampe verdoppelt. Die Lichtausbeute liegt zwischen 15 und 25 lm/W. Die Halogen-Niedervoltlampen benötigen einen Transformator.

## 2.4 Leuchtstofflampen

Leuchtstofflampen haben Leistungsstufen zwischen 4 und 58 W. Die Lichterzeugung erfolgt durch elektrische Entladungen zwischen zwei Elektroden in einer Quecksilberdampf-Atmosphäre. Durch diese Entladungen wird unsichtbares UV-Licht erzeugt, das einen Leuchtstoff, der an der Innenwand der Leuchtstofflampe angebracht ist, zum Leuchten anregt. Die Lichtfarbe der Leuchtstofflampe kann je nach Leuchtstoffkombination verändert werden. Die Lichtausbeute dieser Lampen liegt zwischen 60 und 100 lm/W, die Lebensdauer bei ungefähr 7500 h. Eingesetzt werden Leuchtstofflampen für wirtschaftliche Beleuchtungszwecke in der Innen- und Außenbeleuchtung. Neben den Standard-Leuchtstofflampen werden die Kompakt-Leuchtstofflampen produziert. Kompakt-Leuchtstofflampen arbeiten wie die Standardlampen, sind jedoch erheblich kürzer oder flacher. Zur Erzeugung der Zündimpulse und zur Strombegrenzung werden Vorschalt-drossel und Starter benötigt (elektronisches Vorschaltgerät).

## 2.5 Entladungslampen

Unter Entladungslampen versteht man *Metall dampf-lampen*. Zu den Metall dampf-lampen gehören die Quecksilber-Hochdrucklampe (HQL), die Halogen-Metall dampf-lampe (HQI) und die Natrium-Hochdrucklampe (NAV).

Bei der *Quecksilber-Hochdrucklampe* wird die Lichterzeugung durch eine Entladung im Quecksilberdampf im Quarzbrenner bei Überdruck eingeleitet. Der Glaskolben ist mit einem rot strahlenden Leuchtstoff (Yttrium-Vanadat) versehen, der durch die UV-Strahlung zum Leuchten angeregt wird. Die Lichtausbeute dieser Lampe liegt bei 32 bis 60 lm/W, die Lebensdauer bei 9000 h. Zum Betreiben wird ein Vorschaltgerät benötigt. Der volle Lichtstrom wird nach ungefähr 4 bis 5 Minuten erreicht. Eine Wiederzündung ist erst nach Abkühlen der Lampe möglich.

Bei der *Halogen-Metall dampf-lampe* werden dem Quecksilber Halogenverbindungen bestimmter Metalle beigemischt. Die Lichterzeugung erfolgt durch Verdampfen der Metallhalogene in der Quecksilberatmosphäre. Die Lichtausbeute liegt zwischen 62 und 100 lm/W, die Lebensdauer zwischen 2000 und 6000 h. Zum Betrieb ist ein Vorschalt- und ein Zündgerät erforderlich. Der volle Lichtstrom steht nach 2 bis 4 Minuten zur Verfügung. Eine Wiederzündung kann nach 2 bis 15 Minuten erfolgen.

Die *Natrium-Hochdrucklampen* ergeben Licht, indem in einem Keramikbrenner Natriumdampfentladungen erzeugt werden. Der Keramikbrenner lässt in heißem Zustand Licht durch sein Kristallgitter, so dass eine starke Natrium-Linienstrahlung (monochromatisches Licht) entsteht. Die Lichtausbeute liegt zwischen 70 und 150 lm/W, die Lebensdauer bei 9000 h. Zum Betrieb ist ein Vorschaltgerät und bei einigen Typen ein Zündgerät erforderlich. Der volle Lichtstrom steht nach 5 bis 7 Minuten zur Verfügung, eine Wiederzündung erfolgt in weniger als einer Minute.

## 2.6 Leuchten

Leuchten haben die Aufgabe, den von einer Lichtquelle (Lampe) erzeugten Lichtstrom so zu beeinflussen, dass eine optimale Beleuchtung erreicht wird. Die Leuchte soll die Lampe und die übrigen elektromechanischen Innenteile gegen mechanische Beschädigung sowie vor Staub und Feuchtigkeit schützen. Bei der Auswahl der Leuchte, sorgfältiger Abstimmung von Beleuchtungsniveau, Lichtfarbe und Körperfarbe ist es empfehlenswert, sich anhand der Unterlagen der Hersteller zu vergewissern, dass die Leuchten nicht nur den lichttechnischen Anforderungen genügen, sondern auch den entsprechenden Gesetzen und Vorschriften über Leuchten und Beleuchtungsanlagen. Wichtige Gesetze und Vorschriften: DIN VDE 0710, DIN VDE 0100; DIN VDE 0875 und DIN 40050.

Bei der Auswahl der Leuchte ist zu beachten, dass ein erheblicher Teil der Energie in Wärme umgewandelt wird. Diese Wärmeentwicklung ist bei der Auswahl und Montage der Leuchte zu berücksichtigen. In DIN VDE 0100 Teil 559 sind Kriterien niedergelegt, die der Errichter von Beleuchtungsanlagen beachten muss, damit die Anlage nicht Personen und Nutztiere durch gefährliche Körperströme und Sachen nicht durch zu hohe Temperaturen gefährdet. In der Norm wurden Klassen geschaffen, nach denen man die von der Leuchte ausgehende Gefährdung durch Wärmeentwicklung abschätzen kann. Folgende Einteilung wurde gewählt.

Kennzeichen  $\nabla \text{F}$ :

Gilt nur für Leuchten mit Entladungslampen. Temperaturen von 130°C im normalen Betrieb und 180 °C im Fehlerfall des Vorschaltgerätes werden nicht überschritten. Für direkte Montage auf Gebäudeteilen

aus nichtbrennbaren, schwer- und normalentflamm-  
baren Baustoffen nach DIN 4102 Teil 1.

Kennzeichen  .

Gilt für Leuchten mit Glühlampen und Leuchten mit  
Entladungslampen. Leuchten mit begrenzter Oberflä-  
chentemperatur. Im Fehlerfall können keine Tempe-  
raturen auftreten, die zur Entzündung von brennbaren  
Stäuben und Fasern führen. Für Montage in Betriebs-  
stätten geeignet, die durch brennbare Stäube und  
Fasern feuergefährdet sind.

Kennzeichen .

Gilt für Leuchten und Entladungslampen. Temperatu-  
ren von 130 °C im normal Betrieb und 180 °C im  
Fehlerfall des Vorschaltgerätes werden an der Be-  
festigungsfläche und an allen, der Leuchte benachbar-  
ten Flächen, nicht überschritten. Für Montage auf  
Einrichtungsgegenständen (Möbel, daher „M“) aus  
Werkstoffen, die in ihrem Brandverhalten nicht-  
brennbaren oder schwer- oder normalentflammbaren  
Baustoffen nach DIN 4102 Teil 1 entsprechen, selbst  
wenn sie beschichtet, furniert oder lackiert sind.

Kennzeichen  .

Gilt für Leuchten mit Glühlampen und Leuchten  
mit Entladungslampen. Temperatur von 115 °C wird  
im Fehlerfall an der Befestigungsfläche sowie an  
allen der Leuchte benachbarten Stellen nicht über-  
schritten. Für direkte Montage auf Einrichtungs-  
gegenständen aus Werkstoffen, die in ihrem Brand-  
verhalten nichtbrennbaren oder schwer- oder normal-  
entflammbaren Baustoffen nach DIN 4102 Teil 1

entsprechen, auch wenn sie beschichtet, furniert oder  
lackiert sind.

2.7 Berechnung von Beleuchtungsanlagen

Bei der Berechnung von Beleuchtungsanlagen in  
geschlossenen Räumen spielt neben der Leuchten-  
auswahl und den Raumabmessungen auch die Raum-  
gestaltung eine Rolle. Für die Auslegung der Raum-  
beleuchtung ist der *Raumwirkungsgrad* eine wichtige  
Größe. Er ergibt sich aus dem *Raumfaktor* und den  
*Reflexionsgraden* der Raumbegrenzung (Wände,  
Decken, Fußboden). Der Raumfaktor ist abhängig  
von den geometrischen Abmessungen des Raumes  
und deshalb sehr exakt zu berechnen. Für normale,  
rechteckige Räume gilt:

$$\text{Raumfaktor } K_r = \frac{a \cdot b}{h \cdot (a + b)} \quad \frac{a}{m} \mid \frac{b}{m} \mid \frac{h}{m} \quad (\text{III.9})$$

Sind Räume rund oder *n*-eckig und nicht zu lang  
gestreckt, kann Gleichung (III.10) angewendet wer-  
den:

$$K_r = \frac{A}{h \cdot 2 \cdot \sqrt{A}} \quad \frac{A}{m^2} \mid \frac{h}{m} \quad (\text{III.10})$$

Soll in dem zu beleuchtenden Raum eine Leuchte  
mit indirekter Charakteristik eingesetzt werden, gilt  
Gleichung (III.11):

$$K_r = \frac{3 \cdot a \cdot b}{2 \cdot h_1 \cdot (a + b)} \quad (\text{III.11})$$

*K<sub>r</sub>*, Raumfaktor; *a* Länge des Raumes; *b* Breite des Raumes; *h* Licht-  
punkthöhe über Nutzebene; *A* Fläche des Raumes; *h<sub>1</sub>* Deckenhöhe  
über Nutzebene

Tabelle III-5 Reflexionsgrade

| Farbe/Material                 | Reflexionsgrad | Farbe/Material          | Reflexionsgrad |
|--------------------------------|----------------|-------------------------|----------------|
| weiß, lichtcreme               | 70–80%         | hellelfenbein, RAL 1015 | 75%            |
| hellgelb                       | 55–65%         | hellgrün, rosa          | 45–50%         |
| pastellorange, RAL 2003        | 50%            | himmelblau              | 40–45%         |
| kieselgrau, RAL 7032           | 40%            | braunbeige, RAL 1011    | 30%            |
| ockergelb, olivgrün, hellbraun | 25–35%         | orange, zinnoberrot     | 20–35%         |
| betongrau, RAL 7023            | 20%            | dunkelgrün, -rot, -grau | 10–15%         |
| brillantblau, RAL 5067         | 10%            | schwarz                 | 4%             |
| Ahorn, Birke                   | 50–60%         | Eiche hell              | 30–40%         |
| Nussbaum                       | 15–20%         | Verputz, Gips           | 80%            |
| Fliesen, weiß                  | 60–75%         | Ziegel, gelb            | 35–40%         |
| Beton                          | 20–40%         | Ziegel, rot             | 10–25%         |
| Email, weiß                    | 65–75%         | Aluminium, matt         | 55–60%         |
| Glas, klar                     | 6–10%          |                         |                |

Die Bestimmung der Reflexionsgrade des Raumes ist in der Praxis nicht so ohne weiteres möglich, da die Raumgestaltung in der Planungsphase noch nicht eindeutig vorliegt. Es ist darum erforderlich, voraussichtliche Reflexionsgrade mit dem Bauherren abzustimmen. In Tabelle III-6 sind einige Reflexionsgrade aufgeführt.

Sind Raumfaktor und Reflexionsgrade bekannt, kann mit Hilfe der Herstellerlisten der *Beleuchtungswir-*

*kungsgrad*  $\eta_{\text{Bel}}$  bestimmt werden. Er ist das Produkt aus Leuchtenwirkungsgrad  $\eta_{\text{Lb}}$  und Raumwirkungsgrad  $\eta_{\text{R}}$ .

*Beleuchtungswirkungsgrad*  $\eta_{\text{Bel}} = \eta_{\text{R}} \cdot \eta_{\text{Lb}}$  (III.12)

Die für einen Raum erforderliche Leuchtenzahl kann mit Hilfe der Gleichung (III.13) ermittelt werden.

**Tabelle III-6** Beleuchtungswirkungsgrad  $\eta_{\text{Bel}}$  (%) in Abhängigkeit vom Raumfaktor und den Reflexionsgraden für eine Anbauspiegelraster-Leuchte

|                   |      | Reflexionsgrad |    |    |    |    |    |    |
|-------------------|------|----------------|----|----|----|----|----|----|
| Decke             |      | 80             | 80 | 50 | 50 | 70 | 50 | 30 |
| Wand              |      | 50             | 30 | 50 | 30 | 50 | 30 | 50 |
| Boden (Nutzebene) |      | 30             | 30 | 30 | 30 | 20 | 10 | 10 |
| Raumindex         | 0,6  | 39             | 33 | 37 | 32 | 37 | 36 | 31 |
|                   | 0,8  | 48             | 42 | 46 | 41 | 46 | 44 | 39 |
|                   | 1,0  | 54             | 48 | 51 | 46 | 51 | 49 | 44 |
|                   | 1,25 | 61             | 55 | 57 | 53 | 57 | 54 | 50 |
|                   | 1,5  | 66             | 60 | 62 | 58 | 62 | 58 | 54 |
|                   | 2,0  | 71             | 66 | 66 | 62 | 66 | 61 | 58 |
|                   | 2,5  | 75             | 71 | 70 | 67 | 69 | 64 | 61 |
|                   | 3,0  | 79             | 75 | 73 | 70 | 72 | 67 | 64 |
|                   | 4,0  | 81             | 78 | 75 | 72 | 74 | 68 | 66 |
|                   | 5,0  | 84             | 81 | 77 | 75 | 76 | 70 | 67 |

**Tabelle III-7** Einteilung der Farbwiedergabeeigenschaften

| Stufe der Farbwiedergabe |    | Beschreibung                                                                 |
|--------------------------|----|------------------------------------------------------------------------------|
| 1                        |    | sehr gute Farbwiedergabe                                                     |
|                          | 1A | erfüllt höchste Ansprüche                                                    |
|                          | 1B | erfüllt hohe Ansprüche                                                       |
| 2                        |    | gute Farbwiedergabe                                                          |
|                          | 2A | erfüllt die Ansprüche der üblichen Schaufgaben in Büroräumen und Werkstätten |
|                          | 2B | erfüllt viele Ansprüche                                                      |
| 3                        |    | weniger gute Farbwiedergabe                                                  |
| 4                        |    | die Erkennung von Farben ist stark eingeschränkt oder gar nicht möglich      |

Tabelle III-8 Lichtfarben und die Farbwiedergabeeigenschaft

| Lichtfarbe          | ähnlichste<br>Farbtemperatur | Stufe der<br>Farbwiedergabe | Handelsbezeichnungen |             |
|---------------------|------------------------------|-----------------------------|----------------------|-------------|
|                     |                              |                             | Osram-Typ            | Philips-Typ |
| warmweiß (ww)       | 2700 K                       | 1B                          | 41                   | 82          |
|                     |                              | 1A                          | –                    | 92          |
|                     | 3000 K                       | 3                           | 30                   | 29          |
|                     |                              | 1B                          | 31                   | 83          |
|                     |                              | 1A                          | 32                   | 93          |
| neutralweiß (nw)    | 4000 K                       | 2B                          | 20                   | 33          |
|                     |                              | 2A                          | 25                   | 25          |
|                     |                              | 1B                          | 21                   | 84          |
|                     |                              | 1A                          | 22                   | 94          |
| tageslichtweiß (tw) | 5000 K                       | 1B                          | 11                   | 95          |

Leuchtenzahl

$$n = \frac{p \cdot E_m \cdot A}{\eta_{\text{Bel}} \cdot z \cdot \Phi}$$

$\frac{n}{-}$  $\frac{p}{-}$  $\frac{E}{\frac{\text{lm}}{\text{m}^2}}$  $\frac{A}{\text{m}^2}$  $\frac{z}{-}$  $\frac{\eta_{\text{Bel}}}{-}$  $\frac{\Phi}{\text{lm}}$

(III.13)

$p$  Planungsfaktor > 1, berücksichtigt die Alterung;  $z$  Anzahl der Lampen pro Leuchte

Die hier gemachten Angaben und Formeln geben nur einen kleinen Überblick in die Auslegung von Beleuchtungsanlagen. Für das einwandfreie Erkennen von Gegenständen ist die Lichtfarbe der Lichtquellen von großer Bedeutung. Außerdem wird dadurch ein harmonisches Farbklima erreicht, das sich auf Stimmung und Wohlbefinden des Menschen positiv auswirkt. Die Lichtfarbe der Lampen hängt stark von der Erzeugung des Lichtes ab. Damit unterschiedliche Lampen in ihrer Lichtfarbe verglichen werden können, wird sie durch die Farbtemperatur gekennzeichnet. Ferner wird eine Einstufung der Güte der Farbwiedergabe unternommen. In Tabelle III-8 sind die genormten Stufen der Farbwiedergabe aufgeführt.

■ **Beispiel:** Für einen Büroraum mit den Abmessungen Breite  $a = 5\text{ m}$ , Länge  $b = 7\text{ m}$ , Leuchtenhöhe über Nutzebene  $h = 1,95\text{ m}$  und Raumhöhe  $h_R = 2,8\text{ m}$  soll eine Beleuchtungsanlage ausgelegt werden. Für Büroräume beträgt die Nennbeleuchtungsstärke  $E_m = 500\text{ lx}$ .

Für den Raumfaktor ergibt sich bei direkter Lichtverteilung

$$K_r = \frac{a \cdot b}{h \cdot (a + b)}$$

$\frac{5\text{ m} \cdot 7\text{ m}}{1,95\text{ m} \cdot (5\text{ m} + 7\text{ m})}$

$= 1,49 \approx 1,5$

Mit einer Leuchtstofflampe der Lichtfarbe weiß wird vom Hersteller ein Lichtstrom von 5400 lm angegeben. Die Reflexionsgrade der Decke (70%), der Wände (50%) und des Fußbodens (20%) werden geschätzt. Für eine Spiegelrasterleuchte zum Deckenaufbau ergibt sich entsprechend dem Raumfaktor und den Reflexionsgraden ein Beleuchtungswirkungsgrad von  $\eta_{\text{Bel}} = 0,62$ . Die Anzahl der Leuchten berechnet sich jetzt zu

$$n = \frac{p \cdot E_m \cdot A}{\eta_{\text{Bel}} \cdot z \cdot \Phi}$$

$\frac{1,25 \cdot 500 \frac{\text{lm}}{\text{m}^2} \cdot (5\text{ m} \cdot 7\text{ m})}{0,62 \cdot 1 \cdot 5400\text{ lm}}$

$= 6,5\text{ Leuchten}$

Gewählt werden 7 Leuchten.

Literaturhinweise

[1] Heuck/Dettmann/Schulz: Elektrische Energieversorgung. Wiesbaden: Vieweg, 7. Auflage 2007

[2] div. Verfasser: Schalten, Schützen, Verteilen in Niederspannungsnetzen. München: Publicis MCD; Siemens AG, 1997

# Nachrichtentechnik

## I Grundlagen der Nachrichtenübertragung

### 1 Prinzip der elektrischen Nachrichtenübertragung

Die Nachrichtentechnik hat die Aufgabe, *Nachrichten* auszutauschen. Nachrichten sind z.B. Fragen, Beobachtungen und Befehle; der Begriff wird im Kapitel I.3 weiter aufgeschlüsselt. Unter dem Begriff *Nachrichtenübertragung* wird hier die *elektrische* Nachrichtenübertragung verstanden, denn zur Übermittlung von Nachrichten werden Spannungen und Ströme sowie elektrische und magnetische Felder eingesetzt. Die Übertragung beginnt nach Bild I-1 mit der Nachrichtenquelle, die die Nachrichten aussendet, und endet mit der Nachrichtensenke, die sie empfängt. Zwischen beiden liegt das elektrische *Nachrichtenübertragungssystem*, dessen Funktionseinheiten dargestellt sind und anhand der Rundfunk-Sprachübertragung erläutert werden. Das Sprachsignal in Form von Luftdruckänderungen wird mit einem Mikrofon in proportionale Spannungsänderungen umgewandelt und verstärkt. Da viele unterschiedliche Nachrichten gleichzeitig übertragen werden (große Zahl von Rundfunksendern mit unterschiedlichen Programmen), muss der Frequenzbereich des Sprachsignals (15 Hz bis 15 kHz) in einen anderen Frequenzbereich umgesetzt werden. Das geschieht im Modulator. Anschließend stellt der Sender die für die Übertragung erforderliche Leistung (kW bis MW) bereit und sorgt über eine Antenne für die Aussendung in Form eines elektromagnetischen Feldes. Dieses wird von der Antenne des Empfängers aufgenommen. Da viele Nachrichten gleichzeitig, aber mit unterschiedlichen Frequenzbereichen, an der Empfängerantenne vorhanden sind, filtert ein selektiver Empfänger einen bestimmten Frequenzbereich

und damit eine bestimmte Nachricht (den gewünschten Rundfunksender) aus. Der Demodulator setzt den empfangenen Frequenzbereich wieder in den Originalfrequenzbereich (15 Hz bis 15 kHz) um. Das Signal wird verstärkt und einem Lautsprecher zugeführt, der das elektrische Signal in ein Schalldrucksignal umwandelt, damit es vom Ohr (Empfänger) aufgenommen werden kann.

Bei der Nachrichtenübertragung ist es wünschenswert, die folgenden Bedingungen zu erfüllen:

1. Die Übertragung soll über sehr große Entfernungen unbeeinflusst von Hindernissen (Häusern, Bergen) möglich sein. Häufig wird zusätzlich ein lückenloser Empfang innerhalb eines vorgegebenen geografischen Gebietes gefordert (Rundfunk- und Fernsehempfang).
2. Es sollen viele unterschiedliche Nachrichten gleichzeitig übertragen werden, die der Empfänger aber wieder eindeutig voneinander trennen kann.
3. Der Empfänger kann entscheiden, ob er die Nachricht empfangen will oder nicht.
4. Die Übertragung von Daten und deren Weiterverarbeitung soll einfach möglich sein.

Die elektrische Nachrichtentechnik erfüllt diese Forderungen in nahezu idealer Weise: Die überbrückbaren Entfernungen reichen um den Erdball, bis zum Mars und darüber hinaus (Punkt 1). Weltweit senden einige Tausend Sender ihre Programme, ohne dass es zu nennenswerten gegenseitigen Beeinflussungen kommt (Punkt 2). Durch Ausschalten der Energieversorgung kann der Empfang von Nachrichten beendet werden. Im Vergleich dazu kann beispielsweise bei akustischer Nachrichtenübertragung durch Laut-

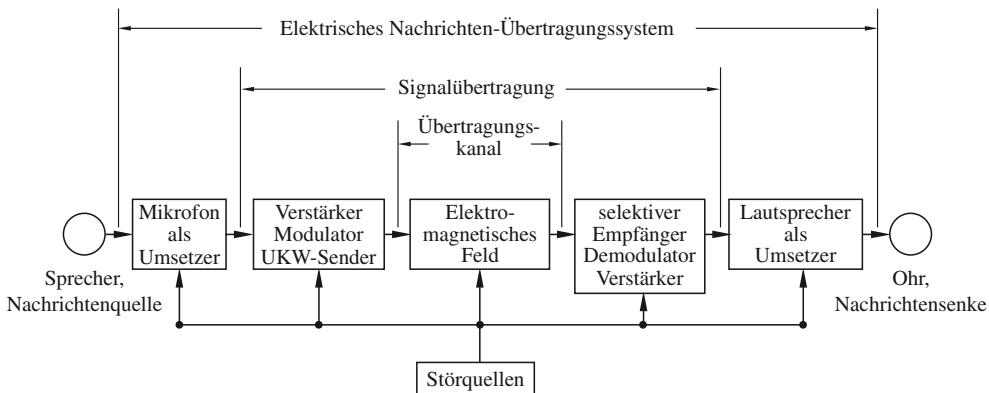


**Bild I-1** Prinzip der Nachrichtenübertragung am Beispiel der Rundfunk-Tonübertragung

sprecher der Empfänger nicht so ohne Weiteres den Empfang beenden (Punkt 3). Die übertragenen Daten liegen bereits in einer für die Weiterverarbeitung optimalen Form vor (Punkt 4). Die Übertragung geschieht entweder *drahtgebunden* (z.B. Fernsprechkverkehr im Nahbereich, lokale Daten-netze) oder *drahtlos* durch elektromagnetische Felder (z.B. Rundfunk- und Fernsehübertragung, Fernspre-cher im Fernbereich, Satellitenkommunikation). Für die drahtlose Übertragung werden Frequenzen im Bereich von etwa 10 kHz bis z.Zt. 250 GHz benutzt. Tabelle I-1 gibt einen Überblick über die Nutzung dieses Frequenzbereiches durch die Rundfunk- und Fernsehsender, die bis etwa 1 GHz den weitaus größten Teil davon belegen. Daneben sind auch Fre-

quenzzuteilungen für den Amateur- und den Polizei-funk eingetragen. Insgesamt gibt es noch eine Viel-zahl von weiteren Anwendern, denen Frequenzbe-reiche zugeteilt worden sind. Als Beispiel seien hier aufgeführt: Feste und bewegliche Seefunkdienste, Navigationsfunkdienste, Raumforschung und Welt-raumfunkdienste, Normalfrequenz- und Zeitzeichen-funkdienste, Wetterfunkdienste. Weiterhin gibt es Fre-quenzen, die speziellen Verwendungen vorbehalten sind, z.B. Grubenalarmfunk (68,010–68,030 MHz), Funkstellen in Rettungsfahrzeugen (243,000 MHz), Weltraum-Notruf-Frequenz (20,007 MHz), Seefunk-Not- und Anruf-Frequenz (2,182 MHz). Die in Tabelle I-1 verwendeten Abkürzungen haben folgende Bedeutung (nach DIN 40015):

|     |                      |     |                            |     |                       |
|-----|----------------------|-----|----------------------------|-----|-----------------------|
| VLF | Very Low Frequencies | VHF | Very High Frequencies      | MW  | Mittelwelle           |
| RF  | Radio Frequencies    | UHF | Ultra High Frequencies     | KW  | Kurzwelle             |
| LF  | Low Frequencies      | SHF | Super High Frequencies     | UKW | Ultrakurzwelle        |
| MF  | Medium Frequencies   | EHF | Extremely High Frequencies | UV  | Ultraviolettstrahlung |
| HF  | High Frequencies     | LW  | Langwelle                  |     |                       |

**Tabelle I-1** Frequenz- und Wellenlängenbereiche und deren Nutzung durch einige wichtige Dienste.

| Bezeichnung                                                                                           | Frequenz             |                                                                                                   | Wellenlänge      |                                                                                     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                       | Definition           | verwendet                                                                                         | Definition       | verwendet                                                                           |
| Myriameterwellen (VLF)                                                                                | 3 kHz ... 30 kHz     |                                                                                                   | 100 km ... 10 km |                                                                                     |
| Radiowellen (RF)                                                                                      | ab 30 kHz            |                                                                                                   | ≤ 10 km          |                                                                                     |
| Kilometerwellen (LF, LW)<br>Rundfunk auf „Langwelle“                                                  | 30 kHz ... 300 kHz   | 150 kHz ... 285 kHz                                                                               | 10 km ... 1 km   | 2 km ... 1,05 km                                                                    |
| Hektometerwellen (MF, MW)<br>Rundfunk auf „Mittelwelle“<br>Amateurfunk                                | 300 kHz ... 3000 kHz | 525 kHz ... 1605 kHz<br>1875 kHz                                                                  | 1000 m ... 100 m | 571 m ... 187 m<br>160 m                                                            |
| Dekameterwellen (HF, KW)<br>u.a. Rundfunk auf „Kurzwelle“<br>Amateurfunk                              | 3 MHz ... 30 MHz     | 6 MHz ... 19 MHz<br>3,5 MHz ... 30 MHz*)                                                          | 100 m ... 10 m   | 49 m ... 16 m<br>80 m ... 10 m*)                                                    |
| Meterwellen (VHF)<br>Fernsehen Band I<br>Polizei<br>UKW-Rundfunk<br>Amateurfunk<br>Fernsehen Band III | 30 MHz ... 300 MHz   | 41 MHz ... 68 MHz<br>86,5 MHz<br>87 MHz ... 104 MHz<br>144 MHz ... 146 MHz<br>174 MHz ... 230 MHz | 10 m ... 1 m     | 7,3 m ... 4,4 m<br>3,5 m<br>3,5 m ... 2,9 m<br>2,08 m ... 2,05 m<br>1,7 m ... 1,3 m |
| Hochfrequenzwellen                                                                                    | 300 MHz ... 300 GHz  |                                                                                                   | 1 m ... 1 mm     |                                                                                     |
| Dezimeterwellen (UHF)<br>Fernsehen Band IV/V<br>Amateurfunk<br>Amateurfunk und<br>Ortungsfunkdienst   | 300 MHz ... 3 GHz    | 470 MHz ... 960 MHz<br>430 MHz ... 440 MHz<br>1250 MHz ... 1300 MHz;<br>2300 MHz ... 2350 MHz     | 100 cm ... 10 cm | 64 cm ... 31 cm<br>70 cm ... 68 cm;<br>24 cm ... 23 cm<br>13 cm ... 12,7 cm         |
| Zentimeterwellen (SHF) oder<br>Mikrowellen<br>Satellitenfunk                                          | 3 GHz ... 30 GHz     | 10,95 GHz ... 12,75 GHz                                                                           | 10 cm ... 1 cm   | 2,7 cm ... 2,4 cm                                                                   |
| Strahlung                                                                                             | ab 3000 GHz          |                                                                                                   | ≤ 100 µm         |                                                                                     |

\*) Für die Funkamateure stehen in diesem Bereich mehrere schmale Frequenzbereiche zur Verfügung.  
Erläuterungen der Abkürzungen siehe Text.



## 2 Aufgaben der Nachrichtentechnik

Ein wesentliches Problem bei der Nachrichtenübertragung liegt darin, dass die Nachrichten durch Störungen verfälscht werden. Deshalb entwickelt die Nachrichtentechnik Verfahren, mit denen diese Verfälschungen so klein wie möglich gehalten werden können. Für die nicht vermeidbaren Verfälschungen wird gefordert, dass sie erkennbar sind und sich korrigieren lassen. Aber auch bei einer ungestörten Nachrichtenübertragung treten Verfälschungen auf. Sie werden durch den begrenzten Frequenzbereich des Übertragungskanal verursacht. Hier muss die Nachrichtentechnik Lösungen finden, mit denen eine möglichst große Anzahl von Nachrichten mit einem vertretbaren Maß an Verfälschungen übertragen werden kann.

## 3 Grundbegriffe

Die Nachrichtentechnik bekam ihre ersten Impulse durch den weltweiten Einsatz des Telefons, aber erst 1948 begründete *Shannon* mit seiner Informationstheorie die moderne Nachrichtentechnik. Es werden folgende Begriffe verwendet (auszugsweise DIN 44300):

- Nachricht:** Sie besteht aus der Information und dem Signal. Sie wird unverändert weitergegeben.
- Information:** Sinngehalt der Nachricht (was mitgeteilt werden soll).
- Signal:** Die physikalische Realisierung der Nachricht (wie es mitgeteilt wird).
- Daten:** Sie werden, im Gegensatz zu Nachrichten, verändert und weiterverarbeitet.
- Analoge Signale:** Kontinuierlich über der Zeit dargestellte Signale.
- Digitale Signale:** Zu diskreten Zeitpunkten dargestellte Signale; die Amplitudenwerte sind codiert.

■ **Beispiel 1.1:** Jemand hat sich einen Hund zugelegt und möchte das einem anderen mitteilen. Die *Information* „Ich habe mir einen Hund zugelegt“ kann durch unterschiedliche *Signale* übermittelt werden: Das Wort „Hund“ als geschriebener Text, ein Bild des Hundes, das Wort „Hund“ im Morsealphabet oder beliebige andere Zeichen. Wichtig ist, dass die im Signal vorhandenen Zeichen vorher zwischen Sender und Empfänger in ihrer Bedeutung vereinbart worden sind, sonst „versteht“ der Empfänger die Nachricht nicht.

## 4 Nachricht, Information und Signal

Um zu zeigen, welche Signalverläufe zur Nachrichtenübertragung geeignet sind, muss zunächst der Begriff „Informationsgehalt“ erläutert werden.

### 4.1 Informationsgehalt

Bereits Morse hatte in seinem Alphabet den am häufigsten vorkommenden Buchstaben „e“ mit einem Punkt, also mit der kürzesten Codierung, dargestellt.

Um zu zeigen, dass das tatsächlich sinnvoll ist, wird zunächst ein Maß dafür gesucht, wie „wichtig“ eine Nachricht (ein Zeichen) ist. Da einerseits die Nachricht aus mehreren Zeichen (Buchstaben, Ziffern) zusammengesetzt ist, andererseits die Wichtigkeit der Nachricht von persönlichen Dingen beeinflusst wird und damit nicht wertneutral ist, kann sich die Bewertung nur darauf beziehen, wie häufig die einzelnen Zeichen auftreten. Die zu definierende Größe wird *Informationsgehalt*  $I$  genannt und muss, um nicht mit den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Widerspruch zu stehen, die drei folgenden Bedingungen erfüllen: 1. Der Informationsgehalt ist um so kleiner, je größer die Wahrscheinlichkeit  $p$  ist, dass dieses Zeichen auftritt. 2. Der Informationsgehalt eines Zeichens mit der Wahrscheinlichkeit  $p = 1$  (das Zeichen tritt sicher auf) ist Null. 3. Der Informationsgehalt voneinander unabhängiger Zeichen soll sich addieren. Diese drei Forderungen werden durch die folgende Formel erfüllt:

#### • Informationsgehalt

$$I(x_i) = \lg \frac{1}{p(x_i)} \quad \text{in bit} \quad (\text{I.1})$$

$x_i$  die einzelnen Zeichen;  $\lg$  Logarithmus zur Basis 2;  $p(x_i)$  Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Zeichens  $x_i$

Die Wahl der Basis 2 ist nicht zwingend, aber nahelegend, da die binäre Kodierung mit ihren zwei Zuständen sehr häufig angewendet wird.

Aus Gleichung (I.1) ergibt sich eine wichtige Aussage: *Es handelt sich nur dann um eine echte Information, wenn der Empfänger sie nicht schon vorher kennt.*

■ **Beispiel 1.2:** Die Wahrscheinlichkeit, 6 „richtige“ Zahlen im Lotto „6 aus 49“ ausgewählt zu haben, ist ungefähr  $1/14\,000\,000$ . Mit Gleichung (I.1) ist der Informationsgehalt der Nachricht, tatsächlich 6 richtige Zahlen zu haben, etwa  $\lg(14\,000\,000) \approx 23,7$  bit. In dem hohen Zahlenwert spiegelt sich wider, wie wichtig diese Nachricht für den Empfänger ist. Demgegenüber ist die Wahrscheinlichkeit, keine 6 richtigen Zahlen getippt zu haben, etwa  $(1 - 1/14\,000\,000) \approx 0,999\,999\,93$ . Daraus folgt der Informationsgehalt zu ungefähr  $\lg(1/0,999\,999\,93)$  bit  $\approx \lg(1,000\,000\,07)$  bit  $\approx 0,000\,000\,1$  bit. Der sehr kleine Zahlenwert zeigt, dass diese Nachricht unwichtig ist, weil man sie „so gut wie sicher erwartet hat“. Wendet man die Ergebnisse auf das Morsealphabet an, so war es sinnvoll, dem am häufigsten vorkommenden Buchstaben „e“ mit der Auftrittswahrscheinlichkeit  $p(e) \approx 14\%$  die kürzeste Codierung, einen Punkt, zuzuordnen. Ein einzelner Punkt kann bei der Übertragung am ehesten „verloren gehen“. Da aber  $I(e)$  nur etwa 2,84 bit ist, trägt ein fehlender Buchstabe „e“ nur geringfügig zur Nachrichtenverfälschung bei. Anschaulich liegt das daran, dass man diesen Buchstaben am ehesten in verfälschte Texte einfügt, weil er „sowieso erwartet“ wird und man damit erfahrungsgemäß die Verfälschung schnell und einfach korrigiert (siehe auch Kapitel XVII.1.1, Quellencodierung).

### 4.2 Signale in der Nachrichtentechnik

Bild I-2 stellt eine Übersicht über die in der Elektrotechnik verwendeten Signalverläufe unter dem Gesichtspunkt dar, ob sie zur Informationsübertragung



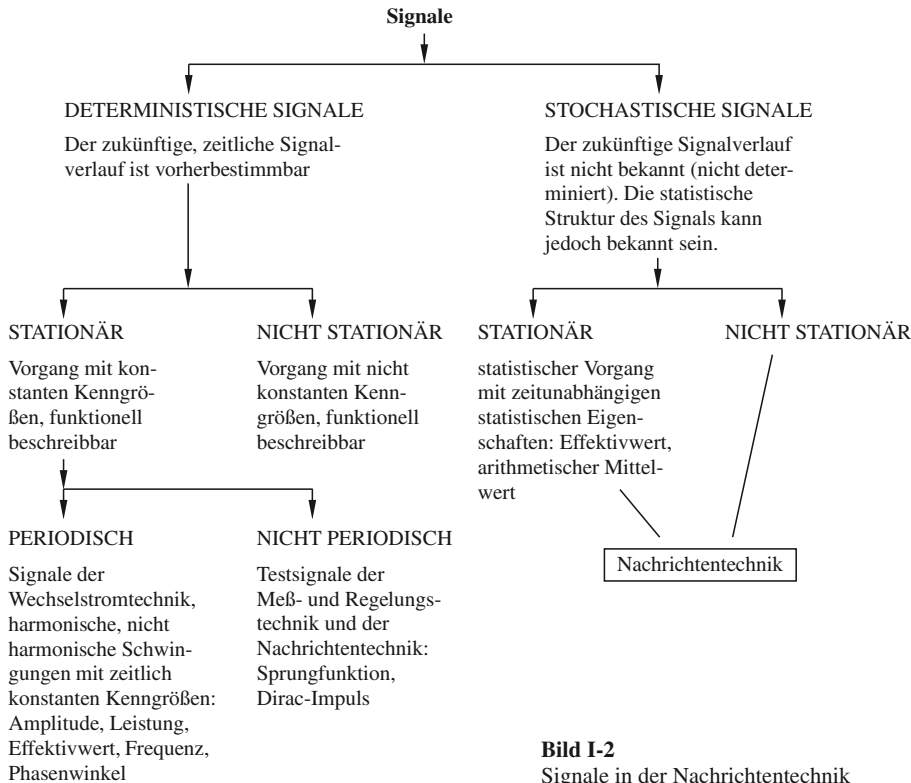


Bild I-2

Signale in der Nachrichtentechnik

geeignet sind. Da ein Signal nur dann Information enthält, wenn sein Verlauf vorher nicht bekannt ist, sind auch nur die stochastischen Signale für die Nachrichtentechnik geeignet.

### 4.3 Entropie

Da sich eine Nachricht in der Regel aus mehreren Zeichen (Buchstaben, Ziffern) zusammensetzt und der Informationsgehalt der einzelnen Zeichen nach Gleichung (I.1) bestimmt wird, ergibt sich der Informationsgehalt der vollständigen Nachricht durch die Bildung der Summe aus dem Informationsgehalt der einzelnen Zeichen, multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens. Dieser Wert wird *Entropie* genannt und mit  $H$  bezeichnet:

- *Entropie oder mittlerer Informationsgehalt*

$$H = \sum_i p_i \cdot \lg \frac{1}{p_i} \quad \text{in bit} \quad (\text{I.2})$$

$p_i$  Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Zeichens  $x_i$

Der Wert ist stets positiv. Er wird maximal, wenn alle Zeichen  $x_i$  mit der gleichen Wahrscheinlichkeit  $p_i$  auftreten:  $p_i = p_0$ . Man nennt diesen Wert *Entscheidungsgehalt*  $H_0$ .

- *Entscheidungsgehalt*

$$\begin{aligned} H_0 = H_{\max} &= \sum_1^n p_0 \lg \frac{1}{p_0} \\ &= \frac{1}{n} n \lg \frac{1}{p_0} = \lg \frac{1}{p_0} \quad \text{in bit} \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

alle Zeichen gleich wahrscheinlich mit der Wahrscheinlichkeit  $p_0$

### 4.4 Redundanz

Sind die Wahrscheinlichkeiten  $p_i$  für das Auftreten der Zeichen  $x_i$  nicht gleich, ergibt sich eine Entropie, die kleiner ist als der Maximalwert  $H_0$ . Die Differenz zwischen  $H_0$  und  $H$  wird *Redundanz*  $R$  („Weitschweifigkeit“) genannt, die relative Redundanz  $r$  ergibt sich durch Division durch  $H_0$ :

- *Redundanz*  $R = H_0 - H$  in bit (I.4a)

- *Relative Redundanz*  $r = \frac{H_0 - H}{H_0}$  in bit (I.4b)

Die Redundanz ist der Anteil, der keine Information enthält und damit überflüssig ist. Sie verlängert die Zeitdauer zur Übertragung, gestattet andererseits aber eine Fehlererkennung und -korrektur (Kapitel XVII.1). Das wird am folgenden Beispiel I.3 gezeigt.

■ **Beispiel I.3:** Wenn in der deutschen Sprache die 26 Buchstaben mit gleicher Wahrscheinlichkeit ( $p_i = 1/26$ ) auftreten, folgte daraus  $H = H_0 = \lg 26 = 4,7$  bit. Nach *Küpfmüller* ergibt sich aber  $H \approx 1,3$  bit. Das liegt daran, dass 1. die Buchstaben nicht gleichwahrscheinlich auftreten (z.B. e häufiger als k), 2. bestimmte Buchstabenfolgen häufiger sind als andere (z.B. „ei“ häufiger als „kp“ oder „ein“ häufiger als „dol“) und 3. bestimmte Buchstabenfolgen sehr unwahrscheinlich sind (z.B. „aai“ oder „sfk“). Damit ergibt sich die relative Redundanz  $r \approx (4,7 - 1,3)/4,7 \approx 72\%$ . Das heißt, dass nur 28 % der Sprache Information enthalten und 72 % überflüssig sind. Der positive Aspekt der Redundanz liegt darin, dass auch dann eine nahezu fehlerfreie Sprachübermittlung möglich ist, wenn die Übertragung gestört ist: In einer lärmgefüllten Fabrikhalle kann man sich relativ fehlerfrei verständigen, obwohl man wegen der Geräusche nur einen Bruchteil der gesprochenen Worte vollständig versteht.

## 4.5 Informationsfluss

Der *Informationsfluss*  $F$  gibt den pro Zeiteinheit übermittelten mittleren Informationsgehalt an:

$$\bullet \text{ Informationsfluss } F = \frac{H}{T_m} \text{ in } \frac{\text{bit}}{\text{s}} \quad (\text{I.5})$$

$T_m$  mittlere Zeit zur Übertragung eines Nachrichtenelementes in s, siehe Gleichung (I.6)

Da ein Nachrichtenelement meist aus mehreren Symbolen (Zeichen) besteht, berechnet sich  $T_m$  zu:

$$\bullet T_m = \sum_i p_i T_i \text{ in s} \quad (\text{I.6})$$

$T_i$  Dauer zur Übertragung eines Symbols mit der Wahrscheinlichkeit  $p_i$  in s

## 4.6 Kanalkapazität, Dynamik

Die *Kanalkapazität*  $C$  ist der *maximale Informationsfluss*, der über einen *gegebenen Nachrichtenkanal ohne Fehler* übertragen werden kann:

• *Kanalkapazität*

$$C = F_{\max} = \left( \frac{H}{T_m} \right)_{\max} = 2 \cdot B \cdot D \text{ in bit/s} \quad (\text{I.7a})$$

$T_m$  mittlere Zeit zur Übertragung eines Nachrichtenelementes nach Gleichung (I.6) in s,  $B$  Bandbreite des Signals in Hz,  $D$  Dynamik (siehe Kapitel I.4.7 und Gleichung I.7b)

$$\bullet \text{ Dynamik } D = \lg N \text{ in bit} \quad (\text{I.7b})$$

$N$  Anzahl der diskreten Amplitudenstufen, siehe Kapitel I.4.7

Weiterhin gilt:

$$C = 2 \cdot B \cdot \lg \sqrt{\frac{P_S}{P_N} + 1} = B \cdot \lg \left( \frac{P_S}{P_N} + 1 \right) \text{ in bit/s} \quad (\text{I.7c})$$

$P_S$  Signalleistung in W,  $P_N$  Rausch- bzw. Störleistung in W,  $B$  Bandbreite des Signals in Hz,  $D$  Dynamik (siehe Kapitel I.4.7 und Gleichung I.7b)

Der Zusammenhang zwischen der Kanalkapazität  $C$  und den Größen  $B$ ,  $P_S$  und  $P_N$  wurde von *Shannon* abgeleitet, die Erklärung für die Dynamik  $D$  folgt im anschließenden Kapitel I.4.7. Die Kanalkapazität eines gegebenen Übertragungskanal hängt von des-

sen technischer Realisierung ab und ist eine Konstante, die gleichzeitig ein Maß für seine Leistungsfähigkeit ist.

## 4.7 Nachrichtenquader

Ein Übertragungskanal kann nur dann ein zeit- und amplitudendiskretes Signal (Begriffe siehe Kapitel I.4.8) *fehlerfrei* übertragen, wenn es eine maximale Frequenz  $f_g$  und eine maximale Anzahl  $N$  unterschiedlicher Amplitudenwerte besitzt, die binär mit  $D_S = \lg N$  bit codiert werden. Liegt ein kontinuierliches Signal vor, lässt es sich auf ein zeit- und amplitudendiskretes Signal zurückführen.  $D_S$  ist die *Dynamik* des Signals. Es wird nach dem Abtasttheorem von *Shannon* theoretisch mit  $2 \cdot f_g$ , praktisch mit  $\geq 2,2 \cdot f_g$  abgetastet. Für seine Übertragung wird die Zeit  $T_S$  benötigt. Dann kann man die Gesamtheit des Signals darstellen als das „Volumen  $V_1$ “ eines Quaders mit den „Seitenlängen“ Bandbreite  $2 \cdot B_{S1}$ , Dynamik  $D_{S1}$  und Zeit  $T_S$ , Bild I-3.

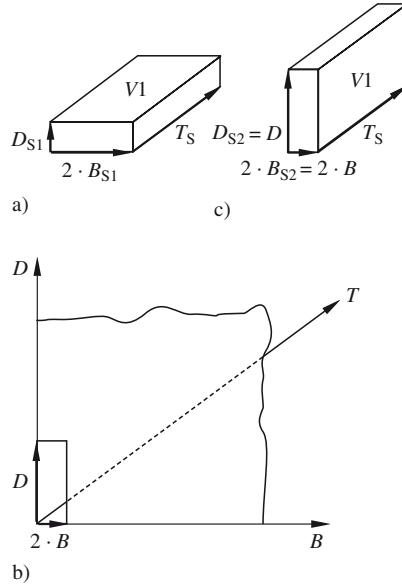


**Bild I-3** Nachrichtenquader:

- gegebenes Signal mit  $D_{S1}$ ,  $B_{S1}$ ,  $T_S$ ,
- Kanal mit gegebenem  $B$ ,  $D$ ,
- an den Kanal (b) angepasstes Signal (a)

Der *Kanalquader* ist in seinem „Querschnitt“  $2 \cdot B \cdot D$  vorgegeben. Der „Querschnitt“ des *Signalquaders* muss so gewählt werden, dass er durch die Öffnung des Kanalquaders „hindurchpasst“, ohne im Idealfall Lücken zu lassen. In Bild I-3 wurde die zu große Bandbreite  $B_{S1}$  des gegebenen Signals verringert und die Dynamik  $D_{S1}$  entsprechend vergrößert und damit der Kanalkapazität angepasst:  $2 \cdot B_{S1} \cdot D_{S1} = 2 \cdot B \cdot D$ . Gelingt dies bei gleicher Zeit  $T_S$  im Signal- und im Kanalquader, wie in Bild I-3 dargestellt, spricht man

von *Echtzeitübertragung*. Für die Modulation und die Codierung von Signalen wird die Anpassung zwischen Signal und Kanal wie folgt vorgenommen (Signalgrößen mit Index „S“, Kanalgrößen ohne Index):

$C = C_S$  *Echtzeitübertragung*. Dies wird für die folgende Zusammenstellung vorausgesetzt. ( $C > C_S$  ist zwar möglich, wird aber vermieden, da dann die teuren Kanalkapazitäten nicht voll ausgenutzt werden.)

$B = B_S$ ;  $D = D_S$  *Einseitenband-Amplitudenmodulation*. Die Bandbreite (Frequenzbereich des Signals) wird nur in einen anderen Frequenzbereich verschoben.

$D_S > D$  *Frequenzmodulation, Pulscodemodulation*. Der für den Kanal zu große Dynamikbereich des Signals wird verkleinert und in die größere Bandbreite des Kanals umgesetzt.

$D_S < D$  *Pulscodemodulation*. Die zur Verfügung stehende größere Dynamik des Kanals wird dadurch ausgenutzt, dass mehrere Abtastwerte des Signals in einem Codewort zusammengefasst werden. Damit ist für die Kanalbandbreite ein kleinerer Wert als für die Signalbandbreite erforderlich:  $B_S > B$ .

■ **Beispiel I.4:** Ein Kanal hat die Bandbreite 4,5 kHz und kann 256 Amplitudenwerte übertragen. Dann ist seine Dynamik  $D = \lg(256) \text{ bit} = 8 \text{ bit}$  und seine Kanalkapazität  $C = 2 \cdot B \cdot D = 2 \cdot 4,5 \cdot 10^3 \cdot (\lg 256) \text{ bit/s} = 72 \cdot 10^3 \text{ bit/s}$ . Soll über diesen Kanal ein Signal mit 1024 Amplitudenstufen übertragen werden, ohne dass die zur Übertragung notwendige Zeit geändert wird (*Echtzeitübertragung*), lässt sich die Signalbandbreite  $B_S$  bestimmen:  $C = 2 \cdot B \cdot D = 2 \cdot 4,5 \cdot 10^3 \cdot (\lg 256) \text{ bit/s} = 2 \cdot B_S \cdot (\lg 1024)$ . Daraus folgt:  $B_S = f_S = 3,6 \text{ kHz}$ . (Es wurde, wie in der Praxis häufig anzutreffen,  $B_S = f_S$ , d.h. Signalbandbreite gleich höchster Signalfrequenz, gesetzt.)

## 4.8 Signale im Zeitbereich:

### Analog, digital, kontinuierlich, diskret

In Bild I-4 sind die in der Nachrichtentechnik auftretenden Signalverläufe  $s(t)$  im Zeitbereich dargestellt ( $s(t)$ : Spannungs-, Strom- oder Feldverlauf). Es wird vorausgesetzt, dass das zu übertragende Signal (z.B. Sprachsignal) in *analoger* Form nach Bild I-4a vorliegt, d.h. zu *jedem* Zeitpunkt existiert ein eindeutig zugeordneter Amplitudenwert, und *alle* Amplitudenwerte innerhalb eines Wertebereiches sind möglich. Shannon hat gezeigt, dass es unter bestimmten Voraussetzungen ausreicht, den Signalverlauf nur noch zu diskreten Zeitpunkten zu erfassen (Bild I-4b). Das analoge Signal wird *abgetastet*. Ist die Zeitdauer  $t_a$  der Abtastung viel kleiner als der Abstand  $T$  der Abtastzeitpunkte, kann man die Signale mehrerer Nachrichten gleichzeitig über einen Kanal übertragen, indem man die einzelnen Signale in dem Zeitbereich

$T$  nacheinander anordnet (*Zeitmultiplexverfahren*, siehe Kapitel IX, Mehrfachübertragung).

Der Amplitudenwert von analogen Signalen oder Daten kann auf dem Weg vom Sender zum Empfänger durch Störungen verfälscht werden. In kritischen Fällen wandelt man deshalb den analogen Amplitudenwert in einen *digital codierten* Wert um, indem man ihn als ganzzahliges Vielfaches einer kleinsten Einheit  $\Delta U$  (Bild I-4.c, d) darstellt. Das Signal besteht nur noch aus den zwei logischen Zuständen 0 und 1. Damit kann auch bei gestörter Übertragung der richtige Wert häufig noch erkannt werden. Das Signal nach Bild I-4c tritt am Ausgang eines Digital-Analog-Umsetzers, also auf der Empfängerseite, auf. Bild I-4d zeigt ein analoges Signal, das auf der Senderseite zur Übertragung aufbereitet worden ist, indem es abgetastet und anschließend in einem Analog-Digital-Umsetzer in digital codierte Werte umgesetzt wurde. Dabei können der codierte und der tatsächliche Wert maximal um  $\pm \Delta U/2$  voneinander abweichen:

● *größte Abweichung bei digitaler Codierung:*

$$\pm \frac{\Delta U}{2} = \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n - 1} \cdot U \quad (\text{I.8})$$

$n$  Anzahl der Bits zur Codierung,  $U$  Maximalwert von  $s(t)$  in V,  $\Delta U = U/(2^n - 1)$  in V

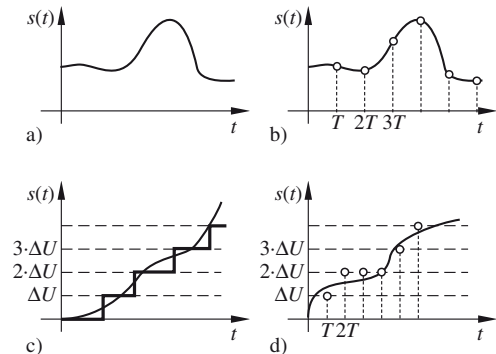


**Bild I-4** Signaldarstellungen im Zeitbereich

- a) zeit- und amplitudenkontinuierlich, analog
- b) zeitdiskret, amplitudenkontinuierlich, analog
- c) zeitkontinuierlich, amplitudendiskret, digital
- d) zeit- und amplitudendiskret, digital

## 4.9 Signale im Frequenzbereich

Für die rechnerische Erfassung von Übertragungskanälen hat es sich bewährt, das *Amplitudenspektrum* der Signale, d.h. die Amplituden der im Signal vorkommenden Frequenzanteile in Abhängigkeit von der Frequenz darzustellen. Man benutzt dazu die Beziehung zwischen Frequenz und Periodendauer,  $f = 1/T$ , die in dieser Form nur für periodische Signale gilt und die deshalb auf die in der Nachrichtentechnik verwendeten stochastischen Signale erweitert werden muss.

### 4.9.1 Periodische sinusförmige Signale

In Bild I-5a ist sowohl der Verlauf in Abhängigkeit von der Zeit,  $s(t)$ , als auch der Verlauf in Abhängigkeit von der Frequenz,  $|\underline{S}(f)|$ , dargestellt. Der Zusammenhang zwischen beiden Darstellungen ist durch  $f_0 = 1/T$  gegeben. Hinweis:  $\underline{S}(f)$  kann nach Gleichung (I.14) eine komplexe Funktion sein. Für die Darstellung wählt man dann entweder  $\underline{S}(f)$  oder  $|\underline{S}(f)|$ .

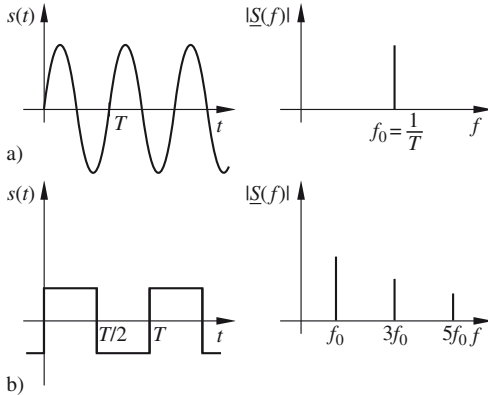


**Bild I-5** Signaldarstellung periodischer Funktionen im Zeit- und Frequenzbereich

- a) sinusförmiges Signal  
b) rechteckförmiges Signal

### 4.9.2 Periodische nichtsinusförmige Signale

Bild I-5b zeigt als Beispiel einen periodischen rechteckförmigen Verlauf  $s(t)$ . Zur Berechnung der im Signal enthaltenen Frequenzanteile wird die Fourierreihe verwendet, mit der das Signal  $s(t)$  auch in folgender Form darstellbar ist:

• **Fourierreihe**

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) + b_n \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t)]$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt; \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) dt;$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t) dt \quad (\text{I.9a})$$

Eine für die Nachrichtentechnik vorteilhafte Darstellung hat die Form:

$$s(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{s}_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t + \varphi_n) \quad (\text{I.9b})$$

Der Zusammenhang zwischen beiden Darstellungen ist gegeben durch:

$$a_0 = s_0, \quad a_n = \hat{s}_n \cdot \cos \varphi_n;$$

$$b_n = -\hat{s}_n \cdot \sin \varphi_n; \quad \hat{s}_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (\text{I.9c})$$

Wird  $s(t)$  entsprechend dem Verlauf in Bild (I.5b) in Gleichung (I.9a) mit  $s(t) = U_0$  und den Integralgrenzen 0 bis  $T/2$  sowie  $s(t) = -U_0$  und den Integralgrenzen  $T/2$  bis  $T$  eingesetzt, ergibt sich:

$$s(t) = \frac{2 \cdot U_0}{\pi} \left( \frac{1}{1} \cdot \sin(1 \cdot \omega_0 \cdot t) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3 \cdot \omega_0 \cdot t) + \frac{1}{5} \cdot \sin(5 \cdot \omega_0 \cdot t) + \dots \right) \quad (\text{I.10})$$

Die Scheitelwerte der Amplituden bei den diskreten Frequenzen  $n \cdot \omega_0/2\pi = n \cdot f_0$  sind in Bild I-5b in das Diagramm  $|\underline{S}(f)| = f(f)$  eingetragen. (Hinweis: Es können auch die Effektivwerte der Amplituden eingetragen werden. Die Scheitelwerte nach Gleichung (I.10) sind dann durch  $\sqrt{2}$  zu dividieren.)

### 4.9.3 Nichtperiodische Signale

Die Informationsübertragung geschieht mit stochastischen Signalen. In der Praxis reicht es aber häufig aus, die Eigenschaften eines Übertragungskanals oder eines Vierpols mit nichtperiodischen deterministischen Signalen zu erfassen, denn man kann daraus auf das näherungsweise Verhalten bei stochastischen Signalen schließen. Um die in einem nichtperiodischen Signal enthaltenen Frequenzanteile zu bestimmen, wird zunächst eine für die Anwendung in der Nachrichtentechnik besonders geeignete Darstellung für periodische Signale abgeleitet und anschließend auf nichtperiodische Signale erweitert.

### Fouriertransformation:

*Eulersche Formel:*  $\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$

Für die in Gleichung (I.9b) dargestellten Summanden gilt damit:

$$s(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{s}_n \cdot \frac{e^{j(n\omega_0 t + \varphi_n)} + e^{-j(n\omega_0 t + \varphi_n)}}{2}$$

$$= s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{s}_n \cdot e^{j\varphi_n} \frac{1}{2} e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{s}_n \cdot e^{-j\varphi_n} \frac{1}{2} e^{-jn\omega_0 t} \quad (\text{I.11})$$

Definitionen:  $\underline{C}_n = \frac{\hat{s}_n \cdot e^{j\varphi_n}}{2}; \quad \underline{C}_{-n} = \frac{\hat{s}_n \cdot e^{-j\varphi_n}}{2}$

Für den zweiten Summanden in Gleichung (I.11) kann man schreiben:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{s}_n \cdot e^{-j\varphi_n} \frac{1}{2} e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{n=-1}^{-\infty} \hat{s}_n \cdot e^{j\varphi_n} \frac{1}{2} e^{jn\omega_0 t} \quad (\text{I.12})$$

Setzt man (I.12) in (I.11) ein, folgt:

• **Komplexe Fourierreihe:**

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \quad \text{mit} \quad \underline{C}_n = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (\text{I.13})$$

Formal ist eine negative Frequenz eingeführt worden, wobei zu jeder negativen Frequenz  $-n \cdot f_0$  eine entsprechende positive Frequenz  $+n \cdot f_0$  gehört. Die Darstellung in Gleichung (I.13) heißt *komplexe Fourierreihe*.

Das in einem nichtperiodischen Signal enthaltene Spektrum erhält man durch den Grenzübergang  $T \rightarrow \infty$  und damit  $n \cdot f_0 \rightarrow f$ ,  $f_0 = 1/T \rightarrow df$ . Die Summe geht in ein Integral über, die entstehende Funktion  $\underline{S}(f)$  heißt (*komplexe*) *Spektraldichte der Zeitfunktion*  $s(t)$ , die mathematische Operation ist die *Fouriertransformation*.

● **Fouriertransformation:**

$$\begin{aligned}\underline{S}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt; \\ s(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{S}(f) \cdot e^{j2\pi ft} df\end{aligned}\quad (\text{I.14})$$

$\underline{S}(f)$  Spektraldichte eines gegebenen Zeitsignals  $s(t)$

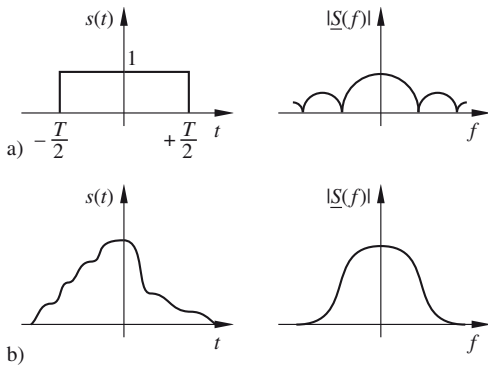


**Bild I-6** Signaldarstellung nichtperiodischer Funktionen im Zeit- und Frequenzbereich

- a) Rechteckimpuls  
b) stochastisches Signal

In Bild I-6a ist ein Rechteckimpuls mit der dazugehörigen Spektraldichte dargestellt. Es wurde gemäß Hinweis im Kapitel I.4.9.1 der Betrag  $|\underline{S}(f)|$  aufgetragen. Es sind unendlich viele Frequenzanteile vorhanden, was durch den unendlich steilen Anstieg und Abfall hervorgerufen wird. Da ein Übertragungskanal niemals unendlich viele Frequenzen übertragen kann, ist der dargestellte Rechteckimpuls in dieser Form nicht übertragbar. Das ist andererseits auch nicht erforderlich, denn mit technischen Mitteln kann er nicht erzeugt werden: Zu den Zeitpunkten  $-T/2$  und  $+T/2$  müssten unendlich viele Funktionswerte zwischen 0 und 1 gleichzeitig existieren, was im Widerspruch zur Eindeutigkeit physikalischer Gesetze steht. Bild I-6b zeigt ein stochastisches Signal (z.B. Sprache) mit zugehöriger Spektraldichte.

Zwei weitere Größen zur Beschreibung eines Systems sind die *Übertragungsfunktion*  $\underline{H}(f)$  („Spektraldichte“

eines Übertragungssystems) als das Verhältnis von Ausgangsgröße  $\underline{S}_2(f)$  zu Eingangsgröße  $\underline{S}_1(f)$  sowie deren Betrag  $A(f)$ . Die zugeordneten Zeitfunktionen werden mit  $h(t)$  und  $a(t)$  bezeichnet:

● **Übertragungsfunktion:**

$$\begin{aligned}\underline{H}(f) &= \frac{\underline{S}_2(f)}{\underline{S}_1(f)} = |\underline{H}(f)| e^{-j\varphi(f)}; \\ |\underline{H}(f)| &= A(f)\end{aligned}\quad (\text{I.15})$$

$\underline{S}_1(f)$  Eingangsgröße,  $\underline{S}_2(f)$  Ausgangsgröße,  $\underline{H}(f)$  auch mit „Spektraldichte“ eines Übertragungssystems bezeichnet; Beispiel: Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangsspannung an einem Tiefpass, siehe Beispiel I.5

● **Zugeordnete Zeitfunktionen:**  $h(t)$ ,  $a(t)$  Dämpfungsmaß und  $b(t)$  Phasenmaß.

■ **Beispiel I.5:** Die Eingangsspannung des in Bild I-7 gezeigten Tiefpasses ist ein Einheitssprung.

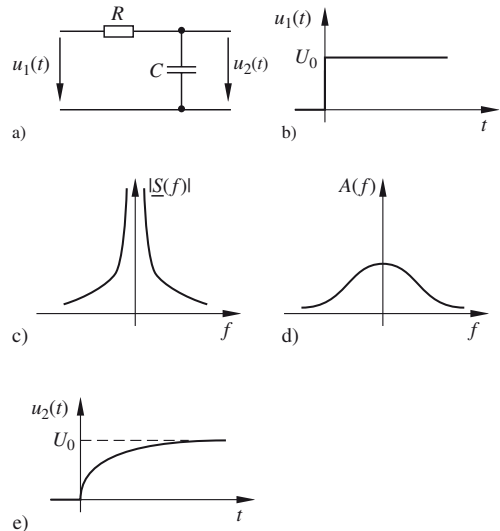


**Bild I-7** Sprungantwort eines Tiefpasses

- a) Schaltbild  
b) Einheitssprung als Anregung  
c) Spektraldichte des Einheitssprunges  
d) Übertragungsfunktion des Tiefpasses  
e) Ausgangsspannung des Tiefpasses

Die Übertragungsfunktion ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}\underline{H}(f) &= \frac{\underline{S}_2(f)}{\underline{S}_1(f)} = \frac{\underline{U}_2(j\omega)}{\underline{U}_1(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega T}; \quad T = RC \\ A(f) &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}\end{aligned}$$

Der nach Gleichung I.14 berechnete Betrag der Spektraldichte,  $|\underline{S}(f)|$ , ist in Bild I-7c eingezeichnet,  $A(f)$  in Bild I-7d. Formt man Gleichung (I.15) um und setzt für  $\underline{S}_1(f)$  die Spektraldichte des Einheitssprunges ein, ergibt sich:  $\underline{S}_2(f) = \underline{S}_1(f) \cdot \underline{H}(f)$  und daraus mit Gleichung (I.14) durch Rücktransformation der in Bild I.7e eingezeichnete Verlauf der Spannung am Ausgang des Tiefpasses.

### Diskrete Fouriertransformation (DFT)

Es wird von einem zeitbegrenzten Signal ausgegangen, das zu den Zeitpunkten  $n \cdot T_a$  abgetastet wird. Dabei hat  $n$  den Bereich von 0 bis  $N-1$ .  $T_a$  ist das Abtastintervall. Die gesamte Messzeit ist dann  $N \cdot T_a$ . Damit setzt man in Gleichung (I.14):  $t \rightarrow n \cdot T_a$ ,  $s(t) \rightarrow s(n \cdot T_a)$ ,  $e^{-j\omega t} \rightarrow e^{-j\omega n T_a}$ . Es ergibt sich:

- *Diskrete Fouriertransformation:*

$$S_d(f) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_a) \cdot e^{-j2\pi kn/N} \quad \text{mit } k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{I.16})$$

Durch geeignete mathematische Algorithmen kann man auch bei einer großen Anzahl von Abtastwerten die Transformation ausreichend schnell durchführen.

### Schnelle Fouriertransformation (Fast Fourier Transform, FFT)

Der Grundgedanke ist, die Folge  $f(n)$  eines gegebenen Signals mit  $N$  Werten so zu zerlegen, dass mehrere kleinere Teilfolgen entstehen, die getrennt transformiert und anschließend zur Gesamtfunktion überlagert werden können. Diese Aufteilung ist dann besonders günstig, wenn sich  $N$  aus  $2^k$  mit  $k = 2, 3, 4, \dots$  ergibt. Die Eingangsfolge wird zunächst in zwei Teilfolgen zerlegt, deren Elemente den Abstand  $2 \cdot T_a$  haben. Diese 2 Teilfolgen werden wiederum in je 2 Teilfolgen zerlegt mit dem Abstand  $4 \cdot T_a$  usw., bis die einzelnen Folgen nur noch aus 2 Elementen bestehen. Auf diese wird dann der DFT-Algorithmus angewendet.

### Laplacetransformation

Hier folgt aus Gründen der Systematik eine kurze Einführung in die Laplacetransformation. Eine ausführlichere Darstellung gibt es im Kapitel *Signal- und Systemtheorie, IV Nichtperiodische zeitkontinuierliche Signale*.

Die Laplacetransformation unterscheidet sich von der Fouriertransformation u.a. dadurch, dass die zeitlichen Vorgänge für  $t < 0$  null sind. Der betrachtete Vorgang setzt im Zeit- und Frequenzbereich erst ab  $t = 0$  ein (keine negativen Frequenzen) und steht damit in anschaulicher Beziehung zur Praxis als bei der Fouriertransformation. Um Verwechslungen mit dem Laplace-Operator  $s$  zu vermeiden, wurde die Zeitfunktion mit  $f(t)$  anstatt  $s(t)$  bezeichnet. Die Transformationsformeln lauten:

- *Laplacetransformation:*

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt; \quad L^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) \cdot e^{st} ds \quad (\text{I.17})$$

$L^{-1}$  inverse Laplacetransformation (Rücktransformation);  $F(s)$  Laplacetransformierte der Zeitfunktion  $f(t)$

$s$  ist der Laplace-Operator (in der Literatur auch mit  $p$  bezeichnet), es gilt  $s = \sigma + j\omega$ . Die Einheit ist  $1/s$ , die

Analogie zum Frequenzspektrum ist damit gegeben. Der Realteil  $\sigma$  musste eingeführt werden, damit die Integrale nach Gleichung (I.17) endliche Werte ergeben, er spielt bei den weiteren Betrachtungen keine Rolle.

Im Folgenden soll die Anwendung ohne mathematische Ableitungen gezeigt werden.

### Berechnung eines Zeitvorganges mit der Laplacetransformation:

Das gegebene Netzwerk als Verkörperung einer Leitung, eines Vierpols oder eines Übertragungskanals wird in die  $s$ -Ebene transformiert: Widerstände  $R$  bleiben unverändert, Kapazitäten erhalten die „Impedanz“  $1/sC$ , Induktivitäten und Gegeninduktivitäten erhalten die „Impedanz“  $sL$  bzw.  $sM$ . Hier wird die Analogie zur komplexen Rechnung erkennbar, die ja nur für eingeschwungene sinusförmige Vorgänge gilt. Ist ein Kondensator zum Zeitpunkt  $t=0$  auf die Spannung  $U_0$  aufgeladen (diese Spannung kann sich zum Zeitpunkt  $t=0$  nicht sprunghaft ändern), wird das in der  $s$ -Ebene durch Reihenschaltung einer Spannungsquelle mit der Spannung  $U_0/s$  zum Kondensator berücksichtigt. Die Richtung dieser Spannungsquelle ist die gleiche wie die der Spannung am Kondensator zum Zeitpunkt  $t=0$ . Hinweis: Auch wenn die Spannung dieser Spannungsquelle für  $t > 0$  als konstanter Wert in Erscheinung tritt, obwohl sich der Kondensator in der Regel umlädt, ist das Ergebnis der Berechnung richtig, denn die am Kondensator in der Zeitebene auftretende Spannung entspricht der Summe (vorzeichenrichtig addiert) aus der eventuell vorhandenen Spannung  $U_0/s$  und der Spannung am Kondensator  $1/sC$  in der  $s$ -Ebene! Fließt durch eine Spule oder Gegeninduktivität zum Zeitpunkt  $t=0$  ein Strom  $I_0$  (dieser Strom kann sich zum Zeitpunkt  $t=0$  ebenfalls nicht sprunghaft ändern), wird dies durch eine Spannungsquelle mit der Spannung  $L \cdot I_0$  in Reihe zu  $sL$  berücksichtigt. Die Richtung dieser Spannungsquelle ist *entgegengesetzt* zur Richtung des zum Zeitpunkt  $t=0$  fließenden Stromes  $I_0$  (die Spule wird zur Spannungsquelle). Auch hier gilt: Die in der Zeitebene an der Spule auftretende Spannung entspricht der Summe aus der Spannungsquelle mit der Spannung  $L \cdot I_0$  und der an der Spule mit  $sL$  anstehenden Spannung (vorzeichenrichtig addiert). Wird das Netzwerk von Spannungs- und/oder Stromquellen ab  $t=0$  gespeist, ist deren Verlauf in die  $s$ -Ebene zu transformieren und entsprechend einzusetzen. Häufig vorkommende Verläufe kann man Tabellen entnehmen, siehe Tabelle I-2. Die zu berechnende Größe wird zunächst in der  $s$ -Ebene nach den Regeln einer Netzwerkberechnung mit den dort gültigen Gesetzen (Ohmsches Gesetz, Kirchhoffsche Gesetze, Spannungsteiler, Überlagerungssatz) bestimmt. Dann wird sie unter Anwendung einer Tabelle in die Zeitebene zurücktransformiert. Die in Tabelle I-2 aufgelisteten Äquivalenzen sind für die Hin- und Rücktransformation anwendbar.

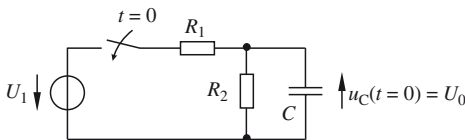


Zwei Rechenregeln sind wichtig. Regel 1: Besteht die Zeitfunktion aus mehreren Summanden, werden diese einzeln transformiert und in der  $s$ -Ebene wieder zu einer Summe vereinigt; das gilt entsprechend für eine Summe in der  $s$ -Ebene bei Rücktransformation in die Zeitebene. Regel 2: Eine Konstante, mit der die Zeitfunktion multipliziert wird, bleibt als multiplikative Konstante in der  $s$ -Ebene erhalten und umgekehrt. Die Spannungen und Ströme haben in der  $s$ -Ebene die Einheit Vs bzw. As, was wiederum auf eine Spektralverteilung hindeutet.

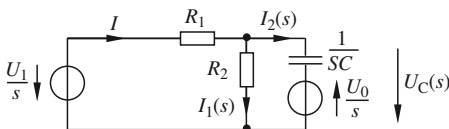
**Tabelle I-2** Korrespondenzen zur Laplacetransformation (Auswahl)

| $F(s)$                             | $f(t)$                                                                    |
|------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{1}{s}$                      | 1                                                                         |
| $\frac{1}{s^2}$                    | $t$                                                                       |
| $\frac{1}{s+a}$                    | $e^{-at}$                                                                 |
| $\frac{1}{s(s+a)}$                 | $\frac{1}{a} \cdot (1 - e^{-at})$                                         |
| $\frac{1}{(s+a)^2}$                | $t \cdot e^{-at}$                                                         |
| $\frac{1}{(s+a)(s+b)}$ $a \neq b$  | $\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$                                       |
| $\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$ $a \neq b$ | $\frac{1}{ab} + \frac{b \cdot e^{-at} - a \cdot e^{-bt}}{a \cdot b(a-b)}$ |
| $\frac{1}{s(s+a)^2}$               | $\frac{1 - e^{-at} - a \cdot t \cdot e^{-at}}{a^2}$                       |

■ **Beispiel I.6:** In Bild I-8 ist ein Netzwerk gezeigt, in dem der Kondensator  $C$  zum Zeitpunkt  $t=0$  auf die Spannung  $U_0$  in der eingezeichneten Richtung aufgeladen ist. Zum Zeitpunkt  $t=0$  wird eine Gleichspannung  $U=U_1$  auf das Netzwerk geschaltet. Berechnet werden soll der Verlauf der Spannung am Kondensator  $C$ .



a)



b)

**Bild I-8** Berechnung eines nichtperiodischen Vorganges mit der Laplace-Transformation

a) Netzwerk in der Zeitebene

b) Netzwerk in der  $s$ -Ebene

Der Schalter in der Zeitebene wird in der  $s$ -Ebene durch eine Sprungfunktion der Höhe  $U_1$  ersetzt:  $U_1/s$  (Tabelle I-2, Sprungfunktion  $1/s$ , multipliziert mit der Konstanten  $U_1$ , Regel 2). Die Widerstände und Kondensatoren gehen gemäß den dargestellten Regeln in die  $s$ -Ebene über; der auf die Spannung  $U_0$  aufgeladene Kondensator erhält in Reihe eine Spannungsquelle mit der Spannung  $U_0/s$ . Die Richtung ist die gleiche wie die der Spannung an  $C$  für  $t=0$ . Die gesuchte Spannung  $U_C$  ist die Reihenschaltung aus  $U_0/s$  und der Spannung an  $1/sC$ . Für das Netzwerk können die 3 Gleichungen angesetzt werden:

$$\frac{U_1}{s} = I \cdot R_1 + I_1 \cdot R_2; I = I_1 + I_2; I_1 \cdot R_2 = I_2 \cdot \frac{1}{sC} - \frac{U_0}{s}$$

Daraus kann  $I_2$  berechnet werden:

$$I_2 = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{U_1 + U_0 \frac{R_1 + R_2}{R_2}}{s + \frac{R_1 + R_2}{R_2 R_1 C}}$$

für  $U_C$  folgt:

$$U_C = I_2 \cdot \frac{1}{sC} - \frac{U_0}{s}$$

Der erste Summand von  $U_C$  muss so umgeformt werden, dass ein Ausdruck  $\frac{A}{Bs(s+a)}$  entsteht, der dann mit Regel 2 und Tabelle

(I-2) zurücktransformiert werden kann ( $A$ ,  $B$  und  $a$  sind Konstante, die kein „ $s$ “ enthalten):

$$U_C = \frac{1}{R_1 C} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{U_1 + U_0 \frac{R_1 + R_2}{R_2}}{s + \frac{R_1 + R_2}{R_2 R_1 C}} - \frac{U_0}{s}$$

Der zweite Summand,  $-U_0/s$ , wird nach Regel 1 zu  $-U_0$  direkt zurücktransformiert.

Die am Kondensator stehende Spannung für  $t \geq 0$  ist damit:

$$u_C = \left( U_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} + U_0 \right) \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) - U_0$$

$$\text{mit } \tau = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}$$

Ein einmaliger *rechteckförmiger* Spannungsverlauf kann dadurch auf das Netzwerk gegeben werden, dass die Spannung  $U_1$  zum Zeitpunkt  $t_1$  ( $0 < t_1 < \infty$ ) zu null gemacht wird. Weiterhin wird der Wert der Kondensatorspannung zum Zeitpunkt  $t_1$  für die in Reihe zum Kondensator liegende Spannungsquelle vorzeichenrichtig eingesetzt (also den Wert  $U_0/s$  aus dem ersten Teil durch  $u_C(t_1)/s$  ersetzen). Die weitere Berechnung erfolgt analog zu dem oben gezeigten Rechengang.

## 4.10 Abtasttheorem von Shannon

### Abtasttheorem im Zeitbereich

Enthält ein analoges kontinuierliches Signal nur Frequenzanteile bis zu einer maximalen Frequenz  $f_g$ , so ist der Signalverlauf eindeutig dadurch gegeben, dass nach Bild I-9 das Signal zu diskreten Zeitpunkten  $T_1, T_2, T_3$  usw. abgetastet wird. Für die konstanten zeitlichen Abstände der Abtastimpulse,  $T_{n+1} - T_n$ , und damit für die Abtastfrequenz  $f_{ab}$  gilt:

#### ● Abtastfrequenz

$$f_{ab} = \frac{1}{T_{n+1} - T_n} \geq 2 \cdot f_g \quad (\text{theoret.});$$

$$f_{ab} \geq 2,2 \cdot f_g \quad (\text{prakt.}) \quad (\text{I.18})$$

$f_g$  höchste im Signal vorkommende Frequenz in Hz



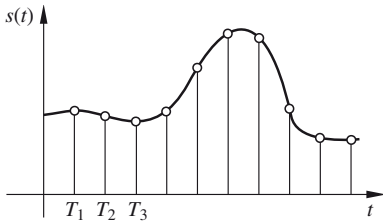


Bild I-9 Signalabtastung

Es genügt, diese abgetasteten Amplitudenwerte zu übertragen. Der Empfänger kann daraus das Originalsignal durch Zwischenschalten eines Tiefpasses zurückgewinnen. Weitere Einzelheiten dazu folgen bei der Behandlung der *Pulsamplitudenmodulation PAM* im Kapitel V.4.1. Die meisten vorkommenden Signale sind vom Prinzip her frequenzbandbegrenzt (Sprachsignal enthält aufgrund des Kehlkopfaufbaus nur Frequenzen bis etwa 15 kHz). Aus praktischen Erwägungen heraus könnte es aber erforderlich sein, den im Originalsignal enthaltenen Frequenzbereich einzuschränken, weil dann die Abtastfrequenz verringert werden kann. Die sich hieraus ergebenden Vorteile werden bei den *Zeitmultiplexverfahren* im Kapitel IX, Mehrfachübertragung, beschrieben. Allerdings bedeutet eine zusätzliche Frequenzbandbegrenzung auch eine Signalverfälschung (z.B. werden sehr schnelle Signaländerungen verlangsamt). Da es keine Filter mit unendlich steiler Flanke bei der maximal zulässigen Frequenz  $f_g$  gibt und bei der Abtastung eines sinusförmigen Signals mit  $f = f_g$  möglicherweise immer genau in den Nulldurchgängen abgetastet wird, wählt man die Abtastfrequenz zu  $f_{ab} \geq 2,2 \cdot f_g$ .

#### Abtasttheorem im Frequenzbereich

Ein Signal mit der begrenzten Zeitdauer  $T_g$  lässt sich vollständig durch das Frequenzspektrum bei den diskreten Frequenzen im Abstand  $\Delta f$  darstellen:

##### ● Frequenzabstand

$$\Delta f \leq \frac{1}{2 \cdot T_g} \quad (\text{theoretisch});$$

$$\Delta f \leq \frac{1}{2,2 \cdot T_g} \quad (\text{praktisch}) \quad (I.19)$$

$T_g$  begrenzte Zeitdauer des Signals in s

Gleichung (I.19) folgt aus der Verknüpfung von Zeit und Frequenz über die Fouriertransformation. Für den Faktor 2,2 gilt die gleiche Begründung wie oben.

## 4.11 Zufällige (stochastische) Signale

Zufällige (stochastische) Signale haben keine erkennbaren zeitabhängigen Gesetzmäßigkeiten, trotzdem besitzen sie in den meisten Fällen sogenannte statistische Kenngrößen, die nicht von der Zeit abhängen, sofern man diese Kenngrößen über einen genügend großen Zeitraum betrachtet. Für die Nachrichtentech-

nik besitzen sie eine große Bedeutung (siehe I.4.11.3): Zum einen als Nutzsignal zur Nachrichtenübertragung, zum anderen als Störsignal in Form von Rauschen.

### 4.11.1 Rauschen

Rauschen ist ein statistischer Vorgang, der durch Wärmebewegung von Ladungsträgern hervorgerufen wird und deshalb ein stochastisches Signal darstellt. Nach der Herkunft des Rauschens unterscheidet man äußere und innere Quellen.

#### a) Äußere Quellen:

- *Atmosphärisches Rauschen:* Es entsteht im Wesentlichen durch Blitzentladungen von Gewittern. Das Rauschspektrum nimmt oberhalb etwa 10 MHz deutlich ab.
- *Kosmisches Rauschen:* Es handelt sich um die Radiostrahlung entfernter Sterne. Es tritt ab etwa 50 MHz störend in Erscheinung, wenn das atmosphärische Rauschen abgeklungen ist.

#### b) Innere Quellen:

- *Widerstandsrauschen oder thermisches Rauschen:* Es entsteht in Wirkwiderständen. Der Mittelwert der Rauschspannung  $\bar{u}_R$  berechnet sich zu:
- *Widerstandsrauschen: Rauschspannung*

$$\bar{u}_R = \sqrt{4kTBR} \quad (I.20a)$$

$k$  Boltzmann-Konstante  $1,38 \cdot 10^{-23}$  Ws/K;  $T$  absolute (thermodynamische) Temperatur in K;  $B$  Bandbreite (ausgewerteter oder berücksichtigter Frequenzbereich) in Hz;  $R$  Widerstand in  $\Omega$

Der Rauschstrom ergibt sich zu:

- *Widerstandsrauschen: Rauschstrom*

$$\bar{i}_R = \sqrt{\frac{4kTB}{R}} \quad (I.20b)$$

Formelgrößen siehe Gleichung (I.20a)

Ein rauschender Widerstand erzeugt an einem gleich großen nichtrauschenden (d.h. idealisierten) Widerstand bei Leistungsanpassung die Rauschleistung

- *Rauschleistung*

$$\bar{p}_R = \frac{\bar{u}_R}{2} \cdot \frac{\bar{i}_R}{2} = kTB \quad \text{bei Leistungsanpassung} \quad (I.20c)$$

Formelgrößen siehe Gleichung (I.20a)

- **Beispiel I.7:** Bei Zimmertemperatur ( $20^\circ\text{C} \cong 293\text{ K}$ ) beträgt die Rauschspannung eines Widerstandes  $R = 10\text{ k}\Omega$  bei einer Bandbreite von 1 MHz:

$$\bar{u}_R = \sqrt{4 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Ws}}{\text{K}} \cdot 293\text{ K} \cdot 10^6 \frac{1}{\text{s}} \cdot 10^4 \frac{\text{V}}{\text{A}}} = 12,7\text{ }\mu\text{V}$$

Die Rauschleistung errechnet sich zu:

$$\bar{p}_R = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Ws}}{\text{K}} \cdot 293\text{ K} \cdot 10^6 \frac{1}{\text{s}} = 4 \cdot 10^{-15}\text{ W}$$

Sie ist unabhängig vom Wert des Widerstandes. Da die Rauschspannung von der Temperatur abhängt, werden Verstärker für besondere Anwendungen (Empfänger für Signale von Weltraumsonden) im Temperaturbereich von einigen Kelvin betrieben (aber oberhalb der Supraleitung). Die Rauschspannung des 10-k $\Omega$ -Widerstandes würde dann bei 10 K Betriebstemperatur von 12,7  $\mu$ V auf etwa 2,3  $\mu$ V absinken.

- **1/f-Rauschen oder Funkelrauschen:** Rauschen, das bei Frequenzen unterhalb 1 kHz auftritt und zu niedrigeren Frequenzen hin zunimmt (Amplitude  $\sim 1/f$ ). Es macht sich besonders bei Halbleitern (Transistoren) unangenehm bemerkbar.
- **„Popcorn“-Rauschen:** Es handelt sich um sporadisch auftretendes Rauschen mit kurzer Dauer ( $\mu$ s-Bereich) und Amplituden, die um ein Vielfaches über denen des „normalen“ Rauschens liegen. Es führt in Verstärkerschaltungen häufig zu Übersteuerungen.
- **Schrottrauschen:** Es wird verursacht durch ungleichmäßige Ladungsträgerinjektion bzw. -emission in Halbleitern und Elektronenröhren. Das mittlere Stromschwankungsquadrat ist gegeben zu:

*Schrottrauschen als Stromschwankungsquadrat:*

$$\overline{i_s^2} = 2 \cdot q_e \cdot I \cdot B$$

$q_e$  Elementarladung des Elektrons 1,6  $\cdot 10^{-19}$  As;  $B$  Bandbreite in Hz;  $I$  Anoden- bzw. Halbleiterstrom in A

- **Stromverteilungsrauschen:** Es entsteht durch statistische Schwankungen der Stromaufteilung auf Basis und Kollektor bei Transistoren bzw. auf Gitter und Anode bei Elektronenröhren.

### c) Weißes Rauschen:

Im betrachteten Frequenzbereich sind, über einen größeren Zeitbereich betrachtet, alle Frequenzen mit gleicher Amplitude vorhanden.

### d) Kennzeichnung der Rauscheigenschaften von Verstärkern und Empfängern:

Mit *Störabstand* wird das Verhältnis von Signalleistung  $P_S$  zu Störsignalleistung  $P_N$  bezeichnet:

- **Störabstand**

$$S = \frac{P_S}{P_N} \quad \text{oder} \quad S = 10 \lg \frac{P_S}{P_N} \quad \text{in dB} \quad (I.21)$$

$P_S$  Signalleistung (engl. signal);  $P_N$  Rauschleistung (engl. noise)

In der Rundfunk-Empfangstechnik wird ein Störabstand von 26 dB entsprechend  $P_S/P_N \approx 400$  gefordert. Zum Vergleich der Rauscheigenschaften von Verstärkern oder Empfängern wird die *Rauschzahl*  $F$  verwendet. Sie ist definiert als das Verhältnis von Signal- zu Rauschleistung am Eingang bezogen auf das entsprechende Verhältnis am Ausgang:

$$\bullet \text{ Rauschzahl } F = \frac{(P_S/P_N)_e}{(P_S/P_N)_a} \quad (I.22)$$

$P_S$  Signalleistung;  $P_N$  Rauschleistung; Indizes:  $e$  Eingang;  $a$  Ausgang

$$\bullet \text{ Rauschmaß } F = 10 \cdot \lg(F) \quad \text{in dB} \quad (I.23)$$

Die Rauschzahl am Ausgang eines Vierpols (Verstärkers) hängt auch vom Rauschen der Signalquelle ab, deshalb verwendet man bevorzugt die *Rauschtemperatur*  $\Theta$ . Der Vierpol hat die Leistungsverstärkung  $G$  und wird als rauschfrei angenommen. Am Eingang liegt ein Widerstand  $R$ , der die gleiche Rauschleistung  $P_N$  am Ausgang des Vierpols erzeugt wie der Vierpol selber:  $P_N = G \cdot k \cdot B \cdot \vartheta_V$  (Gleichung I.20c, Leistungsanpassung; Formelgrößen siehe Gleichung I.20a).  $\vartheta_V$  ist die Rauschtemperatur des Vierpols. Entsprechend rauscht auch die den Vierpol speisende Signalquelle mit der Rauschtemperatur  $\vartheta_{SS}$ :  $P_{SS} = G \cdot k \cdot B \cdot \vartheta_{SS}$ . Die effektive Rauschleistung am Ausgang ergibt sich durch Addition:  $P_{\text{eff}} = G \cdot k \cdot B(\vartheta_{SS} + \vartheta_V)$ . Der Ausdruck  $(\vartheta_{SS} + \vartheta_V)$  wird *effektive Rauschtemperatur*  $\vartheta_{\text{eff}}$  genannt. Damit folgt für die Rauschzahl:

- **Rauschzahl**

$$F = \frac{P_{SS} + P_N}{P_{SS}} = 1 + \frac{P_N}{P_{SS}} = 1 + \frac{G \cdot k \cdot B \cdot \vartheta_V}{G \cdot k \cdot B \cdot \vartheta_{SS}} \\ = 1 + \frac{\vartheta_V}{\vartheta_{SS}} = 1 + F_Z \quad (I.24)$$

$F_Z$  ist die *zusätzliche Rauschzahl*, die das (zusätzliche) Rauschen des Vierpols oder Verstärkers angibt;  $F_Z = 0$  heißt, dass er rauschfrei ist.

$$\bullet \text{ Rauschmaß } a_F = 10 \lg F \quad \text{in dB} \quad (I.25)$$

$$\bullet \text{ Rauschabstand } a_r = 10 \lg \frac{P_S}{P_N} \quad \text{in dB} \quad (I.26)$$

$P_S$  Signalleistung (engl. signal);  $P_N$  Rauschleistung (engl. noise)

Sind zwei Verstärkerstufen hintereinandergeschaltet, wie in Bild I-10 gezeigt, ergibt sich als Gesamt-rauschzahl:

- **Gesamtrauschzahl zweistufiger Verstärker**

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} \quad (I.27)$$

$F_1$  Rauschzahl des Verstärkers 1;  $F_2$  Rauschzahl des Verstärkers 2;  $G_1$  Leistungsverstärkung des Verstärkers 1

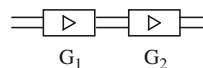


**Bild I-10** Rauschen eines zweistufigen Verstärkers

Die erste Verstärkerstufe sollte deshalb ein möglichst niedriges Rauschen ( $F_1$ ) und eine hohe Verstärkung ( $G_1$ ) besitzen.

### 4.11.2 Kenngrößen von stochastischen Signalen

**a) Mittelwerte:** Es werden Definitionen wie in der Messtechnik verwendet, die auf die Anwendungen in der Nachrichtentechnik zugeschnitten sind. Deshalb

wird das Integrationsintervall häufig von  $-T$  bis  $+T$  gewählt, sodass sich der Faktor  $1/2$  vor dem Integral ergibt.

- **Arithmetischer Mittelwert**

$$\bar{s} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot T} \int_{-T}^T s(t) dt$$

- **Quadratischer Mittelwert**

$$\bar{s}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot T} \int_{-T}^T \{s(t)\}^2 dt$$

- **Effektivwert**  $S_{\text{eff}} = \sqrt{\bar{s}^2}$

- **Streuung**

$$\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot T} \int_{-T}^T \{s(t) - \bar{s}\}^2 dt$$

- **Standardabweichung**  $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$  (I.28)

In der Praxis kann der Grenzübergang  $T \rightarrow \infty$  nicht verwirklicht werden. Es hat sich aber gezeigt, dass der jeweilige Mittelwert schon nach kurzer Zeit (Erfahrungswert) erreicht wird und sich bei weiterer Erhöhung von  $T$  nicht mehr wesentlich ändert.

**b) Korrelationsfunktionen:** Korrelation heißt Ähnlichkeit bzw. Übereinstimmung, auch Verknüpfung.

- **Autokorrelationsfunktion (AKF):**

$$\Phi_{ss}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot T} \int_{-T}^T s(t) \cdot s(t - \tau) dt \quad (\text{I.29})$$

Anschaulich beschreibt sie die „innere Ähnlichkeit“ eines Signals *mit sich selbst*, wenn man beide um die Zeit  $\tau$  gegeneinander verschiebt.

#### ■ Beispiel I.8:

- a) Die Autokorrelationsfunktion für eine Gleichspannung  $U_0$  berechnet sich zu:  $\Phi_{ss}(\tau) = U_0^2 \neq f(\tau)$ . Die Ähnlichkeit ist stets gleich groß und maximal.

- b) Für einen sinusförmigen Verlauf  $s(t) = \bar{s} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$  folgt:

$$\Phi_{ss}(\tau) = \frac{\bar{s}^2}{2} \cos \omega \tau. \text{ Wenn } \tau = 0 \text{ ist, stimmen beide Signale}$$

überein, und die Ähnlichkeit ist maximal. Für  $\omega \tau = \pm 90^\circ$  bzw.  $\pm 270^\circ$  weichen beide Signale maximal voneinander ab, die Ähnlichkeit ist null.

- c) Das Signal ist Rauschen. Da Rauschen ein statistischer Vorgang ist, besteht keinerlei Ähnlichkeit zwischen benachbarten Augenblickswerten, und damit ergibt sich:  $\Phi_{ss}(\tau \neq 0) = 0$ .

- **Kreuzkorrelationsfunktion (KKF):**

$$\Phi_{s_1 s_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot T} \int_{-T}^T s_1(t) \cdot s_2(t - \tau) dt \quad (\text{I.30})$$

Sie gibt die Ähnlichkeit *zweier unterschiedlicher* Signale an.

**c) Spektrale Leistungsdichte:** Sie ist die Leistung  $P$  als Funktion der Frequenz, bezogen auf  $\Delta f$ :

- **Spektrale Leistungsdichte**

$$\Phi_s(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta f} \quad (\text{I.31})$$

- **Theorem von Wiener-Khintchine:** Die spektrale Leistungsdichte ist die Fouriertransformierte der Autokorrelationsfunktion.

#### 4.11.3 Anwendungen der Kenngrößen von stochastischen Signalen

Die im vorigen Kapitel erläuterten Kenngrößen finden Anwendung in der Korrelations-Mess- und -Übertragungstechnik. Das Prinzip soll an zwei Beispielen gezeigt werden.

- a) Die Bilder von Raumsonden sind beim Empfang auf der Erdoberfläche sehr stark durch Rauschen gestört, wobei die Amplituden des Nutzsignals nur ein Bruchteil derjenigen des Störsignales sind. Man veranlasst deshalb die Raumsonde, dasselbe Bild viele tausendmal zu senden. Mit jedem neu eintreffenden Bild wird die Autokorrelationsfunktion, bestehend aus der Überlagerung von Nutz- und Rauschsignal, mit allen vorhergehenden Bildern gebildet. Das Nutzsignal ist durch das wiederholte Senden ein quasi periodisches Signal, dessen Autokorrelationsfunktion ein Maximum bei  $\tau = 0$  hat ( $\tau = 0$  gilt bei periodischen Signalen mit der Periodendauer  $T$  auch für  $T, 2T, 3T, \dots$ ). Die Autokorrelationsfunktion des Rauschens geht nach Beispiel I.8 gegen null, sodass nach einer ausreichenden Anzahl von Bildwiederholungen das Nutzsignal nahezu ungestört übrig bleibt. (Siehe dazu Kapitel XVII.3).
- b) Das Rauschen eines Verstärkers kann in der Praxis dadurch verringert werden, dass das Nutzsignal in zwei oder mehr getrennten rauschenden Verstärkern parallel verstärkt und von den Ausgangssignalen die Kreuzkorrelationsfunktion gebildet wird. Das Rauschen der Verstärker ist nicht korreliert, sodass es sich teilweise heraushebt. Übrig bleibt das korrelierte Nutzsignal, das eine maximale Übereinstimmung für  $\tau = 0$  aufweist.

#### 4.12 Verzerrungen

Der (*komplexe*) *Frequenzgang* oder der (*komplexe*) *Übertragungsfaktor* eines Vierpols oder eines Verstärkers ist das Verhältnis einer beliebigen Ausgangsgröße zu einer beliebigen Eingangsgröße. In der Praxis wird es sich meist um gleichartige Größen handeln, z.B. Spannungen. Der *komplexe Frequenzgang* wird mit  $\underline{H}(j\omega)$  bezeichnet und kann in Form von Betrag und Phase oder als Summe von Realteil  $R(\omega)$  und Imaginärteil  $X(\omega)$  dargestellt werden:

- (*Komplexer*) *Frequenzgang* oder (*komplexer*) *Übertragungsfaktor*:

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= |\underline{H}(j\omega)| \cdot e^{j\phi(\omega)} = C \cdot e^{a(\omega)} \cdot e^{jb(\omega)} \\ &= R(\omega) + jX(\omega) \end{aligned} \quad (\text{I.32})$$

$a$  Dämpfungsmaß;  $b$  Phasenmaß;  $C$  Konstante, falls Eingangs- und Ausgangsgröße unterschiedliche Dimension besitzen,  $R(\omega)$  Realteil,  $X(\omega)$  Imaginärteil

- $a$  wird als Dämpfungsmaß,  $b$  als Phasenmaß bezeichnet;

$$a = \lg D = \lg \frac{P_1}{P_2}$$

$D$  Dämpfungsfaktor;  $P_1$  Leistung am Eingang;  $P_2$  Leistung am Ausgang; siehe auch Kapitel I.5, Kenngrößen der Übertragungsstrecke

Hängen  $a$  bzw.  $b$  von der Frequenz ab, spricht man von *Dämpfungsverzerrungen* bzw. *Phasenverzerrungen*.

- *Dämpfungsverzerrungen:*  $a = f(\omega)$
- *Phasenverzerrungen:*  $b = f(\omega)$

Bei Vierpolen verwendet man auch den aus der Regelungstechnik stammenden Begriff „*Übertragungsfunktion*“ für das Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangsspannung bei Leerlauf am Ausgang.

- *Übertragungsfunktion*  $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$  (I.133)

bei Vierpolen, Leerlauf am Ausgang

$\underline{U}_1$  Eingangsspannung,  $\underline{U}_2$  Ausgangsspannung

- **Beispiel I.9:** Ein RC-Hochpass nach Bild I-11 hat den Übertragungsfaktor (Übertragungsfunktion) nach Gleichung I.32 bzw. I.33:

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \sqrt{\frac{(\omega RC)^2}{1 + (\omega RC)^2}} \cdot e^{j \arctan \frac{1}{\omega RC}} \\ &= \frac{(\omega RC)^2}{1 + (\omega RC)^2} + j \frac{\omega RC}{1 + (\omega RC)^2} \end{aligned}$$

Ein nicht sinusförmiges Signal am Eingang hat am Ausgang eine Phasenverzerrung, da  $b(\omega) = \arctan(1/\omega RC) \neq \text{const.}$  Ebenso treten Dämpfungsverzerrungen auf, da  $a = f(\omega)$ .

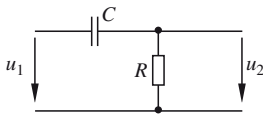


**Bild I-11**  
RC-Hochpass

#### 4.12.1 Lineare Verzerrungen

Von *linearen Verzerrungen* spricht man, wenn Eingangs- und Ausgangssignal eines Vierpols oder Verstärkers *nicht* den gleichen zeitlichen Verlauf haben, aber keine *zusätzlichen* Frequenzen im Ausgangssignal gegenüber dem Eingangssignal enthalten sind (Fourierzerlegung beider Signale). Sie entstehen häufig dadurch, dass der Vierpol oder Verstärker Tiefpassverhalten besitzt und damit den Frequenzbereich einschränkt (siehe Beispiel I.9). Diese Verzerrungen sind prinzipiell korrigierbar.

- **Beispiel I.10:** Ein periodisches Rechtecksignal durchläuft einen RC-Tiefpass nach Bild I-12a. Der Frequenzgang ergibt sich

bei unbelastetem Ausgang zu:  $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$ . Die

Oberschwingungen werden mit wachsender Frequenz zunehmend gedämpft, sodass das Signal am Ausgang in seinem zeitlichen Verlauf verändert ist (Bild I-12c). Durch Reihenschaltung eines weiteren Vierpols mit dem inversen Frequenzgang

$$\underline{H}_{\text{inv}} = \left( \frac{1}{1 + j\omega RC} \right)^{-1} = (1 + j\omega RC)$$

wieder in den Originalzustand versetzt werden.

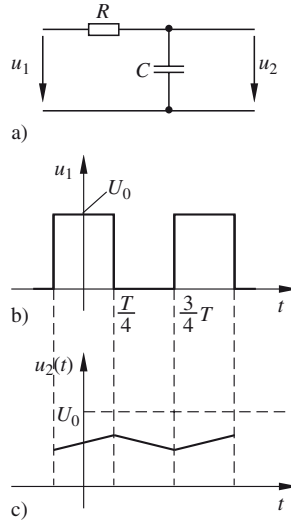


**Bild I-12** Lineare Verzerrungen

- a) RC-Tiefpass
- b) Eingangssignal
- c) linear verzerrtes Ausgangssignal

#### 4.12.2 Nichtlineare Verzerrungen

Sie entstehen an gekrümmten Kennlinien, an denen der Quotient aus Spannung und Strom nicht mehr konstant ist, sondern von der Spannung bzw. dem Strom abhängt (z.B. bei Dioden, spannungsabhängigen Widerständen). Es entstehen *zusätzliche neue* Frequenzen im verzerrten Ausgangssignal, wie sie sich z.B. ergeben, wenn man als Eingangssignal eine sinusförmige Größe wählt und für die verzerrte Ausgangsgröße die Fourierzerlegung durchführt. Bild I-13 zeigt das Entstehen nichtlinearer Verzerrungen an einer gekrümmten Kennlinie.

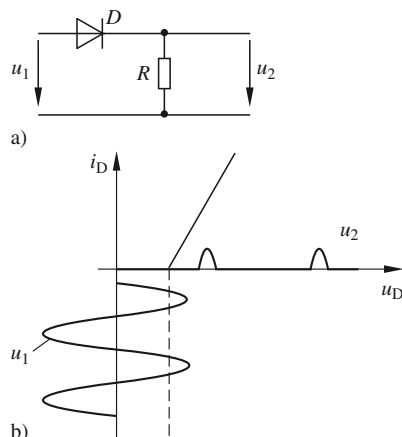


**Bild I-13** Entstehung von nichtlinearen Verzerrungen an einer idealisierten Diodenkennlinie

### 4.12.3 Klirrfaktor

Der Klirrfaktor dient zur Beurteilung von nichtlinearen Verzerrungen. Zur Bestimmung wird folgendes Verfahren eingesetzt: Der Prüfling (z.B. Verstärker) erhält ein sinusförmiges Eingangssignal mit der Frequenz  $f_0$  (bei NF-Verstärkern in der Regel 1 kHz). Aus dem Ausgangssignal wird die Grundschiwingung mit der Frequenz  $f_0$  ausgefiltert. Ein eventuell verbleibendes Restsignal ist durch nichtlineare Verzerrungen des Verstärkers entstanden, dessen Effektivwert gleich dem Effektivwert aller Oberschwingungen ist. Dieser Wert ist um so größer, je mehr das Ausgangssignal von der Sinusform abweicht. Er heißt *Klirrfaktor* und ist wie folgt definiert (DIN 40 110 und 40 148):

- *Klirrfaktor*

$$k = \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + \dots}}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=2}^{\infty} U_i^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} U_i^2}} \quad (I.34)$$

$U_1$  Effektivwert der Grundschiwingung oder ersten Harmonischen;  $U_2$  Effektivwert der ersten Oberschwingung oder zweiten Harmonischen usw.

Er wird meist in % angegeben. Daneben gibt es noch die folgende Darstellung:

- *Klirrfaktor*  $k' = \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + \dots}}{U_1} \quad (I.35)$

Der Zusammenhang zwischen  $k'$  und  $k$  ist gegeben durch:

$$k = \frac{k'}{\sqrt{1 + k'^2}}$$

Je kleiner der Klirrfaktor ist, um so weniger unterscheiden sich  $k'$  und  $k$ .

Für besondere Anwendungen werden *Teilkirrfaktoren* verwendet:

- *Teilkirrfaktoren*:

$$k_2 \approx k'_2 = \frac{U_2}{U_1}; \quad k_3 \approx k'_3 = \frac{U_3}{U_1} \dots \quad (I.36)$$

Das „ $\approx$ “-Zeichen gilt, wenn die Teilkirrfaktoren viel kleiner als 1 sind.

- *Klirrdämpfung*  $a_k = 20 \lg \frac{1}{k} \quad (I.37)$

■ **Beispiel I.11:** Für den in Bild I-5 dargestellten rechteckförmigen Signalverlauf gibt Gleichung (I.10) die Fourierreihe an. Setzt man die Effektivwerte in Gleichung (I.34) ein, folgt für den Klirrfaktor:

$$k = \frac{\sqrt{\left(\frac{2U_0}{\pi\sqrt{2}}\right)^2 \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{7}\right)^2 + \dots\right]}}{\sqrt{\left(\frac{2U_0}{\pi\sqrt{2}}\right)^2 \left[\left(\frac{1}{1}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{7}\right)^2 + \dots\right]}} = \frac{\sqrt{\left[\left(\frac{1}{1}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{7}\right)^2 + \dots\right] - 1}}{\sqrt{\left[\left(\frac{1}{1}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{7}\right)^2 + \dots\right]}}$$

Der Ausdruck  $1/\sqrt{2}$  im Zähler und im Nenner ist wegen des Überganges von den Scheitel- zu den Effektivwerten erforderlich.

Der Faktor  $2U_0/\pi\sqrt{2}$  lässt sich im Zähler und im Nenner als gemeinsamer Faktor ausklammern und kürzen. Im Zähler wurde dann in der eckigen Klammer zunächst der Wert  $(1/1)^2$  addiert und anschließend wieder abgezogen. Für die eckige Klammer im Zähler und im Nenner gilt:

$$\left[\left(\frac{1}{1}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{7}\right)^2 + \dots\right] = \frac{\pi^2}{8}$$

Damit erhält man:

$$k = \sqrt{\frac{\frac{\pi^2}{8} - 1}{\frac{\pi^2}{8}}} = 0,435 \text{ oder } 43,5 \%$$

## 5 Kenngrößen der Übertragungsstrecke

Unter „Übertragungsstrecke“ werden hier bevorzugt entweder einzelne Vierpole, Verstärker und elektrische Leitungen oder aber Kombinationen aus ihnen verstanden (Hinweis 1: Natürlich lassen sich auch Verstärker und Leitungen unter dem Begriff „Vierpol“ einordnen. Hinweis 2: In Bild I-14 ist ein komplexer Vierpol als Kettenschaltung von Leitung 1  $\rightarrow$  Verstärker 1  $\rightarrow$  Leitung 2  $\rightarrow$  Verstärker 2  $\rightarrow$  Leitung 3  $\rightarrow$  Tiefpassfilter  $\rightarrow$  Leitung 4 dargestellt). Um die Verknüpfung von Eingangs- und Ausgangsgrößen sowohl von Einzelvierpolen als auch von Gesamtvierpolen zu erfassen, wurden die folgenden Kenngrößen definiert (Indizes: 1 Eingang, 2 Ausgang):

### 5.1 Dämpfungsfaktor

- *Leistungsdämpfungsfaktor*  $D_P = \frac{P_1}{P_2} \quad (I.38a)$

- *Spannungsdämpfungsfaktor*  $D_U = \frac{U_1}{U_2} \quad (I.38b)$

- *Stromdämpfungsfaktor*  $D_I = \frac{I_1}{I_2} \quad (I.38c)$

Die Dämpfungsfaktoren sind  $\geq 1$ , wenn die Größen am Ausgang höchstens gleich denen am Eingang sind. Ein Dämpfungsfaktor  $D < 1$  bedeutet damit eine Verstärkung. Da man bei einer Verstärkung aber von der Vorstellung eines Zahlenwertes  $> 1$  ausgeht, hat man *Übertragungsfaktoren* definiert:

### 5.2 Übertragungsfaktor

Er wird auch mit *Verstärkungsfaktor* bezeichnet.

- *Leistungsübertragungsfaktor*  $T_P = \frac{P_2}{P_1} \quad (I.39a)$

- *Spannungsübertragungsfaktor*  $T_U = \frac{U_2}{U_1} \quad (I.39b)$

- *Stromübertragungsfaktor*  $T_I = \frac{I_2}{I_1} \quad (I.39c)$

Da in der Nachrichtentechnik Dämpfungs- und Übertragungsfaktoren (Verstärkungsfaktoren) im Bereich von mehreren Zehnerpotenzen vorkommen und in einer Übertragungskette mehrere dieser Werte miteinander multipliziert werden müssen, hat man logarithmische Maße definiert, bei denen die Multiplikation in eine Addition übergeht. Als Basis dient die Zahl 10 (verwendet bei Vierpolen und Verstärkern) oder die Zahl  $e = 2,718 \dots$  (verwendet bei elektrischen Leitungen).

### 5.3 Dämpfungsmaß

Es wird in Dezibel (dB) angegeben.

- **Leistungsdämpfungsmaß**

$$a_P = 10 \lg \frac{P_1}{P_2} \quad \text{in dB} \quad (\text{I.40a})$$

- **Spannungsdämpfungsmaß**

$$a_U = 10 \lg \frac{U_1^2}{Z_1} \cdot \frac{Z_2}{U_2^2} \quad \text{in dB},$$

$$a_U = 10 \lg \frac{U_1^2}{U_2^2} = 20 \lg \frac{U_1}{U_2} \quad \text{in dB für } Z_1 = Z_2 \quad (\text{I.40b})$$

- **Stromdämpfungsmaß**

$$a_I = 10 \lg \frac{I_1^2 \cdot Z_1}{I_2^2 \cdot Z_2} \quad \text{in dB};$$

$$a_I = 10 \lg \frac{I_1^2}{I_2^2} = 20 \lg \frac{I_1}{I_2} \quad \text{in dB für } Z_1 = Z_2 \quad (\text{I.40c})$$

$Z_1$  Eingangswiderstand des Vierpols, reell,  $Z_2$  Lastwiderstand am Ausgang des Vierpols, reell

Die Bedingung  $Z_1 = Z_2$  spielt bei der Leistungsanpassung (Verstärker) und der Leitungsanpassung (elektrische Leitungen) eine Rolle. Mit der Beziehung  $\lg[x^2] = 2 \cdot \lg[x]$  ergeben sich dann die dargestellten Formeln. Das Dämpfungsmaß ist positiv, wenn die Ausgangsgröße kleiner ist als die Eingangsgröße. Die Übertragungsmaße (Verstärkungsmaße) ergeben sich analog zu den Gleichungen (I.40).

### 5.4 Übertragungsmaß, Verstärkungsmaß

Beide Bezeichnungen werden verwendet, und der Wert wird in Dezibel (dB) angegeben. Sie unterscheiden sich vom Dämpfungsmaß durch das Vorzeichen. Das Verstärkungsmaß ist positiv, wenn die Ausgangsgröße größer ist als die Eingangsgröße. Ein positives Verstärkungsmaß ist damit ein negatives Dämpfungsmaß und umgekehrt.

- **Leistungsübertragungsmaß**

$$v_P = -a_P = 10 \lg \frac{P_2}{P_1} \quad \text{in dB} \quad (\text{I.41a})$$

- **Spannungsübertragungsmaß**

$$v_U = -a_U = 10 \lg \frac{U_2^2}{Z_2} \cdot \frac{Z_1}{U_1^2} \quad \text{in dB}$$

$$v_U = -a_U = 20 \lg \frac{U_2}{U_1} \quad \text{in dB für } Z_1 = Z_2 \quad (\text{I.41b})$$

- **Stromübertragungsmaß**

$$v_I = -a_I = 10 \lg \frac{I_2^2}{I_1^2} \cdot \frac{Z_2}{Z_1} \quad \text{in dB}$$

$$v_I = -a_I = 20 \lg \frac{I_2}{I_1} \quad \text{in dB für } Z_1 = Z_2 \quad (\text{I.41c})$$

$Z_1$  Eingangswiderstand des Vierpols, reell,  $Z_2$  Lastwiderstand am Ausgang des Vierpols, reell

Besteht eine Übertragungsstrecke aus der Hintereinanderschaltung („Kettenschaltung“) von mehreren Einzelvierpolen, folgt das Gesamtdämpfungsmaß aus der Summe der Teildämpfungsmaße:

- **Gesamt-Dämpfungsmaß(-Verstärkungsmaß):**

$$a_{\text{ges}} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots \quad \text{mit} \quad a_n = -v_n \quad (\text{I.42})$$

■ **Beispiel I.12:** Gegeben:  $a_{U1} = -12$  dB;  $a_{U2} = 25$  dB;  $a_{U3} = -40$  dB,  $U_1 = 1$  mV;  $U_3 = ?$  mV.  
 $a_{U\text{ges}} = a_{U1} + a_{U2} + a_{U3} = (-12 + 25 - 40)$  dB =  $-27$  dB. Da  $Z_1$  und  $Z_2$  nicht gegeben sind, wird  $Z_1 = Z_2$  gesetzt.  $a_{U\text{ges}} = 20 \lg (U_1/U_3) = -27$  dB.  $a_{U\text{ges}}$  ist negativ, und damit wird  $U_1$  verstärkt. Für  $U_3$  folgt:  $U_1/U_3 = 10^{-27/20}$ ,  $U_3 = U_1/10^{-27/20} = U_1/10^{27/20} = 1 \text{ mV} \cdot 22,4 = 22,4 \text{ mV}$ .

### 5.5 Pegel

Häufig interessiert das Verhältnis einer Leistung, einer Spannung oder eines Stromes zu einem beliebigen Bezugswert. Man spricht dann von einem *Pegel*. Wichtig ist, dass zu einer Pegelangabe der Bezugswert angegeben wird oder dieser Wert bekannt ist.

#### 5.5.1 Absoluter Pegel

- **Absoluter Leistungspegel**

$$L_{P\text{abs}} = 10 \lg \frac{P_x}{1 \text{ mW}} \quad \text{in dBm} \quad (\text{I.43a})$$

- **Absoluter Spannungspegel**

$$L_{U\text{abs}} = 20 \lg \frac{U_x}{775 \text{ mV}} \quad \text{in dB für } Z_1 = Z_2 \quad (\text{I.43b})$$

- **Absoluter Strompegel**

$$L_{I\text{abs}} = 20 \lg \frac{I_x}{1,29 \text{ mA}} \quad \text{in dB für } Z_1 = Z_2 \quad (\text{I.43c})$$

Die Bezugswerte (Zusatz „m“ bei der Leistungsangabe in dB) sind vom Telefon abgeleitet, bei dem an der Hörkapsel eine mittlere elektrische Leistung von 1 mW an 600  $\Omega$  (Widerstand des Telefons und Leitungs- oder Wellenwiderstand der Telefonleitung) zur Verständigung ausreicht.

#### 5.5.2 Relativer Pegel

- **Relativer Leistungspegel**

$$L_P = 10 \lg \frac{P_x}{P_0} \quad \text{in dB} \quad (\text{I.44a})$$



• *Relativer Spannungspegel*

$$L_U = 20 \cdot \lg \frac{U_x}{U_0} \quad \text{in dBr mit } Z_1 = Z_2 \quad (\text{I.44b})$$

• *Relativer Strompegel*

$$L_I = 20 \cdot \lg \frac{I_x}{I_0} \quad \text{in dBr mit } Z_1 = Z_2 \quad (\text{I.44c})$$

$P_0, U_0, I_0$  sind geeignet gewählte Bezugsgrößen.

In der Antennen-Messtechnik wird beispielsweise  $U_0 = 1 \mu\text{V}$  gewählt, weil bei Antennenspannungen in dieser Größenordnung Mono-Rundfunkempfang möglich wird. Die Angabe erfolgt dann in dB ( $\mu\text{V}$ ). In der folgenden Tabelle I-3 sind einige Pegelangaben aufgelistet.

**5.5.3 Dämpfungsmaß, Übertragungsmaß**

Sie sind folgendermaßen definiert:

- Dämpfungsmaß (Pegel)  $a = L_1 - L_2$  in dB, positiv

- Übertragungsmaß (Pegel)  $a = L_1 - L_2$  in dB, negativ

Es gilt:

$L_I$  Pegel am Punkt 1 in dB ( $L_P$  oder  $L_U$  oder  $L_I$ )

$L_2$  Pegel am Punkt 2 in dB ( $L_P$  oder  $L_U$  oder  $L_I$ ) (I.45)

Ein negatives Dämpfungsmaß ist damit ein Übertragungsmaß und bedeutet, dass die Ausgangsgröße größer ist als die Eingangsgröße.

**5.5.4 Pegeldiagramm**

Um bei komplexen Übertragungsstrecken einen schnellen Überblick über die an jedem Ort herrschenden Pegel bzw. Absolutwerte zu erhalten, verwendet man das Pegeldiagramm. Bild I-14 zeigt ein Beispiel. Zu jedem Ort ist der vorhandene Pegel (hier Spannungspegel) sofort angebar. Durch die willkürliche aber praktische Festlegung der Eingangsgröße  $U_1$  auf einen Pegel von 0 dB kann man außerdem erkennen, ob der Pegel irgendwo einen kritischen Wert unterschreitet, sodass ein Mindest-Störabstand nicht mehr gewährleistet ist.

**Tabelle I-3** Beispiele für Pegelangaben

| Pegelart                                   | Definition                                                                        | Bezeichnung          |
|--------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| Absoluter Leistungspegel                   | $10 \cdot \lg \left( \frac{P}{1 \text{ mW}} \right)$                              | dBm                  |
|                                            | $10 \cdot \lg \left( \frac{P}{1 \text{ W}} \right)$                               | dBW                  |
| Absoluter Spannungspegel                   | $20 \cdot \lg \left( \frac{ U }{775 \text{ mV}} \right)$                          | dB                   |
|                                            | $20 \cdot \lg \left( \frac{ U }{1 \text{ V}} \right)$                             | dBV                  |
| Relativer Pegel                            | $10 \cdot \lg \left( \frac{P}{P_0} \right)$                                       | dBr                  |
| Absoluter Pegel in Antennenschaltungen     | $20 \cdot \lg \left( \frac{ U }{1 \mu\text{V}} \right)$                           | dB ( $\mu\text{V}$ ) |
| Absoluter Pegel, reduziert auf 0-dBr-Punkt | Es gilt:<br>$\frac{P}{\text{dBm}} = \frac{P}{\text{dBm0}} + \frac{P}{\text{dBr}}$ | dBm0                 |

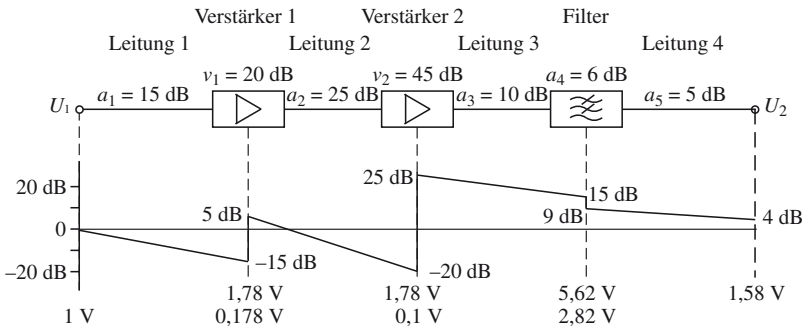


**Bild I-14**  
Pegeldiagramm



## II Zweitore, Vierpole

### 1 Zweitor allgemein

#### 1.1 Grundlagen

Zweitore (nach DIN 4899; alte Bezeichnung „Vierpole“) sind Funktionseinheiten mit zwei Toren, wobei zu jedem Tor ein Klemmenpaar gehört. An eines der Tore wird das Eingangssignal angeschlossen, die zugehörigen Anschlüsse werden mit Eingangsklemmen bezeichnet. Entsprechend wird an den zwei Ausgangsklemmen das Ausgangssignal abgegriffen. Eventuell erforderliche Anschlüsse für eine Stromversorgung werden nicht mitgezählt. Der interne Aufbau besteht aus einer beliebigen Zusammenschaltung von Widerständen, Kondensatoren, Spulen, Transformatoren, Dioden, Transistoren usw. Es wird vorausgesetzt, dass die Zweitore zeitinvariant sind, d.h. die Eigenschaften hängen nicht von der Zeit ab.

Zweitore werden in folgender Weise charakterisiert:

- |                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|-------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Passive Zweitore:</i>      | Die am Ausgang entnehmbare Leistung ist kleiner oder gleich der am Eingang zugeführten Leistung.                                                                                                                                                                                                                                               |
| <i>Aktive Zweitore:</i>       | Die am Ausgang entnehmbare Leistung ist größer als die am Eingang zugeführte Leistung.                                                                                                                                                                                                                                                         |
| <i>Lineare Zweitore:</i>      | Innerhalb des Zweitors gilt, dass in jedem Zweig das Verhältnis von Spannung zu Strom nicht vom Strom bzw. der Spannung abhängt. Enthält ein Zweitor nichtlineare Bauelemente wie Dioden, Transistoren oder spannungsabhängige Widerstände, werden deren Kennlinien häufig linearisiert. Dadurch entsteht näherungsweise ein lineares Zweitor. |
| <i>Nichtlineare Zweitore:</i> | Die nichtlinearen Kennlinien von z.B. Dioden, Transistoren, spannungsabhängigen Widerständen und Spulen mit Eisen werden nicht linearisiert. Damit ist die funktionale Abhängigkeit zwischen den Eingangs- und Ausgangsgrößen des Zweitors nicht so einfach darstellbar wie bei linearen Zweitoren.                                            |

Die folgenden Ausführungen setzen lineare, zeitinvariante Zweitore voraus. Die elektrische Leitung ist ein Zweitor besonderer Art. Sie wird deshalb im nächsten Kapitel gesondert behandelt.

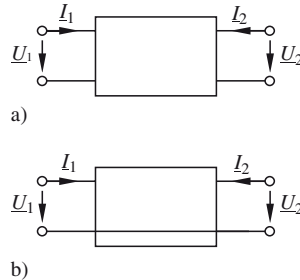


**Bild II-1** Zweitor

- a) allgemein  
b) gemeinsamer Anschluss für Ein- und Ausgang

Bild II-1 zeigt die für die Ein- und Ausgangsgrößen verwendeten Bezeichnungen (DIN 1344, 40 148). Das Zweitor nach Bild II-1b besitzt die Besonderheit, dass ein Eingangs- und ein Ausgangsanschluss miteinander verbunden sind. Zweitore dieser Art werden bevorzugt verwendet, da die durchgehende Verbindung häufig als Anschlusspunkt für Abschirmungen, für das Gehäusepotential und den Netz-Schutzleiter dient. Auf diese Weise lassen sich Störungen in Signalkreisen klein halten. Die Richtung des Stromes  $I_2$  wird in der Regel positiv genommen, wenn er in das Zweitor hineinfließt. Diese Betrachtungsweise ist z.B. für Zweitore in Telefon-Signalkreisen sinnvoll, da Generator (Sprecher) und Verbraucher (Hörer) ihre Rollen tauschen und damit der Signalfluss in beiden Richtungen erfolgt.

Die im folgenden dargestellten Beziehungen für Zweitore sind wesentliche Ergebnisse der Zweitortheorie und sind aus zwei Gründen von besonderer Bedeutung:

1. Umfangreiche Zweitore lassen sich auf wenige sogenannte „Elementarzweitore“ zurückführen bzw. als Kombination aus diesen darstellen. Die Parameter dieser Elementarzweitore sind in Tabelle II-4 zusammengestellt.
2. Mehrere Zweitore können durch geeignet gewählte Parameter der Einzelzweitore auf einfache Weise zu einem Gesamtzweitor zusammengefügt werden (Tabelle II-1 und Bild II-2).

#### 1.2 Zweitorgleichungen, Zusammenschaltung von Zweitoren

Das Zweitor wird in seinen Eigenschaften vollständig durch zwei Gleichungen beschrieben, die die vier Größen  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $I_1$  und  $I_2$  nach Bild II-1 miteinander verknüpfen. Je nach Art dieser Verknüpfung ergeben sich unterschiedliche Parameter (Faktoren bei den Spannungen und Strömen, siehe Tabelle II-1, linke Spalte). Die Bedeutung dieser unterschiedlichen Parameter liegt darin, dass eine bestimmte von den

5 möglichen Arten der Zusammenschaltung zweier Einzelzweitore nach Bild II-2a ... e nur mit den zugeordneten Parametern erfolgen kann. Die mittlere Spalte von Tabelle II-1 listet die Arten der Zusammenschaltung auf, während in der rechten Spalte die erforderlichen Parameter stehen und welche Operationen für eine Zusammenschaltung erforderlich sind. Liegen die Parameter in einer anderen als der geforderten Form vor, müssen sie anhand von Tabelle II-2 umgewandelt werden.

Hinweise zu Tabelle II-1:

1. Bei den  $\underline{H}$ -Parametern ist alternativ auch die Schreibweise mit kleinen Buchstaben zulässig, um

die Verbindung zu den bei Transistoren verwendeten  $\underline{h}$ -Parametern herzustellen. So wird beispielsweise die Stromverstärkung nicht mehr mit  $B$  bzw.  $\beta$ , sondern mit  $h_{21}$  bezeichnet.

2. Bei der Reihen-Parallel- und der Parallel-Reihen-Schaltung (Bild II-2c, d) muss der zweite Zweitor zwischen Ein- und Ausgang in der dargestellten Weise „gedreht“ werden. Prinzipiell kann die Zusammenschaltung zweier Zweitore nach Bild II-2c oder Bild II-2d auf 4 Arten erfolgen. Bild II-2f zeigt am Beispiel der Reihen-Parallel-Schaltung, wie bei einer von diesen vier Möglichkeiten der Zusammenschaltung  $\underline{U}_{1b} = 0$  erzwungen wird.

**Tabelle II-1** Zweitorgleichungen und Zusammenschaltung von zwei Zweitoren (siehe Hinweise im Text)

| Name der Parameter, Zweitorgleichungen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Art der Zusammenschaltung zweier Zweitore (siehe Bild II-2)                                                                                                | Zugehörige Parameteroperationen; Zweitor 1: Index $a$ , Zweitor 2: Index $b$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Zweitorgleichungen in Leitwertform: $\underline{Y}$ -Parameter<br>$\underline{I}_1 = \underline{Y}_{11} \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12} \cdot \underline{U}_2$<br>$\underline{I}_2 = \underline{Y}_{21} \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{22} \cdot \underline{U}_2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Eingänge parallel, Ausgänge parallel (Bild II-2a)                                                                                                          | $\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{11a} + \underline{Y}_{11b}$<br>$\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{12a} + \underline{Y}_{12b}$<br>$\underline{Y}_{21} = \underline{Y}_{21a} + \underline{Y}_{21b}$<br>$\underline{Y}_{22} = \underline{Y}_{22a} + \underline{Y}_{22b}$                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| Zweitorgleichungen in Impedanzform: $\underline{Z}$ -Parameter<br>$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \cdot \underline{I}_2$<br>$\underline{U}_2 = \underline{Z}_{21} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \cdot \underline{I}_2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Eingänge in Reihe, Ausgänge in Reihe (Bild II-2b)                                                                                                          | $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{11a} + \underline{Z}_{11b}$<br>$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{12a} + \underline{Z}_{12b}$<br>$\underline{Z}_{21} = \underline{Z}_{21a} + \underline{Z}_{21b}$<br>$\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_{22a} + \underline{Z}_{22b}$                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| Zweitorgleichungen in Reihen-Parallel- oder Hybrid-Form: $\underline{H}$ -Parameter<br>$\underline{U}_1 = \underline{H}_{11} \cdot \underline{I}_1 + \underline{H}_{12} \cdot \underline{U}_2$<br>$\underline{I}_2 = \underline{H}_{21} \cdot \underline{I}_1 + \underline{H}_{22} \cdot \underline{U}_2$<br>alternative Schreibweise: $\underline{h}$ -Parameter<br>$\underline{U}_1 = \underline{h}_{11} \cdot \underline{I}_1 + \underline{h}_{12} \cdot \underline{U}_2$<br>$\underline{I}_2 = \underline{h}_{21} \cdot \underline{I}_1 + \underline{h}_{22} \cdot \underline{U}_2$ | Eingänge in Reihe, Ausgänge parallel (Bild II-2c)<br>Achtung: Zweites Zweitor muss nach Bild II-2c am Ausgang gedreht werden. Erläuterung siehe Bild II-2f | $\underline{H}_{11} = \underline{H}_{11a} + \underline{H}_{11b}$<br>$\underline{H}_{12} = \underline{H}_{12a} + \underline{H}_{12b}$<br>$\underline{H}_{21} = \underline{H}_{21a} + \underline{H}_{21b}$<br>$\underline{H}_{22} = \underline{H}_{22a} + \underline{H}_{22b}$<br>$\underline{h}_{11} = \underline{h}_{11a} + \underline{h}_{11b}$<br>$\underline{h}_{12} = \underline{h}_{12a} + \underline{h}_{12b}$<br>$\underline{h}_{21} = \underline{h}_{21a} + \underline{h}_{21b}$<br>$\underline{h}_{22} = \underline{h}_{22a} + \underline{h}_{22b}$ |
| Zweitorgleichungen in Parallel-Reihen-Form: $\underline{C}$ -Parameter<br>$\underline{I}_1 = \underline{C}_{11} \cdot \underline{U}_1 + \underline{C}_{12} \cdot \underline{I}_2$<br>$\underline{U}_2 = \underline{C}_{21} \cdot \underline{U}_1 + \underline{C}_{22} \cdot \underline{I}_2$                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Eingänge parallel, Ausgänge in Reihe. (Bild II-2d)<br>Achtung: Zweites Zweitor muss nach Bild II-2d am Ausgang gedreht werden.                             | $\underline{C}_{11} = \underline{C}_{11a} + \underline{C}_{11b}$<br>$\underline{C}_{12} = \underline{C}_{12a} + \underline{C}_{12b}$<br>$\underline{C}_{21} = \underline{C}_{21a} + \underline{C}_{21b}$<br>$\underline{C}_{22} = \underline{C}_{22a} + \underline{C}_{22b}$                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| Zweitorgleichungen in Kettenform: $\underline{A}$ -Parameter<br>$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \cdot (-\underline{I}_2)$<br>$\underline{I}_1 = \underline{A}_{21} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \cdot (-\underline{I}_2)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Kettenschaltung (Bild II-2e)                                                                                                                               | $\begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11a} & \underline{A}_{12a} \\ \underline{A}_{21a} & \underline{A}_{22a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{A}_{11b} & \underline{A}_{12b} \\ \underline{A}_{21b} & \underline{A}_{22b} \end{bmatrix}$ Matrizenmultiplikation;<br>Index $a$ : linkes Zweitor<br>Index $b$ : rechtes Zweitor                                                                                                    |

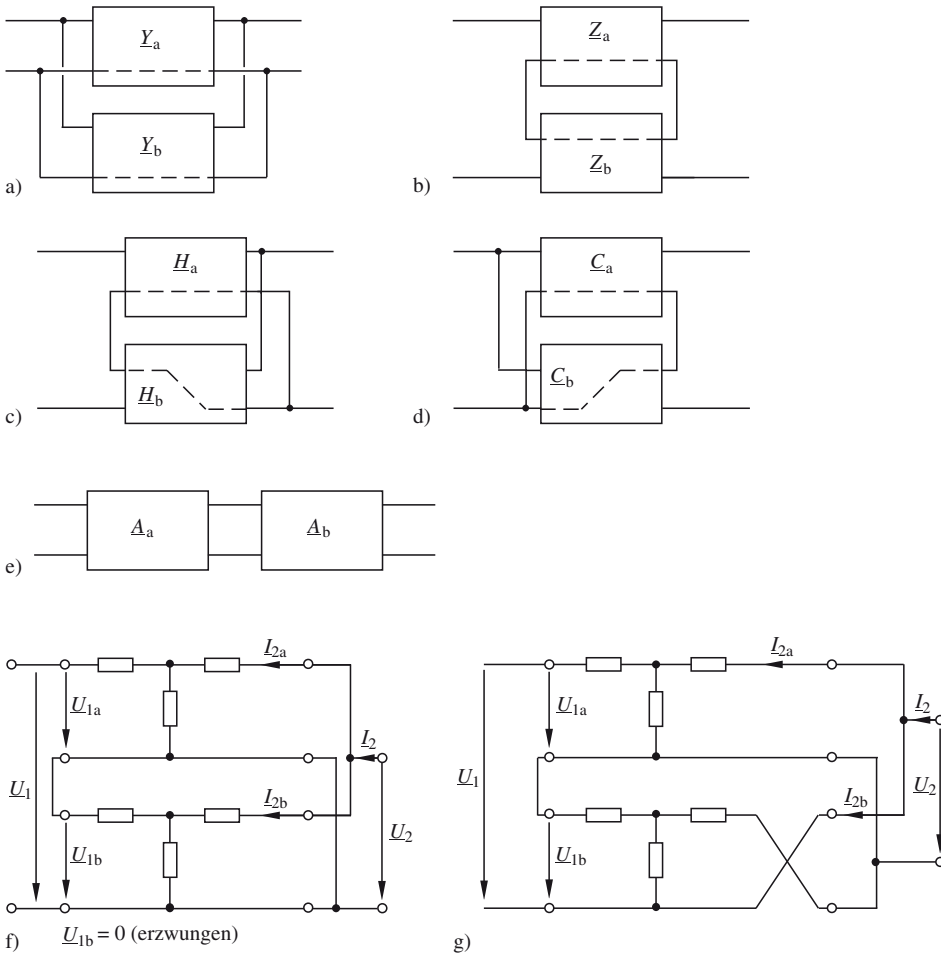


**Bild II-2** Zusammenschaltung von Zweitoren

- a) Parallel-Parallel-Schaltung
- b) Reihen-Reihen-Schaltung
- c) Reihen-Parallel-Schaltung
- d) Parallel-Reihen-Schaltung
- e) Kettenschaltung
- f) Reihen-Parallel-Schaltung (unteres Zweitor nicht gedreht)
- g) Reihen-Parallel-Schaltung (unteres Zweitor gedreht)

Auch zwei weitere, hier nicht dargestellte Möglichkeiten, führen dazu, dass eine Spannung zu Null erzwungen wird. Nur die „gedrehte“ Version von Zweitor 2 nach Bild II-2g erfüllt die Bedingungen  $U_1 = U_{1a} + U_{1b}$  für die Reihenschaltung am Eingang und  $I_2 = I_{2a} + I_{2b}$  für die Parallelschaltung am Ausgang. In analoger Weise lässt sich die Drehung für die Parallel-Reihen-Schaltung nach Bild II-2d begründen.

3. Bei der Kettenschaltung zweier Zweitoren müssen die  $A$ -Parameter des links angeordneten Zweitors auch bei der Matrizenmultiplikation links stehen.

Da zwei Gleichungen unabhängig von der Art der Parameter den Zweitor vollständig und eindeutig beschreiben, können die Parameter mit Tabelle II-2 ineinander umgerechnet werden.

### 1.3 Bestimmung der Zweitorparameter

Die Bestimmung der Zweitorparameter wird am Beispiel von  $Z_{11}$  gezeigt. In der Gleichung  $U_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2$  wird  $I_2$  durch Leerlauf am Ausgang zu Null erzwungen. Korrekterweise spricht man bei  $Z_{11}$  von der Leerlauf-Eingangsimpedanz. Dann ergibt sich  $Z_{11}$  aus dem Verhältnis  $U_1/I_1$ . Die

**Tabelle II-2** Umrechnung von Zweitorparametern

|                 | $\underline{Y}$                                                                                                                                                                                                                            | $\underline{Z}$                                                                                                                                                                                                                            | $\underline{H}$                                                                                                                                                                                                                            | $\underline{C}$                                                                                                                                                                                                                            | $\underline{A}$                                                                                                                                                                                                           |
|-----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\underline{Y}$ | $\begin{array}{cc} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{array}$                                                                                                                         | $\begin{array}{cc} \underline{Z}_{22} & -\underline{Z}_{12} \\ \det \underline{Z} & \det \underline{Z} \end{array}$<br>$\begin{array}{cc} -\underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{11} \\ \det \underline{Z} & \det \underline{Z} \end{array}$ | $\begin{array}{cc} 1 & -\underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{11} & \underline{H}_{11} \end{array}$<br>$\begin{array}{cc} \underline{H}_{21} & \det \underline{H} \\ \underline{H}_{11} & \underline{H}_{11} \end{array}$                   | $\begin{array}{cc} \det \underline{C} & \underline{C}_{12} \\ \underline{C}_{22} & \underline{C}_{22} \end{array}$<br>$\begin{array}{cc} -\underline{C}_{21} & 1 \\ \underline{C}_{22} & \underline{C}_{22} \end{array}$                   | $\begin{array}{cc} \underline{A}_{22} & -\det \underline{A} \\ \underline{A}_{12} & \underline{A}_{12} \end{array}$<br>$\begin{array}{cc} -1 & \underline{A}_{11} \\ \underline{A}_{12} & \underline{A}_{12} \end{array}$ |
| $\underline{Z}$ | $\begin{array}{cc} \underline{Y}_{22} & -\underline{Y}_{12} \\ \det \underline{Y} & \det \underline{Y} \end{array}$<br>$\begin{array}{cc} -\underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{11} \\ \det \underline{Y} & \det \underline{Y} \end{array}$ | $\begin{array}{cc} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{array}$                                                                                                                         | $\begin{array}{cc} \det \underline{H} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{22} & \underline{H}_{22} \end{array}$<br>$\begin{array}{cc} -\underline{H}_{21} & 1 \\ \underline{H}_{22} & \underline{H}_{22} \end{array}$                   | $\begin{array}{cc} 1 & -\underline{C}_{12} \\ \underline{C}_{11} & \underline{C}_{11} \end{array}$<br>$\begin{array}{cc} \underline{C}_{21} & \det \underline{C} \\ \underline{C}_{11} & \underline{C}_{11} \end{array}$                   | $\begin{array}{cc} \underline{A}_{11} & \det \underline{A} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{21} \end{array}$<br>$\begin{array}{cc} 1 & \underline{A}_{22} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{21} \end{array}$   |
| $\underline{H}$ | $\begin{array}{cc} 1 & -\underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{11} \end{array}$<br>$\begin{array}{cc} \underline{Y}_{21} & \det \underline{Y} \\ \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{11} \end{array}$                   | $\begin{array}{cc} \det \underline{Z} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{22} & \underline{Z}_{22} \end{array}$<br>$\begin{array}{cc} -\underline{Z}_{21} & 1 \\ \underline{Z}_{22} & \underline{Z}_{22} \end{array}$                   | $\begin{array}{cc} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{array}$                                                                                                                         | $\begin{array}{cc} \underline{C}_{22} & -\underline{C}_{12} \\ \det \underline{C} & \det \underline{C} \end{array}$<br>$\begin{array}{cc} -\underline{C}_{21} & \underline{C}_{11} \\ \det \underline{C} & \det \underline{C} \end{array}$ | $\begin{array}{cc} \underline{A}_{12} & \det \underline{A} \\ \underline{A}_{22} & \underline{A}_{22} \end{array}$<br>$\begin{array}{cc} -1 & \underline{A}_{21} \\ \underline{A}_{22} & \underline{A}_{22} \end{array}$  |
| $\underline{C}$ | $\begin{array}{cc} \det \underline{Y} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{22} & \underline{Y}_{22} \end{array}$<br>$\begin{array}{cc} -\underline{Y}_{21} & 1 \\ \underline{Y}_{22} & \underline{Y}_{22} \end{array}$                   | $\begin{array}{cc} 1 & -\underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{11} \end{array}$<br>$\begin{array}{cc} \underline{Z}_{21} & \det \underline{Z} \\ \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{11} \end{array}$                   | $\begin{array}{cc} \underline{H}_{22} & -\underline{H}_{12} \\ \det \underline{H} & \det \underline{H} \end{array}$<br>$\begin{array}{cc} -\underline{H}_{21} & \underline{H}_{11} \\ \det \underline{H} & \det \underline{H} \end{array}$ | $\begin{array}{cc} \underline{C}_{11} & \underline{C}_{12} \\ \underline{C}_{21} & \underline{C}_{22} \end{array}$                                                                                                                         | $\begin{array}{cc} \underline{A}_{21} & -\det \underline{A} \\ \underline{A}_{11} & \underline{A}_{11} \end{array}$<br>$\begin{array}{cc} 1 & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{11} & \underline{A}_{11} \end{array}$  |
| $\underline{A}$ | $\begin{array}{cc} -\underline{Y}_{22} & -1 \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{21} \end{array}$<br>$\begin{array}{cc} -\det \underline{Y} & -\underline{Y}_{11} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{21} \end{array}$                | $\begin{array}{cc} \underline{Z}_{11} & \det \underline{Z} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{21} \end{array}$<br>$\begin{array}{cc} 1 & \underline{Z}_{22} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{21} \end{array}$                    | $\begin{array}{cc} -\det \underline{H} & -\underline{H}_{11} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{21} \end{array}$<br>$\begin{array}{cc} -\underline{H}_{22} & -1 \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{21} \end{array}$                | $\begin{array}{cc} 1 & \underline{C}_{22} \\ \underline{C}_{21} & \underline{C}_{21} \end{array}$<br>$\begin{array}{cc} \underline{C}_{11} & \det \underline{C} \\ \underline{C}_{21} & \underline{C}_{21} \end{array}$                    | $\begin{array}{cc} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{array}$                                                                                                        |

Bestimmung von  $\underline{Z}_{12}$  wird über  $I_1 = 0$  erreicht. Diese Impedanz heißt Leerlauf-Übertragungsimpedanz. Obwohl  $\underline{Z}_{11}$  ohne Berücksichtigung von  $\underline{Z}_{12}$  ( $I_2 = 0$  gesetzt) und  $\underline{Z}_{12}$  ohne Berücksichtigung von  $\underline{Z}_{11}$  ( $I_1 = 0$  gesetzt) bestimmt worden ist, erfüllen sie die Gesamtgleichung  $\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11} \cdot I_1 + \underline{Z}_{12} \cdot I_2$ . Das liegt an der Gültigkeit des Überlagerungssatzes. (Hinweis: Eine Gleichung mit 2 Unbekannten lässt sich so *nicht* lösen.)

Allgemein gilt:  $I_2 = 0$  wird durch Leerlauf am Ausgang,  $I_1 = 0$  durch Leerlauf am Eingang erzwungen. Analog wird  $\underline{U}_2 = 0$  durch Kurzschluss am Ausgang,  $\underline{U}_1 = 0$  durch Kurzschluss am Eingang erreicht. In Tabelle II-3 sind alle Parameter dargestellt. Da Zweitore im allgemeinen auch Induktivitäten und Kapazitäten enthalten, spricht man korrekterweise von Impedanzen bzw. Admittanzen. Werden die Bezeichnungen Widerstände und Leitwerte bei den Zweitorparametern verwendet, setzt man voraus, dass der Anwender diese Bezeichnungen gegebenenfalls durch die korrekten Begriffe ersetzt.

## 1.4 Elementarzweitore

Häufig lassen sich Zweitore, aufgebaut aus einer Vielzahl von Elementen, auf wenige sogenannte *Elementarzweitore* zurückführen, deren Zweitorparameter in Tabellen abgelesen werden können und die zur Bildung des Gesamtzweitores entsprechend zu-

sammengefügt werden müssen. In Tabelle II-4a sind zunächst die Zweitorparameter der Elementarzweitore „T-Zweitor“ und „ $\pi$ -Zweitor“ dargestellt. Die anschließend aufgelisteten Zweitore „Längswiderstand“, „Querwiderstand“ und die „ $\Gamma$ -Zweitore 1 und 2“ in Tabelle II-4b sind aus Tabelle II-4a abgeleitet, indem die entsprechenden Impedanzen mit  $\underline{Z}_n = 0$  oder  $\underline{Z}_n \rightarrow \infty$  eingesetzt werden.

Die  $\underline{Z}$ -Parameter existieren beim Längswiderstand nicht, weil entweder  $I_1$  oder  $I_2$  zu Null erzwungen wird und damit der jeweils andere Strom ebenfalls Null ist ( $I_1 = I_2$ ). Dieser steht aber in der Definitionsgleichung im Nenner, sodass man einen unbestimmten Ausdruck erhält. Beim Querwiderstand führen die zu Null erzwungenen Spannungen bei den Y-Parametern zu unbestimmten Ausdrücken.

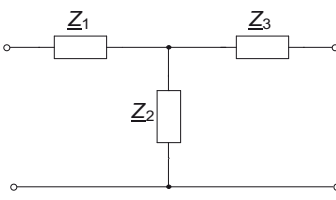
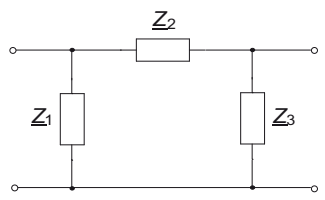
## 1.5 Betriebskenngrößen

Beim Einsatz von Zweitoren gibt es sechs Verknüpfungen zwischen den Größen  $\underline{U}_1$ ,  $\underline{U}_2$ ,  $I_1$  und  $I_2$ . Man bezeichnet sie als *Betriebskenngrößen in Vorwärtsrichtung*, wenn die Signalflossrichtung im Zweitor von links nach rechts verläuft (Bild II-3a). Entsprechend handelt es sich um *Betriebskenngrößen in Rückwärtsrichtung* bei einer Signalflossrichtung von rechts nach links (Bild II-3b). Die Lage des Zweitores bleibt dabei unverändert. Diese Kenngrößen sind in Tabelle II-5 dargestellt.

**Tabelle II-3** Definitionen und Bezeichnungen von Zweitorparametern

|                           |                                                                                                    |                                                               |
|---------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| <b><u>Z</u>-Parameter</b> | $\underline{Z}_{11} = \left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \right _{\underline{I}_2=0}$  | Leerlauf-Eingangsimpedanz                                     |
|                           | $\underline{Z}_{12} = \left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2} \right _{\underline{I}_1=0}$  | Leerlauf-Übertragungsimpedanz rückwärts                       |
|                           | $\underline{Z}_{21} = \left. \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1} \right _{\underline{I}_2=0}$  | Leerlauf-Übertragungsimpedanz vorwärts                        |
|                           | $\underline{Z}_{22} = \left. \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} \right _{\underline{I}_1=0}$  | Leerlauf-Ausgangsimpedanz                                     |
| <b><u>Y</u>-Parameter</b> | $\underline{Y}_{11} = \left. \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} \right _{\underline{U}_2=0}$  | Kurzschluss-Eingangsadmittanz                                 |
|                           | $\underline{Y}_{12} = \left. \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} \right _{\underline{U}_1=0}$  | Kurzschluss-Übertragungsadmittanz rückwärts                   |
|                           | $\underline{Y}_{21} = \left. \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1} \right _{\underline{U}_2=0}$  | Kurzschluss-Übertragungsadmittanz vorwärts                    |
|                           | $\underline{Y}_{22} = \left. \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} \right _{\underline{U}_1=0}$  | Kurzschluss-Ausgangsadmittanz                                 |
| <b><u>H</u>-Parameter</b> | $\underline{H}_{11} = \left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \right _{\underline{U}_2=0}$  | Kurzschluss-Eingangsimpedanz                                  |
|                           | $\underline{H}_{12} = \left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \right _{\underline{I}_1=0}$  | Leerlauf-Spannungsrückwirkung                                 |
|                           | $\underline{H}_{21} = \left. \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \right _{\underline{U}_2=0}$  | Kurzschluss-Stromübersetzung vorwärts                         |
|                           | $\underline{H}_{22} = \left. \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} \right _{\underline{I}_1=0}$  | Leerlauf-Ausgangsadmittanz                                    |
| <b><u>C</u>-Parameter</b> | $\underline{C}_{11} = \left. \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} \right _{\underline{I}_2=0}$  | Leerlauf-Eingangsadmittanz                                    |
|                           | $\underline{C}_{12} = \left. \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} \right _{\underline{U}_1=0}$  | Kurzschluss-Stromrückwirkung                                  |
|                           | $\underline{C}_{21} = \left. \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \right _{\underline{I}_2=0}$  | Leerlauf-Spannungsübersetzung                                 |
|                           | $\underline{C}_{22} = \left. \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} \right _{\underline{U}_1=0}$  | Kurzschluss-Ausgangsimpedanz                                  |
| <b><u>A</u>-Parameter</b> | $\underline{A}_{11} = \left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \right _{\underline{I}_2=0}$  | reziproke Leerlauf-Spannungsübersetzung vorwärts              |
|                           | $\underline{A}_{12} = \left. \frac{\underline{U}_1}{-\underline{I}_2} \right _{\underline{U}_2=0}$ | negative reziproke Kurzschluss-Übertragungsadmittanz vorwärts |
|                           | $\underline{A}_{21} = \left. \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} \right _{\underline{I}_2=0}$  | reziproke Leerlauf-Übertragungsimpedanz vorwärts              |
|                           | $\underline{A}_{22} = \left. \frac{\underline{I}_1}{-\underline{I}_2} \right _{\underline{U}_2=0}$ | negative reziproke Kurzschluss-Stromübersetzung vorwärts      |

**Tabelle II-4a** Parameter der Elementarzweitere „T-Zweitor“ und „ $\pi$ -Zweitor“

|     | T-Zweitor                                                                                                                                                                                                                 | $\pi$ -Zweitor                                                                                                                                                                              |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|     |                                                                                                                                          |                                                                                                           |
| (Y) | $Y_{11} = \frac{Z_2 + Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}$ $Y_{12} = \frac{-Z_2}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}$ $Y_{21} = \frac{-Z_2}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}$ $Y_{22} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}$ | $Y_{11} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$ $Y_{12} = -\frac{1}{Z_2}$ $Y_{21} = -\frac{1}{Z_2}$ $Y_{22} = \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}$                                                       |
| (Z) | $Z_{11} = Z_1 + Z_2$ $Z_{12} = Z_2$ $Z_{21} = Z_2$ $Z_{22} = Z_2 + Z_3$                                                                                                                                                   | $Z_{11} = \frac{Z_1 (Z_2 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$ $Z_{12} = \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$ $Z_{21} = \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$ $Z_{22} = \frac{Z_3 (Z_1 + Z_2)}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$ |
| (H) | $H_{11} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}$ $H_{12} = \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3}$ $H_{21} = \frac{-Z_2}{Z_2 + Z_3}$ $H_{22} = \frac{1}{Z_2 + Z_3}$                                                                | $H_{11} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$ $H_{12} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$ $H_{21} = \frac{-Z_1}{Z_1 + Z_2}$ $H_{22} = \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{Z_3 (Z_1 + Z_2)}$                                  |
| (C) | $C_{11} = \frac{1}{Z_1 + Z_2}$ $C_{12} = \frac{-Z_2}{Z_1 + Z_2}$ $C_{21} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$ $C_{22} = Z_3 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$                                                                              | $C_{11} = \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{Z_1 (Z_2 + Z_3)}$ $C_{12} = \frac{-Z_3}{Z_2 + Z_3}$ $C_{21} = \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3}$ $C_{22} = \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}$                                  |

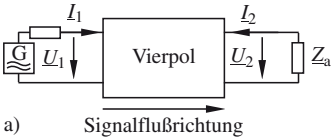
|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (A) | $\underline{A}_{11} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}$ $\underline{A}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2}$ $\underline{A}_{21} = \frac{1}{\underline{Z}_2}$ $\underline{A}_{22} = 1 + \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2}$ | $\underline{A}_{11} = 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}$ $\underline{A}_{12} = \underline{Z}_2$ $\underline{A}_{21} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}$ $\underline{A}_{22} = 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}$ |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Tabelle II-4b** Parameter von vereinfachten Elementarzweiten aus Tabelle II-4a

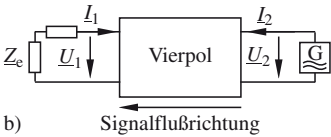
|     | Längswiderstand                                                                                                                                                                               | Querwiderstand                                                                                                                                      | $\Gamma$ -Zweig 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | $\Gamma$ -Zweig 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|     |                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| (Y) | $\underline{Y}_{11} = \frac{1}{\underline{Z}}$ $\underline{Y}_{12} = -\frac{1}{\underline{Z}}$ $\underline{Y}_{21} = -\frac{1}{\underline{Z}}$ $\underline{Y}_{22} = \frac{1}{\underline{Z}}$ | existieren nicht                                                                                                                                    | $\underline{Y}_{11} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}$ $\underline{Y}_{12} = -\frac{1}{\underline{Z}_2}$ $\underline{Y}_{21} = -\frac{1}{\underline{Z}_2}$ $\underline{Y}_{22} = \frac{1}{\underline{Z}_2}$                                                                                                      | $\underline{Y}_{11} = \frac{1}{\underline{Z}_1}$ $\underline{Y}_{12} = -\frac{1}{\underline{Z}_1}$ $\underline{Y}_{21} = -\frac{1}{\underline{Z}_1}$ $\underline{Y}_{22} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}$                                                                                                      |
| (Z) | existieren nicht                                                                                                                                                                              | $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}$ $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}$ $\underline{Z}_{21} = \underline{Z}$ $\underline{Z}_{22} = \underline{Z}$ | $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1$ $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_1$ $\underline{Z}_{21} = \underline{Z}_1$ $\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$                                                                                                                                                          | $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$ $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_2$ $\underline{Z}_{21} = \underline{Z}_2$ $\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_2$                                                                                                                                                          |
| (H) | $\underline{H}_{11} = \underline{Z}$ $\underline{H}_{12} = 1$ $\underline{H}_{21} = -1$ $\underline{H}_{22} = 0$                                                                              | $\underline{H}_{11} = 0$ $\underline{H}_{12} = 1$ $\underline{H}_{21} = -1$ $\underline{H}_{22} = \frac{1}{\underline{Z}}$                          | $\underline{H}_{11} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$ $\underline{H}_{12} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$ $\underline{H}_{21} = -\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$ $\underline{H}_{22} = \frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$ | $\underline{H}_{11} = \underline{Z}_1$ $\underline{H}_{12} = 1$ $\underline{H}_{21} = -1$ $\underline{H}_{22} = \frac{1}{\underline{Z}_2}$                                                                                                                                                                                             |
| (C) | $\underline{C}_{11} = 0$ $\underline{C}_{12} = -1$ $\underline{C}_{21} = 1$ $\underline{C}_{22} = \underline{Z}$                                                                              | $\underline{C}_{11} = \frac{1}{\underline{Z}}$ $\underline{C}_{12} = -1$ $\underline{C}_{21} = 1$ $\underline{C}_{22} = 0$                          | $\underline{C}_{11} = \frac{1}{\underline{Z}_1}$ $\underline{C}_{12} = -1$ $\underline{C}_{21} = 1$ $\underline{C}_{22} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$                                                                                                                                                                           | $\underline{C}_{11} = \frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$ $\underline{C}_{12} = -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$ $\underline{C}_{21} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$ $\underline{C}_{22} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$ |



|     |              |                        |                                |                                |
|-----|--------------|------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| (A) | $A_{11} = 1$ | $A_{11} = 1$           | $A_{11} = 1$                   | $A_{11} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2}$ |
|     | $A_{12} = Z$ | $A_{12} = 0$           | $A_{12} = Z_2$                 | $A_{12} = Z_1$                 |
|     | $A_{21} = 0$ | $A_{21} = \frac{1}{Z}$ | $A_{21} = \frac{1}{Z_1}$       | $A_{21} = \frac{1}{Z_2}$       |
|     | $A_{22} = 1$ | $A_{22} = 1$           | $A_{22} = 1 + \frac{Z_2}{Z_1}$ | $A_{22} = 1$                   |
|     |              |                        |                                |                                |



a) Signalflußrichtung



b) Signalflußrichtung

**Bild II-3** Signalflußrichtung bei Zweitoren

a) Vorwärtsrichtung

b) Rückwärtsrichtung

Da im allgemeinen Fall an den Ausgang eines in Vorwärtsrichtung betriebenen Zweitores eine Lastimpedanz  $Z_a$  nach Bild II-3 angeschlossen ist, sind die Betriebskenngrößen in Tabelle II-6 für diesen Fall aufgelistet. Für Zweitore in Rückwärtsrichtung ist der Eingang mit einer Lastimpedanz  $Z_e$  beschaltet. Die in Tabelle II-6 aufgelisteten Betriebskenngrößen vereinfachen sich dann, wenn die Lastimpedanz entweder Null ist (Kurzschluss am Ein- bzw. Ausgang, entspricht einer unendlich großen Lastadmittanz) oder unendlich groß ist (Leerlauf am Ein- bzw. Ausgang, entspricht einer Lastadmittanz Null). In Tabelle II-7 sind die entsprechenden Größen eingetragen.

**Tabelle II-5** Definitionen der Betriebskenngrößen (nach [II.1])

| Betriebskenngröße im Vorwärtsbetrieb | Definition                 |
|--------------------------------------|----------------------------|
| Eingangsadmittanz                    | $Y_{in} = \frac{I_1}{U_1}$ |
| Eingangsimpedanz                     | $Z_{in} = \frac{U_1}{I_1}$ |
| Übertragungsadmittanz vorwärts       | $Y_{üf} = \frac{I_2}{U_1}$ |
| Übertragungsimpedanz vorwärts        | $Z_{üf} = \frac{U_2}{I_1}$ |
| Spannungsübersetzung vorwärts        | $v_{üf} = \frac{U_2}{U_1}$ |
| Stromübersetzung vorwärts            | $v_{if} = \frac{I_2}{I_1}$ |

| Betriebskenngröße im Rückwärtsbetrieb | Definition                  |
|---------------------------------------|-----------------------------|
| Ausgangsadmittanz                     | $Y_{out} = \frac{I_2}{U_2}$ |
| Ausgangsimpedanz                      | $Z_{out} = \frac{U_2}{I_2}$ |
| Übertragungsadmittanz rückwärts       | $Y_{ür} = \frac{I_1}{U_2}$  |
| Übertragungsimpedanz rückwärts        | $Z_{ür} = \frac{U_1}{I_2}$  |
| Spannungsübersetzung rückwärts        | $v_{ur} = \frac{U_1}{U_2}$  |
| Stromübersetzung rückwärts            | $v_{ir} = \frac{I_1}{I_2}$  |

**Tabelle II-6** Betriebskenngrößen mit Lastadmittanz  $\underline{Y}$ 

| Betriebskenngrößen in Vorwärtsrichtung |                                                                                                                  |                                                                                                                      |                                                                                                                  |                                                                                                                      |                                                                                                                                       |
|----------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                        | $\underline{Y}$ -Parameter                                                                                       | $\underline{Z}$ -Parameter                                                                                           | $\underline{H}$ -Parameter                                                                                       | $\underline{C}$ -Parameter                                                                                           | $\underline{A}$ -Parameter                                                                                                            |
| $\underline{Y}_{in}$                   | $\frac{\det \underline{Y} + \underline{Y}_{11} \cdot \underline{Y}_a}{\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_a}$     | $\frac{1 + \underline{Z}_{22} \cdot \underline{Y}_a}{\underline{Z}_{11} + \underline{Y}_a \cdot \det \underline{Z}}$ | $\frac{\underline{H}_{22} + \underline{Y}_a}{\det \underline{H} + \underline{H}_{11} \cdot \underline{Y}_a}$     | $\frac{\underline{C}_{11} + \underline{Y}_a \cdot \det \underline{C}}{1 + \underline{C}_{22} \cdot \underline{Y}_a}$ | $\frac{\underline{A}_{21} + \underline{A}_{22} \cdot \underline{Y}_a}{\underline{A}_{11} + \underline{A}_{12} \cdot \underline{Y}_a}$ |
| $\underline{Z}_{in}$                   | $\frac{\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_a}{\det \underline{Y} + \underline{Y}_{11} \cdot \underline{Y}_a}$     | $\frac{\underline{Z}_{11} + \underline{Y}_a \cdot \det \underline{Z}}{1 + \underline{Z}_{22} \cdot \underline{Y}_a}$ | $\frac{\det \underline{H} + \underline{H}_{11} \cdot \underline{Y}_a}{\underline{H}_{22} + \underline{Y}_a}$     | $\frac{1 + \underline{C}_{22} \cdot \underline{Y}_a}{\underline{C}_{11} + \underline{Y}_a \cdot \det \underline{C}}$ | $\frac{\underline{A}_{11} + \underline{A}_{12} \cdot \underline{Y}_a}{\underline{A}_{21} + \underline{A}_{22} \cdot \underline{Y}_a}$ |
| $\underline{Y}_{if}$                   | $\frac{\underline{Y}_{21} \cdot \underline{Y}_a}{\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_a}$                          | $\frac{-\underline{Z}_{21} \cdot \underline{Y}_a}{\underline{Z}_{11} + \underline{Y}_a \cdot \det \underline{Z}}$    | $\frac{\underline{H}_{21} \cdot \underline{Y}_a}{\det \underline{H} + \underline{H}_{11} \cdot \underline{Y}_a}$ | $\frac{-\underline{C}_{21} \cdot \underline{Y}_a}{1 + \underline{C}_{22} \cdot \underline{Y}_a}$                     | $\frac{-\underline{Y}_a}{\underline{A}_{11} + \underline{A}_{12} \cdot \underline{Y}_a}$                                              |
| $\underline{Z}_{if}$                   | $\frac{-\underline{Y}_{21}}{\det \underline{Y} + \underline{Y}_{11} \cdot \underline{Y}_a}$                      | $\frac{\underline{Z}_{21}}{1 + \underline{Z}_{22} \cdot \underline{Y}_a}$                                            | $\frac{-\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{22} + \underline{Y}_a}$                                               | $\frac{\underline{C}_{21}}{\underline{C}_{11} + \underline{Y}_a \cdot \det \underline{C}}$                           | $\frac{1}{\underline{A}_{21} + \underline{A}_{22} \cdot \underline{Y}_a}$                                                             |
| $\underline{Y}_{uf}$                   | $\frac{-\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_a}$                                               | $\frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{11} + \underline{Y}_a \cdot \det \underline{Z}}$                           | $\frac{-\underline{H}_{21}}{\det \underline{H} + \underline{H}_{11} \cdot \underline{Y}_a}$                      | $\frac{\underline{C}_{21}}{1 + \underline{C}_{22} \cdot \underline{Y}_a}$                                            | $\frac{1}{\underline{A}_{11} + \underline{A}_{12} \cdot \underline{Y}_a}$                                                             |
| $\underline{Y}_{if}$                   | $\frac{\underline{Y}_{21} \cdot \underline{Y}_a}{\det \underline{Y} + \underline{Y}_{11} \cdot \underline{Y}_a}$ | $\frac{-\underline{Z}_{21} \cdot \underline{Y}_a}{1 + \underline{Z}_{22} \cdot \underline{Y}_a}$                     | $\frac{\underline{H}_{21} \cdot \underline{Y}_a}{\underline{H}_{22} + \underline{Y}_a}$                          | $\frac{-\underline{C}_{21} \cdot \underline{Y}_a}{\underline{C}_{11} + \underline{Y}_a \cdot \det \underline{C}}$    | $\frac{-\underline{Y}_a}{\underline{A}_{21} + \underline{A}_{22} \cdot \underline{Y}_a}$                                              |

| Betriebskenngrößen in Rückwärtsrichtung |                                                                                                                  |                                                                                                                      |                                                                                                                      |                                                                                                                  |                                                                                                                                       |
|-----------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                         | $\underline{Y}$ -Parameter                                                                                       | $\underline{Z}$ -Parameter                                                                                           | $\underline{H}$ -Parameter                                                                                           | $\underline{C}$ -Parameter                                                                                       | $\underline{A}$ -Parameter                                                                                                            |
| $\underline{Y}_{out}$                   | $\frac{\det \underline{Y} + \underline{Y}_{22} \cdot \underline{Y}_e}{\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_e}$     | $\frac{1 + \underline{Z}_{11} \cdot \underline{Y}_e}{\underline{Z}_{22} + \underline{Y}_e \cdot \det \underline{Z}}$ | $\frac{\underline{H}_{22} + \underline{Y}_e \cdot \det \underline{H}}{1 + \underline{H}_{11} \cdot \underline{Y}_e}$ | $\frac{\underline{C}_{11} + \underline{Y}_e}{\det \underline{C} + \underline{C}_{22} \cdot \underline{Y}_e}$     | $\frac{\underline{A}_{21} + \underline{A}_{11} \cdot \underline{Y}_e}{\underline{A}_{22} + \underline{A}_{12} \cdot \underline{Y}_e}$ |
| $\underline{Z}_{out}$                   | $\frac{\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_e}{\det \underline{Y} + \underline{Y}_{22} \cdot \underline{Y}_e}$     | $\frac{\underline{Z}_{22} + \underline{Y}_e \cdot \det \underline{Z}}{1 + \underline{Z}_{11} \cdot \underline{Y}_e}$ | $\frac{1 + \underline{H}_{11} \cdot \underline{Y}_e}{\underline{H}_{22} + \underline{Y}_e \cdot \det \underline{H}}$ | $\frac{\det \underline{C} + \underline{C}_{22} \cdot \underline{Y}_e}{\underline{C}_{11} + \underline{Y}_e}$     | $\frac{\underline{A}_{22} + \underline{A}_{12} \cdot \underline{Y}_e}{\underline{A}_{21} + \underline{A}_{11} \cdot \underline{Y}_e}$ |
| $\underline{Y}_{ir}$                    | $\frac{\underline{Y}_{12} \cdot \underline{Y}_e}{\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_e}$                          | $\frac{-\underline{Z}_{12} \cdot \underline{Y}_e}{\underline{Z}_{22} + \underline{Y}_e \cdot \det \underline{Z}}$    | $\frac{-\underline{H}_{12} \cdot \underline{Y}_e}{1 + \underline{H}_{11} \cdot \underline{Y}_e}$                     | $\frac{\underline{C}_{12} \cdot \underline{Y}_e}{\det \underline{C} + \underline{C}_{22} \cdot \underline{Y}_e}$ | $\frac{-\underline{Y}_e \cdot \det \underline{A}}{\underline{A}_{22} + \underline{A}_{12} \cdot \underline{Y}_e}$                     |
| $\underline{Z}_{ir}$                    | $\frac{-\underline{Y}_{12}}{\det \underline{Y} + \underline{Y}_{22} \cdot \underline{Y}_e}$                      | $\frac{\underline{Z}_{12}}{1 + \underline{Z}_{11} \cdot \underline{Y}_e}$                                            | $\frac{\underline{H}_{12}}{\underline{H}_{22} + \underline{Y}_e \cdot \det \underline{H}}$                           | $\frac{-\underline{C}_{12}}{\underline{C}_{11} + \underline{Y}_e}$                                               | $\frac{\det \underline{A}}{\underline{A}_{21} + \underline{A}_{11} \cdot \underline{Y}_e}$                                            |
| $\underline{Y}_{ur}$                    | $\frac{-\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_e}$                                               | $\frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{22} + \underline{Y}_e \cdot \det \underline{Z}}$                           | $\frac{\underline{H}_{12}}{1 + \underline{H}_{11} \cdot \underline{Y}_e}$                                            | $\frac{-\underline{C}_{12}}{\det \underline{C} + \underline{C}_{22} \cdot \underline{Y}_e}$                      | $\frac{\det \underline{A}}{\underline{A}_{22} + \underline{A}_{12} \cdot \underline{Y}_e}$                                            |
| $\underline{Y}_{ir}$                    | $\frac{\underline{Y}_{12} \cdot \underline{Y}_e}{\det \underline{Y} + \underline{Y}_{22} \cdot \underline{Y}_e}$ | $\frac{-\underline{Z}_{12} \cdot \underline{Y}_e}{1 + \underline{Z}_{11} \cdot \underline{Y}_e}$                     | $\frac{-\underline{H}_{12} \cdot \underline{Y}_e}{\underline{H}_{22} + \underline{Y}_e \cdot \det \underline{H}}$    | $\frac{\underline{C}_{12} \cdot \underline{Y}_e}{\underline{C}_{11} + \underline{Y}_e}$                          | $\frac{-\underline{Y}_e \cdot \det \underline{A}}{\underline{A}_{21} + \underline{A}_{11} \cdot \underline{Y}_e}$                     |

**Hinweise:**

$$\det \underline{Z} = \underline{Z}_{11} \cdot \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12} \cdot \underline{Z}_{21}$$

$$\det \underline{Y} = \underline{Y}_{11} \cdot \underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12} \cdot \underline{Y}_{21}$$

$$\det \underline{C} = \underline{C}_{11} \cdot \underline{C}_{22} - \underline{C}_{12} \cdot \underline{C}_{21}$$

$$\det \underline{H} = \underline{H}_{11} \cdot \underline{H}_{22} - \underline{H}_{12} \cdot \underline{H}_{21}$$

$$\det \underline{A} = \underline{A}_{11} \cdot \underline{A}_{22} - \underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21}$$

Es wurde die Admittanz  $\underline{Y}_a$  bzw.  $\underline{Y}_e$  an Stelle der Impedanz  $\underline{Z}_a$  bzw.  $\underline{Z}_e$  eingesetzt, weil sich dadurch eine übersichtlichere Schreibweise ergibt. Die Umrechnung geschieht über  $\underline{Y}_a = 1/\underline{Z}_a$ ;  $\underline{Y}_e = 1/\underline{Z}_e$ .

**Tabelle II-7** Betriebskenngrößen für die Sonderfälle „Kurzschluss“ und „Leerlauf“

| Betriebskenngrößen in Vorwärtsrichtung bei Leerlauf am Ausgang ( $\underline{Z}_a \rightarrow \infty$ ) |                                                  |                                                 |                                                  |                                                 |                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
|                                                                                                         | $\underline{Y}$ -Parameter                       | $\underline{Z}$ -Parameter                      | $\underline{H}$ -Parameter                       | $\underline{C}$ -Parameter                      | $\underline{A}$ -Parameter                      |
| $\underline{Y}_{in}$                                                                                    | $\frac{\det \underline{Y}}{\underline{Y}_{22}}$  | $\frac{1}{\underline{Z}_{11}}$                  | $\frac{\underline{H}_{22}}{\det \underline{H}}$  | $\underline{C}_{11}$                            | $\frac{\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{11}}$ |
| $\underline{Z}_{in}$                                                                                    | $\frac{\underline{Y}_{22}}{\det \underline{Y}}$  | $\underline{Z}_{11}$                            | $\frac{\det \underline{H}}{\underline{H}_{22}}$  | $\frac{1}{\underline{C}_{11}}$                  | $\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}}$ |
| $\underline{Y}_{üf}$                                                                                    | 0                                                | 0                                               | 0                                                | 0                                               | 0                                               |
| $\underline{Z}_{üf}$                                                                                    | $\frac{-\underline{Y}_{21}}{\det \underline{Y}}$ | $\underline{Z}_{21}$                            | $\frac{-\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{22}}$ | $\frac{\underline{C}_{21}}{\underline{C}_{11}}$ | $\frac{1}{\underline{A}_{21}}$                  |
| $\underline{Y}_{uf}$                                                                                    | $\frac{-\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{22}}$ | $\frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{11}}$ | $\frac{-\underline{H}_{21}}{\det \underline{H}}$ | $\underline{C}_{21}$                            | $\frac{1}{\underline{A}_{11}}$                  |
| $\underline{Z}_{if}$                                                                                    | 0                                                | 0                                               | 0                                                | 0                                               | 0                                               |

| Betriebskenngrößen in Rückwärtsrichtung bei Leerlauf am Eingang ( $\underline{Z}_e \rightarrow \infty$ ) |                                                  |                                                 |                                                 |                                                  |                                                 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
|                                                                                                          | $\underline{Y}$ -Parameter                       | $\underline{Z}$ -Parameter                      | $\underline{H}$ -Parameter                      | $\underline{C}$ -Parameter                       | $\underline{A}$ -Parameter                      |
| $\underline{Y}_{out}$                                                                                    | $\frac{\det \underline{Y}}{\underline{Y}_{11}}$  | $\frac{1}{\underline{Z}_{22}}$                  | $\underline{H}_{22}$                            | $\frac{\underline{C}_{11}}{\det \underline{C}}$  | $\frac{\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{22}}$ |
| $\underline{Z}_{out}$                                                                                    | $\frac{\underline{Y}_{11}}{\det \underline{Y}}$  | $\underline{Z}_{22}$                            | $\frac{1}{\underline{H}_{22}}$                  | $\frac{\det \underline{C}}{\underline{C}_{11}}$  | $\frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}}$ |
| $\underline{Y}_{ür}$                                                                                     | 0                                                | 0                                               | 0                                               | 0                                                | 0                                               |
| $\underline{Z}_{ür}$                                                                                     | $\frac{-\underline{Y}_{12}}{\det \underline{Y}}$ | $\underline{Z}_{12}$                            | $\frac{\underline{H}_{12}}{\underline{H}_{22}}$ | $\frac{-\underline{C}_{12}}{\underline{C}_{11}}$ | $\frac{\det \underline{A}}{\underline{A}_{21}}$ |
| $\underline{Y}_{ur}$                                                                                     | $\frac{-\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{11}}$ | $\frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{22}}$ | $\underline{H}_{12}$                            | $\frac{-\underline{C}_{12}}{\det \underline{C}}$ | $\frac{\det \underline{A}}{\underline{A}_{22}}$ |
| $\underline{Z}_{ir}$                                                                                     | 0                                                | 0                                               | 0                                               | 0                                                | 0                                               |

| Betriebskenngrößen in Vorwärtsrichtung bei Kurzschluss am Ausgang ( $\underline{Z}_a = 0$ ) |                                                 |                                                  |                                                 |                                                  |                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
|                                                                                             | $\underline{Y}$ -Parameter                      | $\underline{Z}$ -Parameter                       | $\underline{H}$ -Parameter                      | $\underline{C}$ -Parameter                       | $\underline{A}$ -Parameter                      |
| $\underline{Y}_{in}$                                                                        | $\underline{Y}_{11}$                            | $\frac{\underline{Z}_{22}}{\det \underline{Z}}$  | $\frac{1}{\underline{H}_{11}}$                  | $\frac{\det \underline{C}}{\underline{C}_{22}}$  | $\frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{12}}$ |
| $\underline{Z}_{in}$                                                                        | $\frac{1}{\underline{Y}_{11}}$                  | $\frac{\det \underline{Z}}{\underline{Z}_{22}}$  | $\underline{H}_{11}$                            | $\frac{\underline{C}_{22}}{\det \underline{C}}$  | $\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}}$ |
| $\underline{Y}_{üf}$                                                                        | $\underline{Y}_{21}$                            | $\frac{-\underline{Z}_{21}}{\det \underline{Z}}$ | $\frac{\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{11}}$ | $\frac{-\underline{C}_{21}}{\underline{C}_{22}}$ | $\frac{1}{\underline{A}_{12}}$                  |
| $\underline{Z}_{üf}$                                                                        | 0                                               | 0                                                | 0                                               | 0                                                | 0                                               |
| $\underline{Y}_{uf}$                                                                        | 0                                               | 0                                                | 0                                               | 0                                                | 0                                               |
| $\underline{Y}_{if}$                                                                        | $\frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11}}$ | $\frac{\det \underline{Z}}{\underline{Z}_{22}}$  | $\underline{H}_{21}$                            | $\frac{-\underline{C}_{21}}{\det \underline{C}}$ | $\frac{1}{\underline{A}_{22}}$                  |

| Betriebskenngrößen in Rückwärtsrichtung bei Kurzschluss am Eingang ( $Z_c = 0$ ) |                                                 |                                                  |                                                  |                                                 |                                                  |
|----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
|                                                                                  | $\underline{Y}$ -Parameter                      | $\underline{Z}$ -Parameter                       | $\underline{H}$ -Parameter                       | $\underline{C}$ -Parameter                      | $\underline{A}$ -Parameter                       |
| $\underline{Y}_{\text{out}}$                                                     | $\underline{Y}_{22}$                            | $\frac{\underline{Z}_{11}}{\det \underline{Z}}$  | $\frac{\det \underline{H}}{\underline{H}_{11}}$  | $\frac{1}{\underline{C}_{22}}$                  | $\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{12}}$  |
| $\underline{Z}_{\text{out}}$                                                     | $\frac{1}{\underline{Y}_{22}}$                  | $\frac{\det \underline{Z}}{\underline{Z}_{11}}$  | $\frac{\underline{H}_{11}}{\det \underline{H}}$  | $\underline{C}_{22}$                            | $\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}}$  |
| $\underline{Y}_{\text{dir}}$                                                     | $\underline{Y}_{12}$                            | $-\frac{\underline{Z}_{12}}{\det \underline{Z}}$ | $-\frac{\underline{H}_{12}}{\underline{H}_{11}}$ | $\frac{\underline{C}_{12}}{\underline{C}_{22}}$ | $-\frac{\det \underline{A}}{\underline{A}_{12}}$ |
| $\underline{Z}_{\text{dir}}$                                                     | 0                                               | 0                                                | 0                                                | 0                                               | 0                                                |
| $\underline{V}_{\text{dir}}$                                                     | 0                                               | 0                                                | 0                                                | 0                                               | 0                                                |
| $\underline{V}_{\text{ir}}$                                                      | $\frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{22}}$ | $-\frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{11}}$ | $-\frac{\underline{H}_{12}}{\det \underline{H}}$ | $\underline{C}_{12}$                            | $-\frac{\det \underline{A}}{\underline{A}_{11}}$ |

- **Beispiel II.1:** In Bild II-4 ist ein Netzwerk gezeigt, mit dem RC-Oszillatoren aufgebaut werden können. Es dient dazu, bei einer Frequenz  $f = f_0$  einen Phasenwinkel von  $180^\circ$  zwischen  $\underline{U}_1$  und  $\underline{U}_2$  zu erzeugen (Gegenphase, deshalb ist das Vorzeichen ohne Bedeutung). Die für eine Gesamtphasenverschiebung von  $360^\circ$  erforderlichen weiteren  $180^\circ$  werden mit einem Transistor bzw. einer Operationsverstärkerschaltung erreicht.

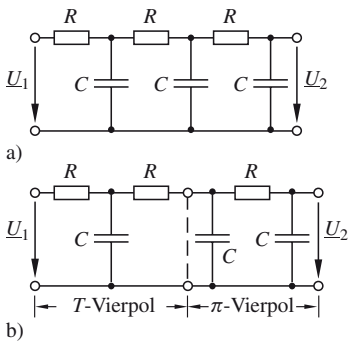


**Bild II-4** Phasenschieber-Netzwerk (zu Beispiel II.1)

a) Netzwerk

b) Zerlegung in zwei Elementar-Zweitore

Berechnet werden soll diese Frequenz in Abhängigkeit von  $R$  und  $C$  und das Verhältnis von Ausgangsspannung zu Eingangsspannung bei dieser Frequenz.

Das Netzwerk wird zerlegt in die Elementar-Zweitore „T-Zweitor“ und „ $\pi$ -Zweitor“. Da beide in Kettenschaltung zusammengeschaltet sind, werden nach Tabelle II-1 die  $\underline{A}$ -Parameter beider Zweitore benötigt. Gesucht ist  $\underline{V}_{\text{dir}}$ . Der Ausgang ist nicht belastet, sodass sich nach Tabelle II-7  $\underline{V}_{\text{dir}} = 1/\underline{A}_{11}$  ergibt.  $\underline{A}_{11}$  ist das Ergebnis der Matrixmultiplikation der  $\underline{A}$ -Parameter beider Zweitore. Da hier nur ein Parameter zu berechnen ist, genügt es, von dem links angeordneten T-Zweitor die obere Zeile, also  $\underline{A}_{11\text{TVP}}$  und  $\underline{A}_{12\text{TVP}}$  zu bestimmen, von dem rechts stehenden  $\pi$ -Zweitor die erste Spalte, also  $\underline{A}_{11\pi\text{VP}}$  und  $\underline{A}_{21\pi\text{VP}}$ . Diese Parameter werden Tabelle II-4a entnommen, in die die Bauelemente aus Bild II-4 eingesetzt werden:

$$\underline{A}_{11\text{TVP}} = 1 + Rj\omega C;$$

$$\underline{A}_{12\text{TVP}} = R + R + R^2 j\omega C$$

$$\underline{A}_{11\pi\text{VP}} = 1 + Rj\omega C;$$

$$\underline{A}_{21\pi\text{VP}} = j\omega C + j\omega C + Rj\omega Cj\omega C = 2j\omega C - \omega^2 C^2 R$$

Damit ergibt sich für  $\underline{A}_{11}$ :

$$\begin{aligned} \underline{A}_{11} &= \underline{A}_{11\text{TVP}} \cdot \underline{A}_{11\pi\text{VP}} + \underline{A}_{12\text{TVP}} \cdot \underline{A}_{21\pi\text{VP}} \\ &= (1 + j\omega RC)(1 + j\omega RC) + (2R + R^2 j\omega C)(2j\omega C - \omega^2 C^2 R) \\ &= (1 + 2j\omega RC - \omega^2 C^2 R^2 + 4j\omega CR - 2\omega^2 C^2 R^2) \\ &\quad - 2\omega^2 C^2 R^2 - j\omega^3 C^3 R^3 \\ &= 1 + 6j\omega RC - 5\omega^2 C^2 R^2 - j\omega^3 C^3 R^3 \\ &= 1 - 5\omega^2 C^2 R^2 + j\omega RC(6 - \omega^2 R^2 C^2) \end{aligned}$$

Für einen Phasenwinkel  $0^\circ$  oder  $180^\circ$  muss der Imaginärteil von  $1/\underline{A}_{11}$  und damit von  $\underline{A}_{11}$  Null sein, d.h. es muss gelten:

$$6 - \omega_0^2 R^2 C^2 = 0. \text{ Für die Frequenz folgt: } \omega_0 = \frac{\sqrt{6}}{RC}. \text{ Setzt man}$$

diesen Wert in die Gleichung für  $1/\underline{A}_{11}$  ein, ergibt sich:

$$\frac{1}{\underline{A}_{11}} \bigg|_{\omega_0} = \frac{1}{1 - 5C^2 R^2 \omega_0^2} = \frac{1}{1 - 5C^2 R^2 \left(\frac{\sqrt{6}}{RC}\right)^2} = -\frac{1}{29}$$

Da der Wert negativ ist, beträgt die Phasenverschiebung bei  $\omega_0$  zwischen Ein- und Ausgangsspannung  $180^\circ$ , die Amplitude ist am Ausgang auf  $1/29$  abgesunken.

- **Beispiel II.2:** Das Phasenschieber-Netzwerk aus Bild II-4 ist am Ausgang mit einem Widerstand  $\underline{R}_a$  belastet, Bild II-5.

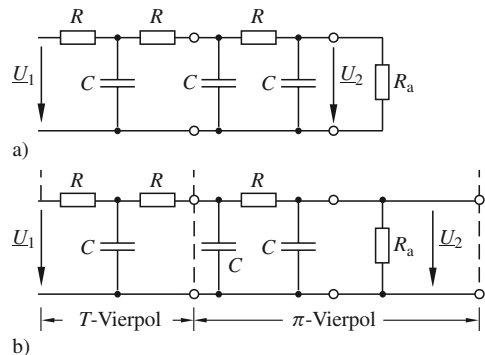


**Bild II-5** Phasenschieber-Netzwerk

(zu Beispiel II.2), am Ausgang belastet

a) Netzwerk

b) Einbeziehen von  $\underline{R}_a$  in den  $\pi$ -Zweitor

Zur Berechnung der Spannungsverstärkung vorwärts wird entweder die Formel  $\underline{U}_{af} = \frac{1}{\underline{A}_{11} + \underline{A}_{12} \cdot \underline{Y}_a}$  verwendet, oder der Widerstand  $\underline{R}_a$  wird mit dem parallel liegenden Kondensator zu-

sammengefasst zu:  $\underline{Z}_{ges} = \frac{R_a \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_a + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R_a}{1 + R_a j\omega C}$ . Dieser Wert

wird in die Formel aus Beispiel 1 an entsprechender Stelle eingesetzt:

$$\underline{A}_{11TVP} = 1 + Rj\omega C;$$

$$\underline{A}_{12TVP} = R + R + R^2 j\omega C$$

$$\underline{A}_{11\pi VP} = 1 + \frac{R}{\underline{Z}_{ges}} = \frac{\underline{Z}_{ges} + R}{\underline{Z}_{ges}};$$

$$\underline{A}_{21\pi VP} = j\omega C + \frac{1}{\underline{Z}_{ges}} + \frac{Rj\omega C}{\underline{Z}_{ges}} = \frac{\underline{Z}_{ges} j\omega C + 1 + Rj\omega C}{\underline{Z}_{ges}}$$

Nach einigen Umformungen folgt schließlich:

$$\frac{1}{\underline{A}_{11}} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R_a}{\left( R_a (1 - 5\omega^2 R^2 C^2) + R(3 - R^2 \omega^2 C^2) \right) + j\omega RC(6R_a + 4R - \omega^2 R^2 C^2 R_a)}$$

Für  $R_a \rightarrow \infty$  folgt daraus der Wert aus Beispiel 1. Der Phasenwinkel beträgt Null oder  $180^\circ$  für  $6R_a + 4R - \omega_0^2 R^2 C^2 R_a = 0$ ; d.h.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{6R_a + 4R}{R^2 C^2 R_a}} = \frac{1}{RC} \sqrt{6 + \frac{4R}{R_a}}$$

Setzt man diesen Wert ein, ergibt sich nach einiger Rechnung:

$$\frac{1}{\underline{A}_{11}} \bigg|_{\omega_0} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \bigg|_{\omega_0} = \frac{1}{-29 - 23 \frac{R}{R_a} - 4 \frac{R^2}{R_a^2}}$$

Der Wert ist negativ, demnach handelt es sich um den Phasenwinkel  $180^\circ$ . Auch hier bekommt man das Ergebnis aus Beispiel II.1 mit  $R_a \rightarrow \infty$ .

## 2 Spezielle Zweitore

In der Vermittlungstechnik (Telefon) werden Zweitore benötigt, bei denen der Signalfluss in Vorwärts- und Rückwärtsrichtung gleich sein muss. Hat ein Zweitor diese und andere besondere Eigenschaften, lassen sie sich an den Zweitorparametern ablesen.

### 2.1 Übertragungssymmetrische (reziproke) Zweitore

Ein Zweitor ist übertragungssymmetrisch (kopplungssymmetrisch, reziprok), wenn für ihn der Kirchhoffsche Umkehrungssatz gilt (Bild II-6): Bei Stromeinspeisung mit  $\underline{I}_0$  am Eingang und anschließend am Ausgang muss gelten:  $\underline{U}_1 = \underline{U}_2$ . Bei Spannungseinspeisung lautet die Bedingung:  $\underline{I}_1 = \underline{I}_2$ .

Passive Zweitore sind übertragungssymmetrisch.

■ **Beispiel II.3:** Bild II-7 zeigt einen Gamma-Zweitor, an dem die Übertragungssymmetrie gezeigt werden soll.

Der Einfachheit halber werden ohmsche Widerstände und eine Gleichspannungsquelle eingesetzt. Für die Speisung am Eingang (Bild II-7a) folgt:

$$\frac{-I_2}{I_e} = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_a};$$

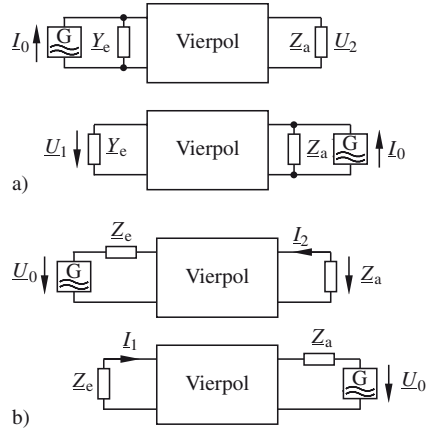


**Bild II-6** Übertragungssymmetrische Zweitore

a) Stromeinspeisung

b) Spannungseinspeisung

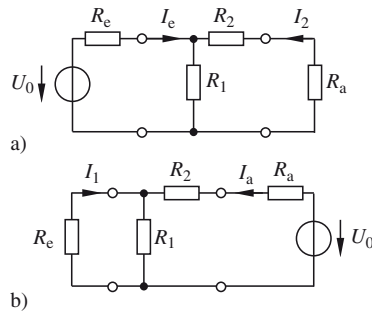


**Bild II-7** Zur Ableitung der Übertragungssymmetrie (zu Beispiel II.3)

a) Speisung am Eingang mit  $\underline{U}_0$

b) Speisung am Ausgang mit  $\underline{U}_0$

$$\begin{aligned} I_e &= \frac{U_0}{R_e + \frac{R_1(R_2 + R_a)}{R_1 + R_2 + R_a}} = \frac{U_0(R_1 + R_2 + R_a)}{(R_1 + R_2 + R_a)R_e + R_1(R_2 + R_a)}; \\ -I_2 &= \frac{U_0 \cdot R_1}{R_e(R_1 + R_2 + R_a) + R_1(R_2 + R_a)} \end{aligned}$$

In analoger Weise folgt bei Speisung am Ausgang (Bild II-7b):

$$\begin{aligned} \frac{I_1}{-I_a} &= \frac{R_1}{R_1 + R_e}; \\ I_a &= \frac{U_0}{R_a + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_e}{R_1 + R_e}} = \frac{U_0(R_1 + R_e)}{(R_1 + R_e)(R_a + R_2) + R_1 \cdot R_e}; \\ -I_1 &= \frac{U_0 \cdot R_1}{R_e(R_1 + R_2 + R_a) + R_1(R_2 + R_a)} \end{aligned}$$

Es gilt:  $I_1 = I_2$ . Damit ist das Zweitor übertragungssymmetrisch. Allgemein kann man die folgenden Bedingungen für übertragungssymmetrische Zweitore ableiten (Tabelle II-8):

**Tabelle II-8** Bedingungen für übertragungssymmetrische Zweitore

| $\underline{Y}$ -Parameter                | $\underline{Z}$ -Parameter                | $\underline{H}$ -Parameter                 | $\underline{C}$ -Parameter                 | $\underline{A}$ -Parameter |
|-------------------------------------------|-------------------------------------------|--------------------------------------------|--------------------------------------------|----------------------------|
| $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$ | $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$ | $\underline{H}_{12} = -\underline{H}_{21}$ | $\underline{C}_{12} = -\underline{C}_{21}$ | $\det \underline{A} = 1$   |

## 2.2 Widerstandssymmetrische Zweitore

Bei widerstandssymmetrischen Zweitoren sind die Eingangsimpedanz bei beliebiger Abschlussimpedanz in Vorwärtsrichtung und die Ausgangsimpedanz (Blick vom Ausgang in das Zweitor hinein) bei gleicher Abschlussimpedanz am Eingang gleich. Die Bedingungen lauten (Tabelle II-9):

Ein Beispiel für einen nahezu rückwirkungsfreien Zweitor ist ein von einer Sendeantenne ausgesandtes elektromagnetisches Feld. Senderseitig lässt sich nicht feststellen, wie viele Lastimpedanzen in Form von Empfängerantennen vorhanden sind, sofern sie sich im Fernfeld der Senderantenne befinden (siehe Kapitel IV.1).

**Tabelle II-9** Bedingungen für widerstandssymmetrische Zweitore

| $\underline{Y}$ -Parameter                | $\underline{Z}$ -Parameter                | $\underline{H}$ -Parameter | $\underline{C}$ -Parameter | $\underline{A}$ -Parameter                |
|-------------------------------------------|-------------------------------------------|----------------------------|----------------------------|-------------------------------------------|
| $\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22}$ | $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22}$ | $\det \underline{H} = 1$   | $\det \underline{C} = 1$   | $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$ |

## 2.3 Längssymmetrische Zweitore

Bei längssymmetrischen Zweitoren sind alle Betriebseigenschaften unabhängig von der Betriebsrichtung, d.h. sie sind sowohl übertragungssymmetrisch als auch widerstandssymmetrisch. Damit ergeben sich die Bedingungen für die Parameter nach Tabelle II-10:

## 3 Wellenparameter passiver Zweitore

Die Leitungstheorie ist ein Teil der Zweitortheorie und arbeitet mit Wellenparametern anstelle von Zweitorparametern. Da elektrische Leitungen als passive Zweitore übertragungssymmetrisch sind, hat man hierfür *Wellenparameter* festgelegt.

**Tabelle II-10** Bedingungen für längssymmetrische Zweitore

| $\underline{Y}$ -Parameter                | $\underline{Z}$ -Parameter                | $\underline{H}$ -Parameter                 | $\underline{C}$ -Parameter                 | $\underline{A}$ -Parameter                |
|-------------------------------------------|-------------------------------------------|--------------------------------------------|--------------------------------------------|-------------------------------------------|
| $\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22}$ | $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22}$ | $\det \underline{H} = 1$                   | $\det \underline{C} = 1$                   | $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$ |
| $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$ | $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$ | $\underline{H}_{12} = -\underline{H}_{21}$ | $\underline{C}_{12} = -\underline{C}_{21}$ | $\det \underline{A} = 1$                  |

■ **Beispiel II.4:** Der in Tabelle II-4a dargestellte T-Zweitor ist dann längssymmetrisch, wenn nach Tabelle II-10 gilt:  $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22}$  und  $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$ . Das ist der Fall, wenn gilt:  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_3$ . Dieses Ergebnis entspricht auch der Anschauung, da man bei längssymmetrischen Zweitoren nicht unterscheiden kann, ob man ihn in Vorwärts- oder Rückwärtsrichtung betreibt.

## 2.4 Rückwirkungsfreie Zweitore

Wirkt die Ausgangsgröße nicht auf den Eingang zurück, spricht man von einem rückwirkungsfreien Zweitor. Passive Zweitore besitzen diese Eigenschaft nicht; in der Praxis kann man sie nur näherungsweise erfüllen. Bei Transistoren bemüht man sich, die Rückwirkung auf den Eingang so klein wie möglich zu machen. Tabelle II-11 stellt die notwendigen Bedingungen dar.

## 3.1 Allgemeine passive Zweitore

Wird ein Zweitor in Vorwärtsrichtung betrieben und mit einer Lastimpedanz  $\underline{Z}_L$  belastet (Bild II-8a), ergibt sich am Eingang die Eingangsimpedanz  $\underline{Z}_{in}$ . Sie ist abhängig vom Zweitor und der Lastimpedanz  $\underline{Z}_L$  und lässt sich wie folgt berechnen:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \cdot \underline{I}_2 \quad (1. \text{Zweitorgleichung});$$

$$\text{Division durch } \underline{I}_1: \quad \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_{11} + \frac{\underline{Z}_{12} \cdot \underline{I}_2}{\underline{I}_1}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_{21} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \cdot \underline{I}_2 \quad (2. \text{Zweitorgleichung});$$

$$\text{Division durch } \underline{I}_2: \quad \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \underline{Z}_{21} \div \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} + \underline{Z}_{22}$$

**Tabelle II-11** Bedingungen für rückwirkungsfreie Zweitore

| $\underline{Y}$ -Parameter | $\underline{Z}$ -Parameter | $\underline{H}$ -Parameter | $\underline{C}$ -Parameter | $\underline{A}$ -Parameter |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| $\underline{Y}_{12} = 0$   | $\underline{Z}_{12} = 0$   | $\underline{H}_{12} = 0$   | $\underline{C}_{12} = 0$   | $\det \underline{A} = 0$   |

Es gilt:  $\frac{-U_2}{I_2} = Z_a$ ;  $\frac{I_1}{I_2} = (-Z_a - Z_{22}) \cdot \frac{1}{Z_{21}}$ ;

eingesetzt in die oberste Gleichung:

- **Eingangsimpedanz**

$$Z_{\text{in}} = Z_{11} - \frac{Z_{12} \cdot Z_{21}}{Z_a + Z_{22}}$$

- **Sonderfall Kurzschluss am Ausgang ( $Z_a = 0$ ):**

$$Z_{\text{in } K} = Z_{11} - \frac{Z_{12} \cdot Z_{21}}{Z_{22}} = \frac{\det Z}{Z_{22}}$$

- **Sonderfall Leerlauf am Ausgang ( $Z_a \rightarrow \infty$ ):**

$$Z_{\text{in } L} = Z_{11}$$

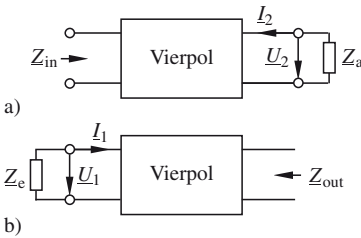


**Bild II-8** Eingangs- und Ausgangsimpedanz eines belasteten Zweitors

a)  $Z_{\text{in}}$  bei  $Z_a$  am Ausgang

b)  $Z_{\text{out}}$  bei  $Z_e$  am Eingang

In entsprechender Weise erhält man beim Betrieb in Rückwärtsrichtung und Lastimpedanz  $Z_e$  am Eingang die Ausgangsimpedanz  $Z_{\text{out}}$  (am Ausgang in das Zweitor hineingesehen):

- **Ausgangsimpedanz**

$$Z_{\text{out}} = Z_{22} - \frac{Z_{12} \cdot Z_{21}}{Z_{11} + Z_e}$$

- **Sonderfall Kurzschluss am Eingang ( $Z_e = 0$ ):**

$$Z_{\text{out } K} = Z_{22} - \frac{Z_{12} \cdot Z_{21}}{Z_{11}}$$

- **Sonderfall Leerlauf am Eingang ( $Z_e \rightarrow \infty$ ):**

$$Z_{\text{out } L} = Z_{22}$$

Durch entsprechenden Ansatz weiterer Zweitorgleichungen können die Ein- und Ausgangsimpedanzen in Abhängigkeit von den  $\underline{Y}$ -,  $\underline{C}$ -,  $\underline{H}$ - und  $\underline{A}$ -Parametern dargestellt werden. Mit den  $\underline{A}$ -Parametern ergibt sich:

- **Eingangsimpedanz**

$$Z_{\text{in}} = \frac{A_{11} \cdot Z_a + A_{12}}{A_{21} \cdot Z_a + A_{22}}$$

- **Sonderfall Kurzschluss am Ausgang ( $Z_a = 0$ ):**

$$Z_{\text{in } K} = \frac{A_{12}}{A_{22}}$$

- **Sonderfall Leerlauf am Ausgang ( $Z_a \rightarrow \infty$ ):**

$$Z_{\text{in } L} = \frac{A_{11}}{A_{21}}$$

- **Ausgangsimpedanz**

$$Z_{\text{out}} = \frac{A_{22} \cdot Z_e + A_{12}}{A_{21} \cdot Z_e + A_{11}}$$

- **Sonderfall Kurzschluss am Eingang ( $Z_e = 0$ ):**

$$Z_{\text{out } K} = \frac{A_{12}}{A_{11}}$$

- **Sonderfall Leerlauf am Eingang ( $Z_e \rightarrow \infty$ ):**

$$Z_{\text{out } L} = \frac{A_{22}}{A_{21}}$$

### 3.2 Längssymmetrische passive Zweitore

Elektrische Leitungen sind längssymmetrische Zweitore, und deshalb sind die Wellenparameter besonders für diese Zweitore von Bedeutung. Für längssymmetrische Zweitore gilt nach Tabelle II-10:  $Z_{11} = Z_{22}$ ,  $Z_{12} = Z_{21}$ ,  $A_{11} = A_{22}$ ,  $\det A = 1$ . Dann ergeben sich Eingangs- und Ausgangsimpedanz zu:

- **Eingangsimpedanz**

$$Z_{\text{in}} = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{11} + Z_a} = \frac{A_{11} \cdot Z_a + A_{12}}{A_{21} \cdot Z_a + A_{11}} \quad (\text{II.1a})$$

- **Ausgangsimpedanz**

$$Z_{\text{out}} = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{11} + Z_e} = \frac{A_{22} \cdot Z_e + A_{12}}{A_{21} \cdot Z_e + A_{22}} \quad (\text{II.1b})$$

Sie sind gleich, wenn Ein- und Ausgang mit der gleichen Impedanz abgeschlossen werden ( $Z_e = Z_a$ ). Für die Sonderfälle Kurzschluss und Leerlauf ergibt sich:

- **Eingangsimpedanz bei Kurzschluss am Ausgang ( $Z_a = 0$ ):**

$$Z_{\text{in } K} = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22}} = \frac{A_{12}}{A_{11}}$$

- **Eingangsimpedanz bei Leerlauf am Ausgang ( $Z_a \rightarrow \infty$ ):**

$$Z_{\text{in } L} = Z_{11} = \frac{A_{11}}{A_{21}}$$

- **Ausgangsimpedanz bei Kurzschluss am Eingang ( $Z_e = 0$ ):**

$$Z_{\text{out } K} = Z_{22} - \frac{Z_{12} \cdot Z_{21}}{Z_{11}} = \frac{A_{12}}{A_{22}}$$

- **Ausgangsimpedanz bei Leerlauf am Eingang ( $Z_e \rightarrow \infty$ ):**

$$Z_{\text{out } L} = Z_{22} = \frac{A_{22}}{A_{21}}$$

### 3.3 Wellenwiderstand bei passiven längssymmetrischen Zweitoren

In Analogie zu den elektrischen Leitungen bestimmt man diejenige Lastimpedanz  $Z_a$  am Ausgang, bei der die Eingangsimpedanz  $Z_{\text{in}}$  gleich  $Z_a$  ist. Dieser Wert wird **Wellenwiderstand** des Zweitors genannt. Aus Gleichung (II.1a) folgt damit:



Eingangsimpedanz

$$\underline{Z}_{\text{in}} = \underline{Z}_a = \underline{Z}_{11} - \frac{\underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_a} = \frac{\underline{A}_{11} \cdot \underline{Z}_a + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{Z}_a + \underline{A}_{11}}$$

Eingesetzt folgt:

$$\underline{Z}_{\text{in}} = \underline{Z}_{11} - \frac{\underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{\text{in}}} = \frac{\underline{A}_{11} \cdot \underline{Z}_{\text{in}} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{Z}_{\text{in}} + \underline{A}_{11}}$$

Nach  $\underline{Z}_{\text{in}}$  aufgelöst:

$$\underline{Z}_{\text{in}}^2 = \underline{Z}_{11}^2 - \underline{Z}_{12}^2 \quad \text{bzw.} \quad \underline{Z}_{\text{in}}^2 = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}$$

Die Ausdrücke  $\underline{Z}_{11}^2 - \underline{Z}_{12}^2$  bzw.  $\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}$  kann man

ersetzen durch das Produkt aus den Eingangsimpedanzen  $\underline{Z}_{\text{in}L}$  und  $\underline{Z}_{\text{in}K}$ :

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{11}^2 - \underline{Z}_{12}^2 &= \underline{Z}_{\text{in}L} \cdot \underline{Z}_{\text{in}K} \\ &= \underbrace{\underline{Z}_{\text{in}L}}_{\underline{Z}_{\text{in}L}} \cdot \underbrace{\left( \underline{Z}_{11} - \frac{\underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_{22}} \right)}_{\underline{Z}_{\text{in}K}} = \underline{Z}_{11}^2 - \underline{Z}_{12}^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}} = \underline{Z}_{\text{in}L} \cdot \underline{Z}_{\text{in}K} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{Z}_{\text{in}L}} \cdot \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{Z}_{\text{in}K}} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}$$

Damit folgt für den Wellenwiderstand eines passiven längssymmetrischen Zweitors:

$$\bullet \text{ Wellenwiderstand } \underline{Z} = \sqrt{\underline{Z}_{\text{in}L} \cdot \underline{Z}_{\text{in}K}} \quad (\text{II.2})$$

Da es sich um längssymmetrische Zweitore handelt, ist der Wellenwiderstand, vom Ausgang her gesehen, der gleiche.

### 3.4 Übertragungsmaß bei passiven längssymmetrischen Zweitoren

Die Übertragungseigenschaften eines passiven längssymmetrischen Zweitors, der mit dem Wellenwiderstand abgeschlossen ist, können durch die folgenden *Wellenübertragungsmaße* beschrieben werden:

$$\bullet \text{ Spannungsdämpfungsmaß } g_u = \ln \frac{U_1}{U_2}$$

$$\bullet \text{ Stromdämpfungsmaß } g_i = \ln \frac{I_1}{I_2}$$

$$\bullet \text{ komplexes Wellendämpfungsmaß}$$

$$g = \frac{1}{2} \cdot (g_u + g_i) = \ln \sqrt{\frac{U_1}{U_2} \cdot \frac{I_1}{I_2}} = a + jb$$

$$\bullet a \text{ Dämpfungsmaß (wahlweise mit dem Kurzzeichen Np für Neper), } b \text{ Phasenmaß}$$

Für längssymmetrische Zweitore gilt (ohne Ableitung):

$$\begin{aligned} \bullet g &= g_u = g_i = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{I_1}{I_2} \\ &= \ln(\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21}}) = a + jb \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

Die drei Wellenübertragungsmaße sind gleich.

■ **Beispiel II.5:** Bei dem längssymmetrischen Zweitor nach Bild II-9 soll das Dämpfungsmaß berechnet werden. Er ist mit dem Wellenwiderstand  $\underline{Z} = \sqrt{\underline{Z}_{\text{in}L} \cdot \underline{Z}_{\text{in}K}} = \sqrt{(R_1 + R_2) \cdot \left( R_1 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \right)} =$

$\sqrt{R_1(R_1 + 2 \cdot R_2)}$  nach Gleichung (II.2) abgeschlossen. Mit Gleichung (II.3) folgt:

$$\begin{aligned} g &= g_u = g_i = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{I_1}{I_2} = \ln(\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21}}) \\ &= \ln \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} + \sqrt{\left( 2 \cdot R_1 + \frac{R_1^2}{R_2} \right) \frac{1}{R_2}} \right) \\ &= \ln \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} + \sqrt{\frac{R_1(R_1 + 2R_2)}{R_2^2}} \right) \end{aligned}$$

Für  $R_1 = R_2 = R$  erhält man:

$$\underline{Z} = \sqrt{3 \cdot R^2} = \sqrt{3} \cdot R;$$

$$g = \ln \left( 1 + 1 + \sqrt{\frac{R^2 + 2R^2}{R^2}} \right) = \ln(2 + \sqrt{3}) = 1,32 \text{ (Np)}$$

Der Ausdruck in der Klammer von  $g$  gibt das Spannungsverhältnis  $U_1/U_2 = 3,73$  an. Bei passiven Zweitoren ist stets  $U_1 \geq U_2$  und  $I_1 \geq I_2$ , sodass sich für  $g$  ein Wert  $\geq 0$  ergibt.

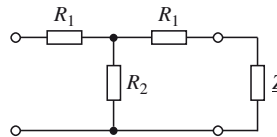


**Bild II-9** Längssymmetrischer T-Zweitor  
(zu Beispiel II.5)

## 3.5 Spezielle Zweitore

Die im folgenden behandelten Zweitore werden in der Nachrichtentechnik häufiger angewendet.

### 3.5.1 Doppel-T-Filter

Bild II-10 zeigt die Schaltung. Es handelt sich um zwei T-Zweitore, die eingangs- und ausgangsseitig parallel geschaltet sind. Die Schaltung ist am Ausgang nicht belastet. Mit Hilfe der für diese Art der Zusammenschaltung erforderlichen  $\underline{Y}$ -Parameter (Tabelle II-1) wird die Spannungsübersetzung vorwärts berechnet. Die angegebene Dimensionierung führt zu einem einfachen Ergebnis für  $|\underline{v}_{\text{uf}}|$ , das hier ohne Ableitung angegeben wird:

$$|\underline{v}_{\text{uf}}| = \frac{(1 - \omega^2 R^2 C^2)^2}{(1 - \omega^2 R^2 C^2)^2 + 16 \omega^2 R^2 C^2}. \text{ Es handelt sich}$$

um eine Bandsperre, die bei der Frequenz  $\omega_0 = 1/RC$  rechnerisch die Ausgangsspannung Null hat. In der Praxis wird man diesen Wert nicht erreichen können, da die Widerstände und Kondensatoren stets geringe Abweichungen voneinander haben. Bei entsprechender Auswahl der Bauelemente kann  $|\underline{v}_{\text{uf}}|_{\omega_0}$  aber  $< 10^{-3}$  gemacht werden.

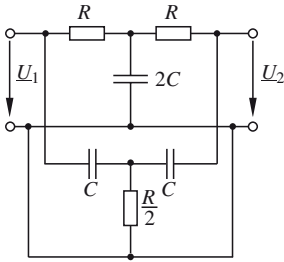
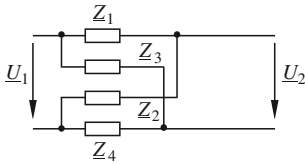


**Bild II-10**  
Doppel-T-Filter

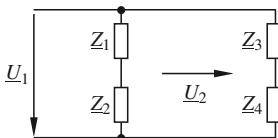
### 3.5.2 Kreuzschaltung

Die Schaltung und die  $Z$ -Parameter dieses Zweitors sind in Bild II-11a angegeben.



$$\begin{pmatrix} \frac{(Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_4)}{N} & \frac{Z_2 Z_3 - Z_1 Z_4}{N} \\ \frac{Z_2 Z_3 - Z_1 Z_4}{N} & \frac{(Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4)}{N} \end{pmatrix}$$

a)  $N = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4$



b)

**Bild II-11** Kreuzzweitor

- a) Schaltung mit  $Z$ -Parametern  
b) umgezeichnet zur *Wheatstoneschen Brückenschaltung*

Die Spannungsübersetzung vorwärts ergibt sich bei Leerlauf am Ausgang nach Tabelle II-7 zu:

$$\underline{v}_{uf} \Big|_{Z_a \rightarrow \infty} = \frac{Z_{21}}{Z_{11}}. \text{ Sie wird Null für } Z_2 \cdot Z_3 = Z_1 \cdot Z_4.$$

Diese Bedingung lässt sich bei Impedanzen dann erfüllen, wenn sie sowohl für den Real- als auch für den Imaginärteil gilt. Wird das Zweitor nach Bild II-11b umgezeichnet, erkennt man die *Wheatstonesche Brückenschaltung*. Die oben angeführte Bedingung ist die Abgleichbedingung dieser Brücke.

### 3.5.3 Frequenzkompensierter Spannungsteiler

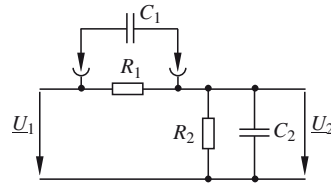


**Bild II-12** Frequenzkompensierter  
Spannungsteiler

In Bild II-12 ist der Fall gezeigt, dass mit den Widerständen  $R_1$  und  $R_2$  ein Spannungsteiler aufgebaut werden soll. Zu dem Widerstand  $R_2$  liegt eine unerwünschte Kapazität  $C_2$  parallel (Schaltungs- und Transistorkapazität wie beim Oszilloskop-Eingang:  $R_2 = 1 \text{ M}\Omega$ ;  $C_2 = 50 \text{ pF}$ ). Damit bildet das Zweitor einen Tiefpass und verfälscht den Signalverlauf des Eingangssignals. Durch Einsetzen und geeignete Dimensionierung des Kondensators  $C_1$  wird die Frequenzabhängigkeit der Spannungsteilung aufgehoben. Der Ausgang des Zweitors ist unbelastet, sodass für die Spannungsübersetzung vorwärts gilt:

$$\underline{v}_{uf} = 1 / \underline{A}_{11};$$

$$\underline{A}_{11} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2} = 1 + \frac{R_1 \cdot \frac{1}{j\omega C_1}}{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C_2}} = 1 + \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{1 + j\omega R_2 C_2}{1 + j\omega R_1 C_1}$$

$$\underline{v}_{uf} = 1 / \underline{A}_{11} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{1 + j\omega R_2 C_2}{1 + j\omega R_1 C_1}}$$

Wählt man  $R_1 \cdot C_1 = R_2 \cdot C_2$ , so kürzt sich der Ausdruck, der die Kreisfrequenz  $\omega$  enthält, heraus. Die Spannungsübersetzung ist frequenzunabhängig und

hat den Wert  $\underline{v}_{uf} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ . Mit den zwei Wider-

ständen stellt man das gewünschte Teilverhältnis ein und dimensioniert dann den Kondensator  $C_1$  zu:  $C_1 = R_2 C_2 / R_1$ .

### III Leitungen

#### 1 Leitungsbeläge und Leitungsgleichungen

Unter Leitung wird hier eine homogene Zweidrahtleitung (Doppelleitung) verstanden. Eine Leitung ist *homogen*, wenn die elektrischen Eigenschaften längs der Leitung konstant sind, was in der Regel dadurch erreicht wird, dass sich die mechanischen Abmessungen und das Material längs der Leitung nicht ändern. Zwischen den zwei Leitern liegt eine Spannung, und es fließt ein Strom in den einen Leiter hinein und im zweiten Leiter zurück. Die Anordnung der zwei Leiter zueinander kann unterschiedlich sein, siehe Bild III-1: a) Zwei Leiter parallel. Sind sie verdreht, dann befindet sich Isoliermaterial zwischen den Leitern mit  $\epsilon_r > 1$ . b) Ein Leiter als Hinleiter gegenüber Erde als Rückleiter. c) Zwei konzentrisch angeordnete Leiter, von denen der innere als Hinleiter und der äußere als Rückleiter dient (Koaxialleitung). Bild III-1d zeigt die Verläufe des elektrischen und des magnetischen Feldes eines Koaxialkabels. Beide Felder stehen, und das gilt auch für die Leiteranordnungen Bild III-1a und b, senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung der Welle. Man spricht deshalb bei der Ausbreitung von einem *TEM-Typ* (transversal elektromagnetisch).

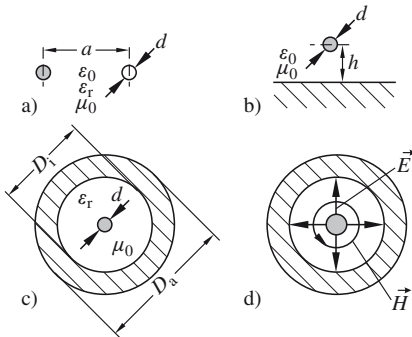


**Bild III-1** Anordnungen von Zweidrahtleitungen

a), b), c) siehe Text  
d) Feldverläufe im Koaxialkabel

Bild III-2 zeigt das Ersatzschaltbild einer elektrischen Leitung. Der im Leiter fließende Strom hat ein Magnetfeld zur Folge, das durch die Induktivität  $L'$  erfasst wird, und er verursacht an dem ohmschen Widerstand  $R'$  der Leitung einen Spannungsfall. Hin- und Rückleiter bilden einen Kondensator mit der Kapazität  $C'$ , und das zwischen den beiden Leitern vorhandene verlustbehaftete Dielektrikum ergibt den Leitwert  $G'$ .

Dabei hat man die längs der Leitung kontinuierlich verteilten Größen Induktivität, Widerstand, Kapazität und Leitwert in jeweils einem diskreten Element ( $L'$ ,

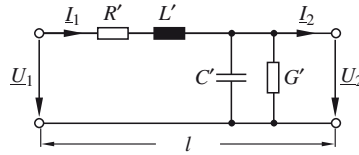


**Bild III-2** Ersatzschaltbild einer elektrischen Leitung

$R'$ ,  $C'$ ,  $G'$  in Bild III-2) zusammengefasst. Der Einfachheit halber berücksichtigt man die Elemente der Rückleitung in denen der Hinleitung und nimmt die Rückleitung als idealen Leiter an. Bei den hier betrachteten homogenen Leitungen nimmt der Wert dieser diskreten Elemente linear mit der Länge der Leitung zu. Deshalb werden sie auf eine Längeneinheit, meist 1 km, bezogen und als *Leitungsbeläge*  $L'$ ,  $R'$ ,  $C'$  und  $G'$  bezeichnet. Die Werte einer Leitung mit der Länge  $l_0$  erhält man durch Multiplikation der Leitungsbeläge mit  $l_0$ :

$$R_{l_0} = R' \cdot l_0; \quad L_{l_0} = L' \cdot l_0;$$

$$C_{l_0} = C' \cdot l_0; \quad G_{l_0} = G' \cdot l_0$$

Die Leitungsbeläge werden häufig in den Einheiten H/km,  $\Omega$ /km, F/km und S/km oder, den Werten aus der Praxis angepasst, in  $\Omega$ /km, mH/km, nF/km und  $\mu$ S/km angegeben.

Bei höheren Frequenzen ändern sich die Werte der Leitungsbeläge durch den *Skineffekt*. Tabelle III-1 enthält die Berechnungsformeln für die in Bild III-1 gezeigten Leiteranordnungen für niedrige und für hohe Frequenzen (nach [III.1]).

Es handelt sich bei den in Tabelle III-1 angegebenen Formeln um Näherungslösungen, mit denen die ungefähren Werte der Leitungsbeläge berechnet werden können. Für eine genauere Bestimmung müssen die Frequenzabhängigkeit der Leitungsbeläge und die Feldverzerrungen berücksichtigt werden. Bei dem Induktivitätsbelag wurde das Feld *in* den Leitern vernachlässigt und nur das Feld *zwischen* den Leitern eingesetzt.

Kapazitäts- und Leitwertbelag sind wie folgt verknüpft:  $G' = C' \cdot (\gamma/\epsilon)$ . Da sich zwischen den beiden Leitern Isoliermaterial befindet, wird für die elektrische Leitfähigkeit der Ausdruck  $\gamma = \gamma_{\text{isolier}}$  eingesetzt. Damit ergeben sich zwei *Kabel-Kenngrößen*:

- *Zeitkonstante für selbstständige Entladung*

$$\tau = R' \cdot C = \frac{C'}{G'} = \frac{\epsilon}{\gamma_{\text{isolier}}} \quad (\text{III.1})$$

- *Verlustfaktor*

$$\tan \delta = \frac{P}{|Q|} = \frac{U^2 \cdot G'}{U^2 \cdot \omega \cdot C'} = \frac{\gamma_{\text{isolier}}}{\omega \cdot \epsilon} \quad (\text{III.2})$$

$P$  Wirkleistung in W,  $Q$  Blindleistung in Var

**Tabelle III-1** Leitungsbeläge für verschiedene Leiteranordnungen

| Widerstandsbelag $R'$                                      |                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                            |
|------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Anordnung                                                  | niedrige Frequenzen                                                                                                                                                                          | hohe Frequenzen                                                                                                                                                                                            |
| Zweidraht-Leitung, Bild III-1a                             | $R' \approx 2 \cdot \frac{\varrho \cdot l}{A} \cdot \frac{1}{l} = 2 \cdot \frac{\varrho}{A}$ $\approx 2 \cdot \frac{l}{\gamma \cdot A} \cdot \frac{1}{l} = 2 \cdot \frac{1}{\gamma \cdot A}$ | $R' \approx 2 \cdot \frac{1}{\gamma \cdot A} \cdot \frac{d}{4} \cdot \sqrt{\pi \cdot f \cdot \gamma \cdot \mu}$ <p>für <math>\frac{d}{4} \cdot \sqrt{\pi \cdot f \cdot \gamma \cdot \mu} \gg 1</math></p>  |
| Eindraht-Leitung, Erde als idealer Rückleiter, Bild III-1b | $R' \approx \frac{\varrho}{A}$ $\approx \frac{1}{\gamma \cdot A}$                                                                                                                            | $R' \approx \frac{1}{\gamma \cdot A} \cdot \frac{d}{4} \cdot \sqrt{\pi \cdot f \cdot \gamma \cdot \mu}$ <p>für <math>\frac{d}{4} \cdot \sqrt{\pi \cdot f \cdot \gamma \cdot \mu} \gg 1</math></p>          |
| Koaxial-Leitung, Bild III-1c                               | $R' \approx \frac{1}{\gamma \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4}} + \frac{1}{\gamma \cdot \pi \cdot \frac{D_a^2 - D_i^2}{4}}$                                                                       | $R' \approx \frac{\sqrt{\pi \cdot f \cdot \gamma \cdot \mu}}{2 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot \frac{d}{2}} + \frac{\sqrt{\pi \cdot f \cdot \gamma \cdot \mu}}{2 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot \frac{D_a}{2}}$ |
| Induktivitätsbelag $L'$                                    |                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                            |
| Zweidraht-Leitung, Bild III-1a                             | $L' \approx \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \ln \frac{2 \cdot a}{d}$                                                                                                                                 | $L' \approx 2,3 \cdot \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \ln \frac{2 \cdot a}{d}$                                                                                                                                     |
| Eindraht-Leitung, Erde als idealer Rückleiter, Bild III-1b | $L' \approx \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{4 \cdot h}{d}$                                                                                                                         | $L' \approx 1,15 \cdot \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \ln \frac{4 \cdot h}{d}$                                                                                                                                    |
| Koaxial-Leitung, Bild III-1c                               | $L' \approx \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{d}{D_i}$                                                                                                                               | $L' \approx \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{d}{D_i}$                                                                                                                                             |
| Kapazitätsbelag $C'$                                       |                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                            |
| Zweidraht-Leitung, Bild III-1a                             | $C' \approx \frac{\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}{\ln \frac{2 \cdot a}{d}}$                                                                                                     | $C' \approx \frac{\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}{\ln \frac{2 \cdot a}{d}}$                                                                                                                   |
| Eindraht-Leitung, Erde als idealer Rückleiter, Bild III-1b | $C' \approx \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0}{\ln \frac{4 \cdot h}{d}}$                                                                                                                 | $C' \approx \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0}{\ln \frac{4 \cdot h}{d}}$                                                                                                                               |
| Koaxial-Leitung, Bild III-1c                               | $C' \approx \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}{\ln \frac{D_i}{d}}$                                                                                                   | $C' \approx \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}{\ln \frac{D_i}{d}}$                                                                                                                 |
| Leitwertbelag (Ableitungsbelag) $G'$                       |                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                            |
| Zweidraht-Leitung, Bild III-1a                             | $G' \approx \frac{\pi \cdot \gamma}{\ln \frac{2 \cdot a}{d}}$                                                                                                                                | $G' \approx \frac{\pi \cdot \gamma}{\ln \frac{2 \cdot a}{d}}$                                                                                                                                              |
| Eindraht-Leitung, Erde als idealer Rückleiter, Bild III-1b | $G' \approx \frac{2 \cdot \pi \cdot \gamma}{\ln \frac{4 \cdot h}{d}}$                                                                                                                        | $G' \approx \frac{2 \cdot \pi \cdot \gamma}{\ln \frac{4 \cdot h}{d}}$                                                                                                                                      |
| Koaxial-Leitung, Bild III-1c                               | $G' \approx \frac{2 \cdot \pi \cdot \gamma}{\ln \frac{D_i}{d}}$                                                                                                                              | $G' \approx \frac{2 \cdot \pi \cdot \gamma}{\ln \frac{D_i}{d}}$                                                                                                                                            |

**Bedeutung der Formelzeichen**

|                   |                                                                                             |
|-------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\varrho$         | spezifischer elektrischer Widerstand in $\Omega \cdot \text{m}$                             |
| $\gamma$          | elektrische Leitfähigkeit in $1/(\Omega \cdot \text{m})$ ; $\gamma = 1/\varrho$             |
| $A$               | Fläche des Leiters in $\text{m}^2$                                                          |
| $f$               | Frequenz in Hz                                                                              |
| $\varepsilon_0$   | elektrische Feldkonstante $\approx 8,86 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$         |
| $\mu_0$           | magnetische Feldkonstante $\approx 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$   |
| $\varepsilon_r$   | Permittivitätszahl (Dielektrizitätszahl), materialabhängig                                  |
| $\mu_r$           | Permeabilitätszahl, materialabhängig                                                        |
| $\varepsilon$     | Permittivität (Dielektrizitätskonstante), $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$ |
| $\mu$             | Permeabilität, $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$                                                    |
| $d, a, h, D, D_a$ | siehe Bild III-1                                                                            |

Setzt man in Bild III-2 nicht die diskreten Elemente ein, sondern die längs der Leitung kontinuierlich vorhandenen Leitungsbeläge, führt die Berechnung dieses Vierpols auf die *Leitungsgleichungen* in Form eines Systems von partiellen Differenzialgleichungen:

• **Leitungsgleichungen:**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = R' \cdot G' \cdot u + (R' \cdot C' + L' \cdot G') \frac{\partial u}{\partial t} + L' \cdot C' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{III.3a})$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = R' \cdot G' \cdot i + (R' \cdot C' + L' \cdot G') \frac{\partial i}{\partial t} + L' \cdot C' \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \quad (\text{III.3b})$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist für *beliebige* Verläufe von  $u(t)$  und  $i(t)$  bei Leitungen, bei denen alle vier Leitungsbeläge *nicht Null* sind, sehr umfangreich. In der Praxis sind häufig die nachfolgend aufgeführten Voraussetzungen entweder ganz oder wenigstens näherungsweise erfüllt, sodass man zu einfachen und überschaubaren Lösungen des Gleichungssystems kommt:

1. Spannung und Strom haben sinusförmigen Verlauf; die Leitungsbeläge können beliebig sein (Kapitel III.2).
2. Widerstands- und Leitwertbelag werden zu Null angenommen. Dann spricht man von einer *verlustlosen Leitung*. Spannungs- und Stromverlauf können beliebig sein (Kapitel III.4).

## 2 Leitung mit sinusförmigen Spannungen und Strömen

Für sinusförmige Spannungen und Ströme lässt sich eine einfache Lösung der Differentialgleichungen (III.3a, b) angeben.

### 2.1 Allgemeine Lösung

Die allgemeine Lösung lautet:

$$u(t, x) = \underbrace{\hat{u}_1 \cdot e^{-\alpha x} \cdot \cos(\omega t + \varphi_1 - \beta x)}_{u_h} + \underbrace{\hat{u}_2 \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\omega t + \varphi_2 + \beta x)}_{u_r} \quad (\text{III.4a})$$

$$i(t, x) = \underbrace{\hat{i}_1 \cdot e^{-\alpha x} \cdot \cos(\omega t + \varphi_1 - \beta x)}_{i_h} + \underbrace{\hat{i}_2 \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\omega t + \varphi_2 + \beta x)}_{i_r} \quad (\text{III.4b})$$

$\varphi_1$  beliebiger Anfangswinkel von  $\hat{u}$  und  $\hat{i}$ , wird im folgenden zu Null gesetzt;  $x$  Längenkoordinate der Leitung:  $x = 0$  Leitungsanfang,  $x = l$  Leitungsende;  $\alpha$  Dämpfungskoeffizient;  $\beta$  Phasenkoeffizient (siehe Gleichung (III.6));  $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{i}_1, \hat{i}_2$  Integrationskonstanten, durch Randbedingungen zu bestimmen (siehe Gleichungen (III.9a, b, III.10a, b))

Bestimmt man die vier Konstanten  $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{i}_1, \hat{i}_2$  in Gleichung (III.4a, b) so, dass sie z.B. Spannung und Strom am Anfang der Leitung ( $x = 0$ , siehe Gleichung (III.9a, b)) vorgeben, kann man an jedem Ort der Leitung zu jedem Zeitpunkt den Wert von Spannung und Strom berechnen. Beide Verläufe bestehen aus zwei Anteilen: Einer hinlaufenden Welle  $u_h$  bzw.  $i_h$  mit abnehmender Amplitude in Richtung Leitungsende und einer zurücklaufenden Welle  $u_r$  bzw.  $i_r$  mit abnehmender Amplitude in Richtung Leitungsanfang (Erklärung für die rücklaufende Welle siehe Kapitel III.3.1 und III.4.1).

### 2.2 Wellenwiderstand

Bildet man an beliebigen Orten längs der Leitung zu beliebigen Zeitpunkten den Quotienten aus Spannung und Strom der hinlaufenden *oder* rücklaufenden

Welle, ergibt sich ein konstanter Wert, der mit *Wellenwiderstand*  $Z$  bezeichnet wird und sich mit den Leitungsbelägen berechnen lässt:

- *Wellenwiderstand (allgemeine Leitung)*

$$Z = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \quad (\text{III.5})$$

### 2.3 Ausbreitungskoeffizient

Die in Gleichung (III.4a, b) auftretenden Größen  $\alpha$  und  $\beta$  ergeben sich aus der Lösung der Differenzialgleichungen und sind mit den Leitungsbelägen verknüpft:

- *Ausbreitungskoeffizient*

$$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L') \cdot (G' + j\omega C')} = \alpha + j\beta \quad (\text{III.6})$$

(Schreibweise  $\gamma$  anstatt  $\underline{\gamma}$  gewählt.)

- $\alpha$  Dämpfungskoeffizient
- $\beta$  Phasenkoeffizient

Der in Gleichung (III.6) auftretende Dämpfungskoeffizient  $\alpha$  ist der Realteil, der Phasenkoeffizient  $\beta$  der Imaginärteil des Ausbreitungskoeffizienten  $\gamma$ .

### 2.4 Verlustlose Leitung

Bei einer verlustlosen Leitung gilt:  $R' = G' = 0$ , und Wellenwiderstand (Gleichung (III.5)) und Ausbreitungskoeffizient  $\gamma$  (Gleichung (III.6)) berechnen sich zu:

- *Wellenwiderstand*  $Z_{VL} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$  (III.7)

- *Ausbreitungskoeffizient*

$$\gamma_{VL} = \sqrt{-\omega^2 L' C'} = j\omega \sqrt{L' C'} = j\beta; \quad \alpha = 0 \quad (\text{III.8})$$

Weitere Eigenschaften der verlustlosen Leitung werden im Kapitel III.4 behandelt.

### 2.5 Lösung mit Zeigerdarstellung

In der Praxis interessiert weniger der zeitliche Verlauf als vielmehr die Amplitude längs der Leitung. Man wählt deshalb eine Lösungsdarstellung mit Zeigern:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_1 \cdot e^{-\gamma x} + \underline{U}_2 \cdot e^{\gamma x}$$

$$\underline{I}(x) = \frac{1}{Z} (\underline{U}_1 \cdot e^{-\gamma x} + \underline{U}_2 \cdot e^{\gamma x})$$

$\underline{U}_1$ ;  $\underline{U}_2$ : Integrationskonstanten, durch Randbedingungen bestimmbar,  $Z$  Wellenwiderstand,  $\gamma$  siehe Gleichung (III.6)

Auch hier bestehen Spannungs- und Stromverlauf aus einer hinlaufenden und einer rücklaufenden Welle. Der in Gleichung (III.4a, b) auftretende Dämpfungskoeffizient  $\alpha$  ist der Realteil, der Phasenkoeffizient  $\beta$  der Imaginärteil des Ausbreitungskoeffizienten  $\gamma$

(siehe Gleichung (III.6)). Gibt man sich am Leitungsanfang ( $x = 0$ , Index „a“) die Spannung  $\underline{U}_a$  und den Strom  $\underline{I}_a$  vor, so kann man die Integrationskonstanten berechnen:

- *Bedingungen am Leitungsanfang vorgegeben* ( $x = 0$ ,  $\underline{U}_a$ ,  $\underline{I}_a$ ):

$$\underline{U}_a = \underline{U}_1 + \underline{U}_2;$$

$$\underline{I}_a = \frac{1}{Z} (\underline{U}_1 - \underline{U}_2) \Rightarrow \underline{U}_1 = \frac{\underline{U}_a + Z \cdot \underline{I}_a}{2};$$

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_a - Z \cdot \underline{I}_a}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{U}(x) = \underbrace{\frac{\underline{U}_a + Z \cdot \underline{I}_a}{2} \cdot e^{-\gamma x}}_{\underline{U}_h} + \underbrace{\frac{\underline{U}_a - Z \cdot \underline{I}_a}{2} \cdot e^{\gamma x}}_{\underline{U}_r} \quad (\text{III.9a})$$

$$\Rightarrow \underline{I}(x) = \underbrace{\frac{1}{Z} \cdot \left( \frac{\underline{U}_a + Z \cdot \underline{I}_a}{2} \right) \cdot e^{-\gamma x}}_{\underline{I}_h} - \underbrace{\frac{1}{Z} \cdot \left( \frac{\underline{U}_a - Z \cdot \underline{I}_a}{2} \right) \cdot e^{\gamma x}}_{\underline{I}_r} \quad (\text{III.9b})$$

$\underline{U}_a$ ,  $\underline{I}_a$  Spannung bzw. Strom am Anfang der Leitung ( $x = 0$ );  $Z$  Wellenwiderstand der Leitung; Index „h“: hinlaufende (auf das Leitungsende zulaufende) Welle, Index „r“: rücklaufende (vom Leitungsende zum -anfang zurücklaufende) Welle

In gleicher Weise kann man Spannung und Strom am Ende der Leitung ( $x = l$ , Index „e“) vorgeben. Das führt zu den folgenden Gleichungen:

- *Bedingungen am Leitungsende vorgegeben* ( $x = l$ ,  $\underline{U}_e$ ,  $\underline{I}_e$ ):

$$\underline{U}(x=l) = \underline{U}_e = \underline{U}_1 \cdot e^{-\gamma l} + \underline{U}_2 \cdot e^{\gamma l}$$

$$\underline{I}(x=l) = \underline{I}_e = \frac{1}{Z} \cdot (\underline{U}_1 \cdot e^{-\gamma l} - \underline{U}_2 \cdot e^{\gamma l})$$

$$\Rightarrow \underline{U}(x) = \underbrace{\frac{\underline{U}_e + Z \cdot \underline{I}_e}{2} \cdot e^{\gamma(l-x)}}_{\underline{U}_h} + \underbrace{\frac{\underline{U}_e - Z \cdot \underline{I}_e}{2} \cdot e^{-\gamma(l-x)}}_{\underline{U}_r} \quad (\text{III.10a})$$

$$\Rightarrow \underline{I}(x) = \underbrace{\frac{1}{Z} \cdot \left( \frac{\underline{U}_e + Z \cdot \underline{I}_e}{2} \right) \cdot e^{\gamma(l-x)}}_{\underline{I}_h} - \underbrace{\frac{1}{Z} \cdot \left( \frac{\underline{U}_e - Z \cdot \underline{I}_e}{2} \right) \cdot e^{-\gamma(l-x)}}_{\underline{I}_r} \quad (\text{III.10b})$$

$\underline{U}_e$ ,  $\underline{I}_e$  Spannung bzw. Strom am Ende der Leitung ( $x = l$ );  $Z$  Wellenwiderstand der Leitung, Index „h“: hinlaufende (auf das Leitungsende zulaufende) Welle, Index „r“: rücklaufende (vom Leitungsende zum -anfang zurücklaufende) Welle

Die Gleichungen (III.9a, b und III.10a, b) werden auch als *physikalische Form der Leitungsgleichungen* bezeichnet.

## 2.6 Unendlich lange Leitung

Für  $l \rightarrow \infty$  verschwindet in Gleichung (III.9a, b) die rücklaufende Welle, und es bleibt für die Verläufe von Strom und Spannung längs der Leitung:

$$\underline{U}(x) = \underbrace{\frac{\underline{U}_a + \underline{Z} \cdot \underline{I}_a}{2}}_{\underline{U}_h} \cdot e^{-\gamma x} = \underbrace{\underline{U}_a}_{\underline{U}_h} \cdot e^{-\gamma x} \quad \text{mit} \quad \underline{I}_a = \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}} \quad (\text{III.11a})$$

$$\underline{I}(x) = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\left( \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}} + \underline{I}_a \right)}_{\underline{I}_h} \cdot e^{-\gamma x} = \underbrace{\left( \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}} \right)}_{\underline{I}_h} \cdot e^{-\gamma x}$$

$$\text{mit} \quad \underline{I}_a = \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}} \quad (\text{III.11b})$$

$\underline{U}_a$ ,  $\underline{I}_a$  Spannung bzw. Strom am Anfang der Leitung ( $x = 0$ ),  $\underline{Z}$  Wellenwiderstand

## 2.7 Anpassung

Ein für die Praxis interessanter Fall ist der, dass am Ende einer *endlich langen Leitung* eine Impedanz  $\underline{Z}_e$  mit dem gleichen Wert wie der Wellenwiderstand  $\underline{Z}$  der Leitung angeschlossen ist (Bild III-3):

- **Anpassung**  $\underline{Z}_e = \underline{Z}$

Dann gilt am Ende der Leitung:  $\underline{I}_e = \underline{U}_e / \underline{Z}_e$ . Diese Bedingung gilt sowohl für das Leitungsende (aber noch in der Leitung) als auch für die Lastimpedanz  $\underline{Z}_e$ . Nach Gleichung (III.9a, b) verschwindet die rücklaufende Welle. Dieser Fall wird *Anpassung* genannt und hat sehr große Bedeutung bei der Signalübertragung auf verlustlosen Leitungen. Auch am Leitungseingang spricht man von Anpassung, wenn der Innenwiderstand (Impedanz) des Generators gleich dem Wellenwiderstand der Leitung ist (Bild III-3b). Die Bedeutung der Anpassung am Ein- und Ausgang einer Leitung wird bei der Ausbreitung von Wanderwellen auf einer Leitung (Kapitel III.4.2) gezeigt.

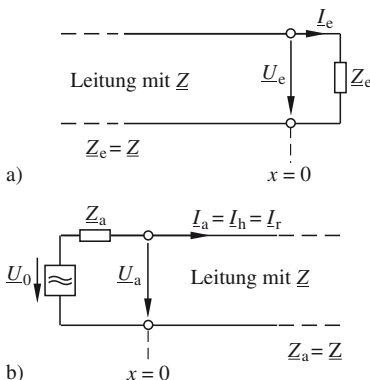


**Bild III-3** Anpassung

- a) am Ausgang
- b) am Eingang einer Leitung

## 2.8 Phasengeschwindigkeit, Gruppengeschwindigkeit

Bei der Ausbreitung einer Welle auf der Leitung (hinlaufende *oder* zurücklaufende Welle betrachtet) findet man die gleiche Phasenlage nach Gleichung (III.4a, b) bei konstant gehaltener Zeit nach  $x_0 \cdot \beta = 2 \cdot \pi$  wieder. Andererseits ergibt sich an einem festen Ort die gleiche Phasenlage nach der Periodendauer  $T = 1/f$ . Ein Vergleich liefert:

$$\beta \cdot x_0 = 2 \cdot \pi = \omega \cdot T; \quad \Rightarrow v = \frac{x_0}{T} = \frac{\omega}{\beta}$$

- **Phasengeschwindigkeit**  $v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{\beta} \quad (\text{III.12})$

Mit dieser Geschwindigkeit breitet sich eine Welle auf der Leitung aus.

Die mittlere Leistung dagegen breitet sich auf der Leitung mit der

- **Gruppengeschwindigkeit**  $v_{gr} = \frac{d\omega}{d\beta} \quad (\text{III.13})$

aus. Ist die Phasengeschwindigkeit unabhängig von der Frequenz, sind Phasen- und Gruppengeschwindigkeit gleich:  $\omega = v \cdot \beta$  (aus Gleichung (III.12)).

Daraus folgt:  $\frac{d\omega}{d\beta} = v = v_{gr}$  (siehe auch Kapitel III.4,

Verlustlose Leitung). Man spricht von *Dispersion*, wenn Phasen- und Gruppengeschwindigkeit *nicht* übereinstimmen:

- **Dispersion**  $v \neq v_{gr}$

■ **Beispiel III.1:** Von einer verlustlosen Fernsprechleitung sind gegeben:  $L' = 2,2 \text{ mH/km}$ ;  $C' = 6 \text{ nF/km}$ . Die Frequenz beträgt  $1 \text{ kHz}$ . Daraus berechnen sich folgende Größen:

$$\begin{aligned} \underline{Z} = \underline{Z}_{vl} &= \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \sqrt{\frac{2,2 \cdot 10^{-3} \text{ V} \cdot \text{s} \cdot \text{V} \cdot \text{km}}{\text{A} \cdot \text{km} \cdot 6 \cdot \text{A} \cdot \text{s} \cdot 10^{-9}}} \\ &= \sqrt{\frac{2,2}{6} \cdot 10^6} \Omega = 606 \Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_{vl} = \sqrt{j\omega L' j\omega C'} = \sqrt{-\omega^2 L' C'} = j\omega \sqrt{L' C'} \\ &= j2 \cdot \pi \cdot 10^3 \frac{1}{\text{s}} \sqrt{2,2 \cdot 6 \cdot 10^{-12} \frac{\text{s}}{\text{km}}} = j \frac{2,28}{\text{km}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha = 0; \quad \beta = \frac{2,28}{\text{km}}$$

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{\beta} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 10^3 \cdot \text{km}}{\text{s} \cdot 2,28} = 2,75 \cdot 10^3 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

## 3 Leitung mit sinusförmigen Spannungen und Strömen und beliebiger Abschlussimpedanz $\underline{Z}_e$

### 3.1 Reflexionsfaktor, Übertragungsfaktor

Schließt man eine endlich lange Leitung am Ende mit einer beliebigen Impedanz  $\underline{Z}_e$  ab, so gilt bei  $x = l$ :  $\underline{U}_e = \underline{Z}_e \cdot \underline{I}_e$ . In Gleichung (III.10a) eingesetzt, erhält man:



$$\underline{U}(x) = \underbrace{\frac{\underline{Z}_e + \underline{Z}}{2} \cdot \underline{I}_e \cdot e^{\gamma(l-x)}}_{\underline{U}_h} + \underbrace{\frac{\underline{Z}_e - \underline{Z}}{2} \cdot \underline{I}_e \cdot e^{-\gamma(l-x)}}_{\underline{U}_r}$$

$\underline{Z}_e$  am Ende der Leitung angeschlossene Impedanz,  $\underline{Z}$  Wellenwiderstand der Leitung

Das Verhältnis von zurücklaufender Welle zu vorlaufender Welle ist:

$$\frac{\underline{U}_r}{\underline{U}_h} = \frac{\underline{Z}_e - \underline{Z}}{\underline{Z}_e + \underline{Z}} \cdot e^{-2\gamma(l-x)} \quad (\text{III.14})$$

Dieses Verhältnis *am Ende* der Leitung nennt man **Reflexionsfaktor**  $\underline{r}$ :

● **Reflexionsfaktor**

$$r = \left. \frac{\underline{U}_r}{\underline{U}_h} \right|_{x=l} = \frac{\underline{Z}_e - \underline{Z}}{\underline{Z}_e + \underline{Z}} = \frac{\underline{Z}_e}{\underline{Z}} - 1 = \frac{\underline{z} - 1}{\underline{z} + 1} \quad (\text{III.15})$$

$$\text{mit } \frac{\underline{Z}_e}{\underline{Z}} = \underline{z}$$

$\underline{Z}_e$  am Ende der Leitung angeschlossene Impedanz;  $\underline{Z}$  Wellenwiderstand der Leitung

Die Darstellung „2“ wird der Darstellung „1“ vorgezogen. Für das entsprechende Verhältnis der Ströme ergibt sich der gleiche Ausdruck. Am *Leitungsende* gelten die zwei Beziehungen:

$$1) \quad \underline{U}_e / \underline{I}_e = \underline{Z} \quad (\text{III.16a})$$

(noch innerhalb der Leitung gemäß Definition von  $\underline{Z}$  nach Kapitel III.2.2),

$$2) \quad \underline{U}_e / \underline{I}_e = \underline{Z}_e \quad (\text{Ohmsches Gesetz für } \underline{Z}_e) \quad (\text{III.16b})$$

Erst durch Einführen einer rücklaufenden Welle können beide Bedingungen erfüllt werden. Mit Gleichung (III.15) lässt sich auch die Amplitude der in die Impedanz  $\underline{Z}_e$  „hineinlaufenden“ Welle  $\underline{U}_{h2}$  berechnen: Ansatz:

$$\underline{U}_{h1} + \underline{U}_{r1} = \underline{U}_{h2}; \quad \text{mit } \underline{U}_{r1} = \underline{U}_{h1} \frac{\underline{Z}_e - \underline{Z}}{\underline{Z}_e + \underline{Z}} \quad \text{folgt:}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{h2} &= \underline{U}_{h1} + \underline{U}_{h1} \frac{\underline{Z}_e - \underline{Z}}{\underline{Z}_e + \underline{Z}} = \underline{U}_{h1} \left( 1 + \frac{\underline{Z}_e - \underline{Z}}{\underline{Z}_e + \underline{Z}} \right) \\ &= \underline{U}_{h1} \frac{2\underline{Z}_e}{\underline{Z}_e + \underline{Z}} = \underline{U}_{h1} \cdot \ddot{u}_u \end{aligned}$$

$$\text{in analoger Weise: } \underline{I}_{h2} = \underline{I}_{h1} \frac{2\underline{Z}}{\underline{Z}_e + \underline{Z}} = \underline{I}_{h1} \cdot \ddot{u}_i$$

● **Spannungsübertragungsfaktor**

$$\ddot{u}_u = \frac{2\underline{Z}_e}{\underline{Z}_e + \underline{Z}} \quad (\text{III.17a})$$

● **Stromübertragungsfaktor**

$$\ddot{u}_i = \frac{2\underline{Z}}{\underline{Z}_e + \underline{Z}} \quad (\text{III.17b})$$

$\underline{U}_{h1}, \underline{I}_{h1}$  vom Generator auf das Leitungsende zulaufende Welle;  $\underline{U}_{r1}, \underline{I}_{r1}$  in Richtung Leitungsanfang reflektierte Welle;  $\underline{U}_{h2}, \underline{I}_{h2}$  in die Impedanz  $\underline{Z}_e$  hineinlaufende Welle;  $\underline{Z}_e$  Impedanz am Ende der Leitung;  $\underline{Z}$  Wellenwiderstand der Leitung

Bild III-4 zeigt hin- und rücklaufende Welle der Spannung zu verschiedenen Zeitpunkten, wenn am Leitungsende Kurzschluss (a) oder Fehlanpassung (b) herrscht. Bei Kurzschluss hat die rücklaufende Welle stets die entgegengesetzt gleich große Amplitude wie die hinlaufende Welle, weil nur so die Bedingung erfüllbar ist, dass die Spannung am Ausgang wegen des Kurzschlusses zu jedem Zeitpunkt Null ist. Auch bei Fehlanpassung ermöglicht die rücklaufende Welle, dass die genannten zwei Bedingungen (Gleichung III.16a, b) erfüllt werden können.

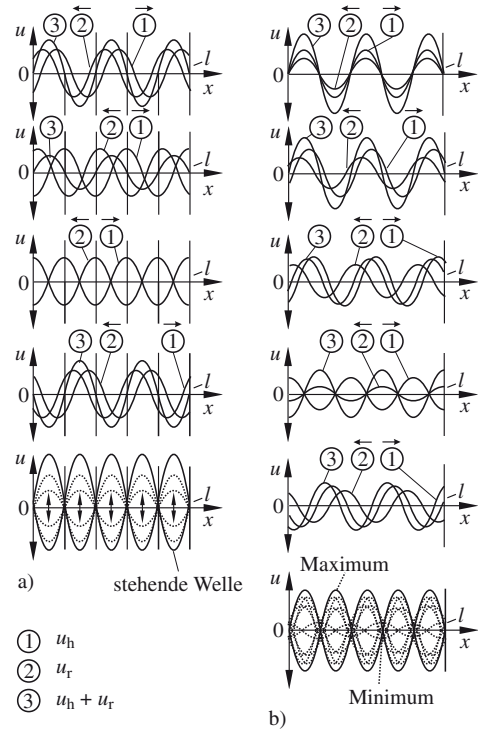


**Bild III-4** Hin- und rücklaufende Welle am Ausgang  
a) Kurzschluss  
b) Fehlanpassung

Bisher wurde am Ende der Leitung eine diskrete Impedanz  $\underline{Z}_e$  eingesetzt. Dort kann aber auch eine zweite Leitung mit dem Wellenwiderstand  $\underline{Z}_{e1}$  angeschlossen werden (Stoßstelle zweier Leitungen). Die Berechnung geschieht mit den angegebenen Formeln, indem  $\underline{Z}_e$  durch  $\underline{Z}_{e1}$  ersetzt wird.

### 3.2 Eingangsimpedanz

Die Gleichungen (III.10a, b) werden umgeformt, und es wird von der Beziehung

$$\sinh \gamma(l-x) = \frac{e^{\gamma(l-x)} - e^{-\gamma(l-x)}}{2};$$

$$\cosh \gamma(l-x) = \frac{e^{\gamma(l-x)} + e^{-\gamma(l-x)}}{2};$$

$$\tanh \gamma(l-x) = \frac{\sinh \gamma(l-x)}{\cosh \gamma(l-x)} = \frac{e^{\gamma(l-x)} - e^{-\gamma(l-x)}}{e^{\gamma(l-x)} + e^{-\gamma(l-x)}}$$

Gebrauch gemacht. Dann können die Leitungsgleichungen in der *mathematischen Form* dargestellt werden:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_e \cdot \cosh \gamma(l-x) + \underline{Z} \cdot \underline{I}_e \cdot \sinh \gamma(l-x)$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_e \cdot \cosh \gamma(l-x) + \frac{\underline{U}_e}{\underline{Z}} \cdot \sinh \gamma(l-x) \quad (\text{III.18})$$

Benutzt man weiterhin

$$\underline{Z}_a = \frac{\underline{U}_a}{\underline{I}_a}; \quad \underline{Z}_e = \frac{\underline{U}_e}{\underline{I}_e};$$

$$\underline{U}(x=0) = \underline{U}_a = \underline{U}_e \cdot \cosh \gamma l + \underline{Z} \cdot \underline{I}_e \cdot \sinh \gamma l$$

$$\underline{I}(x=0) = \underline{I}_a = \underline{I}_e \cdot \cosh \gamma l + \frac{\underline{U}_e}{\underline{Z}} \cdot \sinh \gamma l$$

folgt:

- *Eingangsimpedanz am Anfang einer beliebig langen Leitung:*

$$\underline{Z}_a = \underline{Z} \cdot \frac{\underline{Z}_e + \underline{Z} \cdot \tanh \gamma l}{\underline{Z} + \underline{Z}_e \cdot \tanh \gamma l} \quad (\text{III.19})$$

$\underline{Z}_e$  am Leitungsende angeschlossene Impedanz;  $\underline{Z}$  Wellenwiderstand der Leitung

Da die Funktion  $\tanh x$  für  $x > 3$  nahezu 1 ist, hat eine hinreichend lange Leitung, d.h.  $\gamma \cdot l > 3$ , eine Eingangsimpedanz, die, unabhängig von der Impedanz am Leitungsende, näherungsweise gleich dem Wellenwiderstand der Leitung ist.

- *Eingangsimpedanz am Anfang einer langen Leitung:*

$$\underline{Z}_a \approx \underline{Z} \quad \text{für} \quad \gamma \cdot l > 3 \quad (\text{III.20})$$

$\underline{Z}$  Wellenwiderstand der Leitung

### 3.3 Verzerrungsfreie Leitung

Bei dieser Leitung sind Dämpfungskoeffizient und Phasengeschwindigkeit unabhängig von der Frequenz. Die Bedingung lautet:

$$\bullet \text{ Verzerrungsfreie Leitung: } \frac{R'}{L'} = \frac{G'}{C'}$$

$$\Rightarrow \alpha = R' \sqrt{\frac{C'}{L'}}; \quad \underline{Z} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}; \quad \beta = \omega \sqrt{L'C'} \quad (\text{III.21})$$

Damit werden Signale unabhängig von der Frequenz gedämpft und verzögert. Ein beliebiges Signal ändert also nicht seine Kurvenform. Es tritt am Leitungsende lediglich mit geringerer Amplitude und zeitverzögert auf.

## 3.4 Leitung als Vierpol

### 3.4.1 Allgemeine Ersatzschaltung

Häufig liegen Leitungen gegebener Länge  $l$  vor, bei denen ein Generator ein Signal in den Eingang einspeist und bei denen nur das Signal am Ende der Leitung interessiert. Man betrachtet die Leitung deshalb als Vierpol und wendet die Vierpolgesetze an. Aus den Gleichungen (III.18) kann man die  $\underline{A}$ -Parameter ableiten:

$$(\underline{A}) = \begin{pmatrix} \cosh \gamma l & \underline{Z} \cdot \sinh \gamma l \\ \frac{\sinh \gamma l}{\underline{Z}} & \cosh \gamma l \end{pmatrix} \quad (\text{III.22})$$

Es gilt:  $\det A = \cosh^2 \gamma l - \sinh^2 \gamma l = 1$ ;  $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$ . Der Vierpol „Leitung“ ist damit widerstands- und übertragungssymmetrisch, was sich unmittelbar aus der Anschauung bestätigen lässt (Kapitel II.2.1 und II.2.2). Es sind nur zwei Kenngrößen zur Beschreibung erforderlich: der Wellenwiderstand  $\underline{Z}$  und das Produkt aus dem Ausbreitungskoeffizienten  $\gamma$  und der Leitungslänge  $l$ . Gleichung (III.19) stimmt mit dem Ausdruck für die Eingangsimpedanz eines am Ausgang belasteten Vierpols überein, siehe Tabelle II-6. Bild III-5 stellt die Leitung als Elementarvierpol dar.

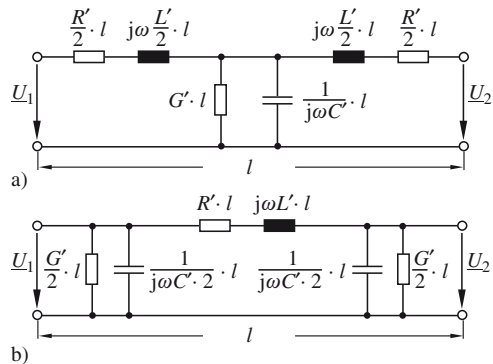


**Bild III-5** Leitung als Vierpol

- a) T-Vierpol
- b)  $\pi$ -Vierpol

Vergleicht man Gleichung (III.22) mit den entsprechenden Matrizen des T- und  $\pi$ -Vierpols (Tabelle II.4), lässt sich eine elektrische Leitung der Länge  $l$  als Vierpol darstellen. Es gelten folgende Beziehungen:

$\pi$ -Vierpol:

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = \cosh \gamma l = 1 + (R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C) \cdot \frac{l}{2}$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{Z} \cdot \sinh \gamma l = R + j\omega L$$

$$\begin{aligned}\underline{A}_{21} &= \frac{\sinh \gamma l}{\underline{Z}} = (G + j\omega C) + (R + j\omega L) \\ &\quad \times (G + j\omega C)^2 \cdot \frac{1}{4} \\ &= (G + j\omega C) \cdot \left( 1 + \frac{(R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C)}{4} \right) \quad (\text{III.23a})\end{aligned}$$

T-Vierpol:

$$\begin{aligned}\underline{A}_{11} &= \underline{A}_{22} = \cosh \gamma l = 1 + (R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C) \cdot \frac{1}{2} \\ \underline{A}_{12} &= \underline{Z} \cdot \sinh \gamma l \\ &= (R + j\omega L) + (G + j\omega C) \cdot (R + j\omega L)^2 \cdot \frac{1}{4} \\ &= (R + j\omega L) \cdot \left( 1 + \frac{(G + j\omega C) \cdot (R + j\omega L)}{4} \right) \\ \underline{A}_{21} &= \frac{\sinh \gamma l}{\underline{Z}} = G + j\omega C \quad (\text{III.23b})\end{aligned}$$

$\underline{Z}$  Wellenwiderstand der Leitung

Weiterhin gilt für Gleichung (III.23a, b):  $R = R' \cdot l$ ;  $L = L' \cdot l$ ;  $C = C' \cdot l$ ;  $G = G' \cdot l$ .

Vergleicht man die  $\underline{A}$ -Parameter beider Vierpole mit gleichem Index miteinander, fällt auf, dass  $\underline{A}_{12}$  und  $\underline{A}_{21}$  nicht übereinstimmen. Das ist die Folge davon, dass die *homogene Leitung* durch *diskrete Elemente* nachgebildet worden ist. Man sieht, dass das nur bedingt zulässig ist.

Durch Umformen der entsprechenden Gleichung (III.23a, b) und Zerlegung in Real- und Imaginärteil können die Elemente des  $\pi$ - bzw. T-Vierpols aus dem Wellenwiderstand  $\underline{Z}$  und  $\gamma l$  bestimmt werden:

$\pi$ -Vierpol:

$$R + j\omega L = \underline{Z} \cdot \sinh(\gamma l),$$

$$G + j\omega C = \frac{2}{\underline{Z}} \cdot \tanh\left(\frac{\gamma l}{2}\right)$$

T-Vierpol:

$$R + j\omega L = 2 \cdot \underline{Z} \cdot \tanh\left(\frac{\gamma l}{2}\right),$$

$$G + j\omega C = \frac{1}{\underline{Z}} \cdot \sinh(\gamma l) \quad (\text{III.24})$$

Beide Vierpole erfassen die Leitung, wie oben begründet, nur näherungsweise.

### 3.4.2 Elektrisch kurze Leitung

Gilt für eine Leitung  $|\gamma \cdot l| \ll 1$ , können in Gleichung (III.18) bzw. (III.22) Näherungen eingesetzt werden:

$$\sinh(\gamma \cdot l) \approx \gamma \cdot l,$$

$$\cosh(\gamma \cdot l) \approx 1 + \frac{1}{2}(\gamma \cdot l)^2 \quad \text{für } |\gamma \cdot l| \ll 1 \quad (\text{III.25})$$

Damit ergeben sich die Elementarvierpole nach Bild III-5. Das sind aber auch die Ersatzschaltungen, die für

die Ableitung der Leitungsgleichungen (III.3a, b) verwendet wurden und bei denen die Leitungslängen infinitesimal klein waren. Demnach darf das Ersatzschaltbild nach Bild III-5 nur dann verwendet werden, wenn die Bedingung nach Gleichung (III.25) erfüllt ist. Bei einer elektrisch kurzen Leitung ist längs der Leitung zu einem beliebig angenommenen Zeitpunkt überall die gleiche Spannung und der gleiche Strom vorhanden.

## 4 Verlustlose Leitung

### 4.1 Eigenschaften

Eine Leitung ist verlustlos, wenn gilt:  $R' = G' = 0$ . Damit folgen die Eigenschaften der Leitung zu:

- Verlustlose Leitung:  $\alpha_{vL} = 0 \Rightarrow$

$$\underline{Z}_{vL} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}; \quad \beta_{vL} = \omega \sqrt{L'C'};$$

$$v_{vL} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} \quad (\text{III.26})$$

Sowohl der Wellenwiderstand  $\underline{Z}_{vL}$  als auch die Phasengeschwindigkeit  $v_{vL}$  sind frequenzunabhängig. Der Dämpfungskoeffizient ist erwartungsgemäß Null, der Wellenwiderstand  $\underline{Z}_{vL}$  ist reell. Die Lösung der Differentialgleichung (III.3a) lautet damit:

- Lösung der Wellengleichung:

$$u(x, t) = u(x \pm v \cdot t) \quad (\text{III.27})$$

Die sich ausbreitenden Wellen heißen *Wanderwellen* und haben die Eigenschaft, dass beliebige Signalverläufe bei der Ausbreitung in der Leitung weder in der Amplitude noch in der Signalform geändert werden. Das gilt aber nur, wenn die hinlaufende bzw. rücklaufende Welle für sich betrachtet wird. Bei Reflexionen am Leitungsanfang oder -ende gibt es Signalverfälschungen durch Überlagerungen, siehe Kapitel III.4.2 und Beispiel III.2.

Die rücklaufende Welle lässt sich anschaulich erklären: Der Ausgang der Leitung sei offen. Da weder in der Leitung noch im Widerstand am Ausgang Leistung verbraucht wird, fließt die vom Generator zum Ausgang transportierte Leistung als rücklaufende Welle wieder zum Generator zurück.

- *Verlustarme Leitung*: Auch wenn die Bedingung  $R' = G' = 0$  in der Praxis nicht erfüllt ist, kann man doch häufig eine Leitung als „nahezu verlustlos“ ansehen, wenn gilt:  $\omega L' \gg R'$ ;  $\omega C' \gg G'$ . Sie wird dann als *verlustarme* Leitung bezeichnet.

### 4.2 Wanderwellen bei Reflexion am Leitungsein- und -ausgang

Bild III-6a zeigt eine Anordnung, bei der zum Zeitpunkt  $t = 0$  der Schalter geschlossen wird. Es gilt:  $R_i \neq Z \neq R_e$ ,  $u_a$  ist nach der Spannungsteilerregel:

$$u_a = U_0 \cdot \frac{Z}{R_i + Z} = u_{h1}^{(1)}$$

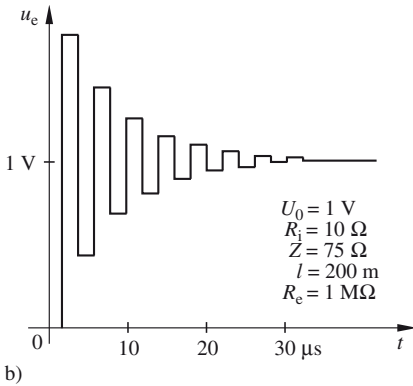
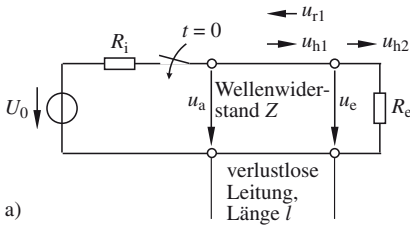


Bild III-6 Reflexion

a) Modell

b) Beispiel

Eine Welle mit dieser Amplitude breitet sich auf der Leitung in Richtung Leitungsende aus und erreicht es nach der Laufzeit  $T$ . Am Leitungsende muss gelten:

$$u_{h1} + u_{r1} = u_{h2};$$

$$u_{r1} = u_{h1} \cdot \frac{R_e - Z}{R_e + Z} \quad (\text{mit Gleichung (III.15)})$$

$$u_{h2} = u_{h1} \cdot \frac{2R_e}{R_e + Z} \quad (\text{mit Gleichung (III.17a)})$$

$u_{h1}$  auf das Leitungsende zulaufende Welle

$u_{r1}$  in Richtung Leitungsanfang reflektierte Welle

$u_{h2}$  in den Widerstand  $R_e$  hineinlaufende Welle

$R_e$  Widerstand am Ende der Leitung

$Z$  Wellenwiderstand der Leitung (reell, da verlustlose Leitung)

Für  $T < t < 3T$  ist die Spannung an  $R_e$  gleich

$$u_{h2} = \frac{Z}{R_i + Z} \cdot \frac{2R_e}{R_e + Z} \cdot U_0. \text{ Die rücklaufende Welle}$$

$u_{r1}$  wird nach  $2T$  am Leitungsanfang ebenfalls teilweise reflektiert, die Amplitude ist:

$$u_{h1}^{(2)} = u_{r1}^{(1)} \cdot \frac{R_i - Z}{R_i + Z} = \frac{R_e - Z}{R_e + Z} \cdot \frac{R_i - Z}{R_i + Z} \cdot \frac{Z}{R_i + Z} \cdot U_0$$

Erreicht diese Welle nach  $3T$  das Leitungsende, gehen davon

$$u_{h2}^{(2)} \cdot \ddot{u}_u = \frac{2R_e}{R_e + Z} \cdot \frac{R_e - Z}{R_e + Z} \cdot \frac{R_i - Z}{R_i + Z} \cdot \frac{Z}{R_i + Z} \cdot U_0$$

in den Widerstand  $R_e$  und addieren sich zu der bereits seit  $T$  vorhandenen Spannung  $u_{h2}^{(1)}$ . Für  $3T < t < 5T$  ist die Spannung an  $R_e$ :

$$u_{h2}^{(1)} + u_{h2}^{(2)} = \frac{Z}{R_i + Z} \cdot \frac{2R_e}{R_e + Z} \cdot U_0 + \frac{Z}{R_i + Z} \cdot \frac{R_e - Z}{R_e + Z} \cdot \frac{R_i - Z}{R_i + Z} \cdot \frac{2R_e}{R_e + Z} \cdot U_0$$

Für  $5T < t < 7T$  folgt für die Spannung am Ende der Leitung

$$u_{h2}^{(1)} + u_{h2}^{(2)} + u_{h2}^{(3)} = \frac{Z}{R_i + Z} \cdot \frac{2R_e}{R_e + Z} \cdot U_0 + \frac{Z}{R_i + Z} \cdot \frac{R_e - Z}{R_e + Z} \cdot \frac{R_i - Z}{R_i + Z} \cdot \frac{2R_e}{R_e + Z} \cdot U_0$$

$$u_{h2}^{(1)} + u_{h2}^{(2)} + u_{h2}^{(3)} = \left( \frac{Z}{R_i + Z} \cdot \frac{2R_e}{R_e + Z} \cdot U_0 \right) \times \left( 1 + \frac{R_e - Z}{R_e + Z} \cdot \frac{R_i - Z}{R_i + Z} + \left[ \frac{R_e - Z}{R_e + Z} \cdot \frac{R_i - Z}{R_i + Z} \right]^2 \right)$$

Auf diese Weise kann man den Spannungsverlauf am Ende der Leitung berechnen.

■ **Beispiel III.2:** Ein Spannungssprung von 0 auf 1 V, den ein Generator mit dem Innenwiderstand  $R_i = 10 \text{ } \Omega$  erzeugt, wird über eine 200 m lange Messleitung (Koaxialkabel) mit dem Wellenwiderstand  $Z = 75 \text{ } \Omega$  auf den Eingang eines Oszilloskopes mit dem Eingangswiderstand  $R_e = 1 \text{ M}\Omega$  gegeben. Bild III-6b zeigt den dargestellten Verlauf. Es ist danach sogar möglich, dass die Spannung am Ausgang der Leitung zeitweise über dem stationären Endwert liegt.

### 4.3 Elektrisch lange Leitung

Die im Kapitel 4.2, Wanderwellen, und Bild III-6b dargestellten Mehrfachreflexionen am Ein- und Ausgang der Leitung bei Fehlanpassung treten nur dann störend in Erscheinung, wenn die Leitung „*elektrisch lang*“ ist. Die Bedingung lautet:

● *Elektrisch lange Leitung:*

$$\frac{l}{\lambda} > 0,01 \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{v}{f} \quad (\text{III.28})$$

$l$  Länge der Leitung in m;  $v$  Phasengeschwindigkeit in m/s (Gleichung (III.26));  $f$  Signalfrequenz in Hz

Dabei wurden die Gleichungen (III.6, III.12 und III.25) verwendet:

$$|\gamma \cdot l| > 0,1$$

$$|\gamma \cdot l| = |j \cdot \beta \cdot l| = \frac{\omega \cdot l}{v} \Rightarrow \frac{2 \cdot \pi \cdot f \cdot l}{v} > 0,1 \Rightarrow \frac{f \cdot l}{v} > \frac{0,1}{2\pi}$$

$$\text{oder} \quad \frac{f \cdot l}{v} > 0,01$$

Alternativ spricht man von *elektrisch kurzer Leitung*:

- **Elektrisch kurze Leitung:**

$$\frac{l}{\lambda} < 0,01 \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{v}{f} \quad (\text{III.29})$$

$l$  Länge der Leitung in m;  $v$  Phasengeschwindigkeit in m/s (Gleichung (III.26));  $f$  Signalfrequenz in Hz

Anschaulich bedeutet eine elektrisch lange Leitung, dass zu einem beliebig angenommenen Zeitpunkt die Spannungs- und Stromverteilung längs der Leitung nicht mehr konstant ist.

■ **Beispiel III.3:** Zur Darstellung von unbekannten Spannungsverläufen auf dem Oszilloskopschirm werden Koaxialkabel als Signalleitung verwendet. Ein solches Kabel hat häufig eine Länge von 2 m und eine Phasengeschwindigkeit  $v = 200\,000$  km/s. Die Signalfrequenz soll 1 MHz betragen (zur Vereinfachung zunächst sinusförmiges Signal angenommen). Dann ergibt sich mit Gleichung (III.28):  $l \cdot f \cdot v = ((2\text{ m}) \cdot (10^6\text{ s}) / (2 \cdot 10^8\text{ m/s})) = 10^{-2}$ . Diese Leitung befindet sich im Übergangsbereich zwischen elektrisch kurzer und elektrisch langer Leitung. Ist das Signal nicht sinusförmig, was häufig der Fall ist, gilt für die Oberschwingungen, dass die Leitung elektrisch lang ist. Es kommt zu Signalverfälschungen, sodass bei Frequenzen im MHz-Bereich mit Anpassung gearbeitet werden sollte.

#### 4.4 Leitung als Transformator

Der Wellenwiderstand einer verlustlosen Leitung ist reell (Gleichung (III.26)). Dann geht Gleichung (III.19) mit den Zusammenhängen

$$\tanh(\alpha \pm j\beta) = \frac{\sinh(2\alpha) \pm j \cdot \sin(2\beta)}{\cosh(2\alpha) + \cos(2\beta)},$$

$$\sin(2\beta) = 2 \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\beta),$$

$$\cos(2\beta) = 2 \cdot \cos^2(\beta) - 1, \quad \sinh(0) = 0,$$

$$\cosh(0) = 1 \quad \text{und} \quad \alpha = 0$$

über in:

- **Eingangsimpedanz am Anfang der Leitung:**

$$\underline{Z}_a = \underline{Z} \cdot \frac{\underline{Z}_e + j \cdot \underline{Z} \cdot \tan \beta l}{\underline{Z} + j \cdot \underline{Z}_e \cdot \tan \beta l} \quad (\text{III.30})$$

$\underline{Z}_e$  am Leitungsende angeschlossene Impedanz;  $\underline{Z}$  Wellenwiderstand der Leitung

Wählt man die Leitungslänge  $l$  zu  $\lambda/4$  ( $\Rightarrow \beta \cdot l = \pi/2$ ) bzw.  $\lambda/2$  ( $\Rightarrow \beta \cdot l = \pi$ ), folgt daraus für die Eingangsimpedanz am Anfang der Leitung:

- $\underline{Z}_a|_{\beta l = \pi/2} = \frac{\underline{Z}^2}{\underline{Z}_e}; \quad \lambda/4\text{-Transformator}$
- $\underline{Z}_a|_{\beta l = \pi} = \underline{Z}_e; \quad \lambda/2\text{-Transformator} (\text{III.31})$

Ist der Wellenwiderstand  $\underline{Z} = \sqrt{\underline{Z}_a \cdot \underline{Z}_e}$ , kann beim  $\lambda/4$ -Transformator jeder Leitungsabschluss in jede andere Impedanz  $\underline{Z}_a$  transformiert werden. Beim  $\lambda/2$ -Transformator erhält man am Eingang die am Ende der Leitung angeschlossene Impedanz  $\underline{Z}_e$ , und zwar unabhängig von den Leitungseigenschaften.

#### 4.5 Stehende Wellen

Betreibt man eine verlustlose Leitung am Ende im Leerlauf oder im Kurzschluss, ist der Reflexionsfaktor nach Gleichung (III.15) +1 für den Leerlauf- bzw. -1 für den Kurzschlussfall. Spannung bzw. Strom am Ausgang werden zu Null erzwungen, sodass Strom- und Spannungsmaximum (oder entsprechende andere Werte) entlang der Leitung ortsfest sind. Beide haben eine Phasenverschiebung von  $90^\circ$  zueinander. Bild III-7 zeigt den Spannungsverlauf auf einer Leitung bei Kurzschluss am Leitungsende ( $x = l$ ), vom Ende aus betrachtet. Bildet man den Quotienten  $U_{\min}/U_{\max}$  aus dem Minimal- und dem Maximalwert der Spannung nach Bild III-4b unten, erhält man den **Anpassungsfaktor**, der mit dem Betrag des Reflexionsfaktors in der dargestellten Weise zusammenhängt:

- **Anpassungsfaktor**

$$m = \frac{U_{\min}}{U_{\max}} = \frac{1 - |r|}{1 + |r|}, \quad \text{und daraus} \quad |r| = \frac{1 - m}{1 + m} \quad (\text{III.32})$$

$r$  Reflexionsfaktor nach Gleichung (III.15)

Für Leerlauf bzw. Kurzschluss ist  $m = 0$ . Misst man das Spannungsmaximum  $U_{\max}$  und das Spannungsminimum  $U_{\min}$  mit einem Wechselspannungsmessgerät, bekommt man mit Gleichung (III.15) auch eine Aussage über das Verhältnis von Abschlusswiderstand zu Leitungswiderstand. Herrscht am Ende der Leitung Anpassung, ist  $m = 1$ .

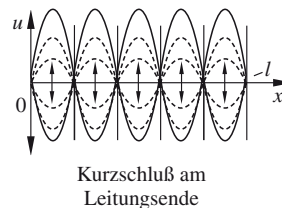


**Bild III-7**  
Stehende Wellen  
(siehe auch Bild III-4)

#### 4.6 Kettenleiter

Schaltet man mehrere Vierpole in Kettenschaltung nach Bild III-8a zusammen, erhält man einen Kettenleiter. Die Berechnung erfolgt hier nach Bild III-8b für einen verlustlosen Kettenleiter, weil er in der Praxis die größte Bedeutung hat. Abhängig davon, ob für die Einzelvierpole die T- oder  $\pi$ -Schaltung nach Bild III-5 gewählt wird, erhält man für die Einzelvierpole der Länge  $l$  mit Gleichung (III.23a, b):

- T-Vierpol:

$$\cosh \gamma \cdot l = 1 - \frac{\omega^2 LC}{2}; \quad \underline{Z} = \sqrt{\frac{L}{C} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}}} \quad (\text{III.33a})$$

- $\pi$ -Vierpol:

$$\cosh \gamma \cdot l = 1 - \frac{\omega^2 LC}{2}; \quad \underline{Z} = \sqrt{\frac{L}{C} \cdot \left(1 - \frac{\omega^2 LC}{4}\right)} \quad (\text{III.33b})$$

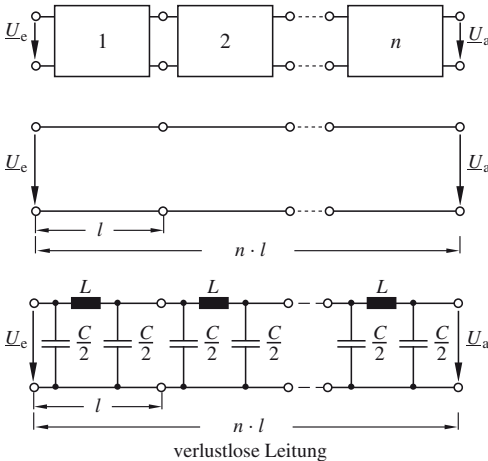


**Bild III-8** Kettenleiter

- allgemeiner Aufbau
- elektrische Leitung als Kettenleiter
- Ersatzschaltbild der elektrischen Leitung

Sind die Größen  $L$ ,  $R$ ,  $G$  und  $C$  eines Elementarvierpols der Länge  $l$  gegeben, kann die Kettenschaltung dadurch berechnet werden, dass man bei  $n$  Kettengliedern die Größe  $\gamma \cdot l$  durch  $n \cdot \gamma \cdot l$  ersetzt (Gleichung III.18). Damit werden  $L$ ,  $R$ ,  $G$  und  $C$  jeweils mit  $n$  multipliziert:

- Kettenleiter mit  $n$  gleichen Elementen:

$$\begin{aligned} \underline{U}(x=0) &= \underline{U}_a = \underline{U}_e \cdot \cosh(n \cdot \gamma \cdot l) \\ &\quad + \underline{Z} \cdot \underline{I}_e \cdot \sinh(n \cdot \gamma \cdot l) \\ \underline{I}(x=0) &= \underline{I}_a = \underline{I}_e \cdot \cosh(n \cdot \gamma \cdot l) \\ &\quad + \frac{\underline{U}_e}{\underline{Z}} \cdot \sinh(n \cdot \gamma \cdot l) \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

Für die hier betrachteten verlustlosen Kettenleiter wird gesetzt:  $R' = G' = 0$ .

## 4.7 Wellenfilter

Eine Anwendung für die Kettenleiter gibt es bei den Wellenfiltern. Es werden bei Bedarf mehrere Elementarvierpole in Kettenschaltung verbunden. Der dann entstehende Gesamtvierpol soll betrachtet werden. Nach Gleichung (III.33a, b) gilt für T- und  $\pi$ -Vierpol:  $\cosh(\gamma \cdot l) = 1 - (\omega^2 \cdot L \cdot C/2)$ . Trennt man  $\gamma$  in Real- und Imaginärteil  $a + jb$ , so folgt:

$$\begin{aligned} \cosh(a + jb) &= \cosh(a) \cdot \cos(b) + j \cdot \sinh(a) \cdot \sin(b) \\ &= 1 - \frac{\omega^2 \cdot L \cdot C}{2}. \end{aligned}$$

Der Imaginärteil ist Null:

$$\sinh(a) \cdot \sin(b) = 0;$$

$$\cosh(a) \cdot \cos(b) = 1 - \frac{\omega^2 \cdot L \cdot C}{2}$$

Diese Gleichungen werden erfüllt durch:

$$1. \ a = 0 \text{ und } \cos(b) = 1 - \frac{\omega^2 \cdot L \cdot C}{2} \text{ oder } 2. \ b = 0, \pi,$$

$$2\pi, \dots \text{ und } \cosh(a) = \left| 1 - \frac{\omega^2 \cdot L \cdot C}{2} \right|.$$

Die Mathematik liefert:  $|\cos(b)| \leq 1$ ;  $|\cosh(a)| \geq 1$ .

Für  $\left| 1 - \frac{\omega^2 \cdot L \cdot C}{2} \right| < 1$  gilt deshalb:

$$a = 0 \quad \text{und} \quad \cos(b) = 1 - \frac{\omega^2 \cdot L \cdot C}{2};$$

für  $\left| 1 - \frac{\omega^2 \cdot L \cdot C}{2} \right| > 1$  gilt:

$$b = 0, \pi, 2\pi, \dots \quad \text{und} \quad \cosh(a) = \left| 1 - \frac{\omega^2 \cdot L \cdot C}{2} \right|$$

Für  $0 < \omega < 2/\sqrt{L \cdot C}$  ist die Dämpfung Null, das Filter ist im Durchlassbereich. Für  $\omega > 2/\sqrt{L \cdot C}$  nimmt die Dämpfung mit wachsender Frequenz zu. Bild III-9 zeigt Dämpfungs- und Phasenkoeffizient als Funktion der Frequenz.

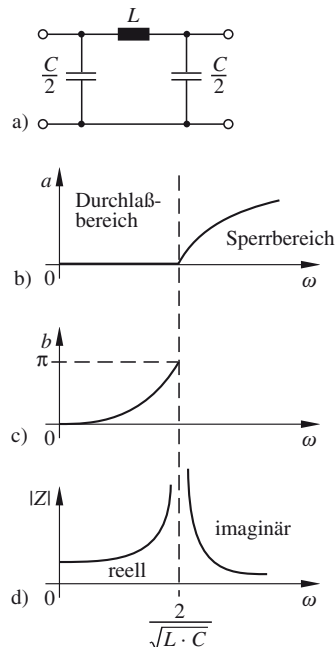


**Bild III-9** Wellenfilter

- Schaltbild
- Dämpfungskoeffizient
- Phasenkoeffizient
- Wellenwiderstand  $\underline{Z}$



## 4.8 Filterentwurf

Im vorhergehenden Abschnitt war durch Kettenschaltung die erweiterte Wirkung eines Tiefpasses dargestellt. Will man die Filterwirkung verändern, sind zwei Wege von besonderer Bedeutung:

1. Konvertierung der Filtercharakteristik
2. Modifikation der (Tiefpass-)Filtercharakteristik

Zur Konvertierung wird zunächst die realistischere Darstellung der Tiefpass-charakteristik (TP) von Bild III-9b in Bild III-10a idealisiert. Die Frequenzachse ist mit der auf die Grenzfrequenz  $\omega_G$  normierten Frequenz  $\Omega$  beschriftet. Die erste Konversion ist die Inversion, Bild III-10b. Es entsteht ein Hochpass. Wird der Tiefpass an der Ordinate gespiegelt, Bild III-10c, ergibt sich der Bandpass. Die beim Bandpass in Bild III-10c auftretenden negativen Frequenzen haben zunächst nur theoretisch Bedeutung. Das negative Vorzeichen absolut verschwindet bei der Transformation, in der der Nullpunkt des System zu einer realen, höheren Frequenz (mindestens  $>|\omega_G|$ ) transformiert wird. Das negative Vorzeichen bezieht sich dann zunächst noch auf die – normierte – Mittenfrequenz  $\Omega_0$  des Systems. Dies ist in Bild II-10d dargestellt. Der Bezug ist jetzt die normierte Mittenfrequenz  $\Omega_0$  und die Eckfrequenzen des Bandpasses ergeben sich zu  $\Omega_0 + \Omega_G$  und  $\Omega_0 - \Omega_G$ . Für  $\Omega$  existiert immer noch eine negative Achse.

In Bild III-10e ist  $\Omega$  entnormiert und es erscheinen neben der realen Mittenfrequenz  $\omega_0$  die obere Grenzfrequenz mit  $\omega_0 = \omega_0 + \omega_G$  und die untere Grenzfrequenz  $\omega_u = \omega_0 - \omega_G$  ohne dass Probleme mit dem negativen Vorzeichen auftreten.

Die zunächst für die vereinfachende Betrachtung idealisiert angenommenen Verläufe werden nach bestimmten Gesetzmäßigkeiten realisiert. Für die Charakteristiken der Tiefpässe sind Frequenzgänge nach Butterworth (Potenzfilter) Bild III-11a, Bessel Bild III-11b, Tschebyscheff I Bild III-11c bzw. Tschebyscheff II Bild III-11d oder Cauer-Parameter (elliptische) Filter Bild III-11e üblich.

Butterworth und Besselfilter zeichnen sich durch einen „glatten“ Verlauf des Amplitudenganges im Durchlassbereich aus. Der Übergang zum Sperrbereich, die Flankensteilheit ist nur mäßig ausgeprägt. Als Grenzfrequenz gilt der Punkt, bei dem der Amplitudengang den 3 dB Wert überschreitet. Tschebyscheff I- und Cauer-Charakteristiken weisen Welligkeiten im Durchlassbereich auf. Die Grenzfrequenz des Durchlassbereiches ist erreicht, wenn der Betrag der Welligkeit dauerhaft überschritten wird. Tschebyscheff II- und Cauer-Filter weisen auch Welligkeiten im Sperrbereich auf. Die Welligkeit im Sperrbereich muss eine gewisse Mindestdämpfung sicherstellen. Die Sperrgrenzfrequenz ist dann die Frequenz im Übergangsbereich bei der erstmalig diese Mindestdämpfung erreicht wird.

Da die Berechnung der Filterelemente nach der Betriebsgrößentheorie zwar zweckmäßig aber sehr auf-

wändig ist, werden dafür Rechnerprogramme eingesetzt. Bevor Rechner mit entsprechender Rechenleistung allgemein verfügbar waren wurden die notwendigen Unterlagen in „Filterkatalogen“ z.B. von R. Saal (Telefunken) und G. Pfizenmaier (Siemens) veröffentlicht. Der Vorteil der Filterkataloge besteht in der sofort erkennbaren Charakteristik des gesuchten Filters, da die Kataloge den grundsätzlichen Frequenzgang und auch den Bauelementeaufwand mit drucken. Als Beispiel hierzu ist in Bild III-12a der Frequenzgang eines Cauerfilters 6. Ordnung und in Bild III-12b die Schaltung dazu gezeigt (n. R. Saal „Der Entwurf von Filtern mit Hilfe des Kataloges normierter Tiefpässe“). Zu beachten ist noch, dass bei der Transformation vom Tiefpass zum Bandpass auch die Blindelemente transformieren. In Bild III-13 sind die Konsequenzen zusammengestellt.

Neben der Welligkeit im Durchlassbereich, die ja auch die Lage der Grenzfrequenz bestimmt, sind noch die Flankensteilheit im Übergangsbereich und die Gleichmäßigkeit der Gruppenlaufzeit wichtige Dimensionierungsgrößen.

Abschließend sei noch bemerkt, dass durch die Extremstellen in den Sperrbereichen von Tschebyscheff II- und Cauer Parameter-Filtern durch geeignete Dimensionierung einzelne Frequenzen gezielt ausgeblendet werden können.

## 4.9 Dielektrische Filter

Spulenfilter sind in der Herstellung aufwendig und benötigen im Einbau einen individuellen Abgleich. Dielektrische Filter nutzen mechanische Effekte aus die bei der Herstellung abgeglichen werden und dann dauerhaft konstant sind.

In einem dünnen unendlich ausgedehnten Dielektrikum mit piezoelektrischen Eigenschaften werden bei Längspolarisation und elektrischer Anregung von den Oberflächen Scherschwingungen in  $z$ -Richtung angeregt, Bild III-14. Die Ausbreitungskonstante  $\beta$  ist dabei:

$$\beta = \frac{\pi}{d} \sqrt{\left(\frac{f}{f_{gz}}\right)^2 - 1} \quad (\text{III.35})$$

$d$  ist die Substratdicke (Bild III-14a) und  $f_{gz}$  die Grenzfrequenz oberhalb der keine Wellenausbreitung in  $z$ -Richtung stattfindet. Wird das Dielektrikum mit Elektroden versehen, so gilt wegen der erhöhten Masse für diesen Bereich eine niedrigere Grenzfrequenz  $f_{gE}$  und damit

$$f_{gE} < f < f_{gz} \quad (\text{III.36})$$

Beim Betrieb mit einer Frequenz  $f$  zwischen  $f_{gE}$  und  $f_{gz}$  bleibt die Energie im Elektrodenbereich „gefangen“ (energy trapping) was zu ausgeprägten mechanischen Resonanzen führt.

Bei Teilung einer Elektrode, Bild III-15 können verschiedene Resonanzen durch Vielfachkopplung in solche Phasenbeziehungen zueinander gelangen, dass



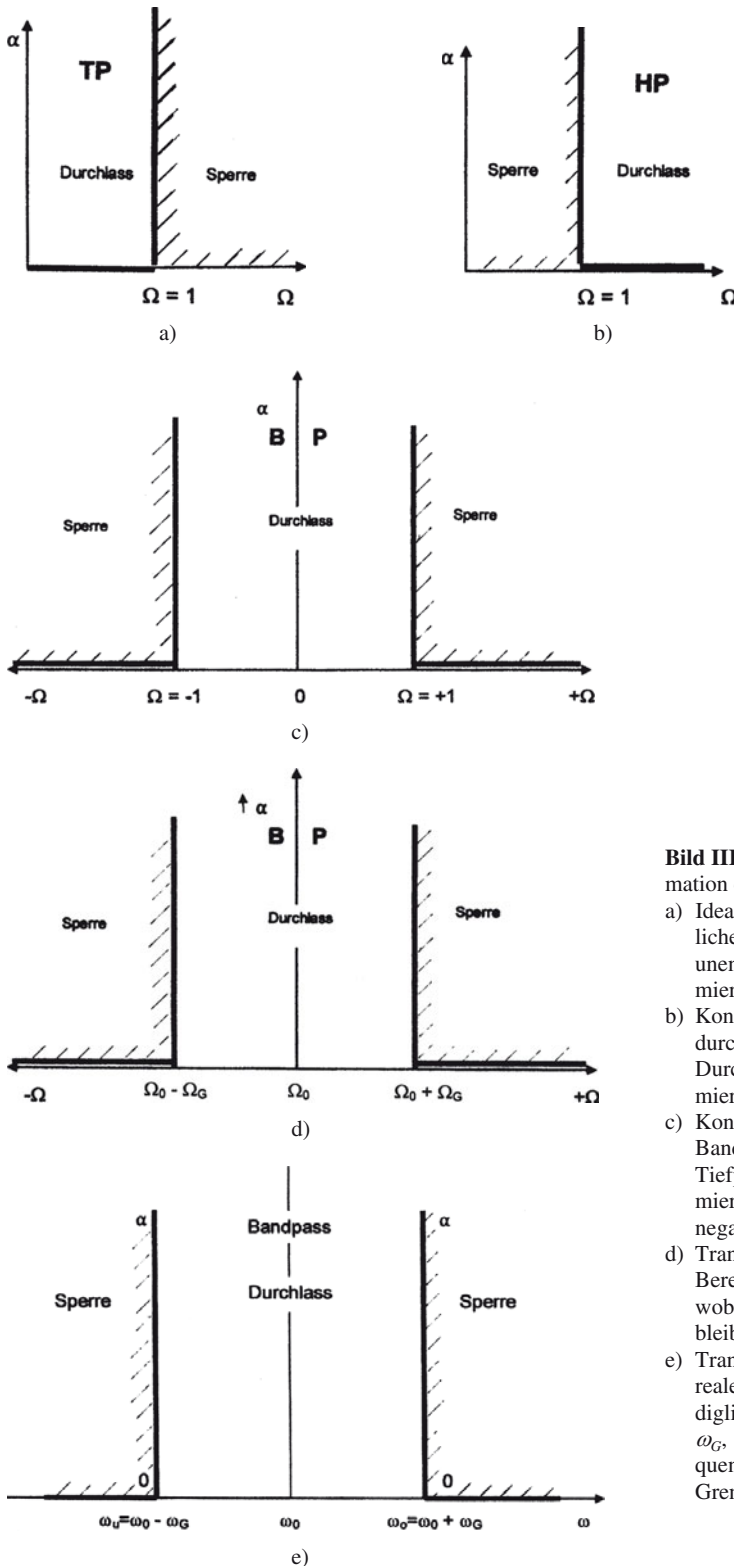


**Bild III-10** Konversion und Transformation eines Tiefpasses

- Idealisierter Tiefpass (TP) mit unendlicher Dämpfung im Sperrbereich und unendlicher Flankensteilheit mit normierten Frequenzen  $\Omega$ .
- Konversion zum Hochpass (HP) durch Vertauschung von Sperr- und Durchlassbereich ebenfalls mit normierten Frequenzen  $\Omega$ .
- Konversion des Tiefpasses zum Bandpass (BP) durch Spiegelung des Tiefpasses an der Ordinate und normierten Frequenzen, die jetzt auch negative Werte aufweisen.
- Transformierter Bandpass (BP) im Bereich der normierten Frequenzen wobei die negative  $\Omega$ -Achse erhalten bleibt.
- Transformierter Bandpass (BP) mit realen Frequenzen  $\omega$ , wobei jetzt lediglich das negative Vorzeichen von  $\omega_G$ , die Subtraktion von der Nennfrequenz  $\omega_0$  bedeutet und so die untere Grenzfrequenz  $\omega_u$  liefert.

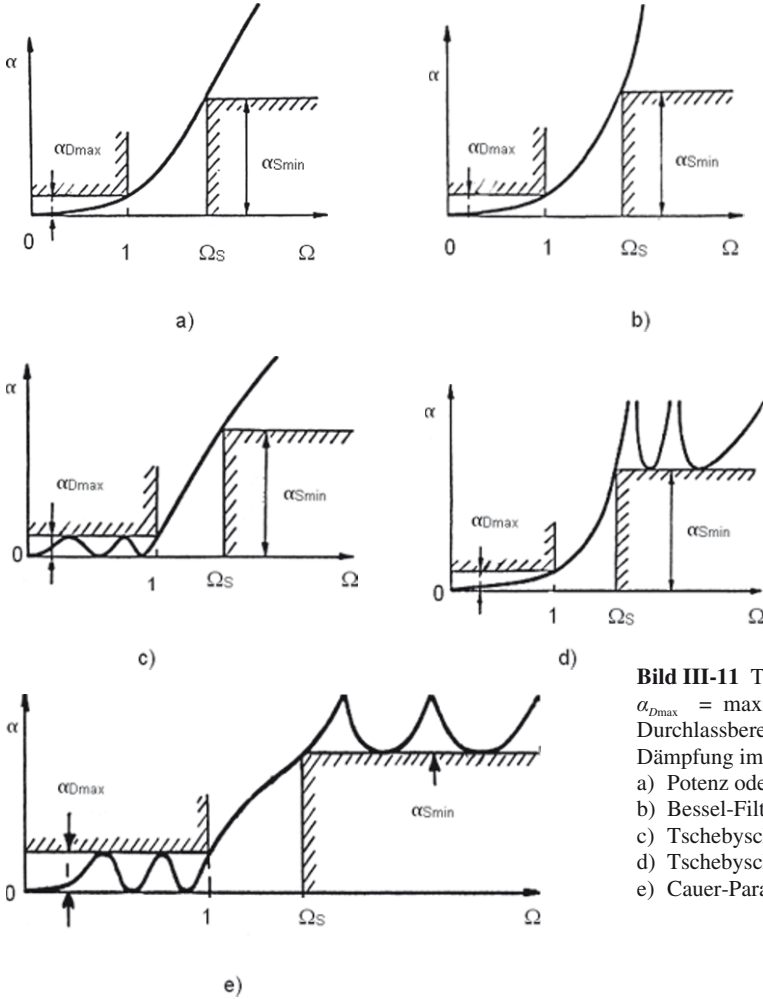


**Bild III-11** Tiefpässe

$\alpha_{Dmax}$  = maximal zulässige Dämpfung im Durchlassbereich,  $\alpha_{Smin}$  = minimal zulässige Dämpfung im Sperrbereich

- a) Potenz oder Butterworth Filter
- b) Bessel-Filter
- c) Tschebyscheff I Filter
- d) Tschebyscheff II Filter
- e) Cauer-Parameter oder elliptisches Filter

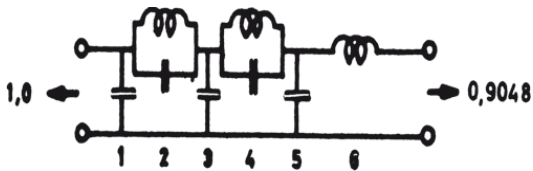
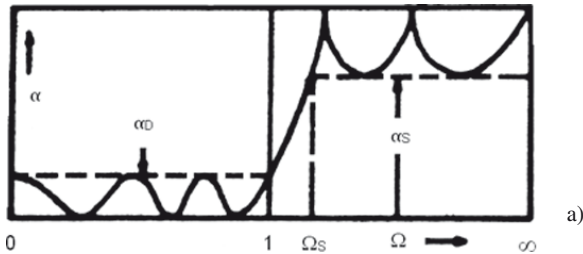


**Bild III-12** Cauer-Parameter Tiefpass Filter 6. Ordnung (nach Saal „Der Entwurf von Filtern mit Hilfe des Kataloges normierter Tiefpässe“)

- a) Normierter Frequenzgang
- b) Schaltung

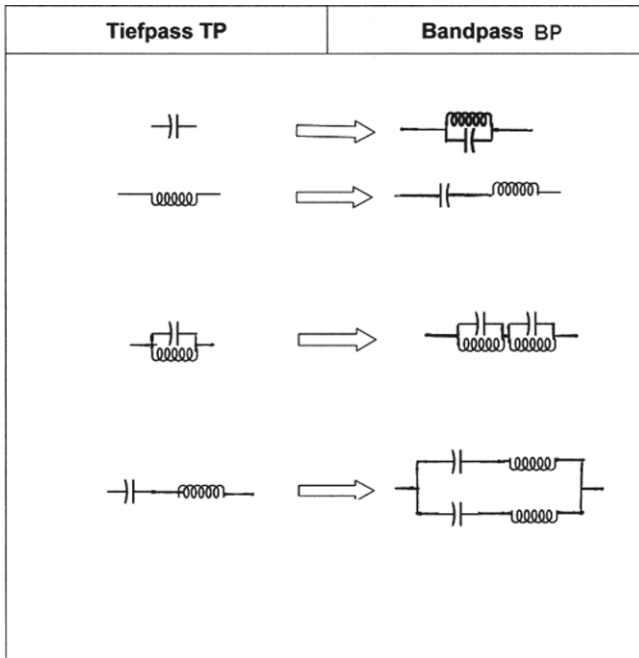


**Bild III-13** Schema der Transformation der Tiefpasselemente zu Bandpasselementen (nach Saal „Entwurf von Filtern mit Hilfe des Kataloges normierter Tiefpässe“)

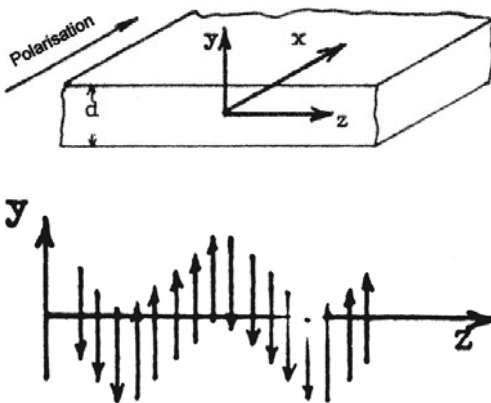


**Bild III-14** Dielektrikum für Filter

- a) Polarisiertes Dielektrikum  
b) Scherschwingungen bei Wechselspannungsanregung

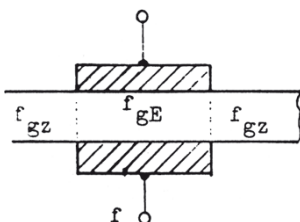


**Bild III-15** Mit Elektroden belastetes piezoelektrisches Dielektrikum

einzelne Frequenzen optimal angeregt werden. Es stellen sich sogenannte symmetrische und antisymmetrische Schwingmoden ein, Bild III-16a. Den einfachsten Fall stellt der „Kondensator“ als Quarzfilter dar, das durch die hohe Güte des äquivalenten Schwingkreises eine Bandbreite unterhalb von 1 kHz aufweist (s.a. Filter VI 2.6). Größere Bandbrei-

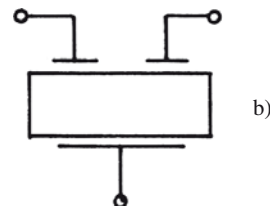
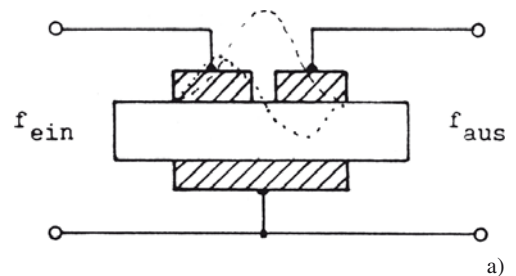


**Bild III-16** Dielektrisches Filter

- a) Piezoelektrisches Dielektrikum mit geteilter Elektrode und mögliche Schwingungsanregungen  
b) Das Schaltbild eines derartigen dreipoligen Filters

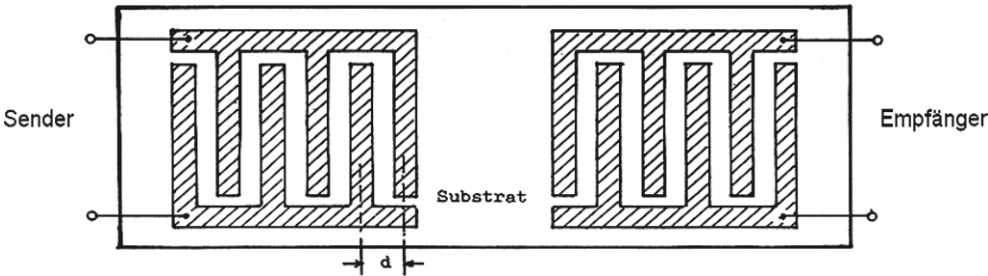


**Bild III-17** Interdigitalwandler  
Prinzip der Fingerstrukturen eines Interdigitalwandler (ID-Wandler) zur Erzeugung von Oberflächenwellen

ten lassen sich mit Teilung der Elektroden gemäß Bild III-16 erreichen. Diese Anordnung ermöglicht Bandbreiten von kHz im 10 MHz Bereich. Nach einem weiter modifizierten Prinzip zur Frequenzselektion arbeiten Oberflächenwellenfilter OFW oder englisch SAW (surface acoustic waves). Grundlage sind wieder mechanische Schwingungen die zur Interferenz von Wellenzügen an der Oberfläche eines geeigneten Substrats, z.B. Lithium-Niobat  $\text{LiNbO}_3$ , führen. Zur Erzeugung der Oberflächenwellen dienen fingerartig ineinandergreifende Interdigitalwandler (ID-Wandler) Bild III-17. Die sogenannte Synchronfrequenz  $f_0$  eines solchen Systems ist:

$$f_0 = \frac{v_w}{2d} \tag{III.37}$$

$v_w$  = Ausbreitungsgeschwindigkeit der Oberflächenwelle. Sie beträgt z.B. für Lithiumniobat ( $\text{LiNbO}_3$ ) 3488 m/s. Der Bandpassfrequenzgang einer solchen Struktur folgt im einfachsten Fall – gleichmäßig, symmetrisch – der Spaltfunktion  $(\sin x)/x$  mit ihren Periodizitäten. Durch Wichtung der Fingerstrukturen kann der Frequenzgang beeinflusst werden.

- 1) Abstandsvariation ( $d$ ) → Laufzeitwichtung (Frequenz)
- 2) Breitenvariation → Feldstärkewichtung
- 3) Längenvariation → Intensitätswichtung (der Frequenzen)

Wird z.B. die Länge nach  $(\sin x)/x$  gewichtet ergibt sich eine erhöhte Bandbreite gegenüber der einfachen Struktur. Phasengang und Gruppenlaufzeit sind durch die „Abstandsgrößen“ festgelegt und damit konstruktiv

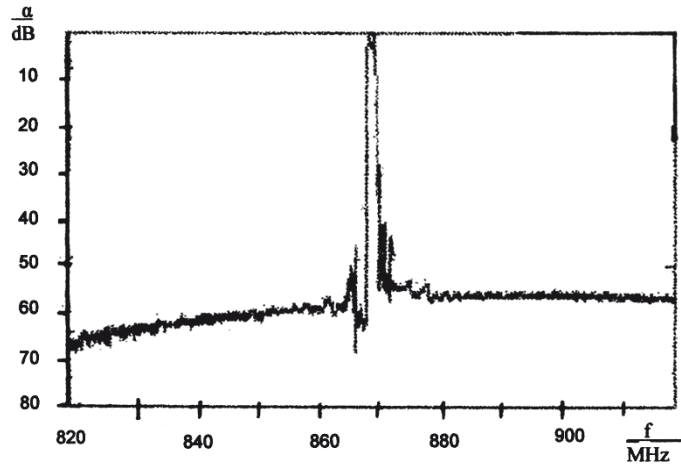
definierbar. Die Konstanz dieser Größen ist durch die mechanische Konstanz des Systems gegeben. Grundsätzlich problematisch ist bei allen dielektrischen Filtern ihre „kapazitive Grundcharakteristik“, d.h. außerhalb des eigentlichen Betriebsbereiches existiert immer noch ein gewisses „kapazitives Übersprechen“. Für die Selektion weiter außerhalb der genutzten Frequenzen ist daher u.U. ein gewöhnliches LC-Filter sinnvoll. Durch entsprechende „Antennenstrukturen“ der Finger der ID-Wandler sind auch komplizierte Frequenzgänge wie etwa Stufenstrukturen bei Fernseh ZF-Filtern realisierbar. Zur Unterdrückung von Reflexionen sind OFW-Filter durchweg niederohmig anzusteuern, wohingegen der Abschluss hochohmig auszuführen ist. In Bild III-18 sind die drei mit dielektrischen Filtern möglichen Kurvenformen, sehr schmal, schmal und breit dargestellt. In Bild III-18a) ist quasi der Quarz-Kondensator mit verbreiteter Resonanz zu sehen. Es ist offensichtlich, dass außerhalb der Resonanz auch noch Signale kapazitiv Übersprechen. Dieser Effekte ist auch bei den beiden anderen Kurven erkennbar. Bild III-18b) liegt der Aufbau nach Bild III.16 zugrunde. Bild III-18c) zeigt die typische Durchlasscharakteristik eines Handy-Eingangsfilters.

**5 Daten von Leitungen**

Tabelle III-2 gibt Beispiele für Leitungsbeläge häufig vorkommender Leitungen (Näherungswerte). Häufig kann man für die Leitungsbeläge Vernachlässigungen oder Näherungen angeben, sodass sich für den Dämpfungs- und Phasenkoeffizienten sowie für den Wellenwiderstand vereinfachte Ausdrücke ergeben. Sie sind in Tabelle III-3 zusammengestellt.

**Tabelle III-2** Beispiele für Leitungsbeläge

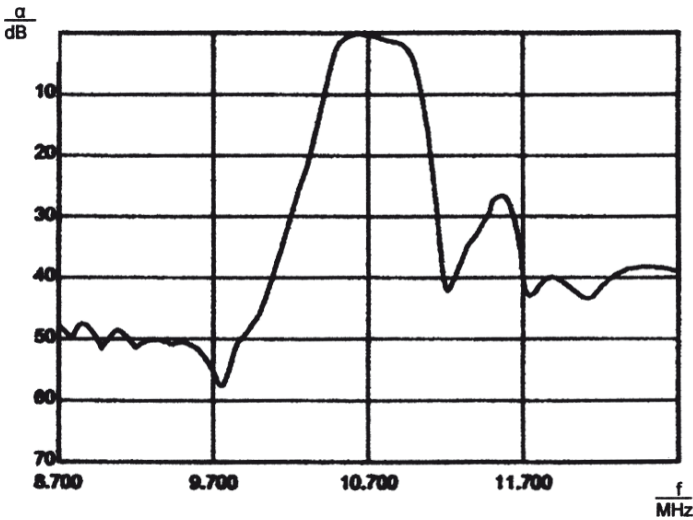
| Leitungstyp                                             | $R'$ in $\Omega/\text{km}$ | $L'$ in $\text{mH}/\text{km}$ | $G'$ in $\mu\text{S}/\text{km}$ | $C'$ in $\text{nF}/\text{km}$ |
|---------------------------------------------------------|----------------------------|-------------------------------|---------------------------------|-------------------------------|
| Freileitungen (Energieversorgung, $f = 50 \text{ Hz}$ ) | 0,2                        | 1,5                           | 0,5                             | 5                             |
| Fernsprechleitung ( $f = 1 \text{ kHz}$ )               | 5                          | 2,2                           | 0,8                             | 6                             |
| Fernsprechkabel ( $f = 1 \text{ kHz}$ )                 | 60                         | 0,6                           | 1,0                             | 50                            |



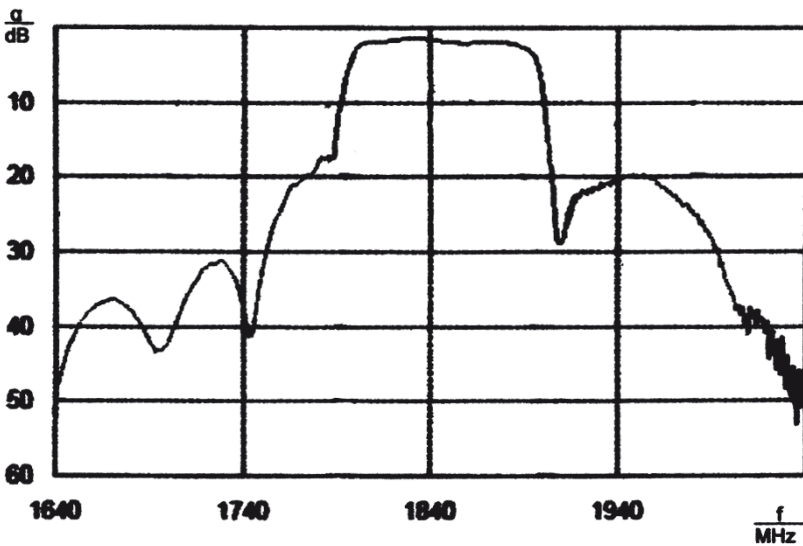
a)

**Bild III-18** Filtercharakteristiken,  $\alpha$  = Dämpfung

- a) Quarzfilter, Bandbreite im kHz-Bereich, Beispiel: EPCOS B3575
- b) Keramisches Filter mit Bandbreite im zig-kHz Bereich, Beispiel: Murata CERAFIL SFLA10M7 mit ca. 250 kHz Bandbreite
- c) Oberflächenwellenfilter mit Bandbreite im MHz-Bereich, Beispiel: Murata SAWEN1G84



b)



c)

**Tabelle III-3** Leitungs-Kenngrößen für besondere Leitungen

| Bedingung                                | $\alpha$                                                                                                                                | $\beta$                         | $Z$                            | Beispiel                                                        |
|------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| $R' = G' = 0$                            | 0                                                                                                                                       | $\omega\sqrt{L'C'}$             | $\sqrt{\frac{L'}{C'}}$         | Verlustlose Leitung                                             |
| $G' \ll \omega C'$<br>$R' \ll \omega L'$ | $\frac{R'}{2}\sqrt{\frac{C'}{L'}} + \frac{G'}{2}\sqrt{\frac{L'}{C'}}$<br>mit $G' \approx 0$ folgt<br>$\frac{R'}{2}\sqrt{\frac{C'}{L'}}$ | $\omega\sqrt{L'C'}$             | $\sqrt{\frac{L'}{C'}}$         | Freileitung allgemein                                           |
| $\frac{R'}{L'} = \frac{G'}{C'}$          | $R'\sqrt{\frac{C'}{L'}}$                                                                                                                | $\omega\sqrt{L'C'}$             | $\sqrt{\frac{L'}{C'}}$         | Verzerrungs-<br>freie Leitung                                   |
| $\omega L' \ll R'$<br>$G' \approx 0$     | $\sqrt{\frac{\omega C' R'}{2}}$                                                                                                         | $\sqrt{\frac{\omega C' R'}{2}}$ | $\sqrt{\frac{R'}{j\omega C'}}$ | Leitung mit<br>geringem<br>Querschnitt bei<br>tiefen Frequenzen |

## 6 Hochfrequenzleitungen

### 6.1 Hochfrequenz-Koaxialkabel

In der Hochfrequenztechnik werden für die allgemeine Signalübertragung weitgehend Koaxialkabel mit geringen Verlusten eingesetzt. Für den in der Praxis wichtigen Wellenwiderstand  $Z$  gilt für geringe Verluste  $\alpha_R$ , mit den mechanischen Daten  $d$  = Durchmesser des Innenleiters und  $D$  = (Innen-)Durchmesser des Außenleiters und der Permittivitätszahl  $\epsilon_r$ :

$$Z = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \cdot \ln \frac{D}{d} \quad (\text{III.38})$$

Die zugehörige – geringe – Dämpfung wird mit dem Flächenwiderstand  $R_F = \rho/\delta$ , d.h. spezifischer Widerstand  $\rho$  durch Eindringtiefe  $\delta$  (s.a. Gleichung III.39), zu:

$$\alpha_R = \frac{R_F \cdot \sqrt{\epsilon_r}}{2 \cdot \pi \cdot 60 \cdot D} \cdot \frac{1 + \frac{D}{d}}{\ln \frac{D}{d}} \quad (\text{III.38a})$$

Wie das Diagramm in Bild III-19 zeigt, weist der zweite Term in der Gleichung (III.38a), nämlich  $[1 + D/d]/[\ln(D/d)]$ , minimale Werte im Bereich zwischen  $D/d = 3 \dots 4$  auf. Für  $D/d = 3,6$  wird die Kabeldämpfung minimal. Die höchste Spannungsfestigkeit erreichen Koaxialkabel bei  $D/d = 2,7$ . Aus den typischen Werten von  $2 \dots 3$  für  $\epsilon_r$  folgen die Standardwerte von 50, 60 und 75  $\Omega$  für Koaxialkabel.

Für einfache Kabel weist  $D$  Werte von einigen mm auf, und der Außenmantel besteht aus ein- oder mehrlagigem Geflecht. Der Innenleiter kann aus Draht oder Litze aufgebaut sein. Die Isolation zwischen Innen- und Außenleiter ist geschäumtes PE oder PTFE. Kabel dieser Art mit 75  $\Omega$  Wellenwiderstand sind typisch für die in Häusern verlegten Breitband-

kabel. Die üblichen 50- $\Omega$ -Messkabel weisen wegen der notwendigen hohen Flexibilität gleichfalls diesen einfachen Aufbau auf. Die dann notwendige gute Abschirmung wird oft durch doppeltes Außengeflecht realisiert. Die Tabelle III-4 zeigt die Typennamen und die grundsätzlichen Daten einiger einfacher Koaxialkabel.

Durch den *Skin-Effekt* und die damit verbundene geringe Eindringtiefe  $\delta$  verschiebt sich der Stromfluss im Innenleiter mit zunehmender Frequenz immer

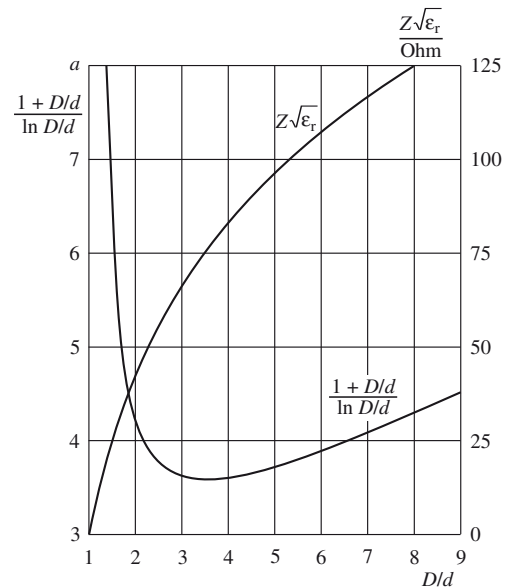


**Bild III-19** Wellenwiderstand  $Z\sqrt{\epsilon_r}$  und Hilfsfunktion  $[1 + D/d]/[\ln(D/d)]$  als Funktion von  $D/d$

mehr in die äußere Randschicht, sodass der Innenleiter hohl ausgebildet werden kann.  
Für die Praxis ergibt sich die durch den Skin-Effekt verminderte Eindringtiefe  $\delta$  zu

$$\begin{aligned} \frac{\delta_{\text{Cu}}}{\mu\text{m}} &= \frac{66}{\sqrt{\frac{f}{\text{MHz}}}} \quad \text{für Kupfer;} \\ \frac{\delta_{\text{Ag}}}{\mu\text{m}} &= \frac{64}{\sqrt{\frac{f}{\text{MHz}}}} \quad \text{für Silber} \end{aligned} \quad (\text{III.39})$$

Die kommerzielle Technik stellt sowohl erhöhte Anforderungen an die Toleranzen der Kabeldaten als auch an die Langzeitstabilität. Für geringere Leistungen – ca. 10 kW im MHz- und 0,5 kW im GHz-Bereich – wird die Isolation noch raumfüllend aus

geschäumtem verlustarmem PE ausgeführt. Der Außenleiter wird sowohl aus Stabilitätsgründen für die elektrischen Daten als auch aus Gründen der mechanischen Flexibilität gewellt ausgeführt. Der Innenleiter kann sowohl noch massiv als auch schon hohl sein. Bild III-20 zeigt als Beispiel den Aufbau von CELLFLEX-Kabeln der Fa. RFS Radio Frequency Systems GmbH. Die typischen Daten einiger gewellter Kabel mit geschäumter Isolation sind in der Tabelle III-5 zusammengestellt.

Für noch höhere Leistungen bis in den MW-Bereich hinein werden Außen- und teilweise auch die Innenleiter als Wellrohre ausgebildet. Die Isolation erfolgt nur noch durch verlustarme Wendel oder Stützen aus Niederdruck-PE oder -PTFE. Bild III-21 zeigt in a) einen solchen Aufbau für ein FLEXWELL-Kabel von RFS kabelmetal. Die prinzipiellen Verläufe der elektrischen und magnetischen Feldlinien sind zum

**Tabelle III-4** Daten einiger einfacher Koaxialleitungen nach RFS Radio Frequency Systems GmbH

| Typ           | Wellenwiderstand $Z/\Omega$ | Durchmesser $d/\text{mm}$    | Durchmesser $D/\text{mm}$ | Außendurchmesser $\text{mm}$ | Abschirmung einfach oder 1. + 2. doppelt        | Isolation | $C'$ pF/m | Dämpfung dB/100 m 100 MHz | Dämpfung dB/100 m 1 GHz |
|---------------|-----------------------------|------------------------------|---------------------------|------------------------------|-------------------------------------------------|-----------|-----------|---------------------------|-------------------------|
| RF 174        | $50 \pm 2$                  | $7 \times 0,16$ Cu Litze     | 1,91 Geflecht Cu/Sn       | 2,7                          | Geflecht Cu/Sn 85 %                             | PE Schaum | 100       | 26,0                      | 93,0                    |
| RG 58         | $50 \pm 2$                  | $19 \times 0,18$ Cu/Sn Litze | 3,55 Geflecht Cu/Sn       | 5,0                          | Geflecht Cu/Sn 96 %                             | PE Schaum | 101       | 15,6                      | 61,0                    |
| RGC58 RGFLEX  | $50 \pm 2$                  | 1,06 Cu                      | 3,60 Geflecht Cu/Sn       | 5,0                          | 1. Al/PET Folie 100 %<br>2. Geflecht Cu/Sn 75 % | PE-Schaum | 82        | 10,4                      | 35,4                    |
| RGC213 RGFLEX | $50 \pm 2$                  | 2,55 Cu                      | 8,14 Geflecht Cu/Sn       | 10,34                        | 1. Al/PET Folie 100 %<br>2. Geflecht Cu/Sn 78 % | PE-Schaum | 82        | 4,15                      | 14,9                    |
| RG213         | $50 \pm 2$                  | $7 \times 0,75$ Cu/Sn Litze  | 8,11 Geflecht Cu/Sn       | 10,31                        | Geflecht Cu/Sn 96 %                             | PE-Schaum | 101       | 6,90                      | 27,3                    |
| RGC8 RGFLEX   | $50 \pm 2$                  | 2,74 Cu                      | 8,13 Geflecht Cu/Sn       | 10,24                        | 1. Al/PET Folie 100 %<br>2. Geflecht Cu/Sn 77 % | PE-Schaum | 78        | 4,08                      | 13,2                    |

Cu/Sn = verzinntes Kupfer, Abschirmung % = Überdeckungsgrad durch das jeweilige Material





**Bild III-20** Koaxialkabel mit geschäumter Isolation und gewelltem Außenmantel, CELLFLEX-Kabel von RFS kabelmetal

besseren Verständnis in Bild III-21b eingetragen. Das Innenleiterwellrohr ist im Inneren selbstverständlich feldfrei. In der Tabelle III-6 sind die Daten einiger

FLEXWELL-Kabel zusammengestellt. Gegen äußere Einflüsse sind die Kabel in praktisch allen Fällen durch zusätzliche strapazierfähige Kunststoffummantelungen geschützt.

6.2 Hohlleiter

Mit weiter zunehmender Frequenz ist es sogar sinnvoll, den Innenleiter ganz wegzulassen. Man kommt dann zum eigentlichen *Hohlleiter*. Bild III-22 zeigt die am meisten verwendeten Querschnittsformen.

**Tabelle III-5** Daten einiger CELLFLEX-Kabel von RFS Radio Frequency Systems GmbH

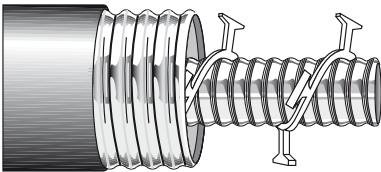
| Typ         | Wellen-widerstand $Z/\Omega$ | Nenn-größe | Iso-lation | $C'$ pF/m | $P_{\text{mittel}}$ bei 100 MHz kW | $P_{\text{mittel}}$ bei 1 GHz kW | Dämpfung dB/100 m 100 MHz | Dämpfung dB/100 m 1 GHz |
|-------------|------------------------------|------------|------------|-----------|------------------------------------|----------------------------------|---------------------------|-------------------------|
| LCF 14-50   | $50 \pm 1$                   | 1/4"       | PE         | 80        | 4,20                               | 13,9                             | 4,20                      | 13,9                    |
| SCF 14-50   | $50 \pm 1$                   | 1/4"       | PE         | 82        | 5,82                               | 19,5                             | 5,82                      | 19,5                    |
| LCF 12-50   | $50 \pm 1$                   | 1/2"       | PE         | 76        | 2,16                               | 7,20                             | 2,16                      | 7,20                    |
| SCF 12-50   | $50 \pm 1$                   | 1/2"       | PE         | 82        | 3,33                               | 11,2                             | 3,33                      | 11,2                    |
| LCF 38-50   | $50 \pm 1,5$                 | 3/8"       | PE         | 76        | 3,43                               | 11,3                             | 3,43                      | 11,3                    |
| LCF 114-50  | $50 \pm 1$                   | 1 1/4"     | PE         | 75        | 3,14                               | 3,14                             | 0,889                     | 3,14                    |
| LCF 214-50A | $50 \pm 1$                   | 2 1/4"     | PE         | 75        | 2,11                               | 2,11                             | 0,566                     | 2,11                    |

LCF = Low Level Foam Coax, SCF = Superflexible Foam Coax, PE = Polyethylen,  $C'$  = Kapazitätsbelag,  $P_{\text{mittel}}$  = zulässige mittlere Leistung (die Spitzenleistungen liegen wesentlich höher).

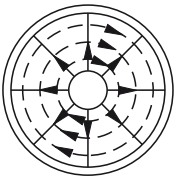
**Tabelle III-6** Daten einiger Koaxialkabel. Heliflex von RFS Radio Frequency Systems GmbH

| Typ allgemein (RFS) | Wellen-widerstand $Z/\Omega$ | Durch-messer $d/\text{mm}$ | Durch-messer $d/\text{mm}$ | Iso-lation | $C'$ pF/m | $P_{\text{mittel}}$ 100 MHz kW | $P_{\text{mittel}}$ 1 GHz kW | Dämpfung dB/100 m 100 MHz | Dämpfung dB/100 m 1 GHz |
|---------------------|------------------------------|----------------------------|----------------------------|------------|-----------|--------------------------------|------------------------------|---------------------------|-------------------------|
| 3/8" (HCA38-50JT)   | $50 \pm 1$                   | 4,0 Drt.                   | 12,4 Wlr.                  | PE Wendel  | 74,0      | P3,67                          | 1,13                         | 2,76                      | 9,31                    |
| 7/8" (HCA78-50JT)   | $50 \pm 0,5$                 | 9,0 Ro                     | 20,2 Wlr.                  | PE Wendel  | 71,0      | 12,1                           | 3,62                         | 1,21                      | 4,25                    |
| 1-1/8" (HCA118-50J) | $50 \pm 0,5$                 | 12,0 Ro                    | 33,2 Wlr.                  | PE Wendel  | 73,0      | 12,1                           | 3,72                         | 0,910                     | 3,09                    |
| 2-1/4" (HCA214-50J) | $50 \pm 0,5$                 | 22,6 Wlr.                  | 56,6 Wlr.                  | PE Wendel  | 66,6      | 23,0                           | 6,64                         | 0,553                     | 1,93                    |
| 3-1/8" (HCA318-50J) | $50 \pm 0,5$                 | 34,8 Wlr.                  | 85,5 Wlr.                  | PE Wendel  | 70,0      | 54,2                           | 17,0                         | 0,362                     | 1,26                    |
| 5" (HCA500-50JT)    | $50 \pm 0,5$                 | 58,0 Wlr.                  | 140,5 Wlr.                 | PE Wendel  | 70,0      | 189                            | 62,6 800 MHz                 | 0,223                     | 0,699 800 MHz           |
| 8" (HCA800-50J)     | $50 \pm 0,5$                 | 88,5 Wlr.                  | 215,0 Wlr.                 | PE Wendel  | 69,0      | 279                            | 111 600 MHz                  | 0,149                     | 0,397 600 MHz           |

Drt = Draht, Ro = Rohr, Wlr = Wellrohr, PE = Polyethylen (Wendel s.a. Bild III-21),  $C'$  = Kapazitätsbelag,  $P_{\text{mittel}}$  = zulässige mittlere Leistung (Die Spitzenleistungen liegen wesentlich höher.)



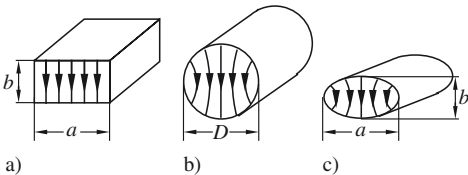
a)



b)

**Bild III-21**

- a) FLEXWELL-Kabel nach RFS kabelmetal mit gewelltem Außen- und Innenleiter sowie PE-Stützwendel
- b) Feldlinienbild eines Koaxialkabels nach  
a) — = E-Feldlinien, - - - = H-Feldlinien



a)

b)

c)

**Bild III-22** Querschnittsformen von Hohlleitern mit Verlauf des elektrischen Feldes

- a) rechteckig
- b) rund
- c) elliptisch

In Bild III-23 ist ein Beispiel für den Momentanwert der Verläufe des elektrischen und des magnetischen Feldes dargestellt. Da bei Hohlleitern entweder das elektrische oder das magnetische Feld Komponenten in Ausbreitungsrichtung hat, gelten die Bezeichnungen nach Tabelle III-7.

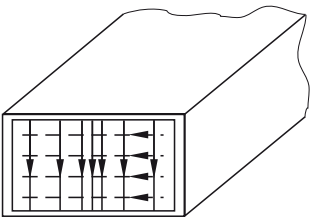


**Bild III-23** Feldverläufe in einem Rechteck-Hohlleiter mit TE- oder H-Welle  
— = E-Feldlinien, - - - = H-Feldlinien

*Rechteckhohlleiter:* 1. Index: Anzahl längs der Breitseite, 2. Index: Anzahl längs der Schmalseite. Der Index ist Null, falls keine Änderung längs der entsprechenden Seite auftritt.

*Rundhohlleiter, Elliptische Hohlleiter:* 1. Index: Halbe Anzahl längs des Umfanges, 2. Index: Anzahl in radialer Richtung (Maximum in der Achse wird mitgezählt). Für elliptische Hohlleiter werden ev. noch Zusatzindizes verwendet, siehe dazu die Erläuterungen zu Bild III-27 weiter unten. Bild III-24 erläutert die Bezeichnungsweise an einigen Beispielen. Am häufigsten werden angewendet:

*Rechteckhohlleiter:*  $H_{10}$ - und  $E_{11}$ -Welle

*Rundhohlleiter, Elliptische Hohlleiter:*  $H_{11}$ - und  $E_{01}$ -Welle

Man kann sich die Ausbreitung als fortwährende Reflexion an den Wänden des Hohlleiters vorstellen. Das Material muss deshalb elektrisch gut leitend sein, damit in den Wandungen möglichst wenig Verluste entstehen. (Es gibt noch kein Material, das eine gute elektrische und eine gute magnetische Leitfähigkeit gleichzeitig besitzt.)

Die elektromagnetischen Wellen breiten sich im Hohlleiter mit Lichtgeschwindigkeit  $c$  aus. Bild III-25 zeigt eine entsprechende Wellenfront. Folgende Größen lassen sich unmittelbar entnehmen:

● *Gruppengeschwindigkeit:*  $v_g = c \cdot \sin \alpha$  (III.40a)

● *Phasengeschwindigkeit:*  $v_p = \frac{c}{\sin \alpha}$  (III.40b)

$c$  Lichtgeschwindigkeit  $\approx 3 \cdot 10^8$  m/s

**Tabelle III-7** Bezeichnung der Wellen in Hohlleitern

| Typ     | Komponente in Ausbreitungsrichtung | Bezeichnung (siehe auch Bild III-24)       |
|---------|------------------------------------|--------------------------------------------|
| E-Welle | elektrisches Feld                  | TM-Welle:<br>Transversal-magnetische Welle |
| H-Welle | magnetisches Feld                  | TE-Welle:<br>Transversal-elektrische Welle |

Nach DIN 47301 werden die sich ausbreitenden Wellen durch zwei Indizes gekennzeichnet, die die Zahl der Maxima der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}$  angeben:

Die Energieausbreitung geschieht mit der Gruppengeschwindigkeit. Die Phasengeschwindigkeit ist stets größer oder gleich der Lichtgeschwindigkeit.

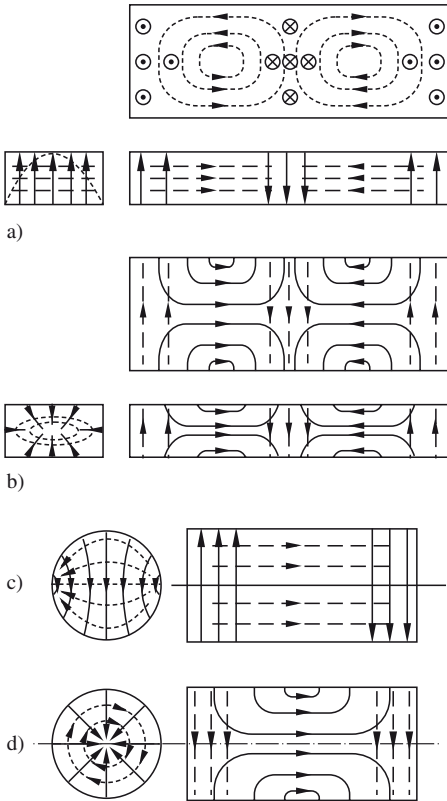


**Bild III-24** Beispiele für Schwingungstypen in Hohlleitern

- a)  $H_{10}$ -Welle im Rechteckhohlleiter
  - b)  $E_{11}$ -Welle im Rechteckhohlleiter
  - c)  $H_{11}$ -Welle im Rundhohlleiter
  - d)  $E_{01}$ -Welle im Rundhohlleiter
- = E-Feldlinien, - - - = H-Feldlinien

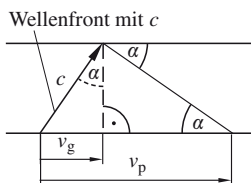


**Bild III-25**  
Ebene Welle im  
Rechteck-Hohlleiter

Die Wellenausbreitung wird erst oberhalb einer kritischen Wellenlänge  $\lambda_{kr}$  technisch nutzbar. Den Ausbreitungskoeffizienten kann man berechnen, er ergibt sich zu:

- **Ausbreitungskoeffizient:**

$$\gamma = \alpha + j\beta = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\lambda_{kr}^2} - \frac{1}{\lambda^2}} \quad (\text{III.41})$$

$\lambda_{kr}$ , kritische Wellenlänge in m;  $\lambda$  Wellenlänge der sich im Hohlleiter ausbreitenden Welle

Für  $\lambda_{kr} < \lambda$  ist  $\gamma$  reell, d.h. die Welle wird gedämpft. Für  $\lambda_{kr} > \lambda$  dagegen ist die Dämpfung Null, sodass eine Übertragung sinnvoll ist. Die Abmessungen des Hohlleiters (Durchmesser bzw. Länge und Breite nach Bild III-22) und  $\lambda_{kr}$  liegen in der gleichen Größenordnung. Einer Frequenz 3 GHz entspricht eine Wellenlänge von 10 cm, sodass die Hohlleiter für Frequenzen oberhalb dieses Wertes wirtschaftlich vertretbare Abmessungen bekommen. Hohlleiterabmessungen und zu übertragende Frequenz werden so aufeinander abgestimmt, dass sich *nur* der gewünschte Wellentyp ausbreiten kann: Die Frequenz der Welle ist größer als die kritische Frequenz des Wellentyps, aber kleiner als die aller anderen möglichen Wellentypen. Tabelle III-8 gibt Beispiele für die kritische Wellenlänge und die daraus folgende *kritische Frequenz*  $f_{kr}$ , die aus der Beziehung  $f_{kr} = c/\lambda_{kr}$  ( $c$  ist die Lichtgeschwindigkeit) folgt. Erst für Frequenzen oberhalb etwa 5 GHz ergeben sich für Hohlleiter handliche mechanische Abmessungen.

Bild III-26 gibt Beispiele für den Verlauf des Dämpfungskoeffizienten in einem Kupfer-Rundhohlleiter. Zu erkennen ist die sprunghafte Zunahme der Dämpfung unterhalb der kritischen Frequenzen, was nach Gleichung (III.41) auch zu erwarten ist.

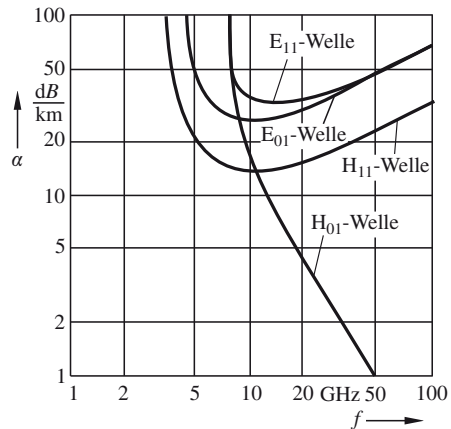


**Bild III-26** Dämpfungskoeffizienten im Cu-Rundhohlleiter mit 50 mm Innendurchmesser (nach Frommer, Funktechnik)

Zu beachten ist noch, dass der (Feld-)Wellenwiderstand der Hohlleiter frequenzabhängig ist. Mit  $Z_0$ , dem Wellenwiderstand des freien Raumes (s.a. Kapitel IV Antennen, Gleichung IV.4), und der kritischen Frequenz  $f_{kr}$  des Hohlleiters gilt:

$$Z_F = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - (f_{kr}/f)^2}} \quad (\text{III.42})$$

Die aus Gleichung (III.41) folgenden kritischen Frequenzen führen dazu, dass jeder Hohlleiter nur eine gewisse Bandbreite übertragen kann. Zwar sind

**Tabelle III-8** Beispiele für kritische Frequenzen und Wellenlängen bei Hohlleitern

| Rechteckhohlleiter | $\lambda_{kr}$                 | $f_{kr}$<br>für $a = 200\text{ mm}$ | $f_{kr}$<br>für $a = 10\text{ mm}$ |
|--------------------|--------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| $H_{10}$           | $2a$                           | 750 MHz                             | 15 GHz                             |
| $E_{11}$           | $\frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ |                                     |                                    |
| $E_{11} (a = b)$   | $\frac{2a}{\sqrt{2}}$          | 1,06 GHz                            | 21,2 GHz                           |
| $E_{11} (a = 2b)$  | $\frac{2a}{\sqrt{5}}$          | 1,68 GHz                            | 33,5 GHz                           |
| Rundhohlleiter     | $\lambda_{kr}$                 | $f_{kr}$<br>für $D = 200\text{ mm}$ | $f_{kr}$<br>für $D = 10\text{ mm}$ |
| $H_{11}$           | $1,71 \cdot D$                 | 877 MHz                             | 17,6 GHz                           |
| $E_{01}$           | $1,31 \cdot D$                 | 1,15 GHz                            | 22,9 GHz                           |

$a, b$  siehe Bild III-22

im Prinzip auch höhere Schwingungstypen in Hohlleitern möglich, die jedoch in der Praxis vermieden werden. Ein Rechteckhohlleiter hat zunächst ein Frequenzverhältnis aus Frequenz der Grundwelle (1/2 Wellenlänge über  $a$ ) zur Frequenz mit dem nächsthöheren Mode ( $2 \cdot 1/2$  Wellenlänge über  $a$ ) von 1 zu 2. Praktisch genutzt wird aber nur ein Verhältnis von 1,2 zu 1,9. Um alle technischen Frequenzen übertragen zu können, gibt es standardisierte Typen mit einem Seitenverhältnis  $a:b = 2:1$ . In der Tabelle III-9 ist eine Auswahl von Rechteckhohlleitern aus IEC 153 zusammengestellt. Die R-Nummer entspricht dabei dem Zehnfachen der mittleren Betriebsfrequenz, gemessen in GHz. Beispiel: R 100  $\rightarrow$  mittlere Betriebsfrequenz  $10\text{ GHz} \cdot 10 \rightarrow 100$ . Rundhohlleiter haben zwar den Vorteil, dass Wellen vom Typ  $H_{01}$  sich mit zunehmender Frequenz immer stärker im Zentrum konzentrieren und damit eine mit der Frequenz abnehmende Dämpfung aufweisen (s.a. Bild III-26), sie zeigen aber ein instabiles Verhalten bei höheren Frequenzen mit Energieentzug für den Grundmode.

Nachteilig für Rechteck- und Rundhohlleiter ist in jedem Fall die geringe Flexibilität. Mobile Systeme sind damit nicht aufzubauen. Eine Lösung bieten hier die aus Wellrohren entwickelten elliptischen (Wellrohr-)Hohlleiter (Bild III-27). Sie sind, fast wie gewöhnliche Kabel, trommelbar und weisen Fertigungslängen von ca. 250 m auf. Wie Bild III-22 bereits zeigt, lehnen sie stark an die Rundhohlleiter an, und auch die Indizierung der Wellenformen ist entsprechend. Allerdings unterscheidet man noch cosinuselliptische Wellen mit der Zusatzindizierung „c“, z.B.  $H_{c11}$  (s.a. Bild III-28a) und sinuselliptische Wellen mit dem Zusatz „s“, z.B.  $H_{s11}$  (s.a. Bild III-28b).

Wegen der großen praktischen Bedeutung der elliptischen Hohlleiter sind auch diese in ihren Daten

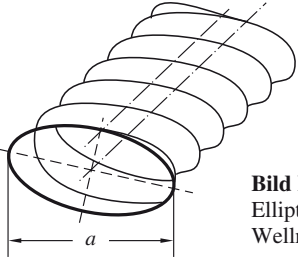


**Bild III-27**  
Elliptischer  
Wellrohrhohlleiter

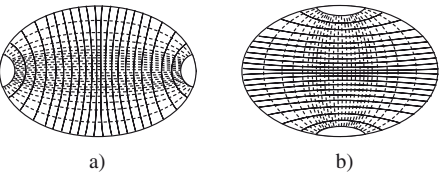


**Bild III-28** Wellenformen in elliptischen Hohlleitern  
(nach W. Krank)

a)  $H_{c11}$   
b)  $H_{s11}$   
— = E-Feldlinien, - - - = H-Feldlinien

genormt und mit E-Nummern nach der gleichen Methode wie die Rechteckhohlleiter gekennzeichnet. In der Tabelle III-9 sind auch Daten von einigen elliptischen Hohlleitern unter den Kennbuchstaben  $E_{xx}$  mit aufgeführt.

**6.3 Streifenleitungen**

Die Technik der gedruckten Schaltung hat bei hohen Frequenzen zu einem eigenen Leitungstyp, der *Streifenleitung*, geführt. Darunter ist ein flacher leitender Streifen zu verstehen, der durch ein Dielektrikum von

**Tabelle III-9** Daten einiger genormter Rechteck- und elliptischer Hohlleiter

| Rechteckhohlleiter              |                     |              |        |      | Elliptische Hohlleiter          |                     |              |          |              |          |
|---------------------------------|---------------------|--------------|--------|------|---------------------------------|---------------------|--------------|----------|--------------|----------|
| Typ nach DIN 47302 bzw. IEC 153 | Frequenzbereich GHz | Dämpfung bei |        | Band | Typ nach DIN 47302 bzw. IEC 153 | Frequenzbereich GHz | Dämpfung bei |          | Dämpfung bei |          |
|                                 |                     | f/GHz        | dB/m   |      |                                 |                     | f/GHz        | dB/100 m | f/GHz        | dB/100 m |
| R 48                            | 3,94 ... 5,99       | 4,73         | 0,0345 | G    | E 60                            | 5,6...6,4           | 5,6          | 4,15     | 6,4          | 3,8      |
| R 70                            | 5,38 ... 8,17       | 6,45         | 0,0575 | J    | E 78                            | 7,1...8,5           | 7,1          | 6,2      | 8,5          | 5,6      |
| R 100                           | 8,20 ... 12,5       | 9,84         | 0,110  | X    | E 105                           | 10,0...11,7         | 10,0         | 9,6      | 11,7         | 8,9      |
| R 140                           | 11,9 ... 18,0       | 14,2         | 0,176  | P    | E 130                           | 10,7...13,3         | 10,7         | 12,6     | 13,3         | 11,2     |
| R 220                           | 17,6 ... 26,7       | 21,1         | 0,368  | K    | E 185                           | 17,3...19,7         | 17,3         | 20,3     | 19,7         | 18,9     |
| R 320                           | 26,3 ... 40,0       | 31,6         | 0,583  | R    | E 220                           | 21,2...23,6         | 21,2         | 28,8     | 23,6         | 28,09    |

Wegen der in der Praxis unterschiedlichen Nutzungslängen sind die Dämpfungen für Rechteckhohlleiter in dB/m angegeben, während sie für elliptische Hohlleiter in dB/100 m angegeben sind.

einer oder mehreren großflächigen Gegenelektroden getrennt ist. Die wesentlichen Arten sind in Bild III-29 dargestellt.

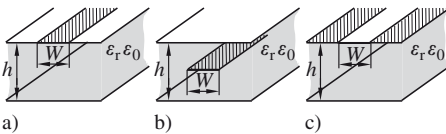


**Bild III-29** Streifenleitungen

- a) Microstrip-Leitung
- b) Triplate-Leitung
- c) Schlitzleitung

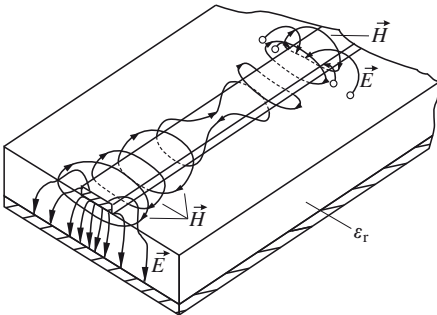


**Bild III-30** Feldverlauf bei einer Streifenleitung

*Mikrostreifenleitung, Microstrip- oder Streifenleitung* im engeren Sinne ist dabei die Ausführung in Bild III-29a. Die in Bild III-30 dargestellte Feldverteilung an einer derartigen Leitung zeigt einen komplizierten Verlauf, was zu aufwändigen Berechnungen insbesondere des für die Praxis notwendigen Wellenwiderstandes von Streifenleitungen führt. Da die Feldkomponenten  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  zwar nicht exakt wie bei TEM-Wellen, aber doch weitgehend senkrecht zur Ausbrei-

tungsrichtung verlaufen, spricht man auch von Quasi-TEM-Wellen. Wichtig ist bei der Untersuchung derartiger Systeme neben der relativen Permittivität  $\epsilon_r$  des Substrates ganz besonders das Verhältnis  $w/h$ , d.h. Streifenbreite zu Substratdicke. Nach *Hammerstad* ergibt sich der Wellenwiderstand  $Z$  von Streifenleitungen mit den Bezeichnungen gemäß Bild III-29a zu:

$$\frac{Z}{\Omega} = \frac{60 \cdot \ln\left(\frac{8 \cdot h}{w} + \frac{w}{4 \cdot h}\right)}{\sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}} \quad \text{für } \frac{w}{h} < 1 \quad (\text{III.43a})$$

$$\frac{Z}{\Omega} = \frac{120 \cdot \pi}{\sqrt{\epsilon_{\text{eff}} \left( \frac{w}{h} + 1,393 + 0,667 \cdot \ln\left(\frac{w}{h} + 1,44\right) \right)}} \quad \text{für } \frac{w}{h} > 1 \quad (\text{III.43b})$$

$\epsilon_{\text{eff}}$  ergibt sich aus der relativen Permittivität  $\epsilon_r$  des Substrates zu:

$$\epsilon_{\text{eff}} = 0,5 \cdot (\epsilon_r + 1) + 0,5 \cdot (\epsilon_r - 1) \cdot F \quad (\text{III.43c})$$

$$F = \frac{1}{\sqrt{1 + 12 \cdot \frac{h}{w}}} + 0,04 \cdot \left(1 - \frac{w}{h}\right)^2 \quad \text{für } \frac{w}{h} < 1 \quad (\text{III.43d})$$

$$F = \frac{1}{\sqrt{1 + 12 \cdot \frac{h}{w}}} \quad \text{für } \frac{w}{h} > 1 \quad (\text{III.43e})$$

Die Arbeit mit diesen Formeln ist recht aufwendig. Für geringere Genauigkeiten reicht das Diagramm in Bild III-31. Genauere Werte für die gängigen Wellenwiderstände von  $Z = 50, 60$  und  $75 \Omega$  liefert die Tabelle III-10. Zu den üblichen Substratdicken von 1,5 mm gibt die Tabelle III-10 dann auch sofort die Streifenbreite  $w$ . Die Werte um  $\epsilon_r = 2,3$  sind fein

**Tabelle III-10** Verhältnis Streifenbreite zu Substratdicke ( $w/h$ ) von Streifenleitungen nach Hammerstad für ausgewählte Werte von  $Z$  und  $\epsilon_r = 1 \dots 9,9$ ,  $w$  = Streifenbreite in mm für eine Substratdicke  $h = 1,5$  mm

| $Z = 50 \, \Omega$ |       |      | $Z = 60 \, \Omega$ |       |      | $Z = 75 \, \Omega$ |       |      |
|--------------------|-------|------|--------------------|-------|------|--------------------|-------|------|
| $\epsilon_r$       | $w/h$ | $w$  | $\epsilon_r$       | $w/h$ | $w$  | $\epsilon_r$       | $w/h$ | $w$  |
| 1,00               | 4,91  | 7,36 | 1,00               | 3,78  | 5,67 | 1,00               | 2,68  | 4,03 |
| 1,50               | 3,91  | 5,87 | 1,50               | 2,99  | 4,49 | 1,50               | 2,09  | 3,14 |
| 2,00               | 3,29  | 4,94 | 2,00               | 2,49  | 3,74 | 2,00               | 1,71  | 2,57 |
| 2,10               | 3,19  | 4,79 | 2,10               | 2,41  | 3,62 | 2,10               | 1,65  | 2,48 |
| 2,20               | 3,10  | 4,65 | 2,20               | 2,34  | 3,51 | 2,20               | 1,60  | 2,40 |
| 2,25               | 3,06  | 4,59 | 2,25               | 2,31  | 3,46 | 2,25               | 1,57  | 2,36 |
| 2,30               | 3,01  | 4,52 | 2,30               | 2,27  | 3,41 | 2,30               | 1,55  | 2,32 |
| 2,35               | 2,97  | 4,46 | 2,35               | 2,24  | 3,36 | 2,35               | 1,52  | 2,28 |
| 2,40               | 2,93  | 4,40 | 2,40               | 2,21  | 3,31 | 2,40               | 1,50  | 2,25 |
| 2,50               | 2,86  | 4,29 | 2,50               | 2,14  | 3,22 | 2,50               | 1,45  | 2,18 |
| 2,60               | 2,78  | 4,18 | 2,60               | 2,09  | 3,13 | 2,60               | 1,41  | 2,11 |
| 2,70               | 2,72  | 4,08 | 2,70               | 2,03  | 3,05 | 2,70               | 1,36  | 2,05 |
| 2,80               | 2,65  | 3,98 | 2,80               | 1,98  | 2,97 | 2,80               | 1,32  | 1,99 |
| 2,90               | 2,59  | 3,89 | 2,90               | 1,93  | 2,90 | 2,90               | 1,29  | 1,93 |
| 3,00               | 2,53  | 3,80 | 3,00               | 1,88  | 2,83 | 3,00               | 1,25  | 1,88 |
| 3,20               | 2,42  | 3,63 | 3,20               | 1,79  | 2,69 | 3,20               | 1,18  | 1,78 |
| 3,40               | 2,32  | 3,48 | 3,40               | 1,71  | 2,57 | 3,40               | 1,12  | 1,68 |
| 3,60               | 2,23  | 3,34 | 3,60               | 1,64  | 2,46 | 3,60               | 1,06  | 1,60 |
| 3,80               | 2,14  | 3,21 | 3,80               | 1,57  | 2,35 | 3,80               | 1,01  | 1,52 |
| 4,00               | 2,06  | 3,10 | 4,00               | 1,51  | 2,26 | 4,00               | 0,97  | 1,46 |
| 4,20               | 1,99  | 2,99 | 4,20               | 1,45  | 2,17 | 4,20               | 0,93  | 1,39 |
| 4,40               | 1,92  | 2,89 | 4,40               | 1,39  | 2,09 | 4,40               | 0,89  | 1,33 |
| 4,50               | 1,89  | 2,84 | 4,50               | 1,36  | 2,05 | 4,50               | 0,87  | 1,30 |
| 4,60               | 1,86  | 2,79 | 4,60               | 1,34  | 2,01 | 4,60               | 0,85  | 1,28 |
| 4,70               | 1,83  | 2,74 | 4,70               | 1,32  | 1,98 | 4,70               | 0,83  | 1,25 |
| 4,80               | 1,80  | 2,70 | 4,80               | 1,29  | 1,94 | 4,80               | 0,81  | 1,22 |
| 4,90               | 1,77  | 2,65 | 4,90               | 1,27  | 1,90 | 4,90               | 0,80  | 1,20 |
| 5,00               | 1,74  | 2,61 | 5,00               | 1,25  | 1,87 | 5,00               | 0,78  | 1,17 |
| 5,20               | 1,69  | 2,54 | 5,20               | 1,20  | 1,81 | 5,20               | 0,75  | 1,13 |
| 5,50               | 1,61  | 2,42 | 5,50               | 1,14  | 1,72 | 5,50               | 0,71  | 1,06 |
| 6,00               | 1,50  | 2,25 | 6,00               | 1,05  | 1,58 | 6,00               | 0,64  | 0,97 |
| 6,50               | 1,40  | 2,11 | 6,50               | 0,98  | 1,47 | 6,50               | 0,59  | 0,88 |
| 7,00               | 1,32  | 1,98 | 7,00               | 0,91  | 1,37 | 7,00               | 0,54  | 0,81 |
| 7,50               | 1,24  | 1,86 | 7,50               | 0,85  | 1,28 | 7,50               | 0,50  | 0,75 |
| 8,00               | 1,16  | 1,75 | 8,00               | 0,80  | 1,20 | 8,00               | 0,46  | 0,69 |
| 8,50               | 1,10  | 1,65 | 8,50               | 0,75  | 1,12 | 8,50               | 0,42  | 0,64 |
| 9,00               | 1,04  | 1,56 | 9,00               | 0,70  | 1,06 | 9,00               | 0,39  | 0,59 |
| 9,10               | 1,03  | 1,54 | 9,10               | 0,69  | 1,04 | 9,10               | 0,39  | 0,58 |
| 9,20               | 1,02  | 1,52 | 9,20               | 0,68  | 1,03 | 9,20               | 0,38  | 0,57 |
| 9,30               | 1,01  | 1,51 | 9,30               | 0,68  | 1,02 | 9,30               | 0,38  | 0,57 |
| 9,40               | 1,00  | 1,50 | 9,40               | 0,67  | 1,01 | 9,40               | 0,37  | 0,56 |
| 9,50               | 0,99  | 1,49 | 9,50               | 0,66  | 0,99 | 9,50               | 0,37  | 0,55 |
| 9,60               | 0,98  | 1,47 | 9,60               | 0,65  | 0,98 | 9,60               | 0,36  | 0,54 |
| 9,70               | 0,97  | 1,46 | 9,70               | 0,65  | 0,97 | 9,70               | 0,36  | 0,54 |
| 9,80               | 0,96  | 1,45 | 9,80               | 0,64  | 0,96 | 9,80               | 0,35  | 0,53 |
| 9,90               | 0,95  | 1,43 | 9,90               | 0,63  | 0,95 | 9,90               | 0,35  | 0,52 |

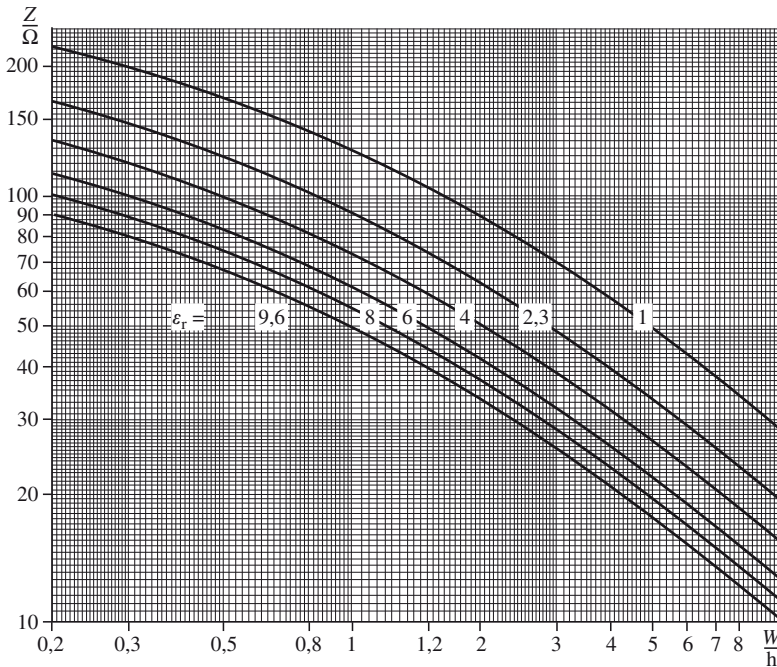


**Bild III-31** Wellenwiderstand  $Z/\Omega$  als Funktion von  $w/h$ , d.h. der Streifenbreite zur Substratdicke einer Streifenleitung mit der Permittivität  $\epsilon_r$  als Parameter

unterteilt, da für genauere Arbeiten jeweils die Streuungen der  $\epsilon_r$ -Werte des Trägermaterials beachtet werden müssen.

Allgemein gilt, dass niederohmige Leitungen breit und hochohmige Leitungen schmal (dünn) ausfallen. Das Ätzen muss sehr sorgfältig geschehen, damit sowohl die vorgegebenen Streifenbreiten ( $w$ ) ohne Schwankungen eingehalten werden und auch die Flanken der Streifen senkrecht sind und kein „Bahndammprofil“ aufweisen.

Aus Abschnitt 4.4, Gleichung (III.30) folgt für  $Z_k = 0$  der Kurzschlusswiderstand  $Z_k$  bzw. für  $Z_c \rightarrow \infty$  der Leerlaufwiderstand  $Z_l$ . Mit  $Z = Z$ , d.h. reellem Wellenwiderstand, werden:

$$Z_k = j \cdot Z \cdot \tan \beta \cdot l, \quad Z_l = -j \cdot Z \cdot \cot \beta \cdot l \quad (\text{III.30a, b})$$

Für Werte von  $l/\lambda \leq 0,25$  bedeutet dies induktives Verhalten der kurzgeschlossenen Leitung und kapazitives Verhalten bei Leerlauf. Diese Tatsache ist für Streifenleitungen besonders interessant, da somit in einfacher Weise Leitungen durch Stichleitungen für Transformationszwecke induktiv oder kapazitiv belastet werden können. Nachteilig ist u.U. die Länge der Stichleitung.

Gegenüber der Wellenlänge kurze ( $l < 0,1 \cdot \lambda$ ) Leitungsabschnitte können niederohmig kapazitiv und hochohmig induktiv genutzt werden. Nieder- bzw. hochohmig ist immer in Bezug auf den Wellenwiderstand des restlichen Systems – meist  $50 \Omega$  – zu verstehen.

Für niederohmige Leitungsabschnitte gilt näherungsweise

$$\omega \cdot C \approx \frac{1}{Z} \cdot \sin \beta \cdot l \quad (\text{III.44a})$$

und für hochohmige Leitungsabschnitte gilt näherungsweise

$$\omega \cdot L \approx Z \cdot \sin \beta \cdot l \quad (\text{III.44b})$$

$\beta = 2 \cdot \pi \cdot \lambda$  und  $l$  = Leitungslänge. Für den Wellenwiderstand  $Z$  ist hier der gewählte hochohmige bzw. niederohmige Wert des geplanten Blindelementes einzusetzen. Dabei ist auf den verfügbaren Platz für breite niederohmige Leitungsabschnitte zu achten. Bei hochohmigen Strecken wird die Leitung u.U. unrealisierbar schmal.

In Bild III-32 ist die Realisierung einer Parallelresonanz an einer Streifenleitung durch eine niederohmige (breite) kapazitive und eine hochohmige (schmale) induktive Stichleitung dargestellt.

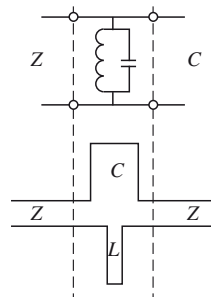


**Bild III-32**  
Parallelresonanz an einer Streifenleitung durch eine niederohmige kapazitive und eine hochohmige induktive Stichleitung



Für Frequenzen im hunderter THz (Tera [10<sup>15</sup>] Hertz) Bereich, (oder zehntel PHz (Peta [10<sup>18</sup>] Hz) also Lichtwellen dienen Glasfaser-Lichtwellenleiter (LWL) als Leiter. Da dieser Frequenzbereich im Allgemeinen digital bearbeitet wird, sind die weiteren Betrachtungen hierzu in Kapitel „XII Nachrichtenübertragung über Lichtwellenleiter“ zu finden.

## 7 s-Parameter

Die Vierpolparameter (Abschnitt II, Vierpole, Zweitore) betrachteten Systeme in der Widerstands-, Leitwert- oder Kettenform. Die Probleme, die sich auf Leitungen durch Reflexionen ergeben, blieben dabei unberücksichtigt. Wie die Leitungsgleichungen (III.9a, b) aber zeigen, sind allgemein eine hin- und eine rücklaufende Welle auf Leitungen wirksam. Dies macht sich besonders bei hohen Frequenzen bemerkbar, was durch eine veränderte Betrachtungsweise mit Hilfe der *Scatter-Parameter*, auch *Streu-Parameter* oder kurz *s-Parameter*, berücksichtigt werden kann. Diese zunächst für Leitungsbetrachtungen entwickelten Systemgrößen haben mit dem Übergang zu höheren Frequenzen erheblich an Bedeutung gewonnen. Ausgang ist nicht mehr eine Spannung oder ein Strom, sondern eine normierte Leistungswelle, was gleichbedeutend mit der Wurzel aus einer Leistung ist. Allgemein:  $a = U/\sqrt{Z}$  bzw.  $I \cdot \sqrt{Z}$ . Auf die Gleichung (III.9) angewandt bedeutet dies, daß  $U = \underline{U}_i$  bzw.  $\underline{U}_r$  und  $R = \underline{Z}$  werden. In der Praxis kann dabei stets der reelle Wellenwiderstand  $Z$  statt des komplexen Wellenwiderstandes  $\underline{Z}$  eingesetzt werden.

$$\frac{U(x)}{\sqrt{Z}} = \frac{U_h}{\sqrt{Z}} + \frac{U_r}{\sqrt{Z}} = a_x + b_x \quad (\text{III.45})$$

mit hinlaufender Welle  $a = A \cdot e^{-\gamma \cdot x}$  und rücklaufender Welle  $b = B \cdot e^{\gamma \cdot x}$ .  $A$  und  $B$  stellen dann jeweils die normierten Leistungswellen dar.

Am Anfang der Leitung, Index 1, gilt dann:

$$\frac{U_1}{\sqrt{Z}} = a_1 + b_1 \quad (\text{III.46a})$$

und am Ende der Leitung, Index 2, gilt:

$$\frac{U_2}{\sqrt{Z}} = a_2 + b_2 \quad (\text{III.46b})$$

D.h., es tritt am Eingang eine rücklaufende Welle  $b_1$  auf, die einerseits aus reflektierten Anteilen von  $a_1$  am Anfang und andererseits aus Anteilen von  $a_2$  am Ende der Leitung besteht. Entsprechend existiert eine zusammengesetzte Welle  $b_2$  am Ende des Systems aus direkt am Ende von  $a_2$  reflektierten Anteilen und von  $a_1$  Anteilen, die vom Anfang der Leitung stammen. Der Zusammenhang zwischen diesen verschiedenen Komponenten wird durch die *s-Parameter* wie folgt beschrieben:

$$b_1 = s_{11} \cdot a_1 + s_{12} \cdot a_2 \quad (\text{III.47a})$$

$$b_2 = s_{21} \cdot a_1 + s_{22} \cdot a_2 \quad (\text{III.47b})$$

Diese zunächst für Leitungen entwickelte Betrachtungsweise wird in der Höchstfrequenztechnik praktisch ausschließlich angewandt. Da Transistoren oberhalb von etwa 100 MHz weitgehend durch ihre *s-Parameter* beschrieben werden, seien an Hand von Bild III-33 die Bedeutungen der verschiedenen *s-Parameter* näher erläutert.

$$s_{11} = \frac{\underline{U}_{h1}}{\sqrt{Z}} = 0$$

$$s_{11} = \frac{U_{r1}}{U_{h1}} \quad \text{Eingangsreflexionsfaktor}$$

$$s_{12} = \frac{\underline{U}_{h1}}{\sqrt{Z}} = 0$$

$$s_{12} = \frac{U_{r1}}{U_{h2}} \quad \text{Rückübertragungsfaktor}$$

$$s_{21} = \frac{\underline{U}_{h2}}{\sqrt{Z}} = 0$$

$$s_{21} = \frac{U_{r2}}{U_{h1}} \quad \text{Vorwärtsübertragungsfaktor}$$

$$s_{22} = \frac{\underline{U}_{h1}}{\sqrt{Z}} = 0$$

$$s_{22} = \frac{U_{r2}}{U_{h2}} \quad \text{Ausgangsreflexionsfaktor}$$

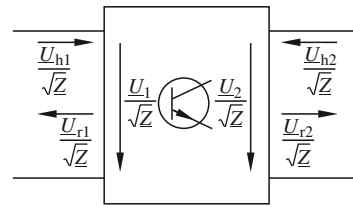


**Bild III-33** Grundgrößen der *s-Parameter*, dargestellt an einem Transistor

Wie aus den Definitionen hervorgeht, können alle *s-Parameter*, obwohl zu Leistungswellen gehörig, als Spannungsverhältnisse gemessen werden. Das Problem besteht allerdings darin, dass die Wellenflussrichtungsabhängig zu messen sind. Dies ist mit sog. Richtkopplern möglich. Als Reflexionsfaktoren sind die *s-Parameter* dimensionslos und werden i.a. als komplexe Größen mit Betrag und Phase dargestellt. Zum Beispiel:

$$s_{21} = 3,3 \cdot e^{j \cdot 61^\circ}$$

Die grafische Darstellung benutzt Polarkoordinaten. Wirkliche Reflexionsfaktoren im klassischen Sinne sind aber nur die Größen  $s_{11}$  und  $s_{22}$ , die grafisch meist im Smith- oder Kreis-Diagramm (s.d.) dargestellt werden. Mitunter findet man auch eine Komponentendarstellung nach Real- und Imaginärteil.

## 7.1 Signalflussdiagramm

Die praktische Anwendung der *s-Parameter* führt zu einer veränderten Betrachtung von Schaltungen in

Form von Signalflussdiagrammen. Hierzu gehören folgende Regeln:

1. Jede Variable,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  und  $b_2$  wird durch einen Knoten dargestellt.
2. Jeder  $s$ -Parameter,  $s_{11}$ ,  $s_{12}$ ,  $s_{21}$  und  $s_{22}$  wird durch einen Zweig dargestellt.
3. Die Zweige gehen von den Knoten der unabhängigen Variablen aus und enden bei den Knoten der abhängigen Variablen.
4. In den  $s$ -Parameter-Gleichungen sind  $a_1$  und  $a_2$  die unabhängigen Variablen und  $b_1$  und  $b_2$  die abhängigen Variablen.
5. „Jeder Knoten ist gleich der Summe der darin endenden Zweige.“

In Bild III-34 ist das Signalflussdiagramm eines einfachen Vierpols gezeigt. In III.34a sind die „reflektierten“ Größen mit ihren Knoten  $b_1$  und  $b_2$  zunächst zur „Gewöhnung“ getrennt dargestellt. In III.34b sind die Signalflüsse dann zusammengefasst. Aus den Diagrammen ergibt sich sofort:

$$b_1 = s_{11} \cdot a_1 + s_{12} \cdot a_2 \quad (\text{III.47c})$$

$$b_2 = s_{21} \cdot a_1 + s_{22} \cdot a_2 \quad (\text{III.47d})$$

Diese Gleichungen sind, wie nicht anders zu erwarten war, mit Gleichung (III.47a und b) voll identisch.

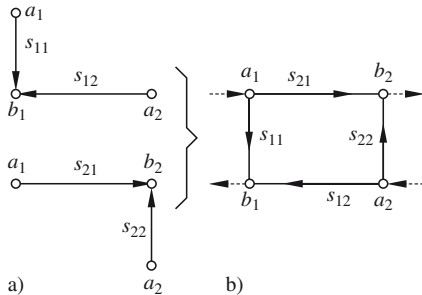


**Bild III-34** Signalflussdiagramm eines Vierpols

- a) getrennte Darstellung
  - b) zusammengefasste Darstellung
- $a$ : hineinfließende Wellen,  $b$ : rückfließende Wellen,  $s_{xx}$ :  $s$ -Parameter

Am Bild III-34a wird jetzt auch leicht ersichtlich, was zunächst etwas willkürlich erschien, nämlich die Entstehung der abfließenden Größen  $b_1$  und  $b_2$ .  $a_1$  ist die dem Eingang des Vierpols als Steuersignal zufließende Leistungswelle. Davon wird wegen fehlerhafter Anpassung ein Bruchteil, nämlich  $s_{11} \cdot a_1$  reflektiert. Dem Ausgang des Vierpols fließt eine Leistungswelle  $a_2$  zu, welche die gleiche (!) Flussrichtung wie  $b_1$  hat und durch „Übersprechen“ mit einem Anteil  $s_{12} \cdot a_2$  an den Eingang gelangt. Die im Ausgang abfließende Leistungswelle  $b_2$  ist das dem Verbraucher zufließende Nutzsignal. Es besteht aus dem mit der gleichen Flussrichtung wie  $b_2$  behafteten Eingangssignal  $a_1$  verstärkt durch  $s_{21}$  also  $s_{21} \cdot a_1$ , und einem am Ausgang reflektierten Anteil  $s_{22} \cdot a_2$  von

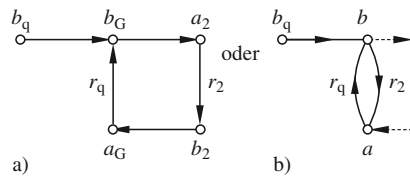


**Bild III-35** Signalflussdiagramm des belasteten Generators

- a) getrennte Darstellung
  - b) zusammengesetzte Darstellung
- $b$ : abfließende Welle,  $a$ : rückfließende Welle,  $b_q$  = normierte Leistungswelle der Quelle,  $r_q$  = Reflexionsfaktor der Quelle und  $r_2$  = Reflexionsfaktor der Last

einer auf den Ausgang aufgetroffenen Leistungswelle  $a_2$ , die in irgendeiner Form vom angeschlossenen Verbraucher kommt.

Die Zusammenhänge ändern sich, wenn Belastungen wirksam werden. Hierzu zunächst Bild III-35 mit dem Signalflussdiagramm des belasteten Generators. Warum die abfließenden Wellen jetzt die Bezeichnung  $b$  führen und die rück-(zu-)fließenden Wellen jetzt auf  $a$  lauten, wird sofort klar, wenn man noch einmal Bild III-34b ganz rechts mit den gestrichelten Pfeilen betrachtet.  $b_q$  ist die normierte Leistungswelle des Generators und  $r_q$  sein Reflexionsfaktor. Aus Bild III-35b kann sofort abgelesen werden:

$$b = b_q + r_q \cdot a \quad \text{und} \quad a = r_2 \cdot b \quad (\text{III.48a, b})$$

Wechselweises Einsetzen von  $a$  bzw.  $b$  liefert:

$$b = \frac{b_q}{1 - r_q \cdot r_2} \quad \text{und} \quad a = \frac{b_q}{1 - r_q \cdot r_2} r_2 \quad (\text{III.48c, d})$$

Die maximal der Quelle entnehmbare Wirkleistung  $P_{W \max}$  folgt – mit den konjugiert komplexen Größen  $a^*$  und  $b^*$  – aus der von der Last aufgenommenen Wirkleistung  $P_W$  aus zugeführten Leistung  $a \cdot a^*$  minus reflektierter Leistung  $b \cdot b^*$  zu:

$$P_W = a \cdot a^* - b \cdot b^* = |a|^2 \cdot (1 - |r_2|^2) \quad (\text{III.49})$$

Im optimalen Falle soll die von der Last aufgenommene Leistungswelle  $a$  gleich der von der Quelle (Generator) abgegebenen Leistungswelle  $b$  nach Gleichung (III.45c) sein. Daraus folgt für die Leistung  $P_W$ :

$$P_W = |b_q|^2 \cdot \frac{1 - |r_2|^2}{|1 - r_q \cdot r_2|^2} \quad (\text{III.50})$$

Das Maximum hieraus folgt für das Minimum des Nenners. Die Differenzierung der Beträge von Gleichung (III.50) liefert ein Leistungsmaximum für  $|r_q| = |r_2|$  und aus der Phasenbedingung ergibt sich  $r_2 = r_q^*$ . Dies ist die allgemeine Anpassung auf einen konjugiert komplexen Abschlusswiderstand für die Entnahme einer maximalen Leistung aus einem

Generator mit komplexem Innenwiderstand. Somit wird  $P_{W \max}$ :

$$P_{W \max} = |b_q|^2 \cdot \frac{1}{1 - |r_q|^2} \quad (\text{III.51})$$

Die Zusammenfassung der bisherigen Betrachtungen liefert das Signalfussdiagramm des beschalteten Vierpols (Bild III-36). Die im Ausgang, Index 2, umgesetzte Leistung  $P_{W2}$  ergibt sich entsprechend Gleichung (III.49) zu:

$$P_{W2} = b_2 \cdot b_2^* - a_2 \cdot a_2^* = |b_2|^2 \cdot (1 - |r_2|^2) \quad (\text{III.49a})$$

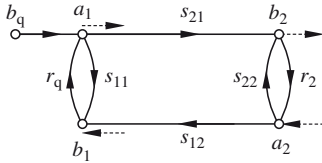


**Bild III-36** Signalfussdiagramm des beschalteten Vierpols

$b_q$  = normierte Leistungswelle der Quelle,  $a$ : hinlaufende Wellen,  $b$ : ablaufende Wellen,  $s_{xx}$  =  $s$ -Parameter des Vierpols (z.B. Transistor),  $r_q$  = Reflexionsfaktor der Quelle und  $r_2$  = Reflexionsfaktor der Last

## 7.2 Leistungsverstärkung

Mit den Grundgleichungen der  $s$ -Parameter und den Signalfüssen der äußeren Reflexionsfaktoren ergibt sich die Wirkleistung  $P_{W2}$  nach einigen Umformungen zu:

$$P_{W2} = |b_q|^2 \cdot \frac{|s_{21}|^2 \cdot (1 - |r_2|^2)}{|(1 - s_{11} \cdot r_q) \cdot (1 - s_{22} \cdot r_2) - s_{21} \cdot s_{12} \cdot r_q \cdot r_2|^2} \quad (\text{III.52})$$

Bezogen auf die maximal dem Generator entnehmbare Wirkleistung  $P_{W \max}$  (Gleichung (III.51)) und mit der Randbedingung  $s_{12} \rightarrow 0$  folgt daraus die wichtige Leistungsverstärkung  $G$  zu:

$$\frac{P_{W2}}{P_{W \max}} = G = \frac{|s_{21}|^2 \cdot (1 - |r_2|^2) \cdot (1 - |r_q|^2)}{|(1 - s_{11} \cdot r_q) \cdot (1 - s_{22} \cdot r_2)|^2} \quad (\text{III.53})$$

Diesen Ausdruck kann man in 3 Komponenten aufspalten:

$$G = G_1 \cdot G_0 \cdot G_2 = \frac{1 - |r_q|^2}{|1 - s_{11} \cdot r_q|^2} \cdot |s_{21}|^2 \cdot \frac{1 - |r_2|^2}{|1 - s_{22} \cdot r_2|^2} \quad (\text{III.53a})$$

Diese einzelnen Komponenten haben folgende Bedeutung:

$G_1$  = Wirkleistungsverstärkung am Eingangstor, maximal für  $r_q = s_{11}^*$ :

$$G_{1 \max} = \frac{1}{1 - |s_{11}|^2}$$

$G_0 = |s_{21}|^2$  = Wirkleistungsverstärkung des Vierpols (Zweiters)

$G_2$  = Wirkleistungsverstärkung am Ausgangstor, maximal für  $r_2 = s_{22}^*$ :

$$G_{2 \max} = \frac{1}{1 - |s_{22}|^2}$$

Die maximale Leistungsverstärkung des im Eingang und Ausgang konjugiert komplex angepassten Vierpols,  $G_{\max}$ , oder MAG = Maximum available gain wird dann:

$$\text{MAG} = G_{1 \max} \cdot G_0 \cdot G_{2 \max} = \frac{|s_{21}|^2}{(1 - |s_{11}|^2) \cdot (1 - |s_{22}|^2)} \quad (\text{III.54})$$

Dieser MAG-Wert ist für die Beurteilung von HF-Transistoren bedeutsam, da er die (theoretisch) maximal mögliche Leistungsverstärkung des Bauelementes angibt. Wenngleich dieser Wert in der Praxis nicht erreicht werden kann, so sind die Randbedingungen der konjugiert komplexen Anpassung in Schaltungen anzustreben und Sorge zu tragen, dass  $s_{12}$  nicht durch den Schaltungsaufbau vergrößert wird. Weitere Folgerungen hierzu ergeben sich aus dem Arbeiten mit dem Kreisdiagramm.

## 8 Kreisdiagramm

Komplexe Widerstände werden i.a. in der komplexen Ebene dargestellt (Bild III-28a). Werden darin Kreise für konstante Anpassungsfaktoren (Stehwellenverhältnisse)  $m$  (s.a. Gleichung III.32) und Kurven für konstante  $|\Gamma|$ -Werte aufgetragen, so gelangt man zum *Buschbeck*-Diagramm. Wegen der unendlich großen komplexen Ebene ist auch das Diagramm unendlich groß. Da der Reflexionsfaktor  $\Gamma$  für passive Systeme nur Beträge zwischen Null und Eins annehmen kann, gehört dazu lediglich eine Kreisebene mit dem Radius 1 (Bild III-37b). Die Transformationsgleichung hierzu ist Gleichung (III.15) mit

$$\Gamma = \frac{z - 1}{z + 1} \quad (\text{III.15})$$

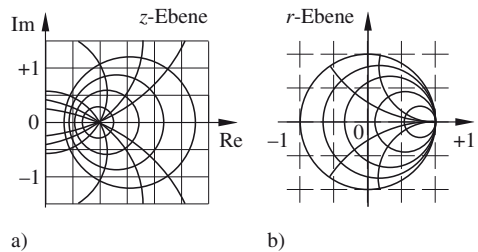


**Bild III-37** Kreisdiagramm

- a) komplexe Widerstandsebene mit Kreisen für  $m = \text{const}$  und Kurven für  $|\Gamma| = \text{const}$  (Buschbeck-Diagramm)
- b) komplexe Reflexionsfaktorebene mit dem Radius 1 und Kreisen für konstante Wirkanteile und Kurven für konstante Blindanteile

$\Gamma$  = komplexer Reflexionsfaktor und  $z$  = auf den Wellenwiderstand  $Z$  normierter komplexer Widerstand. Das so entstandene Diagramm ist vollständig in Bild III-38 dargestellt (vergrößerte Kopie zweckmäßig). Der äußere Kreis mit der Gradeinteilung ist der Kreis für den Reflexionsfaktor 1 und die verschiedenen Phasenwinkel von  $0 \dots 180^\circ$ . Kleinere Reflexionsfaktoren sind dann Kreise mit kleineren Radien. Der Mittelpunkt entspricht dem Reflexionsfaktor 0. Obwohl das Kreisdiagramm eigentlich nur Reflexionsfaktoren darstellt, werden diese konzentrischen Kreise nicht berücksichtigt, da sie jederzeit leicht mit einem Zirkel einzutragen sind. Die dazu notwendige Skala befindet sich i.a. am Rande des Diagramms. Ins Diagramm eingetragen sind normierte Wirk- und Blindwiderstände. Die nach rechts verschobenen Kreise sind Kreise konstanten normierten Realteils (meist auf Wellenwiderstand  $Z$  normiert). Die nach oben gerichteten Kurven (Teile von apollonischen Kreisen) entsprechen konstanten normierten positiven Blindwiderständen, und die Kurven in der unteren Halbebene gehören zu konstanten normierten negativen Blindwiderständen. Ein Punkt in dem Di-

agramm entspricht der Serienschaltung normierter Wirk- und Blindwiderstände. Eine Spiegelung am Mittelpunkt oder eine Drehung um  $180^\circ$ , eine sog. Inversion, wandelt die normierte Serienschaltung in eine normierte Parallelschaltung um.

Obwohl das Kreisdiagramm zunächst nur für Widerstände entworfen wurde, ermöglicht die Inversion, d.h. die Drehung um  $180^\circ$ , den Übergang zu Leitwerten. Diese Drehung entspricht einer  $\lambda/4$ -Transformation auf einer Leitung. In der Praxis bedeutet dies aber auch, dass ein um  $180^\circ$  gedrehtes Kreisdiagramm ein Leitwertdiagramm darstellt (Bild III-40b). Die obere Halbebene weist jetzt negative normierte Blindleitwerte und die untere Halbebene positive normierte Blindleitwerte aus. In beiden Fällen bedeutet dies aber, dass die obere Halbebene (normierte) Induktivitäten ausweist und die untere Halbebene (normierte) Kapazitäten.

■ **Beispiel III.4** (Bild III-39):

1.  $Z = (200 + j100) \Omega$ , Normierungswiderstand  $Z = 100 \Omega$ :  $z = 2 + j1,0$ ; in Bild III-30 die Serienschaltung einer Induktivität mit einem Widerstand. Die Inversion liefert dazu  $y = 0,4 - j0,2$ . (Achtung: Untere Halbebene liefert negative Vorzeichen!  $1/j\omega \cdot L = -j/\omega \cdot L$ ) Zum Normierungswiderstand

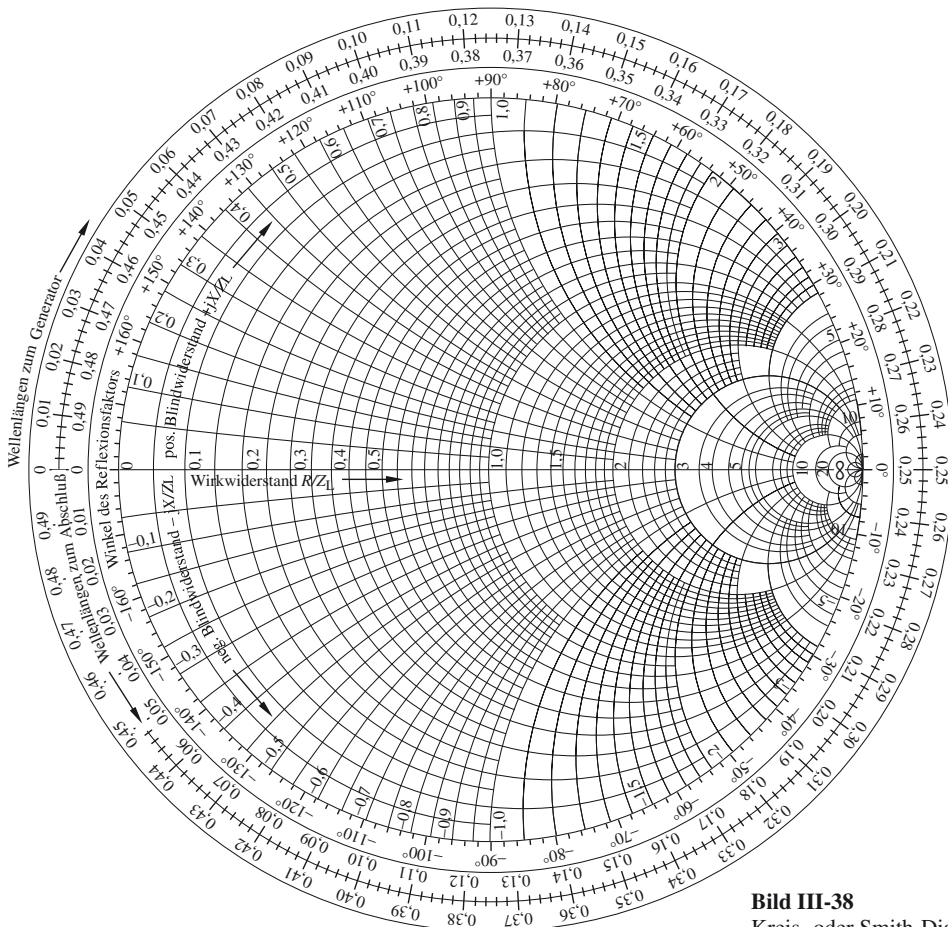


**Bild III-38**  
Kreis- oder Smith-Diagramm

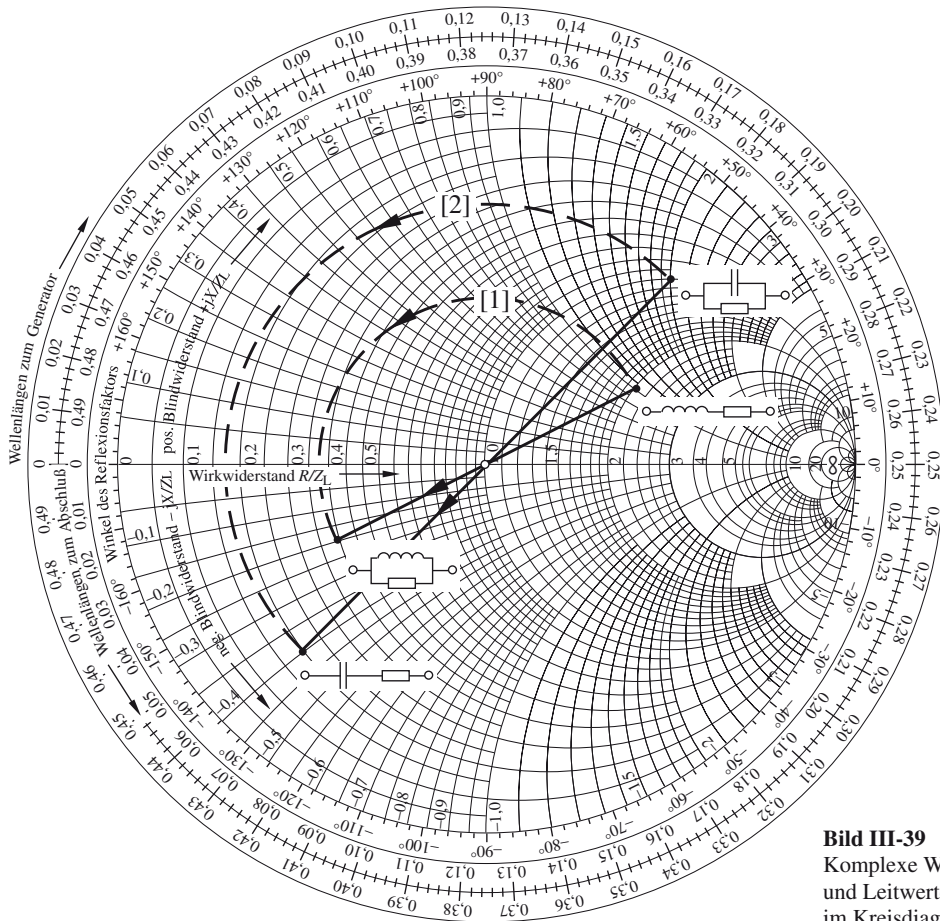


**Bild III-39**  
Komplexe Widerstände  
und Leitwerte  
im Kreisdiaagramm

100  $\Omega$  gehört der Normierungsleitwert  $1/100 \Omega = 10 \text{ mS}$ . D.h. die normierte äquivalente Parallelschaltung aus Induktivität und Widerstand hat  $(4 - j2) \text{ mS}$ , was für den Realteil  $250 \Omega$  und den Blindanteil  $j500 \Omega$  bedeutet. (Für die Bestimmung der Induktivität wird noch die Frequenz benötigt.)

2.  $\underline{Y} = (0,01 + j0,02) \text{ S}$  die Parallelschaltung eines Widerstandes mit einem Kondensator [2]. Bild III.30. Normierungsleitwert  $10 \text{ mS}$ :  $y = 1 + j2$ . Die Inversion liefert jetzt  $z = 0,2 - j0,4$  und daraus  $\underline{Z} (40 - j20) \Omega$ . (Genauere Ergebnisse als mit Bild II.31 lassen sich mit den Original(großen) Kreisdiaagrammen erzielen.)

Nachdem eine Drehung um  $180^\circ$  im Kreisdiaagramm  $\lambda/4$ , also der Strecke einer Viertelwellenlänge entspricht, bedeutet eine vollständige Drehung um  $360^\circ$  eine halbe Wellenlänge, d.h.  $\lambda/2$ . Womit gemäß Leitungstransformation wieder die Ausgangswerte der Belastung einer Leitung erreicht wären (s.a. Gleichung III.31).

In Bild III-40 ist gezeigt, welche Konsequenzen sich bei Bewegungen längs der verschiedenen Kurven für die Bauelemente einer Schaltung ergeben. In Bild III-40a liegt die Widerstandsebene vor. Bewegt man sich von einem Fixpunkt A auf einem Kreis, d.h. bei konstantem Widerstand, nach rechts, so bedeutet dies eine Zunahme der induktiven Serienkomponente. Das würde einer Schaltung mit vergrößerter Serieninduktivität entspre-

chen. Bewegt man sich auf dem gleichen Kreis vom Fixpunkt A nach links, so entspricht dies der Zunahme einer kapazitiven Serienkomponente. Bewegt man sich vom Punkt A auf einer Kurve für konstante Blindkomponente nach innen, so bedeutet dies die Erhöhung eines reellen Serienwiderstandes, in der umgekehrten Richtung die Verminderung einer Serienwiderstandskomponente.

Im Leitwertdiaagramm (Bild III-40b) bedeutet eine Rechtsdrehung vom Punkt B eine Zunahme der kapazitiven Parallelkapazität und eine Links-drehung eine Zunahme einer Parallelinduktivität. Bewegungen bei konstanten Blindanteilen führen zur Vergrößerung des parallelen Wirkleitwertes, wenn sie nach innen gerichtet sind, und zur Verminderung bei einer Bewegungsrichtung nach außen.

Derartige Bewegungen oder Transformationen liefern zunächst einmal lediglich veränderte Schaltungen. Im Kreisdiaagramm kann man aber sofort noch etwas anderes ablesen. Der Endpunkt einer Bewegung von A oder B hinweg liegt auf einem Kreis mit einem anderen Reflexionsfaktor. Es kann aber noch mehr erreicht werden. Wird in Bild III-40a der Pfeil bei  $C_s$  soweit verlängert, dass er die reelle Achse erreicht, so



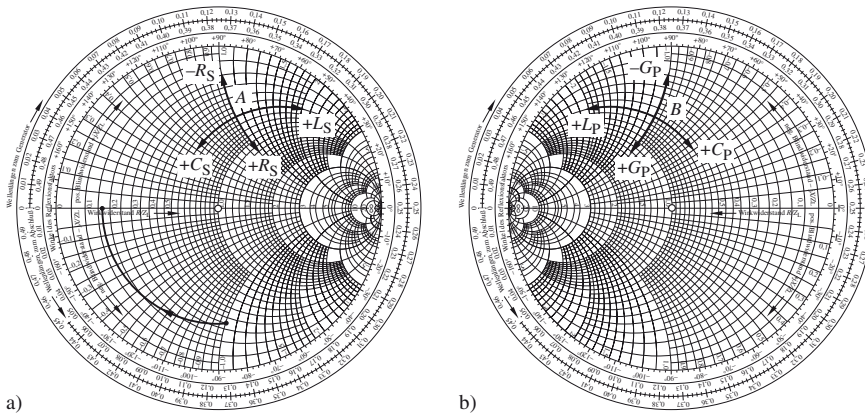


**Bild III-40** Widerstands- und Leitwertdiagramme  
a) Kreisdiagramm für Widerstände  
b) Kreisdiagramm für Leitwerte (Erläuterungen im Text)

hat man einen komplexen Widerstand gemäß Punkt A ( $R_s + j\omega L_s$ ) durch Zuschalten einer Serienkapazität reell gemacht. Allerdings wurde lediglich die induktive Komponente kompensiert und als Realteil die schon vorhandene Wirkkomponente erhalten. Wenn man allerdings vom Punkt A Parallelkomponenten hinzufügt, könnte man auch andere reelle Werte erreichen. Um das im Kreisdiagramm auszuführen, muss eine Inversion durchgeführt werden, d.h., man muss ins Leitwertdiagramm übergehen. Führt das noch nicht zum gewünschten Erfolg, muss u.U. wieder ins Widerstandsdiagramm rückinvertiert werden: Ein offensichtlich recht mühsames Verfahren.

### 8.1 Doppel-Kreisdiagramm

Diese und viele andere Aufgaben lassen sich mit Hilfe eines Doppel-Kreisdiagrammes lösen. (z.B. von H. Götting sen., Celler Str. 5, 31275 Röddensen zu beziehen).

Das zweifarbige Doppel-Kreisdiagramm hat die Inversion direkt eingearbeitet. Eine Serien-Parallel-Umwandlung geschieht jetzt so, dass lediglich die einen Koordinaten in das eine Diagramm (z.B. blau) eingetragen werden und danach die Koordinaten der anderen Farbe abgelesen werden. Die oben angeführten Beispiele können mit den Lösungen im Doppel-diagramm direkt abgelesen werden.

Eine weitere Transformationsaufgabe ist mit dem Kreisdiagramm elegant zu lösen. In Abschnitt 4.4 folgt aus der Gleichung (III.30) die Veränderung von  $Z_a$  über eine Änderung der Leitungslänge  $l$ . Die Lösung dieser Aufgabe ist im Kreisdiagramm leicht zu bewerkstelligen. Es ist lediglich zu berücksichtigen, daß eine Drehung im Uhrzeigersinn in Richtung zum Generator wirkt, eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn in Richtung zur Last transformiert.

■ **Beispiel III.5** (Bild III-40a): In Bild III-31a ist ein Punkt L eingetragen, zu dem ein normierter komplexer Widerstand  $z = 0,35 - j1,0$  gehört. Wird diesem Widerstand in Richtung zum Generator ein dem (Normierungs-)Wellenwiderstand entsprechendes

Leitungsstück vorgeschaltet, so ändert sich der am Leitungsanfang auftretende Widerstand mit der Leitungslänge gemäß Gleichung III.30. Im Kreisdiagramm bedeutet dies eine Drehung im Uhrzeigersinn auf einem Kreisbogen mit konstantem Radius, d.h. konstantem Betrag des Reflexionsfaktors. In Bild III-40a ist der Kreisbogen bis zur reellen Achse geführt und trifft dort auf den (normierten) Widerstandswert  $r = 0,17$ . Die zugehörige Leitungslänge (am inneren  $l/\lambda$ -Kreis abgelesen) beträgt  $l/\lambda = 0,132$ . Dies bedeutet, daß eine wellenwiderstandsrichtige Leitung mit der Länge  $l = 0,132 \cdot \lambda$  den komplexen Anfangswiderstand  $z$  in einen reellen Widerstand  $R = 0,17 \cdot Z_0 \Omega$  transformiert hat.

In der Praxis werden für Transformationen alle Möglichkeiten kombiniert, wobei gerade die Streifenleitungen besonders vielfältige Möglichkeiten bieten.

Das Doppel-Kreisdiagramm zeigt vor allem bei zusammengesetzten und mehrgliedrigen Transformationen seine Vorteile. Es ermöglicht sowohl den Schaltungsentwurf als auch seine Dimensionierung.

■ **Beispiel III.6** (Bild III-41): Ein Widerstand von  $50 \Omega$  soll mit (verlustfreien) Blindelementen auf einen Wert von  $200 \Omega$  transformiert werden. Wie sieht die Schaltung aus und wie ist sie zu dimensionieren?

Zunächst ist für den Eintrag ins Diagramm zu normieren. Da keine speziellen Leitungs(wellen)widerstände vorliegen, bieten sich  $100 \Omega$  an. Somit  $r_1 = 0,5$  und  $r_2 = 2,0$ . Diese Werte sind bei Punkt A bzw. D im Widerstandsdiagramm zu finden. (Im Leitwertdiagramm sind dort die zugehörigen Leitwerte mit  $2,0$  und  $0,5$  abzulesen.) Es ist jetzt ein geschlossener Transformationsweg im Diagramm zu entwickeln! Um eventuellen kapazitiven Komponenten (durch die Schaltung) bei  $r_1$  vorzubeugen, soll die Schaltung mit einer Parallel-Kapazität beginnen. Dies bedeutet eine Rechtsdrehung auf einem Kreis mit konstantem Leitwert im Leitwertdiagramm. (Kurvenzug von A nach B in Bild III-41a.) Von Punkt B aus ist jetzt bei konstanter Wirkkomponente im Widerstandsdiagramm soweit nach rechts zu drehen (Punkt C) bis zu einem Kurvenzug für konstanten Wirkleitwert, der bei weiterer Rechtsdrehung zum Punkt D führt.

Die Schaltung dieses Kurvenzuges sieht wie in Bild III-41b aus. Die Strecken AB und CD waren Rechtsdrehungen im Leitwertdiagramm, also Parallel-Kapazitäten. Die Strecke BC gehörte zu einer Rechtsdrehung im Widerstandsdiagramm und bedeutet damit eine Serien-Induktivität.

Zur Dimensionierung müssen die normierten Werte aus dem Diagramm ermittelt werden. Der Bogen AB verläuft im Leitwertdiagramm von  $0 \dots 2,0$ , d.h.  $b_1 = 2,0$ . Der Bogen BC verläuft im Widerstandsdiagramm von  $-0,25$  (kapazitive Halbebene, daher minus) bis  $0,65$ . Die Länge des Bogens ist dann C minus B, also

$0,65 - (-0,25) = 0,9 = x$ . Der Bogen  $CD$  liegt in der induktiven Halbebene des Leitwertdiagramms und beginnt demgemäß bei  $-1,3$  und reicht bis  $0$  bei  $D$ . Die Bogenlänge ist  $D$  minus  $C$ , also  $0 - (-1,3) = 1,3 = b_2$ . Die Konduktanzen bzw. Reaktanzen der Bauelemente betragen  $B_1 = b_1 \cdot 10 \text{ mS} = 20 \text{ mS}$ ,  $B_2 = b_2 \cdot 10 \text{ mS} = 9 \text{ mS}$  und  $X = x \cdot 100 \text{ }\Omega = 90 \text{ }\Omega$ . Um daraus Kondensatoren und Induktivitäten zu ermitteln, muss noch die Frequenz bekannt sein.

Das Beispiel III.6 hat die grundsätzliche Arbeit im Doppel-Kreisdiagramm erläutert. Die benutzten Bögen waren zunächst willkürlich in ihren Längen gewählt. Durch Variation oder Vorgabe bestimmter Elemente lässt sich sehr leicht ein passender geschlossener Transformationsweg finden. Ein Beginn im Punkt  $A$ , mit einem Bogen nach links oben, hätte eine Parallel-Induktivität als Eingang zur Folge gehabt, ein Beginn des Transformationsweges nach rechts oben eine Serien-Induktivität und der Beginn nach rechts unten eine Serien-Kapazität.

Ändert sich die Frequenz, so ändern sich die Längen der Bögen proportional. Mit steigender Frequenz steigen die Leitwerte, d.h. größere Bogenlängen, und sinken die Widerstände, d.h. kürzere Bogenlängen, der Blindelemente und umgekehrt.

8.2 s-Parameter im Kreisdiagramm

Die  $s_{11}$ - und  $s_{22}$ -Parameter lassen sich als Reflexionsfaktoren sehr gut im Kreisdiagramm darstellen und werden in den Prospekten auch häufig so veröffentlicht. Bei den Überlegungen zum MAG-Wert (Gleichung III.54) war die Notwendigkeit des konjugiert komplexen Reflexionsfaktors aufgetaucht. Im Kreisdiagramm ist ein solcher Wert leicht darstellbar, da für einen nach Betrag und Phase gegebenen  $s$ -Parameter nur das Vorzeichen des Phasenwinkels umzukehren und im Kreisdiagramm einzutragen ist. Die Größen  $G_{1\text{max}}$  und  $G_{2\text{max}}$  in Gleichung (III.54) verlangten aber diese konjugiert komplexen Reflexionsfaktoren an den Eingangs- bzw. Ausgangsklemmen eines Transistors. Wie gezeigt bietet das Kreisdiagramm die Möglichkeit, Transformationsschaltungen fast jeder beliebigen Art zu entwerfen. Es gibt aber noch eine Möglichkeit zu zeigen (nach Unterlagen von HewlettPackard), welche Verstärkungen sich ergeben, wenn die Anpassbedingungen nicht exakt erfüllt sind. Dies ist in der Praxis besonders für breitbandige Verstärker wichtig, da sowohl die Transistorendaten als auch die Schaltungen i.a. stark frequenzabhängig sind.

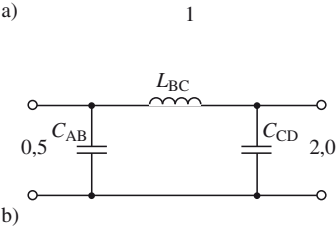
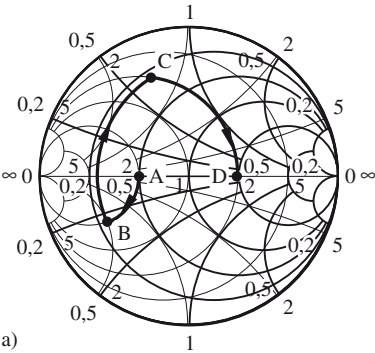


Bild III-41 Mehrgliedrige Transformation im Doppel-Kreisdiagramm

- a) Transformationsweg
- b) Schaltung (Erläuterung im Text)

Die Ortskurven für konstante Werte von  $G_1$  und  $G_2$  sind Kreise im Kreisdiagramm, deren Mittelpunkte auf einer Geraden vom Zentrum des Diagramms zum Punkt  $s_{11}^*$  bzw.  $s_{22}^*$ , d.h. den konjugiert komplexen  $s$ -Parametern, liegen.

Mit der normierten Verstärkung  $g_1$

$$g_1 = \frac{G_1}{G_{1\text{max}}} = \frac{G_1}{1 - |s_{11}|^2} \tag{III.55a}$$

beträgt der Radius  $R_G$  des Kreises für eine vorgegebene Verstärkung  $G_1$ :

$$R_G = \frac{\sqrt{1 - g_1} \cdot (1 - |s_{11}|^2)}{1 - (1 - g_1) \cdot |s_{11}|^2} \tag{III.55b}$$

Kreisradius für konstante Verstärkung

Tabelle III-11 Werte für Kreise konstanter Verstärkung im Eingang und Ausgang eines Transistors, dargestellt im Kreisdiagramm

| Eingang       |       |                          | Ausgang       |       |                          |
|---------------|-------|--------------------------|---------------|-------|--------------------------|
| $G/\text{dB}$ | $D_G$ | $R_G$                    | $G/\text{dB}$ | $D_G$ | $R_G$                    |
| 8,24          | 0,992 | 0 (Lage von $s_{11}^*$ ) | 3,73          | 0,759 | 0 (Lage von $s_{22}^*$ ) |
| 6,0           | 0,873 | 0,145                    | 3,0           | 0,705 | 0,193                    |
| 3,0           | 0,682 | 0,310                    | 2,0           | 0,629 | 0,299                    |
| 0             | 0,498 | 0,498                    | 1,0           | 0,554 | 0,369                    |
| -3,0          | 0,324 | 0,674                    | 0             | 0,482 | 0,482                    |
| -6,0          | 0,190 | 0,808                    | -1,0          | 0,414 | 0,559                    |



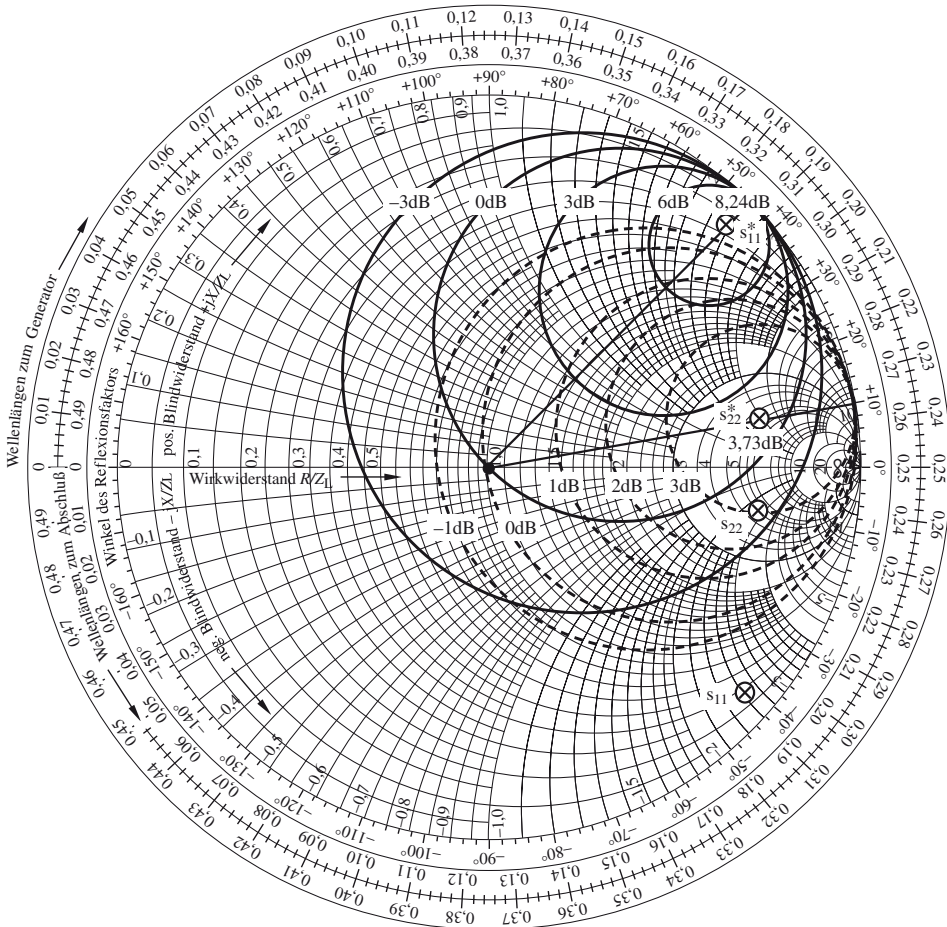


**Bild III-42** Kreise konstanter Verstärkung im Kreisdiaagramm, Lösung zu Beispiel III.7 (Erläuterungen im Text)

Distanz  $D_G$  des Kreismittelpunktes vom Zentrum des Diagramms in Beträgen des Reflexionsfaktors (gemäß Diagramm-Maßstab):

$$D_G = \frac{g_1 \cdot |s_{11}|}{1 - (1 - g_1) \cdot |s_{11}|^2}$$

Mittelpunkt Abstand für konstante Verstärkung  
(III.55c)

Die für die Eingangsseite mit  $s_{11}$  angeschriebenen Gleichungen gelten sinngemäß mit  $s_{22}$  für die Ausgangsseite eines Transistors. Die Verstärkungen  $G_1$  bzw.  $G_{1\max}$  sind in Gleichung (III.55a) in absoluten Zahlen einzusetzen, auch wenn sie allgemein in dB angegeben werden.

■ **Beispiel III.7** (Bild III-42): Für den Transistor CFY 11 von Siemens gelten bei 2 GHz und  $Z = 50 \Omega$  folgende  $s$ -Parameter:

$$\begin{aligned} s_{11} &= 0,922 \angle -41^\circ; & s_{12} &= 0,026 \angle 69^\circ \approx 0; \\ s_{21} &= 3,062 \angle 144^\circ; & s_{22} &= 0,759 \angle -11^\circ \end{aligned}$$

Damit ergibt sich auf der Eingangsseite

$$s_{11}^* = 0,922 \angle 41^\circ \quad \text{und} \quad G_{1\max} = 6,67 = 8,24 \text{ dB}$$

und für die Ausgangsseite

$$s_{22}^* = 0,759 \angle 11^\circ \quad \text{und} \quad G_{2\max} = 2,36 = 3,73 \text{ dB}$$

$$\text{MAG} = G_1 + G_0 + G_2 = 8,24 \text{ dB} + 9,72 \text{ dB} + 3,73 \text{ dB} = 21,7 \text{ dB}$$

Die Rechenwerte für  $R_G$  und  $D_G$  sind in der Tabelle III-11 zusammengestellt, und Bild III-42 zeigt die Auswertung im (Widerstands-)Kreisdiaagramm.

Ähnlich wie die Verstärkung lassen sich auch die Rauschzahlen als Kreise im Kreisdiaagramm oder in der komplexen Ebene darstellen. Diese Angaben werden i.a. von den Transistorherstellern in den Datenblättern gemacht.

## IV Antennen

### 1 Grundlagen

Die theoretischen Grundlagen und Ableitungen zu den Antennen hätten den Rahmen dieses Kapitels gesprengt, deshalb werden die wichtigsten Ergebnisse verwendet und, soweit möglich, anschaulich dargestellt. Für weitergehende Einzelheiten wird auf die Literatur verwiesen (z.B. [IV.1]). Die im folgenden dargestellten Verhältnisse gelten wegen des *Reziprozitätssatzes* für Sende- und Empfängerantennen gleichermaßen.

Obwohl die Antenne im Allgemeinen einen komplexen Widerstand darstellt, hat sich die Bezeichnung Widerstand mit dem Formelzeichen  $Z$  durchgesetzt und soll auch hier verwendet werden (Ausnahme: Kapitel 4.3).

- **Antenne als Strahler, Poynting-Vektor, Strahlungsdichte:** Antennen sind Strahler, die die über Kabel zugeführte elektrische Energie in Strahlungsenergie umsetzen. Man spricht hier von Strahlung, weil der Generator (Sendeantenne) nicht feststellen kann, in welchem Maße die abgestrahlte Energie durch Gebäude oder Empfangsantennen (Verbraucher) absorbiert wird. Es gibt also keine Rückwirkung vom Verbraucher auf den Generator. Das durch die Antenne erzeugte Feld ist ein elektromagnetisches Feld, d.h. elektrisches Feld und magnetisches Feld treten zusammen auf und stehen senkrecht aufeinander, wenn man sich im Fernfeld (s.u.) der Antenne befindet. Der Energietransport geschieht senkrecht zu der aus den Vektoren  $\vec{E}$  (elektrische Feldstärke) und  $\vec{H}$  (magnetische Feldstärke) aufgespannten Ebene und wird mit dem *Poyntingvektor*  $\vec{S}$  beschrieben:

*Poynting-Vektor, Strahlungsdichte:*

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad \text{bzw.} \quad |\vec{S}| = |\vec{E}| \cdot |\vec{H}| \cdot \sin \alpha \quad \text{in VA/m}^2 \quad (\text{IV.1})$$

$\alpha$  Winkel zwischen  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$ ,  $\vec{E} \times \vec{H}$  Vektorprodukt,  $\vec{E}$  elektrische Feldstärke in V/m,  $\vec{H}$  magnetische Feldstärke in A/m

Der Poynting-Vektor gibt die Strahlungsdichte in der Einheit Leistung pro Fläche an.

- **Frequenz, Wellenlänge:** Der Energietransport geschieht mit Lichtgeschwindigkeit  $c$ , wobei im Vakuum und näherungsweise auch in Luft gilt:  $\epsilon_r = \mu_r = 1$

$$\text{Lichtgeschwindigkeit: } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}} \quad (\text{IV.2})$$

$\epsilon_0$  elektrische Feldkonstante,  $\mu_0$  magnetische Feldkonstante

Zwischen der Wellenlänge  $\lambda$  und der Frequenz  $f$  einer elektromagnetischen Welle besteht die Beziehung:

$$\lambda \cdot f = c \quad (\text{IV.3})$$

$c$  Lichtgeschwindigkeit  $\approx 300\,000 \text{ km/s}$

- **Wellenwiderstand des leeren Raumes:** Das Verhältnis der Beträge von elektrischer und magnetischer Feldstärke ergibt unabhängig vom Ort einen konstanten reellen Wert und wird mit *Wellenwiderstand des leeren Raumes* bezeichnet:

*Wellenwiderstand des leeren Raumes:*

$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 \, \Omega \quad (\text{IV.4})$$

- **Dipol:** Die Abstrahlung des elektromagnetischen Feldes geschieht über eine Antenne, die man sich als eine am Ende leerlaufende Leitung vorstellen kann, die aufgeklappt wird, Bild IV-1. Antennen dieser Art heißen *Dipol*, weil sie aus zwei strahlenden Elementen bestehen.
- **Hertzscher Elementardipol:** Die Länge  $l$  der Leitung (Bild IV-1) ist viel kleiner als die Wellenlänge  $\lambda$ , und es ergibt sich längs der Leitung eine nahezu konstante Stromverteilung.

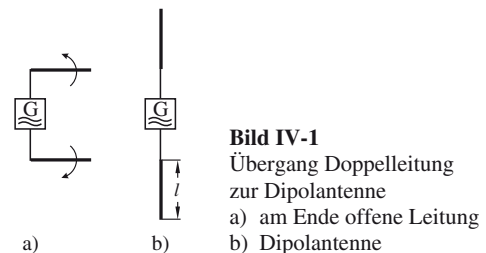


**Bild IV-1**  
Übergang Doppelleitung zur Dipolantenne  
a) am Ende offene Leitung  
b) Dipolantenne

Bild IV-2 zeigt das in der Umgebung der Antenne vorhandene elektromagnetische Feld zu den Zeitpunkten  $T/4$ ,  $T/2$  und  $3T/4$  ( $T$  Periodendauer,  $T = 1/f$ ).

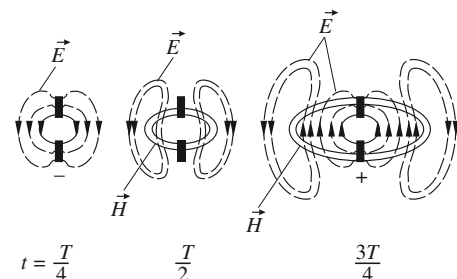


**Bild IV-2** Entstehung des elektromagnetischen Feldes einer Dipolantenne

- **Nahfeld – Fernfeld:** Der Übergang vom Nah- zum Fernfeld hängt von der Form der Antenne ab und liegt in der Größenordnung  $\lambda/2$ . Erst im Fernfeld stehen die Feldvektoren  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  senkrecht aufeinander. Elektrische und magnetische Feldstärke nehmen im Fernfeld gemäß  $1/r$  ( $r$  Entfernung zwischen Sendeantenne und dem betrachteten Ort) ab.
- **Polarisation:** Die Lage des elektrischen Feldes gibt die Polarisation an. Allgemein unterscheidet man:
  - **Elliptische bzw. kreisförmige Polarisation:** Die Feldvektoren  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  drehen sich ständig in Ellipsen- bzw. Kreisform, letztere nennt man *Zirkularpolarisation*. Je nach Drehrichtung spricht man von *rechts- bzw. linksdrehender Polarisation*.
  - **Lineare Polarisation:** Die Feldvektoren haben eine festgelegte Richtung. Liegt der elektrische Feldvektor  $\vec{E}$  parallel zur Erdoberfläche, handelt es sich um eine *horizontale Polarisation*, bei  $\vec{E}$  senkrecht zur Erdoberfläche um eine *vertikale Polarisation* (Bild IV-2).

Beispiele für horizontale Polarisation: UKW-Rundfunk, Fernsehen im Band III, IV und V. Beispiele für vertikale Polarisation: Lang-, Mittel- und Kurzwellenrundfunk, Fernsehen im Band I.

- **Ausbreitungsrichtung des elektromagnetischen Feldes:** Die Ausbreitung des elektromagnetischen Feldes geschieht senkrecht zur Dipolachse in allen Richtungen, nicht aber in Achsrichtung des Dipols.
- **Einseitig geerdete Antenne:** In der in Bild IV-1 dargestellten Dipolantenne kann anstelle des unteren Teils des Dipols eine *unendlich gut leitende waagerechte Fläche* eingesetzt werden. Die Erdoberfläche stellt diese Fläche, wenn auch nicht ideal, so aber doch in ausreichender Näherung, dar. An den Abstrahlverhältnissen ändert sich nichts, wie man mit der *Methode der Spiegelung* zeigen kann. Für die Praxis hat dieses Modell den Vorteil, dass man den einen Anschluss des Generators erden und eine durchgehende stabförmige Antennenkonstruktion verwenden kann. Diese Antennen heißen *Vertikalantennen* oder *fußpunktgespeiste Antennen*.
- **$\lambda/4$ -Antenne bzw.  $\lambda/2$ -Dipol:** Bei dieser Antenne ist die Länge  $l$  nach Bild IV-1 zu  $\lambda/4$  gewählt. Sie hat deshalb besondere Bedeutung, weil nach Kapitel III.4.4 (Leitung als Transformator, Gleichung III.31) eine Leitung dieser Länge einen reellen Eingangswiderstand hat und sich der Innenwiderstand des Generators an den Wellenwiderstand des leeren Raumes anpassen lässt. Damit wird eine optimale Leistungübertragung vom Generator auf das elektromagnetische Feld möglich.

- **Antennenverlängerung:** Vertikalantennen lassen sich bis zu einer Höhe  $h$  von etwa 150 m errichten. Das entspricht bei  $h = \lambda/4$  einer Wellenlänge von 600 m und damit einer Frequenz  $f = 500$  kHz. Die Rundfunkübertragung auf Mittelwelle (Hektometerwellen) liegt im Bereich 500 ... 1500 kHz, sodass die erforderlichen Antennenabmessungen realisiert werden können. Für eine Übertragung auf Langwelle (Kilometerwellen) mit einem Frequenzbereich von etwa 80 ... 150 kHz und einer Wellenlänge von 3750 ... 2000 m müssten Antennen mit einer Höhe  $h$  von 937,5 ... 500 m errichtet werden, was technisch nicht möglich ist. Man hat deshalb am oberen Ende der Antennen zusätzliche *Endkapazitäten*  $C_e$  nach Bild IV-3a erzeugt, indem man die Antennen entsprechend geformt hat. Bei den in Bild IV-3b, c gezeigten häufig verwendeten Formen spricht man von *T-Antennen*. Die waagerechten (T-Antenne) bzw. die nach unten geneigten Flächen (Schirm-Antenne) auf der Antennenspitze bilden mit der Erdoberfläche eine zusätzliche Kapazität am Leitungsende. Dadurch erscheint die Antenne verlängert um den Wert

*Antennenverlängerung:*

$$l_v = \frac{\lambda \cdot \arctan(\omega C_e Z_A)}{2\pi} \quad (\text{IV.5})$$

$\lambda$  Wellenlänge und  $\omega$  Kreisfrequenz der elektromagnetischen Welle in m bzw. 1/s,  $C_e$  Endkapazität in F,  $Z_A$  Antennenwiderstand in  $\Omega$

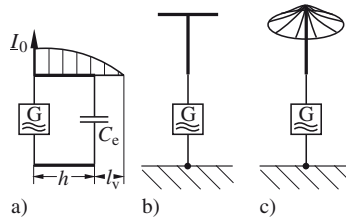


**Bild IV-3** Verkürzung von Vertikalantennen

- a) zusätzliche Endkapazität
- b) T-Antenne
- c) Schirm-Antenne

Die Antennenhöhe kann damit verkürzt werden:

*Verkürzte Antennenhöhe:*

$$h_v = h - l_v = \frac{\lambda}{4} - l_v = \frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda \cdot \arctan(\omega C_e Z_A)}{2\pi} \quad (\text{IV.6})$$

$h$  Antennenhöhe für  $h = \lambda/4$

Die Schwierigkeit bei der Auswertung der Gleichungen (IV.5 und IV.6) liegt darin, dass der Antennenwiderstand  $Z_A$  durch die aufgeklappte Leitung nur näherungsweise bestimmt werden kann und von den geometrischen Abmessungen des Antennenstabes abhängt. Man kann aber erreichen, dass sich eine Antenne für Langwelle mit  $\lambda/4 = 500$  m auf eine Länge von 250 m verkürzen lässt.

■ **Beispiel IV.1:** Eine Antenne hat eine Länge von 200 m und soll für die Frequenz  $f = 150 \text{ kHz}$  als  $\lambda/4$ -Antenne eingesetzt werden. Sie hat den Antennenwiderstand  $Z_A = 200 \Omega$ . Es gilt mit Gleichung (IV.3):

$$\lambda = c/f = (3 \cdot 10^8 \text{ m/s}) / (1,5 \cdot 10^5 / \text{s}) = 2000 \text{ m} \Rightarrow \lambda/4 = 500 \text{ m}$$

Gleichung (IV.5) wird nach  $C_e$  umgeformt:

$$C_e = \frac{1}{\omega \cdot Z_A} \cdot \tan \frac{l_v \cdot 2 \cdot \pi}{\lambda} = \frac{s \cdot A}{2 \cdot \pi \cdot 1,5 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^2 \text{ V}} \cdot \tan \frac{3 \cdot 10^2 \text{ m} \cdot 2 \cdot \pi}{2 \cdot 10^3 \text{ m}} = 7,3 \text{ nF}$$

Aus Gleichung (IV.6) wurde  $l_v = h - h_v = (500 - 200) \text{ m} = 300 \text{ m}$  eingesetzt.

## 2 Kenngrößen

Die wesentlichen Eigenschaften von Antennen lassen sich den Kenngrößen entnehmen. Sie werden im Folgenden dargestellt, und es werden, sofern möglich, einfache Berechnungsformeln angegeben.

- **Richtdiagramm:** Im Fernfeld der Antenne stehen die Feldvektoren  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  senkrecht aufeinander. Der Energiefluss, erfasst durch den *Poynting-Vektor* (Gleichung IV.1), erfolgt wiederum senkrecht zu der durch die Feldvektoren aufgespannten Ebene. Nach Bild IV-4 ist die Strahlungsdichte  $S$  abhängig vom Winkel  $\vartheta$  und maximal für  $\vartheta = 90^\circ$ . Vom Winkel  $\varphi$  dagegen hängt  $S$  wegen der Rotationssymmetrie nicht ab. Da  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  jeweils mit zunehmender Entfernung  $r$  gemäß  $1/r$  abnehmen, folgt:  $S \sim 1/r^2$ . Gleichung (IV.7a) gibt die Strahlungsdichte an.

*Strahlungsdichte*

$$S_r = \frac{Z_0 \cdot |I_0|^2}{4 \cdot r^2} \cdot \left( \frac{l}{\lambda} \cdot \sin \vartheta \right)^2 \quad (\text{IV.7a})$$

$Z_0$  Wellenwiderstand des leeren Raumes in  $\Omega$  (Gleichung (IV.4));  $I_0$  Strom in der Antenne in A,  $r$  Abstand von der Antenne in m,  $l$  Länge der Antenne in m (siehe Bild (IV-1),  $\lambda$  Wellenlänge in m,  $\vartheta$  siehe Bild IV-4

Ersetzt man den Strom  $I_0$  durch die vom Strahlungswiderstand  $R_s$  aufgenommene Leistung  $P_s$  gemäß  $|I_0| = \sqrt{P_s/R_s}$  nach Gleichung (IV.11), ergibt sich:

*Strahlungsdichte*

$$S_r = \frac{3 \cdot P_s}{8 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \sin^2 \vartheta \quad \text{für } l \ll \lambda \quad (\text{IV.7b})$$

$r$  Abstand von der Antenne in m,  $\vartheta$  siehe Bild IV-4,  $P_s$  im Strahlungswiderstand  $R_s$  umgesetzte Leistung in W

Hinweis: Die Abhängigkeit des Strahlungswiderstandes  $R_s$  vom Verhältnis  $l/\lambda$  (Gleichung (IV.11)) führt dazu, dass sich für die Kenngrößen der kurzen linearen Antenne und des  $\lambda/2$ -Dipols geringfügig voneinander abweichende Werte ergeben können.

Durch Normierung auf den Maximalwert für  $\vartheta = 90^\circ$  folgt der in Bild IV-4 gezeigte Verlauf.

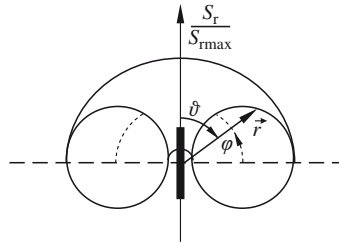


**Bild IV-4** Richtdiagramm eines Dipols (Dipol als durchgezogener Stab dargestellt)

$$\text{Richtdiagramm: } \frac{S_r}{S_{r \max}} = \sin^2 \vartheta \quad (\text{IV.8})$$

- **Beispiel IV.2:** Ein Dipol strahlt eine Leistung von  $P_s = 1 \text{ kW}$  an  $R_s$  ab. Dann ergibt sich in einer Entfernung von  $r = 10 \text{ km}$  parallel zur Dipolachse nach Gleichung (IV.7b) eine Strahlungsdichte

$$S_r = \frac{3 \cdot 10^3 \text{ W}}{8 \cdot \pi \cdot 10^8 \text{ m}^2} \cdot \sin^2 90^\circ = 1,2 \cdot 10^{-6} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}. \text{ Mit } S = E \cdot H \text{ und } H = E/Z_0 \text{ folgt für die Feldstärke:}$$

$$E = \sqrt{S \cdot Z_0} = \sqrt{\frac{3 \cdot 10^3 \cdot \sin^2 \vartheta}{8 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot Z_0} = \sqrt{\frac{3 \cdot 10^3 \text{ VA}}{8 \cdot \pi \cdot 10^8 \text{ m}^2} \cdot 377 \frac{\text{V}}{\text{A}}} = 21,2 \frac{\text{mV}}{\text{m}}$$

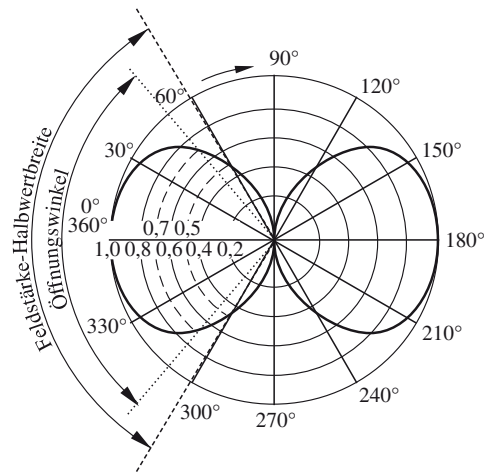


**Bild IV-5** Richtdiagramm in horizontaler Darstellung

- **Öffnungswinkel:** Er ist in Bild IV-5 eingetragen und ergibt sich dadurch, dass innerhalb des Öffnungswinkels die relative Strahlungsdichte nach Gleichung (IV.8)  $\geq 0,707$  ist.
- **Antennengewinn, Antennengewinnfaktor, Antennengewinnmaß:** Durch geeignete Antennenkonstruktionen kann man die Strahlungsdichte in bestimmten Richtungen im Raum konzentrieren. Ein Maß für die Richtfähigkeit ist, allgemein ausgedrückt, der Antennengewinn. Der *Antennengewinnfaktor*  $g$  wird über einen *Kugelstrahler* als

Bezugsantenne bestimmt, der in alle Richtungen gleichmäßig mit

$$S_{\text{ref}} = \frac{P}{4\pi r^2} \quad (\text{IV.9})$$

$4\pi r^2$  Kugeloberfläche in  $\text{m}^2$ ;  $P$ : zugeführte Leistung in W

strahlt. Der Antennengewinnfaktor  $g$  ist das Verhältnis der Strahlungsdichte  $S_r$  der eigentlichen Antenne zur Strahlungsdichte  $S_{\text{ref}}$  des Kugelstrahlers als Bezugsantenne bei gleicher Entfernung  $r$  und gleicher Leistung  $P$ . Durch entsprechende Auswertung der Gleichungen (IV.8 und IV.9) erhält man den maximal möglichen Antennengewinnfaktor  $g_{\text{max}}$ :

Antennengewinnfaktor (allgemein):

$$g = \frac{S_r}{S_{\text{ref}}} \quad (\text{IV.10a})$$

maximaler Antennengewinnfaktor kurze lineare Antenne:

$$g_{\text{max}} = 1,5$$

maximaler Antennengewinnfaktor  $\lambda/2$ -Dipol:

$$g_{\text{max}} = 1,64 \quad (\text{IV.10b})$$

Hinweis: Die Abhängigkeit des Strahlungswiderstandes  $R_s$  vom Verhältnis  $l/\lambda$  (Gleichung (IV.11)) führt dazu, dass sich für die Kenngrößen der kurzen linearen Antenne und des  $\lambda/2$ -Dipols geringfügig voneinander abweichende Werte ergeben.

Daraus leitet sich das Antennengewinnmaß  $G$  ab:

$$\text{Gewinnmaß } G = 10 \cdot \lg(g) \text{ in dB} \quad (\text{IV.10c})$$

- **Eingangswiderstand, Fußpunktwidestand und Strahlungswiderstand:** Allgemein gilt für den Antennenwiderstand  $Z = U/I$ . Da sich  $U$  und  $I$  aber längs der Antenne ändern (gemeint ist nicht die zeitliche, sondern die örtliche Abhängigkeit), ist auch  $Z$  ortsabhängig. Man hat deshalb den Eingangswiderstand am Fußpunkt der Antenne definiert. Dieser Fußpunktwidestand  $Z_{\text{FP}}$  ergibt sich aus dem Verhältnis von Spannung zu Strom am Fußpunkt:  $Z_{\text{FP}} = U_{\text{FP}}/I_{\text{FP}}$ . Bild IV-6 stellt das Ersatzschaltbild einer stromgespeisten Antenne dar. Es bedeuten:  $R_i$  Innenwiderstand der Quelle;  $R_v$  Verlustwiderstand der Antenne;  $R_s$  Strahlungswiderstand der Antenne;  $X$  Blindanteil der Antennenimpedanz.

Der Eingangswiderstand (Fußpunktwidestand) der Antenne beträgt  $R_v + R_s + j\omega X$  und ist wichtig für die Anpassung Generator – Leitung – Antenne. Die Anpassung muss mit konjugiert komplexen Impedanzen erfolgen. Die Strahlungsleistung wird in  $R_s$  umgesetzt; dieser Widerstand ergibt sich zu:

Strahlungswiderstand kurze lineare Antenne

$$R_s = \frac{2}{3} \pi \cdot Z_0 \cdot \frac{l^2}{\lambda^2} \quad (l \ll \lambda) \quad (\text{IV.11a})$$

Strahlungswiderstand  $\lambda/2$ -Dipol

$$R_s = 0,194 \cdot Z_0 = 73,2 \, \Omega \quad (\text{IV.11b})$$

$Z_0$  Wellenwiderstand des leeren Raumes,  $Z_0 \approx 377 \, \Omega$ ,  $l$  Antennenlänge in m,  $\lambda$  Wellenlänge in m

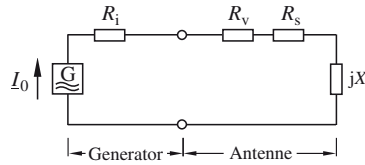


**Bild IV-6** Reihen-Ersatzschaltbild einer Antenne

- **Wirkfläche:** An einer Empfangsantenne steht die Leistung  $P$  zur Verfügung, die durch die am Ort der Antenne vorhandene Strahlungsdichte  $S$  gebildet wird.  $P$  entsteht durch Summation von  $S$  über eine Fläche  $A$ :  $P = S \cdot A$ . Diese Fläche wird **Wirkfläche** genannt. Es hat sich gezeigt, dass diese Fläche unabhängig von den Antennenabmessungen ist:

$$\text{Wirkfläche: } A = \frac{3}{8\pi} \cdot \lambda^2 \quad (\text{IV.12})$$

$\lambda$  Wellenlänge

Beim Empfang einer Strahlung mit  $\lambda = 10 \text{ m}$  ( $f = 30 \text{ MHz}$ ) haben eine kurze lineare Antenne und ein  $\lambda/2$ -Dipol die Wirkfläche  $\lambda^2 \cdot \frac{3}{8 \cdot \pi} = 11,9 \text{ m}^2$ . Danach

würde man die kurze lineare Antenne dem  $\lambda/2$ -Dipol wegen der kleineren Abmessungen vorziehen. Macht man allerdings die Abmessungen immer kleiner, nimmt der Strahlungswiderstand ab und damit wird die nutzbare Leistung verringert. Außerdem kann dann der Verlustwiderstand  $R_v$  nicht mehr vernachlässigt werden. Schließlich wird die konjugiert komplexe Anpassung nicht mehr möglich, weil der Blindwiderstand mehr als 1000mal so groß ist wie der Strahlungswiderstand. Die kapazitive Antennenkomponente wäre nur durch supraleitende Spulen (große induktive Komponente bei verschwindendem Realteil) kompensierbar.

- **Übertragungsfaktor, Funkfelddämpfung:** Der Übertragungsfaktor ist das Verhältnis von Empfangsantennenleistung  $P_e$  zu Sendeantennenleistung  $P_s$  und ergibt sich zu:

Übertragungsfaktor:

$$\frac{P_e}{P_s} = \left( \frac{\lambda}{4 \cdot \pi \cdot r} \right)^2 \cdot g_s \cdot g_E \quad (\text{IV.13})$$

$r$  Entfernung Sender – Empfänger in m;  $g_s, g_E$  Antennengewinnfaktor nach Gleichung (IV.10);  $\lambda$  Wellenlänge in m; Index  $E$ : Empfänger; Index  $S$ : Sender

Eine für die Praxis nützliche Größe ist die **Funkfelddämpfung  $a$**  in dB:

Funkfelddämpfung:

$$a = 10 \cdot \lg \frac{P_s}{P_e} \text{ in dB} \quad (\text{IV.14})$$

- **Freiraumdämpfung:** Dies ist die Dämpfung zwischen Sende- und Empfangsantenne, wenn beide als Kugelstrahler ausgebildet sind, und in Gleichung (IV.13) gilt:  $g_s = g_E = 1$



### Freiraumdämpfungsmaß

$$a_0 = 10 \cdot \lg \left( \frac{4 \cdot \pi \cdot r}{\lambda} \right)^2 = 20 \cdot \lg \left( \frac{4 \cdot \pi \cdot r}{\lambda} \right) \text{ in dB} \quad (\text{IV.15})$$

$r$  Entfernung Sender – Empfänger in m;  $\lambda$  Wellenlänge in m

Siehe dazu auch Beispiel X.1 im Kapitel X, Richtfunktechnik.

■ **Beispiel IV.3:** Bei einer Übertragung mit  $\lambda/2$ -Dipolen und dem maximal möglichen Antennengewinnfaktor  $g_E = g_S = 1,64$  für Send- und Empfangsantenne nach Gleichung (IV.10) und einer Frequenz 100 MHz beträgt die Funkfelddämpfung in einem Abstand von 10 km:

$$\begin{aligned} a_0 &= 10 \cdot \lg \frac{P_S}{P_E} = 10 \cdot \lg \left[ \left( \frac{4 \cdot \pi \cdot r}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{1}{g_S \cdot g_E} \right] \\ &= 10 \cdot \lg \left[ \left( \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^4 \text{ m}}{3 \text{ m}} \right)^2 \cdot \frac{1}{1,64^2} \right] = 88,1 \text{ dB} \end{aligned}$$

## 3 Ausführungsformen von Antennen

Es folgt eine Zusammenstellung von Send- und Empfangsantennen, wie sie u.a. auch in der Rundfunk- und Fernsehtechnik häufig eingesetzt werden.

### 3.1 Vertikalantenne

In Bild IV-7 ist eine Vertikalantenne dargestellt, die als Sendeantenne für den Lang- und Mittelwellen-Rundfunk eingesetzt wird. Ihre Länge beträgt  $\lambda/4$ . Sie ist aus dem  $\lambda/2$ -Dipol entstanden, indem die untere Hälfte des Dipols an der Erdoberfläche gespiegelt wird. Damit die Leitfähigkeit der Erdoberfläche erhöht wird, bringt man ein strahlen- oder gitterförmiges Netz von Erdleitern um den Fußpunkt der Antenne herum an. Es ergibt sich ein

**Strahlungswiderstand**  $R_S = 36,6 \, \Omega$

Der Vorteil dieser Antennenbauform ist, dass ein Anschluss des Generators geerdet werden kann.

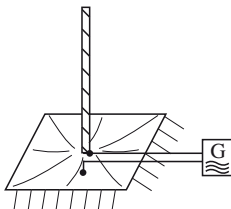


**Bild IV-7**  
Vertikalantenne als  
 $\lambda/4$ -Dipol

### 3.2 Rahmenantenne

Sie wird überwiegend für den Rundfunk-Empfang im Lang- und Mittelwellenbereich eingesetzt (Bild IV-8a, b) und entspricht dem Hertzschen Dipol bei Sendeantennen. Es gilt:  $a \ll \lambda$ . Die Feldverteilung ist in Bild IV-8c skizziert.

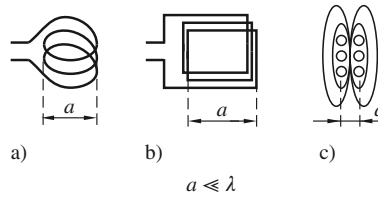


**Bild IV-8** Rahmenantenne

- a) rund
- b) quadratisch
- c) Feldverteilung

Die Rahmenantenne hat die gleiche Wirkfläche

$A_R = \frac{3 \cdot \lambda^2}{8 \cdot \pi}$  wie der Hertzsche Dipol (Gleichung IV.12). Weiter gilt:

**Leerlaufspannung:**

$$|U_0|_R = \omega \cdot \mu_0 \cdot n \cdot A_R \cdot |\vec{H}| \quad (\text{IV.16})$$

$n$  Windungszahl,  $A_R$  Fläche in  $\text{m}^2$   $\left( \frac{a^2 \cdot \pi}{4} \text{ bzw. } a^2 \right)$ ,  $\omega$  Kreisfrequenz in  $1/\text{s}$ ,  $\mu_0$  magnetische Feldkonstante in  $\text{Vs}/\text{Am}$ ,  $H$  magnetische Feldstärke in  $\text{A}/\text{m}$

Demnach müsste eine Rahmenantenne die gleichen Eigenschaften wie der Hertzsche Dipol haben. Da aber der Verlustwiderstand  $R_v$  (Bild IV-6) groß ist im Vergleich zum Strahlungswiderstand  $R_S$ , steht nur ein geringer Teil der induzierten Spannung für den Empfänger zur Verfügung.

### 3.3 Ferritantenne

Sie besteht aus einem möglichst langgestreckten Stab aus Ferritmaterial mit  $\mu_r \gg 1$ . Die Feldlinien in der Umgebung des Stabes konzentrieren sich damit im Stab, siehe Bild IV-9. Damit erhöht sich die magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  im Stab und in der Spule auf das  $\mu_r$ -fache gegenüber der Rahmenantenne ohne Eisen. Damit ist auch die Leerlaufspannung um diesen Faktor größer:

**Leerlaufspannung:**

$$|U_0|_F = \omega \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot n \cdot A_R \cdot |\vec{H}| \quad (\text{IV.17})$$

$n$  Windungszahl,  $A_R$  Fläche in  $\text{m}^2$   $\left( A_R = \frac{a^2 \cdot \pi}{4} \right)$ ,  $\omega$  Kreisfrequenz in

$1/\text{s}$ ,  $\mu_0$  magnetische Feldkonstante in  $\text{Vs}/\text{Am}$ ,  $H$  magnetische Feldstärke in  $\text{A}/\text{m}$

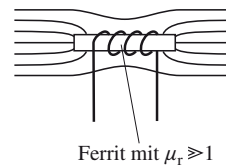


**Bild IV-9**  
Feldlinienverlauf  
bei der Ferritantenne

Die maximale Empfangsleistung bei Anpassung ist zwar bei Rahmen- und Ferritantenne gleich, aber der Strahlungswiderstand  $R_S$  (Bild IV-6) erhöht sich ebenfalls um den Faktor  $\mu_r$ , sodass er nicht mehr viel kleiner als der Verlustwiderstand  $R_v$  ist und damit auch eine höhere induzierte Spannung am Empfängerereingang zur Verfügung steht. Der Vorteil der Ferritantenne gegenüber der Rahmenantenne besteht darin, dass die geometrischen Abmessungen bei gleicher Spannung am Empfänger kleiner gewählt werden können. Wichtig ist die Ausrichtung der Ferritantenne in Richtung der magnetischen Feldlinien nach Bild IV-9. In der Rundfunk-Empfangstechnik (Lang-, Mittelwelle) ist die auf dem Ferritstab aufgebraachte Spule gleichzeitig die Induktivität eines Parallelschwingkreises zur Senderselektion.

### 3.4 $\lambda/2$ -Dipol, $\lambda/2$ -Faltdipol

Im Bereich von Ultrakurzwellen (Meterwellen, UKW-Rundfunkempfang mit  $f \geq 87$  MHz entsprechend  $\lambda \leq 3,45$  m) werden  $\lambda/2$ -Dipole eingesetzt, weil sie handliche Abmessungen besitzen ( $\lambda/2 \leq 1,725$  m). Der Strahlungswiderstand  $R_S$  ist  $\approx 70 \Omega$ . Da der Dipol häufig in einiger Entfernung (Dach, Hauswand, Boden) vom Empfänger angebracht ist, sollte der Wellenwiderstand des Verbindungskabels Antenne-Empfänger an  $R_S$  angepasst werden. Mit Koaxialkabeln kann diese Bedingung erfüllt werden.

- **Sonderausführung  $\lambda/2$ -Faltdipol:** Es handelt sich um zwei dicht beieinander angeordnete  $\lambda/2$ -Dipole, die an den Enden verbunden sind, Bild IV-10.



**Bild IV-10**  
 $\lambda/2$ -Faltdipol

Beim Faltdipol sind Gesamt-Strahlungsleistung und Strahlungswiderstand viermal so groß wie beim Dipol. In der Praxis erreicht man  $R_S \approx 240 \Omega$ . Auch die Blindkomponente ist beim Faltdipol kleiner und stört damit weniger bzw. kann leichter kompensiert werden.

### 3.5 Breitbanddipol

Je dicker bzw. großflächiger ein Dipol in seinen mechanischen Abmessungen ist, um so kleiner wird seine geometrische Länge. Danach erreicht man mit einer Antennenform nach Bild IV-11 eine Anpassung des Strahlungswiderstandes an ein Frequenzband, wie es in der Fernseh-Empfangstechnik im VHF- und UHF-Bereich auftritt.

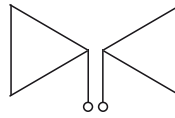


**Bild IV-11**  
Breitbanddipol

### 3.6 Gruppenstrahler

Ordnet man nach Bild IV-12a zwei Antennen im Abstand  $\lambda/4$  an und erregt Antenne 1 mit einem Signal, das dem an Antenne 2 um  $90^\circ$  voreilt, ergibt sich längs der positiven  $x$ -Achse ein maximaler Feldverlauf, da sich beide Feldvektoren ohne Phasenverschiebung addieren. In Richtung der negativen  $x$ -Achse heben sich beide Felder auf (Abstand  $\lambda/4$  bei der Feldberechnung vernachlässigt). Bild IV-12b zeigt das Richtdiagramm. Der Gruppenstrahler strahlt also fast ausnahmslos in den rechten Halbraum.

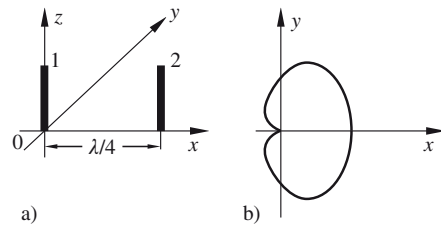


**Bild IV-12** Gruppenstrahler  
a) Antennenanordnung  
b) Richtdiagramm

### 3.7 Yagi-Antenne

Bild IV-13 zeigt die prinzipielle Ausführungsform dieses Antennentyps. Ein Faltdipol ( $S$ ) ist das eigentliche aktive Element, dem zur einen Seite bis zu 25 Direktoren ( $D$ ) vorgelagert sind. Zur anderen Seite folgen meist 3 Reflektoren ( $R$ ). Die in der Praxis bewährten Abmessungen und Abstände sind eingetragen.

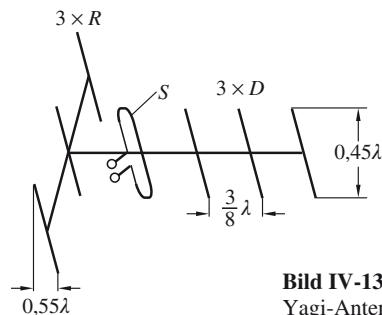


**Bild IV-13**  
Yagi-Antenne

Es ergibt sich eine verbesserte Richtcharakteristik in Richtung der Direktoren sowie ein Antennengewinn

$$\text{Antennengewinn: } G = 20 \cdot \lg \sqrt{n} \quad \text{in dB} \quad (\text{IV.18})$$

$n$  Anzahl der Antennenelemente



### 3.8 Langdrahtantenne

Sie besteht aus einem horizontal gespannten Leiter, der mit der als ideal leitend angenommenen Erdoberfläche eine Zweidrahtleitung bildet. Sie ist am Ende reflexionsfrei mit  $Z$  abgeschlossen und wird in einer Höhe  $h \approx \lambda/2 \dots \lambda$  über dem Erdboden angebracht, Bild IV-14a. Die Länge  $l$  wird zu  $\geq \lambda/2$  gewählt. Auf der Leitung entstehen Wanderwellen. Die Langdrahtantenne hat eine um so größere Richtwirkung, je größer das Verhältnis  $l/\lambda$  ist, Bild IV-14b.

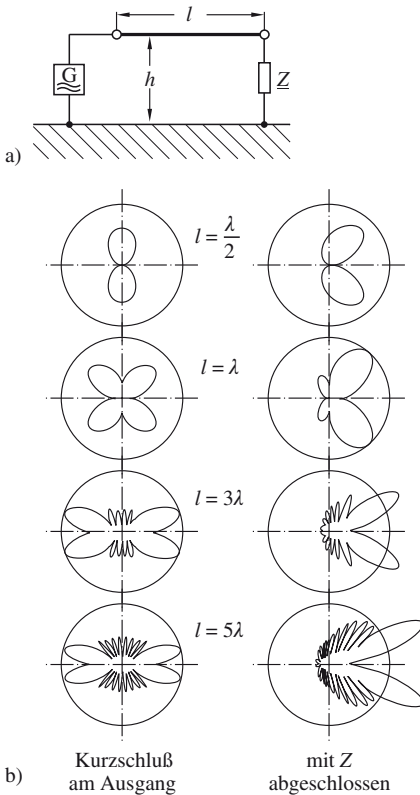


**Bild IV-14** Langdrahtantenne

- a) Anordnung  
b) Richtcharakteristik für verschiedene Verhältnisse  $l/\lambda$  (nach [IV.2])

### 3.9 Rohrschlitzstrahler

Eine in der Fernseh-Sendetechnik häufig verwendete Antennenbauform nach Bild IV-15 besteht aus einem in Längsrichtung geschlitzten Rohr. In der Praxis gilt:  $d \ll 2 \cdot r$ . Die Speisung geschieht an den Längsseiten in Schlitzmitte. Das elektrische Feld verläuft horizontal (horizontale Polarisation), die Richtung des magnetischen Feldes ist im Bild eingetragen. Die Form des Richtdiagramms hängt vom Verhältnis  $2 \cdot r/\lambda$  ab und ist in Bild IV-15b für  $2 \cdot r \gg \lambda$  und  $2 \cdot r = 0,1 \lambda$  eingetragen.

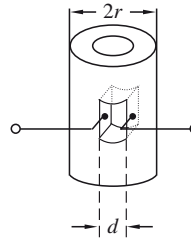
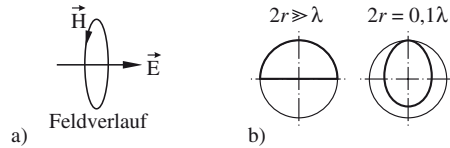


**Bild IV-15**

Rohrschlitzstrahler

- a) Aufbau  
b) Richtdiagramme



Für den UKW-Rundfunk und den Fernsehfunk werden häufig bis zu 8 dieser Rohrschlitzstrahler übereinander angeordnet. Damit bleibt auch die horizontale Richtcharakteristik erhalten, der vertikale Öffnungswinkel wird dagegen klein, und damit steigt der Antennengewinn auf etwa 20 dB.

### 3.10 Parabolantenne

Bild IV-16 stellt den Aufbau einer häufig verwendeten Form dar. Die Funktionsweise ist mit den Gesetzen der Optik erfassbar. Die Quelle muss im Brennpunkt angeordnet sein und wird *Primärstrahler* genannt. Sie kann, besonders bei Empfangsantennen, als Breitbanddipol ausgelegt sein.

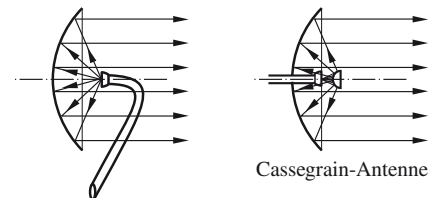


**Bild IV-16** Parabolantenne (nach [IV.2])

Weitere Einzelheiten sind im Kapitel X, Richtfunktechnik, aufgeführt. Die *Cassegrain-Antenne* wird im Kapitel XI, Nachrichtenübertragung über Satelliten, behandelt.

## 4 Wellenausbreitung

### 4.1 Boden- und Raumwelle

Ein Erdboden mit endlicher Leitfähigkeit entzieht dem Strahlungsfeld Energie. Damit nehmen Feldstärke und Strahlungsdichte in Bodennähe mit zunehmender Entfernung von der Sendeantenne stärker ab als in erdferneren Bereichen. Die auf diese Weise

beeinflusste Welle heißt *Bodenwelle* und ist in Bild IV-17 für unterschiedliche Entfernungen  $r$  von der Sendeantenne eingetragen.

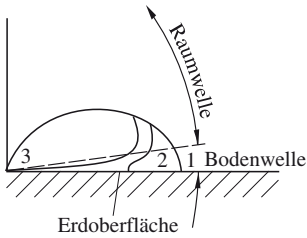


**Bild IV-17** Richtdiagramm zur Erläuterung von Boden- und Raumwelle: 1 kleine, 2 mittlere, 3 große Entfernung von der Sendeantenne (nach [IV.1])

Ein weiteres Kennzeichen der Bodenwelle ist, dass sie auch durch die Erdkrümmung geschwächt wird. Ihre Reichweite nimmt mit wachsender Wellenlänge zu. Die Welle, die weder durch die Erdkrümmung noch durch die Absorption des Erdbodens beeinflusst wird, heißt *Raumwelle*.

## 4.2 Erdatmosphäre

In Bild IV-18 sind Temperatur, Ozonanteil und Elektronendichte der Erdatmosphäre bis zu einer Höhe von 600 km dargestellt. Die Elektronenkonzen-

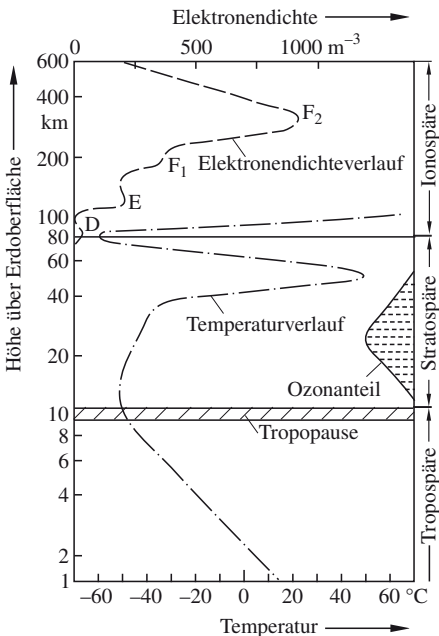


**Bild IV-18** Struktur der Erdatmosphäre mit Verlauf von Temperatur, Ozonanteil und Elektronendichte (nach [IV.2])

tration nimmt ab einer Höhe von etwa 100 km durch die Sonneneinstrahlung zu, weil deren UV- und Gammastrahlung die Luftmoleküle zunehmend ionisiert. Die Schichtung wird mit  $D$ ,  $E$ ,  $F_1$  und  $F_2$  bezeichnet. Nachts verschwinden die Schichten  $D$ ,  $E$  und  $F_1$  fast vollständig.

## 4.3 Wellenausbreitung im Plasma

Plasma ist ein vollständig ionisiertes Gas, das in gleich viele positive und negative Ladungen aufgespalten ist und damit nach außen neutral erscheint. In der Ionosphäre ist wegen der geringen Luftdichte nahezu ein Plasma vorhanden. Trifft eine elektromagnetische Welle mit der Frequenz  $f$  auf ein Plasma, breitet sie sich dort mit der Gruppengeschwindigkeit  $v_g$  aus:

- *Gruppengeschwindigkeit im Plasma:*

$$v_g = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{f_p}{f}\right)^2} \quad (\text{IV.19})$$

$c \approx 3 \cdot 10^8$  m/s (Lichtgeschwindigkeit);  $f_p$  Plasmafrequenz in Hz mit

- *Plasmafrequenz:*  $f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{n \cdot q^2}{m \cdot \epsilon_0}}$  (IV.20)

$n$  Elektronenkonzentration im Plasma in  $\text{m}^{-3}$ ;  $q$  Elementarladung des Elektrons  $1,602 \cdot 10^{-19}$  As;  $m$  Ruhemasse des Elektrons  $9,1083 \times 10^{-31}$  kg;  $\epsilon_0$  elektrische Feldkonstante

Mit den in Bild IV-18 eingetragenen Elektronenkonzentrationen errechnet sich  $f_p$  zu:

| Schicht        | $n$                            | $f_p$                     |
|----------------|--------------------------------|---------------------------|
| $E$ -Schicht   | $\approx 200 \text{ mm}^{-3}$  | $\approx 4 \text{ MHz}$   |
| $F_1$ -Schicht | $\approx 400 \text{ mm}^{-3}$  | $\approx 5,6 \text{ MHz}$ |
| $F_2$ -Schicht | $\approx 900 \text{ mm}^{-3}$  | $\approx 8,5 \text{ MHz}$ |
| Minimalwert    | $\approx 10 \text{ mm}^{-3}$   | $\approx 0,9 \text{ MHz}$ |
| Maximalwert    | $\approx 1000 \text{ mm}^{-3}$ | $\approx 9 \text{ MHz}$   |

Da die Elektronenkonzentration einen kontinuierlichen Verlauf aufweist, ergibt sich für  $f_p$  ebenfalls ein Bereich, der angenähert von 1 MHz bis 10 MHz reicht.

Die Plasmafrequenz hat Bedeutung für den Wellenwiderstand  $Z_p$  und für die Reflexionseigenschaften des Plasmas:

*Wellenwiderstand des Plasmas*

$$Z_p = \frac{Z_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_p}{f}\right)^2}} \quad (\text{IV.21})$$

$Z_0$  Wellenwiderstand des leeren Raumes,  $f_p$  Plasmafrequenz

- a) Für  $f < f_p$  ist  $\varepsilon_r < 0$  und  $Z_p$  rein imaginär ( $Z_0$  ist reell). Die einfallende Welle wird reflektiert, Bild IV-19a.
- b) Für  $f > f_p$  ist  $\varepsilon_r > 0$  und  $Z_p$  reell. Die Welle breitet sich im Plasma aus. Eine Reflexion findet nur dann statt, wenn die Welle unter einem Winkel auftrifft, der kleiner ist als ein Grenzwinkel  $\alpha_{\max}$ , Bild IV-19b. Die Ionisation nimmt von der Randschicht bis zum Maximum kontinuierlich zu, und damit steigt auch die Brechzahl kontinuierlich in Richtung Ionisationsmaximum. Die schräg einfallende Welle wird damit stetig in Richtung des Brechzahlgradienten gebrochen und erreicht schließlich wieder die Erdoberfläche. Wird  $\alpha_{\max}$  überschritten, findet keine Reflexion statt, sodass eine tote Zone entsteht.

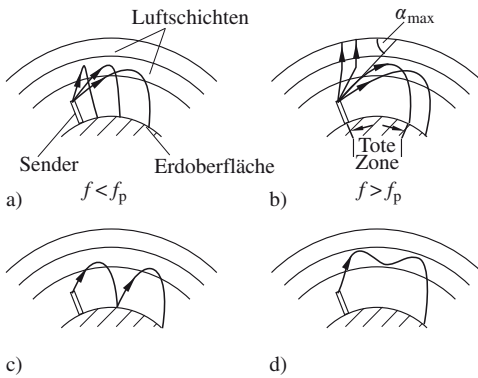


**Bild IV-19** Ausbreitung von Wellen

- a) Reflexion für  $f < f_p$
- b) Brechung für  $f > f_p$
- c) Mehrfachreflexion Erdoberfläche – Ionosphäre
- d) Mehrfachreflexion innerhalb der Ionosphäre

#### 4.4 Wellenausbreitung im Bereich 30 kHz bis 30 GHz

Bild IV-19c, d stellt weitere Möglichkeiten der Wellenausbreitung über größere Entfernungen dar. Entweder wird die Welle mehrfach zwischen der Ionosphäre und der Erdoberfläche reflektiert (Bild IV-19c) oder es findet eine Mehrfachreflexion innerhalb der Ionosphäre statt, bevor die Welle endgültig wieder zum Erdboden zurückkehrt, Bild (IV.19d). Auf diese Weise können Wellen sehr große Entfernungen zurücklegen. Allerdings nimmt die Strahlungsleistung mit dem zurückgelegten Weg  $r$  aus folgenden Gründen ab:

- Elektrische und magnetische Feldstärke nehmen jeweils mit  $1/r$  ab und damit die Strahlungsdichte mit  $1/r^2$ .
- Bei Brechung bzw. Streuung in der Ionosphäre weitet sich die Welle auf.
- Vor allem tagsüber dämpfen die unteren Schichten der Ionosphäre durch Absorption, und zwar um so mehr, je niedriger die Frequenz der Welle ist (unelastische Stöße). Diese Dämpfung ist für den Bereich Langwelle so groß, dass die Raumwelle praktisch verschwindet.
- **Überreichweiten:** Sie entstehen durch Inhomogenitäten der Atmosphäre, an denen die Welle diffus gestreut wird (engl.: scatter). Der zur Erde zurückkehrende Teil besitzt nur wenig Energie, deshalb ist einiger Aufwand für die Signalaufbereitung am Empfangsort erforderlich. Die Inhomogenitäten und damit die Überreichweiten sind zeitlich nicht konstant und erschweren die technische Nutzung dieses Effektes. Es ergeben sich folgende maximale Reichweiten:

| Frequenzbereich   | Streuung an | Reichweite maximal etwa |
|-------------------|-------------|-------------------------|
| 30 ... 100 MHz    | Troposphäre | 2500 km                 |
| 100 MHz ... 1 GHz | Ionosphäre  | 2000 km                 |

Ein Beispiel für eine Scatterverbindung ist im Kapitel X, Richtfunktechnik, aufgeführt.

- **Schwunderscheinungen:** Wenn zwei Wellen auf verschiedenen langen Wegen zum Empfänger gelangen, können sich beide so überlagern, dass sie sich je nach Phasenlage teilweise oder ganz auslöschen. In der Praxis ändern sich die Amplituden und Weglängen der einzelnen Wellen fortwährend durch den stetigen Wechsel der Bedingungen in der Ionosphäre, und damit schwankt auch die Amplitude der resultierenden Welle am Empfangsort. Diese Schwunderscheinung (engl.: fading) versucht man durch eine signalabhängige Verstärkungsregelung im Empfänger auszugleichen. (Siehe AVR im Kapitel VII, Empfängerschaltungstechnik.)

In der folgenden Tabelle IV-1 sind einige Daten über die Wellenausbreitung der technisch genutzten Frequenzbereiche zusammengestellt.

**Tabelle IV-1** Wellenausbreitung im Bereich 30 kHz bis 30 GHz (\*), \*\*) siehe Text)

| Bezeichnung*)                                                                                    | Wellenlänge    | Frequenz           | Übertragung über                         |                                                                                                                                                                                                                                            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|--------------------|------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                  |                |                    | Bodenwelle                               | Raumwelle                                                                                                                                                                                                                                  |
|                                                                                                  |                |                    | Reichweite                               |                                                                                                                                                                                                                                            |
| Längstwellen;<br>Langwellen LW;<br>„Kilometer-<br>wellen“                                        | 10 ... 1 km    | 30 ... 300 kHz     | ja;<br>wenig gedämpft;<br>einige 1000 km | nein                                                                                                                                                                                                                                       |
| Mittelwellen MW;<br>„Hektometer-<br>wellen“                                                      | 1 km ... 100 m | 300 kHz ... 3 MHz  | tagsüber ja;<br>nachts ja;<br>100 km     | tagsüber nein;<br>nachts ja;<br>1000 km                                                                                                                                                                                                    |
| Kurzwellen KW;<br>„Dekameter-<br>wellen“                                                         | 100 m ... 10 m | 3 MHz ... 30 MHz   | stark gedämpft                           | erdballumspannend durch<br>Mehrfachreflexionen                                                                                                                                                                                             |
| Ultrakurzwellen<br>z.B. UKW-<br>Rundfunk, VHF<br>(Fernsehen<br>Band I und III);<br>„Meterwellen“ | 10 m ... 1 m   | 30 MHz ... 300 MHz | nein                                     | Optische Sicht<br>(geringe Verluste);<br>schwache Komponenten<br>durch Beugung (Berge);<br>evtl. Überreichweiten**);<br>100 km; in Ausnahme-<br>fällen 150 ... 250 km                                                                      |
| Ultra high fre-<br>quency UHF<br>(z.B. Fernsehen<br>Band IV und V);<br>„Dezimeter-<br>wellen“    | 1 m ... 10 cm  | 300 MHz ... 3 GHz  | nein                                     | Optische Sicht<br>(geringe Verluste);<br>schwache Komponenten<br>durch Beugung (Berge);<br>evtl. Überreichweiten**);<br>50 km; in Ausnahme-<br>fällen 150 ... 200 km                                                                       |
| „Zentimeter-<br>wellen“;<br>z.B. Rundfunk-<br>und Fernseh-<br>übertragung<br>über Satellit       | 10 cm ... 1 cm | 3 ... 30 GHz       |                                          | Quasioptische Sicht;<br>Streuung und Brechung<br>in Luft (Regen, Wolken).<br>Reichweite:<br>a) auf Erdoberfläche:<br>50 km; in Ausnahme-<br>fällen bis 150 km;<br>b) Satellitenübertra-<br>gung: $\geq 36\,000$ km<br>bei direkter „Sicht“ |

Anmerkungen: 1) Die in Anführungszeichen gesetzten Bezeichnungen entsprechen DIN 40015. 2) Noch schwächere Komponenten entstehen durch Streuung bzw. Reflexion in der Ionosphäre, diese führen aber bei Überreichweiten häufig zu Signalbeeinträchtigungen.

## V Modulation

### 1 Übersicht

Bei der Modulation werden Signalparameter eines Trägers in Abhängigkeit von einem *modulierenden Signal* geändert, mit dem Ziel, den Frequenzbereich des *Basisbandes* (*Frequenzbereich des Nutzsignals, modulierendes Signal*) in einen anderen Frequenzbereich zu transformieren. Damit erreicht man eine Anpassung an die Kanaleigenschaften, und es wird die Übertragung mehrerer Signale gleichzeitig über einen Kanal möglich, wobei das gesamte übertragene Signal wieder eindeutig in die einzelnen Signale zerlegt werden kann. Eine Anwendung für die Modulation ist die Übertragung verschiedener Rundfunk- und Fernsehprogramme über den Kanal „freier Raum“ mit großer Reichweite, wobei der Empfänger die Auswahl eines bestimmten Programmes ermöglicht. Für den Träger wird bei der Übertragung im freien Raum ein *sinusförmiges* elektromagnetisches Feld verwendet, da andernfalls die Oberschwingungen andere Träger mit gleicher Frequenz stören würden. Bei einer leitungsgebundenen Übertragung über Koaxialkabel oder Hohlleiter werden auch Pulsträger verwendet. Wichtig ist hier, dass das elektromagnetische Feld nicht vom Leiter in den umgebenden Raum austritt. Zur Modulation wird eine nichtlineare Kennlinie eingesetzt, sodass neue Frequenzen entstehen (beabsichtigte Erzeugung von nichtlinearen Verzerrungen).

- **Unterschied Mischung – Modulation:** Bei der Mischung wird nur *eine* der entstehenden Frequenzen ausgenutzt, bei der Modulation *mehrere*. Beispiel für die Mischung: Überlagerungsempfänger, siehe Kapitel VII, Empfängerschaltungstechnik. Vom Gesamtsignal mit den Frequenzen  $f_0, f_e, f_0 \pm f_e$  ( $f_0 > f_e$ ), gebildet aus der Eingangsfrequenz  $f_e$  und der Oszillatorfrequenz  $f_0$ , wird nur die Differenzfrequenz  $f_0 - f_e = f_{ZF}$  (Zwischenfrequenz) weiterverwendet. Beispiel für die Modulation: Amplitudenmodulation (AM) mit Trägerfrequenz und einem oder zwei Seitenbändern. Es werden sowohl die Trägerfrequenz als auch mindestens die Frequenz eines Seitenbandes ausgenutzt. Folgende Bezeichnungen werden verwendet (DIN 5488, 40110):
- $s_M(t)$  Basisbandsignal, Nutzsignal, modulierendes Signal (z.B. Musik- und Sprachsignal mit dem Frequenzbereich 15 Hz bis 15 kHz bei der UKW-Rundfunkübertragung),
- $s_T(t)$  Träger (Frequenz z.B. 91,2 MHz bei der UKW-Rundfunkübertragung).

Im Allgemeinen gilt: Die Frequenzen von  $s_M(t)$  sind viel kleiner als die Frequenzen von  $s_T(t)$ . Bild V-1 gibt einen Überblick über die verwendeten Modulationsverfahren.

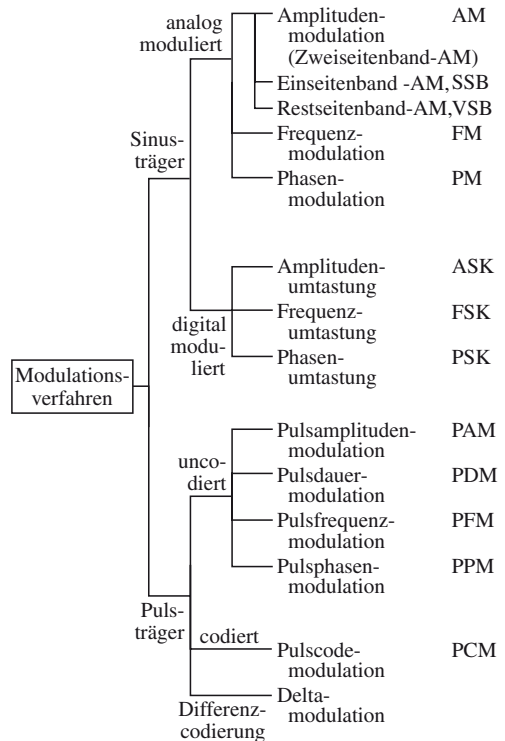


Bild V-1 Modulationsverfahren

Durch *Demodulation* gewinnt man aus dem modulierten Signal das Basisbandsignal zurück. Dies geschieht u.a. durch erneute Modulation, wie am Beispiel des Demodulators für amplitudenmodulierte Signale gezeigt wird.

### 2 Sinusträger – mit Analogsignal modulierte

Der sinusförmige Träger (Index  $T$ ) hat die Darstellung

$$s_T(t) = \hat{s}_T \cdot \sin(\omega_T t + \varphi_T) \quad (\text{V.1})$$

Die folgenden Parameter können vom modulierenden Signal geändert werden und geben dem Verfahren den Namen:

$\hat{s}_T = \hat{s}_T(t)$  Amplitudenmodulation (AM), mit den Sonderfällen EM, SSB, RM und USB (siehe Kapitel 2.1)

$\omega_T = \omega_T(t)$  Frequenzmodulation (FM, Kapitel 2.4).

$\varphi_T = \varphi_T(t)$  Phasenmodulation (PM, Kapitel 2.4).

Frequenz- und Phasenmodulation werden auch unter dem Oberbegriff *Winkelmodulation* zusammenge-

fasst. Mathematisch besteht der Zusammenhang darin, dass man zur Frequenzmodulation (FM) mit dem differenzierten Phasensignal (PM) moduliert.

$$s_{\text{PM}}(t) = \hat{s}_T \cdot \sin[\omega_T t + \varphi_T(t)] \\ = \hat{s}_T \cdot \sin\left[\underbrace{\omega_T t + K_\varphi \cdot u(t)}_{\text{differenzieren}}\right] \quad (\text{V.2})$$

mit  $\varphi_T(t) = K_\varphi \cdot u(t)$ . Durch Differenzieren und entsprechendes Einsetzen erhält man:

$$s_{\text{FM}}(t) = \hat{s}_T \cdot \sin\left[\underbrace{\omega_T + K_\varphi \frac{du(t)}{dt}}_{\omega_T(t)}\right] \cdot t \quad (\text{V.3})$$

Anschaulich bedeutet dies, dass sich bei einer *Änderung* der Winkelgeschwindigkeit auch die Frequenz ändert.

## 2.1 Amplitudenmodulation (AM)

Für das Basisband wird eine einzelne Frequenz angenommen:

$$s_M(t) = \hat{s}_M \cdot \sin(\omega_M t + \varphi_M) \quad (\text{V.4})$$

Tritt ein nichtsinusförmiges Signal auf, wird es gemäß der Gültigkeit des Überlagerungssatzes in eine Summe aus sinusförmigen Signalen mit den entsprechenden Frequenzen und Phasenwinkeln zerlegt. Damit der Empfänger aus dem modulierten Signal das Basisbandsignal wieder zurückgewinnen kann, sind der Träger mit  $f_T$  und das obere Seitenband (OS) mit  $f_T + f_M$  oder das untere Seitenband (US) mit  $f_T - f_M$  oder beide erforderlich. Dabei steht  $f_M$  stellvertretend für ein *Frequenzband* (z.B. 15 Hz bis 15 kHz bei der UKW-Rundfunkübertragung).

### 2.1.1 Modulation durch Multiplikation

Es werden die zwei Zeitfunktionen nach Gleichung (V.1) und (V.4) multipliziert. Diese Art der Modulation kann schaltungstechnisch durch Multiplizierer in Form integrierter Schaltkreise erfolgen. Ist allerdings die Amplitude  $\hat{s}_M$  größer als  $\hat{s}_T$ , entsteht zusätzlich zur Amplitudenmodulation noch eine Phasenmodulation: Ein negativer Träger wird durch ein negatives moduliertes Signal positiv, und er erfährt damit einen Phasensprung von  $\pi$ . Um dieses Problem zu erfassen, führt man den *Modulationsgrad*  $m$  ein. Zunächst macht man für die Amplitude des Trägers nach Gleichung (V.1) den Ansatz:

$$s_T^*(t) = \hat{s}_T + s_M(t) = \hat{s}_T + \hat{s}_M \cdot \sin(\omega_M t) \\ \text{mit } \hat{s}_T \geq \hat{s}_M \quad (\text{V.5})$$

Der Phasenwinkel  $\varphi_M$  wurde der Einfachheit halber zu Null gesetzt, da hier die entstehenden Frequenzen von Interesse sind und der Phasenwinkel darauf keinen Einfluss hat. Das gilt auch für den Phasenwin-

kel  $\varphi_T$  des Trägers. Wird jetzt die Multiplikation ausgeführt, ergibt sich unter Anwendung eines Additionstheorems:

$$s_{\text{AM}} = s_T^*(t) \cdot \sin \omega_T t \\ = [\hat{s}_T + \hat{s}_M \sin(\omega_M t)] \cdot [\sin(\omega_T t)] \\ = \hat{s}_T \cdot \sin \omega_T t + \hat{s}_M \\ \times [-\cos(\omega_T + \omega_M) \cdot t + \cos(\omega_T - \omega_M) \cdot t] \cdot \frac{1}{2} \quad (\text{V.6})$$

Der Modulationsgrad wird folgendermaßen definiert:

#### • Modulationsgrad

$$m = \frac{\hat{s}_M}{\hat{s}_T} = \frac{\hat{s}_{\text{MUS}} + \hat{s}_{\text{MOS}}}{\hat{s}_T} \quad (\text{Siehe Kapitel 2.1.2}) \quad (\text{V.7})$$

$\hat{s}_{\text{MUS}}$  Trägeramplitude des unteren Seitenbandes (US) mit der Frequenz  $f_T - f_M$ ,  $\hat{s}_{\text{MOS}}$  Trägeramplitude des oberen Seitenbandes (OS) mit der Frequenz  $f_T + f_M$ ,  $\hat{s}_T$  Trägeramplitude

Dann folgt für Gleichung (V.6):

$$s_{\text{AM}} = \hat{s}_T \cdot \left\{ \sin \omega_T t + \frac{m}{2} \cdot [-\cos(\omega_T + \omega_M) \cdot t + \cos(\omega_T - \omega_M) \cdot t] \right\} \quad (\text{V.8})$$

Bei dieser Art der Modulation entstehen nur die drei erforderlichen Kreisfrequenzen  $\omega_T$ ,  $\omega_T + \omega_M$  und  $\omega_T - \omega_M$ . Damit ergibt diese Art der Amplitudenmodulation sehr geringe Verzerrungen, weil jede zusätzlich vorhandene Frequenz mit anderen Frequenzen Summen- und Differenzfrequenzen bilden kann, die im Basisband liegen.

### 2.1.2 Kenngrößen der Amplitudenmodulation

- **Modulationsgrad:** Der Modulationsgrad  $m = \hat{s}_M / \hat{s}_T = (\hat{s}_{\text{MUS}} + \hat{s}_{\text{MOS}}) / \hat{s}_T$  nach Gleichung (V.7) wird in der Praxis zu maximal etwa 80 % gewählt. Bei  $m = 100\%$  verschwindet der Träger, wenn  $s_M(t)$  seinen negativen Extremwert einnimmt. Unteres (US) und oberes (OS) Seitenband tragen gleichviel zu  $\hat{s}_M$  bei. Modulationsgrade über 100 % sind möglich, haben aber eine zusätzliche Phasenmodulation zur Folge und werden deshalb nur in Ausnahmefällen eingesetzt. Je größer der Modulationsgrad ist, desto größer ist die Signalamplitude im Empfänger nach der Demodulation (größere Lautstärke beim Rundfunkempfang), deshalb unterschreitet man für die lautesten Töne auch nicht die angegebenen 80 % (siehe auch Bild V-2a).
- **Seitenbänder:** Aus Gleichung (V.8) ergibt sich, dass durch die Modulation zwei neue Frequenzen entstanden sind: Neben dem bereits vorhandenen Träger mit der Frequenz  $f_T$  entstehen die Frequen-

zen  $f_T + f_M$  und  $f_T - f_M$ . Da das modulierende Signal in der Praxis aus einem *Frequenzband* im Frequenzbereich von  $f_1$  bis  $f_2$  besteht, werden durch die Modulation zwei *Frequenzbänder* erzeugt:

*Oberes Seitenband (OS)* mit dem Frequenzbereich  $(f_T + f_1) \dots (f_T + f_2)$

*unteres Seitenband (US)* mit dem Frequenzbereich  $(f_T - f_1) \dots (f_T - f_2)$

Werden beide Seitenbänder übertragen, spricht man auch von einer *Zweiseitenband-Amplitudenmodulation*.

- **Bandbreite:** Durch die Modulation hat man, bezogen auf das obere Seitenband, eine Frequenzverschiebung des Basisbandsignals um  $f_T$  erreicht. Die Übertragung erfordert eine Bandbreite von

$$\text{Bandbreite } B = 2 \cdot (f_2 - f_1) \approx 2 \cdot f_{M \max} \quad (\text{V.9})$$

für Zweiseitenband-Amplitudenmodulation.

Für die Näherung in Gleichung (V.9) wurde berücksichtigt, dass die niedrigste modulierende Frequenz  $f_1$  meist Null ist oder aber vernachlässigt werden kann (Rundfunkübertragung:  $f_1 = 15 \text{ Hz} \approx 0$  verglichen mit  $f_2 = 15 \text{ kHz}$ ). Für  $f_2$  wurde der anschauliche Wert  $f_{M \max}$  für die maximal auftretende modulierende Frequenz eingesetzt.

- **Darstellung im Zeit- und Frequenzbereich:** Bild V-2 stellt einen modulierten Träger in der Zeit- und in der Frequenzebene dar.

Im oberen Seitenband ist einer höheren Frequenz  $f_M$  auch eine höhere Frequenz in diesem Seitenband zugeordnet, man spricht deshalb von *Normallage*. Im unteren Seitenband dagegen gehört zu einer höheren Frequenz  $f_M$  eine niedrigere Frequenz im Seitenband ( $f_T - f_M$ ), was durch den Begriff *Kehrlage* charakterisiert wird. Um Normal- und Kehrlage auch optisch erkennen zu können, verwendet man nach Bild V-2c die Darstellung mit Dreiecken. Die steigende Seite des Dreiecks steht für steigende Frequenzen  $f_M$  im Basisband und hat nichts mit den Amplituden der Frequenzen zu tun! Bei  $f_T \pm f_1$  ist die Höhe des Dreiecks Null, bei  $f_T \pm f_2$  maximal.

- **Information:** Die Information  $s_M(t)$  ist in jedem der zwei Seitenbänder vollständig enthalten, aber nicht im Träger. Trotzdem wird der Träger für die Demodulation unbedingt benötigt. Zur Übertragung sind deshalb ein oder zwei Seitenbänder und der Träger erforderlich, wie sie sich nach Gleichung (V.8) ergeben. Allerdings kann u.U. auf die Übertragung des Trägers verzichtet werden, siehe Kapitel V.2.2.

### 2.1.3 Modulation an einer quadratischen Kennlinie

Nach Bild V-3 liegt in Reihe zu der Summe der Spannungen des Basisbandsignals  $u_M(t)$  und des Trägersignals  $u_T(t)$  eine Diode. Die Diodenkennlinie

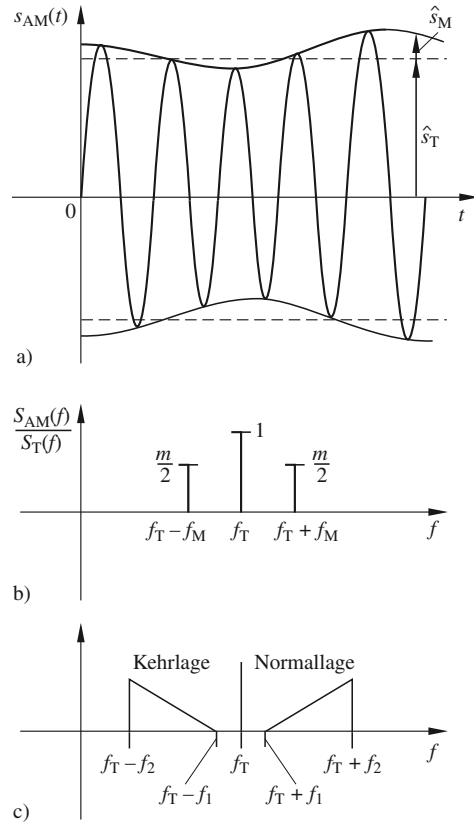


**Bild V-2** Modulierter Träger

- a) Zeitverlauf
- b) Spektrum
- c) Normal- und Kehrlage

soll durch die Abhängigkeit  $i = K \cdot u^2$  beschrieben werden, was durch  $U_0 > 0,7 \text{ V}$  näherungsweise erreicht wird. In den Gleichungen (V.4) und (V.5) werden die Amplituden  $s$  durch Spannungen ersetzt, sodass sich ergibt:  $i(t) = K \cdot [U_0 + \hat{u}_M \sin(\omega_M t) + \hat{u}_T \sin(\omega_T t)]^2$ .

Ausmultipliziert ergeben sich ein Gleichanteil sowie zeitabhängige Terme mit den Kreisfrequenzen  $\omega_M$ ,  $2\omega_M$ ,  $2\omega_T$ ,  $\omega_T$ ,  $\omega_T + \omega_M$ ,  $\omega_T - \omega_M$ . Die ersten drei Anteile müssen durch Filter abgetrennt werden, sodass sich dann die gleichen Frequenzen wie in Gleichung (V.8) ergeben.

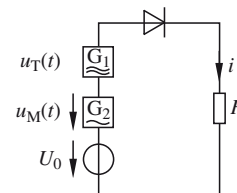


**Bild V-3** Modulation an einer quadratischen Kennlinie



### 2.1.4 Modulation an einer nichtlinearen nichtquadratischen Kennlinie

Die zwei oben beschriebenen Verfahren zur Modulation sind ideal, weil entweder nur die benötigten Frequenzen entstehen oder aber die nicht benötigten Frequenzen durch Filter einfach unterdrückt werden können, da sie einen genügend großen Frequenzabstand zu den erforderlichen Frequenzen haben. Im Allgemeinen liegt aber eine nichtlineare nichtquadratische Kennlinie vor, die, am Beispiel der Diode gezeigt, durch eine Reihenentwicklung dargestellt werden kann:

$$i = I_0 + K_1 \cdot u + K_2 \cdot u^2 + K_3 \cdot u^3 + \dots \quad (\text{V.10})$$

Setzt man für  $u$  den Ausdruck  $[U_0 + \hat{u}_M \sin(\omega_M t) + \hat{u}_T \sin(\omega_T t)]$  gemäß Bild V-3 ein, erhält man eine Vielzahl von neuen Frequenzen bzw. Frequenzbändern, wobei u.a. die zwei Frequenzbänder  $f_T \dots f_T + f_{M \max}$  und  $f_T \dots f_T + 2 \cdot f_{M \max}$  entstehen (Näherung wie in Gleichung (V.9) verwendet). Diese zwei Bänder überlagern sich und können nicht mehr voneinander getrennt werden, sodass auch die Information, die in  $f_M$  enthalten ist, nicht mehr unverzerrt zurückgewonnen werden kann.

Allgemein entstehen an einer Kennlinie  $i = K_p \cdot u^p$  die Frequenzen  $f = m \cdot f_T + n \cdot f_M$  mit  $m + n = p$ . Für  $p = 2$  ergeben sich die Frequenzen  $2 \cdot f_T$ ,  $2 \cdot f_M$ ,  $f_T \pm f_M$ . Die unerwünschten Frequenzen  $2 \cdot f_T$  und  $2 \cdot f_M$  lassen sich aber auf einfache Weise durch Filterschaltungen unterdrücken. Ein kubischer Anteil ( $p = 3$ ) in der Kennlinie erzeugt die Frequenzen  $3 \cdot f_T$ ,  $3 \cdot f_M$ ,  $2 \cdot f_T \pm f_M$ ,  $f_T \pm 2 \cdot f_M$  und damit den oben erwähnten kritischen Anteil  $f_T \pm 2 \cdot f_M$ . Man versucht deshalb, eine quadratische Kennlinie anzunähern.

### 2.1.5 Zeigerdiagramm

Das Zeigerbild der AM nach Gleichung (V.8) enthält drei Zeiger mit dem gleichen Drehsinn, aber unterschiedlichen Winkelgeschwindigkeiten. Man nimmt nun den Trägerzeiger als feststehend an und lässt die Seitenbandzeiger mit den Winkelgeschwindigkeiten  $+\omega_M$  und  $-\omega_M$  symmetrisch zum Träger drehen, Bild V-4. Die Summe der Seitenbandzeiger zeigt wegen der Symmetrie stets in Richtung des Trägerzeigers und bewegt sich zwischen den Grenzen  $\hat{s}_T(1+m)$  und  $\hat{s}_T(1-m)$ .

Der Vorteil dieser Darstellung liegt darin, dass man die Auswirkungen von Störungen oder anderen Veränderungen einfach erkennen kann. Erreichen beispielsweise die beiden Seitenbänder den Empfänger nicht mit gleicher Amplitude und ändern sich die Amplituden fortlaufend um unterschiedliche Werte, liegt der Summenzeiger nicht mehr in Richtung des Trägers, sondern schwankt um die durch den Träger gegebene mittlere Lage. Das ergibt eine zusätzliche Phasenmodulation.

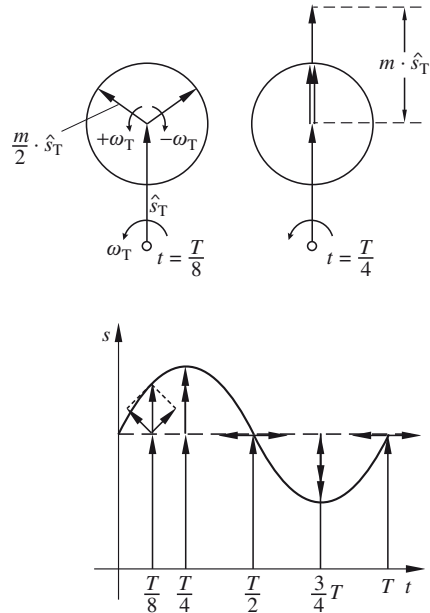


**Bild V-4** Zeigerbild der AM zu zwei unterschiedlichen Zeitpunkten

### 2.1.6 Modulationstrapez

Zur Kontrolle des Modulationsgrades und der Modulationsverzerrungen verwendet man eine Messschaltung nach Bild V-5.

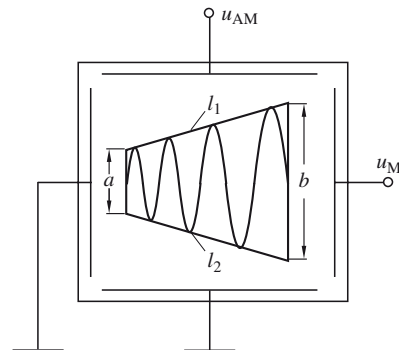


**Bild V-5** Modulationstrapez

An die Y-Ablenkplatten eines Oszilloskops wird das amplitudenmodulierte Signal  $u_{AM}$  angeschlossen, an die X-Ablenkplatten das modulierende Signal  $u_M$ . Der Schirm stellt das skizzierte Bild dar. Es gibt Auskunft über folgende Größen:

- **Modulationsgrad:**  $m = \frac{b-a}{b+a}$
- **Modulationsverzerrungen:** Der Grad der Verzerrungen lässt sich an den Linien  $l_1$  und  $l_2$  abschätzen: Sind sie Geraden, gibt es keine Verzerrungen, andernfalls sind sie mit zunehmenden Verzerrungen stärker gekrümmt.

### 2.1.7 Demodulation von AM

Die Demodulation von amplitudenmodulierten Signalen ist sehr einfach. Bild V-6 zeigt die Schaltung. Sie wird auch als *Hüllkurvendemodulation* bezeichnet.

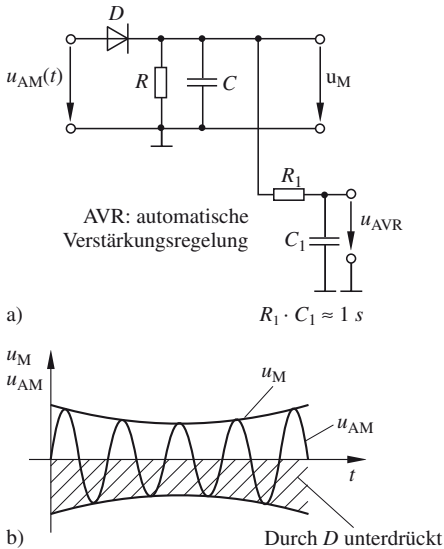


**Bild V-6** Demodulation von AM

a) Schaltung

b) Betrachtung im Zeitbereich

**Betrachtung im Zeitbereich:** Die Diode trennt die negativen Spannungswerte ab. Der Tiefpass aus  $R$  und  $C$  ist so bemessen, dass eine Spitzenwertgleichrichtung stattfindet (*Hüllkurvendetektor*, *Einhüllendendemodulation*) und die Spannung am Kondensator der Hüllkurve und damit dem Verlauf der modulierenden Spannung  $u_M$  folgt. Für die Dimensionierung gilt:  $\omega_M \max < 1/RC < \omega_T/10$ .

**Betrachtung im Frequenzbereich:** Die Trägerfrequenz und die Frequenzen des oberen und unteren Seitenbandes nach Gleichung (V.8) gelangen als Summe auf die Diode mit der „idealen“ Diodenkennlinie (siehe Kapitel I.2.1.3)  $i = K \cdot u^2$ :

$$i = K \cdot u^2 = K \cdot \left\{ \sin \omega t + \frac{m}{2} \cdot [-\cos(\omega_T + \omega_M) + \cos(\omega_T - \omega_M)] \right\}^2 \quad (\text{V.11})$$

Nach Quadrierung des Klammerausdruckes ergibt sich zum einen die gewünschte Frequenz  $f_M$ , zum anderen Frequenzen, die im Bereich um  $f_T$  bzw.  $2 \cdot f_T$  liegen. Der Kondensator unterdrückt die letztgenannten Frequenzen, und es bleibt nur das gewünschte Signal  $u_M$  übrig. Leitet man  $u_M$  über einen Tiefpass mit einer Grenzfrequenz  $f_g = 1/(2\pi R_1 C_1) \ll f_{M \min}$  (Bild V-6), kann man die Spannung  $u_{AVR}$  zur auto-

matischen Verstärkungsregelung (AVR) heranziehen, da ihr Wert der Amplitude des Trägers proportional ist. Auf diese Weise lassen sich einigermaßen konstante Trägeramplituden und damit Lautstärken am Empfänger erreichen. Das ist besonders wichtig beim Autoradioempfang mit den ständig schwankenden Trägeramplituden.

### 2.1.8 Leistung von Träger und Seitenbändern

Der Träger benötigt die Leistung  $P_T = \frac{\hat{u}_T^2}{2 \cdot Z}$ , ein Seitenband

$$P_{SB} = \frac{1}{2 \cdot Z} \left( \frac{1}{2} \hat{u}_T \cdot m \right)^2 = \frac{\hat{u}_T^2}{2 \cdot Z} \cdot \frac{m^2}{4} = P_T \cdot \frac{m^2}{4}.$$

Die Gesamtleistung ist:

$$P_{\text{ges AM}} = P_T + 2 \cdot P_{SB} = \frac{\hat{u}_T^2}{2 \cdot Z} + \frac{\hat{u}_T^2}{2 \cdot Z} \cdot \frac{m^2}{2} = \frac{\hat{u}_T^2}{2 \cdot Z} \cdot \left( 1 + \frac{m^2}{2} \right) \quad (\text{V.12})$$

Träger                      beide Seitenbänder

$Z$  Lastwiderstand, den die Trägerspannung speist

#### ■ Beispiel V.1:

- a) Gilt für einen Träger der Modulationsgrad  $m = 1$ , entfallen nach Gleichung (V.12)  $\frac{1}{1 + \frac{m^2}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$  der Gesamtleistung auf den Träger und je 1/6 auf jedes Seitenband.
- b) Für  $m = 0,8$  erhält jedes Seitenband 12,1 %, der Träger 75,8 % der Gesamtleistung.

### 2.1.9 Störungen bei amplitudenmodulierten Signalen

Hier werden die zwei am häufigsten vorkommenden Störungen betrachtet, d.h. diejenigen, die durch Nachbarträger und Rauschen verursacht werden.

#### 1. Störungen durch sinusförmigen Nachbarträger

Der Nachbarträger hat eine Trägerfrequenz  $f_N$ , die innerhalb des Spektrums des Nutzträgers  $f_T \pm f_{M \max}$ , d.h. im Bereich des unteren und oberen Seitenbandes, liegt. (Annahme: Im Empfänger werden Frequenzanteile außerhalb der Seitenbänder unterdrückt.)

- a) Der Nachbarträger ist nicht moduliert. Dann entsteht nach der Demodulation ein Pfeifton mit der Differenzfrequenz  $|f_N - f_T|$ , und es ergibt sich nach dem Demodulator ein niederfrequentes Verhältnis  $a_{S, N0}$  von Nutz- zu Störsignal zu:

$$a_{S, N0} = \frac{\hat{u}_T}{\hat{u}_N} \cdot m \quad (\text{V.13})$$

$\hat{u}_T$  Amplitude des Nutzsignalträgers in V,  $\hat{u}_N$  Amplitude des Nachbarsignal-(Störsignal-)Trägers in V,  $m$  Modulationsgrad des Nutzsignalträgers

Der Nachbarsignal-(Störsignal-)Träger kann auch durch Einschaltvorgänge (Fourierzerlegung ein-

maliger Vorgänge), Gewitter, atmosphärische Störungen, Harmonische von nichtsinusförmigen Spannungs- und Stromverläufen in Motoren, Frequenzumrichtern und dergleichen entstehen. Deshalb werden Übertragungen im freien Raum häufig gestört. Mit wachsendem Abstand Sender–Empfänger nimmt die Häufigkeit der Störungen und deren Intensität zu, da die Amplitude der Trägerschwingung abnimmt. Deshalb ist bei Amplitudenmodulation ein störungsarmer Empfang nur dann möglich, wenn man sich im Nahbereich eines Senders befindet oder ein entfernter Sender mit entsprechend hoher Leistung und hohem Modulationsgrad arbeitet. Da oberes und unteres Seitenband zu gleichen Teilen zum Basisbandsignal beitragen (Gleichung (V.7)), hat das demodulierte Signal bei Einseitenbandübertragung (siehe Kapitel V.2.2.1) nur die halbe Amplitude und damit auch nur den halben Störabstand gegenüber Zweiseitenbandübertragung. Der Störabstand wird weiterhin verringert, wenn bei der Einseitenbandübertragung mit unterdrücktem Träger der im Empfänger regenerierte Träger eine Phasenverschiebung zu dem ursprünglichen Senderträger aufweist.

- b) Der Nachbarträger ist mit  $m_N$  amplitudenmoduliert. Dann tritt neben dem Pfeifton nach Gleichung (V.13) noch die Modulation des Nachbar-(Stör-)Trägers als *Nebensprechen* auf. Für das niederfrequente Verhältnis  $a_{S,N1}$  von Nutz- zu Störsignal ergibt sich:

$$a_{S,N1} = \left( \frac{\hat{u}_T}{\hat{u}_N} \right)^2 \cdot \frac{m}{m_N} \quad (\text{V.14})$$

$\hat{u}_T$  Amplitude des Nutzsignalträgers in V,  $\hat{u}_N$  Amplitude des Nachbarsignal-(Störsignal-)Trägers in V,  $m$  Modulationsgrad des Nutzsignalträgers,  $m_N$  Modulationsgrad des Nachbarsignal-(Störsignal-)Trägers

## 2. Störungen durch Rauschen

Nach dem Demodulator erhält man einen NF-Signal-Rauschabstand

$$S_{SN} = 10 \cdot \lg \frac{m^2 \cdot P_T}{2 \cdot f_{M \max} \cdot F \cdot k \cdot T} \text{ dB} \quad (\text{V.15})$$

$m$  Modulationsgrad;  $P_T$  Trägerleistung nach dem Demodulator in W;  $f_{M \max}$  maximale Basisbandfrequenz in Hz;  $F$  Rauschzahl des Empfängers;  $k$  Boltzmann-Konstante  $1,38 \cdot 10^{-23}$  Ws/K;  $T$  absolute (thermodynamische) Temperatur in K

### 2.1.10 Kreuzmodulation

Bei dieser Art der Modulation handelt es sich um einen *unerwünschten* Modulationseffekt. Liegen eine amplitudenmodulierte Schwingung ( $\omega_T \pm \omega_M$ ) und ein unmodulierter Träger ( $\omega_{T2}$ ) an einer Kennlinie mit einem Glied 3. Ordnung (Kapitel 2.1.4, Gleichung (V.10)), entstehen u.a. Kombinationsschwingungen mit  $\omega_{T2} \pm \omega_M$ . Das heißt, dass der ursprünglich unmodulierte Träger ( $\omega_{T2}$ ) mit  $\omega_M$  *kreuzmoduliert* worden ist. Natürlich tritt dieser Effekt auch auf, wenn der Träger mit der Kreisfrequenz  $\omega_{T2}$  amplitudenmoduliert ist.

## 2.2 Sonderformen der Amplitudenmodulation

Grundlage für die dargestellten Sonderformen sind die Gleichungen (V.9) und (V.12). Da wesentlich mehr Sender als Frequenzbänder vorhanden sind, hat man versucht, den pro Sender erforderlichen Bandbreitenbedarf zu reduzieren. Außerdem hat man nach Lösungen gesucht, die im Träger enthaltene Leistung auf die Seitenbänder zu verlagern, da nur die Seitenbänder Information übertragen. Auf diese Weise kann man mit gleicher Leistung höhere Reichweiten erzielen bzw. bei gleicher Entfernung Sender–Empfänger einen störungsfreieren Empfang sicherstellen oder mit geringerer Leistung die gleiche Reichweite wie vorher erreichen.

### 2.2.1 Einseitenbandmodulation (ESB, SSB)

Da ein Seitenband die vollständige Information enthält, wird das andere Seitenband unterdrückt. (ESB-Übertragung: Ein-Seiten-Band-Übertragung; SSB: single-sideband). Damit sinkt die Bandbreite nach Gleichung (V.9) auf die Hälfte:  $B_{\text{ESB}} \approx f_{M \max}$ . Für die Übertragung des Trägers, der nach Gleichung (V.11) für die Demodulation unbedingt benötigt wird, gibt es drei Möglichkeiten:

1. Der Träger wird mit voller Amplitude übertragen. Dann wird lediglich maximal 1/6 der Gesamtleistung eingespart, die das unterdrückte Seitenband bei  $m = 100\%$  benötigt (siehe Beispiel V.1).
2. Der Träger wird mit einer Restamplitude, z.B. 10 %, übertragen: *AM mit Restträger*. Vorteile: a) Die Leistungseinsparung für den Träger kann in eine größere Leistung für das Seitenband umgesetzt werden. b) Durch den Restträger bleibt eine eventuell erforderliche Phasenbeziehung zwischen Senderträger und einem weiteren Signal erhalten (Beispiel: UKW-Stereo-Rundfunk mit Hilfstträger). Nachteile: a) Wird die sowieso schon geringe Trägeramplitude am Empfangsort durch Schwunderscheinungen zeitweise zu Null, ist wegen des fehlenden Trägers keine Demodulation und damit kein Signalempfang möglich. b) Im Empfänger muss die Amplitude des Restträgers gegenüber dem Seitenband ausreichend verstärkt werden, damit eine verzerrungsarme Demodulation möglich ist (Erklärung siehe folgender Absatz). Das erfordert sehr steilflankige und damit aufwendige Filterschaltungen.
3. Der Träger wird ganz unterdrückt. Vorteil: Die gesamte Senderleistung gelangt in ein Seitenband, und man erreicht entweder eine große Reichweite oder einen störungsärmeren Empfang. Nachteile: a) Der unterdrückte Träger muss im Empfänger wieder zugesetzt werden, da sonst keine Demodulation möglich ist. Die Frequenz dieses im Empfänger erzeugten *Hilfstträgers* muss zeitlich konstant sein und darf von der im Sender unterdrückten Trägerfrequenz nicht abweichen, andern-

falls sind die vom Empfänger demodulierten Frequenzen alle um den Differenzbetrag zwischen Sender- und Empfängerträger verschoben. b) Das im Empfänger demodulierte Signal ist zusätzlich phasenmoduliert, was zu nichtlinearen Verzerrungen führt. Diese Tatsache lässt sich am Bild V-4 ablesen: Wenn einer der Seitenbandzeiger fehlt, zeigt der Summenzeiger aus Träger und einem Seitenband nicht mehr in Richtung des Trägers, was der genannten Phasenmodulation entspricht. Man wählt deshalb die Amplitude des Hilfsträgers ( $\hat{u}_T$ ) groß im Verhältnis zur Amplitude des Seitenbandes ( $\hat{u}_M$ ) und kann dadurch die Verzerrungen klein halten. Einen Anhaltswert für den die Verzerrungen kennzeichnenden Klirrfaktor gibt die folgende Formel. Da die erste Oberschwingung (oder zweite Harmonische) den Klirrfaktor wesentlich bestimmt, wurde nur ihr Einfluss berücksichtigt:

$$\text{Klirrfaktor } k \approx k_2 = \frac{\hat{u}_M}{2} \cdot \frac{1}{4 \cdot \hat{u}_T} \quad (\text{V.16})$$

$\hat{u}_T$  Amplitude des Hilfsträgers in V,  $\hat{u}_M$  Amplitude des Seitenbandes in V

Wichtig ist, dass das Verhältnis  $\hat{u}_M/\hat{u}_T$  nicht mehr durch den Modulationsgrad des Senders, sondern durch die empfängerseitig zugefügte Trägeramplitude  $\hat{u}_T$  bestimmt wird. c) Durch die empfängerseitige Addition des Trägers geht eine eventuell erforderliche Phasenbeziehung zwischen Träger und Basisband oder einem zweiten Träger verloren (Beispiel: Stereo-Rundfunkübertragung mit zwei Trägern, deren Phasenwinkel zueinander den Stereoeffekt beeinflusst). Bei der einkanaligen Übertragung von Sprache, Musik und Bildern (Mono-Rundfunk, Schwarz-Weiß-Fernsehen) spielt ein Phasenwinkel zwischen senderseitigem Träger und dem im Empfänger zugesetzten Träger aber keine Rolle. d) Zur Verringerung des Störabstandes siehe Kapitel 2.1.9, Störungen bei amplitudenmodulierten Signalen.

Zur Einseitenbandmodulation sind spezielle Schaltungen entwickelt worden, weil es nicht ohne Weiteres möglich ist, aus einem zweiseitenbandmodulierten Signal mit Träger den Träger und ein Seitenband mit einer Filterschaltung herauszufiltern. Das ist genau dann schwierig, wenn die Frequenz  $f_{M \min}$  sehr klein ist. Bei der Rundfunkübertragung ist  $f_{M \min} = 15 \text{ Hz}$ . Verwendet man  $f_T = 1 \text{ MHz}$ , wäre ein Filter erforderlich, dass bis einschließlich 1,000 MHz alle Frequenzen unterdrückt, ab 1,000015 MHz die entsprechenden Frequenzen durchlässt. Erreicht  $f_{M \min}$  den Wert Null (Fernsehen: Bild schwarz), können die erforderlichen Filterschaltungen prinzipiell nicht realisiert werden.

Bild V-7 zeigt einen Ringmodulator, der als Ausgangssignal nur die zwei Seitenbänder enthält und

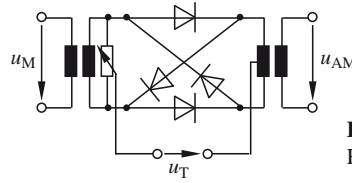
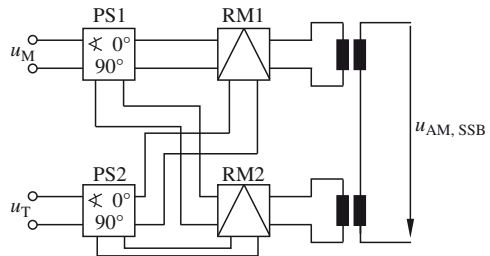


**Bild V-7**  
Ringmodulator

den Träger unterdrückt. Ein Seitenband muss noch, sofern das technisch möglich ist, durch geeignete Filterschaltungen abgetrennt werden. Eine Weiterentwicklung ist in Bild V-8 dargestellt. Die beiden Ringmodulatoren liefern die zwei Seitenbänder ohne Träger. Durch die Phasenschieber sind die beiden oberen Seitenbänder der Modulatoren um  $180^\circ$  verschoben und heben sich über die Summenbildung in dem Transformator auf. Die unteren Seitenbänder dagegen sind in Phase und addieren sich.



PS1, 2: Phasenschieber mit  $0^\circ$  und  $90^\circ$   
RM1, 2: Ringmodulatoren

**Bild V-8** Modulator für Einseitenband-AM

### 2.2.2 Restseitenbandmodulation (RM, VSB)

Die Restseitenbandübertragung (Restseitenbandmodulation, vestigial sideband) wird bei der Fernsehübertragung angewendet. Dort ist  $f_{M \max} \approx 5,5 \text{ MHz}$ , sodass bei Zweiseitenbandübertragung eine Bandbreite von etwa 11 MHz erforderlich gewesen wäre. Damit hätte man zu wenig Sender unterbringen können. Bei der Bildübertragung ist außerdem die Übermittlung eines Gleichwertes erforderlich (z.B. Dunkelsteuern der Bildröhre beim Umschalten im Studio). Senderseitig wären damit bei der Trägerfrequenz  $f_T$  „unendlich steile“ Filterkurven erforderlich gewesen, um genau ab der Trägerfrequenz das zweite Seitenband vollständig zu unterdrücken. Da dies technisch nicht möglich ist, setzt man die Restseitenbandübertragung nach Bild V-9 ein.

Ein Seitenband wird vollständig, das andere nur teilweise übertragen. Das dargestellte Frequenzspektrum lässt sich senderseitig durch geeignete Filterschaltungen realisieren. Wird dieses Signal demoduliert, erhält man die Anteile mit Frequenzen bis  $f_M = 0,75 \text{ MHz}$  mit doppelter Amplitude, da beide Seitenbänder gleichgewichtig zum Gesamtsignal beitragen.

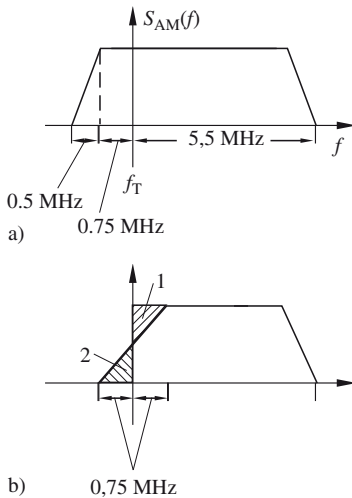


**Bild V-9** Restseitenbandübertragung  
(Beispiel Fernsehen)

- a) Frequenzspektrum des Senders  
b) Durchlasskurve des Empfängers

Bis 1,25 MHz sinkt die Amplitude kontinuierlich auf den einfachen Wert, der auch für noch höhere Frequenzanteile entsteht. Um diese Signalverzerrungen empfängerseitig auszugleichen, wird eine Durchlasskurve nach Bild V-9b eingesetzt. Der Verlauf der Nyquistflanke sollte möglichst gerade sein und muss durch geeignete Filterschaltungen realisiert werden. Wichtig ist weiterhin, dass die Flächen 1 und 2 gleich groß sind, denn dann erhält man alle Frequenzanteile mit gleicher Amplitude.

Der Vorteil der Restseitenbandübertragung liegt darin, dass, am Beispiel Fernsehen gezeigt, senderseitig nicht mehr 11 MHz, sondern nur noch etwas weniger als 7 MHz Bandbreite benötigt werden. Damit können mehr Sender in Betrieb genommen werden, was wegen der Forderung nach flächendeckender Versorgung der Bevölkerung mit mehreren Fernsehprogrammen erforderlich ist. Die technische Realisierung ist sender- und empfängerseitig mit vertretbarem Aufwand möglich.

### 2.2.3 Quadraturmodulation

Diese auch in der Farbfernsehtechnik angewendete Modulationsart beruht darauf, dass man zwei Träger mit gleicher Frequenz  $f_T$ , aber mit einem Phasenwinkel von  $90^\circ$  zueinander erzeugt. Dem einen Träger wird ein Signal mit  $\omega_{M1}$  und dem anderen ein Signal mit  $\omega_{M2}$  aufmoduliert. Die phasenverschobenen Träger werden unterdrückt, damit sie im Empfänger keine Störungen verursachen. Die Amplituden- und Phasenbeziehung der zwei Signale mit  $\omega_{M1}$  und  $\omega_{M2}$  zueinander muss nach der Demodulation erhalten bleiben, weil daraus über eine Summenbildung das Farbsignal gebildet wird. Setzt man den Träger emp-

fängerseitig frequenzstabil mit  $0^\circ$  bzw.  $90^\circ$  zu (Quarzoszillator mit  $90^\circ$ -Phasenschieber), ist diese Bedingung erfüllt. Weitere Einzelheiten zur Anwendung der Quadraturmodulation in der Farbfernsehtechnik zeigt Kapitel VIII.2.2.

### 2.3 Technische Ausführung der Amplitudenmodulation

Bild V-10 stellt Schaltungen mit Transistoren zur Zweiseitenband-Amplitudenmodulation dar, und zwar mit Modulation an der Basis (*additives Verfahren*) oder am Kollektor (*multiplikatives Verfahren*).

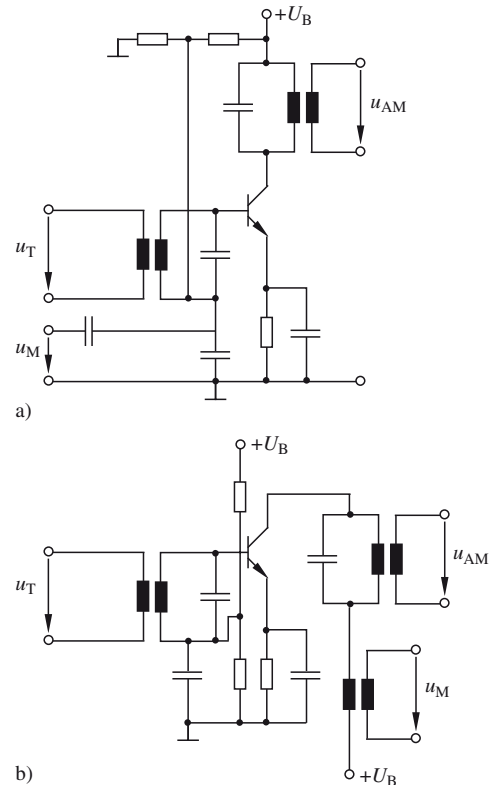


**Bild V-10** Schaltungen zur Amplitudenmodulation

- a) Modulation an der Basis (additiv)  
b) Modulation am Kollektor (multiplikativ)

Bei der Modulation an der Basis wird die nichtlineare nichtquadratische Kennlinie  $i_B = f(u_{BE})$  des Transistors ausgenutzt, was nach Kapitel 2.1.4 zu Verzerrungen führt. Deshalb sind Modulationsgrade von maximal 70 % zulässig. Es werden Wirkungsgrade von höchstens 50 % erreicht. Vorteil dieser Modulationsschaltung ist, dass nur eine geringe Leistung für das modulierende Signal erforderlich ist. Wesentlich verzerrungsärmer ist die Schaltung mit Modulation im Kollektorkreis (Modulation durch Multiplikation nach Kapitel 2.1.1). Allerdings muss die Leistung des modu-



lierenden Signals in der Größenordnung der an die Antenne abgegebenen Leistung liegen. Es sind Modulationsgrade bis 100 % möglich. Der Wirkungsgrad kann bis zu 90 % betragen. In Rundfunk- und Fernsehse-  
 sendern werden anstelle der Transistoren Senderöhren mit Ausgangsleistungen im kW-Bereich eingesetzt.

In der Rundfunkübertragungstechnik hat man zunächst die einfach zu handhabende Zweiseitenband-AM eingesetzt. Der Übergang zur Einseitenbandmodulation mit unterdrücktem Träger wurde noch nicht vollzogen, weil der Anwender dann die Trägerfrequenz genau kennen und auch frequenzstabil zur Verfügung haben müsste. Bei der Fernseh-Bildübertragung hat man die Restseitenbandübertragung gewählt, weil die Einseitenbandübertragung technisch nicht realisierbar ist (siehe Kapitel V.2.2.2). Für den Kurzwellenbereich gibt es aber Überlegungen, die besonders dort eingesetzten hohen Senderleistungen bei gleicher Reichweite durch Einseitenbandmodulation zu reduzieren. Um auch die bisher benutzten Empfänger weiterhin verwenden zu können, soll in einem ersten Schritt die Trägeramplitude auf die Hälfte gesenkt werden (Einseitenbandmodulation mit Restträger).

Für die Rundfunk- und Fernsehübertragung gelten folgende Daten:

1. Lang-, Mittel- und Kurzwellenrundfunk: Zweiseitenband-AM mit einer höchsten Basisbandfrequenz  $f_{M \max} = 4,5$  kHz. Die Senderleistungen betragen maximal etwa 1 MW. Wegen der Vielzahl der unterzubringenden Sender wurde die Bandbreite des Basisbandes auf maximal 4,5 kHz beschränkt.
2. Fernsehfunk: Bildübertragung in Restseitenbandmodulation, Daten siehe Bild V-9. Die Tonübertragung geschieht frequenzmoduliert.

## 2.4 Winkelmodulation

Unter dem Begriff *Winkelmodulation* werden *Frequenz-* (FM) und *Phasenmodulation* (PM) zusammengefasst.

### 2.4.1 Grundlagen

Es wird wieder ein sinusförmiger Träger nach Gleichung (V.1) verwendet:

$$s_T(t) = \hat{s}_T \cdot \sin(\underbrace{\omega_T t + \varphi_T}_{\Phi(t)}) \quad (\text{V.17})$$

Der Winkel  $\Phi(t)$  kann auf zwei Arten in Abhängigkeit vom modulierenden Signal geändert werden.

1. *Phasenmodulation* (PM):

$$\Phi(t) = \omega_T t + \underbrace{\alpha_P \cdot s_M(t)}_{\varphi(t)} \quad (\text{V.18})$$

2. *Frequenzmodulation* (FM):

$$\Phi(t) = \underbrace{\left[ \omega_T + \alpha_F \cdot s_M(t) \right]}_{\Omega(t)} \cdot t + \varphi_T \quad (\text{V.19})$$

$\alpha_P$  und  $\alpha_F$  sind Modulatorkonstanten. Der Zusammenhang zwischen beiden Modulationsarten ist gegeben durch

$$\Omega(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} \approx \frac{\Delta\Phi(t)}{\Delta t} \quad (\text{V.20})$$

Die Frequenz ist gleich der Änderungsgeschwindigkeit des Phasenwinkels, geteilt durch  $2\pi$  (Zusammenhang zwischen Frequenz- und Phasenmodulation siehe auch Kapitel V.4.2, Pulsfrequenz- und Pulsphasenmodulation). Größter Frequenz- und größter Phasenhub treten nicht gleichzeitig auf, da sie über einen Differenzialquotienten miteinander verknüpft sind. Eine cosinusförmige modulierende Spannung bei FM hat einen Phasenhub, der sinusförmig ist, also um  $90^\circ$  nacheilt. Setzt man wieder ein sinusförmiges modulierendes Signal nach Gleichung (V.4) voraus und setzt den Winkel  $\varphi_M = 0$ , so folgt:  $s_M(t) = \hat{s}_M \cdot \sin(\omega_M t)$ . Eingesetzt in die Gleichungen (V.18) und (V.19) ergibt sich für die beiden Modulationsarten:

PM:

$$s_{PM}(t) = \hat{s}_T \cdot \sin(\omega_T t + \underbrace{\alpha_P \cdot \hat{s}_M}_{\text{Phasenhub } \Delta\Phi} \cdot \sin \omega_M t) \quad (\text{V.21})$$

FM:

$$s_{FM}(t) = \hat{s}_T \cdot \sin\left[\left(\omega_T + \underbrace{\alpha_F \cdot \hat{s}_M}_{\text{Frequenzhub } \Delta\Omega} \cdot \sin \omega_M t\right) t + \varphi_T\right] \quad (\text{V.22})$$

Im Phasenhub  $\alpha_P \cdot \hat{s}_M$  ist damit die Information über die *Amplitude* des modulierenden Signals (Lautstärke bei Tonübertragung) enthalten. Senderseitig wird für die größte zu übertragende Amplitude (größte Lautstärke) ein Wert  $\alpha_P \cdot \hat{s}_M|_{\max}$  vorgegeben. Das Gleiche gilt für den (Kreis-)Frequenzhub  $\alpha_F \cdot \hat{s}_M$ . Für die größte zu übertragende Amplitude (lautester zu übertragender Ton) ist beim UKW-Rundfunk  $\Delta\Omega|_{\max} = 2\pi \cdot f_{\max} = 2\pi \cdot 75$  kHz festgelegt. Die Information über die *Frequenz* des modulierenden Signals ist in der Anzahl der Wechsel zwischen maximaler und minimaler Frequenz pro Sekunde enthalten.

Für den UKW-Rundfunk gilt: Bei einer Trägerfrequenz  $f_T = 100$  MHz und einer Frequenz des modulierenden Signals von  $f_M = 4$  kHz und maximaler Lautstärke ändert sich die Frequenz des Senders 4000mal pro Sekunde zwischen den Werten  $100 \text{ MHz} - 75 \text{ kHz}$  und  $100 \text{ MHz} + 75 \text{ kHz}$ . Bei einem leiseren Ton gleicher Frequenz und halber Lautstärke ändert sich die Frequenz des Senders wiederum 4000mal pro Sekunde, aber jetzt beispielsweise zwischen den Werten  $100 \text{ MHz} - 30 \text{ kHz}$  und  $100 \text{ MHz} + 30 \text{ kHz}$ . (Hinweis: Kein linearer Zusammenhang zwischen Frequenzhub und  $f_M$ , siehe dazu *Preemphasis* und *Deemphasis*.)

### 2.4.2 Kenngrößen

Mit den Gleichungen (V.18) bis (V.22) ergeben sich folgende Kenngrößen:

- **Phasenhub PM:**  $\Delta\Phi = \alpha_P \cdot \hat{s}_M$
- **(Kreis-)Frequenzhub PM:**  $\alpha_P \cdot \hat{s}_M \cdot \omega_M$   
(Folgt durch Differenzieren von Gleichung (V.21) gemäß Gleichung (V.20) von  $\alpha_P \cdot \hat{s}_M \cdot \sin \omega_M \cdot t$ .)
- **(Kreis-)Frequenzhub FM:**  $\Delta\Omega = \alpha_F \cdot \hat{s}_M$
- **Phasenhub FM:**  $\Delta\Phi = \frac{\alpha_F \cdot \hat{s}_M}{\omega_M}$

(Folgt durch Integrieren von  $\alpha_F \cdot \hat{s}_M \cdot \sin \omega_M \cdot t$ .)

Auch bei FM ist der *Phasenhub* wichtig, weil sich der Einfluss von Störungen und die Bandbreite auf den Phasenhub beziehen. Daher wurde der Modulationsindex als Kenngröße eingeführt:

- **Modulationsindex  $\eta$  bei FM:**

$$\eta = \Delta\Phi = \frac{\Delta\Omega}{\omega_M} = \frac{\Delta f_{T \max}}{f_M} = \frac{\Delta F}{f_M}; \quad (\text{V.23})$$

$\Delta F$  Spitzenhub

Für den UKW-Rundfunk gilt:

$f_{M \max} = 15 \text{ kHz}$ ;  $\Delta F = 75 \text{ kHz}$ ;  $\Rightarrow \eta = \eta_{\min} = 75/15 = 5$ .  
Der Modulationsindex ist abhängig von der Frequenz des modulierenden Signals und wird häufig für  $f_{M \max}$  angegeben. Er steigt mit sinkender modulierender Frequenz  $f_M$  und kann sehr groß werden. Damit nimmt auch der Dynamikbereich (Lautstärkebereich) große Werte an. Das gilt ebenso für den Phasenhub, wie aus Bild V-11 zu ersehen ist.

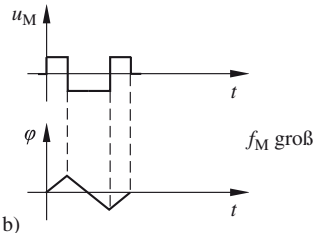
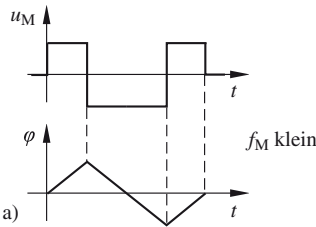


**Bild V-11** Zusammenhang zwischen Phasenhub  $\varphi$  und Frequenz  $f_M$

- a)  $f_M$  klein  
b)  $f_M$  groß

Hinweis: Der Modulationsgrad  $m = \frac{\Delta F}{f_T}$ , der bei der Amplitudenmodulation eine wichtige Kenngröße ist, hat hier keine Bedeutung.

### 2.4.3 Zeigerdarstellung

Der Zeiger des Trägers dreht sich ohne Modulation mit konstanter Winkelgeschwindigkeit proportional zur Frequenz  $f_T$ . Er dient als Bezugszeiger. Wird mit einem sinusförmigen Signal nach Bild V-12 moduliert, erhöht sich für positives  $u_M$  der Phasenwinkel  $\varphi$ , und der Trägerzeiger eilt dem Bezugszeiger vor, maximal bis  $+\Delta\Phi$ . Das ist gleichbedeutend mit einer Frequenzänderung  $\Delta f$ , die der Winkeländerung nach Gleichung (V.20) um  $90^\circ$  voreilt. Bei negativem  $u_M$  eilt der Trägerzeiger dem Bezugszeiger nach, maximal bis  $-\Delta\Phi$ . Wie bei der Zeigerdarstellung der Amplitudenmodulation stellt man sich den Bezugszeiger ruhend vor, sodass der Trägerzeiger im Rhythmus von  $u_M$  zwischen  $+\Delta\Phi$  und  $-\Delta\Phi$  hin und her pendelt (*Pendelzeiger*).

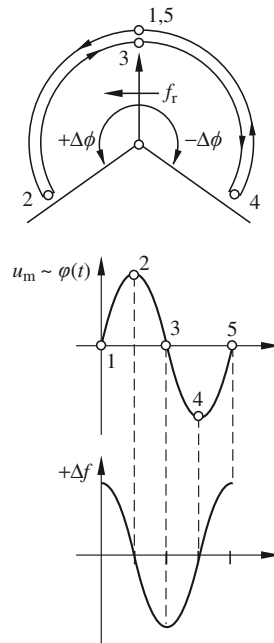


**Bild V-12** Zeigerdarstellung bei der Winkelmodulation

### 2.4.4 Spektrum und Bandbreitenbedarf

Wird ein Träger mit der Frequenz  $f_T$  mit einem Signal der Frequenz  $f_M$  frequenzmoduliert, so entstehen außer  $f_T$  folgende Frequenzen:

- **Frequenzspektrum bei FM:**

$$\begin{aligned} f_T \pm f_M; \quad f_T \pm 2f_M; \quad f_T \pm 3f_M; \\ f_T \pm 4f_M; \quad \dots; \quad f_T \pm n f_M; \quad \dots \end{aligned}$$



Es entstehen unendlich viele Frequenzen im Abstand von  $\pm f_M$  zueinander. Die Amplituden dieser einzelnen Schwingungen lassen sich der Abbildung V-13 entnehmen. Mathematisch handelt es sich um *Besselfunktionen 1. Art n-ter Ordnung*. Es bedeuten:

$J_0(\eta)$  Amplitude der Trägerschwingung mit der Frequenz  $f_T$

$J_1(\eta)$  Amplitude der Schwingungen mit den Frequenzen  $f_T + f_M$  und  $f_T - f_M$

$J_2(\eta)$  Amplitude der Schwingungen mit den Frequenzen  $f_T + 2f_M$  und  $f_T - 2f_M$

$J_3(\eta)$  Amplitude der Schwingungen mit den Frequenzen  $f_T + 3f_M$  und  $f_T - 3f_M$

usw.

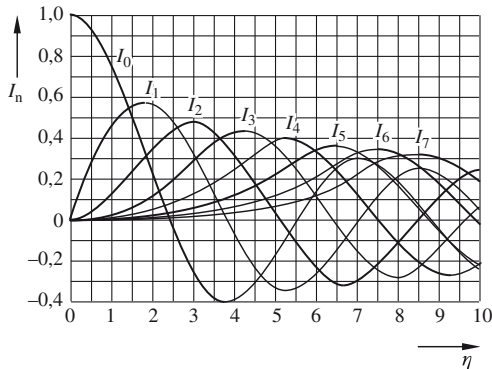


**Bild V-13** Besselfunktionen  $J_n(\eta)$  für  $n = 1 \dots 7$

Die Amplituden hängen ab vom Modulationsindex  $\eta$ . Für  $\eta = 0$ , d.h. ohne Modulation, existiert nur die Trägerschwingung, was auch anschaulich einsichtig ist. Für  $\eta \approx 2,4$  beispielsweise verschwindet die Trägerschwingung ( $J_0 = 0$ , gilt auch für  $\eta \approx 5,5$  usw.), für  $\eta \approx 3,8$  gibt es keine Schwingungen mit den Frequenzen  $f_T + f_M$  und  $f_T - f_M$  ( $J_1 = 0$ , gilt auch für  $\eta \approx 7$  usw.). Negative Werte von  $J_n$  bedeuten eine Phasenverschiebung von  $180^\circ$  gegenüber positiven Werten.

Da die Amplituden der Besselfunktionen erst für  $\eta \rightarrow \infty$  gegen Null gehen, ist theoretisch eine unendlich große Bandbreite erforderlich. In der Praxis kann und muss man die Bandbreite begrenzen. Die dadurch entstehenden nichtlinearen Verzerrungen lassen sich berechnen und dienen als Grundlage für die folgenden Dimensionierungen. Man unterteilt, abhängig von  $\eta$ , in zwei Modulationsarten:

1. **Schmalband-Frequenzmodulation:** Es gilt:  $\eta < 1$ . Dann ergeben nur  $J_0$  und  $J_1$ , also Trägerfrequenz und die Frequenzen  $f_T + f_M$  und  $f_T - f_M$ , nennenswerte Amplituden. Damit ist das Spektrum aber gleich dem der Amplitudenmodulation, wenn man die übrigen Frequenzanteile vernachlässigt.

● **Bandbreite bei Schmalband-Frequenzmodulation:**

$$B_{\text{FM}} \approx 2B_M \approx 2f_{M \text{ max}}$$

2. **Breitband-Frequenzmodulation:** Es gilt:  $\eta > 1$ . Dann begrenzt man die Bandbreite bei einem Klirrfaktor  $k \approx k_3 \leq 1\%$  bei der Rundfunkübertragung auf:

● **Bandbreite bei Breitband-Frequenzmodulation:**

$$B_{\text{FM}} \approx 2(\Delta F + B_M) \approx 2(\Delta F + f_{M \text{ max}})$$

(siehe Gleichung (V.23)). In dieser sog. *Carson-Formel* wurde berücksichtigt, dass erst die dritte Harmonische der Signalschwingung zum Klirrfaktor beiträgt. Beim UKW-Rundfunk ergibt sich  $B_{\text{UKW}} \approx 2(\Delta F + f_{M \text{ max}}) \approx 2(75 \text{ kHz} + 15 \text{ kHz}) = 180 \text{ kHz}$ . Bei der Übertragung von Trägerfrequenz-Vielkanal-Fernsprechsignalen durch Frequenzmodulation in der Richtfunktechnik werden teilweise Klirrfaktoren von 0,01 % gefordert. Dann ist die Übertragungsbandbreite, verglichen mit der Bandbreite bei 1 % Klirrfaktor, um den Faktor 1,5 höher zu wählen.

## 2.4.5 Störungen bei winkelmodulierten Signalen

Die hier behandelten Störungen werden verursacht durch benachbarte Träger und Rauschen. Ihr Einfluss auf frequenzmodulierte Signale wird im Ergebnis angegeben, weitere Einzelheiten sind beispielsweise [V.1] zu entnehmen.

### 1. Störungen durch sinusförmige Nachbarträger

Nachbarträger sind sinusförmige Stör-Träger mit einer Frequenz, die innerhalb der Bandbreite des Nutzträgers von  $f_T \pm B_T/2$  liegt. Für das niederfrequente Störverhältnis  $a_{\text{FM, NF}}$  nach dem Demodulator bei Frequenzmodulation ergibt sich:

● **Niederfrequentes Störverhältnis**

$$a_{\text{FM, NF}} = \frac{\hat{u}_N}{\hat{u}_{\text{NF}}} \approx \frac{\hat{u}_N}{\hat{u}_S} \cdot \frac{|f_T - f_N|}{\Delta f_T} \quad (\text{V.24a})$$

$\hat{u}_N$  Amplitude des Störsignalträgers in V,  $\hat{u}_{\text{NF}}$  Amplitude des Niederfrequenzsignals in V,  $\hat{u}_S$  Amplitude des Nutzsignalträgers in V,  $|f_T - f_N|$  Frequenzabstand zwischen Nutz- und Störsignalträger in Hz,  $\Delta f_T$  Frequenzhub in Hz

Das niederfrequente Störverhältnis nimmt zu durch die folgenden drei Ursachen:

- Steigende Amplitude des Störsignalträgers
- Zunehmender Abstand  $|f_T - f_N|$  zwischen Nutz- und Störträger. Dieser Wert ist maximal an der oberen Frequenzgrenze des modulierenden Signals:

$$a_{\text{FM, NF}} \Big|_{\text{max}} \approx \frac{\hat{u}_N}{\hat{u}_S} \cdot \frac{f_{M \text{ max}}}{\Delta F} = \frac{\hat{u}_N}{\hat{u}_S} \cdot \frac{1}{\eta_{\text{min}}} \quad (\text{V.24b})$$

Index S: (Nutz-)Signal; Index N: Noise (Störsignal)

Durch Frequenzmodulation erhält man gegenüber Amplitudenmodulation eine Verbesserung des Störabstandes S:

$$S_{\text{AM}} = \frac{\hat{u}_{\text{S(HF)}}}{\hat{u}_{\text{N(HF)}}}; \quad S_{\text{FM}} = \frac{\hat{u}_{\text{S(HF)}}}{\hat{u}_{\text{N(HF)}}} \cdot \eta$$

nach Gleichung (V.24b) folgt daraus:

$$\frac{S_{\text{FM}}}{S_{\text{AM}}} = \eta \quad \text{bzw.} \quad \left. \frac{S_{\text{FM}}}{S_{\text{AM}}} \right|_{\min} = \eta_{\min} = \eta \Big|_{f_{\text{r max}}} \quad (\text{V.25})$$

Das Verhältnis ist minimal bei maximaler Frequenz des modulierenden Signals  $\hat{s}_M$ .

- c) Sinkender Frequenzhub, also bei kleineren Amplituden des modulierenden Signals  $\hat{s}_M$ . Dieses Ergebnis ist auch anschaulich zu erwarten.

## 2. Störungen durch Rauschen

Die im folgenden dargestellten Ergebnisse sind [V.2] entnommen und ermöglichen den Vergleich des Leistungsverhältnisses von Nutz- ( $P_S$ ) zu Störsignal ( $P_N$ ) auf der Hochfrequenzseite (Index HF) und auf der Niederfrequenzseite (Index NF):

- a) Schmalband-FM ( $\eta < 1$ ):

$$\left. \frac{P_S}{P_N} \right|_{\text{NF}} \approx \left. \frac{P_S}{P_N} \right|_{\text{HF}} \cdot 3\eta_{\min}^2$$

- b) Breitband-FM ( $\eta > 1$ ):

$$\left. \frac{P_S}{P_N} \right|_{\text{NF}} \approx \left. \frac{P_S}{P_N} \right|_{\text{HF}} \cdot 3\eta_{\min}^3 \quad (\text{V.26})$$

- c) Zum Vergleich: Amplitudenmodulation mit  $m = 1$ :

$$\left. \frac{P_S}{P_N} \right|_{\text{NF}} \approx \left. \frac{P_S}{P_N} \right|_{\text{HF}}$$

(siehe Gleichung (V.13)).

Damit ermöglicht die Breitband-Frequenzmodulation ( $\eta_{\min} > 1$ ) eine störungsfreiere Übertragung als die Amplitudenmodulation (Faktor  $3\eta_{\min}^3$ ). Breitband-FM ist auch weniger störanfällig als Schmalband-FM ( $\eta_{\min} < 1$ ).

■ **Beispiel V.2:** Die Leistung eines Nutzsignalträgers ( $P_S$ ) und die eines Störsignalträgers ( $P_N$ ) seien gleich groß. Das Nutzsignal wird zum Vergleich amplituden- und frequenzmoduliert übertragen.

- a) Bei Amplitudenmodulation ergibt sich:

$$\left. \frac{P_S}{P_N} \right|_{\text{NF}} \approx \left. \frac{P_S}{P_N} \right|_{\text{HF}} = 1 \quad (m = 1)$$

- b) Schmalband-Frequenzmodulation mit  $0,5 \leq \eta \leq 0,9$ .

Für  $\eta = \eta_{\min} = 0,5$  folgt:

$$\left. \frac{P_S}{P_N} \right|_{\text{NF}} \approx \left. \frac{P_S}{P_N} \right|_{\text{HF}} \cdot 3 \cdot \eta_{\min}^2 = 1 \cdot 3 \cdot 0,5^2 = 0,75$$

- c) Breitband-Frequenzmodulation mit  $1,2 \leq \eta \leq 5$ .

Für  $\eta = \eta_{\min} = 1,2$  folgt:

$$\left. \frac{P_S}{P_N} \right|_{\text{NF}} \approx \left. \frac{P_S}{P_N} \right|_{\text{HF}} \cdot 3 \cdot \eta_{\min}^3 = 1 \cdot 3 \cdot 1,2^3 = 5,2$$

Das Verhältnis von Nutz- zu Störsignal ist bei der Breitband-Frequenzmodulation am größten. Schmalband-Frequenzmodulation ergibt gegenüber Amplitudenmodulation u.U. sogar ein ungünstigeres Verhältnis.

## 2.4.6 Preemphase, Deemphase

Aus Gleichung (V.26) geht hervor, dass der Störabstand um so größer ist, je größer  $\eta$  und damit je kleiner die Basisbandfrequenz  $f_M$  ist. Deshalb erhöht man senderseitig die Amplituden der höheren Frequenzen, bevor moduliert wird. Dieser als *Preemphase* bezeichnete Vorgang setzt beispielsweise beim UKW-Rundfunk ab etwa 3,2 kHz ein und wird schaltungs-technisch über einen Hochpass realisiert. Er wird im Empfänger durch einen RC-Tiefpass mit gleicher Grenzfrequenz rückgängig gemacht (*Deemphase*), um einen linearen Amplitudenfrequenzgang zu erhalten. Bild V-14 zeigt Schaltungen, mit denen die Preemphase (a) bzw. Deemphase (b) erreicht wird.

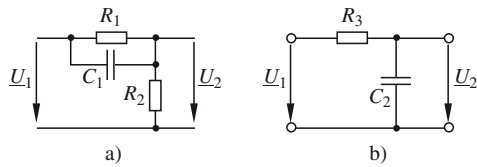


**Bild V-14** Schaltungen zur Preemphase (a) und Deemphase (b)

## 2.4.7 Erzeugung von Frequenz- und Phasenmodulation

Bild V-15a zeigt eine Oszillatorschaltung, in der eines der frequenzbestimmenden Elemente ein Kondensatormikrofon  $M$  ist, dessen Kapazität  $C_2 \pm \Delta C$  sich linear mit dem Schalldruck ändert. Damit ändert sich auch die Frequenz  $f_T = 1/\left[2\pi\sqrt{L_1(C_1 + C_2 \pm \Delta C)}\right]$

für  $C_1 + C_2 \gg \Delta C$  nahezu linear mit der Amplitude des modulierenden Signals (Sprache, Musik). Dabei wurde von der Beziehung  $1/(1 \pm \Delta x) \approx 1 \mp \Delta x$  für  $|\Delta x| \ll 1$  Gebrauch gemacht. Nach Bild V-15b liegt parallel zum Schwingkreis aus  $L_1$  und  $C_1$  eine Kapazitätsvariationsdiode  $D$ , deren Kapazität sich in erster Näherung linear zur modulierenden Spannung  $u_M$  ändert. Der Spannungsteiler aus  $R_1, R_2$  legt den Arbeitspunkt der Diode  $D$  in Sperrichtung und damit eine Kapazität  $C_D$  fest. Mit dem Kondensator  $C_2$  wird diese Gleichspannung vom Schwingkreis abgetrennt, und außerdem kann man damit auch den Frequenzhub einstellen. In der Praxis wird man, sofern  $f_T$  konstant ist (Rundfunksender, Funkfernsteuersender), den frequenzbestimmenden Schwingkreis durch einen Schwingquarz ersetzen, der eine wesentlich höhere Frequenzkonstanz aufweist als der  $LC$ -Schwingkreis.

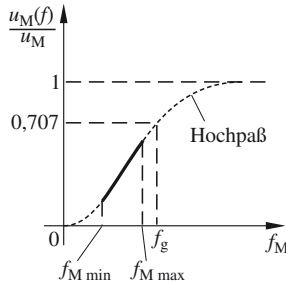
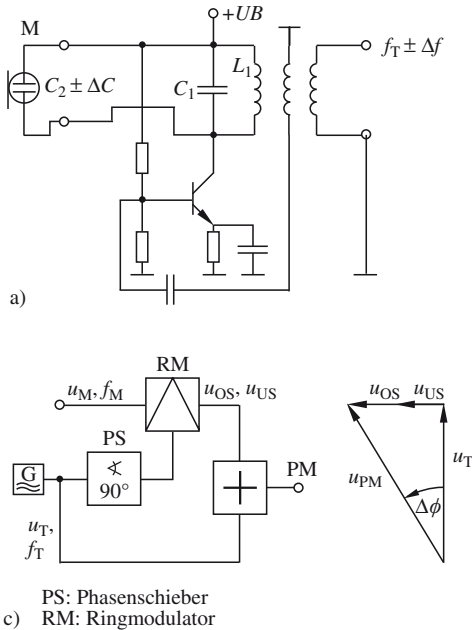
Zur Erzeugung von Phasenmodulation zeigt Bild V-15c ein Verfahren, das seltener angewendet wird, dafür aber das Prinzip deutlich zeigt. Der um  $90^\circ$  verschobene Träger ( $f_T$ ) wird im Ringmodulator mit dem modulierenden Signal ( $f_M$ ) amplitudenmoduliert. Der Träger ist unterdrückt. Dieses Signal wird zum nicht verschobenen nicht modulierten Träger hinzuaddiert. Trägerspannung  $u_T$  und die Spannungen der

Seitenbänder,  $u_{OS}$ ,  $u_{US}$ , stehen senkrecht aufeinander. Steigt die Amplitude von  $u_M$ , steigen proportional die Spannungen  $u_{OS}$ ,  $u_{US}$ . Damit dreht sich der Zeiger von  $u_{PM}$  um den Winkel  $\Delta\Phi$  aus der Lage von  $u_T$ , was der gewünschten Phasenmodulation entspricht:

● **Phasenhub:**  $\Delta\Phi = \arctan \frac{\hat{u}_{OS} + \hat{u}_{US}}{\hat{u}_T}$  (V.27)

Ausnutzbar ist ein Bereich bis  $\Delta\Phi_{\max} \approx 0,5$ . Das ergibt einen Klirrfaktor von 2,5 %. Allerdings ist die Amplitude von  $u_{PM}$  größer geworden als die von  $u_T$ , was einer zusätzlichen unerwünschten Amplitudenmodulation entspricht. Diese muss durch eine Begrenzerschaltung unwirksam gemacht werden. Ein häufig angewendetes Schaltungsprinzip zur Phasenmodulation zeigt Bild V-15d. Die modulierende Spannung  $u_M$  passiert zunächst ein Hochpassfilter aus  $R$  und  $C$ , für dessen Grenzfrequenz gilt:

$f_g = 1/(2\pi RC) \gg f_{M\max}$ . Damit ist die modulierende Spannung  $u_M(f)$  frequenzabhängig. Nimmt man eine niedrige Frequenz  $f_M$  für  $u_M$  an, ergibt sich für  $u_M(f)$  eine niedrige Amplitude, sodass die Oszillatorfrequenz nur geringfügig im Rhythmus von  $u_M$  geändert wird. Hat dagegen  $u_M$  bei gleicher Frequenz eine große Amplitude, ist auch  $u_M(f)$  entsprechend groß, sodass die Frequenz des Oszillators in einem größeren Bereich geändert wird. Hält man die Amplitude von  $u_M$  konstant und vergrößert die Frequenz  $f_M$ , nimmt die Amplitude von  $u_M(f)$  ebenfalls zu.  $\Delta\Phi$  darf sich aber wegen der als konstant angenommenen Amplitude von  $u_M$  nicht ändern. Da andererseits der Phasenhub nach Bild V-11 mit wachsender Frequenz  $f_M$  abnimmt, wird diese Abnahme genau durch die über den Hochpass bewirkte Zunahme der Amplitude von  $u_M(f)$  kompensiert. Man erkennt hier den engen Zusammenhang zwischen Frequenz- und Phasenmodulation.



Oszillator für  $f_T$

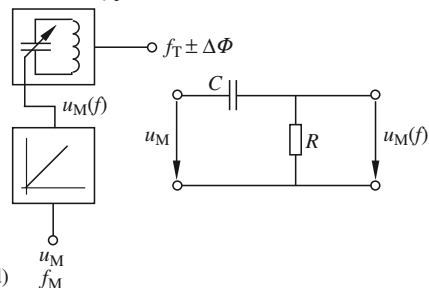


**Bild V-15**

Erzeugung von Winkelmodulation

- FM mit Kondensatormikrofon
- FM mit Kapazitätsdiode
- PM durch Überlagerung von zwei um  $90^\circ$  verschobenen Trägern
- PM durch FM und Vorverzerrung des Basisbandes

### 2.4.8 Demodulation von Frequenz- und Phasenmodulation

Die nachfolgend dargestellten Demodulatorschaltungen dienen zur Demodulation von frequenzmodulierten Signalen. Sollen phasenmodulierte Signale demoduliert werden, ist nach Bild V-16 dem FM-Demodulator eine Integrierstufe nachzuschalten (siehe dazu Gleichung (V.20)).

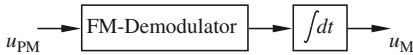


**Bild V-16** Demodulation von PM

Da in der Amplitude des frequenzmodulierten Trägers keine Information enthalten ist, andererseits Störungen häufig als Änderungen der Amplitude auftreten, schaltet man dem Demodulator eine Amplitudenbegrenzerschaltung vor. Die Oberschwingungen des jetzt nicht mehr sinusförmigen Trägers unterdrückt man durch Selektionsstufen in Form von Schwingkreisen. Prinzipiell unterscheidet man vier Arten der Demodulation, Bild V-17.

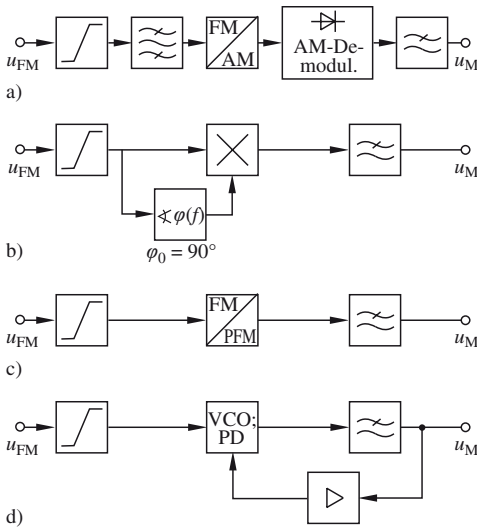


**Bild V-17** Verschiedene Prinzipien der FM-Demodulation

- a) FM-AM-Umsetzung
  - b) FM-PDM-Umsetzung
  - c) FM-PFM-Umsetzung
  - d) Demodulation mit PLL
- Erläuterungen siehe Text

Beim ersten Verfahren (a) verwendet man die frequenzabhängigen Blindwiderstände von Spulen und Kondensatoren oder die frequenzabhängige Impedanz von Schwingkreisen bzw. deren Phasendrehung. Man überführt die Frequenzmodulation in eine Amplitudenmodulation. Zwei Beispiele dazu sind in Bild V-18 dargestellt.

Nach Verfahren zwei (b) gelangt der frequenzmodulierte Träger einmal direkt auf den einen Eingang eines Multiplizierers, zum anderen über ein frequenzabhängiges Phasendrehglied mit  $\varphi(f) = 90^\circ \pm \Delta\varphi(f)$  auf den anderen Eingang. Am Ausgang des Multiplizierers steht u.a. auch das modulierende Signal zur Verfügung (Umsetzung der Frequenzmodulation in Pulsdauermodulation PDM). Der Tiefpass unterdrückt die auch entstehenden höherfrequenten Anteile. Für diese Demodulationsart, auch mit *Koinzidenz-demodulator* bezeichnet, gibt es Integrierte Schaltungen, die die erforderlichen Baugruppen einschließlich Amplitudenbegrenzerstufe enthalten (z.B. TBA 120). Im dritten Verfahren (c) gibt man sich ein Zeitintervall vor und zählt die darin enthaltenen Nulldurchgänge der frequenzmodulierten Schwingung. Das geschieht auf einfache Weise dadurch, dass man den sinusförmigen Träger in Rechteckimpulse umwandelt und diese dann differenziert. Über eine Kondensator-Umladung mit anschließender Mittelwertbildung lässt sich das modulierende Signal zurückgewinnen (Umsetzung Frequenzmodulation in Pulsfrequenzmodulation).

Verfahren vier (d) verwendet einen Phasenregelkreis (PLL, phase-locked loop). Eine sich durch Frequenzmodulation ändernde Trägerfrequenz wird durch den Phasendiskriminator erkannt, der eine entsprechende Spannung zur Nachführung des spannungsgesteuerten Oszillators ausgibt. Diese Spannung ist proportional zur Abweichung der Trägerfrequenz vom Sollwert und damit proportional zur modulierenden Spannung.

Die Bilder V-18a und b zeigen zwei Demodulatorschaltungen, die zwar nicht mehr eingesetzt werden, die aber das Prinzip des ersten Verfahrens nach Bild V-17a auf einfache Weise darstellen. Für a) muss gelten:  $\omega L \ll R$ . Daraus folgt für sinusförmiges  $u_{FM}$ :  $u_L \approx u_{FM} \cdot \omega \cdot L/R$ .  $u_{FM}$  ändert nicht die Amplitude, aber die Frequenz:  $\tilde{u}_L \approx \tilde{u}_{FM} \cdot (\omega_T + \Delta\omega_T) \cdot L/R$ . Die Spannung an  $L$  ist proportional der modulierenden Spannung. Der Nachteil dieser Schaltung liegt darin, dass  $u_L$  für  $\omega_L \ll R$  sehr klein und damit schwierig auswertbar ist. Deshalb ist der im Bild eingetragene Verstärker unbedingt erforderlich. In Bild V-18b hat der Schwingkreis aus  $L_1$ ,  $C_1$  und  $R_1$  die dargestellte Durchlasskurve. Die Trägerfrequenz  $f_T$  liegt auf einer Flanke dieser Durchlasskurve in der Mitte eines möglichst linearen Bereiches. Anschließend wird mit der Diode  $D$  demoduliert. Einzelheiten hierzu können dem Kapitel über die Demodulation von AM entnommen werden. Steigt die Frequenz des Trägers, steigt auch die Spannung am Schwingkreis und damit die Amplitude von  $u_M$ .

Bild V-18c stellt die heute in der Rundfunkübertragungstechnik üblicherweise verwendete Schaltung des *Ratiodetektors* (Prinzip nach Bild V-17a) dar. Die beiden Schwingkreise aus  $L_1$ ,  $C_1$  und  $L_2$ ,  $C_2$  sind auf die Trägerfrequenz  $f_T$  abgestimmt. Die Spannungen  $u_1$  und  $u_2$  stehen für  $f = f_T$  senkrecht aufeinander. Weicht  $f$  von der Resonanzfrequenz ab, ändert sich der Phasenwinkel von  $u_2$  gegenüber  $u_1$ . Es gilt:

$$u_{D1} = u_2/2 + u_1; u_{D2} = -u_2/2 + u_1; u_M = u_{D1} - u_{D2}$$

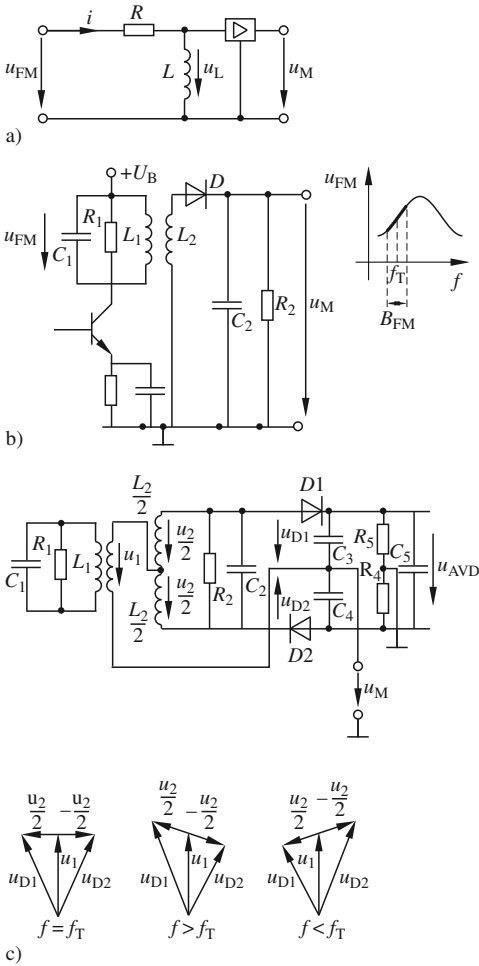


**Bild V-18** Frequenzdemodulation

- a) mit frequenzabhängigem Blindwiderstand
- b) mit Flankendemodulator
- c) mit Ratiodetektor

Nach Spitzengleichrichtung steht die modulierende Spannung wieder zur Verfügung. Der Ratiodetektor hat die besondere Eigenschaft, dass er kurzzeitige Amplitudenänderungen von  $u_1$  unterdrückt: Der Kondensator  $C_5$  muss auf die neue Amplitude umgeladen werden, was aber wegen seiner Größe (einige  $\mu\text{F}$ ) nur langsam (0,1 bis 1 s) erfolgen kann. Damit werden Amplitudenstörungen nahezu unwirksam.

### 3 Sinusträger – mit Digitalsignal moduliert

Die im Kapitel V.2 behandelten Modulationsverfahren und die dort dargestellten Eigenschaften sind unabhängig vom zeitlichen Verlauf des modulierenden Signals und deshalb auch hier gültig. Dass trotzdem speziell für Digitalsignale eigene Bezeichnungen

eingeführt worden sind, liegt an der großen Bedeutung dieser Signalform vor allem für die Datenfernübertragung.

Bild V-19 zeigt die jeweilige Trägerschwingung für die drei Modulationsarten:

- *Amplitudenumtastung* (ASK: amplitude shift keying, entspricht der Amplitudenmodulation),
- *Frequenzumtastung* (FSK: frequency shift keying, entspricht der Frequenzmodulation),
- *Phasenumtastung* (PSK: phase shift keying, entspricht der Phasenmodulation).

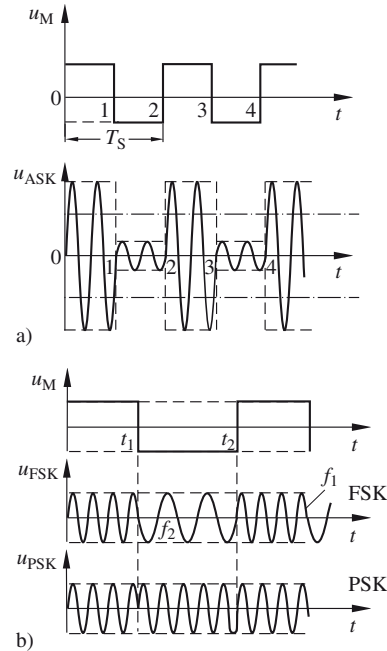


**Bild V-19** Modulation eines Sinusträgers mit Digitalsignal

- a) Amplitudenumtastung (ASK)
- b) Frequenzumtastung (FSK) und Phasenumtastung (PSK)

#### 3.1 Amplitudenumtastung (ASK)

Nach Bild V-19a wird der positiven Amplitude von  $u_M$  eine im Prinzip beliebige Trägeramplitude zugeordnet, der negativen Amplitude von  $u_M$  eine weitere Trägeramplitude. Zur Demodulation kann eine Schaltung nach Bild V-6 verwendet werden. Man muss aber sicherstellen, dass für beide Amplitudenwerte von  $u_M$  eine ausreichende Mindest-Trägeramplitude vorhanden ist. Sofern möglich, nimmt man die Amplitudenumschaltung in den Nulldurchgängen der Trägerschwingung vor, weil dann das Einschwingen der Spannung am Ausgang des Demodulators auf den neuen Wert optimal geschieht, d.h. in kürzester Zeit und mit minimalem Überspringen.

Die erforderliche Bandbreite ist theoretisch zwar unendlich groß, wenn die Signalspannung  $u_M$  periodisch angenommen und in eine Fourierreihe entwickelt wird, aber in der Praxis kann der rechteckförmige Verlauf durch einen sinusförmigen Verlauf angenähert werden, weil sich daraus die Rechteckform wieder eindeutig zurückgewinnen lässt. Das modulierende Signal ist damit die Grundschwingung der Fourierreihe mit der Frequenz  $f = 1/T_S$ . Für die erforderliche Bandbreite bei Zweiseitenbandmodulation folgen für den Minimalwert  $B_{\min-ASK}$  und den in der Praxis verwendeten Wert  $B_{ASK}$ :

• **Bandbreite**  $B_{\min-ASK} = 2 \cdot \frac{1}{T_S}$ ;

*Praxis:*  $B_{ASK} \approx 1,5 \cdot B_{\min-ASK} = 3 \cdot \frac{1}{T_S}$  (V.28)

Als Beispiel für einen ASK-modulierten Sender sei der Normalfrequenz- und Zeitzeichensender DCF 77 der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt in Braunschweig angeführt. Seine Trägerfrequenz beträgt 77,5 kHz, und die Informationen über Zeit, Datum, Sommer-/Winterzeit und einige andere Größen werden durch Absenken der Trägeramplitude zu Beginn jeder Sekunde (Ausnahme: 59. Sekunde) auf 25 % des Nennwertes für 0,1 s (entspricht logisch 0) oder 0,2 s (entspricht logisch 1) übertragen.

### 3.2 Frequenzumtastung (FSK)

Nach Bild V-19b wird ein Oszillator in Abhängigkeit vom modulierenden Signal  $u_M$  zwischen zwei Frequenzen ( $f_1$ ,  $f_2$ ) umgeschaltet. Diese Umschaltung sollte ohne Amplitudensprünge geschehen, damit bei der Demodulation ein optimales Einschwingen auf den neuen Amplitudenwert möglich wird. Deshalb ist die Umschaltung zwischen zwei getrennten Oszillatoren problematisch. In der Praxis geschieht sie durch Ändern von  $L$  bzw.  $C$  des frequenzbestimmenden Oszillatorschwingkreises. Auch hier lassen sich geringe Amplitudensprünge nicht vermeiden, weil es sich bei  $L$  und  $C$  um Energiespeicher handelt. Quarzoszillatoren mit Kapazitätsvariationsdioden als frequenzänderndem Element ergeben relativ geringe und über die Ansteuerelektronik kalkulierbare Amplitudensprünge.

Für die Abschätzung der erforderlichen Bandbreite nimmt man an, dass die zwei Frequenzen  $f_1$  und  $f_2$  durch Frequenzmodulation einer Mittenfrequenz  $f_M = (f_1 + f_2)/2$  entstehen. Dann lassen sich die Formeln des Kapitels V.2.4 verwenden. Auch hier gilt, dass der rechteckförmige Verlauf von  $u_M$  durch einen sinusförmigen Verlauf mit gleicher Periodendauer ersetzt werden kann (siehe V.3.1).

Zur Demodulation können zwei FM-Demodulatoren nach Kapitel V.2.4.8, abgestimmt auf  $f_1$  und  $f_2$ , verwendet werden. Allerdings kann es Probleme mit dem Einschwingverhalten des jeweiligen Demodulators beim Eintreffen des neuen Frequenzwertes ge-

ben. Deshalb hat sich u.a. eine Schaltung nach Bild V-20 bewährt. Die modulierte sinusförmige Trägerspannung  $u_{FSK}$  wird einmal im Original und einmal um  $90^\circ$  verschoben in ein Rechtecksignal umgewandelt ( $u_1$ ,  $u_2$ ) und differenziert. Von den entstehenden Impulsen wird der Betrag gebildet, sodass sich  $u_3$  ergibt. Durch die Addition des um  $90^\circ$  verschobenen Signalanteiles erhält man für  $u_3$  die doppelte Anzahl von Impulsen, was zu einem schnelleren Einschwingen des demodulierten Signals auf den neuen Wert führt. Über eine monostabile Kippstufe werden die Nadelimpulse in solche mit konstanter Zeitdauer umgesetzt, sodass sich über einen Tiefpass mit nachfolgendem Schmitt-Trigger die modulierende Spannung  $u_M$  zurückgewinnen lässt. Die Verzögerungszeit  $T_v$  ist ohne Wirkung auf die enthaltene Information.

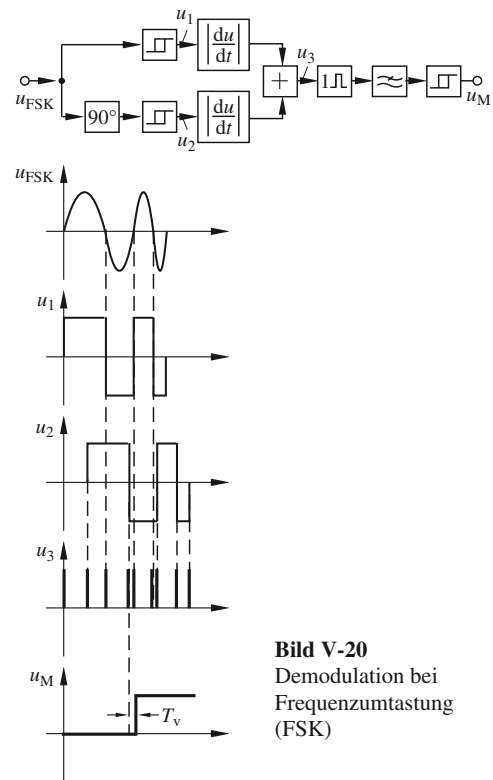


**Bild V-20**  
Demodulation bei  
Frequenzumtastung  
(FSK)

### 3.3 Phasenumtastung (PSK)

Die Modulation durch Phasenumtastung der Träger-schwingung ist sehr unempfindlich gegenüber Störungen. Kennzeichen ist die Zahl der unterschiedlichen Phasenzustände, zwischen denen umgeschaltet werden kann. Bild V-19b zeigt die Verwendung von zwei Phasenzuständen (2-PSK). Daneben werden häufig vier Phasenzustände eingesetzt (4-PSK, QPSK:



quadrature phase shift keying). Als Quadraturmodulation, allerdings für ein analoges modulierendes Signal, findet dieses Verfahren in der Farbfernsehtechnik Anwendung (Kapitel V.2.2.3).

Abhängig von der Art der Informationskodierung gibt es zur Demodulation von PSK zwei Verfahren: 1. Jedem der übertragenen Zustände entspricht eine festgelegte Phasenlage. Dann muss entweder der Träger mit der definierten Nullphase mit übertragen werden, oder aber es müssen periodisch wiederkehrende Muster zur Synchronisation des im Empfänger erzeugten Trägers gesendet werden (siehe V.2.2.3). 2. Die Information steckt in der *Differenz* zweier aufeinanderfolgender Phasenlagen. Hier bietet sich zur Demodulation an, den Träger aus dem übertragenen Signal zurückzugewinnen. Auch wenn dies stets nur fehlerhaft möglich ist, spielt das wegen der Phasendifferenzbildung keine Rolle (*Phasendifferenzkodierung*, s.u.).

### 3.3.1 Zweiphasenumtastung (2-PSK)

Bild V-21a stellt die modulierende Spannung  $u_M$  und die daraus gebildete Trägerspannung  $u_T$  in der Zeitebene dar.

• *Modulation, Einfluss von Störsignalen:* Die Modulation des Trägers geschieht in einem Ringmodulator nach Bild V-21b bzw. nach Bild V-7, an dessen Ausgang nur die zwei Seitenbänder vorhanden sind. Die Zuordnung der zwei Phasenzustände ist so gewählt, dass sie sich maximal voneinander unterscheiden, also zu  $0^\circ$  und  $180^\circ$ . Das hat den Vorteil, dass bei einer auftretenden Störspannung  $u_N$  nach Bild V-21c die „1“ ( $\cong 0^\circ$ ) theoretisch solange sicher erkannt wird, wie der Summenzeiger  $u_r$ , gebildet aus  $u_T$  und  $u_N$ , rechts von der Ordinate liegt. In der Praxis darf eine Minimalamplitude  $u_{T\min}$  nicht unterschritten werden, sodass  $u_r$  rechts von der im Bild dargestellten gestrichelten Senkrechten liegen muss. Das Gleiche gilt für die kodierte „0“, sodass jede der beiden Codierungen am unempfindlichsten gegenüber Störungen ist. Die Amplitude von  $u_N$  kann theoretisch zwar sehr groß werden, wenn sie in einem Winkelbereich  $-90^\circ \dots +90^\circ$  zu  $u_T$  liegt, praktisch aber sollte sie den Wert  $u_T - u_{T\min}$  in keiner der möglichen Phasenlagen überschreiten. In Bild V-21a findet der Phasenwechsel in den Nulldurchgängen der Trägerschwingung statt. Das ist vorteilhaft, weil es keine Amplitudensprünge gibt und sich die Zeit für die zur Dekodierung notwendige Trägersynchronisation bzw. Trägersrückgewinnung verringert. Damit können dann u.U. höhere Datenraten übertragen werden.

Zur Abschätzung der erforderlichen Bandbreite wird wiederum ein periodisches Rechtecksignal für  $u_M$  angenommen, das durch die Grundschnwingung des nach Fourier dargestellten Signals angenähert wird. Damit kann das Ergebnis von Gleichung (V.28) übernommen werden.

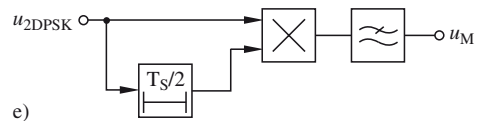
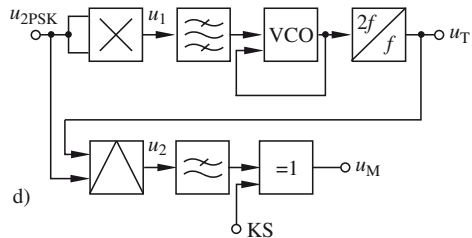
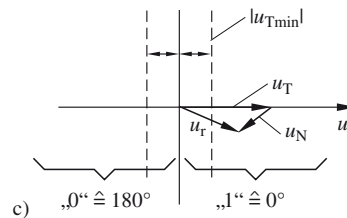
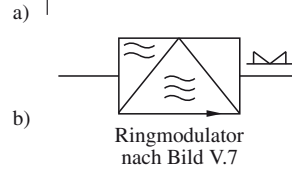
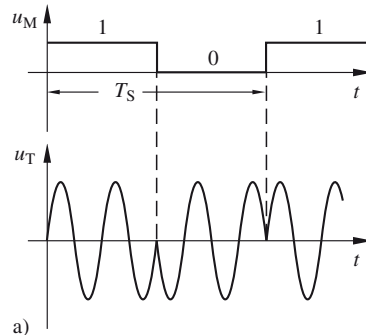


**Bild V-21** Zweiphasenumtastung (2-PSK),  
Abkürzungen siehe Text

- a) Signalverläufe
- b) Erzeugung
- c) Einfluss von Störsignalen
- d) Demodulation
- e) Demodulation von Phasendifferenzcodierung (2-DPSK)

• *minimal erforderliche Bandbreite:*

$$B_{\min-2PSK} = 2 \cdot \frac{1}{T_S};$$

$$\text{Praxis: } B_{2PSK} \approx 1,5 \cdot B_{\min-2PSK} = 3 \cdot \frac{1}{T_S} \quad (\text{V.29})$$



Für den Rauschabstand folgt mit Gleichung (I.26):

● *Rauschabstand*  $a_r = 10 \cdot \lg \frac{P_s}{P_N}$  in dB (V.30)

- *Demodulation, Trägerrückgewinnung:* Die Demodulation eines 2-PSK-Signals geschieht z.B. mit einer Schaltung nach Bild V-21d. Die Spannung  $u_{2PSK} = \pm \hat{u}_T \cdot \cos(\omega_T \cdot t + k \cdot \pi)$ ,  $k = 0$  oder  $1$ , wird im Multiplizierer quadriert und ergibt

$$u_1 = \frac{\hat{u}_T^2}{2} \cdot (1 + \cos(2 \cdot \omega_T \cdot t + 2 \cdot k \cdot \pi)) \quad (V.31)$$

Nach einem Bandfilter folgt ein spannungsgesteuerter Oszillator (VCO) mit eingebautem Phasenvergleich und Tiefpassfilter. Die nach Gleichung (V.31) vorhandene doppelte Trägerfrequenz wird in einem Frequenzteiler auf die Trägerfrequenz  $f_T$  heruntergeteilt ( $u_T$ ). Durch diese Teilung ergibt sich eine Phasenunsicherheit von  $k \cdot (2 \cdot \pi)/2 = k \cdot \pi$ . In einem Demodulator wird aus den Seitenbändern ( $u_{2PSK}$ ) und dem rückgewonnenen Träger ( $u_T$ ) das modulierende Signal  $u_M$  erzeugt. Da die absolute Phasenlage des Trägers nicht mit übertragen wird, erkennt man nicht, wie den zwei empfangenen Werten senderseitig die „1“ bzw. „0“ zugeordnet wurde (Phasenunsicherheit  $k \cdot \pi$ ). Man erhält für  $u_M$  also entweder die richtige oder die invertierte Bitfolge. Durch die Übertragung geeigneter Codewörter lässt sich die korrekte Bitfolge durch Anlegen eines Korrektursignals KS an ein Exklusiv-Oder-Glied einstellen.

- *Phasendifferenzcodierung (2-DPSK):* Man kann auf die Übertragung des Absolutwertes der Trägerphase verzichten, wenn man die Phasendifferenzcodierung anwendet: Für  $u_M = „1“$  bleibt die momentan vorhandene Phase bestehen, für  $u_M = „0“$  ändert sich die Phase. Daraus kann  $u_M$  eindeutig gewonnen werden, siehe Beispiel V.3.

Die Decodierung geschieht nach Bild V-21e: In einer Verzögerungsschaltung wird das Signal  $u_{2DPSK}$  um  $T_s/2$  verzögert und mit dem unverzögerten Signal multipliziert. Bei gleicher Phase ist das Produkt positiv und wird der „1“ zugeordnet; bei unterschiedlicher Phase ist es negativ und bedeutet „0“.

■ *Beispiel V.3:* Übertragen werden soll die Bitfolge

(1) 1 1 0 0 1 0 1 1 0

in Phasendifferenzcodierung (Tabelle V-1). Der erste Wert kann nicht wiederhergestellt werden, weil er keinen Vorgänger zur Differenzbildung hat (Startbit).

3.3.2 Vierphasenumtastung (4-PSK)

- *Modulation:* Man setzt zwei Träger gleicher Frequenz, aber mit  $90^\circ$  Phasenverschiebung ein, siehe  $u_T, u_{T90}$  in Bild V-22a. Außerdem kann die Phase beider Träger zwischen  $0^\circ$  und  $180^\circ$  umgeschaltet werden. Bei der Modulation wird der Träger unterdrückt. Der Winkelbereich  $-45^\circ$  bis  $+45^\circ$ , bezogen auf  $u_T$ , entspricht digital „00“ und wird dadurch erreicht, dass die Amplitude von  $u_T$  maximal, die von  $u_{T90}$  null ist. Der Bereich  $+45^\circ \dots +135^\circ$  entspricht digital „01“ und erfordert eine maximale Amplitude von  $u_{T90}$  und die Amplitude null für  $u_T$ . Für die restlichen zwei Kodierungen muss der mit maximaler Amplitude gesendete Träger „negativ“ sein, d.h. eine Phasenverschiebung von  $180^\circ$  aufweisen. Für die zu übertragende Bitfolge werden jeweils zwei aufeinanderfolgende Bits zusammengefasst, und daraus wird nach Bild V-22a die Phasenlage zu  $u_T$  bestimmt (Tabelle V-2).

Die Erzeugung von 4-PSK geschieht nach Bild V-22b. Nachdem je 2 seriell eintreffende Bits in einem 2-Bit-Seriell-Parallel-Umsetzer (Schieberegister SRG2) parallel als X1 und X2 anstehen, werden die Trägeramplituden entsprechend Tabelle V-2 eingestellt.

Tabelle V-1 Zu Beispiel V.3

| Zu übertragende Bitfolge                  | (1)<br>Start-bit | 1    | 1    | 0    | 0    | 1    | 0    | 1    | 1    | 0    |
|-------------------------------------------|------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| gewählter Phasenwinkel senderseitig       | 0°               | 0°   | 0°   | 180° | 0°   | 0°   | 180° | 180° | 180° | 0°   |
| Phasenwinkel am Empfänger, 1. Möglichkeit | 0°               | 0°   | 0°   | 180° | 0°   | 0°   | 180° | 180° | 180° | 0°   |
| Phasenwinkel am Empfänger, 2. Möglichkeit | 180°             | 180° | 180° | 0°   | 180° | 180° | 0°   | 0°   | 0°   | 180° |
| Decodierung am Empfänger                  |                  | 1    | 1    | 0    | 0    | 1    | 0    | 1    | 1    | 0    |

**Tabelle V-2** Beispiel zur Ansteuerung bei Vierphasenumtastung (4-PSK)

|                                            |         |   |         |   |         |   |         |   |         |   |
|--------------------------------------------|---------|---|---------|---|---------|---|---------|---|---------|---|
| zu übertragende Bitfolge                   | 0       | 0 | 1       | 1 | 0       | 1 | 1       | 1 | 1       | 0 |
| Phase gegenüber $u_T$                      | 0°      |   | 270°    |   | 90°     |   | 270°    |   | 180°    |   |
| X1 (siehe Bild V-22b), steuert $u_T$ :     | 0       |   | 1       |   | 0       |   | 1       |   | 1       |   |
| a) Amplitude von $u_T$                     | maximal |   | Null    |   | Null    |   | Null    |   | maximal |   |
| b) Phase von $u_T$                         | 0°      |   |         |   |         |   |         |   | 180°    |   |
| X2 (siehe Bild V-22b), steuert $u_{T90}$ : | 0       |   | 1       |   | 1       |   | 1       |   | 0       |   |
| a) Amplitude von $u_{T90}$                 | Null    |   | maximal |   | maximal |   | maximal |   | Null    |   |
| b) Phase von $u_{T90}$                     |         |   | 180°    |   | 0°      |   | 180°    |   |         |   |

- **Demodulation, Trägersrückgewinnung:** Die Trägersrückgewinnung geschieht nach Bild V-22c durch zweimalige Multiplikation der Spannung  $u_{4\text{PSK}}$  mit sich selbst:

$$u_1 = \left[ \left( \hat{u}_T \cdot \cos\left(\omega \cdot t + k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right)^2 \right]^2,$$

mit  $k = 0, 1, 2$  oder  $3$

$$= \frac{\hat{u}_T^4}{8} [3 + 4 \cdot \cos(2 \cdot \omega_T \cdot t + k \cdot \pi) + \cos(4 \cdot \omega_T \cdot t + 2 \cdot k \cdot \pi)] \quad (\text{V.32})$$

Die Komponente mit der doppelten Trägerfrequenz wird über einen Bandpass ausgefiltert, die Komponente mit der vierfachen Trägerfrequenz durch einen Frequenzteiler 4:1 auf die Trägerfrequenz geteilt ( $u_T$ ). Aus dem rückgewonnenen Träger ( $u_T$ ) wird ein zweiter mit 90° Phasenverschiebung erzeugt ( $u_{T90}$ ). In zwei Multiplizierschaltungen wird das übertragene Signal  $u_{4\text{PSK}}$  mit  $u_T$  und  $u_{T90}$  multipliziert. Es ergeben sich insgesamt 4 Möglichkeiten für die Vorzeichenkombinationen, sodass das modulierende Signal zurückgewonnen werden kann. Wegen der Frequenzteilung bleibt eine Phasenunsicherheit von  $(2 \cdot k \cdot \pi)/4 = k \cdot (\pi/2)$ .

Da zwei Bits mit nur einem Phasenwinkel codiert werden, ist die erforderliche Bandbreite nur noch halb so groß wie bei 2-PSK:

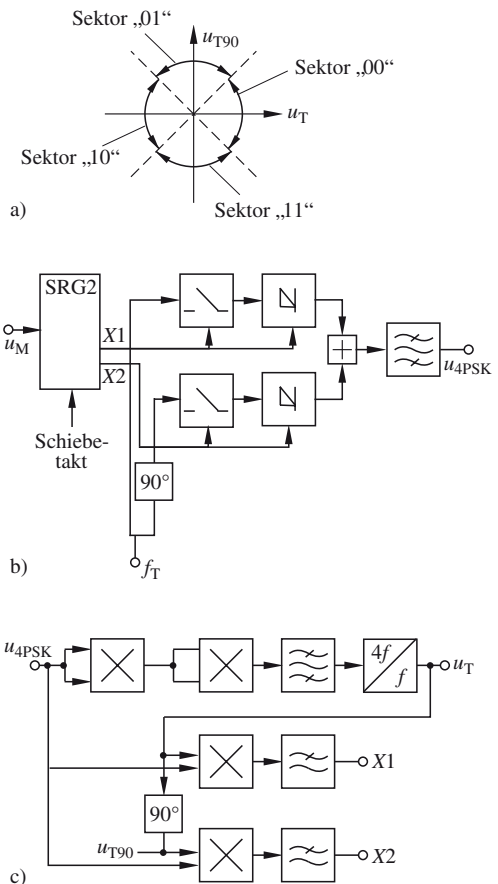
- **minimal erforderliche Bandbreite**

$$B_{\text{min-4PSK}} = 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot T_S} = \frac{1}{T_S};$$

$$\text{Praxis: } B_{\text{PSK}} \approx 1,5 \cdot B_{\text{min-PSK}} = 1,5 \cdot \frac{1}{T_S} \quad (\text{V.33})$$

Für den Rauschabstand lässt sich allgemein sagen, dass er in der Praxis bei 4-PSK gegenüber 2-PSK um etwa 3 dB abnimmt, weil bei 4-PSK pro Amplitudenwert zwei Bit übertragen werden gegenüber einem Bit bei 2-PSK.

Auch hier kann die Phasenunsicherheit durch Differenzphasenmodulation beseitigt werden.

**Bild V-22** Vierphasenumtastung (4-PSK)

- a) Prinzip
- b) Erzeugung
- c) Trägersrückgewinnung und Demodulation

### 3.3.3 n-Phasen-Umtastung

Das Prinzip der Phasenumtastung lässt sich auf  $n$  Phasen erweitern, wobei  $n$  in der Praxis Werte von 8, 16, 32 oder 64 annimmt. Bei der Auswahl eines

geeigneten Verfahrens sind die zwei folgenden Ergebnisse von Bedeutung:

1. Die erforderliche Bandbreite nimmt mit steigendem  $n$  gemäß  $1/n$  ab.
2. Der Rauschabstand verringert sich bei gleicher Sender- und Rauschleistung mit zunehmendem  $n$  um etwa  $n \cdot (3 \dots 5)$  dB.
3. Der Einfluss von Störspannungen nimmt mit wachsendem  $n$  zu, weil immer kleinere Segmente pro Codierung zur Verfügung stehen. In Bild V-21c würde die Spitze des Zeigers  $u_r$  bei einer 16-Phasen-Umtastung bereits in das benachbarte Segment hineinragen und damit einen Fehler verursachen.

### 3.3.4 QAPSK kombinierte Amplituden-Phasenumtastung

Diese Modulationsart wird in der Ausführung 16-QAPSK beim terrestrischen Digitalfernsehen eingesetzt. Siehe dazu *VIII Ton- und Bildübertragung, 2 Digitale Farbfernsehtechnik, Trägermodulation: 16-QAPSK*.

## 4 Pulsträger uncodiert

In Analogie zum Sinusträger gibt es hier die in Bild V-23 dargestellten Verfahren:

- *Pulsamplitudenmodulation* (PAM: pulse ampli-mplitude modulation),
- *Pulsfrequenzmodulation* (PFM: pulse frequency modulation),

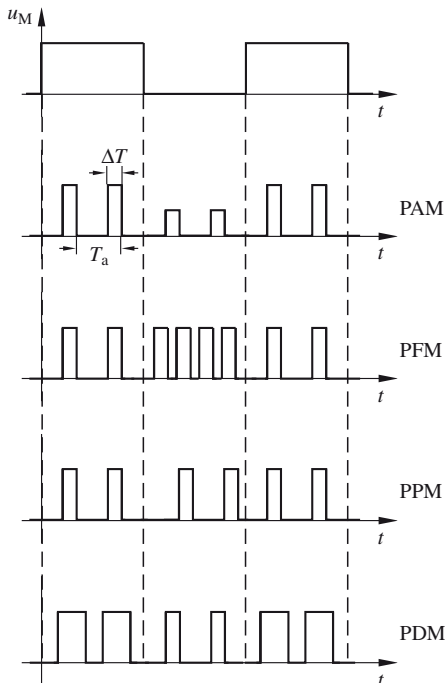


**Bild V-23** Verfahren zur Pulsträgermodulation (Pulse unipolar)

- *Pulsphasenmodulation* (PPM: pulse phase modulation),
- *Pulsdauermodulation* (PDM: pulse duration modulation).

Lediglich das zuletzt genannte Verfahren hat kein direktes Analogon zur Sinusträgermodulation.

### 4.1 Pulsamplitudenmodulation (PAM)

Sie wird relativ selten eingesetzt, hat aber eine gewisse Bedeutung beim *Zeitmultiplexverfahren* (siehe Kapitel IX.1). Die Zeit  $T_a$  in Bild V-23 ist durch das Abtasttheorem von Shannon vorgegeben, die Zeit  $\Delta T$  kann so klein wie möglich gemacht werden. Dann kann man in den Zeitraum  $T_a - \Delta T$  weitere Impulse von anderen Signalen einfügen. Bild V-24 zeigt eine von mehreren Möglichkeiten zur Modulation und Demodulation bei PAM. Die Spannung  $U_0$  sorgt dafür, dass auch bei der größten negativen Amplitude des modulierenden Signals die Diode noch in Durchlassrichtung betrieben wird. Der Schalter S1 schließt für die Zeitdauer  $\Delta T$ . Der Demodulator besteht aus einer Abtast-Halte-Schaltung, deren Schalter S2 genau dann schließt, wenn das vom geschlossenen Schalter S1 ausgesandte Signal eintrifft. Deshalb ist eine geeignete Synchronisation zwischen beiden Schaltern erforderlich. Diese Art der Modulation heißt unipolar, weil die Amplituden neben dem Wert Null nur eine Polarität, hier die positive, aufweisen.

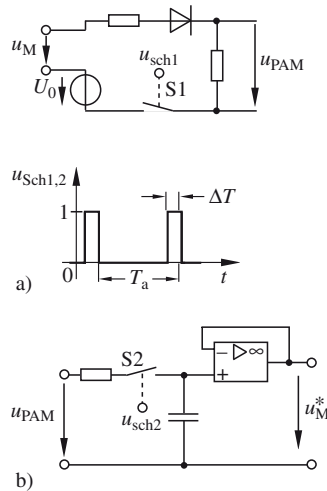


**Bild V-24** Unipolare Pulsamplitudenmodulation

- a) Modulation
- b) Demodulation

### 4.2 Pulsfrequenz- und Pulsphasenmodulation (PFM, PPM)

Wie beim Sinusträger stehen auch hier Pulsfrequenz- und Pulsphasenmodulation in einem engen Zusammenhang. An Bild V-25 kann man erkennen, dass

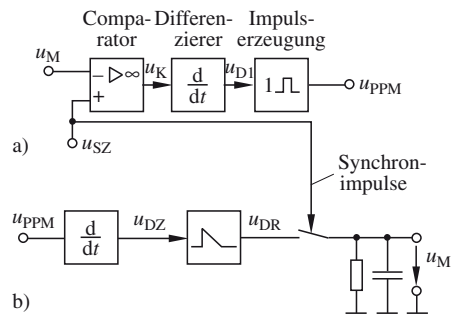
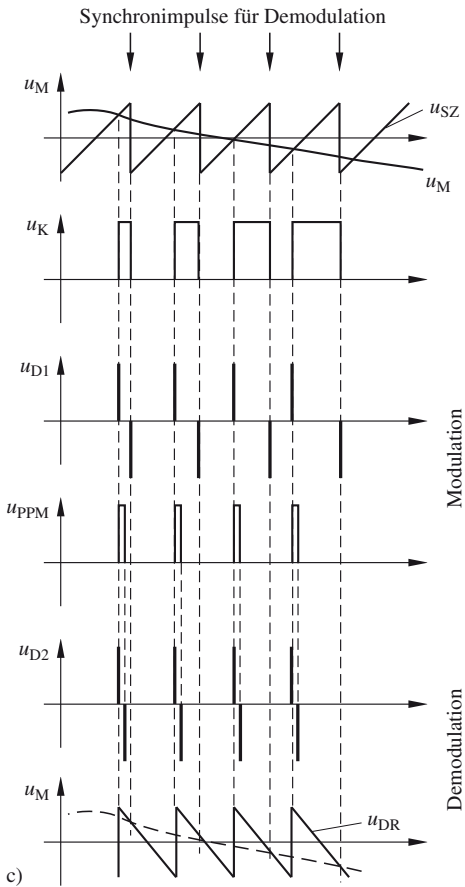


**Bild V-25**  
Pulsphasenmodulation (PPM)  
a) Modulator  
b) Demodulator  
c) Wirkungsweise



eine Phasenmodulation (Verschiebung der Impulse) zunächst wie eine Frequenzmodulation (wiederum Verschiebung der Impulse) erscheint. Erst verschieben sich die Impulse, verglichen mit der regelmäßigen Aufeinanderfolge vorher, dann resultiert daraus eine Frequenzänderung. Die größere Bedeutung für die Praxis hat die Pulsphasenmodulation. Bild V-25 stellt eine von mehreren Möglichkeiten zur Erzeugung von Pulsphasenmodulation sowie eine Schaltung zur Demodulation dar. Zur Demodulation müssen Synchronimpulse entweder getrennt übertragen oder aus dem PPM-Signal z.B. durch PLL-Schaltungen (PLL: phase locked loop) empfängerseitig erzeugt werden. Die Spannung  $u_{DR}$  hat stets den gleichen zeitlichen Verlauf. Die Information liegt in der zeitlichen Verschiebung der Impulse gegenüber ihrem Auftreten in gleichen Zeitabständen. Demnach ist das Verfahren gegenüber Störungen, die als Amplitudenänderungen auftreten, unempfindlich. Da allerdings nur eine begrenzte Bandbreite zur Signalübertragung zur Verfügung steht, ergibt sich ein verformter Rechteckimpuls nach Bild V-26. Überlagert sich diesem verformten Impuls eine Störspannung, ergeben sich für den Komparator mit der Vergleichsspannung  $U_K$  unterschiedliche Schaltzeitpunkte mit der Zeitdiffe-

renz  $\Delta T$ , die als zusätzliche Phasenverschiebung ein fehlerhaftes Signal ergeben. Pulsphasenmodulation wird dann vorteilhaft eingesetzt, wenn breitbandige Übertragungskanäle zur Verfügung stehen. Der Gewinn an Signal-Rauschabstand beträgt nach [V.3]:

$$a_{SN} = 10 \cdot \lg \left[ \frac{1}{8} \cdot \left( \frac{B_N}{B_S} \right)^2 \right] \text{ dB} \tag{V.34}$$

$B_N$  Bandbreite des durch Rauschen gestörten Übertragungskanals in Hz,  $B_S$  Signalbandbreite in Hz

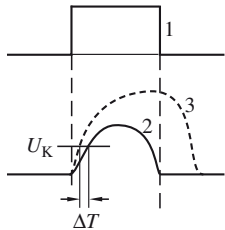


**Bild V-26** Überlagerte Störspannung bei PPM  
1 idealer Rechteckimpuls  
2 verformter Rechteckimpuls bei begrenzter Bandbreite  
3 wie 2, mit überlagerter Störspannung

Bereits für  $B_N > 2,83 \cdot B_S$  ergibt sich ein Gewinn an Signal-Rauschabstand gegenüber der Pulsamplitudenmodulation, was auch anschaulich nach Bild V-26 zu erwarten ist: Der übertragene Impuls nähert sich der Rechteckform, sodass  $\Delta T$  kaum noch wirksam werden kann.

### 4.3 Pulsdauermodulation (PDM)

Ein Verfahren zur Pulsdauermodulation ist in Bild V-27 dargestellt. Die Demodulation geschieht mit einem Tiefpass, dessen Grenzfrequenz geringfügig über der höchsten modulierenden Frequenz liegt. Für die Codierung von Signalen in der Nachrichtentechnik hat diese Modulationsart geringe Bedeutung.

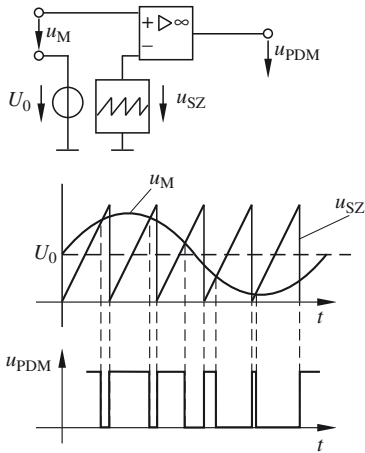


**Bild V-27** Erzeugung von Pulsdauermodulation

Allerdings wird die Pulsdauermodulation auch außerhalb der Signalkodierung angewendet, wie die zwei folgenden Beispiele zeigen:

- a) Das An- und Abschalten von Gleichspannungsquellen an einen Verbraucher mit elektronischen Schaltern (Transistoren) kann sehr verlustleistungsarm geschehen. Soll ein Verbraucher mit einer wenigstens näherungsweise sinusförmigen Spannung aus einer Gleichspannungsquelle versorgt werden, könnte man in Reihe zum Verbraucher einen Transistor schalten, der so angesteuert wird, dass die Spannung am Verbraucher sinusförmigen Verlauf hat. Der Nachteil dieses Konzeptes liegt darin, dass der Transistor mit einer Verlustleistung in der Größenordnung der Verbraucherleistung beaufschlagt wird.

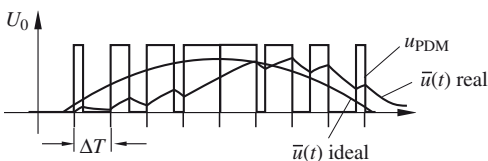


**Bild V-28** Pulsdauermodulation in der Energietechnik

Deshalb schaltet man nach Bild V-28 die Gleichspannungsquelle mit der Spannung  $U_0$  für unterschiedliche Zeitdauern auf den Verbraucher. Die Zeit  $\Delta T$  ist viel kleiner als die Periodendauer des anzunähernden sinusförmigen Spannungsverlaufes, sodass der Verbraucher in der Regel wegen seines Tiefpassverhaltens (z.B. Motor mit Induktivität) den im Bild eingezeichneten realen Mittelwert  $\bar{u}(t)$  bildet, der den idealen Verlauf oft ausreichend genau annähert. Angewendet wird dieses Verfahren beispielsweise bei unterbrechungsfreien Stromversorgungen für Rechner, die das Versorgungsnetz mit sinusförmigem Verlauf und der Spannung 230 V für die Dauer der Unterbrechung mit einem eingebauten Gleichspannungsakkumulator nachbilden. Hier kommt es auf möglichst geringe Verlustleistung an, um mit kleinen handlichen Geräten einen möglichst lang andauernden Notstrombetrieb zu erreichen und um die Probleme mit der Abfuhr der Wärme, verursacht durch die Verlustleistung, gering zu halten.

- b) Dieses Verfahren wird auch angewendet bei der Amplitudenmodulation im Anodenkreis von Senderöhren (multiplikatives Verfahren mit niedrigem Klirrfaktor nach Bild V-10), weil die Leistung des modulierenden Signals in der Größenordnung der Trägerleistung liegen muss und damit die gleichen Probleme mit der Verlustleistung auftreten wie unter a) beschrieben.

### 4.4 Pulscodemodulation (PCM)

Dies ist die heute überwiegend eingesetzte Art der Pulsmodulation, sodass prinzipiell Pulsamplituden-, Pulsfrequenz-, Pulsphasen- und Pulsdauermodulation möglich sind. Das zu übertragende Signal wird geeignet codiert.

#### 4.4.1 Prinzip

Das Prinzip zeigt Bild V-29.

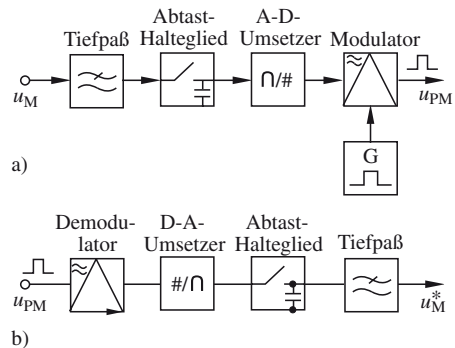


**Bild V-29** Prinzip der Signalübertragung mit Pulscodemodulation

- a) Sender  
b) Empfänger

Das zu übertragende Signal mit der Spannung  $u_M$  wird zunächst mit einem Tiefpass auf die maximale Frequenz  $f_{M \max}$  begrenzt und dann mit schmalen Impulsen der Dauer  $t_s$  im Abstand von  $t_{ab}$  ( $1/t_{ab} > 2f_{M \max}$ , Abtasttheorem von Shannon) abgetastet. Ein Halteglied „friert“ den Abtastwert bis zur Aktualisierung durch den neuen Wert ein, damit der Analog-Digital-Umsetzer einen konstanten und damit eindeutigen Wert zur Umsetzung zur Verfügung hat. An seinem Ausgang steht ein treppenförmiges wertkontinuierliches Signal, mit dem ein Pulsträger moduliert wird. Zur Rückgewinnung des Signals im Empfänger ist der Bittakt mit der Frequenz  $f_{ab} = 1/t_{ab}$  notwendig, der aber nicht getrennt mit übertragen wird, sondern durch entsprechende senderseitige Codierung regeneriert werden kann (siehe Kapitel V.4.4.7). Der Ausgangswert des Digital-Analog-Umsetzers wird in einem Abtast-Halte-Glied solange gespeichert, bis er durch einen neuen Wert ersetzt wird. Dieses zeit- und wertdiskrete Signal ist nach dem Tiefpass in ein zeit- und amplitudenkontinuierliches Signal  $u_M^*$  umgewandelt worden. Bild V-30 stellt das ursprüngliche Signal  $u_M$  und das empfangene Signal  $u_M^*$  einander gegenüber.

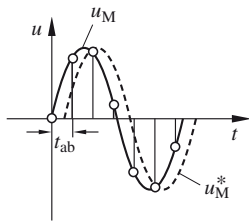


**Bild V-30**  
Pulscode modulation:  
Ausgesendetes  
und empfangenes Signal

Die Kurvenform ist nahezu unverändert, die Verzögerungszeit wird wesentlich durch die Abtast-Halte-Glieder, die Umsetzzeiten der Umsetzer und die Laufzeit im Kanal bestimmt. Da dieses Verfahren der Codierung auch im Prinzip bei der Speicherung von Musik auf Compact Disc (CD) verwendet wird, soll dieses Verfahren etwas näher betrachtet werden.

#### 4.4.2 Aliasing-Effekt

Zunächst stellt man sich das abzutastende Signal so vor, dass es gemäß Fourieranalyse aus Grund- und Oberschwingungen besteht, die alle sinusförmigen Verlauf haben. Obwohl die Signale der Nachrichtentechnik grundsätzlich nicht periodisch sind, kann man auch für sie die Fourierzerlegung durchführen (Kapitel I.4.9.3). Die höchste noch berücksichtigte sinusförmige Oberschwingung hat im Folgenden die Bezeichnung  $f_{M \max}$ .

Wird das abzutastende Signal nicht so frequenzbandbegrenzt, dass die Abtastfrequenz  $f_{ab}$  mindestens doppelt so groß ist wie die höchste Signalfrequenz  $f_{M \max}$ , entsteht bei der Demodulation eine Signalverfälschung, wie in Bild V-31b dargestellt. Das nach der Abtastung wiederhergestellte Signal mit der

Spannung  $u_M^*$  ist für den Fall eingezeichnet, dass die Abtastfrequenz  $f_{ab}$  nur geringfügig über der höchsten Signalfrequenz  $f_{M \max}$  liegt:  $f_{ab} \approx 1,1 \cdot f_{M \max}$ . Bild V-29a zeigt das demodulierte Signal  $u_M^*$  für den Grenzfall der doppelten Abtastfrequenz gegenüber der höchsten Signalfrequenz:  $f_{ab} = 2 \cdot f_{M \max}$ . Auch hier kann es zu Signalverfälschungen kommen, wenn nämlich die Abtastzeitpunkte genau im Nulldurchgang des Signals liegen oder wenn, wie eingezeichnet, das wiederhergestellte Signal nicht ebenfalls auf  $f_{M \max}$  in seiner Frequenz begrenzt wird. Nur dann bleibt von dem eingezeichneten dreieckförmigen Verlauf die Grundschwingung mit sinusförmigem Verlauf übrig, die mit dem abgetasteten Signal identisch ist. Wichtig ist, dass der theoretische Wert nach Shannon,  $f_{ab} = 2 \cdot f_{M \max}$ , nicht ausreicht, um die höchste Signalfrequenz (stets sinusförmig wegen der Bandbegrenzung) fehlerfrei wiederherzustellen. Man wählt deshalb in der Praxis:

- Abtastfrequenz in der Praxis:

$$f_{ab} = (2,2 \dots 4) \cdot f_{M \max} \quad (\text{V.35})$$

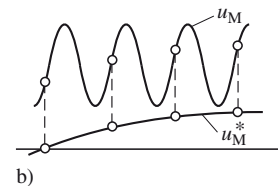
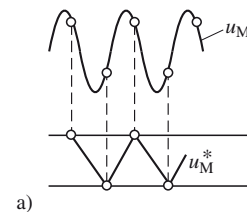


**Bild V-31** Aliasing-Effekt:  $u_M$  abgetastetes Basisbandsignal,  $u_M^*$  demoduliertes Signal

- a)  $f_{ab} = 2 \cdot f_M$
- b)  $f_{ab} \approx 1,1 \cdot f_M$

**Anti-Aliasing-Filter:** Um die genannten Signalverfälschungen zu vermeiden, wird vor der Abtastung das Basisbandsignal mit einem Tiefpassfilter frequenzbandbegrenzt, um die Bedingung nach Gleichung (V.35) sicher zu erfüllen.

#### 4.4.3 Abtast-Halte-Glied

Bild V-32a stellt das Ersatzschaltbild eines Abtast-Halte-Gliedes dar. Es bedeuten:

- $R_i$  Innenwiderstand der Signalquelle mit der modulierenden Spannung  $u_M$ ,
- $R_d$  Widerstand des elektronischen Schalters S im durchgeschalteten Zustand,
- $R_s$  Widerstand des elektronischen Schalters S im Sperrzustand,

$C_s$  Kapazität des elektronischen Schalters S im Sperrzustand,

$R_p$  erfasst den Verlustwiderstand des Kondensators  $C_H$  und den Eingangswiderstand des Operationsverstärkers,

$C_H$  Halte-(Speicher-)Kondensator mit der Spannung  $u_{CH}$ ,

$u_1$  Spannungswert von  $u_M$  zu einem angenommenen Zeitpunkt, auf den sich der Kondensator  $C_H$  aufgeladen hat,

$u_2$  neuer Spannungswert von  $u_M$ , auf den sich  $C_H$  durch Schließen von S aufladen soll,

$\Delta u_2/2 = |\pm \Delta u_2/2|$  Betrag der maximal möglichen Abweichung zwischen Soll- und Istwert bei der Analog-Digital-Umsetzung, ergibt sich bei einem  $N$ -Bit-Umsetzer zu

$$(u_{2\max} - u_{2\min}) \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^N - 1} \quad (\text{V.36})$$

$t_s$  Zeit, während der der elektronische Schalter S geschlossen ist,

$t_{ab} = 1/f_{ab}$  Abstand der Abtastimpulse.

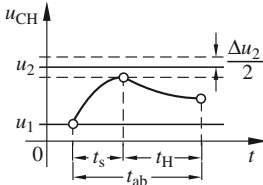
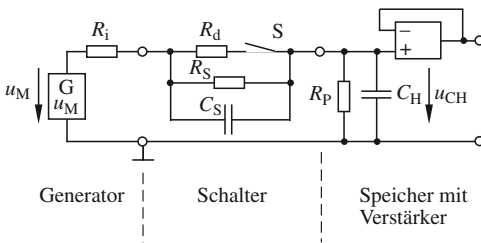


**Bild V-32** Abtast-Halte-Schaltung

a) Ersatzschaltung

b) Spannungsverlauf am Haltekapazitor  $C_H$

### 1. Abweichung am Ende der Abtastphase:

Es wird der ungünstigste Fall angenommen:  $u_1 = u_{M\min}$  und  $u_2 = u_{M\max}$ . Dann lädt sich  $C_H$  gemäß

$$(u_{M\max} - u_{M\min}) \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{t_s}{\tau_{auf}}\right)\right)$$

$$\tau_{auf} = C_H (R_i + R_d)$$

auf. Soll am Ende der Abtastung die Kondensatorspannung höchstens um  $\Delta u_2/2$  vom Sollwert abweichen (sinnvolle Annahme), muss gelten:

$$\exp\left(-\frac{t_s}{\tau_{auf}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^N - 1} \approx \frac{1}{2^{N+1}} \quad \text{mit } N \gg 1$$

Nach einigen Zwischenrechnungen folgt daraus:

$$(R_i + R_d) C_H \approx \frac{t_s}{\ln 2^{N+1}} \quad (\text{V.37})$$

### 2. Abweichung am Ende der Haltephase:

Bei geöffnetem Schalter S entlädt sich  $C_H$  über  $R_p$  und  $R_s$ . Der ungünstigste Fall tritt auf, wenn  $u_{CH}$  maximal ist und  $u_M$  minimal. Dann kann man für den Entladestrom die zwei Widerstände näherungsweise als parallel geschaltet ansehen, sodass sich die Kondensatorspannung ergibt:

$$u_{CH}(t) \approx u_{CH}(t_0) \cdot \exp\left(-\frac{t_H}{\tau_{ent}}\right) \\ \approx u_{CH}(t_0) \cdot \exp\left(-\frac{t_{ab}}{\tau_{ent}}\right)$$

mit  $t_H \approx t_{ab}$  ( $t_0$  Beginn des Haltezyklus). Die hierdurch verursachte Spannungsänderung liegt wieder in den oben genannten Grenzen:

$$\exp\left(-\frac{t_H}{\tau_{ent}}\right) \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^N - 1} \approx 1 - \frac{1}{2^{N+1}} \quad \text{mit } N \gg 1$$

$$\tau_{ent} \approx C_H (R_p \parallel R_d)$$

Daraus folgt:

$$C_H (R_p \parallel R_d) \approx t_{ab} \frac{1}{\left|\ln\left(1 - \frac{1}{2^{N+1}}\right)\right|} \quad \text{mit } t_H \approx t_{ab} \quad (\text{V.38})$$

### 3. Einfluss des Kondensators $C_s$ :

Bei geöffnetem Schalter bildet  $C_s$  mit  $C_H$  einen Spannungsteiler, wenn sich die Spannung  $u_M$  ändert. Der Einfluss von  $C_s$  ist um so geringer, je kleiner sein Wert im Vergleich zu  $C_H$  ist. In Analogie zu den Abschätzungen oben kann man ansetzen:

$$C_s < \frac{1}{2^{N+1}} \cdot C_H \quad (\text{V.39})$$

### 4. Weitere Einflussgrößen:

Die Zeit  $t_s$  muss so klein sein, dass sich  $u_M$  während dieser Zeit nicht wesentlich ändert. Auch hier kann ein Anhaltswert analog zu den oben genannten Größen ohne Ableitung angeführt werden:

$$\Delta u_M(t_s) < (u_{M\max} - u_{M\min}) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^N - 1} \quad (\text{V.40})$$

Dabei wurde Gleichung (V.36) verwendet.

■ **Beispiel V.4:** Die Spannung  $u_M$  hat die maximale Frequenz  $f_{M\max} = 15$  kHz und wird mit einer Frequenz  $f_{ab} = 1/t_{ab} = 45$  kHz ( $t_{ab} = 22,2 \mu\text{s}$ ) abgetastet. Der nachgeschaltete Umsetzer hat 12 Bit.  $C_s$  liegt bei Feldeffekttransistoren in der Größenordnung 10 pF. Dann muss  $C_H$  nach Gleichung (V.39) zu mindestens (10 pF)  $\cdot 2^{12+1} \approx 8200$  pF gewählt werden. Die Zeit  $t_s$  ist mit Gleichung (V.40) zu maximal  $(22,2 \mu\text{s}) \cdot 1/2^{13} \approx 2,7$  ns festgelegt (Sinusschwingung mit der höchsten Frequenz 15 kHz hat im Nulldurchgang die maximale Steigung mit dem Zahlenwert +1 bzw. -1). Mit  $C_H = 10$  nF folgt mit (V.37):

$$(R_i + R_d)_{\max} \approx (2,7 \text{ ns}) / ((10 \text{ nF}) \cdot \ln 2^{13}) \approx 0,03 \Omega.$$

Für  $R_p \parallel R_d$  schließlich ergibt sich mit (V.37):

$$(R_p \parallel R_d)_{\min} \approx (22,2 \mu\text{s}) / \left( (10 \text{ nF}) \cdot \left| \ln\left(1 - \frac{1}{2^{13}}\right) \right| \right) \approx 18,5 \text{ M}\Omega$$



Zu diesem Beispiel sind zwei Hinweise erforderlich:

1. In der Praxis sind die Anforderungen an das Abtast-Halte-Glied nicht so hoch wie hier dargestellt, weil der angenommene Wechsel von  $u_M$  zwischen Maximal- und Minimalwert innerhalb der Zeit zwischen zwei Abtastungen so gut wie nie auftritt.
2. Zur Vermeidung von Problemen wird man die Abtastfrequenz (hier zu 45 kHz angenommen) in der Praxis nicht unbedingt zu einem ganzzahligen Vielfachen der höchsten Basisbandfrequenz (hier 15 kHz) wählen.

#### 4.4.4 Quantisierung

Zur Quantisierung wird der gesamte Wertebereich des Basisbandsignals in eine endliche Anzahl von Quantisierungsintervallen eingeteilt. Jedem Wert (hier am Beispiel einer Spannung), der innerhalb eines bestimmten Intervalles liegt, wird ein Codewort mit  $N$  Elementen (Bits je Codewort) zugeordnet. Die Codierung geschieht im Dualsystem, und damit ist die Zahl der Quantisierungsintervalle zu  $2^N - 1$ ;  $N = 1, 2, 3, \dots$  gegeben. Macht man alle Intervalle gleich groß, hat ein Intervall die Breite

$$\Delta u = |u_{\max} - u_{\min}| \cdot \frac{1}{2^N - 1}. \text{ Es wurde vorausgesetzt,}$$

dass der Wertebereich der Spannung alle möglichen Codierungen erfordert. Damit ergibt sich ein

- *maximaler Amplituden- oder Quantisierungsfehler*

$$F = \pm(u_{\max} - u_{\min}) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^N - 1} \quad (\text{V.41})$$

Dieser Fehler lässt sich nach [V.4] durch den Klirrfaktor ausdrücken:

- *Klirrfaktor*  $k \approx \frac{1}{2^N}$  (V.42)

#### 4.4.5 Quantisierungsgeräusch

Bild V-33 stellt zu einem sinusförmigen Signalverlauf das zugehörige quantisierte Signal dar. Da beide Verläufe nicht mehr übereinstimmen, am Empfangsort aber das quantisierte Signal zur Verfügung steht, interpretiert der Empfänger das Signal als Sinussignal mit überlagerter Stör- oder Geräuschspannung  $u_{\text{NQ}}$ , auch als *Quantisierungsrauschen* oder *Quantisierungsgeräusch* bezeichnet. Man kann zeigen, dass sich bei *Gleichwahrscheinlichkeit aller Quantisierungsintervalle* ein Signal-Quantisierungs-Geräuschabstand ergibt von:

$$\text{Signal-Quantisierungs-Geräuschabstand} \\ a_{\text{SQ}} = 20 \cdot \lg 2^N \text{ dB} \quad (\text{V.43})$$

Die spektrale Verteilung des Quantisierungsgeräusches ist nahezu konstant im Bereich von der kleinsten Basisbandfrequenz bis zur Abtastfrequenz. Die Geräuschleistung, summiert über den gesamten Bereich, ist ein konstanter Wert. Erhöht man demnach die Abtastfrequenz, verringert sich die auf den Basisbandfrequenzbereich entfallende Geräuschleistung. Diese Maßnahme wird als *Überabtastung* oder *over*

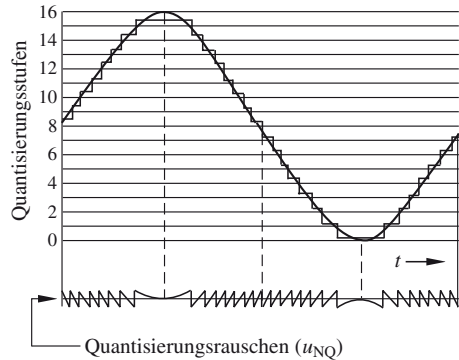


**Bild V-33** Entstehung des Quantisierungsrauschens (nach [IV.2])

*sampling* bezeichnet. Einer Verdopplung der Abtastfrequenz entspricht eine Erhöhung des Signal-Quantisierungs-Geräuschabstandes von  $10 \cdot \lg 2 = 3 \text{ dB}$ . Ebenso verdoppelt sich die Bitrate (Zahl der zu übertragenden Bits pro Zeiteinheit). Erhöht man andererseits die Zahl  $N$  der Bits pro Codewort, erhält man eine Erhöhung des Signal-Quantisierungs-Geräuschabstandes um  $20 \cdot \lg 2 = 6 \text{ dB}$ . Die Bitrate erhöht sich nur um den Faktor  $\frac{N+1}{N}$ , ist also kleiner

als 2. Danach ist das Prinzip der Überabtastung wenig sinnvoll, trotzdem wird es angewendet, weil es bei der Rückgewinnung des Basisbandsignales keine steilflankigen Tiefpassfilter erfordert (Bild V-29b). Die störende Abtastfrequenz ist weiter von der Grenzfrequenz des Filters entfernt.

Die Maximal- und Minimalwerte der in Bild V-33 eingetragenen Geräuschspannung  $u_{\text{NQ}}$  nach Gleichung (V.41) sind unabhängig von den Maximal- und Minimalwerten der Spannung  $u_M$ . Mit sinkendem Scheitelwert von  $u_M$  nimmt lediglich die Zahl der Maxima und Minima von  $u_{\text{NQ}}$  ab.

■ **Beispiel V.5:** Für Sprache ist ein *Dynamikbereich* (Verhältnis  $\bar{u}_{M\max}/\bar{u}_{M\min}$ ) von 40 dB erforderlich ( $\bar{u}_{M\max}/\bar{u}_{M\min} = 100$ ). Damit das Quantisierungsgeräusch auch bei den kleinsten Amplituden nicht stört, muss gelten:  $\bar{u}_{M\min} \geq 20 \cdot \bar{u}_{\text{NQ}}$ . Daraus ergibt sich:  $\bar{u}_M = 100 \cdot 20 \cdot \bar{u}_{\text{NQ}} = 2000 \cdot \bar{u}_{\text{NQ}}$ . Da der Wertebereich von  $u_M$  von  $-\bar{u}_M$  bis  $+\bar{u}_M$  reicht, folgt:  $2 \cdot \bar{u}_M = 2 \cdot 100 \cdot 20 \cdot \bar{u}_{\text{NQ}} = 4000 \cdot \bar{u}_{\text{NQ}}$ . Die Zahl der Quantisierungsintervalle ist demnach zu  $\geq 4000$  zu wählen, was mit einer Codierung mit 12 Bit je Codewort erreicht wird.

#### 4.4.6 Kompandierung

Die Deutsche Post AG hat einen Signal-Quantisierungs-Geräuschabstand  $a_{\text{SQ}} = 20 \cdot \lg 2^N \text{ dB} = 65 \text{ dB}$  (Gleichung (V.43)) festgelegt, was  $N = 11$  erfordert. Damit besteht jedes Codewort aus 11 Bit, und es sind entsprechend breitbandige Übertragungskanäle erforderlich. Durch Kompandierung kann  $N$  auf 7 verringert werden. Dazu werden die *kleinen* Signal-

amplituden, die besonders durch das Quantisierungsgeräusch gestört werden, zunächst verstärkt und dann erst in einen Digitalwert umgesetzt. Die großen Amplitudenwerte werden komprimiert. Bild V-34 zeigt die Übertragungsstrecke und den prinzipiellen Verlauf der Kompressions- und Expanderkennlinien. Über weitere Einzelheiten zu den Kennlinien informieren die Veröffentlichungen des CCITT. Dieses Verfahren wird wegen der Probleme mit der exakten Abstimmung von Kompressor- und Expanderkennlinie zueinander nicht mehr angewendet, denn je mehr beide voneinander abweichen, desto größer ist der Klirrfaktor. Man setzt das Verfahren der digitalen Kompondierung nach Bild V-34b ein. Das Basisbandsignal wird in einem Analog-Digital-Umsetzer hoher Stufenzahl (z.B. 12 Bit) gleichmäßig codiert, sodass alle Quantisierungsstufen gleich groß sind. In einem digitalen Kompressor werden den 12-Bit-kodierten Werten neue Werte mit z.B. nur 9 Bit zugeordnet, indem man Teilbereiche zusammenfasst. In Bild 34b ist dieser Vorgang vereinfacht anhand eines 3-Bit-Umsetzers und eines Kompressors auf 2 Bit gezeigt.

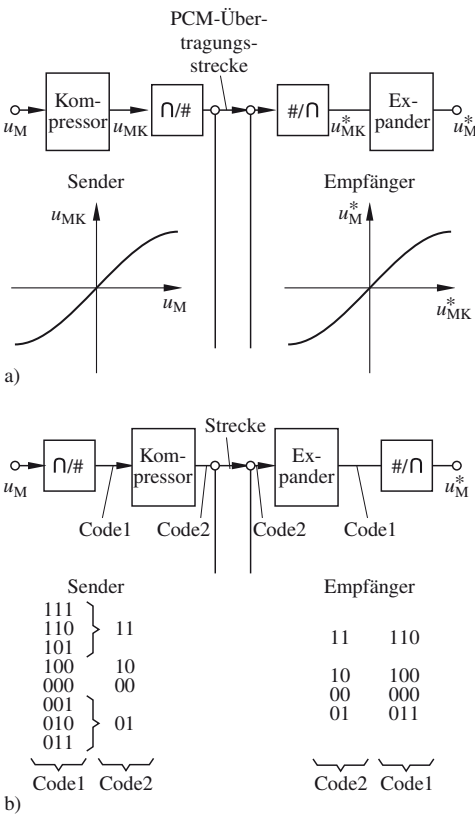


**Bild V-34** Kompondierung  
a) Prinzip  
b) digitale Kompondierung

4.4.7 Codierung

Die Codierung kann nach einer beliebigen Zuordnung zwischen Signalamplitude und Codewort geschehen. In der Praxis werden häufig Codierungen nach dem Binärcode, dem BCD-Code (binär codierte Dezimalzahlen) und dem Gray-Code (benachbarte Signalwerte unterscheiden sich im Codewort nur durch Änderung an einer Stelle) verwendet. Hierfür gibt es industriell gefertigte Analog-Digital-Umsetzer, bei denen teilweise das Abtast-Halte-Glied (Bild V-29, V-32) integriert ist. Lediglich  $C_H$  ist extern anzuschließen. Entsprechend stehen die zugehörigen Digital-Analog-Umsetzer zur Demodulation zur Verfügung.

Bevor der Pulsträger mit dem Digitalsignal moduliert wird, muss es häufig noch aufbereitet werden. Dazu sind folgende Zielsetzungen von Bedeutung:

1. Das Signal soll keinen Gleichanteil enthalten (wichtig für transformatorische Kopplung zur galvanischen Trennung von Signalkreisen),
2. die Übertragungsfrequenz soll so klein wie möglich sein,
3. aus der übertragenen Impulsfolge soll sich die beim Sender benutzte Taktfrequenz zurückgewinnen lassen.

Bild V-35 listet entsprechende Verfahren auf.

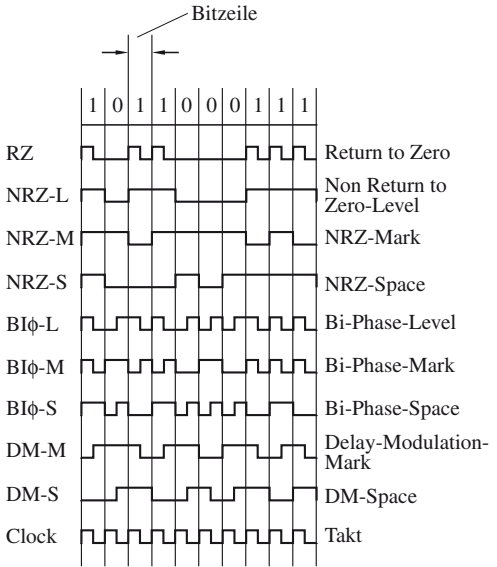


**Bild V-35** Verwendete Formate bei der Pulscode-modulation (nach [IV.2])

Die Abkürzungen haben folgende Bedeutung:

- **RZ-Verfahren** (return to zero): Binär-Null entspricht Signal-Null; Binär-Eins entspricht Signal-Eins für eine halbe Taktdauer, dann Rückkehr zu Signal-Null. Nachteile: Folgen mehrere Binäreinsen aufeinander, ist die zu übertragende Fre-

quenz maximal gleich der Taktfrequenz. Folgen mehrere Binär-Nullen aufeinander, kann der Takt nicht zurückgewonnen werden. Außerdem ist Signal-Null, über längere Zeit übertragen, relativ störanfällig.

- **NRZ-Verfahren** (not return to zero): Es gibt kein Signal-Null, sondern Signal-Plus-Eins und Signal-Minus-Eins, z.B. +5 V und -5 V.  
**NRZ-L** (L von level): Binär-Eins als Signal-Plus-Eins oder Signal-Minus-Eins, Binär-Null entgegengesetzt.  
**NRZ-M** (M von mark): Binär-Eins als Signaländerung, Binär-Null als keine Signaländerung.  
**NRZ-S** (S von space): Binär-Null als Signaländerung, Binär-Eins als keine Änderung.  
 Nachteile: Keine Taktinformation bei Aufeinanderfolge mehrerer gleicher Bits. Es müssen Gleichspannungen übertragen werden.  
 Vorteil: Die Übertragungsfrequenz ist höchstens halb so groß wie die Taktfrequenz.
- **Bi-Phase-Verfahren**: Die Binärzeichen werden mit zwei unterschiedlichen Perioden (Frequenzen) dargestellt, deshalb wird es auch mit *Zweifrequenzverfahren* oder *double frequency method* bezeichnet.  
**Bi-Phase-L** (*BiΦ-L*): Binär-Eins als Wechsel von Signal-Plus-Eins nach Signal-Minus-Eins in Taktmitte. Binär-Null als Wechsel von Signal-Minus-Eins nach Signal-Plus-Eins in Taktmitte.  
**Bi-Phase-M** (*BiΦ-M*): Binär-Null durch Wechsel der Signalpolarität zum Taktende bzw. Taktanfang, Binär-Eins durch zusätzlichen Wechsel in Taktmitte.  
**Bi-Phase-S** (*BiΦ-S*): Darstellung invers zu Bi-Phase-M.  
 Nachteil: Die Übertragungsfrequenz ist maximal gleich der Taktfrequenz.  
 Vorteile: Es ist keine Gleichspannung zu übertragen. Der Takt kann einfach zurückgewonnen werden.
- **DM-Verfahren** (D von delay, auch Miller-Code):  
**DM-M**: Binär-Eins durch Wechsel der Signalpolarität in Taktmitte, Binär-Null nach Binär-Eins kein Polaritätswechsel, Binär-Null nach Binär-Null Polaritätswechsel zum Taktbeginn.  
**DM-S-Verfahren**: Binär-Null durch Wechsel der Signalpolarität in Taktmitte, Binär-Eins nach Binär-Null kein Polaritätswechsel, Binär-Eins nach Binär-Eins Polaritätswechsel zum Taktbeginn.  
 Vorteile: Die Übertragungsfrequenz ist maximal gleich der halben Taktfrequenz. Es ist keine Gleichspannung zu übertragen. Der Takt kann einfach zurückgewonnen werden.

Das DM-Verfahren stellt somit eine optimale Lösung dar. Es wird häufig zur Ton- und Messwertaufzeichnung

auf Magnetbandspeichern eingesetzt, weil auch die Speicherung von Gleichgrößen möglich ist. Weiterhin findet es Anwendung bei der Telefon-Sprachübertragung und der PCM-Telemetry.

#### 4.4.8 Deltamodulation (DM) und Differenz-Pulsmodulation (DPCM)

Das übertragene Signal weist einen beträchtlichen Teil an Redundanz auf, weil sich aufeinanderfolgende Abtastwerte im Allgemeinen nur geringfügig voneinander unterscheiden. Es liegt deshalb nahe, nur jeweils deren Differenz, codiert mit wenigen Bit, zu übertragen. Damit können die Bitrate und die erforderliche Bandbreite des Übertragungskanals verringert werden.

- **Deltamodulation (DM)**: Es wird jeweils nur ein Bit übertragen, das das Vorzeichen der Änderung zum vorhergehenden Wert enthält. Unterscheiden sich allerdings zwei benachbarte Werte um mehr als ein Bit, kommt es zu einer *Steigungsüberlastung* (engl. slope overload). Das codierte Signal kann dem Basisbandsignal nur verzögert folgen, da pro Abtastung immer nur die kleinste Stufenhöhe zur Verfügung steht. Daraus resultiert ein Quantisierungsgeräusch besonderer Art, das *Granulargeräusch* (engl. granular noise). Man kann diesen Effekt dadurch verringern, dass man die Abtastfrequenz erhöht.
- **Delta-Sigma-Modulation**: Das modulierende Signal wird zunächst einem Integrierglied zugeführt, an dessen Ausgang die steilen Signalanstiege flacher sind. Damit kann der Delta-Modulator den Signalverlauf ohne Steigungsüberlastung darstellen. Im Empfänger wird das demodulierte Signal über ein Differenzierglied geführt, um die im Sender erfolgte lineare Signalverzerrung rückgängig zu machen.
- **Adaptive Deltamodulationsverfahren**: Hier gibt es eine Menge von Verfahren zur Codierung. So kann man beispielsweise bei einer bestimmten Anzahl aufeinanderfolgender positiver Impulse (z.B. drei) die Quantisierungsstufenhöhe verdoppeln, beim Auftreten einer entsprechenden Anzahl negativer Impulse wieder halbieren. Damit lässt sich bei gleicher Abtastfrequenz die Steigungsüberlastung verringern.
- **Differenz-Pulsmodulation (DPCM)**: Bei diesen vorwiegend zur Fernsichtbildübertragung eingesetzten Verfahren werden zwei aufeinanderfolgende Abtastwerte je nach deren Differenz auch mit mehr als einem Bit codiert. Treten allerdings große Differenzen in der Bildhelligkeit auf, werden ihnen nur wenige Bit zugeordnet, da das Auge für diese Änderungen wenig empfindlich ist.

## VI Filter

### 1 Einfache passive R-C-Filter

Die Ableitungen setzen sinusförmige Signale und den eingeschwungenen Zustand im Netzwerk voraus.

#### 1.1 Allgemeines

Filter sind Vierpole und werden häufig auch innerhalb dieses Themenkreises behandelt. Sie erhalten hier aber im Hinblick auf die speziellen Anwendungen in der Nachrichtentechnik ein eigenes Kapitel.

Filter grenzen ein gegebenes Frequenzspektrum ein. Damit soll eines der folgenden Ziele erreicht werden:

- Aus einem Frequenzgemisch mit vielen Signalen wird ein einzelnes Signal ausgefiltert. Beispiel: Senderauswahl beim Rundfunk- und Fernsehempfang.
- Ein vorhandenes Signal wird so verändert, dass es weniger Bandbreite im Übertragungskanal benötigt; die damit verbundene Signalverfälschung muss vertretbar sein. Beispiel: Farbfernsehübertragung; hier können nicht alle darstellbaren Bildpunkte in aufeinander folgenden Bildern unterschiedliche Farben und unterschiedliche Helligkeiten aufweisen.
- Eine oder mehrere Frequenzanteile sollen gezielt aus dem Spektrum entfernt werden. Beispiel: Störsignale mit Netzfrequenz 50 Hz.

Um die Eigenschaften eines Filters zu charakterisieren, werden in der Regel das Verhältnis Ausgangs- zu Eingangsspannung und die Phasenverschiebung dieses Verhältnisses in Abhängigkeit von der Frequenz angegeben. Damit die genannten Größen über mehrere Dekaden dargestellt werden können, verwendet man logarithmische Skalenteilungen.

- **Frequenzgang:** Darstellung des Amplitudenverhältnisses von Ausgangs- zu Eingangsspannung in Abhängigkeit von der Frequenz (siehe Gleichung VI.16a und Hinweis dazu).

- **Amplitudenfrequenzgang:** Häufig doppelt-logarithmische Darstellung des Verhältnisses von Ausgangs- zu Eingangsspannung. Für die Ordinatenbeschriftung gilt:

$$20 \cdot \lg \left( \frac{U_{\text{aus}}}{U_{\text{ein}}} \right) \quad \text{in dB}$$

(siehe Gleichung VI.16b und Hinweis dazu).

- **Phasengang:** Darstellung des Phasenwinkels von Ausgangs- zu Eingangsspannung in Abhängigkeit von der Frequenz. Die Frequenzachse ist logarithmisch, die Phasenachse ist linear geteilt.

Je nachdem, wie die Frequenzanteile des Originalsignals das Filter passieren, spricht man von:

- **Tiefpassfilter**, wenn die im Signal enthaltenen Frequenzanteile von Gleichspannung bis zur Grenzfrequenz durchgelassen werden;
- **Hochpassfilter**, wenn ab der Grenzfrequenz die im Signal enthaltenen Frequenzanteile durchgelassen werden;

- **Bandpassfilter**, wenn nur die im Signal enthaltenen Frequenzanteile eines meist eng begrenzten Frequenzbereiches durchgelassen werden;
- **Bandsperre**, wenn alle im Signal enthaltenen Frequenzanteile außer denen in einem meist eng begrenzten Frequenzbereich durchgelassen werden.

Der Übergang vom Sperr- in den Durchlassbereich und umgekehrt wird in der Praxis durch die Angabe der Grenzfrequenz bzw. der Resonanzfrequenz als scharf begrenzt angenommen, obwohl es sich um einen allmählichen Übergang handelt. Kenngrößen für die praktische Anwendung sind:

- **Grenzfrequenz  $f_g$ :** Frequenz, bis zu der (Tiefpass) bzw. ab der (Hochpass) die im Signal enthaltenen Frequenzanteile durchgelassen werden. Bei den Filtern erster Ordnung gilt: 1. Der Betrag des Verhältnisses Ausgangs- zu Eingangsspannung ist vom Maximalwert auf das 0,707fache des Maximalwertes abgesunken. 2. Der Phasenwinkel zwischen Ein- und Ausgangsspannung beträgt  $-45^\circ$  (Tiefpass) bzw.  $+45^\circ$  (Hochpass).
- **Durchlassbereich:** Frequenzbereich bis zu  $f_g$  (Tiefpass) bzw. ab  $f_g$  (Hochpass) bzw. innerhalb der Bandbreite  $B$  (Bandpass).
- **Sperrbereich:** Frequenzbereich ab  $f_g$  (Tiefpass) bzw. bis zu  $f_g$  (Hochpass) bzw. innerhalb der Bandbreite  $B$  (Bandsperre).
- **Phasenwinkel  $\varphi_g$ :** Phasenwinkel bei der Grenzfrequenz  $f_g$ .
- **Grad (Ordnung)  $n$  eines Filters:** Höchster im Nenner vorkommender Exponent der Kreisfrequenz  $\omega$  für das Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangsspannung, wenn der Zähler eine Konstante ist. Er wird vorwiegend für Hoch- und Tiefpassfilter angegeben. Beispiel: Tiefpassfilter 3. Grades  $U_{\text{aus}}/U_{\text{ein}} = A_0/(-j\omega^3 - B\omega^2 + Dj\omega + E)$ ;  $A_0, B, D, E$ , Konstante, dimensionslos oder Kombinationen aus  $R, L$  und  $C$ .
- **Steigung des Amplitudenganges:** Sie wird im Sperrbereich angegeben und ist ein Maß für die Fähigkeit, Frequenzanteile außerhalb des Durchlassbereiches zu unterdrücken. Sie wird bestimmt durch den Grad  $n$  des Filters und in dB/Dekade angegeben. Allgemein gilt: Steigung eines Filters  $n$ -ten Grades:  $-n \cdot 20$  dB/Dekade für einen Tiefpass bzw.  $+n \cdot 20$  dB/Dekade für einen Hochpass.
- **Bandbreite  $B$ :** Frequenzbereich, der durchgelassen (Bandpass) bzw. gesperrt (Bandsperre) wird. Sie ist bestimmt durch den Bereich, in dem die Ausgangsgröße beim Bandpass zwischen Maximalwert und 0,707 · Maximalwert liegt bzw. bei der Bandsperre zwischen Minimalwert und 1,41 · Minimalwert liegt.

- **Güte  $Q$ :** Mass für die Eigenschaften von Bandpass bzw. Bandsperre im Durchlass- bzw. Sperrbereich. Siehe dazu auch Bild VI-4.
- **Dämpfungsmaß:**  $d = 1/Q$
- **Resonanzfrequenz  $f_0$ :** Frequenz, die ein Bandpassfilter optimal durchlässt bzw. eine Bandsperre maximal unterdrückt.

Für die zuletzt genannten Kenngrößen besteht folgende Beziehung:

$$f_0 = B \cdot Q \tag{VI.1}$$

Hinweis: In einer verallgemeinerten Filtertheorie spricht man z.B. auch beim Hoch- und Tiefpass erster Ordnung von Güte und Resonanzfrequenz. Hier werden dagegen die üblicherweise in der praktischen Nachrichtentechnik verwendeten Bezeichnungen eingesetzt.

**1.2 Passive R-C-Filter**

Die hier behandelten *R-C*-Filter lassen sich prinzipiell auch als *R-L*-Filter aufbauen. Der Einsatz von Induktivitäten erfordert besondere Aufmerksamkeit, weil sie stets nichtideal sind (Reihenschaltung aus der Induktivität  $L$  und dem Wicklungswiderstand  $R_L$ ) und bei der Verwendung von Eisen ein nichtlineares Bauteil vorliegt (die Induktivität  $L$  ist über  $\mu_r = f(i)$  stromabhängig). Außerdem haben Induktivitäten größere Abmessungen und lassen sich in integrierten Schaltkreisen weniger gut fertigen. Aktive RC-Filter werden hier nicht behandelt.

Im folgenden sind die Eigenschaften einiger Filterschaltungen ohne Ableitung aufgelistet. Die Berechnung geschieht entweder mit der komplexen Rechnung oder unter Anwendung der Vierpoltheorie. Es werden sinusförmige Spannungs- und Stromverläufe im gesamten Filter vorausgesetzt.

**1.2.1 Passive R-C-Tiefpassfilter**

*Passive R-C-Tiefpassfilter erster, zweiter und dritter Ordnung:* Bild VI-1 zeigt die Realisierung sowie das Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangsspannung mit linearer Skalenteilung.

■ **Beispiel VI.1:** Ein Tiefpassfilter dritter Ordnung soll in einer Sinusoszillatorschaltung eingesetzt werden. Dazu muss die Ausgangsspannung gegenüber der Eingangsspannung bei einer Frequenz um  $180^\circ$  (Vorzeichen ohne Bedeutung) phasenverschoben sein. Das ist genau dann der Fall, wenn der Imaginärteil des Spannungsverhältnisses  $\underline{U}_2/\underline{U}_1$  Null ist. Aus der Tabelle folgt damit:  $j(6\omega_0 RC - \omega_0^3 R^3 C^3) = j\omega_0 RC(6 - \omega_0^2 R^2 C^2) = 0$  und daraus  $\omega_0 = \sqrt{6/RC}$ . Die negative Lösung der quadratischen Gleichung scheidet aus, da es keine negativen Frequenzen gibt. In den verbleibenden Realteil eingesetzt ergibt sich:  $\underline{U}_2/\underline{U}_1(\omega_0) = -1/29$ . Die Amplitude der Ausgangsspannung ist bei  $\omega_0$  auf  $1/29$  der Amplitude der Eingangsspannung abgesunken, der Phasenwinkel beträgt  $-180^\circ$ . Damit ist ein Verstärker mit der Verstärkung  $-29$  erforderlich.

Allgemein gilt: Der Übergang vom Durchlass- in den Sperrbereich ist um so schmalere, je höher die Ordnung  $n$  des Filters ist.

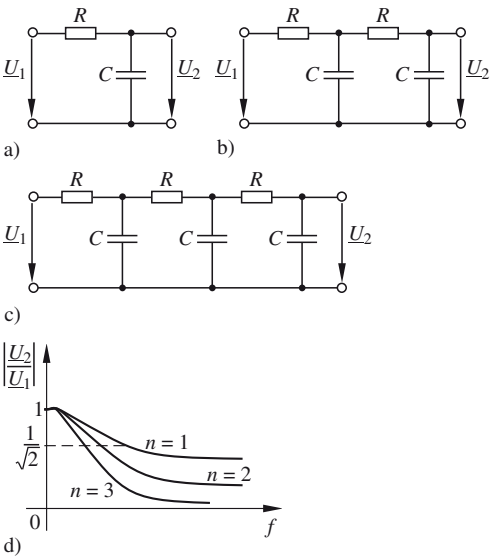


**Bild VI-1** RC-Tiefpassfilter  
a) erster ( $n = 1$ )  
b) zweiter ( $n = 2$ )  
c) dritter Ordnung ( $n = 3$ )  
d) Amplitudenfrequenzgang

**Tabelle VI-1** Übertragungsverhalten von Tiefpässen erster bis dritter Ordnung

| Tiefpass erster Ordnung ( $n = 1$ ), Bild VI-1a |                                               |                     |             |                                    |
|-------------------------------------------------|-----------------------------------------------|---------------------|-------------|------------------------------------|
| $\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$       | $\varphi$                                     | $f_g$               | $\varphi_g$ | Steigung                           |
| $\frac{1}{1 + j\omega RC}$                      | $-\arctan \omega RC$                          | $\frac{1}{2\pi RC}$ | $-45^\circ$ |                                    |
| Näherung für $\omega \ll 1/RC$                  |                                               |                     |             |                                    |
| $\approx 1$                                     | $\approx 0^\circ$                             |                     |             | $\approx 0$                        |
| Näherung für $\omega \gg 1/RC$                  |                                               |                     |             |                                    |
| $\approx \frac{1}{j\omega RC}$                  | $= -\arctan \omega RC$<br>$\approx -90^\circ$ |                     |             | $\approx -20 \text{ dB}$<br>Dekade |

| Tiefpass zweiter Ordnung ( $n = 2$ ), Bild VI-1b |                                                                                                      |                                                |
|--------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| $\frac{U_2}{U_1}$                                | $\varphi$                                                                                            | Steigung                                       |
| $\frac{1}{1 + 3j\omega RC - \omega^2 R^2 C^2}$   | $-\arctan \frac{3\omega RC}{1 - \omega^2 R^2 C^2} {}^1)$                                             |                                                |
| Näherung für $\omega \ll 1/RC$                   |                                                                                                      |                                                |
| $\approx 1$                                      | $\approx 0^\circ$                                                                                    | $\approx 0$                                    |
| Näherung für $\omega \gg 1/RC$                   |                                                                                                      |                                                |
| $\approx \frac{-1}{\omega^2 R^2 C^2}$            | $\approx -180^\circ + \arctan \frac{3}{\omega RC} {}^1), {}^2)$<br>$\approx -180^\circ {}^1), {}^3)$ | $\approx \frac{-40 \text{ dB}}{\text{Dekade}}$ |

| Tiefpass dritter Ordnung ( $n = 3$ ), Bild VI-1c                    |                                                                                                      |                                                |
|---------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| $\frac{U_2}{U_1}$                                                   | $\varphi$                                                                                            | Steigung                                       |
| $\frac{1}{1 + 6j\omega RC - 5\omega^2 R^2 C^2 - j\omega^3 R^3 C^3}$ | $-\arctan \frac{6\omega RC - \omega^3 R^3 C^3}{1 - 5\omega^2 R^2 C^2} {}^1)$                         |                                                |
| Näherung für $\omega \ll 1/RC$                                      |                                                                                                      |                                                |
| $\approx 1$                                                         | $\approx 0^\circ$                                                                                    | $\approx 0$                                    |
| Näherung für $\omega \gg 1/RC$                                      |                                                                                                      |                                                |
| $\approx \frac{-1}{j\omega^3 R^3 C^3}$                              | $\approx -180^\circ - \arctan \frac{\omega RC}{5} {}^1), {}^2)$<br>$\approx -270^\circ {}^1), {}^3)$ | $\approx \frac{-60 \text{ dB}}{\text{Dekade}}$ |

<sup>1)</sup>  $\tan(x) = \tan(x \pm n \cdot 180^\circ)$ ;  $n = 1, 2, 3, \dots$ ; <sup>2)</sup> Erste Näherung; <sup>3)</sup> Zweite, grobe Näherung; häufig zulässig

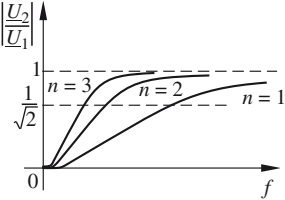
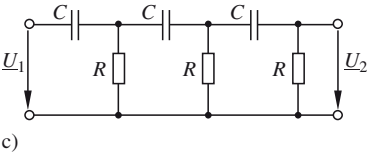
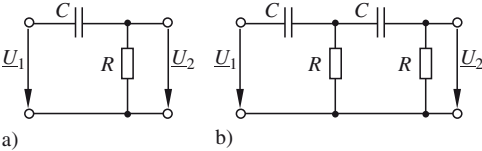


**Bild VI-2** RC-Hochpassfilter  
a) erster ( $n = 1$ )  
b) zweiter ( $n = 2$ )  
c) dritter Ordnung ( $n = 3$ )  
d) Amplitudenfrequenzgang

### 1.2.2 Passive R-C-Hochpassfilter

Passive R-C-Hochpassfilter erster, zweiter und dritter Ordnung: Bild VI-2 zeigt die Realisierung und den Amplitudenfrequenzgang.

Das Hochpassfilter dritter Ordnung wird ebenfalls für Sinusoszillatorschaltungen eingesetzt und hat gegenüber dem Tiefpassfilter dritter Ordnung den Vorteil, dass Gleichspannung nicht durchgelassen wird (wichtig in Transistorschaltungen, bei denen man die Eingangsspannung des Filters am Kollektor abgreift und vom Ausgang zur Basis zurückführt).

### 1.2.3 Bandpass aus R-C-Hoch- und Tiefpassfilter

Nach Bild VI-3 kann man Hoch- und Tiefpassfilter zusammenschalten und erhält drei Filterschaltungen mit identischem Verhalten.

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{j\omega RC}{1 + 3j\omega RC - \omega^2 R^2 C^2} \quad (\text{VI.2})$$

Die maximale Ausgangsspannung ergibt sich für  $\omega_0 = 1/RC$ . Man erhält folgende Näherungen:

$$\omega \ll 1/RC \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} \approx j\omega RC, \quad \text{Steigung } \frac{20 \text{ dB}}{\text{Dekade}}$$

**Tabelle VI-2** Übertragungsverhalten von Hochpässen erster bis dritter Ordnung

| Hochpass erster Ordnung ( $n = 1$ ), Bild VI-2a |                                                 |                     |             |                                               |
|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------|---------------------|-------------|-----------------------------------------------|
| $\frac{U_2}{U_1}$                               | $\varphi$                                       | $f_g$               | $\varphi_g$ | Steigung                                      |
| $\frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$             | $90^\circ - \arctan \omega RC$                  | $\frac{1}{2\pi RC}$ | $45^\circ$  |                                               |
| Näherung für $\omega \ll 1/RC$                  |                                                 |                     |             |                                               |
| $\approx j\omega RC$                            | $\approx 90^\circ$                              |                     |             | $\approx \frac{20 \text{ dB}}{\text{Dekade}}$ |
| Näherung für $\omega \gg 1/RC$                  |                                                 |                     |             |                                               |
| $\approx 1$                                     | $= 90^\circ - \arctan \omega RC$<br>$\approx 0$ |                     |             | $\approx 0$                                   |

| Hochpass zweiter Ordnung ( $n = 2$ ), Bild VI-2b               |                                                                                           |                                               |
|----------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| $\frac{U_2}{U_1}$                                              | $\varphi$                                                                                 | Steigung                                      |
| $\frac{-\omega^2 R^2 C^2}{1 + 3j\omega RC - \omega^2 R^2 C^2}$ | $180^\circ - \arctan \frac{3\omega RC}{1 - \omega^2 R^2 C^2} ^{1)}$                       |                                               |
| Näherung für $\omega \ll 1/RC$                                 |                                                                                           |                                               |
| $\approx -\omega^2 R^2 C^2$                                    | $\approx 180^\circ + \arctan 3\omega RC ^{1)}, ^{2)}$<br>$\approx 180^\circ ^{1)}, ^{3)}$ | $\approx \frac{40 \text{ dB}}{\text{Dekade}}$ |
| Näherung für $\omega \gg 1/RC$                                 |                                                                                           |                                               |
| $\approx 1$                                                    | $\approx \arctan \frac{3}{\omega RC} ^{1)}, ^{2)}$<br>$\approx 0 ^{1)}, ^{3)}$            | $\approx 0$                                   |

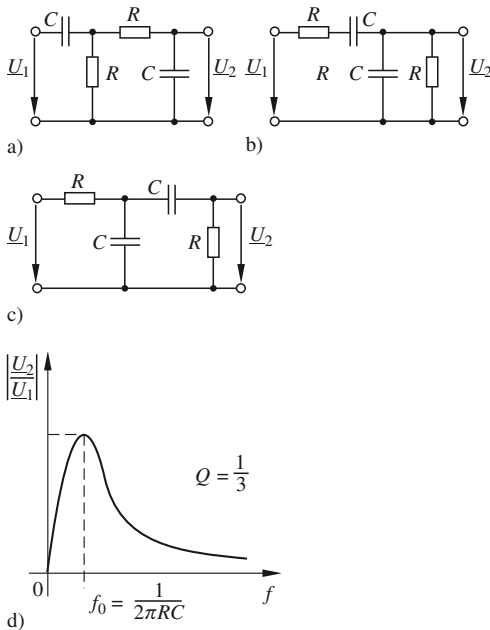
| Hochpass dritter Ordnung ( $n = 3$ ), Bild VI-2c                                     |                                                                                           |                                               |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| $\frac{U_2}{U_1}$                                                                    | $\varphi$                                                                                 | Steigung                                      |
| $\frac{-j\omega^3 R^3 C^3}{1 + 5j\omega RC - 6\omega^2 R^2 C^2 - j\omega^3 R^3 C^3}$ | $270^\circ - \arctan \frac{5\omega RC - \omega^3 R^3 C^3}{1 - 6\omega^2 R^2 C^2} ^{1)}$   |                                               |
| Näherung für $\omega \ll 1/RC$                                                       |                                                                                           |                                               |
| $\approx -j\omega^3 R^3 C^3$                                                         | $\approx 270^\circ - \arctan 5\omega RC ^{1)}, ^{2)}$<br>$\approx 270^\circ ^{1)}, ^{3)}$ | $\approx \frac{60 \text{ dB}}{\text{Dekade}}$ |
| Näherung für $\omega \gg 1/RC$                                                       |                                                                                           |                                               |
| $\approx 1$                                                                          | $\approx 90^\circ - \arctan \frac{\omega RC}{6} ^{1)}, ^{2)}$<br>$\approx 0 ^{1)}, ^{3)}$ | $\approx 0$                                   |

<sup>1)</sup>  $\tan(x) = \tan(x \pm n \cdot 180^\circ)$ ;  $n = 1, 2, 3, \dots$

<sup>2)</sup> Erste Näherung

<sup>3)</sup> Zweite, grobe Näherung; häufig zulässig



**Bild VI-3** Bandpass aus Hoch- und Tiefpass

a), b), c) 3 Schaltungen mit identischem Verhalten  
 d) Amplitudenfrequenzgang

$$\omega \gg 1/RC \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} \approx \frac{1}{j\omega RC}, \quad \text{Steigung } \frac{-20 \text{ dB}}{\text{Dekade}} \quad (\text{VI.3})$$

Wegen der geringen Steigung außerhalb des Durchlassbereiches wird diese Filterschaltung nur selten eingesetzt. Die Steigung  $-20 \text{ dB/Dekade}$  bedeutet, dass bei einer Frequenzverzehnfachung die Ausgangsspannung auf  $1/10$  sinkt. Die Forderungen in der Nachrichtentechnik zur Senderselektion dagegen lauten, dass bei einer Frequenzänderung von  $\pm 1\%$  gegenüber der Resonanzfrequenz  $f_0 = \omega_0/2\pi$  die Amplitude der Ausgangsspannung um den Faktor  $10^{-1} \dots 10^{-4}$  kleiner wird.

■ **Beispiel VI.2:** Ein Sender mit der Frequenz  $f_0 = 1,000 \text{ MHz}$  soll empfangen werden, ein Nachbarsender mit der Frequenz  $f_N = 1,010 \text{ MHz}$  stört den Empfang und soll mit einem Filter unterdrückt werden. Beide Sender haben die gleiche Amplitude. Am Ausgang des Filters soll die Amplitude des Nachbarsenders auf  $10^{-1}$  derjenigen des zu empfangenden Senders abgesunken sein. Verwendet werden soll ein Bandpassfilter aus R-C-Hoch- und Tiefpassfilter. Mit Gleichung (VI.2) ergibt sich für das Verhältnis von Nachbarsignalamplitude zu Empfangssignalamplitude am Ausgang des Filters mit  $f_N = 1,010 \text{ MHz} = 1,000 \text{ MHz} \cdot 1,01 = f_0 \cdot 1,01$ :

$$\left| \frac{U_{\text{aus}}}{U_{\text{ein}}} \right|_{f_N} = \left| \frac{j \cdot \omega_N \cdot R \cdot C}{1 + 3 \cdot j \cdot \omega_N \cdot R \cdot C - \omega_N^2 \cdot R^2 \cdot C^2} \right|$$

$$\left| \frac{U_{\text{aus}}}{U_{\text{ein}}} \right|_{f_0} = \left| \frac{j \cdot \omega_0 \cdot R \cdot C}{1 + 3 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot R \cdot C - \omega_0^2 \cdot R^2 \cdot C^2} \right|$$

$$= \left| \frac{j \cdot \omega_0 \cdot R \cdot C \cdot 1,01}{1 + 3 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot R \cdot C \cdot 1,01 - (\omega_0 \cdot R \cdot C)^2 \cdot 1,01^2} \right|$$

$$= \left| \frac{j}{1 + 3j - 1} \right|_{\omega_0 = 1/RC}$$

$$= \left| \frac{j \cdot 1,01}{1 + 3 \cdot j \cdot 1,01 - 1,01^2} \right|$$

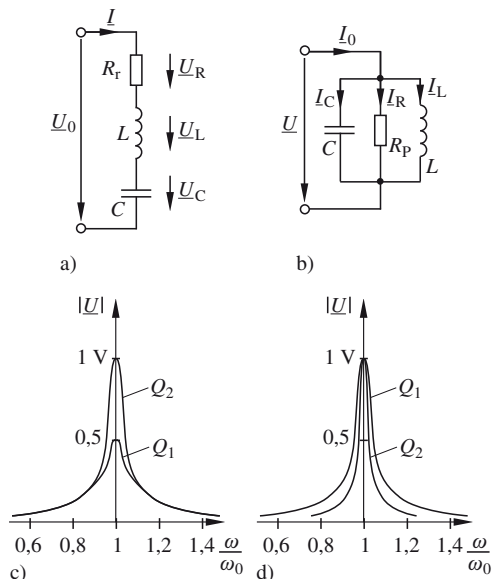
$$= \frac{1,01}{\sqrt{(-0,0201)^2 + (3 \cdot 1,01)^2}} \approx \frac{1,01}{\sqrt{9,1813}} \approx 3 \cdot \frac{1,01}{3,0301} \approx 0,99997$$

Waren beide Amplituden am Filtereingang gleich groß, hat sich die Amplitude des Nachbarsenders am Filterausgang auf das  $0,99997$  fache der Amplitude des empfangenen Senders „verringert“. Die gestellte Forderung ist mit dieser Filterschaltung nicht zu erfüllen. Theoretisch könnte man eine Vielzahl solcher Filterschaltungen hintereinanderschalten (Kettenschaltung, siehe Kapitel II). Das ergäbe dann  $n = \lg(10^{-1})/\lg(0,99997) \approx 76752$  Bandpässe. Dieses Konzept ist technisch nicht ausführbar, selbst wenn man von einer konstanten Resonanzfrequenz ausgeht.

Die im Beispiel VI.2 gestellte Forderung kann aber mit vergleichsweise geringem Aufwand mit LC-Schwingkreisen erfüllt werden.

### 1.2.4 R-L-C-Bandpass und -Bandsperr

Bandpass und Bandsperr werden als Reihen- bzw. Parallelschwingkreis realisiert. Setzt man mehrere derartige Filter ein, spricht man von *Bandfiltern* (siehe unten). Beim Reihenschwingkreis erfasst der ohmsche Widerstand  $R_r$  nach Bild VI-4a den Wicklungswiderstand der Spule und eventuell den zum Kondensator parallel liegenden Isolationswiderstand, der in einen Reihenwiderstand umgerechnet worden

**Bild VI-4** Schwingkreise als Bandfilter

- a) Reihenschwingkreis  
 b) Parallelschwingkreis  
 c) Spannung am Parallelschwingkreis bei Stromeinprägung bei  $Q_2 = 2Q_1$   
 d) wie c), aber auf den Maximalwert normiert

**Tabelle VI-3** Formeln zum Parallel- und Reihenschwingkreis

|                                                                                                     | Reihenschwingkreis                                                                                                                                                                                                                                                  | Parallelschwingkreis                                                                                                                                                                                                                                          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Allgemeine Beziehung                                                                                | $\underline{I} = \frac{\underline{U}_0}{R_r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$ <p>Speisung aus einer Spannungsquelle mit der Spannung <math>\underline{U}_0</math></p>                                                                                 | $\underline{U} = \underline{I}_0 \frac{1}{\frac{1}{R_p} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$ <p>Speisung aus einer Stromquelle mit dem Strom <math>\underline{I}_0</math></p>                                                                      |
| Resonanz für Imaginärteil von $\underline{Z} = 0$ :<br>$\Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ | $\underline{I}(\omega_0) = \frac{\underline{U}_0}{R_r}$ $\underline{U}_R = \underline{U}_0; \underline{U}_C = \frac{\underline{U}_0}{R_r j \omega_0 C};$ $\underline{U}_L = \frac{\underline{U}_0}{R_r} \cdot j \omega_0 C$ $ \underline{U}_C  =  \underline{U}_L $ | $\underline{U} = \underline{I}_0 \cdot R_p$ $\underline{I}_R = \underline{I}_0; \underline{I}_C = \underline{I}_0 \cdot R_p \cdot j \omega_0 C;$ $\underline{I}_L = \underline{I}_0 \cdot R_p \frac{1}{j \omega_0 L}$ $ \underline{I}_C  =  \underline{I}_L $ |
| Güte $Q$                                                                                            | $Q_r = \frac{\omega_0 L}{R_r} = \frac{1}{R_r \omega_0 C}$ $= \frac{1}{R_r} \sqrt{\frac{L}{C}}$                                                                                                                                                                      | $Q_p = \frac{R_p}{\omega_0 L} = R_p \omega_0 C$ $= R_p \sqrt{\frac{C}{L}}$                                                                                                                                                                                    |
| Dämpfungsmaß $d$                                                                                    | $d = 1/Q$                                                                                                                                                                                                                                                           | $d = 1/Q$                                                                                                                                                                                                                                                     |
| Bandbreite $B$                                                                                      | $B = \frac{f_0}{Q}$                                                                                                                                                                                                                                                 | $B = \frac{f_0}{Q}$                                                                                                                                                                                                                                           |

ist. Beim Parallelschwingkreis rechnet man den zur Spule in Reihe liegenden Wicklungswiderstand in einen Parallelwiderstand um und fasst ihn mit dem Isolationswiderstand des Kondensators zu  $R_p$  zusammen (Bild VI-4b). Formeln siehe Tabelle VI-3.

In der Nachrichtentechnik werden häufig Parallelschwingkreise eingesetzt, die im Kollektorkreis eines Transistors liegen und deshalb von einer Stromquelle gespeist werden. Es handelt sich damit um einen Bandpass, der im weiteren betrachtet werden soll.

Die Güte beeinflusst sowohl die Höhe der Spannung im Resonanzfall als auch die Bandbreite  $B$ . Die Güte wird bestimmt durch den ohmschen Widerstand und das Verhältnis  $C/L$ : Je größer  $R_p$  und je größer  $C$  im Verhältnis zu  $L$  ist, um so größer ist die Güte  $Q$ . In der Empfängertechnik (z.B. bei Rundfunk- und Fernsehempfängern) werden Schwingkreise als Bandpass eingesetzt, um aus einer Vielzahl von zur Verfügung stehenden Sendern *einen* auszuwählen. Je größer die Güte ist, um so wirkungsvoller werden störende benachbarte Sender unterdrückt. Allerdings sinkt auch die Bandbreite, die aber einen bestimmten Wert nicht unterschreiten darf (siehe Modulation). Damit beide Eigenschaften gleichzeitig genutzt werden können, wird ein Weg nach Bild VI-5 gewählt. Man verwendet mehrere Schwingkreise, bei denen die Güte

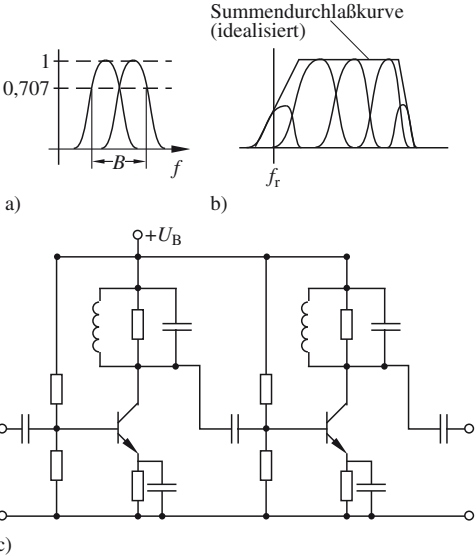


**Bild VI-5** Durchlasskurve mit mehreren Bandfiltern  
a) zwei Bandfilter zur Erhöhung der Bandbreite  
b) fünf Bandfilter für die Restseitenbandübertragung (Fernsehen)  
c) Schaltungstechnische Realisierung

möglichst groß und die Bandbreite demzufolge zu klein ist (siehe auch das folgende Kapitel VI.2.5, Bandfilter). Erreicht wird damit eine gute Unterdrückung von Nachbarsendern. Um die geforderte Bandbreite zu realisieren, verwendet man mehrere Filter, deren Resonanzfrequenzen geringfügig gegeneinander verschoben sind. Als resultierende Durchlasskurve ergeben sich die in Bild VI-5 dargestellten Formen. Auf diese Weise wird auch die in der Fernsehempfangstechnik verwendete Filterkurve für die Restseitenbandübertragung erreicht (Kapitel V, Modulation, Bild V-9).

■ **Beispiel VI.3:** Es gelten die gleichen Vorgaben wie im Beispiel VI.2. Als Filter soll ein Parallelschwingkreis verwendet werden, der im Kollektorkreis eines Transistors angeordnet ist und damit für beide Frequenzen von einer Stromquelle angesteuert wird. Mit  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  folgt für das Spannungsverhältnis:

$$\left| \frac{U_{fN}}{U_{f0}} \right| = \frac{\left| \frac{L \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_p} + j\left(\omega_0 \cdot 1,01 \cdot C - \frac{1}{\omega_0 \cdot 1,01 \cdot L}\right)}}{\frac{L \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_p} + j\left(\omega_0 \cdot C - \frac{1}{\omega_0 \cdot L}\right)}}}{\left| \frac{1}{\frac{1}{R_p} + j\left(\omega_0 \cdot 1,01 \cdot C - \frac{1}{\omega_0 \cdot 1,01 \cdot L}\right)} \right|} \right| \quad \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

$$= \frac{\left| \frac{1}{\frac{1}{R_p} + j\left(\omega_0 \cdot 1,01 \cdot C - \frac{1}{\omega_0 \cdot 1,01 \cdot L}\right)} \right|}{\left| \frac{1}{\frac{1}{R_p}} \right|}$$

Nach einigen Umformungen und der Bedingung, dass für dieses Verhältnis der Wert 1/10 gelten muss, folgt:

$$\left| \frac{U_{fN}}{U_{f0}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + R_p^2 \left( \frac{1,01^2 \cdot \omega_0^2 \cdot L \cdot C - 1}{1,01 \cdot \omega_0 \cdot L} \right)^2}}$$

$$= \frac{1}{10} \Rightarrow R_p^2 \left( \frac{1,01^2 - 1}{1,01 \cdot \omega_0 \cdot L} \right)^2 = 99$$

Daraus ergibt sich:  $R_p \left( \frac{1,01^2 - 1}{1,01 \cdot \omega_0 \cdot L} \right)^2 = \sqrt{99}$ ; und schließlich:

$\frac{R_p}{\omega_0 \cdot L} \approx 500$ . Das ist aber nach Tabelle VI-3 die Güte  $Q$  des

Schwingkreises. Ein Wert in dieser Größenordnung ist in der Praxis kaum erreichbar, kann aber mit zwei hintereinandergeschalteten Schwingkreisen nach Bild VI-5c realisiert werden. Allerdings muss überprüft werden, ob die aus  $Q = 500$  folgende Bandbreite nach Tabelle VI-3 für eine Signalübertragung ausreicht:

$$B = \frac{f_0}{Q} = \frac{1,000 \text{ MHz}}{500} = 2 \text{ kHz. Ist eine größere Bandbreite gefordert, lässt sich ein Bandfilter nach Kapitel VI.2.5 einsetzen.}$$

### 1.2.5 Bandfilter

Setzt man zwei Filter ein, die magnetisch (gekennzeichnet durch die *Gegeninduktivität*  $M$  in Bild VI-6a) oder kapazitiv gekoppelt sind, spricht man von einem *Bandfilter*. Je nach Kopplungsgrad erhält man

als resultierende Filterkurve die in Bild VI-6b dargestellten Verläufe. Vom Transformator werden folgende Begriffe übernommen:

● **Kopplungsfaktor:**  $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$  (VI.4)

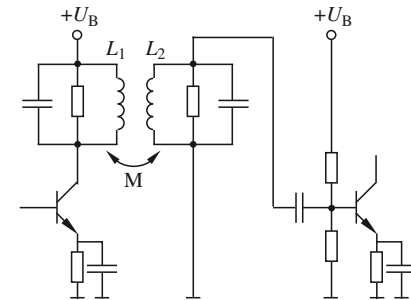
$M$  Gegeninduktivität in H;  $L_1, L_2$  Induktivität der Primär- bzw. Sekundärwicklung in H

Weiterhin gilt auch:

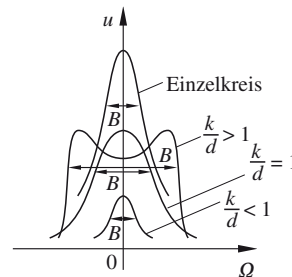
● **Kopplungsfaktor:**  $k = \sqrt{1 - \sigma}$  (VI.5)

$\sigma$  Streufaktor

Es ergeben sich die unterschiedlichen Resonanzkurven nach Bild VI-6b.



a)



b)

### Bild VI-6 Bandfilter

a) Realisierung mit Transistorschaltung

b) Resonanzkurven bei unterschiedlicher Kopplung

Man unterscheidet: a)  $k < d$ : *unterkritische Kopplung*; b)  $k = d$ : *kritische Kopplung*; c)  $k > d$ : *überkritische Kopplung* ( $d$  siehe Tabelle VI-3). Ist das Dämpfungsmaß  $d = 1/Q$  (manchmal auch als Dämpfungsfaktor bezeichnet) beider Schwingkreise unterschiedlich, spricht man anstatt der kritischen Kopplung ( $k = d$ ) auch von *transitionaler Kopplung* und definiert den Kopplungsfaktor  $k_{tr}$  wie folgt:

● *transitionaler Kopplungsfaktor*

$$k_{tr} = \sqrt{\frac{1}{2}(d_1^2 + d_2^2)} \quad \text{für kritische Kopplung} \quad (VI.6)$$

In allen anderen Fällen gilt:

- **Dämpfungsmaß bei Bandfiltern:**

$$d = \sqrt{d_1 d_2} \quad (\text{VI.7})$$

- **Normierte Verstimmung  $\Omega$ :** Bei der Betrachtung von Schwingkreisen wird vorteilhaft die *normierte Verstimmung*  $\Omega$  eingesetzt:

$$\begin{aligned} \Omega &= Q \cdot v = Q \cdot \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right) = Q \cdot \left( \frac{f^2 - f_0^2}{f \cdot f_0} \right) \\ &\approx Q \cdot \left( \frac{(f + f_0)(f - f_0)}{f_0^2} \right)_{f=f_0} \approx Q \cdot \frac{2 \cdot f_0 \cdot \Delta f}{f_0^2} \\ &\approx Q \cdot \frac{2 \cdot \Delta f}{f_0} \approx Q \cdot \frac{B}{f_0} \Rightarrow \Omega = 1 \quad \text{mit} \quad Q \cdot B = f_0 \end{aligned} \quad (\text{VI.8})$$

$v$  Verstimmung,  $f_0$  Resonanzfrequenz in Hz

Für die Spannung am zweiten Schwingkreis errechnet sich:

$$U = \frac{I \cdot R_p \cdot 2 \cdot \frac{k}{d}}{\sqrt{\left(1 + \frac{k^2}{d^2}\right)^2 - 2\Omega^2 \left(\frac{k^2}{d^2} - 1\right) + \Omega^4}}; \quad d = \frac{1}{Q} \quad (\text{VI.9})$$

Bild VI-6b stellt die unterschiedlichen Filterkurven einander gegenüber. Ein Einzelkreis hat zwar die höhere Spannung gegenüber einem Bandfilter, aber dessen Bandbreite ist bei unterkritischer Kopplung kleiner. Die Bandbreite nimmt bei überkritischer Kopplung gegenüber dem Einzelkreis zu. Die normierte Verstimmung berechnet sich jeweils dadurch, dass die Spannung in Gleichung (VI.9) auf den Wert 0,707 gegenüber dem Maximalwert abgesunken ist.

- **Bandbreite bei einem einzelnen Schwingkreis:**

$$\Omega_{\text{ein}} = 1 \Rightarrow B = f_0/Q \quad (\text{VI.10})$$

- **Bandbreite bei unterkritischer Kopplung ( $k/d < 1$ ):** Mit Gleichung (VI.9) und einigen Umformungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{un}} &= \sqrt{\frac{k^2}{d^2} - 1} + \sqrt{2 \left(1 + \frac{k^4}{d^4}\right)} \approx 0,64 \\ \text{mit} \quad \frac{k^2}{d^2} \ll 1, \quad \frac{k^4}{d^4} \ll 1 &\Rightarrow B_{\text{un}} \approx 0,64 \cdot f_0/Q \end{aligned} \quad (\text{VI.11})$$

Die Bandbreite bei unterkritischer Kopplung (Näherungen nach Gleichung (VI.11) müssen erfüllt sein) ist also nur 64 % derjenigen eines einzelnen Schwingkreises.

- **Bandbreite bei kritischer Kopplung ( $k/d = 1$ ):**

$$\Omega_{\text{kri}} = \sqrt{2 \cdot 2} = 1,41 \Rightarrow B_{\text{kri}} = 1,41 \cdot f_0/Q \quad (\text{VI.12})$$

Die Bandbreite ist um den Faktor 1,41 größer als bei einem Einzelkreis.

- **Bandbreite bei überkritischer Kopplung ( $k/d > 1$ ):**

$$\Omega_{\text{ub}} = \pm \sqrt{\frac{k^2}{d^2} + 2 \frac{k}{d} - 1} \quad (\text{VI.13})$$

Allerdings darf der Sattelpunkt bei  $\Omega = 0$  nicht unter dem Wert  $0,707 \cdot \text{Maximalwert}$  liegen, weil man sonst nicht mehr von Bandbreite sprechen kann. Das wird erreicht für  $k/d \approx 2,4$ , sodass folgt:

$$\Omega_{\text{ub max}} \approx 3 \Rightarrow B_{\text{ub max}} \approx 3 \cdot f_0/Q \quad (\text{VI.14})$$

Wenn der Sattelpunkt also  $-3$  dB unter dem Maximalwert liegt, ist die Bandbreite etwa dreimal so groß wie bei einem Einzelkreis (Bild VI-6b).

## 2 Weitere Ausführungsformen

Der technische Fortschritt hat durch die Ergebnisse der Digitaltechnik, durch die Fertigung integrierter Schaltkreise und durch die Umsetzung theoretischer Ergebnisse in die Praxis zu neuen Filterprinzipien geführt. Einige davon sollen in ihrer grundsätzlichen Wirkungsweise vorgestellt werden. Für die Entwicklung von Filterschaltungen ist eine weitergehende Einarbeitung erforderlich.

### 2.1 Quarzfilter, keramische Filter

Quarzfilter und keramische Filter nutzen die Eigenschaften eines Quarzes als Reihen- oder Parallelschwingkreis. Bei keramischen Filtern sind neben den Quarzen noch L-C-Schwingkreise vorhanden. Quarze haben zwei Resonanzfrequenzen, eine Reihenresonanzfrequenz  $f_r = 1/2\pi\sqrt{LC_r}$  (Bild VI-7a) und eine Parallelresonanzfrequenz  $f_p = 1/2\pi\sqrt{L \cdot C_r \cdot C_p / (C_r + C_p)}$ ,

die sehr dicht beieinander liegen. Für den Quarz SQ 4815 (Fa. Valvo) gilt für die in Bild VI-7a eingetragenen Größen:  $L = 100$  mH,  $C_r = 0,015$  pF,  $C_p = 5$  pF,  $R = 100$   $\Omega$ ,  $f_r = 4$  MHz. Das ergibt nach Tabelle VI-3 für den Quarz in Reihenresonanz eine Güte  $Q = (1/R) \cdot \sqrt{L/C_r} = 26\,000$  und eine Bandbreite  $B = 154$  Hz. Die hohe Güte von Quarzen bewirkt eine relativ geringe Bandbreite, die häufig zur Signalübertragung nicht ausreicht. In einem Quarzfilter werden in der Regel mehrere Quarz-Schwingkreise nach der Art eines Bandfilters so zusammengeschaltet, dass für eine vorgegebene Frequenz die Impedanz besonders groß ist. Die Resonanzfrequenzen der Einzelquarze werden geringfügig gegeneinander verschoben, um nach Bild VI-5a eine ausreichende Bandbreite zu erhalten. So ergeben sich für das Bandfilter F 480 (Fa. Quarzkeramik) folgende Werte: Resonanzfrequenz 142,5 kHz; Bandbreite 1440 Hz; bei einer Frequenz  $(142,5 \pm 2,5)$  kHz ist die Ausgangsspannung auf 1/10000 derjenigen bei der Resonanzfrequenz abgesunken.

Für das in Bild VI-7b dargestellte Quarzfilter SFZ 460 A (Fa. Stettner) werden bei einem Koppel-

kondensator  $C_k = 56 \text{ pF}$  folgende Daten angegeben: Mitten-(Resonanz-)Frequenz  $460 \text{ kHz}$ , Bandbreite  $4,5 \text{ kHz}$ , bei einer Eingangsfrequenz von  $(460 \pm 10) \text{ kHz}$  sinkt die Ausgangsspannung auf typisch  $0,056$  des Wertes bei der Mittenfrequenz  $460 \text{ kHz}$ . Über den Wert des Koppelkondensators kann nach Kapitel VI.2.5 und Bild VI-6 die Bandbreite in gewissen Grenzen eingestellt werden. Dieses Filter ist für den Einsatz in Kurzwellenempfängern bei Amplitudenmodulation (AM) und mit einer Zwischenfrequenz von  $460 \text{ kHz}$  entwickelt worden.

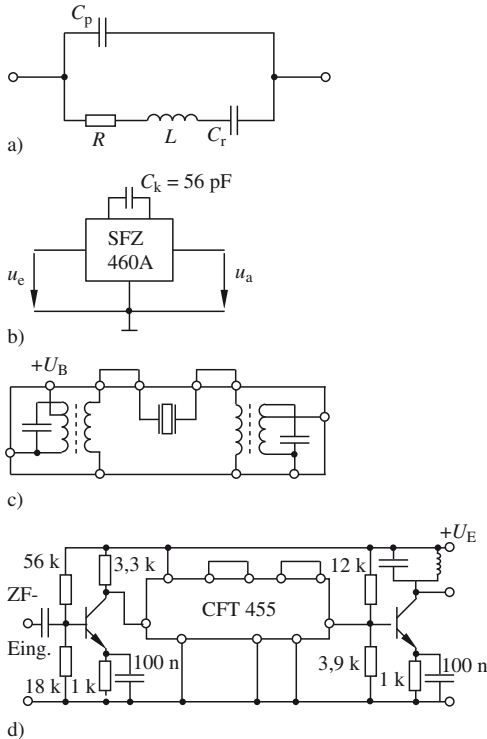


**Bild VI-7** Quarzfilter, keramische Filter

- Ersatzschaltbild eines Quarzes
- Quarzfilter (Fa. Stettner)
- Keramikfilter, Innenaufbau (Fa. Murata)
- Schaltungsauszug mit Filter nach c)

Die Bandbreite von  $4,5 \text{ kHz}$  eignet sich für einseitenbandmodulierte Trägerschwingungen mit einer Nutzsinalbandbreite von  $4,5 \text{ kHz}$  oder für zweiseitenbandmodulierte Trägerschwingungen mit einer dann für Sprachübertragung ausreichenden Signalbandbreite von  $2,25 \text{ kHz}$ . Die Bilder VI-7c und d zeigen die Innenschaltung des Keramikfilters vom Typ CFT 455 (Fa. Murata) und dessen Einsatz in einer elektronischen Schaltung. Die Anordnung der Anschlüsse ist in beiden Bildern gleich. Diese Filter sind z.B. mit 15 Resonatoren erhältlich (Typ CFS 455). Die Bandbreite kann ausgewählt werden, sie wird durch einen angehängten Buchstaben gekennzeichnet, z.B. CFT

$455 F$ ,  $F$  bedeutet  $8,4 \text{ kHz}$ . Die Zahl der Quarzresonatoren legt die Steilheit der Filterkurve außerhalb der Mittenfrequenz fest, während über die Koppelkondensatoren (Bild VI-7b, c) bzw. die Schwingkreise die Bandbreite eingestellt wird.

## 2.2 Digitale Filter

Die Theorie digitaler Filter würde den Rahmen dieses Buches sprengen, deshalb soll die prinzipielle Wirkungsweise nach Bild VI-8 am Beispiel eines Tiefpassfilters erläutert werden. Bild VI-8a stellt das Filter mit zugehöriger Peripherie dar. Das zu filternde Signal mit der Spannung  $u_e$  wird nach dem Durchgang durch ein Antialiasing-Filter zur Frequenzbandbegrenzung mit der Frequenz  $f_{ab}$  abgetastet und in eine digital kodierte Spannung  $u_1$  umgesetzt. Diese gelangt auf das digitale Filter, dessen Prinzip im Bild VI-8b gezeigt ist. Die Ausgangsspannung  $u_2$  des Filters wird wieder in einen Analogwert umgesetzt und bei Bedarf von eventuell vorhandenen, durch die Digital-Analog-Umsetzung hervorgerufenen höherfrequenten Signalanteilen, befreit und steht als  $u_a$  zur Verfügung.

Zur Erläuterung der Wirkungsweise des digitalen Filters nach Bild VI-8b soll die Spannung  $u_1$  für  $t < 0$  den Wert 0 haben und zum Zeitpunkt  $t = 0$  auf den Wert  $U_0$  springen. Sie gelangt auf eine Laufzeitkette mit den Einzelverzögerungszeiten  $\tau$ . Die Ausgangsspannung  $u_2$  wird durch Summation der Ausgangsspannungen der Verzögerungsglieder gebildet, nachdem diese noch mit den Faktoren  $a_n$  multipliziert worden sind. Für das Beispiel gilt:  $k = 0,5$ ;  $a_0 = k = 0,5$ ;  $a_1 = k^2 = 0,5^2 = 0,25$ ;  $a_2 = k^3 = 0,5^3 = 0,125$  usw.;  $u_1 = U_0 = 10 \text{ V}$ . Dann gilt für die Ausgangsspannung  $u_2$ :

$$t = 0 \dots \tau: u_{2,0} = a_0 \cdot u_1 = k \cdot u_1 = 0,5 \cdot u_1 = 5 \text{ V}$$

$$t = \tau \dots 2\tau: u_{2,\tau} = a_0 \cdot u_1 + a_1 \cdot u_1 = k \cdot u_1 + k^2 \cdot u_1 = 5 \text{ V} + 2,5 \text{ V} = 7,5 \text{ V}$$

$$t = 2\tau \dots 3\tau: u_{2,2\tau} = a_0 \cdot u_1 + a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_1 = k \cdot u_1 + k^2 \cdot u_1 + k^3 \cdot u_1 = 8,75 \text{ V}$$

$$t = 3\tau \dots 4\tau: u_{2,3\tau} = a_0 \cdot u_1 + a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_1 + a_3 \cdot u_1 = k \cdot u_1 + k^2 \cdot u_1 + k^3 \cdot u_1 + k^4 \cdot u_1 = 9,375 \text{ V}$$

In Bild VI-8c ist der Verlauf der Spannung  $u_2$  eingetragen. Sind theoretisch unendlich viele Verzögerungsglieder vorhanden, geht die Spannung  $u_2$  gegen

den Wert  $10 \text{ V}$ , wenn man die Formel  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$

verwendet. Der in Bild VI-8c gezeigte Verlauf der Ausgangsspannung ist der digital codierte Verlauf der Funktion  $u_2 = 10 \text{ V}(1 - \exp(-t/T))$ . Er entspricht damit der Sprungantwort eines Tiefpassfilters. Über die Verzögerungszeit  $\tau$  wird die Grenzfrequenz des Filters eingestellt. In der Praxis wird man den idealen Verlauf durch eine endliche Anzahl von Verzögerungsgliedern annähern.

Durch entsprechende Wahl der Koeffizienten  $a_0, a_1, a_2, \dots$  lassen sich verschiedene Filtercharakteristiken einstellen. Hierin liegt auch die große Bedeutung der digitalen Filter. Soll beispielsweise das soeben dargestellte Tiefpassfilter in ein Hochpassfilter umprogrammiert werden, sind die Koeffizienten  $a_0, a_1, a_2, \dots$  folgendermaßen einzustellen, wenn  $k = 0,5$  unverändert übernommen wird:  $a_0 = +k^0 = 1$ ;  $a_1 = -k^1 = -0,5$ ;  $a_2 = -k^2 = -0,5^2 = -0,25$ ;  $a_3 = -k^3 = -0,5^3 = -0,125$ ; usw. Damit ergibt sich für  $u_2$ :

$$t = 0 \dots \tau: u_{2,0} = a_0 \cdot u_1 = k \cdot u_1 = 1 \cdot u_1 = 10 \text{ V}$$

$$t = \tau \dots 2\tau: u_{2,\tau} = a_0 \cdot u_1 + a_1 \cdot u_1 \\ = 1 \cdot u_1 - k \cdot u_1 = 10 \text{ V} - 5 \text{ V} = 5 \text{ V}$$

$$t = 2\tau \dots 3\tau: u_{2,2\tau} = a_0 \cdot u_1 + a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_1 \\ = 1 \cdot u_1 - k \cdot u_1 - k^2 \cdot u_1 \\ = 10 \text{ V} - 5 \text{ V} - 2,5 \text{ V} = 2,5 \text{ V}$$

$$t = 3\tau \dots 4\tau: u_{2,3\tau} = a_0 \cdot u_1 + a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_1 + a_3 \cdot u_1 \\ = 1 \cdot u_1 - k \cdot u_1 - k^2 \cdot u_1 - k^3 \cdot u_1 \\ = 1,25 \text{ V}$$

Die Spannung  $u_2$  verläuft gemäß der Sprungantwort eines Hochpassfilters.

Die Operationen ‚Multiplizieren‘ und ‚Summieren‘ der Digitalwerte nach Bild VI-8b geschehen in einem

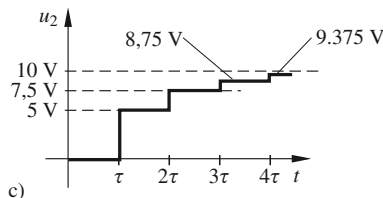
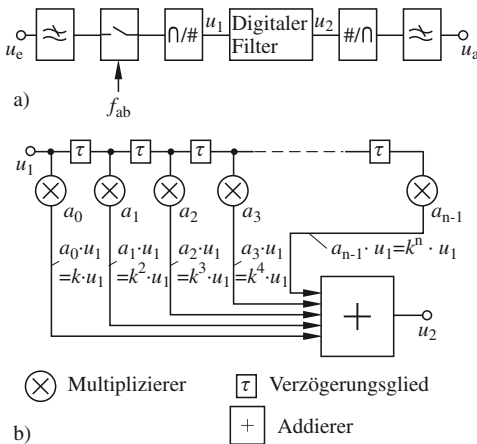


**Bild VI-8** Prinzip digitaler Filter am Beispiel eines Tiefpasses

- Filter mit Peripherie
- Digitales Tiefpassfilter, nichtrekursiv
- Verlauf der Ausgangsspannung

Rechner, bei dem man durch entsprechende Programmierung die Filtercharakteristik wählen bzw. ändern kann. Außerdem sind die Filtereigenschaften nicht von Bauteiltoleranzen bzw. -änderungen abhängig. Für die Nachrichtentechnik sind diese Filter nur begrenzt verwendbar, weil bei hohen Signalfrequenzen die erforderliche Anzahl von Rechenoperationen zeitlich nicht mehr durchführbar ist.

Folgende zwei Arten von Filtern werden unterschieden:

- **Nichtrekursive Filter:** Die Ausgangsspannung  $u_2$  wird *nicht* auf das Filter zurückgeführt.
- **Rekursive Filter:** Die Ausgangsspannung  $u_2$  gelangt auf eine zweite Laufzeitkette, deren Ausgangsspannungen auf unterschiedliche Punkte innerhalb des Filters zurückgeführt werden. Auf diese Weise lassen sich sehr komplexe Filterfunktionen erreichen.

## 2.3 Filter mit geschalteten Kondensatoren, SC-Filter

Das Prinzip dieser Filter (engl. *switched capacitor filter*) ist in Bild VI-9a dargestellt.

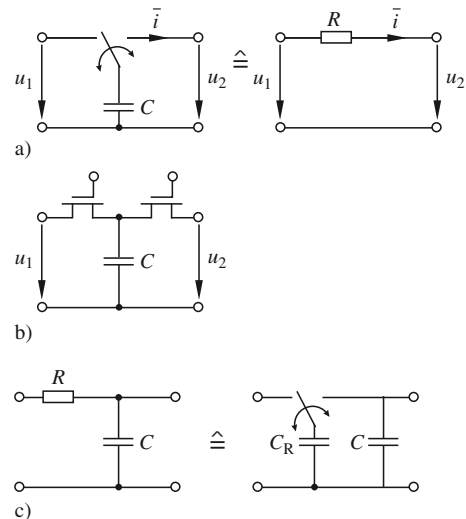


**Bild VI-9** Filter mit geschalteten Kapazitäten (SC-Filter)

- Darstellung eines Widerstandes R
- Realisierung in CMOS-Technologie
- Tiefpass erster Ordnung

Der Schalter schaltet periodisch zwischen den beiden Stellungen hin- und her mit einer Frequenz  $f$  ( $f = 1/T$ ), die wesentlich größer ist als die höchste Signalfrequenz der Spannung  $u_1$ . Auf dem Kondensator entstehen Ladungsänderungen  $\Delta Q = C(u_1 - u_2)$ , die einen mittleren Strom  $\bar{i} = \Delta Q/T = C(u_1 - u_2)/T$  vom Eingang zum Ausgang zur Folge haben. Dieser Strom entspricht einem Widerstand  $R$  der Größe  $R =$

**Tabelle VI-4** Auswahl industriell gefertigter SC-Filter

| Typ      | Hersteller | Filtertyp                          | Ordnung          | Taktfrequenz      |
|----------|------------|------------------------------------|------------------|-------------------|
| MAX 262  | Maxim      | Universalfilter                    | 2 · 2ter Ordnung | 40 Hz ... 4 MHz   |
| MF 10    | National   | Universalfilter                    | 2 · 2ter Ordnung | 10 Hz ... 1 MHz   |
| CS 7008  | Crystal    | Universalfilter                    | 8ter Ordnung     | max. 1 MHz        |
| XR 1003  | Exar       | Bessel-Tiefpass                    | 4ter Ordnung     | 100 Hz ... 1 MHz  |
| MF 6     | National   | Butterworth-Tiefpass               | 6ter Ordnung     | max. 250 kHz      |
| TSG 8532 | Thomson    | Tschebyscheff-Hochpass             | 6ter Ordnung     | 5 kHz ... 1,8 MHz |
| MF 8     | National   | Tschebyscheff/Butterworth-Bandpass | 2 · 4ter Ordnung | 100 Hz ... 20 kHz |
| RM 5614  | Reticon    | Tschebyscheff-Bandpass             | 6ter Ordnung     | 60 Hz ... 1 MHz   |
| LMF 90   | National   | Cauer-Bandsperre                   | 4ter Ordnung     | 10 Hz ... 3 MHz   |

$(u_1 - u_2)/\dot{i} = T/C$ . Bei einem vorgegebenen Kondensator  $C$  kann der Wert von  $R$  also über die Periodendauer  $T$  eingestellt werden. Schaltungstechnisch realisiert werden diese Filter in Form von Integrierten CMOS-Schaltungen, die aus Schaltertransistoren, Verstärkern und Kapazitäten bestehen (Bild VI-9b). Bild VI-9c zeigt die Realisierung eines Tiefpassfilters erster Ordnung. Der Widerstand  $R$  wird durch den geschalteten Kondensator  $C_R$  dargestellt. Die Zeitkonstante ergibt sich damit zu:  $\tau = C \cdot R = C \cdot T/C_R$ . Daraus folgen zwei Vorteile dieser Filter:

1. Die Zeitkonstante hängt vom Kapazitätsverhältnis ab, nicht von den Einzelwerten.
2. Die Zeitkonstante kann über die Periodendauer  $T$  des Taktes eingestellt werden. Tabelle VI-4 gibt eine kleine Auswahl von industriell gefertigten Filtertypen. Aus der Taktfrequenz erhält man für Tiefpassfilter eine Größenordnung für die Grenzfrequenz, wenn man sie durch 100 teilt.

### 3 Allgemeiner Filterentwurf

Die Anforderungen an die Eigenschaften von Filterschaltungen werden wesentlich von der Anwendung bestimmt, sodass die im Kapitel 1 beschriebenen passiven R-C-Filter, bei denen die Widerstandswerte und die Kapazitätswerte jeweils gleich sind, nicht immer die optimale Lösung darstellen. Die Betrachtungen werden auch auf nichtsinusförmige periodische und einmalige Signale ausgedehnt. Deshalb folgt ein erster Überblick über die Grundlagen der Filterentwurfstheorie.

#### 3.1 Allgemeine Eigenschaften und Entwurfskriterien

Für den Einsatz von Filterschaltungen gibt es vielfältige Anwendungen. Die Auswahl einer geeigneten Filterschaltung und deren Dimensionierung sind aber relativ aufwändig, weil sie eingehende Kenntnisse der Filtertheorie und praktische Erfahrung erfordern. Deshalb sollen hier nur einige prinzipielle Überlegungen bei der Auswahl einer Filterschaltung dargestellt werden, und zwar bevorzugt am Beispiel von

Tiefpassfiltern. Daneben gibt es noch Hochpassfilter, Bandpassfilter und Bandsperren (Kurzform: Tiefpass, Hochpass, Bandpass, Bandsperre). Auch wenn es für den Anwender u.U. ungewohnt ist, sollte er den Einsatz von Filter-Entwurfsschaltungen und Simulationsschaltungen in Erwägung ziehen. DIE optimale Filterschaltung gibt es in der Regel nicht, vielmehr muss aus dem Spektrum der möglichen Filterrealisierungen der für den speziellen Anwendungsfall geeignete Kompromiss ausgesucht werden.

Es gibt folgende Unterteilung:

1. Passive Filter: Sie bestehen aus Kondensatoren, Spulen und ohmschen Widerständen.
2. Aktive Filter: Sie setzen Operationsverstärker, Kondensatoren und ohmsche Widerstände ein. Spulen finden Verwendung, wenn die reale Spule ( $R$  und  $L$  in Reihe) ohne Eisenkern eingesetzt wird. Aktive Filter haben den Vorteil, dass sie mit weniger Bauteileaufwand die gleichen Ergebnisse erreichen wie passive Filter, allerdings müssen die Bauteilewerte je nach Schaltung ev. mit (deutlich) weniger als  $\pm 1\%$  Abweichung vom errechneten Wert eingesetzt werden. Das liegt zum Teil daran, dass eine bestimmte Filtereigenschaft um so optimaler wird, je mehr man sich durch die Dimensionierung der Bauteile einer Nullstelle im Nennerpolynom des Frequenzganges oder einem kritischen Phasenwinkel des Phasenganges nähert. Ein Erreichen der kritischen Werte führt häufig zur Instabilität des Filters und zum Schwingen.

Die Betrachtungen erfolgen sowohl in der Zeit- als auch in der Frequenzebene. Das gegebene Signal, das periodisch oder einmalig sein kann, ist nach Fourier zusammengesetzt aus sinusförmigen Signalen, deren Frequenzen, Amplituden und Phasenverschiebungen berechnet werden können. Es treten folgende Probleme auf:

1. Häufig überstreichen die im gegebenen Signal enthaltenen Signalfrequenzen einen Bereich, der nicht zur Verfügung gestellt werden kann oder muss. Beispiele: Bei der Fernsehbild-Übertragung steht jedem Sender nur ein begrenzter Frequenzbereich zur Verfügung; bei der Rundfunkübertra-



gung können ev. Frequenzanteile oberhalb des Hörbereiches des menschlichen Ohres unterdrückt werden. Anwendung: Tiefpassfilter.

2. Im gegebenen Signal sind unerwünschte Frequenzanteile enthalten. Beispiele: a) 50-Hz-Netzstörungen in Niederfrequenzverstärkern; b) Frequenzanteile oberhalb der halben Abtastfrequenz bei der Digitalisierung von Analogsignalen (Aliasing-Effekt). Anwendung: Tiefpassfilter, Bandsperrfilter.
3. Aus einem gegebenen Signal sollen bestimmte charakteristische Frequenzanteile herausgefiltert und weiterverarbeitet werden. Beispiel: Schadenfrüherkennung in Kugellagern durch Änderung des Lagergeräusches bei der Beschädigung von Kugeln. Anwendung: Bandpassfilter.
4. In der Unterhaltungselektronik gibt es Niederfrequenzverstärker, bei denen die tiefen Töne oder die hohen Töne oder aber bestimmte Tonbereiche innerhalb des Hörbereiches abgeschwächt oder bevorzugt werden können. Anwendung: Tiefpass-, Hochpass-, Bandpassfilter und Bandsperrfilter.
5. In der Regelungstechnik sollen häufig Änderungen einer Größe möglichst unverzögert und signalgetreu erkannt werden, während ein stationärer Zustand weniger interessant ist. Anwendung: Hochpassfilter (D-Regler, siehe Regelungstechnik).

In der Praxis hat sich gezeigt, dass die Begriffe Tiefpass, Hochpass, Bandpass und Bandsperrfilter für die Anwendung zu wenig aussagekräftig sind. Vielmehr sind die folgenden Filtereigenschaften, die für alle Filtertypen gleichsam gelten, für den Anwender häufig von wesentlich größerer Aussagekraft:

1. **Übertragungsfunktion, Amplitudenfrequenzgang.** Angegeben wird das Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangsamplitude in Abhängigkeit von der Frequenz. In der Regel bezieht man sich bei den Amplituden auf Spannungen. Zwei Ausdrücke sind von Bedeutung:

$$\text{Übertragungsfunktion: } \frac{U_a(s)}{U_e(s)} *; \quad (\text{VI.15})$$

$$\text{Frequenzgang: } \frac{U_{\text{aus}}}{U_{\text{ein}}} \quad \text{oder} \quad \frac{U_a}{U_e} *$$

(beides wird verwendet); (VI.16a)

$$\text{Amplitudenfrequenzgang: } \left| \frac{U_{\text{aus}}}{U_{\text{ein}}} \right| \quad \text{oder} \quad \left| \frac{U_a}{U_e} \right| *$$

(beides wird verwendet). (VI.16b)

$U_{\text{ein}}, U_e$  Eingangsspannung,  $U_{\text{aus}}, U_a$  Ausgangsspannung  $\rightarrow$  komplexe Ebene;

$U_e(s)$  Eingangsspannung,  $U_a(s)$  Ausgangsspannung  $\rightarrow$  Laplace-Ebene (s-Ebene)

\*) Hinweis: In der Literatur werden diese Begriffe ev. abweichend verwendet.

Der Amplitudenfrequenzgang wird häufig im Bode-Diagramm dargestellt, in dem beide Achsen logarithmisch geteilt sind: Die Frequenzachse dekadisch, die Achse für das Spannungsverhältnis ebenfalls dekadisch, aber mit einer dB-Skalierung, was dann eine lineare Skalenteilung ergibt.

Beim Tiefpass wird z.B. häufig angestrebt, dass alle Frequenzanteile unterhalb der Grenzfrequenz mit dem gleichen Faktor multipliziert am Ausgang erscheinen. Oberhalb der Grenzfrequenz soll dieser Wert möglichst klein sein. Zu beachten ist, dass in jedem Fall eine Frequenzabhängigkeit des Frequenzganges eine Signalverfälschung zwischen Eingangssignal und Ausgangssignal zur Folge hat, erklärbar mit der Fouriersynthese von Eingangs- und Ausgangssignal.

2. **Signallaufzeit.** Das Ausgangssignal ist gegenüber dem Eingangssignal zeitlich verzögert, hervorgerufen durch das Nacheilen der Spannung gegenüber dem Strom beim Kondensator bzw. umgekehrt bei der Spule. Dies kann zu Problemen führen, wenn z.B. bei Fernsehaufnahmen Bild- und Tonsignal diverse unterschiedliche Filter durchlaufen, deren Laufzeiten unterschiedlich sind. Dann sind Bild- und Tonsignal nicht mehr lippen synchron. In Regelsystemen erhöht die Signallaufzeit die Ausregelzeit von Störgrößen. Außerdem können rückgekoppelte Systeme dadurch zum Schwingen angeregt werden.

3. **Gruppenlaufzeit.** Innerhalb des Durchlassbereiches kann es zu einer weiteren Signalverfälschung kommen, nämlich dann, wenn die Laufzeit der frequenzabhängigen Signalanteile vom Eingang zum Ausgang von der Frequenz abhängt. Ziel ist es, dass alle Frequenzanteile die gleiche Zeit zum Durchlaufen des Filters benötigen, denn nur dann setzen sie sich am Ausgang wieder zum Originalsignal zusammen (Fouriersynthese). Diese „Durchlaufzeit“ wird als Gruppenlaufzeit  $v_{gr}$  bezeichnet und lässt sich berechnen als Ableitung des Phasenwinkels  $\varphi$  des Frequenzganges nach der Kreisfrequenz:

$$v_{gr} = - \frac{d \left( \varphi \left( \frac{U_{\text{aus}}}{U_{\text{ein}}} \right) \right)}{d\omega} \quad (\text{VI.17})$$

Wünschenswert ist:

$$v_{gr} = \text{constant} \quad (\text{VI.18})$$

Hinweis: Die Ergebnisse einer Berechnung nach Gleichung (VI.17) sollten grafisch dargestellt und dann interpretiert werden, siehe dazu die Erläuterungen zu Bild VI-13.

4. **Abfall im Sperrbereich.** Der Filtergrad bestimmt im Wesentlichen diesen Abfall, siehe Erläuterungen zu Gleichung (VI.20) unten. Die Dimensionierung der Bauelemente hat Einfluss auf den Verlauf im Übergangsbereich vom Durchlass- in den Sperrbereich. Er nähert sich einem „Knick“, wenn man in Kauf nimmt, dass der Amplitudenfrequenzgang in-

nerhalb des Durchlassbereiches oder des Sperrbereiches eine Welligkeit aufweist und nahe der Grenzfrequenz Überschwinger auftritt, siehe dazu Cauer- und Tschebyscheff-Filter weiter unten.

**5. Optimierte Reaktion auf vorgegebene Eingangssignale.** Ein Filter kann z.B. daraufhin optimiert werden, dass Spannungssprünge am Eingang möglichst schnell den (nahezu) stationären Endwert am Ausgang erreichen, je nach Anwendung mit oder ohne Überschwinger.

**6. Wellenwiderstand.** Für Anwendungen, vor allem bei höheren Frequenzen, kann es erforderlich sein, dass das Filter einen vorgegebenen Wellenwiderstand besitzt, in Vorwärts- und Rückwärtsrichtung gleich oder unterschiedlich, siehe Kapitel II, Zweitore.

Für den Anwender werden einige der genannten Kriterien von besonderer Bedeutung sein, während andere in den Hintergrund treten. Im Kapitel „Tiefpassfilter“ weiter unten wird anschaulich gezeigt, dass es zur Realisierung eines Tiefpasses bei gegebener Grenzfrequenz „unendlich viele“ Möglichkeiten der Realisierung durch unterschiedliche Arten der Bauteildimensionierung gibt. Allerdings hängen die oben beschriebenen 6 Filtereigenschaften von dieser Dimensionierung ab. Theoretiker und Praktiker haben sich dieser Problematik angenommen und Bauteildimensionierungen für bestimmte Anwendungen optimiert: Butterworth, Bessel, Cauer und Tschebyscheff (in der Literatur auch Chebyshev), um nur einige zu nennen.

### 3.2 Tiefpassfilter

Der Frequenzgang eines passiven Tiefpassfilters als Kettenschaltung aus  $T$ - und  $\pi$ -Zweitoren mit den Elementen  $R$ ,  $L$  und  $C$  kann durch geeignete Umformungen auf die folgende Form gebracht werden:

$$\frac{\underline{U}_{\text{aus}}}{\underline{U}_{\text{ein}}} = \frac{a_0}{\left[ 1 + a_1 \cdot j \cdot \omega - a_2 \cdot \omega^2 - a_3 \cdot j \cdot \omega^3 \right] + a_4 \cdot \omega^4 + a_5 \cdot j \cdot \omega^5 - + \dots} \quad (\text{VI.19})$$

Darin ist  $a_0$  die sog. „Gleichspannungsverstärkung“. Sie ist bei passiven  $R$ - $L$ - $C$ -Filtern  $\leq 1$ , bei aktiven  $R$ - $L$ - $C$ -Filtern liegt sie häufig im Bereich von 1/10 bis 100. Der Grad des Filters ist gleich dem höchsten Exponenten von  $\omega$ . Für steigende Frequenzen oberhalb der Grenzkreisfrequenz  $\omega_g$  bestimmt dieser Ausdruck zunehmend das Verhalten des Filters und damit auch die Unterdrückung von Frequenzen oberhalb von  $\omega_g$ :

$$\left. \frac{\underline{U}_{\text{aus}}}{\underline{U}_{\text{ein}}} \right|_{\omega \gg \omega_g} \approx \frac{a_0}{a_k \cdot j^k \cdot \omega^k} \quad \text{bzw.} \quad \left| \frac{\underline{U}_{\text{aus}}}{\underline{U}_{\text{ein}}} \right|_{\omega \gg \omega_g} \approx \frac{a_0}{a_k \cdot \omega^k} \quad (\text{VI.20})$$

$k$  Grad des Filters,  $a_0$  Gleichspannungsverstärkung

Bei Verzehnfachung der Frequenz sinkt der Betrag des Ausdruckes auf  $1/(10^k)$ , und die Steigung der Geraden im Bode-Diagramm beträgt, unabhängig von der Frequenz,  $-k \cdot 20$  dB/Dekade. Je höher der Grad des Filters ist, desto wirkungsvoller werden die Frequenzen oberhalb  $\omega_g$  unterdrückt. Die Konstanten  $a_1, a_2, a_3, \dots$  in Gleichung (VI.19) sind dimensionsbehaftete Kombinationen der verwendeten Bauelemente  $R_1, R_2, \dots, L_1, L_2, \dots, C_1, C_2, \dots$ . Sie sind positiv bei passiven  $R$ - $L$ - $C$ -Filtern. Bei aktiven  $R$ - $L$ - $C$ -Filtern können sie auch negativ sein, was bei entsprechender Dimensionierung Nullstellen in der positiven komplexen Ebene zur Folge hat und damit eine Schwingneigung des Filters gegeben ist. Es lässt sich zeigen, dass eine gegebene Filterschaltung genau *eine* Übertragungsfunktion (*einen* Frequenzgang) hat, dass aber eine gegebene Übertragungsfunktion (Frequenzgang) durch „unendlich viele“ Filterschaltungen realisiert werden kann. Daraus folgt, dass es für die Lösung von Filterschaltungen allgemein und damit auch von den hier betrachteten Tiefpassfiltern „unendlich viele“ Möglichkeiten der Realisierung gibt. Anschaulich lässt sich das dadurch erklären, dass sich z. B. bei einem passiven  $R$ - $C$ -Tiefpass zweiter Ordnung, gebildet aus 2 Widerständen  $R_1, R_2$  und 2 Kondensatoren  $C_1, C_2$ , der Frequenzgang

$$\frac{\underline{U}_{\text{aus}}}{\underline{U}_{\text{ein}}} = \frac{1}{\left[ 1 + j \cdot \omega \cdot \underbrace{(R_1 \cdot C_1 + R_1 \cdot C_2 + R_2 \cdot C_2)}_{a_1} - \omega^2 \cdot \underbrace{(R_1 \cdot C_1 \cdot R_2 \cdot C_2)}_{a_2} \right]} \quad (\text{VI.21})$$

ergibt. Die Grenzkreisfrequenz  $\omega_g$  wird durch den

$$\text{Ausdruck } \frac{1}{a_2} = \frac{1}{R_1 \cdot C_1 \cdot R_2 \cdot C_2} = \omega_g^2, \text{ also das Produkt}$$

aller 4 Bauelemente, bestimmt; das Verhalten innerhalb des Durchlassbereiches wesentlich durch den Ausdruck  $a_1$ . Damit stehen zur Berechnung der 2 Größen  $a_1$  und  $a_2$  mehr als 2 Variablen zur Verfügung. Dies gilt, verallgemeinert, für Filterschaltungen beliebiger Ordnung. Beim Entwurf eines Filters wählt man die Bauelemente zahlenmäßig so, dass die gewünschten Kriterien mehr oder weniger gut erfüllt werden. Häufig gilt, dass mit steigendem Filtergrad auch gewisse Eigenschaften optimaler werden. Allerdings muss beachtet werden, dass die Bauteildimensionierung in immer engeren Grenzen verläuft, weil man sich ev. in der Nähe von kritischen Punkten der Übertragungsfunktion (des Frequenzganges) befindet (z.B. Nullstelle des Nennerpolynoms, kritischer Phasenwinkel).

Beim Filterentwurf haben sich ausgewählte Dimensionierungen für bestimmte Anwendungen als besonders vorteilhaft erwiesen. Sie sind meist nach der Person benannt, die sie erstmalig eingesetzt hat. Tabelle VI-5 zeigt einige Beispiele.

**Tabelle VI-5** Eigenschaften häufig eingesetzter Filtertypen (Auswahl)

| Name des Filters                                                         | Eigenschaften Tiefpassfilter<br>Diese Eigenschaften sind sinngemäß auf Hochpass, Bandpass und Bandsperre übertragbar.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|--------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Bessel-Filter                                                            | Konstante Gruppenlaufzeit. Die Signalform wird nicht geändert, sofern man nur die Frequenzanteile im Durchlassbereich berücksichtigt.<br>Übergang in den Sperrbereich gleitend (nicht scharf abgeknickt).<br>Nur geringes Überschwingen bei der Sprungantwort.                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| Butterworth-Filter                                                       | Amplitudenfrequenzgang nahezu konstant im Durchlassbereich.<br>Relativ scharfes Abknicken des Amplitudenfrequenzganges bei der Grenzfrequenz (relativ abrupter Übergang vom waagerechten Verlauf in die Gerade mit der Steigung $-n \cdot (20 \text{ dB/Dek})$ ), nimmt zu mit wachsendem Filtergrad.<br>Starkes Überschwingen bei der Sprungantwort, nimmt zu mit wachsendem Filtergrad.                                                                                                                                                                           |
| Cauer-Filter<br>oder elliptisches Filter                                 | Optimiert auf sehr scharfes Abknicken des Amplitudenfrequenzganges bei der Grenzfrequenz (sehr abrupter Übergang vom waagerechten Verlauf in die Gerade mit der Steigung $-n \cdot (20 \text{ dB/Dek})$ ).<br>Der Amplitudenfrequenzgang besitzt sowohl im Durchlass- als auch im Sperrbereich eine ausgeprägte Welligkeit (oszillierendes Verhalten).<br>Durch ausgeprägte Phasenverzerrungen und damit verbunden große Gruppenlaufzeitänderungen treten starke Signalverzerrungen auf.                                                                            |
| Tschebyscheff-Filter<br>Typ 1<br>Typ 2 (auch inverses<br>Filter genannt) | Optimiert auf relativ scharfes Abknicken des Amplitudenfrequenzganges bei der Grenzfrequenz. Abknicken um so abrupter, je größer der Filtergrad.<br>Dadurch bedingt tritt Welligkeit (oszillierendes Verhalten) entweder im Durchlassbereich (Typ 1) oder im Sperrbereich (Typ 2) auf. Geht die Welligkeit durch entsprechende Dimensionierung gegen Null, geht dieses Filter in das Butterworth-Filter über.<br>Starkes Überschwingen bei der Sprungantwort, nimmt zu mit zunehmendem Filtergrad.<br>Keine konstante Gruppenlaufzeit und damit Signalverzerrungen. |

In den Bildern VI-10 bis VI-15 sind die in Tabelle VI-5 aufgeführten Filtertypen in ihrem Verhalten in Abhängigkeit von der Frequenz gezeigt. Es handelt sich um passive R-L-C-Tiefpass-Filter fünften Grades mit einer sinusförmigen Eingangsspannung  $|\underline{U}_e| = 10 \text{ V}$ . Der Wellenwiderstand beträgt eingangsseitig (Vorwärtsrichtung) und ausgangsseitig (Rückwärtsrichtung) jeweils  $50 \text{ }\Omega$ .

Bild VI-10 zeigt das Schaltbild mit der Dimensionierung der Bauteile.

Bild VI-11 stellt die Ausgangsspannungen  $|\underline{U}_a|$  der 4 Filter dar. Die in der Tabelle VI-5 aufgeführten Eigenschaften sind anschaulich nachvollziehbar. Die Gruppenlaufzeiten  $v_{gr}$  der Filter nach Bild VI-10 zeigen Bild VI-12 und Bild VI-13.

Im Bild VI-13 wurde die Skalierung gegenüber der im Bild VI-12 geändert. Bei der Darstellung der Gruppenlaufzeit des Cauer-Filters in Bild VI-13 zeigt sich eine gewisse Problematik bei der Auswertung der Gleichung VI.17. Das Ergebnis ist die (Lauf-) Zeit, die sich aus dem Phasenwinkel zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung bei bekannter Periodendauer und sinusförmigem Signal bestimmen lässt. Aber es wird nicht die Periodizität des Phasenwinkels

von  $2 \cdot \pi$  berücksichtigt. Gemäß Formel werden nur die *Änderungen* erfasst, was zu positiven (Zunahme des Phasenwinkels) und negativen (Abnahme des Phasenwinkels) Laufzeitwerten führt. Man kann die Laufzeit je nach Sichtweise durchaus positiv oder negativ interpretieren, aber beide Vorzeichen zusammen in einem Bild sind physikalisch schwierig zu interpretieren, denn dann eilt die Ausgangsspannung in einigen Bereichen der Eingangsspannung voraus. Die weiter unten genannten Simulationsprogramme stellen deshalb z.B. folgendes dar:

$$v_{gr} = - \frac{d \left( \varphi \left( \frac{\underline{U}_{aus}}{\underline{U}_{ein}} \right) \right)}{d\omega} \quad \text{bei „PSpice“ oder}$$
$$v_{gr} = \left| \frac{d \left( \varphi \left( \frac{\underline{U}_{aus}}{\underline{U}_{ein}} \right) \right)}{d\omega} \right| \quad \text{bei „AADE Filter Design“}$$

Es ist gegebenenfalls sinnvoll, sich zusätzlich zur Gruppenlaufzeit den Verlauf des Phasenwinkels,  $\varphi(\underline{U}_{aus}/\underline{U}_{ein})$ , anzuzeigen zu lassen.

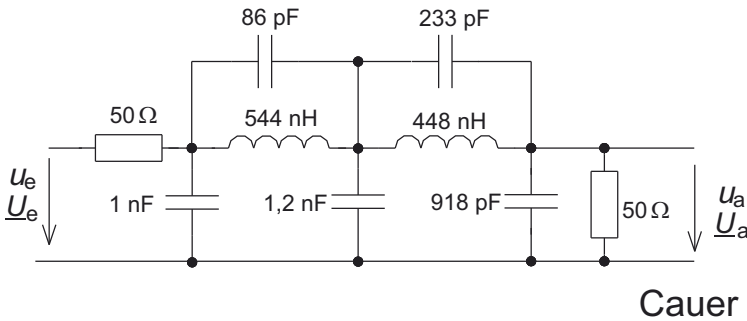
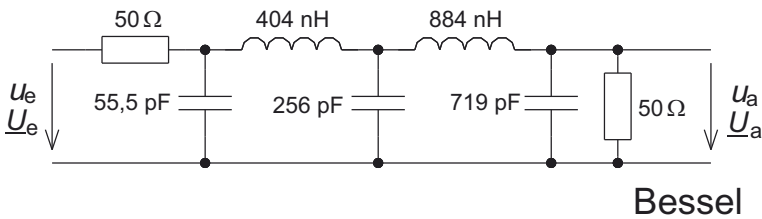
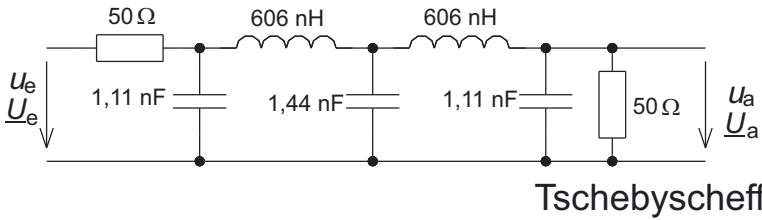
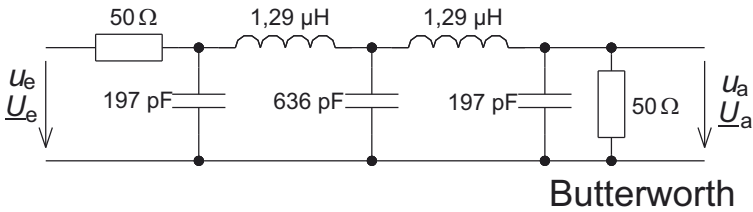


**Bild VI-10** Schaltbild Bessel-, Butterworth-, Cauer- und Tschebyscheff-Filter, weitere Einzelheiten siehe Text

Auch hier sind die in Tabelle VI-5 aufgeführten Eigenschaften anschaulich nachvollziehen.

Wenn Filter entworfen werden sollen, sind die eingangs angesprochenen Programme sehr hilfreich und führen schnell zum Ziel. Hier folgen dazu einige nähere Angaben. Über eine Internet-Recherche kann man weitere Programme finden, von denen es häufig Probe- oder Testversionen gibt, die man testen und dann entscheiden kann, welches Programm den persönlichen Ansprüchen und Vorstellungen entspricht. Ohne Anspruch auf Vollständigkeit und

Rechteverwertung seien hier 4 Beispiele genannt (alle Programme in englischer Sprache):

1. Simulationsprogramme für elektronische Schaltungen auf der Grundlage von Spice/PSpice:
  - 1.1 "OrCAD-Capture" über Fa. Cadence. Internetadresse: [www.flowcad.de](http://www.flowcad.de). Eine Studentenversion mit eingeschränktem Funktionsumfang ist kostenlos erhältlich, die uneingeschränkte Vollversion ist kostenpflichtig.

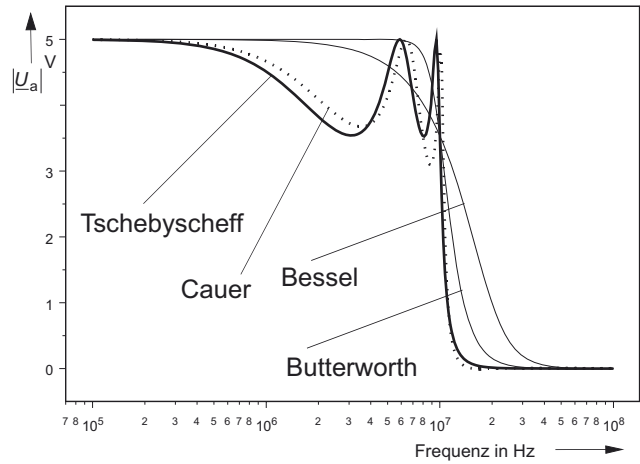


**Bild VI-11** Ausgangsspannungen der 4 Filter nach Bild VI-10

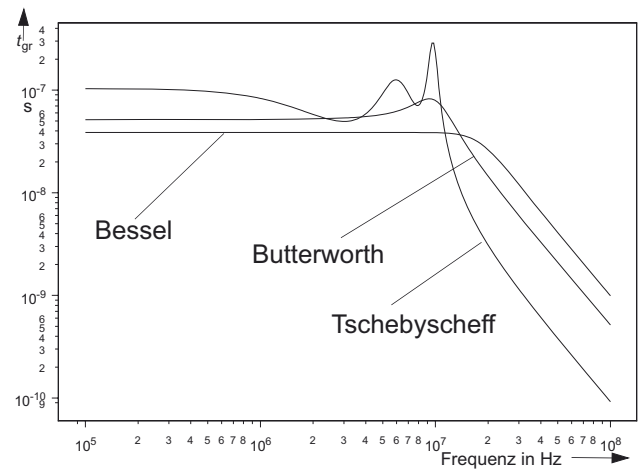


**Bild VI-12** Gruppenlaufzeit von Bessel-, Butterworth- und Tschebyscheff-Filter nach Bild VI-10

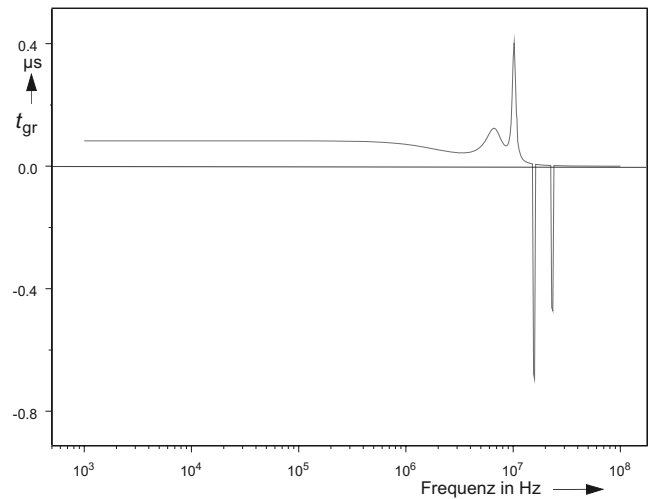


**Bild VI-13** Gruppenlaufzeit des Cauer-Filters nach Bild VI-10; Hinweise: Siehe Text

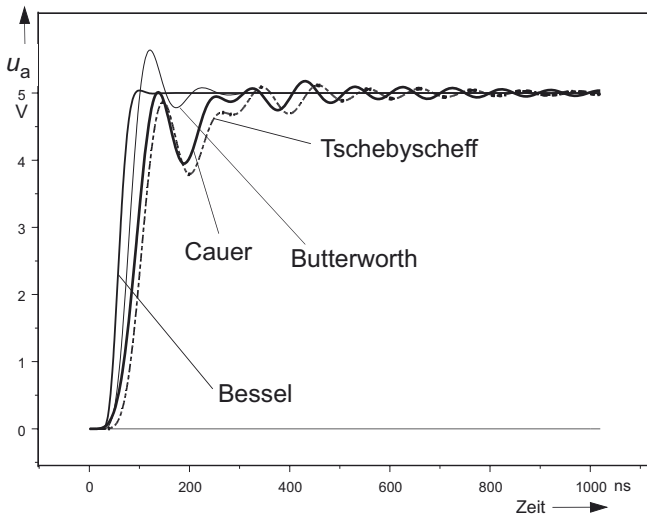


**Bild VI-14** Sprungantwort der 4 Filter nach Bild VI-10

1.2 „LTspice“ über Fa. Linear Technology. Internetadresse: [www.linear.com](http://www.linear.com). Die uneingeschränkte Vollversion ist kostenlos.

Hinweis: Beide Programme ähneln sich in der Bedienung und im Funktionsumfang, weil sie den gleichen Programmkern verwenden.

## 2. Filter-Entwurfsprogramme:

Beide Programme sind so angelegt, dass u. a. vorgewählt werden können:

Filterart (Tiefpass, Hochpass, Bandpass, Bandsperre), Filtergrad, Filtertyp (nach Tabelle VI-5 sowie noch weitere Filtertypen), Grenzfrequenz, Welligkeit und Wellenwiderstand. Gemäß diesen Vorgaben wird das Filter dimensioniert, es erscheint das Schaltbild mit den Bauteilwerten.

In Diagrammen lassen sich u. a. darstellen: Amplitudenfrequenzgang, Phasengang, Gruppenlaufzeit und Sprungantwort. Jedes Programm hat darüber hinaus noch spezielle Funktionen eingebaut.

2.1 „Filter Free“ über Fa. Nuhertz Technologies. Internetadresse: [www.nuhertz.com](http://www.nuhertz.com). Die eingeschränkte Testversion für Filter bis dritten Grades ist kostenlos, die uneingeschränkte Vollversion ist kostenpflichtig.

2.2 „AADE Filter Design“. Internetadresse: [www.aade.com](http://www.aade.com). Das Programm ist kostenlos.

## 3.3 Filtertransformationen

Sollen Hochpässe, Bandpässe oder Bandsperren entworfen werden, können die Ergebnisse der Tiefpässe auf diese Filter durch eine Frequenztransformation übertragen werden.

Im allgemeinen bestehen passive Filterschaltungen je nach Filtergrad aus mehreren Elementen  $L$  und  $C$  und nur zwei ohmschen Widerständen. Einer der ohmschen Widerstände ist ein Reihenwiderstand am Eingang des Filters, der andere ist ein Parallelwiderstand zu den beiden Ausgangsanschlüssen. Sie bilden

den eingangs- und ausgangsseitigen Wellenwiderstand (Wellenwiderstand in Vorwärts- und Rückwärtsrichtung, siehe Kapitel Zweitore) des Filters und sind meist gleich groß, z.B.  $50\ \Omega$ , siehe dazu Bild VI-10. Wegen des erhöhten Aufwandes bei der Filtertransformation sind hier nur einige Grundgedanken angegeben. Es sei auf die Anwendung von Filterentwurfsschaltungen hingewiesen.

### 3.3.1 Hochpassfilter

Der Ausdruck  $j\omega$  wird durch  $1/(j\omega)$  ersetzt. Das heißt in der Praxis:

1. Einen Kondensator durch eine Spule ersetzen.
2. Eine Spule durch einen Kondensator ersetzen.
3. Ein Widerstand bleibt als Widerstand erhalten. Sein Wert kann geändert werden.  
Die zwei Widerstände bleiben aber meist unverändert, weil sie den Wellenwiderstand vorgeben (siehe letzter Abschnitt oben).
4. Die Werte und Dimensionen bei den Bauelementen müssen angepasst werden.

In der Praxis heißt das:

Bei den Ersetzungen  $C \rightarrow L$  und  $L \rightarrow C$  bleibt der Zahlenwert erhalten, nur die Einheit wird angepasst:

$$C \rightarrow L: \underbrace{330}_{\text{u}} \underbrace{\text{nF}}_{\text{a}} \rightarrow \underbrace{330}_{\text{u}} \underbrace{\text{nH}}_{\text{a}};$$

$$L \rightarrow C: \underbrace{4,7}_{\text{u}} \underbrace{\mu\text{H}}_{\text{a}} \rightarrow \underbrace{4,7}_{\text{u}} \underbrace{\mu\text{F}}_{\text{a}} \quad (\text{VI.22})$$

u: unverändert, a: angepasst.

Damit ist die Transformation für den Fall der unveränderten Wellenwiderstände und gleichbleibender Grenzfrequenz abgeschlossen. Sollen zusätzlich die zwei oben erwähnten ohmschen Widerstände um den gleichen Faktor geändert werden, ist so vorzugehen: Um den neuen Widerstandswert zu erhalten, werden die alten Widerstandswerte mit dem Faktor  $A$  (posi-

tive beliebige Zahl) multipliziert. Anschließend müssen alle Kapazitätswerte mit dem Faktor  $1/A$  und alle Induktivitätswerte mit  $A$  multipliziert werden.

- Beispiel: Ein Tiefpass soll durch einen Hochpass ersetzt werden, und der Wellenwiderstand des Tiefpasses von  $600\ \Omega$  in Vorwärts- und Rückwärtsrichtung zu  $60\ \Omega$  im Hochpass geändert werden.

Daraus ergibt sich:  $(60\ \Omega)_{\text{neu}} = A \cdot ((600\ \Omega)_{\text{alt}}) \Rightarrow A = 1/10$ . Die Spulen werden durch Kondensatoren ersetzt und die Kondensatoren durch Spulen. Die Widerstände bleiben als Widerstände erhalten, ihr Wert ändert sich von  $600\ \Omega$  in den Wert  $A \cdot (600\ \Omega) = (1/10) \cdot (600\ \Omega) = 60\ \Omega$ . Ein Kondensator mit dem Wert  $500\ \text{nF}$  ginge dann in eine Spule mit dem Wert  $(1/A) \cdot (500\ \text{nF}) = (1/(1/10)) \cdot (500\ \text{nF}) = 10 \cdot (500\ \text{nF}) = 5\ \mu\text{F} \rightarrow 5\ \mu\text{H}$  und eine Spule mit dem Wert  $500\ \text{mH}$  in den Wert  $A \cdot (500\ \text{mH}) = (1/10) \cdot (500\ \text{mH}) = 50\ \text{mH} \rightarrow 50\ \text{mF}$  über.

### 3.3.2 Bandpassfilter

Ein Bandpassfilter entsteht, anschaulich und vereinfacht dargestellt, dadurch, dass die Übertragungsfunktion (der Frequenzgang) eines Tiefpassfilters mit linearer Achsenskalierung an der senkrechten Achse bei der Frequenz Null gespiegelt wird und der sich ergebende Verlauf um den Wert der Mittenfrequenz des Bandpassfilters nach rechts verschoben wird.

Damit sind folgende Transformationen vorzunehmen:

Ein Kondensator geht in einen Parallelschwingkreis über.

Eine Spule geht in einen Reihenschwingkreis über.

Enthält das Tiefpassfilter bereits Schwingkreise, sind die Einzelelemente getrennt zu transformieren:

Ein Parallelschwingkreis geht in einen Parallelschwingkreis (für  $C$ ) und dazu parallel einen Reihenschwingkreis (für  $L$ ) über.

Ein Reihenschwingkreis geht in einen Reihenschwingkreis (für  $L$ ) in Reihe zu einem Parallelschwingkreis (für  $C$ ) über.

Die Transformation gestaltet sich etwas aufwändig, so dass der Einsatz von Filterentwurfsprogrammen zu erwägen ist. Außerdem lassen sich dann die tatsächlichen Eigenschaften des Filters sehr schnell erfassen und gegebenenfalls korrigieren.

### 3.3.3 Bandsperre

Anschaulich erhält man diesen Filtertyp, indem die Übertragungsfunktion (der Frequenzgang) eines Hochpassfilters mit linearer Achsenskalierung an der senkrechten Achse bei der Frequenz Null gespiegelt wird und der sich ergebende Verlauf um den Wert der Mittenfrequenz der Bandsperre nach rechts verschoben wird.

Ein Kondensator geht in einen Reihenschwingkreis über.

Eine Spule geht in einen Parallelschwingkreis über.

Enthält das Tiefpassfilter bereits Schwingkreise, sind die Einzelelemente getrennt zu transformieren:

Ein Parallelschwingkreis geht in einen Parallelschwingkreis (für  $L$ ) und dazu parallel einen Reihenschwingkreis (für  $C$ ) über.

Ein Reihenschwingkreis geht in einen Reihenschwingkreis (für  $C$ ) in Reihe zu einem Parallelschwingkreis (für  $L$ ) über.

Auch hier gestaltet sich die Transformation etwas aufwändig, so dass der Einsatz von Filterentwurfsprogrammen zu empfehlen ist. Außerdem lassen sich die tatsächlichen Eigenschaften des Filters sehr schnell erfassen und gegebenenfalls korrigieren.

## 3.4 Besondere Filterschaltungen

### 3.4.1 Allpassfilter

Dieses Filter ist ein Sondertyp mit folgenden Eigenschaften:

1. Der Amplitudenfrequenzgang ist unabhängig von der Frequenz.
2. Der Phasenwinkel ist – bewusst – eine Funktion der Frequenz. Damit kann ein Allpass die Gruppenlaufzeit eines vorhandenen Filters wenigstens teilweise den Erfordernissen anpassen, z.B. nahezu frequenzunabhängig machen.
3. Dieses Filter kann zur Impedanztransformation eingesetzt werden. Durch entsprechende Dimensionierung lässt sich neben einer ev. erforderlichen Gruppenlaufzeitkorrektur z.B. auch noch der Wellenwiderstand in Vorwärts- und Rückwärtsrichtung der gegebenen Schaltung anpassen.

Auch hier führt der Einsatz von Filterentwurfsprogrammen einschließlich der Simulation der Ergebnisse schnell zu dem gewünschten Ergebnis.

### 3.4.2 Sallen-Key-Filter

Es handelt sich um aktive Filterschaltungen, bei denen Operationsverstärker, Widerstände und Kondensatoren eingesetzt werden. Verglichen mit den passiven Filterschaltungen ist bei den Sallen-Key-Filtern ein geringerer Bauteilaufwand erforderlich, weil die Verstärker auch mit positiver Rückkopplung betrieben werden. Sie sind i.a. gegenüber Bauteiletoleranzen relativ unempfindlich. Allerdings können keine Bandsperren realisiert werden, und hohe Gütefaktoren sind auch nicht erreichbar. Wegen der relativ konstanten Gruppenlaufzeit und dem relativ abrupten Übergang vom Durchlass- in den Sperrbereich werden sie häufig als Antialiasingfilter vor einem Analog-Digital-Umsetzer eingebaut.



## VII Empfängerschaltungstechnik

### 1 Geradeausempfänger

Beim Empfang eines Sendersignals und damit einer bestimmten Information müssen alle anderen Sendersignale wirkungsvoll unterdrückt werden, wobei die Möglichkeit bestehen muss, aus der Vielzahl der angebotenen Informationen (Sender) eine bestimmte auszuwählen. Damit muss aus dem angebotenen Frequenzspektrum ein bestimmtes Frequenzband ausgewählt und der Rest wirkungsvoll unterdrückt werden. Zur Selektion werden mehrere Hochfrequenzstufen (HF-Stufen) eingesetzt, von denen jede einen Verstärker und einen Schwingkreis verwendet (siehe dazu auch Kapitel VI.2.4 und Beispiel VI.3). Damit entsteht das in Bild VII-1a gezeigte Prinzip eines *Geradeausempfängers*. Die Resonanzfrequenz aller Schwingkreise ist gleich der gewünschten Senderfrequenz  $f_e$ . Um verschiedene Sender empfangen zu können, müssen die Resonanzfrequenzen einstellbar und stets genau gleich sein. Diese Schaltungstechnik hat folgende Nachteile:

1. Bei der heutigen Senderdichte sind 5 bis 10 Schwingkreise für einen einigermaßen störungsfreien Empfang erforderlich. Das exakte Einstellen dieser Schwingkreise auf genau die gleiche Resonanzfrequenz, wenn sich diese außerdem noch in einem weiten Bereich ändert (z.B. UKW-Rundfunk: 87 MHz bis 108 MHz), ist nicht mehr möglich.

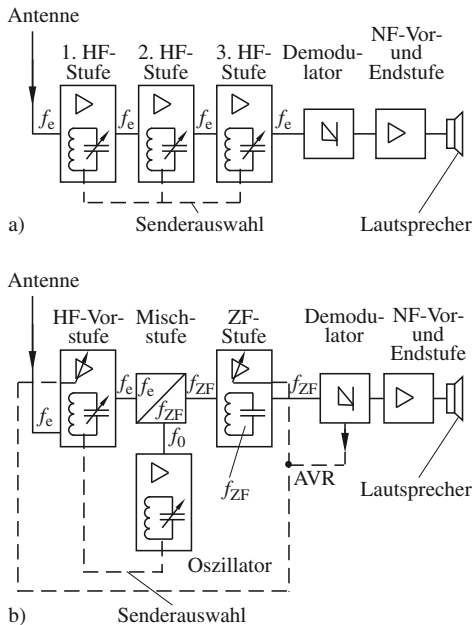


**Bild VII-1** Schaltungsprinzipien von Empfängern

- Geradeausempfänger
- Überlagerungsempfänger

2. Die resultierende Bandbreite ändert sich mit der Senderfrequenz ( $B = f_e/Q_p = f_e/(R_p \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_e \cdot C) = f/(1/C)$ , Tabelle VI-3). Sie kann deshalb nicht optimal über den gesamten Frequenzbereich eingestellt werden.
3. Beim Fernsehempfang müssten die Schwingkreise in ihrer Resonanzfrequenz außerdem noch so gegeneinander versetzt werden, dass eine Bandbreite von einigen MHz mit konstantem Betrag der Übertragungsfunktion und mit steil abfallenden Flanken an den Rändern erreicht wird. Das ist technisch nicht zu verwirklichen.

### 2 Überlagerungsempfänger

Man hat deshalb das Konzept des *Überlagerungsempfängers* nach Bild VII-1b entwickelt. Empfangen werden soll ein Sender mit der Frequenz  $f_e$ . Das von der Antenne kommende Signal wird in einer Hochfrequenz-(HF-)Vorstufe verstärkt, deren Schwingkreis auf die Resonanzfrequenz  $f_e$  eingestellt wird. Zusammen mit dieser Einstellung wird die Frequenz  $f_o$  eines Oszillators so verändert, dass die in der Mischstufe gebildete Differenzfrequenz  $f_o - f_e$  für alle möglichen Frequenzen  $f_e$  konstant ist:  $f_o - f_e = \text{konst.} = f_{ZF}$ . Diese konstante Frequenz heißt *Zwischenfrequenz (ZF)*. Ihr Wert ist ca. 460 kHz beim Empfang auf Lang-, Mittel- und Kurzwelle, 10,7 MHz beim UKW-Rundfunkempfang und u.a. etwa 30 MHz beim Fernsehempfang. Die Zwischenfrequenz wird in einem ZF-Verstärker, der aus mehreren Transistor-Verstärkerstufen und aus mehr als 10 Schwingkreisen bestehen kann, verstärkt. Da es sich um eine konstante Frequenz handelt, werden die Schwingkreise bei der Fertigung auf die erforderliche Zwischenfrequenz abgeglichen. Auch spezielle Filterkurven lassen sich einstellen. Beim Überlagerungsempfänger müssen also nur zwei Schwingkreise aufeinander abgestimmt werden, was technisch möglich und praktisch nur näherungsweise erforderlich ist. Es lässt sich nämlich zeigen, dass die Eigenschaften des Empfängers nicht wesentlich schlechter werden, wenn diese Abstimmung nur angenähert erreicht wird. Beim Empfang von frequenzmodulierten Sendern wird die Verstärkung der ZF-Stufe so groß gewählt, dass eine Amplitudenbegrenzung eintritt und damit eine zusätzliche Störunterdrückung erreicht wird (siehe auch Kapitel V.2.4.5, Winkelmodulation).

Das Prinzip des Überlagerungsempfängers ist noch erweitert worden zum Mehrfach-Überlagerungsempfänger. Dabei wird die erste Zwischenfrequenz  $f_{ZF1}$  mit einem zweiten Oszillator auf eine zweite niedrigere Zwischenfrequenz  $f_{ZF2}$  umgesetzt. Die niedrigere Zwischenfrequenz erlaubt schmalbandige Filter hoher Güte, was mit einem direkten Übergang  $f_e - f_{o2} = f_{ZF2}$  nicht möglich ist ( $B = f_o/Q$ , siehe VI Filter, 1.2.4 R-L-C-Bandpass und -Bandsperr).

### 3 Automatische Verstärkungsregelung (AVR)

Wie in Bild V-6 im Kapitel V.2.1.7, Demodulation von AM, eingetragen, wird am Demodulatorausgang eine Spannung  $u_{AVR}$  gewonnen, deren Wert dem Mittelwert der Amplitude des Zwischenfrequenzsignals und damit des Sendersignals proportional ist. Diese Spannung wird auf die ZF- und HF-Vorstufe zurückgeführt, um die Verstärkung dieser Stufen einzustellen: Steigendes  $u_{AVR}$  bewirkt sinkende Verstärkung beider Stufen. Damit ist die Amplitude am Eingang des Demodulators und daraus folgend auch die am Lautsprecher trotz schwankender Amplitude des Sendersignals nahezu konstant. Diese Schaltungstechnik wird als automatische Verstärkungsregelung (AVR) bezeichnet. Auch der Demodulator für frequenzmodulierte Signale stellt eine derartige Spannung zur Verfügung, siehe dazu Bild V-18c,  $u_{AVD}$ , Kapitel 2.4.8.

### 4 Weitere Schaltungskonzepte

Moderne Empfänger weisen noch einige der folgenden Schaltungskonzepte auf, deren Realisierung z.B. so aussieht:

- Die Abstimmung der Schwingkreise von Vor- und Oszillatorstufe geschieht über Kapazitätsvariationsdioden, deren Kapazität über eine Gleichspannung eingestellt wird. Diese gewinnt man über einen Spannungsteiler von einer temperaturkompensierten Z-Diode als Konstantspannungsquelle.
- Für die Speicherung von Sendern zum einfachen Abruf über Tastendruck wird ein zugeordnetes Digitalwort gespeichert, das nach Senderauswahl als

Eingangsgröße eines Digital-Analog-Umsetzers dient, dessen Ausgangsspannung über die Kapazitätsdioden den gewünschten Sender einstellt.

- Zur Anzeige der Frequenz des empfangenen Senders misst man die Oszillatorfrequenz und zieht vom erhaltenen Wert die Zwischenfrequenz ab. Die Eingangsfrequenz direkt zu messen ist wegen der kleinen schwankenden Amplituden nicht möglich, und außerdem erhielte man prinzipiell keine Frequenzanzeige, wenn kein Sendersignal vorhanden wäre.
- Überwiegend beim UKW- und Fernsehempfang sorgt eine automatische Senderabstimmung (AFC, automatic frequency control) dafür, dass eine ungenaue Abstimmung auf die Senderfrequenz korrigiert wird.
- Die Rundfunksender übertragen häufig neben dem eigentlichen Programm noch Zusatzinformationen, wie z.B. Sendername, Art des gerade übertragenen Programms (Nachrichten, E-Musik, U-Musik), Uhrzeit und Signale zur Steuerung des Empfängers für Verkehrsdurchsagen. Besonders die Autoradioempfänger nutzen den Sendernamen und die Kennung für Verkehrsdurchsagen: Der Empfänger sucht selbstständig aus dem Angebot an Sendern gleichen Namens den am besten zu empfangenden aus, und der ausgeschaltete Empfänger wird speziell für die Verkehrsdurchsagen eingeschaltet oder der eingeschaltete Empfänger auf eine Mindestlautstärke eingestellt.
- Bei der Fernsehübertragung werden von etlichen Fernsehanstalten zusätzlich zu Bild und Ton noch weitere Informationen als *Videotext* übertragen. Es handelt sich dabei um Zusatzinformationen zu den Sendungen, Nachrichten, Berichte usw. Man nutzt dazu vorhandene Lücken bei der Bildübertragung (Kapitel VIII).

## VIII Ton- und Bildübertragung

### 1 Rundfunk-Stereoübertragung

Aus dem Laufzeitunterschied und der Lautstärke, mit dem ein Schallsignal das linke und das rechte Ohr erreicht, lässt sich die Richtung der Schallquelle erkennen. Bei der *Mono-Übertragung* wird das gesamte Schallsignal über *einen* Kanal übertragen, sodass der Mensch als Empfänger zwar die Richtung des Gesamtsignals, d.h. den Ort des Lautsprechers, erkennt, aber nicht erfährt, wo bei der Aufnahme z.B. der Sänger und wo die Musikinstrumente gestanden haben. Da dies der täglichen Praxis des Hörens widerspricht, hat man den räumlichen Eindruck durch Einführung der *Stereo-Übertragung* wiederhergestellt. Bei der Rundfunkübertragung gilt der Grundsatz der *Kompatibilität*, d.h. der Höreindruck eines

Rundfunkempfängers ohne Stereoempfangseinrichtung darf durch die Aussendung des Stereosignals nicht beeinträchtigt werden. Deshalb war es auch nicht vertretbar, den naheliegenden Weg zu gehen, nämlich für Rundfunkaufnahmen zwei Mikrofone räumlich voneinander getrennt links und rechts im Raum anzuordnen und für die Monowiedergabe beide Signale zu addieren. Es hat sich gezeigt, dass dies zu einer „Verflachung“ des Höreindrucks führt.

Für die Aufnahme und Wiedergabe von Musikkassetten und Compact-Disks (CDs) ordnet man die Mikrofone häufig nicht links und rechts im Raum an, sondern direkt neben- oder übereinander, Bild VIII-1a, wobei deren Richtcharakteristik nach links bzw. rechts weist. Diese Aufnahmetechnik wird mit *Links-Rechts-* oder *X-Y-Stereofonie* bezeichnet.

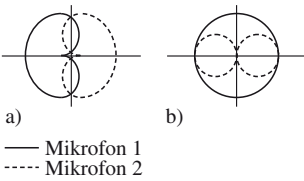


**Bild VIII-1** Mikrofonanordnungen mit Richtcharakteristik für Stereo-Aufnahmen  
a) X-Y-Stereofonie (Links-Rechts)  
b) M-S-Stereofonie (Mitte-Seiten)

Bei Rundfunkaufnahmen dagegen setzt man zwei Mikrofone nach Bild VIII-1b ein. Das eine steht in der Mitte und nimmt die Schallsignale aus allen Richtungen gleich gut auf (kreisförmige Richtcharakteristik, siehe Kapitel XIV.2, Schallempfänger), das andere steht ebenfalls in der Mitte und bevorzugt diejenigen Signale, die genau von rechts und genau von links kommen (Richtcharakteristik in Form einer Acht). Bei dieser mit *M-S*-(Mitte-Seiten-)Stereofonie bezeichneten Aufnahmetechnik wird das Mittensignal für die Monowiedergabe verwendet. Es hat sich gezeigt, dass die *X-Y*- und die *M-S*-Signale ineinander überführt werden können:

$$\begin{aligned} X + Y &\cong M & M + S &\cong X \\ &\text{bzw.} & & \\ X - Y &\cong S & M - S &\cong Y \end{aligned} \quad (\text{VIII.1a})$$

Damit genügt eine der beiden Aufnahmetechniken für alle Anwendungsfälle.

Die Stereo-Rundfunkübertragung wird im UKW-Bereich eingesetzt, weil hier durch die verwendete Frequenzmodulation eine hohe Übertragungsqualität erreicht wird. Bild VIII-2a zeigt das Spektrum eines Stereosignals vor der Frequenzmodulation des Trägers. Für Monoempfang steht das Basissignal  $M = X + Y$  zur Verfügung. Ein *Hilfsträger* mit der Frequenz 38 kHz wird mit dem Signal  $S = X - Y$  zweiseitenband-amplitudenmoduliert. Da der Träger bei der anschließenden Frequenzmodulation und Demodulation wegen seiner großen Amplitude unerwünschte Frequenzanteile erzeugen könnte, wird er unterdrückt, was mit geeigneten Modulatorschaltungen möglich ist (siehe Kapitel V.2.2.1, Einseitenbandmodulation, und Bild V-7). Auch eines der beiden Seitenbänder hätte theoretisch noch unterdrückt werden können, ist aber praktisch wegen der erforderlichen steilflankigen Filter nicht möglich: Bei Anstieg der Frequenz von 37,980 kHz auf 38,020 kHz wäre ein Abfall der Ausgangsspannung auf weniger als 1/1000 notwendig gewesen. Da für die Demodulation im Empfänger der Träger frequenzgenau wieder zugesetzt werden muss und außerdem seine Phasenlage zu den Seitenbändern zur Erhaltung des Stereo-Effektes wichtig ist, wird ein *Pilotton* übertragen. Verglichen mit dem (unterdrückten) Hilfsträger hat er die halbe Frequenz (19 kHz), die gleiche Pha-

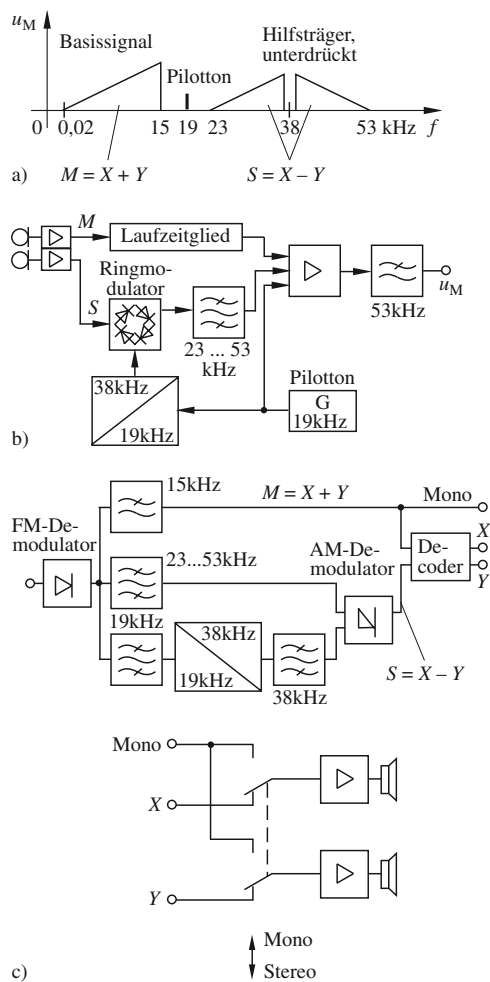


**Bild VIII-2** Stereo-Rundfunkübertragung  
a) Spektrum des Stereosignals (senderseitig)  
b) Erzeugung des Stereo-Modulationssignals (senderseitig)  
c) Stereo-Empfänger (ab Demodulator dargestellt)

senlage und 1/10 der Amplitude. Bild VIII-2b stellt das Prinzip der Signalaufbereitung bis zur Modulationsstufe dar. Durch das Laufzeitglied gelangen das durch Modulation und Filterung verzögerte Signal  $S = X - Y$  und das Signal  $M = X + Y$  ohne Phasenverschiebung zueinander auf den Tiefpass und anschließend zur Modulationsstufe. Ohne dieses Laufzeitglied wäre der Stereoeffekt verfälscht, weil eine Phasenverschiebung zwischen  $S$  und  $M$  vom Ohr als Laufzeitunterschied zwischen den Schallsignalen aufträte und als falsche Rauminformation interpretiert würde. Der Empfänger nach Bild VIII-2c führt in der Schalterstellung „Mono“ das Signal  $M = X + Y$  den beiden Verstärkern parallel zu. Für den Stereoempfang wird die Pilottonfrequenz 19 kHz in einer Frequenzver-

dopplerschaltung in die Frequenz 38 kHz umgewandelt. Dazu wird häufig der sinusförmige Pilotton brückengleichgerichtet. Es entsteht gemäß Fourierzerlegung u.a. die Frequenz 38 kHz, phasenrichtig zu 19 kHz. Die höherfrequenten Anteile sowie der Anteil mit 19 kHz werden durch das Bandpassfilter unterdrückt. Der Anteil mit 19 kHz tritt nicht mehr auf. Nach der Demodulation bildet der Dekoder die Signale für den rechten und linken Kanal durch Anwendung der Gleichung (VIII.1):

$$\begin{aligned}(X + Y) + (X - Y) &= 2X && \text{Linker Kanal} \\(X + Y) - (X - Y) &= 2Y && \text{Rechter Kanal}\end{aligned} \quad (\text{VIII.1b})$$

## 2 Digitale Farbfernsehtechnik

### Zielsetzung, Vorgaben

Zielsetzung bei der Entwicklung des sogenannten Digitalfernsehens war die Übertragung von Bild und Ton in qualitativ hochwertiger Form (gute Bild- und Ton-Qualität bei minimalen Störungen) bei geringer Senderleistung und Empfang der Sender mit Stabantenne. Mit dieser Antennenform können Mehrfachreflexionen aber nicht mehr ausgeblendet werden. Es galt außerdem die Nebenbedingung, dass nur eine begrenzte und damit eine *zunächst* nicht ausreichende Bandbreite zur Verfügung stand. Es musste somit versucht werden, durch Redundanz- und Irrelevanzreduktion sowie durch den Einsatz geeigneter nachrichtentechnischer Verfahren eine vertretbare Bandbreitenverringerung zu erreichen. Grundsätzlich galt, dass das Ziel nur mit der Übertragung der Signale in digital codierter Form erreicht werden konnte. Wie noch gezeigt wird, erfordern Sender und auch Empfänger Bausteine, die kleinen Rechnern vergleichbar sind.

Die folgenden Teilgebiete der Nachrichtentechnik boten die erforderlichen Lösungsansätze: Modulationstechnik, Codierverfahren, Fehler-Erkennung und -Korrektur, Redundanzreduktion, Irrelevanzreduktion und Kanalcodierung. Weiterhin waren Untersuchungsergebnisse über das Verhalten von Auge und Ohr bei der Signalverarbeitung von großem Nutzen. Das Ergebnis ist sehr komplex, und deshalb kann hier nur ein erster grober und vereinfachender Überblick gegeben werden, für Einzelheiten wird auf die spezielle Fachliteratur verwiesen. Trotzdem kann es interessant sein zu sehen, wie die Lösung der Probleme aussieht.

### DVB-Projekt

Seit Beginn der 1990er Jahre besteht das DVB-Projekt (Digital Video Broadcasting), in dem einheitliche und verbindliche Verarbeitungs- und Übertragungssysteme für das Digitale Farbfernsehen erarbeitet worden sind. Dabei wurde dreileisig verfahren, abhängig davon, ob das Fernseh- und das begleitende Tonsignal über Kabel (Entwicklung *DVB-C*), Satellit (Entwicklung *DVB-S*) oder terrestrisch (Entwicklung

*DVB-T*; Funkübertragung von Sender- zu Empfänger-Antenne) übertragen werden soll. Am komplexesten ist das Verfahren für die terrestrische Übertragung, weil hier der Einfluss von Störungen am größten ist und Lösungen eingesetzt worden sind, die die Auswirkungen dieser Störeinflüsse minimieren. Im Folgenden soll das DVB-T-Verfahren wenigstens in einigen prinzipiellen Eigenschaften dargestellt werden.

Ein Fernsehbild wird zerlegt in waagerechte schmale Streifen, sog. Zeilen. Die Zeilen wiederum bestehen aus einzelnen Punkten. Insgesamt besteht das Fernsehbild aus etwa 415.000 einzelnen Punkten. Für jeden Punkt müssen Helligkeit und Farbe übertragen werden. Außerdem sind weitere zusätzliche Signale erforderlich. Die Fernsehkameras tasten das zu übertragende Bild punktweise so ab, dass die Informationen über Helligkeit und Farbe von jedem der etwa 415.000 Bildpunkte zur Verfügung stehen (415.000 Abtastwerte). Der Sender bereitet die Signale noch entsprechend auf, bevor sie gesendet werden.

Bei den Abtastwerten pro Zeile muss unterschieden werden zwischen den Abtastwerten, die direkt den Bildpunkten auf dem Empfängerschirm zugeordnet sind, und den Daten, die zwischen dem Ende der auf dem Bildschirm dargestellten Zeile  $n$  und dem Beginn der folgenden auf dem Bildschirm dargestellten Zeile  $(n + 2)$  liegen (siehe Zeilensprungverfahren weiter unten). Das Bereitstellen eines Bereiches für Daten zwischen 2 Zeileninhalten wird mit *Horizontalaustastung* bezeichnet, und es entsteht eine *horizontale Austastlücke*. Darin enthalten sind u.a. die Ton- und die Synchronisations-Informationen. Ebenso gibt es eine *vertikale Austastlücke*, die entsteht, wenn nach Erreichen des Endes der letzten Zeile des momentanen Bildes bis zu Beginn der ersten Zeile des folgenden neuen Bildes ebenfalls ein Zeitbereich für weitere Informationen zur Verfügung gestellt wird. In dieser *vertikalen Austastlücke* werden neben allgemein nutzbaren Informationen auch Informationen über den Bildaufbau übertragen.

Der *Studiostandard* ITU-R BT.601 enthält die Festlegungen für das Digitalfernsehen *im Studio*. Hier einige Auszüge, Erläuterungen folgen weiter unten:

720 Abtastwerte je aktive Zeile für das Y-Signal.

864 Abtastwerte pro Zeile insgesamt (720 aktiv plus 144 für Zusatzinformationen).

576 aktive Zeilen (d.h. für das Bild) bei insgesamt 625 Zeilen pro Vollbild.

Codierung des Bildsignals mit 10 bit.

Abtastraster 4:2:2.

Bitrate des seriellen Studiosignals: 270 MBit/s.

Bitrate für das eigentliche Videosignal: 207 MBit/s.

Die Praxis zeigt, dass diese Bitrate nicht für die Übertragung des Farbfernsehens zur Verfügung steht! Damit ergibt sich die Forderung, dass die Bitrate wesentlich verringert werden muss, mit der Nebenbedingung, die Fernsehbild- und Ton-Übertragungs-

qualität gegenüber der Studioqualität nur minimal zu verringern.

### MPEG-2 Standard; ETSI 300 744

Eine von der *International Electrotechnical Commission* (IEC), der *International Standards Organisation* (ISO) und dem *Joint Technical Committee* (JTC) eingesetzte Arbeitsgruppe erarbeitete weltweit verbindliche Richtlinien zur Codierung von Audio- und Video-Signalen, zunächst für nicht bewegte Bilder, dann erweitert auf bewegte Bilder: *Moving Pictures Expert Group* (MPEG). ISO und IEC haben 1994 den MPEG-2 Standard, ISO/IEC 13818, geschaffen. Einzelheiten zur DVB-T-Übertragung sind in der ETSI 300 744 (*European Telecommunications Standards Institute*) enthalten.

### Kenngrößen des Bildsignals

Zunächst wird ein Farbbild analog aufgezeichnet, indem senderseitig 3 Bildaufnahmegeräte mit vorgeschalteten Farbfiltern, durchlässig für die Farben Rot, Grün und Blau, verwendet werden. Durch entsprechende Mischung dieser 3 Farben lassen sich nahezu alle in der Natur vorkommenden Farben darstellen. Folgende Signale müssen für die Übertragung des Farbbildes erzeugt werden:

- *Helligkeitssignal* oder *Leuchtdichtesignal* oder *Luminanzsignal* oder *Y-Signal*:

Dieses Signal entspricht den „Grauwerten“. Entsprechend der spektralen Empfindlichkeit des Auges werden die 3 Farbsignale nach Tabelle VIII.3 gewichtet:

**Tabelle VIII-3** Wichtung der Farben rot, grün und blau

| Farbe    | Wellenlänge in nm | Helligkeitseindruck, relativ zueinander |
|----------|-------------------|-----------------------------------------|
| rot (R)  | 615               | 0,30                                    |
| grün (G) | 532               | 0,59                                    |
| blau (B) | 470               | 0,11                                    |
|          |                   | $\Sigma = 1,00$                         |

Hierfür wird die folgende vereinfachte Schreibweise gewählt:

$$Y = 0,30 \cdot R + 0,59 \cdot G + 0,11 \cdot B \quad (\text{VIII.6})$$

- *Farbartsignal* oder *Chrominanzsignal*:

Es setzt sich zusammen aus:

- Farbton*: Das ist die Farbe, z.B. orange.
- Farbsättigung*: Sie gibt an, ob die Farbe kräftig oder blass ist. 100%-Amplitude heißt „kein weiß enthalten“, 50%-Amplitude bedeutet: 50 % Farbe, 50 % weiß.

Die Farbsättigung ist bereits im *Y-Signal* enthalten. Es werden deshalb übertragen:

$$(R - Y)' = C_R = (R - Y) \cdot 0,88 \quad (\text{VIII.7})$$

$$(B - Y)' = C_B = (B - Y) \cdot 0,49$$

Die Bezeichnungen  $(R - Y)'$  bzw.  $C_R$  werden beide verwendet, ebenso  $(B - Y)'$  bzw.  $C_B$ . Die Faktoren 0,88 und 0,49 enthalten die Farbwichtung.

### Redundanz- und Irrelevanzreduktion

Bei der Redundanzreduktion erleidet das Signal keinen Informationsverlust, es wird lediglich *überflüssige*, d.h. bereits vorhandene, Information entfernt. Bei der Irrelevanzreduktion dagegen wird diejenige Information entfernt, auf die der Empfänger erfahrungsgemäß ohne allzu großen Nachteil verzichten kann oder aber die der Empfänger im Allgemeinen nicht auswertet bzw. auswerten kann. Als Empfänger dienen in diesem Fall Auge und Ohr des Menschen.

- *Zeilensprungverfahren*: Für die Zahl der Zeilen hat sich durch Tests ein Wert von mindestens 500 als sinnvoll erwiesen, gewählt wurden 625 Zeilen. Davon dienen 576 Zeilen (sog. aktive Zeilen) zur Darstellung des Bildes, der Rest wird zur Übertragung von Zusatzinformationen verwendet (Synchronisationsimpulse, Trägersrückgewinnung, Fehler-Erkennung und -Korrektur, Zeiteinblendung, Informationen über Codierung, Videotext usw.; Einzelheiten folgen weiter unten). Die Zahl der Bildpunkte pro Zeile ergibt sich damit durch das gewählte Bildformat, dass von bisher 4:3 (Verhältnis Breite:Höhe) zunehmend auf 16:9 geändert wird. Für ein flimmerfreies Bild müssen mindestens 16 Einzelbilder pro Sekunde (16/s) dargestellt werden. Die Kinotechnik verwendet 24 Bilder pro Sekunde, beim Fernsehbild reicht dieser Wert nicht aus. Die Übertragung von 50 Bildern pro Sekunde ist für das Auge ausreichend, scheitert aber an der zu hohen erforderlichen Bandbreite. Werte unterhalb 50/s (z.B. wären 40/s durchaus für das Auge vertretbar) sind wegen möglicher Interferenzen mit der Netzfrequenz 50 Hz nicht sinnvoll. Eine Lösung ergibt sich durch das Zeilensprungverfahren, das eine Bandbreite gemäß 25 Bildern pro Sekunde erfordert, physiologisch aber vom Auge als flimmerfrei mit etwa 40 Bildern pro Sekunde empfunden wird. In einem ersten Durchlauf werden auf dem Bildschirm die ungeraden Zeilen 1, 3, 5, ... dargestellt, im anschließenden zweiten Durchlauf die geraden Zeilen 2, 4, 6, ... Das ergibt 25 ganze Bilder oder 50 Halbbilder pro Sekunde. Das Verfahren wird ein weiteres Mal eingesetzt, indem ein Vollbild elektronisch gespeichert wird und das ursprüngliche Bild nach der halben Zeit kurz unterbrochen und durch das gespeicherte Bild (auch mit gleichem Bildinhalt) ersetzt wird. Diese Technik hat man schon bei der Kinotechnik angewendet durch eine „Unterbre-



cherblende“. Damit stellt man -fiktiv- 100 Bilder pro Sekunde dar, bei einem Bandbreitenbedarf entsprechend 25/s. Das Auge empfindet dadurch eine Bildfolgefrequenz, die zwischen 50/s und 100/s liegt und ein flimmerfreies Bild ergibt.

Das analoge Bildsignal durchläuft Analog-Digital-Umsetzer. Das Auge kann etwa 250 Helligkeitsstufen (Graustufen) unterscheiden, so dass eine 8-bit-Codierung ausreicht. Allerdings erkennt das Auge bei monochromen Bildern ein nicht zu vernachlässigendes Quantisierungsgeräusch (Quantisierungsrauschen), so dass im Studio mit 10-bit-Umsetzern gearbeitet wird.

- **Abtastraster 4:2:2 und 4:2:0:** Das menschliche Auge ist für das Farbsehen weniger empfindlich als für das Hell-Dunkel-Sehen (Stäbchen für das Hell-Dunkel-Sehen, Zäpfchen für das Farbsehen). Deshalb wird in den Zeilen zwingend jeder einzelne Bildpunkt für das Luminanzsignal ( $Y$ -Signal) abgetastet, während für das  $C_R$ - und das  $C_B$ -Signal nur jeder zweite Bildpunkt abgetastet wird. Diese Abtastung wird bezeichnet mit dem Begriff *Abtastraster 4:2:2*. Die Abtastfrequenz für das  $Y$ -Signal ist damit doppelt so groß (4) wie die für die beiden Chrominanzsignale  $C_R$  und  $C_B$  (2:2). Das ergibt eine erste Datenreduzierung für die Fernsehbildübertragung.

Diese Datenreduzierung lässt sich weiter fortführen, indem auch in vertikaler Richtung nur jeder zweite Bildpunkt für das Chrominanzsignal abgetastet wird. Das Problem dabei ist, dass dann die Chrominanzsignale wegen des Zeilensprungverfahrens *nur* aus den Werten des ersten (oder zweiten) Halbbildes gebildet würden, was das Auge als Flimmern empfindet. Deshalb bildet man aus 2 nebeneinanderliegenden Zeilenwerten des ersten Halbbildes und den zwei genau darunterliegenden Zeilenwerten des zweiten Halbbildes einen Mittelwert, der dann für die 4 Bildpunkte gemeinsam gilt (Abtastraster 4:2:0).

#### ● Differenz-Pulscodemodulation

Die Erfahrung zeigt, dass sich die Bildinformation benachbarter Bildpunkte im Mittel nur wenig voneinander unterscheidet. Bildet man die Differenz, ergibt sich, dass der Wert 0 am häufigsten vorkommt und dass die Häufigkeit mit wachsendem Differenzwert stark abnimmt. Deshalb werden kleine Differenzwerte mit wenigen Bit codiert, große Werte mit größerer Bit-Zahl. Dieses Verfahren ist vom Morse-Alphabet bekannt. Es handelt sich hierbei um eine Redundanzreduktion, weil z.B. in 2 Codewörtern mit 8 Bit, bei denen nur das niederwertigste Bit unterschiedlich ist, die übrigen 7 Bit gleich und damit redundant sind. Es wird also nur die Differenz einschließlich Vorzeichen zum vorhergehenden Wert übertragen. Allerdings liegt eine Gefahr darin, dass bei einem falschen Wert, wie auch immer er entstanden ist, alle folgenden durch Addition des vorzeichenrichtigen Differenzwertes falsch sind. Es muss deshalb in geeigneten

zeitlichen Abständen, deren Wert durch Erfahrung und Statistik zu ermitteln ist, ein kompletter ungekürzter Wert übertragen werden, von dem aus dann wieder neue Differenzadditionen gestartet werden können. Der Sender führt die gleiche Differenzaddition durch wie der Empfänger, um Rundungs- bzw. Quantisierungs-Fehler des Empfängers nicht zu groß werden zu lassen: *Differenz-Pulscodemodulation mit prädiktiver Codierung*. Die Differenzbildung kann erfolgen für benachbarte Bildpunkte in einer Zeile oder für nebeneinander liegende Bildpunkte in zwei aufeinander folgenden Zeilen eines Halb- oder Vollbildes. Insgesamt ergibt sich durch diese Art der Codierung im Mittel eine geringere Datenrate. Allerdings bringt diese Maßnahme nicht automatisch eine Reduktion der Bandbreite mit sich, sofern man als größte Differenz den Unterschied zwischen dem Wert 0 und dem Maximalwert zulässt. Der Übertragungskanal muss für diesen zwar seltenen aber möglichen Fall die Kanalbandbreite bereithalten. Da derart große Differenzen aber nur selten vorkommen und das Auge diesen Änderungen zeitlich nur verzögert folgen kann, werden solche Differenzen in ihrem Wert begrenzt. Eine Änderung um 8 Bit wird senderseitig z.B. auf 4 Bit begrenzt, und dieser Wert wird übertragen. Anschließend wird in einem oder mehreren Schritten senderseitig auf den neuen Wert abgeglichen. Das Auge merkt häufig nichts von dieser Vorgehensweise, und da dieser Fall auch noch selten vorkommt, ergeben sich kaum negative Eindrücke für das Auge.

#### ● Diskrete Kosinus-Transformation

Es handelt sich bei diesem Ansatz um eine Irrelevanzreduktion, bei der ausgenutzt wird, dass das menschliche Auge feiner werdende Bildstrukturen immer unvollkommener auflöst, so dass diese mit weniger Bit quantisiert werden können.

Die Methode, das Fernsehbild über Bandpässe in mehrere Frequenzbereiche aufzuteilen und die höherfrequenten Anteile mit weniger Bit zu quantisieren, ist wegen der schwierig zu realisierenden steilflankigen Filter mit ihren Laufzeitverzerrungen kaum anwendbar. Das Problem wird auf die Ebene der Digitaltechnik in Form der schnellen diskreten Fouriertransformation verlagert. Sender und Empfänger haben einen *Block* gespeichert, der aus  $8 \times 8$  Basismustern besteht. Das Basismuster in der linken oberen Ecke ist ohne Änderung, nach rechts in waagerechter Richtung nimmt die Horizontalauflösung zu bis zu maximal 4 Wechslen ganz rechts, in senkrechter Richtung nimmt die Vertikalauflösung zu, wieder bis zu maximal 4 Wechslen ganz unten. Das Basismuster in der rechten unteren Ecke hat damit je 4 Wechsel in horizontaler wie auch in vertikaler Richtung (Schachbrettmuster). Das auf dem Fernsehschirm dargestellte Bild, bestehend aus  $720 \times 576$  Pixeln, wird unterteilt in 6480 Blöcke zu je  $8 \times 8$  Pixeln. ( $720 \cdot 576 = 6480 \cdot 8 \cdot 8$ ). Die gespeicherten Blöcke werden mit den Blöcken des aktuellen Fernsehbildes verglichen.

Über die hier eingesetzte Diskrete Kosinus-Transformation, die nur die Kosinusanteile erfasst, werden die Frequenzanteile und deren Amplituden des Blocks erfasst. Es zeigt sich, dass durch geschicktes Umsortieren der Positionen der Pixel der Bereich der Blocks in Richtung rechts-unten häufig den Wert Null annehmen. Damit muss man nicht die einzelnen Nullwerte angeben, sondern nur die Zahl, wie oft die Null noch auftritt. Außerdem werden die Werte, die nicht Null sind, noch so umcodiert, dass häufig auftretende Werte mit weniger Bit codiert werden als weniger häufig auftretende, so wie beim Morse-Alphabet.

### ● Fehler-Erkennung und -Korrektur

Mit den bisher geschilderten Maßnahmen lässt sich in der Praxis eine Datenreduktion um den Faktor 20 bis 50 ohne gravierende Qualitätseinbuße erreichen. Das heißt aber auch, dass kaum noch Redundanz zur Verfügung steht, um eventuell auftretende Fehler zu erkennen und zu korrigieren. Damit wird das Übertragungssystem anfällig gegenüber Störungen. Bereits ein falsches Bit kann dann gravierende negative Folgen haben, wenn es z.B. die Synchronisation, die Trägersückgewinnung, die Differenz-Pulscodemodulation oder die Verarbeitungsbits für das Signal betrifft. Deshalb wurde dem Datenstrom wieder Redundanz zugefügt, um eine Fehler-Erkennung und -Korrektur zu ermöglichen. Dabei gilt, dass kein Zugriff bzw. Rückgriff auf den Sender möglich ist, also eine Fehlererkennung stets eine Fehlerkorrektur beinhalten muss. Damit wird der bisher erreichte Faktor der Datenreduktion wieder verringert.

#### Reed-Solomon-Verfahren:

Die Fehlerkorrektur beinhaltet zunächst die Fehlererkennung und daran anschließend die Fehlerkorrektur. Beides ist nur dadurch erreichbar, dass zusätzlich Redundanz in Form von zusätzlichen Bits bzw. Bytes eingefügt wird. Ein geeignetes Verfahren ist das nach den Entwicklern benannte Reed-Solomon-Verfahren (siehe dazu Spezialliteratur). Es ist besonders geeignet beim Auftreten von Burstfehlern, das sind Fehler, bei denen fehlerhafte Bits in einer Kette hintereinander liegen. Als zweckmäßig hat sich erwiesen, dem Transportpaket mit 188 Byte ein weiteres Paket (Block) mit 16 Bytes anzuhängen, so dass ein Transportpaket jetzt aus 204 Bytes besteht. Damit können maximal 8 fehlerhafte Bytes erkannt und korrigiert werden. Der Code wird auch mit RS (204, 188, 8) bezeichnet (die Zahlen 204, 188 und 8: siehe Unterstreichungen im Text). Treten in einem Transportpaket Burstfehler auf, und dieser Fall ist bei der Fernsehübertragung am Häufigsten, ist die folgende Vorgehensweise vorteilhaft: Die 204 Bytes eines Transportpaketes in der Reihenfolge 0 ... 203 werden in 17 Teilpakete zu je 12 Bytes umsortiert und dann gesendet:

0-17-34-51-68-85-102-119- 136- 153-170- 187-- 1- 18- 35...188--...--16-33...203

12 Bytes
12 Bytes
12 Bytes

Transportpaket mit 1712 Bytes = 204 Bytes, umsortiert

Der Empfänger stellt die Originalreihenfolge 0, 1, 2, ..., 202, 203 wieder her. Wenn jetzt ein Burstfehler auftritt, in dem z.B. die Bytes 17, 34, 51, 68 als *aufeinander folgende* Bytes fehlerhaft sind, z.B. durch eine Störung während der Funkübertragung, liegen die fehlerhaften Bytes im Empfänger nach Umsortierung in die Originalreihenfolge nicht mehr direkt nebeneinander. Man kann zeigen, dass die Fehlerkorrektur des Reed-Solomon-Verfahrens durch diese Maßnahme effektiver wird. Ganz allgemein hat das Reed-Solomon-Verfahren den Vorteil, dass der Decodieralgorithmus relativ einfach ist. Das Verhältnis (Zahl der Bits für das eigentliche Nutzsignal)/(Zahl der Bits für das eigentliche Nutzsignal + Fehlerkorrektur-Bits) wird mit *Coderate* bezeichnet.

#### Faltungscodierung mit Viterbi-Algorithmus:

Treten mehr als 8 fehlerhafte Bytes auf, ist das Reed-Solomon-Verfahren überfordert. Dann greift ein zweiter Fehlerkorrektur-Mechanismus ein, der Faltungscodierung mit Viterbi-Algorithmus. Dieser Algorithmus ist prinzipiell im Kapitel *Optimierte Nachrichten- und Datenübertragung* näher beschrieben.

### ● Energieverwischung

Die vom Sender übertragenen Informationen sind in Blöcken, sog. Transportpaketen, zu je 188 Byte (204 Byte, siehe Fehler-Erkennung und -Korrektur) organisiert. Dabei kann es vorkommen, dass längere Bit-Folgen mit nur Nullen oder nur Einsen auftreten. Für diesen Fall erfolgt, wenn auch nur kurzzeitig, die Aussendung des Trägers. Der Träger wurde bei der Modulation aber absichtlich unterdrückt, sodass jetzt Problemen mit der im Fernsehempfänger durchgeführten Trägersückgewinnung und der Demodulation auftreten. Deshalb wird der Datenstrom, aber ohne das Synchronisations-Byte, in eine Pseudo-Zufallsfolge umsortiert. Das geschieht mit Hilfe eines rückgekoppelten Schieberegisters. Nach jeweils 8 Transportpaketen wird das Schieberegister in den Ausgangszustand zurückgesetzt. Der Empfänger wandelt diese Zufallsfolge wieder in die Originalreihenfolge zurück. Der Rücksetzpunkt wird durch ein invertiertes Synchronisations-Byte gekennzeichnet.

### ● Trägermodulation: 16-QAPSK, unterdrückter Träger, COFDM

Zur Übertragung der Fernsehsignale einschließlich Tonsignal wird das 16-QAPSK-Verfahren eingesetzt. Es werden 2 Träger mit gleicher Frequenz und einer Phasenverschiebung von 90° zueinander verwendet (Sinus- und Kosinus-Schwingung). Codiert wird mit einem 4-Bit-Code entsprechend 16 unterscheidbaren Zuständen. Es ist eine kombinierte Amplituden-Pha-



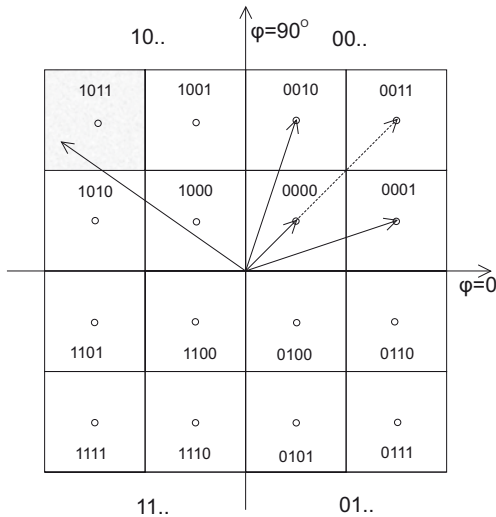


**Bild VIII-3** Prinzip einer 16-QPSK-Modulation

senumtastung. Bild VIII-3 zeigt die prinzipielle Zuordnung zwischen den zwei Träger-Amplituden und -Phasen für die 16 Zustände. Die ideale Zuordnung zwischen Codewort und Phasen-Amplitudenkombination ist im ersten Quadranten durch die Pfeilspitzen dargestellt. Das jeweilige 4-Bit-Wort wird in der Praxis aber auch dann eindeutig erkannt, wenn sich die Zeigerspitze in dem der Codierung zugeordneten Quadrat befindet, siehe Codewort 1011 links oben. Sofern möglich unterscheiden sich benachbarte Codewörter in nur einem Bit (Gray-Code). Tritt eine Störung auf, wird laut Statistik sehr häufig nicht das zugeordnete Codewort, sondern ein Nachbarwort erkannt. Da sich aber beide nur in einem Bit unterscheiden, wird für die Fehler-Erkennung und -Korrektur nur eine Minimalzahl an Bits benötigt. Bei der Modulation wird der Träger unterdrückt, und damit steht mehr Leistung für die Seitenbänder zur Verfügung. Außerdem werden Probleme bei der Demodulation durch schwankende Trägeramplituden und Laufzeiten vermieden. Im Fernsehempfänger muss der Träger wieder phasenrichtig erzeugt werden. Dazu werden Synchronisationssignale für den im Empfänger vorhandenen Oszillator übertragen. Als weitere Besonderheit wird das Signal nicht einem einzelnen Träger, sondern 8192 Unterträgern mit einem Abstand von 1,116 kHz aufmoduliert, sog. 8k-Modus. Dieses Verfahren wird mit COFDM, Coded Orthogonal Frequency Division Multiplexing bezeichnet. Es werden aber nur 6817 Unterträger benutzt, von denen wiederum nur 6048 für die eigentlichen Nutzdaten verwendet werden. Jeder der Träger wird mit 4 Bit moduliert. Man erreicht dadurch eine höhere Störsicherheit bei schwankenden Signalamplituden, wie sie bei terrestrischer Übertragung häufiger auftreten.

### ● Gleichwellennetz, SFN

Ausgangspunkt ist der Betrieb von räumlich benachbarten Sendern auf der gleichen Frequenz mit synchroner Signalabstrahlung (Gleichwellennetz, single frequency network, SFN). Dann können sich an der Empfängerantenne die Signalamplituden beider Sender durchaus addieren. Diese Addition ist aber praktisch nur dann vorhanden, wenn die Senderamplituden am Empfangsort etwa gleich groß sind. Kritisch wird es dann, wenn die Laufzeit Sender-Empfänger für *beide* Signale so unterschiedlich ist, dass sich aufeinander folgende Signalamplituden überlagern und damit den Empfang des korrekten Signals verfälschen. Dieser Effekt tritt auch auf, wenn von *einem* Sender das direkte Signal und ein reflektiertes Signal empfangen werden und das reflektierte und damit zeitlich verzögerte Signal am Empfänger mit dem bereits neuen Signal zusammentrifft. Um diesem Problem zu begegnen, wurde ein *Schutzintervall* (guard interval) eingeführt. Zwischen der Aussendung zweier benachbarter Signalamplituden wird ein Zeitintervall ohne Signalausendung eingeschoben, während dessen die verzögerten Signale eintreffen können. Sie verursachen damit aber keine Signalverfälschung. Die Länge des Schutzintervalls legt gleichzeitig fest, wie weit die Sender maximal voneinander entfernt sein dürfen. Dieses Schutzintervall wird häufig zu 1/4 gewählt, d.h., seine Dauer beträgt 1/4 der Dauer der Symbole, wobei die Symboldauer diejenige Zeit ist, während der die 6817 Träger ihre Informationen unverändert anliegen haben und aussenden.

### ● Statistischer Multiplex

Der Vorteil der geschilderten Bandbreitenreduzierungen, bei denen die Statistik eine Rolle spielt (mittlerer Bandbreitenbedarf), wird auch dadurch unterstützt, dass sich 4 Programme einen Träger teilen. Die für alle 4 Sender gemeinsam zur Verfügung stehende Bandbreite ist so bemessen, dass sie für den weitaus größten Teil der Übertragung ausreicht (Erfahrungswert, Statistik). Hat ein Sender momentan besonders ausgeprägte *Bildinhaltsänderungen*, bekommt er temporär einen größeren Anteil an Bandbreite zugeteilt, die die anderen Programmen in der Regel gerade nicht benötigen. Im Mittel funktioniert diese Aufteilung problemlos. In ganz wenigen Ausnahmefällen kann es vorkommen, dass 3 oder 4 Programme zum gleichen Zeitpunkt über einen etwas längeren Zeitraum viele Bildinhaltswechsel haben. Das führt dann zur sogenannten Klötzchenbildung (Artefakte), im Extremfall zum kurzzeitigen Einfrieren von einem oder mehreren Bildern. Die Programme (Fernsehanstalten) versuchen aber häufig, statt der Klötzchenbildung lieber unscharfe Bilder zu übertragen, weil das Auge und damit die Zuschauer das als weniger störend empfinden.

### ● Daten zum DVB-T

In Tabelle VIII.1 sind allgemeine Daten von aktuell eingesetzten DVB-T-Systemen aufgeführt.

**Tabelle VIII-1** Daten zum DVB-T (Nach Unterlagen des Norddeutschen Rundfunks, NDR)

|                                                                      |                                                          |
|----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| Kanalbandbreite (steht den Sendern zur Verfügung)                    | 7 MHz (VHF) bzw. 8 MHz (UHF)                             |
| Erforderlich für Bild und Stereoton                                  | (2,5 ... 4) MBit/s (Bild) und ca. 0,2 MBit/s (Stereoton) |
| Schutzintervall                                                      | 1/4 (der Symboldauer)                                    |
| Coderate                                                             | 2/3                                                      |
| Modus                                                                | 8k                                                       |
| Symboldauer                                                          | 898 µs                                                   |
| Datenrate (8 MHz-Kanal; Coderate 2/3; Schutzintervall 1/4, 8k-Modus) | 13,27 Mbit/s                                             |
| ergibt bei 4 Fernsehprogrammen                                       | 3,31 Mbit/s im Mittel für jedes Programm                 |
| Belegte Bandbreite                                                   | 7,61 MHz                                                 |
| Maximaler Senderabstand                                              | 67 km                                                    |
| Gesamt-Symboldauer (Summe aus Schutzintervalldauer und Symboldauer)  | 1,120 ms                                                 |
| Trägeranzahl (theoretisch), COFDM)                                   | 8192                                                     |
| Trägeranzahl (praktisch), COFDM)                                     | 6817                                                     |
| Trägerabstand, COFDM                                                 | 1,116 kHz                                                |
| Schutzintervalllänge                                                 | 224 µs                                                   |
| Senderleistung (Fernsehsender Hemmingen bei Hannover des NDR)        | 5 kW                                                     |

### ● Tonübertragung

Auch bei der Tonübertragung wurde eine Datenreduktion durchgeführt. Aufgrund von umfangreichen Untersuchungen zum Hörverhalten des menschlichen Ohres haben sich Möglichkeiten zur Irrelevanzreduktion ergeben. Dazu folgen einige Anmerkungen:

Tritt ein lautes Tonsignal auf, nimmt das Ohr frequenzmäßig benachbarte leisere Tonsignale nicht mehr wahr. Also müssen sie auch nicht übertragen werden. Dazu wird der gesamte Frequenzbereich des Tonsignals über Bandpässe in Teilfrequenzblöcke von z.B. 2 kHz zerlegt. Ein lauter Ton bei 3 kHz erlaubt es damit, den Frequenzbereich von 4 kHz bis 6 kHz auszublenden, sofern die darin enthaltenen Amplituden wesentlich kleiner sind.

Die Empfindlichkeit des menschlichen Ohres ist frequenzabhängig und im Frequenzbereich von etwa 200 Hz bis 6 kHz am größten. Damit können tiefere und höhere Frequenzanteile mit weniger Bit codiert werden.

Für die Tonübertragung stehen 4 Kanäle zur Verfügung: Linker Kanal, rechter Kanal, Zusatz-Tonkanal (Kommentar, Fremdsprache) und getrennter Musikkanal. Es besteht die Möglichkeit, weitere Tonsignale im sog. Auxiliary-Data-Bereich (AUX; in den Auslastlücken der Fernsehbildübertragung verfügbar) zu senden. Für die Übertragung von „Raumklang“ mit 5 Kanälen entsprechend 5 zugeordneten Lautsprechern (vor dem Zuhörer: Stereo-Links, Stereo-Rechts, Tiefton-Mitte und hinter dem Zuhörer: Surround-Links, Surround-Rechts) ergibt sich eine Datenreduktion dadurch, dass in den hohen Frequenzen kaum Richtungsinformation steckt und dass sowohl in den Kanälen Stereo-Links-Rechts als auch in Surround-Links-Rechts Redundanz enthalten ist.

Die Codierung des Tonsignals muss wegen des Dynamikumfangs des Ohres mit mindestens 12 bit erfolgen, es werden üblicherweise 16 bit verwendet.

## IX Mehrfachübertragung – Multiplexverfahren

Ziel der Mehrfachübertragung ist es, einen vorhandenen Übertragungskanal optimal zu nutzen. Optimal im strengen Sinn heißt, dass die Bandbreite des Kanals voll ausgenutzt wird und dass es keine Zeiträume gibt, in denen keine Information übertragen wird. In der Praxis versucht man, diesem Ziel so nahe wie möglich zu kommen, weil der Übertragungskanal

einen erheblichen Anteil an den Gesamtkosten der Nachrichtenübertragungsstrecke hat. Der Kanal kann drahtlos oder drahtgebunden sein, und der Begriff „gleichzeitig“ muss beim Zeitmultiplexverfahren durch „quasi gleichzeitig“ ersetzt werden. Für das Verfahren der Mehrfachübertragung müssen die drei folgenden Voraussetzungen erfüllt sein:

1. Das empfangene Gesamtsignal muss sich wieder eindeutig in die Einzelsignale (Basissignale) zerlegen lassen.
2. Die Bandbreite des Übertragungskanals muss größer sein als die Bandbreite eines Basissignals.
3. Die zu übertragenden Signale müssen jedes für sich frequenzbandbegrenzt sein, damit das *Shannonsche Abtasttheorem* nach Kapitel I.4.10 erfüllt wird.

## 1 Zeitmultiplexverfahren

Das Frequenzspektrum der in Bild IX-1 dargestellten Signalverläufe  $u_{S1}$ ,  $u_{S2}$  und  $u_{S3}$  wurde zunächst über ein Tiefpassfilter auf die höchste sinusförmige Signalfrequenz  $f_g$  begrenzt und dann mit einer Frequenz  $f_{ab} = 1/\Delta T$  abgetastet, die von  $f_g$  und der Anzahl  $n$  der Signale (hier 3) abhängt:

$$\text{Abtastfrequenz } f_{ab} \geq n \cdot 2 \cdot f_g \quad (\text{IX.1})$$

$n$  Zahl der zu übertragenden Basissignale,  $f_g$  höchste in den Signalen enthaltene Frequenz

Dabei wurde das Abtasttheorem nach Kapitel I.4.10, Gleichung (I.18), verwendet. In Gleichung (IX.1) ist berücksichtigt worden, dass, wie in der Praxis üblich, alle Signale mit der gleichen Frequenz abgetastet werden. Diese wiederum wird durch das Signal mit der höchsten zu berücksichtigenden Signalfrequenz vorgegeben. Die zu den diskreten Zeitpunkten abgetasteten Signalamplituden (1, 2, 3, ...) werden über den Schalter S1 nacheinander über den Übertragungskanal übertragen und im Empfänger mit dem Schalter S2 dem entsprechenden Kanal wieder zugeordnet. Man spricht deshalb von „quasi gleichzeitiger“ Übertragung. Um die Zuordnung der Schalterstellungen eindeutig zu machen, ist ein Synchronisationssignal  $u_{syn}$  erforderlich, das man entweder über eine zusätzliche Schalterstellung überträgt oder das über Zusatzinformationen zusammen mit den Signalamplituden gewonnen wird. Je nach Anforderung an die Störsicherheit der Übertragung muss entweder jede einzelne Schalterstellung eindeutig codiert dem Empfänger übermittelt werden, oder aber es genügt eine Kennung zur Weiterschaltung auf die nächste Schalterstellung bei gelegentlicher eindeutiger Synchronisation der Schalterstellungen. Die Übertragung kann in analoger (Bild IX-1) oder digital codierter Form erfolgen. Bei der digitalen Codierung bewährt sich ein Verfahren nach Kapitel V.4.4.7 und Bild V-35, das die Gewinnung des im Sender verwendeten Taktes ermöglicht.

### 1.1 Analoge Signalübertragung

Die für den Übertragungskanal erforderliche minimale Bandbreite bei analoger Signalübertragung berechnet sich zu:

- *Minimale erforderliche Bandbreite des Kanals:*

$$B_{an, \min} = n \cdot f_g + f_{syn} \quad (\text{IX.2})$$

$n$  Zahl der zu übertragenden Basissignale,  $f_g$  höchste in den Basissignalen enthaltene Frequenz (Sinusform) in Hz,  $f_{syn}$  Frequenz des Synchronisationssignals in Hz

Aufeinanderfolge der übertragenen diskreten Signalamplituden

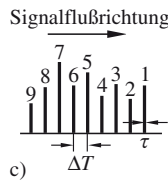
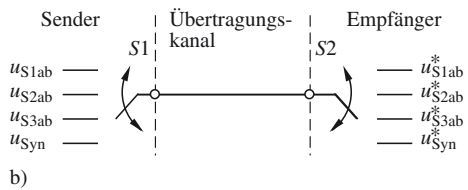
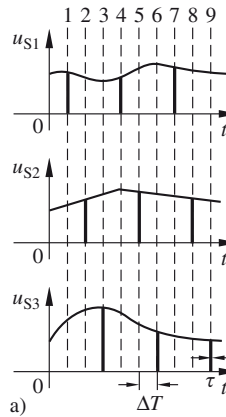


**Bild IX-1** Zeitmultiplexverfahren, analoge Übertragung

- a) Drei Signalverläufe
- b) Prinzip der Übertragung
- c) Signalverlauf auf dem Übertragungskanal

Die Frequenz  $f_{syn}$  des Synchronisationssignals ergibt sich aus dem verwendeten Übertragungsverfahren. Ein vollständiger Zyklus (Schalterumlauf) ist periodisch mit der Zeit  $t_{um}$ :

- *Zykluszeit eines Schalterumlaufes:*

$$t_{um} = n \cdot \tau + n \cdot t_{sch} + t_{syn} \quad (\text{IX.3})$$

$n$  Zahl der zu übertragenden Basissignale,  $\tau$  Dauer des abgetasteten Signals in s,  $t_{sch}$  Zeit zum Weiterschalten auf den nächsten Kanal in s,  $t_{syn}$  Zeit für die Schaltersynchronisation in s

In der Zeit  $t_{sch}$  ist neben der reinen Umschaltzeit meist noch ein Sicherheitsabstand enthalten, damit ein ungestörter Übergang auf das nächste Signal sichergestellt ist. Um die Zeit  $t_{sch}$  klein zu halten, werden Feldeffekt-Transistor-Schalter mit Schaltzeiten im ns-Bereich eingesetzt.

Die Zahl der zu übertragenden Signale kann bei gegebener Kanalbandbreite auch durch die endliche Dauer  $\tau$  der Abtastimpulse (Bild IX-1a, c) begrenzt werden, denn es muss gelten:

$$\tau < \Delta T = 1/f_{ab} \quad (\text{IX.4})$$

## 1.2 Digital codierte Signalübertragung

Die in Bild IX-1a dargestellten Amplitudenwerte werden in einem Analog-Digital-Umsetzer in digital codierte Signale umgesetzt und dann über den Kanal übertragen. Die erforderliche minimale Bandbreite lässt sich bestimmen:

- *Minimale erforderliche Bandbreite des Kanals:*

$$B_{\text{di, min}} = n \cdot k \cdot f_g + f_{\text{syn}} \quad (\text{IX.5})$$

$n$  Zahl der zu übertragenden Basissignale,  $k$  Zahl der Bits pro Amplitudenwert (Abtastwert),  $f_g$  höchste in den Basissignalen enthaltene Frequenz (Sinusform) in Hz,  $f_{\text{syn}}$  Zahl der Synchronisationsbits in 1/s

Die Übertragung digital codierter Amplitudenwerte erfordert nach Gleichung (IX.5) eine höhere Bandbreite als die analoge Übertragung nach Gleichung (IX.2), dafür ist sie aber auch weniger stör anfällig. Deshalb findet auch der *Digitale Satellitenrundfunk* (DSR) im unteren GHz-Bereich statt, weil dort die erforderliche große Bandbreite zur Verfügung steht. Auch bei ausreichender Kanalbandbreite muss die Bedingung

$$\Delta T > k \cdot T_{\text{bit}} \quad (\text{IX.6})$$

$k$  Zahl der Bits pro Amplitudenwert;  $T_{\text{bit}}$  Zeitdauer für ein Bit in s

eingehalten werden.

Die Deutsche Telekom verwendet für den Fernspreverkehr u.a. auch das Zeitmultiplexverfahren. Aus der Vielzahl der verwendeten Systeme seien zwei aufgeführt: 1. *System PCM 30*: Es werden 30 Gespräche gleichzeitig übertragen. Ein *Pulsrahmen* (entspricht einem Schalterumlauf) erzeugt 30 Codewörter zu je 8 Bit, die verschlüsselt die Amplitudeninformationen der 30 Kanäle enthalten. Es werden noch zwei weitere 8-Bit-Codewörter hinzugefügt, die u.a. Informationen über die Kennzeichen der Kanäle und eine Kennung des Rahmens enthalten. Jeder Kanal wird 8000mal pro Sekunde abgetastet, sodass sich ein Informationsfluss von  $8000 \cdot 8 \cdot 32 \text{ bit/s} = 2048 \text{ kbit/s}$  ergibt. 2. *System PCM 30720*: Es werden 30720 Gespräche gleichzeitig über eine Glasfaser von ca. 125  $\mu\text{m}$  Dicke über Hunderte von Kilometern übertragen.

## 2 Frequenzmultiplexverfahren

Das Frequenzmultiplexverfahren wurde und wird von der Deutschen Telekom u.a. in großem Umfang im Fernsprechnetz eingesetzt und soll hier anhand der TF-Technik (*Trägerfrequenz-Technik*) erläutert werden. Dieses Verfahren wurde für die analoge Telefon-technik verwendet. Zwar ist der Fernspreverkehr in der Zwischenzeit fast vollständig durch die Digital-technik mit ihren erweiterten Möglichkeiten ersetzt worden, aber an diesem System lässt sich das Verfahren anschaulich und nachvollziehbar darstellen. Die Zielsetzung war, so viel Gespräche wie möglich über

einen Kanal gleichzeitig zu übertragen und dabei eine ausreichende *Sprachverständlichkeit* zu gewährleisten. Die Übertragung der Sprache im Original wurde nicht angestrebt. Der Frequenzbereich für die analoge Gesprächsübermittlung (Basisband) wurde deshalb von 300 Hz bis 3,4 kHz festgelegt, weil Untersuchungen ergeben hatten, dass Frequenzen unterhalb 300 Hz die Sprachverständlichkeit erschweren, Frequenzen oberhalb 3,4 kHz sie *nicht weiter* erhöhen. Man kann den Frequenzbereich oberhalb 3,4 kHz deshalb abschneiden und Kanalbandbreite einsparen. Lediglich die Frequenz 3,85 kHz muss noch übertragen werden, weil sie die Rufnummer enthält. Der Frequenzbereich unterhalb 300 Hz ließ sich für z.B. für den Telefaxverkehr einsetzen.

Die zunächst naheliegende Vorgehensweise, die 3,85 kHz breiten Kanäle den Trägerfrequenzen im Abstand von 4 kHz in Einseitenbandtechnik aufzu-modulieren, und zwar mit 12 kHz beginnend bis in den 100-kHz-Bereich, scheitert an den nicht realisierbaren Bandpassfiltern, die z.B. die Frequenz 119,85 kHz (Rufnummer-Frequenz des Sprechkanals 116 kHz bis 119,4 kHz) noch vollständig unterdrücken müssen, 120,00 kHz bis 123,85 kHz durchlassen und 124,00 kHz wieder vollständig unterdrücken müssen. Das Problem lässt sich aber durch die im Folgenden dargestellte Technik lösen.

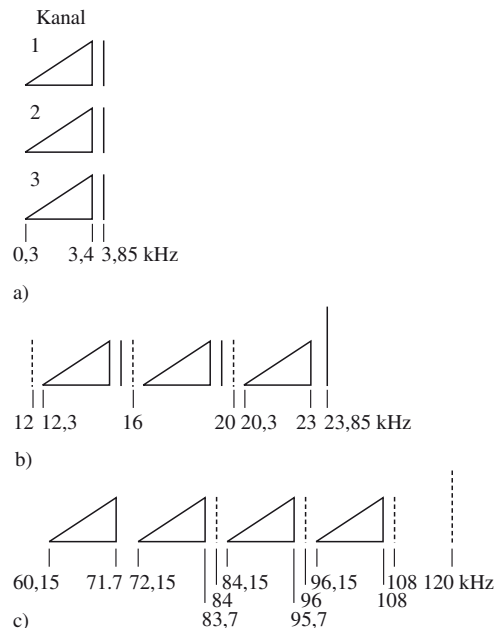


**Bild IX-2** Frequenzmultiplexverfahren  
am Beispiel des Fernsprechnetzes der Deutschen Telekom, unterdrückte Träger gestrichelt dargestellt

- a) Drei Fernsprechanäle
- b) Bildung der Vorgruppe
- c) Grundprimärgruppe

In Bild IX-2a sind drei Telefonkanäle dargestellt, wobei auch die Verbindung zum hausinternen Telefon einen Kanal darstellt. Zur Übermittlung des Kennzeichens (Rufnummer) wird die Frequenz 3,85 kHz verwendet. Im folgenden wird das mit BW 52 und BW 7 bezeichnete Verfahren erläutert. Kanal 1 wird einer Trägerschwingung mit 12 kHz, Kanal 2 einer mit 16 kHz und Kanal 3 einer mit 20 kHz in Einseitenband-Amplitudenmodulation (ESB-AM) ohne Träger in Normallage aufmoduliert, sodass das in Bild IX-2b eingezeichnete Frequenzspektrum dieser *Vorgruppe* von 12,3 kHz bis 23,85 kHz entsteht. In einer zweiten Modulationsstufe werden vier Vorgruppen der Frequenzlage von je 12 bis 24 kHz einer Trägerfrequenz 120 bzw. 108 bzw. 96 bzw. 84 kHz in ESB-AM und Kehrlage aufmoduliert und bilden die sogenannte *Grundprimärgruppe* (Bild IX-2c). Damit können bereits 12 Gespräche gleichzeitig über einen Übertragungskanal mit dem Frequenzbereich 60,15 kHz bis 107,7 kHz übertragen werden. Bei der Deutschen Telekom werden bzw. wurden noch weitere Gruppen gebildet (Sekundär-, Tertiär-, Quartärgruppen), sodass für die Übertragung u.a. folgende Systeme zur Verfügung stehen (Tabelle IX-1):

**Tabelle IX-1** Bei der Deutschen Telekom eingesetzte Frequenzmultiplexverfahren (Auswahl)

| System | Übertragungs-Frequenzband | Zahl der Gespräche (gleichzeitig) | Kabeltyp, Kabeldurchmesser innen/außen, Abstand der Zwischenverstärker |
|--------|---------------------------|-----------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| V300   | 60 bis 1296 kHz           | 300                               | Koaxialleitung, 1,2/4,4 mm, 4 km                                       |
| V960   | 60 bis 4028 kHz           | 960                               | Koaxialleitung, 1,2/4,4 mm, 4 km                                       |
| V2700  | 312 bis 12388 kHz         | 2700                              | Koaxialleitung, 2,6/9,5 mm, 4,65 km                                    |
| V10800 | 4,332 bis 59,684 MHz      | 10800                             | Koaxialleitung, 2,6/9,5 mm, 1,55 km                                    |

Dabei ist es möglich, den beim Verfahren V10800 nicht benutzten Frequenzbereich bis 4,332 MHz durch ein System V960 zu belegen. Der dann noch verbleibende freie Bereich von 0 bis 60 kHz wird von 6 bis 54 kHz durch eine der Trägerfrequenz 114 kHz aufmodulierte Grundprimärgruppe belegt. Die Bildung von Gruppen und damit die Mehrfachmodulationen (Träger 12, 16, 20 kHz, dann 120, 108, 96, 84 kHz) ist erforderlich, damit einerseits die Fernsprechanäle dicht beieinander liegen (Abstand 150 Hz bei der Vorgruppe, 450 Hz bei der Grundprimärgruppe) und so möglichst wenig Kanalbandbreite ungenutzt bleibt, andererseits die einzelnen Kanäle wieder eindeutig voneinander getrennt werden können. Außerdem ist die Einseitenbandfilterung in der Grundprimärgruppe erst möglich, weil die Seitenbänder 24 kHz auseinanderliegen (deshalb auch die niedrigste Trägerfrequenz 12 kHz in der Vorgruppe und nicht 8 oder 4 kHz). Verallgemeinert gilt für das Frequenzmultiplexverfahren, dass es dann einsetzbar ist, wenn der vorhandene Übertragungskanal (z.B.

Koaxialkabel) eine viel größere Bandbreite besitzt als ein Basissignal.

Die erforderliche Kanalbandbreite  $B_K$  ergibt sich aus den hier als gleich angenommenen Bandbreiten  $B_S$  der Basissignale:

• *Erforderliche Kanalbandbreite:*

$$B_K = n \cdot B_S + n \cdot \Delta f \tag{IX.7}$$

$B_S$  Signalbandbreite eines Basissignals in Hz;  $n$  Zahl der Basissignale;  
 $\Delta f$  Frequenzabstand zwischen zwei Basissignalen nach der Modulation zur Kanaltrennung in Hz

3 Raummultiplexverfahren

Beim Raummultiplexverfahren (SDM, *Space Division Multiplex*) werden *unterschiedliche* Signale über *unterschiedliche* Übertragungswege übertragen, und zwar *gleichzeitig*. Dieses Verfahren wird vielfach eingesetzt, auch wenn es zunächst nicht einsichtig erscheint. Es wird unterschieden zwischen drahtgebundenem und drahtlosem (kabellosem) Raummultiplexverfahren.

- *Drahtgebundenes Raummultiplexverfahren:* Eingesetzt wird dieses Verfahren in großem Rahmen in den Koppelnetzen der Telefon-Vermittlungstechnik, siehe dazu auch Bild XV-3 im Kapitel *Vermittlungstechnik*. Es können  $m$  ankommende Signale auf  $n$  abgehende Signale gleichzeitig weitergeleitet werden, wobei Überschneidungen unzulässig sind. Im ganz kleinen Rahmen wird es verwendet in Rundfunk- und Fernsehstudios, wo die Signale von Mikrofonen, Fernsehkameras und Bild- und Tonträgern auf laufende Programme und andere Bild- und Tonträger übertragen werden müssen.
- *Drahtloses Raummultiplexverfahren:* Bei diesem Verfahren wird eine Funkverbindung in mehreren räumlich weit voneinander entfernten Regionen auf gleicher Frequenz betrieben. Beim UKW-Rundfunk und beim terrestrischen Fernsehen werden gleiche oder auch unterschiedliche Programme auf der gleichen Frequenz übertragen. Das ist



auch auf nationalem Gebiet möglich, weil die Reichweite der verwendeten Frequenzen (ab etwa 85 MHz) nur bedingt über die optische Sicht hinausgeht und damit gegenseitige Beeinflussungen (Störungen) minimal gehalten werden können. Das Raummultiplexverfahren wird weiterhin angewendet im Mobilfunk. Die Leistung der Handys ist vergleichsweise niedrig und die Leistung der Sender wird bewusst niedrig gehalten. Damit kön-

nen die Senderabstände gering gehalten und die gleichen Frequenzen vielfach vergeben werden. Auch Richtfunkstrecken verwenden das Multiplexverfahren. Allerdings ist die gegenseitige Beeinflussung durch die ausgeprägte Richtwirkung vom Prinzip her schon gering.

Diese Technik wird bewusst eingesetzt, weil andernfalls nicht genügend Frequenzbereiche zur Verfügung stehen.

## X Richtfunktechnik

Die Nachrichtenübertragung über Richtfunkstrecken wird neben der Übertragung über Kabel eingesetzt. Gegenüber der Rundfunk- und Fernsehübertragung weist sie folgende Unterschiede auf:

1. Sender und Empfänger sind ortsfest. Da es nur einen Empfänger gibt, kann die Übertragung mit einem gerichteten elektromagnetischen Feld erfolgen.
2. Der verwendete Frequenzbereich liegt z.Zt. zwischen 300 MHz und 30 GHz. Damit werden Parabolantennen als Richtantennen eingesetzt, weil sie gute Richteigenschaften und handhabbare Abmessungen (Durchmesser < 4,5 m) aufweisen.
3. Die Übertragung geschieht quasioptisch, sodass Entfernungen bis maximal etwa 100 km überbrückbar sind. Bei größeren Entfernungen werden Zwischenstationen eingesetzt.

Durch diese Art der Übertragung ergeben sich folgende Vorteile:

1. Die verwendete Frequenz kann mehrfach benutzt werden, sofern die Richtfunkstrecken räumlich voneinander getrennt sind.
2. Die Richtfunkstrecke kann parallel zur Kabelübertragung eingesetzt werden und vermindert damit die Ausfallrate der Übertragungsstrecke.
3. Sie wird dort eingesetzt, wo eine Verlegung von Kabeln aus geografischen oder politischen Gründen nicht möglich ist. So wurde der Telefonverkehr mit Berlin während der Existenz der DDR über Richtfunkstrecken abgewickelt (Torfhaus–Berlin).
4. Richtfunkstrecken erfordern relativ wenig Aufwand und sind deshalb auch für mobile Anlagen geeignet. Häufig kann ein vorhandener hoher Turm für die Antennenmontage mitverwendet werden, sodass dadurch die Reichweite erhöht wird.

Der verwendete Frequenzbereich von 300 MHz bis 30 GHz ist aus folgenden Gründen besonders gut geeignet:

1. Durch die quasioptische Ausbreitung und die Bündelung treten wenig Überlagerungen mit anderen Signalen auf.

2. Das kosmische Rauschen ist genau in diesem Bereich besonders gering („Mikrowellenfenster“).
3. Die Dämpfung der Atmosphäre ist gering, und an den Schichten der Ionosphäre finden kaum Reflexionen statt.
4. Die Beugung und Reflexion an Regentropfen ist noch gering ( $f = 10 \text{ GHz} \cong \lambda = 3 \text{ cm}$ ).
5. Die Antennenabmessungen sind handlich.

Ein wesentlicher Nachteil ist die *Zusatzdämpfung* bei starken Niederschlägen, die ab etwa 10 GHz einsetzt. Zur Erhöhung der Verfügbarkeit einer Übertragungsstrecke, die durch Schwunderscheinungen (Überlagerung von zwei Feldern mit  $180^\circ$  Phasenverschiebung) verringert wird, verwendet man:

- *Frequenzdiversity*: Es wird das gleiche Signal über zwei parallele Übertragungskanäle mit unterschiedlichen Frequenzen übertragen.
- *Raumdiversity*: Die Übertragung geschieht räumlich auf zwei unterschiedlichen Wegen, wobei auch die Empfänger örtlich voneinander getrennt sind.

Einige weitere für die Übertragung wichtige Formeln und Begriffe sind hier aufgelistet.

- *Freiraumdämpfung*: Dies ist die Dämpfung zwischen Sende- und Empfangsantenne, wenn beide als Kugelstrahler ausgebildet sind:

*Freiraumdämpfungsmaß*

$$a_0 = 20 \cdot \lg \frac{4\pi l}{\lambda} \text{ in dB} \quad (\text{X.1})$$

$l$  Entfernung in m,  $\lambda$  Wellenlänge in m

- *Schwund*: Störungen der Ausbreitungsbedingungen. *Interferenzschwund*: Überlagerung von direkt empfangener und reflektierter Welle und damit teilweise oder totale Auslöschung. *Absorptions- und Streuverluste*: Streuung und Dämpfung durch Wassertropfen und Wasserdampf, besonders für Frequenzen ab 10 GHz.

- *Antennen*: Es werden hauptsächlich Parabolantennen mit Durchmessern < 4,5 m eingesetzt. Unter *Halbwertsbreite* versteht man den Winkel gegenüber der Hauptstrahlrichtung, bei der der Antennengewinn auf die Hälfte (–3 dB) abgesunken ist.

Bei Parabolantennen liegt der Winkel zwischen  $0,5^\circ$  und  $4^\circ$ . Die Halbwertsbreite sinkt mit steigendem Antennendurchmesser, sodass große Antennen eine größere Richtwirkung besitzen als kleine. (Siehe auch Kapitel IV.3.10, Parabolantennen).

- **Antennengewinnmaß:** Angegeben wird das logarithmische Maß (siehe auch Kapitel IV, Antennen, Gleichung (IV.10a, b, c)):

Antennengewinnmaß

$$G = 10 \cdot \lg \frac{4r^2 \pi^2 q}{\lambda^2} \quad \text{dB} \quad (\text{X.2})$$

$r$  Radius der Antenne in m,  $q$  Flächenausnutzungsfaktor,  $q \approx 0,6$ ,  $\lambda$  Wellenlänge in m

Dieses Antennengewinnmaß gilt sowohl für die Sende- als auch für die Empfangsantenne.

- **Gesamt-Systemdämpfung:** Das Gesamtdämpfungsmaß  $a_{\text{ges}}$  zwischen Sender und Empfänger lässt sich wie folgt berechnen:

Gesamt-Systemdämpfungsmaß:

$$a_{\text{ges}} = a_0 + a_L - (G_S + G_E) \quad (\text{X.3})$$

$a_0$  Freiraumdämpfungsmaß in dB nach Gleichung (X.1),  $a_L$  Zuleitungs-dämpfungsmaß in dB,  $G_S$ ,  $G_E$  Antennengewinnmaß der Sende- bzw. Empfangsantenne nach Gleichung (X.2)

Weitere Einzelheiten sind im Beispiel X.1 aufgeführt.

- **Scatterverbindung:** Bei dieser auch als *Überreichweitenanlage* bezeichneten Richtfunkstrecke besteht zwischen den zwei Richtfunkstellen keine optische Sicht. Der Einsatz von Relaisstationen ist aus geografischen oder politischen Gründen nicht möglich. Dann richtet man beide Antennen nach Bild X-1 auf einen gemeinsamen Punkt in der Troposphäre und nutzt die dort auftretenden Brechwertinhomogenitäten aus, die einen geringen Teil der Energie zur jeweils anderen Antenne reflektieren. Da dieser Anteil sehr klein ist, sind relativ hohe Sendeleistungen erforderlich. Dieses Verfahren wurde im Telefonverkehr zwischen der Bundesrepublik und Westberlin während der Existenz der DDR eingesetzt. Die Entfernung beträgt etwa 200 km. Auf dem Torfhaus (Harz) wurde in 800 m Höhe über NN unter einem Winkel von  $-0,5^\circ$  in Richtung Berlin gesendet. Etwa über Magdeburg traten Beugungen in 800 ... 1000 m Höhe auf, so-

dass ein kleiner Teil des Hauptstrahles auf die Empfangsantenne in Berlin umgelenkt wurde. Das Gleiche fand in umgekehrter Richtung statt. Die Sendeleistung, die bei optischer Sicht mit etwa 5 W ausgereicht hätte, musste auf 1 kW erhöht werden. Sende- und Empfangsantennen hatten bei einer Frequenz im Bereich von 2,1 ... 2,3 GHz einen Durchmesser von 10 m bzw. im Frequenzbereich von 1,7 ... 2,1 GHz einen Durchmesser von 18 m. Es wurde mit Raum-Diversity (s.o.) gearbeitet.

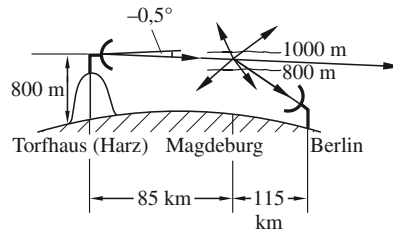


**Bild X-1** Scatterverbindung im Telefonverkehr Bundesrepublik – Westberlin

- **Beispiel X.1:** Ein Sender hat am Ausgang eine Leistung von 1 W bei einer Frequenz  $f = 12$  GHz ( $\lambda = 2,5$  cm) und speist über eine Zuleitung der Länge  $l_L = 10$  m und dem Dämpfungsmaß  $a_{LZ}^* = 12$  dB/100 m eine Parabolantenne mit einem Durchmesser von 2 m. In einer Entfernung  $l = 15$  km steht die Empfangsantenne mit dem gleichen Durchmesser. Mit  $q = 0,6$  und Gleichung (X.3) folgt:

$$\begin{aligned} a_{\text{ges}} &= 20 \cdot \lg \frac{4\pi l}{\lambda} + \frac{12 \text{ dB}}{100 \text{ m}} \cdot 10 \text{ m} - 20 \cdot \lg \frac{4r^2 \pi^2 q}{\lambda^2} \\ &= 20 \cdot \lg \frac{4 \cdot \pi \cdot 15 \cdot 10^3 \text{ m}}{2,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}} \text{ dB} + 1,2 \text{ dB} - 20 \cdot \lg \frac{4 \cdot \text{Im}^2 \cdot \pi^2 \cdot 0,6}{2,5^2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} \\ &= 137,5 \text{ dB} + 1,2 \text{ dB} - 91,6 \text{ dB} = 47,1 \text{ dB} \end{aligned}$$

Die Leistung  $P_E$  an der Empfängerantenne ergibt sich zu:

$$47,1 \text{ dB} = 10 \cdot \lg \frac{1 \text{ W}}{P_E} \Rightarrow P_E = \frac{1 \text{ W}}{10^{4,71}} = 19,5 \mu\text{W}.$$

Heute werden von der Telekom überwiegend *Digital-Richtfunksysteme (DRS)* eingesetzt. Ein solches System ist z.B. DRS 34/15000. Es ist ein PCM-System mit Puls-Code-Modulation und einer Übertragungsrate von 34 Mbit/s und überträgt im 15-GHz-Bereich. Damit lassen sich etwa 500 Fernsprechanäle gleichzeitig übertragen.

## XI Nachrichtenübertragung über Satellit

Satelliten werden in ca. 36000 km Höhe in eine geostationäre Umlaufbahn um die Erde gebracht, sodass sie die gleiche Umlaufzeit wie die Erde haben. Allerdings ist nur eine der unendlich vielen möglichen Umlaufbahnen optimal, nämlich die, bei der sich der Satellit wie die Erde dreht, von West nach

Ost, über dem Äquator positioniert (*erd- oder geosynchrone Umlaufbahn*). Der Satellit ändert seine Position gegenüber der Erdoberfläche nicht. Die Erde erscheint dem Satelliten unter einem Winkel von  $17,15^\circ$  Grad, und er erfasst etwa 42 % der Erdoberfläche. Allerdings ist seine Nutzung bei flachen Ein-



fallswinkeln kaum möglich. Es werden heute ausschließlich *aktive* Satelliten eingesetzt, die über eine eigene Empfangs- und Sendeanlage verfügen. Die in der Anfangszeit verwendeten *passiven* Satelliten hatten nur Reflektoren. Eine Nachrichtenübertragung über Satellit besteht aus einer oder mehreren Erdefunkstellen und dem Satelliten. Die Erdefunkstelle unterscheidet sich von einer Richtfunkstelle (siehe Kapitel X) durch die folgenden Punkte:

- eine nachführbare Antenne mit hohem Gewinn, da der Satellit nicht exakt ortsfest ist und die Entfernung ca. 36 000 km beträgt;
- eine hohe Sendeleistung wegen der großen Entfernung;
- aufwendige Empfängerschaltung wegen der geringen empfangenen Leistung.

Bei der Übertragung gibt es zwei Möglichkeiten:

- **Punkt-zu-Punkt-Verbindung:** Der Satellit wird als Relaisstation benutzt. Beispiel: Verbindung Europa–Amerika.
- **Vielfachzugang:** Mehrere Bodenstationen benutzen die gleiche Trägerfrequenz, aber das Basisband von z.B. 0 ... 500 MHz wird bereichsweise auf die Stationen aufgeteilt. Es wird das Frequenzmultiplexverfahren angewendet und einseitenbandmoduliert mit unterdrücktem Träger.

Für die Übertragung über Satellit ist der Frequenzbereich 300 MHz bis 30 GHz besonders geeignet, siehe Kapitel X, Richtfunktechnik. Dadurch ist eine Signalübertragung trotz hoher Freiraumdämpfung durch die große Entfernung mit vertretbarem Empfängeraufwand möglich.

- **Beispiel XI.1:** Das Freiraumdämpfungsmaß ergibt nach Gleichung (X.1) bei einer Frequenz  $f = 10$  GHz ( $\cong \lambda = 3$  cm) und einer Entfernung  $l = 36\,000$  km:

$$a_0 = 20 \cdot \lg \frac{4\pi l}{\lambda} = 20 \cdot \lg \frac{4\pi \cdot 3,6 \cdot 10^7 \text{ cm}}{3 \text{ cm}} \approx 203 \text{ dB}.$$

Benutzt die Erdefunkstelle eine Antenne mit dem Radius  $r_E = 12,5$  m (u.a. in Raisting bei München verwendet) und der Satellit eine mit  $r_S = 1$  m, ergeben sich die Antennengewinnmaße nach Gleichung (X.2) mit  $q = 0,6$  zu:

$$\text{Antennengewinnmaß } G = 10 \cdot \lg \frac{4r^2 \pi^2 q}{\lambda^2} \text{ dB}$$

$r$  Radius der Antenne in m,  $q$  Flächenausnutzungsfaktor,  $q \approx 0,6$ ,  $\lambda$  Wellenlänge in m

$$G_E = 10 \cdot \lg \frac{4 \cdot 12,5^2 \text{ m}^2 \cdot \pi^2 \cdot 0,6}{3^2 \text{ cm}^2} = 66,1 \text{ dB}$$

$$G_S = 10 \cdot \lg \frac{4 \cdot 1 \text{ m}^2 \cdot \pi^2 \cdot 0,6}{3^2 \text{ cm}^2} = 44,2 \text{ dB}$$

$$G_E + G_S = 110,3 \text{ dB}$$

Resultierend erhält man ein Gesamtdämpfungsmaß von 203 dB – 110,3 dB = 92,7 dB. Wird von einer Antenne die Leistung 1 kW abgegeben, empfängt die andere Antenne bei Vernachlässigung weiterer Dämpfungen die Leistung  $P_e$

$$92,7 \text{ dB} = 10 \cdot \lg \frac{1 \text{ kW}}{P_e} \Rightarrow P_e = 540 \text{ nW}.$$

Beispiel XI.1 zeigt, dass in der Erdefunkstelle Antennen mit möglichst großen Durchmessern verwendet werden müssen, und dass trotz hoher Senderleistung des Satelliten an die Empfänger auf der Erde hohe Anforderungen gestellt werden.

Intelsat betreibt derzeit mehr als 15 Satelliten, die mit über 800 über die Erdoberfläche verteilten Antennen erreicht werden können. Etwa 2/3 des interkontinentalen Fernsprechverkehrs und alle interkontinentalen Live-Sendungen des Fernsehens benutzen die Satellitenverbindung. Auch regionale und nationale Nachrichtenübertragungen werden zunehmend über Satelliten abgewickelt. Für Fernseh- und Rundfunkprogramme gibt es preiswerte Satellitenempfangsanlagen, die eine Alternative zum Programmempfang über Kabel darstellen und eine Fülle an unterschiedlichen Programmen bieten. Da die Satellitensender für Rundfunk- und Fernsehprogramme mit einer mehr als 10fachen Strahlungsleistung gegenüber den übrigen Nachrichtensatelliten senden, ist auf der Erde auch mit geringem Aufwand ein störungsfreier Empfang möglich.

Die Deutsche Bundespost hat 1989 einen nationalen Fernmeldesatelliten *DFS-Kopernikus* mit folgenden Zielen in Betrieb genommen:

- Fernsprech- und Datenübertragung zwischen der Bundesrepublik und Westberlin: 2 Kanäle mit je 90 MHz Bandbreite auf 14/12 GHz und ein Kanal mit ebenfalls 90 MHz Bandbreite auf 30/20 GHz.
- Fernsehübertragung zwischen der Bundesrepublik und Westberlin mit einem Kanal mit 90 MHz Bandbreite auf 14/12 GHz.
- Flächendeckende Übertragung von Fernsehprogrammen zur Einspeisung in örtliche Kabelnetze auf 5 Kanälen mit 44 MHz Bandbreite auf 14/12 GHz.
- Schnelle Datenübertragung und Videokonferenzübertragung auf 2 Kanälen mit je 44 MHz Bandbreite auf 14/12 GHz.

Durch die Auflösung der DDR hat sich das Konzept in der Zwischenzeit geändert. Der Satellit wird vorwiegend zur Übertragung von Fernsehprogrammen eingesetzt.

Aus den Einsatzgebieten für den Satellitenfunk seien einige wenige genannt: Der europäische Wettersatellit *Meteosat* gehört zu einem erdumspannenden Netz aus Wettersatelliten, deren Informationen allen Ländern zur Verfügung stehen. Die konventionelle Nachrichtenübertragung zwischen Schiffen und Landstationen über Kurzwellen wird durch Satellitenübertragung ersetzt. Einige weitere Anwendungen folgen unten.

Geostationäre Satelliten haben einige Vorteile:

- Ein erdumspannendes Kommunikationssystem kann mit nur drei Satelliten bei einer gegenseitigen Verschiebung von 120° erreicht werden.
- Nachrichtenverbindungen können mit erdfesten und mobilen Stationen aufgebaut werden.
- Es können auch größere Regionen flächendeckend erreicht werden.

Allerdings gibt es auch einige Nachteile:

- Das Erreichen der Polgebiete ist wegen des geringen Neigungswinkels nicht möglich.
- Die Signallaufzeit zwischen zwei Erdefunkstellen liegt zwischen 240 und 275 ms. Wendet man das *Raumdiversity-Verfahren* (Kapitel X, Richtfunktechnik) an, kann es zu Synchronisationsproblemen kommen.
- Während des Durchlaufes durch den Erdschatten muss die Stromversorgung der Satelliten von Batterien übernommen werden.
- **Transponder:** Der interne elektronische Aufbau von Satelliten ist u.a. so ausgelegt, dass er zwischen drei unterschiedlichen Betriebsarten umschalten kann, Bild XI-1.
- **Hochfrequenzdurchschaltung:** Die von der Erdefunkstelle empfangene Frequenz (z.B. 6 GHz) wird in einem Frequenzumsetzer in eine *niedrigere* Frequenz (z.B. 4 GHz) umgesetzt und zur Erde zurückgesendet. Im Satelliten lassen sich niedrigere Sendefrequenzen mit höherem Wirkungsgrad verarbeiten. Bei niedrigeren Frequenzen nimmt das Freiraumdämpfungsmaß ab, das Antennengewinnmaß ebenso, sodass das Gesamtdämpfungsmaß konstant bleibt (siehe Beispiel XI.1: nur  $\lambda$  ändert sich).

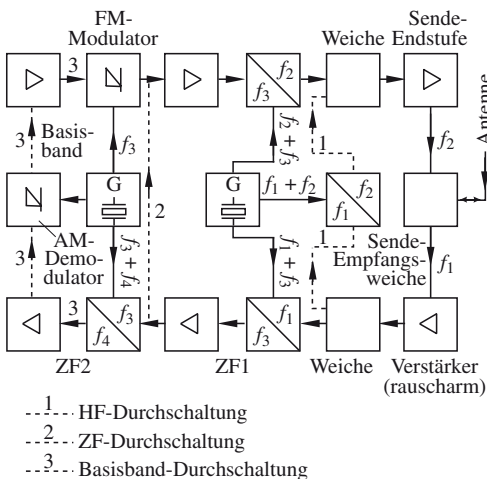


**Bild XI-1** Prinzipschaltbild eines Transponders

- **Zwischenfrequenzdurchschaltung:** Das empfangene Signal wird in eine deutlich niedrigere Frequenz, die erste Zwischenfrequenz (ZF1) umgesetzt und verstärkt. Das ist vorteilhaft, weil die niedrigere ZF1 einfacher zu handhaben ist.
- **Basisband-Durchschaltung:** Das Ausgangssignal der 1. ZF-Stufe wird erneut umgesetzt (ZF2), verstärkt und demoduliert, sodass man das Basisband-signal zur Verfügung hat. Dieses Verfahren ist dann erforderlich, wenn z.B. die Modulationsart geändert werden soll: Empfang eines einseiten-

bandmodulierten Signals mit unterdrücktem Träger und Aussendung eines frequenzmodulierten Signals. Neuere Satelliten haben mehr als 10 Transponder eingebaut, die die Sendestufe gemeinsam ansteuern.

- **Antennen:** Verwendet werden vorwiegend *Cassegrain-Antennen* (Doppelreflektorantennen), bei denen das Signal nach Bild XI-2 über einen kleinen Hornstrahler in der Mitte des Hauptreflektors in Richtung auf einen hyperbolischen Hilfsreflektor eingespeist wird, der das Signal zum Hauptreflektor zurückwirft, von wo aus es endgültig die Antenne verlässt. Durch diesen Aufbau werden Antennenwirkungsgrade von über 65 % erreicht.

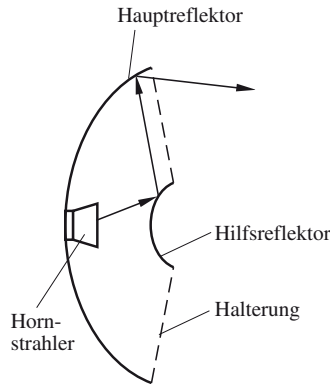


**Bild XI-2** Cassegrain-Antenne

- **Polarisation:** Durch horizontale bzw. vertikale Polarisation lassen sich auf der gleichen Trägerfrequenz zwei getrennte Signale übertragen. Ebenso kann man bei der zirkularen Polarisation zwischen links- und rechtsdrehend unterscheiden.
- **Energieversorgung:** Die Energieversorgung geschieht überwiegend mit Solarzellen, wobei Akkumulatoren die Speisung während des Durchlaufes durch den Erdschatten übernehmen. Über die Sonnenstrahlung steht eine Leistung von 25 ... 50 W je  $\text{m}^2$  Solarzellenfläche zur Verfügung. Die für den Betrieb des Satelliten erforderliche Leistung kann je nach Typ bei maximal 2 ... 5 kW liegen, sodass Flächen von bis zu 80  $\text{m}^2$  benötigt werden. Das lässt sich durch ausklappbare Paddel erreichen, die so ausgerichtet werden, dass sie stets optimal zur Sonne stehen.
- **DSR – Digitales Satellitenradio:** Übertragung von Hörfunkprogrammen in CD-Qualität durch Übertragung der Information in digital kodierter Form.  
Daten: Frequenzbereich: 11,7 ... 12,5 GHz; 40 Kanäle mit je 27 MHz Bandbreite; Kanalabstand etwa 19,2 MHz; durch zirkuläre kanalweise wechselnde Polarisation keine Störung benachbarter Kanäle; Frequenzmodulation.
- **Footprint** eines Satelliten: Darstellung der vom Satelliten auf die einzelnen Punkte der Erdober-

fläche abgestrahlten Leistung einschließlich des Antennengewinns. Es werden Linien gleicher Leistung eingetragen. Damit kann die Leistungsabnahme vom Zentrum zu den Außenzonen abgelesen werden. Die Beschriftung dieser Linien kann z.B. in *EIRP, equivalent isotropically radiated power*, in logarithmischem Maßstab mit der „Einheit“ dBW erfolgen. Für den Satelliten Astra-1D gilt im Zentrum ein Wert von 51 dBW. Daraus lässt sich die Verfügbarkeit eines Programmes bzw. die erforderliche Größe der Empfangsantenne bestimmen. Alternativ dazu kann das Diagramm auch mit der auf der Erdoberfläche herrschenden Leistungsflussdichte beschriftet werden (*PF*), da EIRP und PFD in einem festen Verhältnis zueinander stehen. Dieser ebenfalls logarithmische Wert wird in dB(W/m<sup>2</sup>) angegeben.

Für eine gute Fernsehbildqualität ist ein Signal-Rausch-Verhältnis  $S/N \geq 38$  dB erforderlich. Bezieht man den Gewinn durch Frequenzmodulation,  $G_{FM}$ , mit ein, folgt für das Träger-Rausch-Verhältnis  $C/N$ :

$$\frac{C}{N} = \frac{S}{N} - G_{FM} \quad (XI.1)$$

Setzt man als Näherungswert

$$G_{FM} \approx 26 \text{ dB} \quad (XI.2)$$

ein, ergibt sich für eine gute Fernsehbildqualität:

$$\frac{C}{N} \geq 12 \text{ dB}. \quad (XI.3)$$

Es gilt:

$$\frac{C}{N} = \frac{G}{T} \cdot P_0 \cdot \frac{\lambda^2}{4 \cdot \pi \cdot k \cdot B}$$

bzw.

$$\frac{C}{N} = 10 \cdot \lg \left\{ \frac{G_e}{T} \cdot P_0 \cdot \frac{\lambda^2}{4 \cdot \pi \cdot k \cdot B} \right\} \text{ in dB} \quad (XI.4)$$

$P_0$  Leistungsflussdichte in W/m<sup>2</sup>;  $\lambda$  Wellenlänge in m;  $k$  Boltzmann-Konstante in  $1,38 \cdot 10^{-23}$  Ws/K;  $B$  Bandbreite in Hz (hier meist 27 MHz)

mit der Güte  $G_e/T$  der Empfangsanlage in „Gewinn pro Kelvin“:

$$\frac{G_e}{T} = \frac{G \cdot a}{a \cdot T_A + (1-a) \cdot T_u + (F-1) \cdot T_u} \text{ in 1/K} \quad (XI.5)$$

$G$  Antennengewinn;  $a$  Wirkungsgrad,  $a \approx 0,95 \dots 0,97$ ;  $T_A$  Rauschtemperatur der Antenne in K,  $T_A \approx 50$  K;  $T_u$  Umgebungstemperatur in K,  $T_u \approx 293$  K;  $F$  Rauschzahl des Empfängers (LNB);  $G$  siehe Gleichung (XI.6)

In den Formeln (XI.4 und 5) sind lediglich die Faktoren  $G$  und  $F$  beeinflussbar. Danach kann ein niedriges Signal-Rausch-Verhältnis letztlich nur über einen entsprechend großen Antennenradius  $r$  und eine niedrige Rauschzahl des Empfängers (mit LNB, low noise block, bezeichnet) erreicht werden (Gleichung X.2):

$$G = q \left( \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{\lambda} \right)^2 \quad (XI.6)$$

$r$  Radius der Antenne in m;  $q$  Flächenausnutzungsfaktor,  $q \approx 0,6$ ;  $\lambda$  Wellenlänge in m

- *GPS: Global Positioning System*. Dabei handelt es sich um ein satellitengestütztes System zur Positionsbestimmung. Weitere Einzelheiten dazu sind im Kapitel *Nachrichtentechnik XIII Funkmesstechnik – Radar* aufgeführt.

- *Fernsehbild- und Rundfunk-Empfang über Satelliten der ASTRA-Serie*. Für die Übertragung von Rundfunk- und Fernsehprogrammen werden u.a. Satelliten („Fernsehsatelliten“) der ASTRA-Serie eingesetzt, die von SES ASTRA S. A. in Betzdorf, Luxemburg, betrieben werden. Über diese Satelliten werden die Programme der deutschen Öffentlich-Rechtlichen Rundfunk- und Fernsehanstalten vorwiegend übertragen. Begonnen wurde mit den Satelliten 1A (1988 bis 2004) und 1B (1991 bis 2006), die inzwischen abgeschaltet worden sind. Als Nachfolger sind u.a. die Satelliten 1H und 1M auf der geostationären Position 19,2° Ost aktiv. Diese Position ist zur Versorgung von Westeuropa besonders gut geeignet. Übertragen wird im Frequenzbereich von 10,7 GHz bis 12,75 GHz, der in 7 Bänder (A bis G) aufgeteilt ist: A bis D → Low-Band, E bis G → High-Band. Zusätzlich wurde das Ka-Band im Frequenzbereich 18,3 bis 18,8 GHz eingerichtet, auf dem die Satelliten der neueren Generation (z.B. 1H und 1L) nicht nur, aber auch, senden. Jedem Satelliten sind aus diesem Spektrum 3 bis 5 Bänder zugeteilt. Die Satelliten haben ein Gewicht im Bereich von etwa 3500 kg bis 6500 kg, eine Ausgangsleistung bis 200 W, Leistungsverbrauch der Satelliten intern in der Größenordnung 6 bis 10 kW, erwartete Lebensdauer ca. 15 Jahre. Die Satelliten haben Antriebsaggregate, die sie einerseits genau auf der geostationären Position halten, andererseits das Einschwanken in eine neue Position ermöglichen. Aktuelle Daten zu den einzelnen Satelliten kann man erfahren über die Internetseite [www.ses-astra.com](http://www.ses-astra.com) der oben genannten Betreiberfirma.

- *Intelsat*. Im Jahr 1965 wurde Intelsat gegründet mit der Zielsetzung, durch den Einsatz von Satelliten die Datenkommunikation im Sinne von Daten-, Bild- und Ton-Übertragung weltweit ohne merkliche Verzögerung zu ermöglichen. Der erste medienwirksame Einsatz erfolgte mit der direkt übertragenen Mondlandung der drei amerikanischen Astronauten im Jahr 1969. Heute werden Datenkanäle vermietet, um z.B. Videokonferenzen weltweit in Echtzeit durchzuführen oder Korrespondentenberichte zeitnah und aktuell zu den entsprechenden Fernsehsendungen zu übermitteln. Auch Fernsehprogramme werden übertragen, wenn auch nicht unbedingt die Sendungen der Öffentlich-Rechtlichen Fernsehanstalten.

XII Nachrichtenübertragung über Lichtwellenleiter (LWL)

Die optische Nachrichtenübertragung gewinnt an Bedeutung, weil sie nicht durch elektromagnetische Störfelder beeinflusst wird. Sender- und Empfängerkreis sind außerdem galvanisch voneinander getrennt, und es stehen Impulsraten zur Verfügung, die bei Kupferkabeln nur mit wesentlich höheren Kosten erreicht werden können. Zur Übertragung steht theoretisch der Bereich des sichtbaren Lichtes mit dem sich anschließenden nahen Infrarotbereich zur Verfügung. Praktisch aber wird dieser Bereich auf drei Fenster eingeschränkt, siehe Punkt „Dämpfung“.

1 Physikalische Grundlagen

- *Reflexion und Brechung:* Der Lichtwellenleiter besteht nach Bild XII-1 aus dem Kern mit der Brechzahl  $n_1$  und dem Mantel mit einer etwas geringeren optischen Dichte und der Brechzahl  $n_2$ . Das Licht tritt aus dem Medium mit der Brechzahl  $n_0$  (z.B. Luft) unter dem Winkel  $\alpha$  in den Kern ein. Der Winkel  $\beta$  lässt sich bestimmen nach dem *Brechungsgesetz von Snellius*:

$$\sin \beta = \frac{n_0}{n_1} \cdot \sin \alpha \tag{XII.1}$$

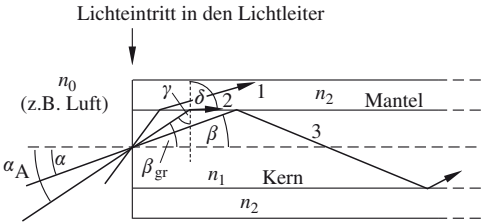


Bild XII-1 Reflexion und Brechung von Licht bei einem Lichtwellenleiter

Dieser Strahl trifft auf die Grenzfläche Kern–Mantel und wird wiederum reflektiert. Dabei gibt es drei Möglichkeiten:

1. Der Strahl dringt in den Mantel ein und ist für die Übertragung verloren (Strahl 1, Brechung).

2. Der Strahl wird so reflektiert, dass er genau parallel zur Grenzfläche Kern–Mantel verläuft (Strahl 2).
3. Er wird total reflektiert (Strahl 3, Totalreflexion).

- *Akzeptanzwinkel, numerische Apertur:* Der Grenzfall (Strahl 2), dass das Licht nicht in den Mantel eindringt und damit für die Nachrichtenübertragung zur Verfügung steht, ist erreicht, wenn  $\delta = 90^\circ$  ist:

$$(\sin \gamma)_{\text{gr}} = \frac{n_2}{n_1} \cdot \sin \delta = \frac{n_2}{n_1} \cdot \sin (90^\circ) = \frac{n_2}{n_1}$$

Der maximal zulässige Winkel  $\alpha_A$  (Bild XII-1), unter dem das Licht in den Lichtleiter eindringen darf, errechnet sich damit zu:

$$\begin{aligned} \sin \alpha_A &= \frac{n_1}{n_0} \cdot \sin \beta_{\text{gr}} = \frac{n_1}{n_0} \cdot \cos \gamma = \frac{n_1}{n_0} \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \gamma} \\ &= \frac{n_1}{n_0} \sqrt{1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}} = A_N \end{aligned} \tag{XII.2}$$

$n_0, n_1, n_2$  Brechzahlen (siehe Bild XII-1)

$\alpha_A$  ist der *Akzeptanzwinkel*,  $\sin \alpha_A = A_N$  die *numerische Apertur*.

- *Näherung für die numerische Apertur mit  $n_0 = 1$  (Luft) und  $n_1 \approx n_2$ :*

$$\begin{aligned} \frac{n_1^2 - n_2^2}{2 \cdot n_1^2} &= \frac{(n_1 + n_2) \cdot (n_1 - n_2)}{2 \cdot n_1^2} \\ &\approx \frac{2 \cdot n_1 \cdot (n_1 - n_2)}{2 \cdot n_1^2} \approx \frac{n_1 - n_2}{n_1} = \Delta \tag{XII.3} \\ A_N &\approx n_1 \sqrt{2 \cdot \Delta} \approx n_1 \sqrt{2 \cdot \frac{n_1 - n_2}{n_1}} \end{aligned}$$

- *Relative Brechzahldifferenz:*  $\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1}$ , siehe Gleichung (XII.3). Bei Quarzglas-Lichtwellenleitern gilt:  $n_1 \approx 1,5, \Delta \approx 0,01$ .

Tabelle XII-1 Frequenzbereiche für Lichtwellenleiter

| Farbe                            | Wellenlänge                                                                                                                   | Frequenz                                                                                                                                     | Bemerkungen                                |
|----------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| violett<br>bis<br>Infrarot       | 0,38 $\mu\text{m}$<br>bis<br>(0,78 ... 1,6) $\mu\text{m}$                                                                     | $7,89 \cdot 10^{14} \text{ Hz} = 789 \text{ THz}$<br>bis<br>$(3,85 \dots 1,87) \cdot 10^{14} \text{ Hz} =$<br>(385 ... 187) THz              | Für Lichtwellenleiter möglicher Bereich    |
| Infrarot<br>Infrarot<br>Infrarot | $\approx (0,82 \dots 0,85) \mu\text{m}$<br>$\approx (1,22 \dots 1,33) \mu\text{m}$<br>$\approx (1,52 \dots 1,57) \mu\text{m}$ | $(3,66 \dots 3,53) \cdot 10^{14} \text{ Hz}$<br>$(2,46 \dots 2,26) \cdot 10^{14} \text{ Hz}$<br>$(1,97 \dots 1,91) \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ | Für Lichtwellenleiter ausgenutzte Bereiche |

- **Moden:** Diejenigen Lichtwellen, die im Lichtleiter ausbreitungsfähig sind. Ihre Zahl hängt ab vom Kerndurchmesser, von der Lichtwellenlänge und der numerischen Apertur. (Siehe auch Beispiel XII.3).
- **Modendispersion, Impulsverbreiterung:** Zeitliche Verbreiterung des Ausgangssignals gegenüber dem Eingangssignal durch die unterschiedlichen Laufzeiten der Lichtwellen bei den möglichen Eintrittswinkeln  $\alpha$  in den Lichtleiter ( $0 \leq \alpha \leq \alpha_A$ , Gleichung (XII.2)). Bei impulsförmigem Lichtsignal am Lichtleitereingang spricht man auch von *Impulsverbreiterung*.
- **Bandbreite:** Die bei Lichtwellenleitern *theoretisch* zur Verfügung stehende Bandbreite lässt sich aus Tabelle XII-1 bestimmen, indem die jeweilige Kanalbreite errechnet wird:  
 $(3,66 - 3,53) \cdot 10^{14} \text{ Hz} = 0,13 \cdot 10^{14} \text{ Hz} = 13 \text{ THz}$   
 $(2,46 - 2,26) \cdot 10^{14} \text{ Hz} = 0,2 \cdot 10^{14} \text{ Hz} = 20 \text{ THz}$   
 $(1,97 - 1,91) \cdot 10^{14} \text{ Hz} = 0,06 \cdot 10^{14} \text{ Hz} = 6 \text{ THz}$   
 Auch wenn die Impulsverbreiterung (siehe unten) diese theoretischen Werte verringert, steht dennoch ein vergleichsweise großer Übertragungsbereich zur Verfügung.
- **Dämpfung:** Im Wesentlichen tragen drei Mechanismen zur Dämpfung von Lichtwellen im Lichtwellenleiter bei:
  - Rayleighstrahlung: Streustrahlung durch mikroskopisch kleine Dichte- und damit Brechzahl-schwankungen.
  - Resonanzabsorption durch Verunreinigungen.
  - Grunddämpfung durch Verluste bei der Lichtübertragung.

Trägt man die Summe dieser Dämpfungen als Funktion der Frequenz auf, ergibt sich für Quarzglas der in Bild XII-2 gezeigte Verlauf [XII.1]. Für die technische Ausnutzung ergeben sich daraus die in Tabelle XII-1 aufgelisteten drei Fenster zur Signalübertragung, weil dort die Dämpfung relativ niedrig ist. Für die Rayleigh-Streuung gilt: Dämpfung  $\sim 1/\lambda^4$ .

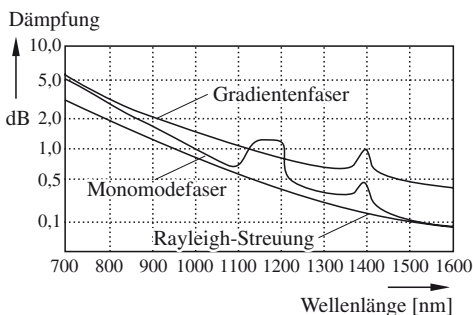


**Bild XII-2** Dämpfung als Funktion der Wellenlänge für Quarzglas [XII.1]

## 2 Grundmodelle von Lichtwellenleitern

Für die Abmessungen des Lichtleiters und die Abhängigkeit der Brechzahlen  $n_1$ ,  $n_2$  innerhalb des Lichtleiters vom Radius haben sich drei Modelle als brauchbar erwiesen, Bild XII-3.

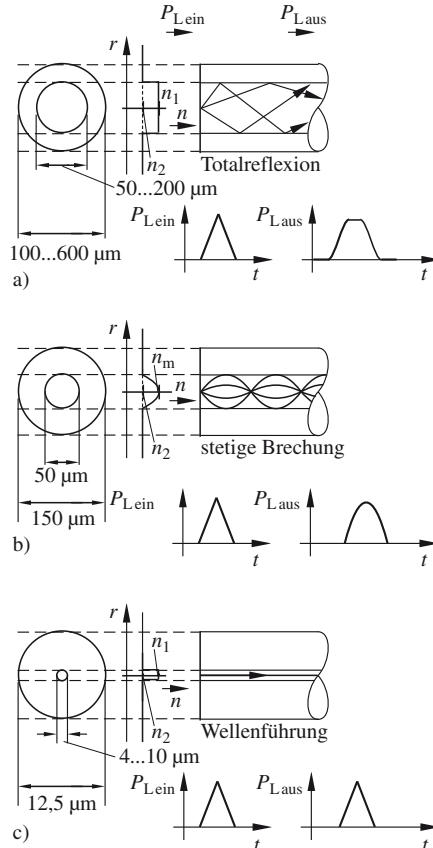


**Bild XII-3** Lichtwellenleitertypen

- a) Mehrmoden-Stufenindex
- b) Mehrmoden-Gradientenindex
- c) Einmoden-Stufenindex

### 2.1 Mehrmoden-Stufenindex mit Totalreflexion

Nach Bild XII-3a geht der Mantel mit der Brechzahl  $n_2$  abrupt in den Kern mit der Brechzahl  $n_1$  über. Der Lichteintritt ist nach Gleichung (XII.2) so ausgelegt, dass Totalreflexion stattfindet. Diejenigen Lichtstrahlen, die weniger oft reflektiert werden, erreichen eher das Ende des Lichtleiters als die anderen. Deshalb wird die in Bild XII-3 skizzierte Lichtleistung  $P_{L\text{ein}}$  am Eingang entsprechend als  $P_{L\text{aus}}$  am Ausgang empfangen. Form und Dauer haben sich geändert. Deshalb werden vorzugsweise digital kodierte Signale übertragen, bei denen begrenzte Kurvenformänderungen zulässig sind. Allerdings wird die zur

Verfügung stehende Bandbreite der Lichtleiter durch die Signalverlängerung herabgesetzt. Die Zahl  $M_s$  der ausbreitungsfähigen Moden kann mit der folgenden Formel abgeschätzt werden:

● *Ausbreitungsfähige Moden:*

$$M_s \approx 2 \left( \frac{\pi \cdot r_0}{\lambda} \right)^2 (n_1^2 - n_2^2) \tag{XII.4}$$

$r_0$  größter Kernradius in m;  $\lambda$  Lichtwellenlänge im Vakuum in m;  
 $n_1$  Brechzahl des Kerns;  $n_2$  Brechzahl des Mantels

Der größtmögliche Laufzeitunterschied  $\Delta t_s$  eines Lichtleiters der Länge  $l$  ergibt sich aus der Differenz zwischen Grundmode und dem Mode höchster Ordnung:

● *Impulsverbreiterung:*  $\Delta t_s \approx \frac{l}{c} \cdot n_1 \cdot \Delta$  (XII.5)

$n_1$  Brechzahl des Kerns;  $c$  Lichtgeschwindigkeit im Vakuum in m/s;  
 $l$  Lichtleiterlänge in m;  $\Delta$  siehe Gleichung (XII.3)

2.2 Mehrmoden-Gradientenindex

Bild XII-3b stellt das Prinzip dar. Die Brechzahl  $n$  im Kern hängt vom Radius  $r$  ab:

$$n(r) = n_M \left[ 1 - 2 \cdot \Delta \left( \frac{r}{R} \right)^x \right]^{1/2},$$

häufig auch

$$n(r) = n_M \left[ 1 - \Delta \cdot \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \tag{XII.6}$$

$n_M$  Brechzahl in Kernmitte;  $R$  Konstante in m;  $x$  Konstante;  $r_0$  größter Kernradius in m;  $\Delta$  siehe Gleichung (XII.3)

Die Zahl  $M_G$  der ausbreitungsfähigen Moden ist halb so groß wie beim Mehrmoden-Stufenindex:

● *Ausbreitungsfähige Moden:*  $M_G = \frac{M_s}{2}$  (XII.7)

$M_s$  siehe Gleichung (XII.4)

Man erhält für alle Moden geringere Laufzeitunterschiede, sodass die Modendispersion geringer ist als

bei Lichtleitern mit Mehrmoden-Stufenindex:

● *Impulsverbreiterung:*  $\Delta t_G = \frac{l}{c} \cdot n_1 \cdot \frac{\Delta^2}{2}$  (XII.8)

$n_1$  Brechzahl Kern;  $c$  Lichtgeschwindigkeit im Vakuum in m/s;  
 $l$  Lichtleiterlänge in m;  $\Delta$  siehe Gleichung (XII.3)

Damit ist dieser Lichtleiter besonders geeignet für einen hohen Informationsfluss oder große Entfernungen. Nachteilig ist das aufwendige Herstellungsverfahren, da die Brechzahl des Quarzglaskernes durch das Aufbringen einer Vielzahl von Glasschichten übereinander variiert wird.

2.3 Einmoden-Stufenindex

Es kann sich nur ein Modus längs der Faserachse ausbreiten, sodass die Dispersion und damit die Impulsverbreiterung theoretisch entfällt (Bild XII-3c). Für den Kernradius  $r$  muss dann folgende Forderung erfüllt sein:

● *Kernradius:*  $r \leq \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{2,405}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$  (XII.9)

$\lambda$  Lichtwellenlänge im Vakuum in m;  $n_1$  Brechzahl des Kerns;  
 $n_2$  Brechzahl des Mantels

Die Impulsverbreiterung  $\Delta t_E$  ist theoretisch null, in der Praxis kann man mit folgendem Wert rechnen:

● *Impulsverbreiterung (praktisch):*  
 $\Delta t_E = M_\lambda \cdot \Delta \lambda \cdot l$  (XII.10)

$M_\lambda$  Dispersion in s/(m · m), hängt von  $\lambda$  ab;  $\Delta \lambda$  Linienbreite der Lichtquelle in m;  $l$  Lichtleiterlänge in m

Mit diesen Lichtleitern lassen sich sehr große Entfernungen bei sehr großer Signalbandbreite überbrücken. Nachteilig sind der kleine Kerndurchmesser (siehe Beispiel XII.2) sowie die damit verbundenen Probleme beim Aneinanderfügen von zwei Kabeln. Die Stoßstelle muss auf Bruchteile von Mikrometern genau justiert werden.

Tabelle XII-2 listet einige typische Eigenschaften von Lichtleitern der drei beschriebenen Leiterarten auf.

Tabelle XII-2 Daten von Lichtwellenleitern

| Leiterart                 | Kerndurchmesser<br>in µm | Manteldurchmesser<br>außen<br>in µm | Dämpfung<br>bei 850 nm<br>in dB/km | Dispersion<br>in ns/km | Bitrate<br>bei 1 km<br>Länge<br>in Mbit/s | Impulsverbreiterung<br>bei 1 km<br>Länge<br>in ns |
|---------------------------|--------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|------------------------|-------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| Mehrmoden-Stufenindex     | 50 ... 200               | 100 ... 600                         | 5 ... 30                           | 40 ... 50              | ≈ 60                                      | 10 ... 100                                        |
| Mehrmoden-Gradientenindex | 50                       | 150                                 | 3 ... 10                           | 1 ... 2                | ≈ 600                                     | 0,1 ... 1                                         |
| Einmoden-Stufenindex      | 4 ... 10                 | 12,5                                | 2 ... 5                            | 0,1 ... 0,2            | ≈ 1000                                    | <0,005                                            |



■ **Beispiel XII.1:** Gegeben sind die Brechzahlen  $n_1 = 1,51$ ,  $n_2 = 1,50$ . Dann folgt:  $\Delta = \frac{1,51 - 1,50}{1,50} = 0,0067$ . Die Impulsverbrei-

terung für einen Lichtwellenleiter von 1 km Länge errechnet sich zu:

a) Stufenprofilfaser:

$$\Delta t_s = \frac{l}{c} \cdot n_1 \cdot \Delta = \frac{1 \text{ km}}{3 \cdot 10^5 \text{ km/s}} \cdot 1,51 \cdot 0,0067 = 34 \text{ ns} \quad \text{bei } l = 1 \text{ km}$$

b) Gradientenfaser:

$$\Delta t_s = \frac{l}{c} \cdot n_1 \cdot \Delta = \frac{1 \text{ km}}{3 \cdot 10^5 \text{ km/s}} \cdot 1,51 \cdot \frac{0,0067^2}{2} = 0,11 \text{ ns} \quad \text{bei } l = 1 \text{ km}$$

c) Monomodefaser mit der Dispersion 3 ps/(nm · km) und einer Laserlichtquelle mit der Linienbreite  $\Delta\lambda = 5 \text{ nm}$ :

$$\Delta t_E = (3 \text{ ps/(nm} \cdot \text{km)}) \cdot 5 \text{ nm} \cdot 1 \text{ km} = 15 \text{ ps} \quad \text{bei } l = 1 \text{ km}$$

Für die ausnutzbare Bandbreite infolge der Impulsverbreiterung ergeben sich folgende Näherungswerte:

### 3 Technische Ausführung von Lichtwellenleitern

Lichtwellenleiter werden aus Quarzglas ( $\text{SiO}_2$ ) hergestellt. Der Kern wird mit Germaniumdioxid, Fluor oder Bortrioxid dotiert. Auf den Mantel wird eine Kunststoffschuttschicht aufgebracht, die neben einem mechanischen Schutz auch sicherstellt, dass in den Mantel eindringende Lichtstrahlen in diese Schuttschicht übergehen und absorbiert werden. Bei Mehrmoden-Gradientenleitern bringt man etwa 40 bis 50 einzelne Schichten aufeinander, um die Brechzahl in Abhängigkeit vom Kernradius zu ändern. Für einen ausreichenden mechanischen Schutz der Lichtleiterkabel entsprechend dem von Kupferkabeln wird es in eine Aderhülle aus Kunststoff lose eingelegt, und zwar entweder eine einzelne Ader pro

**Tabelle XII-3** Bandbreite nach Beispiel XII.1 bei 1 km Lichtleiterlänge

| Wellenlänge<br>(technisch ausgenutzter Bereich)                                                                               | Frequenz<br>(technisch ausgenutzter Bereich)                                                                                                 | theoretisch verfügbare Bandbreite bei 1 km Länge | Impulsverbreiterung, Beisp. XII.1 bei 1 km Länge | Bandbreite mit Impulsverbreiterung bei 1 km Länge                                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $\approx (0,82 \dots 0,85) \mu\text{m}$<br>$\approx (1,22 \dots 1,33) \mu\text{m}$<br>$\approx (1,52 \dots 1,57) \mu\text{m}$ | $(3,66 \dots 3,53) \cdot 10^{14} \text{ Hz}$<br>$(2,46 \dots 2,26) \cdot 10^{14} \text{ Hz}$<br>$(1,97 \dots 1,91) \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ | 13 THz<br>20 THz<br>6 THz                        | 34 ns<br>0,11 ns<br>15 ps                        | $\approx 14,5 \text{ MHz}$<br>$\approx 4,4 \text{ GHz}$<br>$\approx 33 \text{ GHz}$ |

Um die theoretisch verfügbare Bandbreite in der Praxis optimal zu nutzen, werden nur geringe Leiterlängen von einigen km verwendet und Zwischenverstärker eingefügt. Bei den Einmoden-Lichtleitern ist die Impulsverbreiterung durch die Linienbreite der Lichtquelle gegeben. Es werden deshalb Laserlichtquellen mit einem entsprechend niedrigen Wert eingesetzt.

■ **Beispiel XII.2:** Ein Monomode-Lichtleiter soll die Lichtwellenlänge  $\lambda = 0,85 \mu\text{m}$  übertragen. Für die Brechzahlen gilt:  $n_1 = 1,51$ ,  $n_2 = 1,50$ . Nach Gleichung (XII.9) folgt daraus:

$$r \leq \frac{0,85 \mu\text{m}}{2\pi} \cdot \frac{2,405}{\sqrt{1,51^2 - 1,50^2}} = 1,88 \mu\text{m}$$

Der Radius kommt in die Größenordnung der Lichtwellenlänge, und bei diesen Lichtleiterabmessungen werden an die Herstellung hohe Anforderungen gestellt.

■ **Beispiel XII.3:** Für einen Lichtleiter mit Mehrmoden-Stufenindex sind gegeben: Brechzahlen  $n_1 = 1,51$ ,  $n_2 = 1,50$ , zu übertragende Wellenlänge  $\lambda = 0,85 \mu\text{m}$ , Radius des Lichtleiters  $r_0 = 25 \mu\text{m}$ . Dann errechnet sich die Zahl der ausbreitungsfähigen Moden nach Gleichung (XII.4) zu:

$$M_S \approx 2 \cdot \left( \frac{\pi^2 \cdot 25^2 \cdot \mu\text{m}^2}{0,85^2 \cdot \mu\text{m}^2} \right) \cdot (1,51^2 - 1,50^2) \approx 512$$

Für den Mehrmoden-Gradientenindex-Lichtleiter folgt daraus mit Gleichung (XII.7):

$$M_G \approx \frac{M_S}{2} = 256$$

Aderhülle („Hohlader“) oder mehrere Lichtleiterkabel in eine Aderhülle („Bündelader“). Zusätzlich wird eine Stützfaser aus glasfaserverstärktem Kunststoff mitgeführt, die die geforderte mechanische Zugfestigkeit sicherstellt. Es werden weiterhin Kupferadern integriert, die sowohl zur Fehlerortung als auch zur Stromversorgung von Zwischenverstärkern eingesetzt werden. Die verbleibenden Hohlräume füllt man mit weichem Kunststoff aus, um einen Schutz gegen das Eindringen von Wasser zu erreichen.

Lichtleiterkabel mit Mehrmoden-Gradientenindex für Außenverlegung haben genormte Maße: Kerndurchmesser  $50 \mu\text{m}$ , Manteldurchmesser  $125 \mu\text{m}$ .

Als Beispiel für eine Übertragung über Lichtwellenleiter wird das Video-System „OPAL-3“ der Fa. Raynet angeführt, das zur Programmversorgung vornehmlich ländlicher Gebiete ausgelegt ist. Es ermöglicht die Übertragung von 36 amplitudenmodulierten Fernsehkanälen und 30 frequenzmodulierten UKW-Rundfunkkanälen. Der Frequenzbereich erstreckt sich von 47 bis 446 MHz, wobei die Kanalrastrung im Fernsehübertragungsbereich eingehalten wird. Der Teilnehmer kann bis zu 25 km von der Einspeisestelle entfernt sein. Die optische Sendeleistung beträgt etwa 7 dBm ( $\approx 5,6 \text{ mW}$ ), die Wellen-



**Tabelle XII-4** Daten von Lichtwellenleiterkabeln

| LWL-Typ                            | Mehrmoden-Gradientenkabel |              | Einmoden-Stufenindex-Kabel |
|------------------------------------|---------------------------|--------------|----------------------------|
| Kabeltyp                           | G50/125                   | G62,5/125    |                            |
| Kerndurchmesser in $\mu\text{m}$   | $50 \pm 3$                | $62,5 \pm 3$ | $9 \dots 10 \pm 1$         |
| Manteldurchmesser in $\mu\text{m}$ | $125 \pm 3$               | $125 \pm 3$  | $125 \pm 3$                |
| Faserdurchmesser in $\mu\text{m}$  | $250 \pm 3$               | $250 \pm 3$  | $250 \pm 25$               |
| Dämpfung bei 850 nm in dB/km       | 2,5 ... 3,5               | 3,2          | 0,33 ... 0,45 bei 1300 nm  |
| Dispersion in ps/(nm · km)         |                           |              | 3,5 ... 5 bei 1300 nm      |
| Zugfestigkeit                      |                           |              | maximal 2 ... 3 kN         |
| Biegeradius in mm;                 |                           |              |                            |
| Innenraumkabel                     | $\geq 150$                |              |                            |
| Außenraumkabel                     | $\geq 400$                |              |                            |
| Biegeradius in mm                  |                           |              | $\geq 400$                 |

**Tabelle XII-5** Kennzeichnung von Lichtwellenleiterkabeln

| Buchstaben-kennung | Bedeutung                                 | Buchstaben-kennung | Bedeutung                                                                                                                                |
|--------------------|-------------------------------------------|--------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| A-                 | Kabel für außen                           | 2Y                 | PE-Hülle                                                                                                                                 |
| I-                 | Kabel für innen                           | Y                  | PVC-Hülle                                                                                                                                |
| V                  | Vollader                                  | (L)2Y              | Schichtenmantel                                                                                                                          |
| W                  | Hohlader, gefüllt                         | B                  | Bewehrung                                                                                                                                |
| H                  | Hohlader, ungefüllt                       | E                  | Einmodenfaser                                                                                                                            |
| D                  | Bündelader, gefüllt                       | G                  | Gradientenfaser                                                                                                                          |
| B                  | Bündelader, ungefüllt                     | .../...            | Kern-/Manteldurchmesser in $\mu\text{m}$<br>(Mehrmoden-Gradkabel);<br>Feld-/Manteldurchmesser in $\mu\text{m}$<br>(Einmoden-Stufenkabel) |
| S                  | Metallelement in der Kabelseele           | ...B...            | für Bereich um 850 nm <sup>1)</sup>                                                                                                      |
| F                  | Füllung der Verseilhohlräume (Kabelseele) | ...F...            | für Bereich um 1300 nm <sup>1)</sup>                                                                                                     |
| (ZN)               | Zugentlastungselemente, nichtmetallisch   | ...H...            | für Bereich um 1550 nm <sup>1)</sup>                                                                                                     |

<sup>1)</sup> siehe Tabelle XII-1

länge 1310 nm, die empfangene Leistung liegt bei 0,5 mW, die optische Sendequelle ist eine Laserdioden, der Empfänger eine PIN-Fotodiode.

Tabelle XII-4 listet einige Eigenschaften von LWL-Kabeln auf. DIN VDE 0888 und IEC 793 enthalten weitere Daten.

In der Typenbezeichnung von LWL-Kabeln sind Angaben über deren Aufbau und Einsatzbereich enthalten. Tabelle XII-5 gibt eine Übersicht.

Das bei der Telekom eingesetzte Kabel A-DSF(L)(ZN)2Y, 10×4 E9/125 ist ein Einmoden-Stufenindexkabel mit 9/125  $\mu\text{m}$  Feld-/Manteldurchmesser und 10 Bündeln mit je 4 Fasern. Es ist für Außenverlegung vorgesehen und enthält einen Schichtenmantel (Al, PE) und nichtmetallische Zugentlastungselemente. Der Typenbezeichnung können noch weitere Einzelheiten, z.B. über die Füllung, entnommen werden.

## 4 Lichtsender

Für Lichtsender werden LEDs (*light emitting diode, Leuchtdiode*) im Infrarotbereich sowie LASER-Dioden (*light amplification by stimulated emission of radiation*) verwendet. Wichtige Kenngrößen sind zum Vergleich in Tabelle XII-6 als typische Größen industriell gefertigter Dioden zusammengestellt. Es ergibt sich eine Impulsverbreiterung durch die Linienbreite (Breite des ausgesendeten Lichtspektrums) des Lichtsenders.

Die Modulation der Lichtsender geschieht durch Intensitätsmodulation. LEDs können sowohl mit analogen als auch mit digitalen Signalen moduliert werden. Bei Analogmodulation sind die Verfahren

- Amplituden-Intensitätsmodulation
- Frequenz-Intensitätsmodulation
- Phasen-Intensitätsmodulation

**Tabelle XII-6** Typische Daten von Lichtsendern

| Lichtsender | Wellenlänge<br>in nm | Linienbreite<br>in nm | Dauerleistung<br>in mW | Impulsverbreiterung<br>in ns/km |
|-------------|----------------------|-----------------------|------------------------|---------------------------------|
| LED         | 830                  | 45                    | 0,06                   | 5                               |
| LASER       | 880                  | 3 ... 5               | 10                     | 0,015                           |

möglich. Bei digitaler Modulation können die im Kapitel V.4, Modulation, Pulsträger unkodiert, beschriebenen Verfahren eingesetzt werden. LASER-Dioden sind für die Analogmodulation weniger gut geeignet, da keine Proportionalität zwischen dem Modulationsstrom und der Lichtleistung besteht. Sie werden deshalb vorwiegend mit digital kodierten Signalen moduliert. Für beide Lichtsender sind die Anstiegs- ( $t_r$ ) und die Abfallzeit ( $t_f$ ) wichtige Kenngrößen. Sie liegen bei Leuchtdioden in der Größenordnung 3 ... 15 ns, sodass Informationsflüsse von 30 bis 150 Mbit/s möglich sind, sofern die Impulsverbreiterung diese Werte zulässt. Laserdioden haben wesentlich kürzere Zeiten von etwa 0,5 ns, und damit sind Werte von 1 bis 2 Gbit/s erreichbar. Mit speziellen Strukturen und geeignetem Aufbau lassen sich noch höhere Werte, bis zu 50 Gbit/s, erreichen.

## 5 Lichtempfänger

- **PIN-Photodioden:** Als Lichtempfänger werden PIN-Photodioden und Lawinen-(Avalanche-)Photodioden eingesetzt. Die PIN-Fotodiode hat ihren Namen von der Schichtenfolge: Zwischen *P*- und *N*-Schicht ist eine schwach oder undotierte *Intrinsic-Schicht* eingefügt. Hier werden die Photonen absorbiert, sodass die Diodenparameter kaum von der angelegten äußeren Spannung abhängen. Durch diesen Aufbau verringert sich die Kapazität zwischen den Anschlüssen der Diode, was eine erhöhte Grenzfrequenz zur Folge hat. Für den Einsatz als Lichtempfänger sind die Anstiegs- und Abfallzeiten beider Diodentypen wichtige Kenngrößen. Für PIN-Dioden werden Werte von 1 bis 2 ns erreicht, Lawinendioden erreichen etwa 200 ps. Damit liegen diese Werte in der gleichen Größenordnung wie die der Lichtsender, sodass insgesamt für eine Übertragungsstrecke mit LED und Fotodiode Informationsflüsse von bis zu 150 Mbit/s erreicht werden können, für eine Strecke mit Laserdiode und Lawinendiode bis 1 Gbit/s. Das setzt allerdings voraus, dass die Gesamt-Lichtleiterlänge bei größeren Übertragungsstrecken durch Zwischenverstärker geeignet unterteilt wird, damit die Impulsverbreiterung den Informationsfluss nicht wesentlich verringert. Bei sorgfältigem kapazitätsarmem Aufbau können Datenübertragungen bis zu 10 Gbit/s erreicht werden, durch besondere Schaltungstechniken und spe-

zielle Dioden auch bis zu 50 Gbit/s. PIN-Dioden haben weiterhin folgende Vorteile: 1. Linearität zwischen eingestrahelter Lichtintensität und elektrischem Ausgangssignal über etwa 7 Zehnerpotenzen. 2. Geringes Eigenrauschen. 3. Betriebsspannung im Bereich von 5 V.

- **Lawinen-Photodioden:** Hier wird der von den Photovervielfachern bekannte Vervielfachungseffekt eingesetzt. Damit können auch sehr lichtschwache Signale ausgewertet werden. Allerdings haben diese Dioden ein erhöhtes Eigenrauschen und nur einen eingeschränkten Dynamikbereich.

## 6 Verbinden von Lichtleitern

Lichtleiterkabel werden in Längen bis zu 10 km gefertigt. Um Kabel zu verbinden oder Kabel an Lichtverstärker anzuschließen, benutzt man *Spleiß*- und *Steckverbindungen*.

- **Spleißverbindung:** Durch Ritzen und Brechen der Aderenden mit entsprechenden Werkzeugen sind die Stirnflächen plan und verlaufen rechtwinklig zur Achse. Nachdem ein Kleber aufgebracht worden ist, werden die Enden mit Mikromanipulatoren voreinander justiert und dann verklebt. Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Stirnflächen auf Stoß zu bringen und diese Stoßstelle einem Lichtbogen mit einer Temperatur von 2000 °C auszusetzen. Innerhalb von wenigen Sekunden verschmelzen die beiden Glasfasern. Diese Methode eignet sich besonders für Verbindungen „vor Ort“, da entsprechende Schweißgeräte mit den Justiereinrichtungen in handlicher Form von der Industrie angeboten werden und zu dauerhaften Verbindungen mit nur geringer Dämpfung (<0,5 dB) führen. Eine besonders große Dämpfung (0,4 ... 0,6 dB) ergibt sich, wenn beide LWL einen Achsenversatz aufweisen oder die Durchmesser beider LWL-Fasern voneinander abweichen. Weniger kritisch ist die Dämpfung, wenn eine Stirnfläche nicht ganz plan ist.
- **Steckverbindung:** Die Faser-Stirnflächen werden poliert, in Präzisions-Führungshülsen eingebettet und mit einer Gewindehülle umgeben. Durch Zusammenschrauben oder Zusammenstecken werden die Stirnflächen aufeinandergedrückt. Die mechanische Führung muss äußerst präzise (auf einige µm oder weniger) arbeiten, und deshalb bringt

man in kritischen Anwendungsfällen an den Steckern zusätzlich Feinjustiereinrichtungen an. Es besteht eine Vielzahl von praktisch eingesetzten Verbindungssystemen, die untereinander nicht kompatibel sind. Hier einige ausgewählte Modelle:

- Die Telekom hat ein System angeregt, dass genormt wurde und im Wesentlichen von ihr eingesetzt wird: Version LSA nach DIN 47256 und Version LSB nach DIN 47217.
- MIC: Für Computernetze. Stecker auch unter FDDI-Stecker bekannt. Teilstandard genormt nach ISO 9314-3. Sender- und Empfängerstrecke nebeneinander verpolungssicher eingebaut.
- BFOC(ST): Von AT&T entwickelt. Bajonettverriegelung, dadurch einfache Handhabung.
- SC: Rastet beim Einschieben ein und wird durch Ziehen ausgerastet.

Die Dämpfung an der Stoßstelle (Einfügedämpfung) liegt zwischen 0,2 dB und 0,5 dB.

## 7 Optische Schalter

Der verbreitete Einsatz der optischen Signalübertragung erfordert auch das Verteilen von optischen Kanälen auf andere beliebig wählbare Kanäle. Hier seien 2 Verfahren angeführt:

- *Elektro-Optischer Schalter*: Ausgenutzt wird der Pockels-Effekt. Das optische Signal wird in zwei (oder mehr) Lichtstrahlen aufgeteilt (Y-Verteiler), und jeder Strahl durchläuft einen Flüssig-Kristall, an den entweder in Längs- oder in Querrichtung zum durchlaufenden Strahl eine Spannung angelegt wird. Damit ändert sich die Polarisations-ebene, und nur bei Übereinstimmung von Strahlpolarisation und Kristall-Polarisationsebene wird der Strahl durchgelassen. Die Einfügedämpfung ist relativ hoch und liegt im Bereich 6 dB bis 10 dB. Die Schaltzeiten liegen im Bereich von ns.
- *Mikrospiegel-Schalter*: Der Lichtstrahl fällt auf einen Spiegel, der diesen Strahl auf einen anderen frei wählbaren Lichtleiter umlenkt. Zur Auslenkung des Spiegels können Piezokristalle eingesetzt werden. Die Einfügedämpfung liegt im Bereich 1 dB bis 5 dB, die Schaltzeit wegen der Mechanik im Bereich ms bis s.

## XIII Funkmesstechnik

### 1 Radar

#### 1.1 Grundlagen, Kenngrößen

Ein Hauptgebiet der Funkmesstechnik ist durch den Begriff RADAR (*radio detection and ranging*) gekennzeichnet. Bei diesem Verfahren werden impulsförmige elektromagnetische Wellen von einer Antenne ausgesendet und an Körpern oder Stoffverteilungen (Wolken) reflektiert. Die Sendeantenne wird auf Empfang umgeschaltet, und anhand des Echos sind Rückschlüsse auf die Lage und die Beschaffenheit der Körper oder der Stoffverteilungen möglich. Angewendet wird die Radartechnik bei der Kontrolle und der Sicherung des Land-, Wasser- und Flugverkehrs, in der Meteorologie zur Wetterprognose, in der Astrologie und im militärischen Bereich. Die Antenne sendet einen scharf gebündelten Strahl aus, dessen Dauer kürzer ist als die Laufzeit zum nächstgelegenen Körper und zurück. Man kann daher aus der Laufzeit auf die Entfernung und aus der Antennenstellung auf die Richtung des Körpers schließen. Überschreitet der Körper eine bestimmte Mindestgröße, können eventuell sogar Aussagen über die Körperform und dessen Beschaffenheit gemacht werden. Wenn ein räumlicher Bereich erfasst werden soll, dreht sich die Antenne und bildet die Umgebung

während einer Umdrehung sektorweise ab. Im folgenden Umlauf wird das vorhergehende Bild aktualisiert.

- *Radarquerschnitt* (auch *Rückstreu-* oder *Echoquerschnitt*): Die am Körper ankommende Strahlungsdichte der vom Sender ausgestrahlten Welle ist  $S_e$  (siehe auch Kapitel III.2, Antennen, Kenngrößen):

$$S_e = \frac{g \cdot P_S}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \quad \text{in} \quad \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad (\text{XIII.1})$$

$g$  Antennengewinn;  $P_S$  Senderleistung in W;  $r$  Abstand Sender-Körper in m

Davon wird ein Teil reflektiert, und es kommt an der Radar-Empfangsantenne die Strahlungsdichte  $S_S$  an:

$$S_S = \frac{A_e \cdot S_e}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \quad \text{in} \quad \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad (\text{XIII.2})$$

$S_e$  nach Gleichung (XIII.1);  $r$  Abstand Sender-Körper in m,  $A_e$  Radarquerschnitt in  $\text{m}^2$

Die Größe  $A_e$  ist definiert und heißt *Radarquerschnitt*. Nimmt man als reflektierenden Körper eine ebene elektrisch gut leitende Platte der Fläche  $A_p$  an, deren Abmessungen viel größer sind als die Wellenlänge  $\lambda$  des Radarsignales und auf die der Radarstrahl senkrecht auftritt, ergibt sich  $A_e = 4 \cdot \pi \cdot A_p^2 / \lambda^2$ . Der Radarquerschnitt ist das Verhältnis von reflektieren-

der Fläche zu der aus der Wellenlänge des Radarstrahles gebildeten Fläche. Die an der Empfängerantenne herrschende Strahlungsdichte ist um so größer, je größer die Fläche des reflektierenden Körpers und je kleiner die Wellenlänge des Radarsignales ist. In der Praxis kann man auch bei beliebig geformten Körpern häufig mit seiner ebenen Fläche rechnen und erhält brauchbare Näherungswerte.

- **Reichweite eines Radargerätes:** Der maximale Abstand  $r_{\max}$  eines Körpers lässt sich berechnen, das Ergebnis wird hier angeben.

$$\text{Reichweite } r_{\max} = \sqrt[4]{\frac{P_S A_e A^2}{4\pi\lambda^2 k T B F S_r}} \quad (\text{XIII.3})$$

$P_S$  Senderleistung in W;  $A_e$  Radarquerschnitt in  $\text{m}^2$ ;  $A$  Wirkfläche der Empfangsantenne in  $\text{m}^2$ ;  $\lambda$  Radar-Wellenlänge in m;  $k$  Boltzmann-Konstante;  $T$  absolute (thermodynamische) Temperatur in K;  $B$  Bandbreite des Radarsignales in Hz;  $F$  Rauschzahl des Empfängers;  $S_r$  Störabstand

- **Primärradar:** Der Körper reflektiert *passiv* den Radarstrahl. Das empfangene Echosignal hat eine geringe Amplitude und wird durch Rauschen und Störungen verfälscht. Störungen sind z.B. auch feststehende Gebäude und Berge. Es sind trotzdem sehr genaue Ortungen möglich.
- **Sekundärradar:** Ein z.B. im Flugzeug eingebauter Transponder antwortet auf ein Codewort des Senders mit einem eigenen Sender und der Übertragung von Informationen (z.B. Identität, Flughöhe). Dieses Verfahren garantiert eine sehr sichere Signalerkennung, ist aber von der Ortungsgenauigkeit dem Primärradar unterlegen.

Beide Verfahren werden oft parallel eingesetzt.

- **Tastgrad beim Impulsradar:** In der Regel wird die gleiche Antenne für das Senden und das Empfangen des Radarsignales verwendet. Es werden deshalb kurze Impulse hoher Leistung zur Erzielung einer großen Reichweite ausgesendet (Antenne im Sendebetrieb) und anschließend deren Echo empfangen (Antenne im Empfangsbetrieb). Bild XIII-1 zeigt die an der Antenne anstehende Sendeleistung  $P_S$ . Für die Impulsdauer  $t_1$  muss gelten, dass sie kürzer ist als die Laufzeit der Welle zum nächstgelegenen Körper und zurück, für  $t_2$  folgt, dass erst das Echo vom entferntesten Körper die Antenne erreicht haben muss, bevor ein neuer Impuls ausgesendet werden kann.

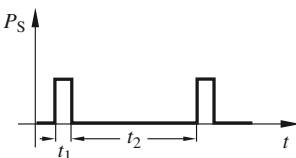


Bild XIII-1 Tastgrad der Senderimpulse

- **CW-Radar (Continuous Wave-Radar, Dauerstrich-Radar):** Radarverfahren, bei dem die Sendepulsdauer mehr als 10 % der Pausendauer beträgt, d.h.  $t_1 > 0,1 \cdot t_2$  in Bild XIII-1. Meist ist die Pausendauer sogar Null. Dann lässt sich z.B. die Geschwindigkeit eines Einzelkörpers wie bei der Verkehrskontrolle nach dem Doppler-Prinzip messen.
- **Entfernungsauflösung:** Die Impulsdauer  $t_1$  nach Bild XIII-1 bestimmt die Entfernungsauflösung. Bild XIII-2 stellt dar, dass sich der Antennenstrahl trotz Bündelung geringfügig aufweitet. Zuerst trifft das Echo von Strahl 1 am Empfänger ein, da dieser Strahl senkrecht auf die Fläche  $A_1$  auftrifft. Der Strahl 2 entsteht durch die nichtideale Bündelung der Antenne. Er hat eine größere Strecke zurückzulegen, da er nicht senkrecht auf  $A_2$  auftrifft. Er erreicht den Empfänger mit der Zeitverzögerung  $2 \cdot \Delta r/c$ . Damit beide Echos noch voneinander unterschieden werden können, muss gelten:  $2 \cdot \Delta r/c > t_1$ . Weicht Strahl 2 maximal von Strahl 1 ab, ergibt sich der Grenzfall:

$$\text{Entfernungsauflösung } \Delta r = \frac{t_1 \cdot c}{2} \quad (\text{XIII.4})$$

$c$  Lichtgeschwindigkeit  $3 \cdot 10^8$  m/s;  $t_1$  in s, siehe Bild XIII-1

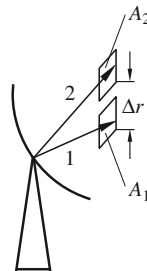


Bild XIII-2  
Entfernungsauflösung

Demnach muss die Impulszeit so kurz wie möglich gewählt werden, um eine hohe Entfernungsauflösung zu bekommen. Kurze Impulse haben aber eine größere Bandbreite  $B$  (siehe Gleichung XIII.3), sodass die Reichweite verkürzt wird.

- **Minimale Tastpause:** Handelt es sich um großflächige Körper der Ausdehnung  $r_K$ , darf der nächste Radarimpuls erst nach der Zeit

$$t_{2 \min} = \frac{2 \cdot r_K}{c} \quad (\text{XIII.5})$$

$c$  Lichtgeschwindigkeit  $3 \cdot 10^8$  m/s

folgen.

- **Drehgeschwindigkeit:** Soll ein größerer Bereich erfasst werden, muss die Antenne gedreht werden. Da die von der Antenne empfangenen Signale durch Rauschen und Störungen verfälscht sind, müssen für ein brauchbares Signal mindestens 10 bis 20 Echos empfangen und überlagert werden, siehe dazu auch „Zielextaktor“ weiter unten.

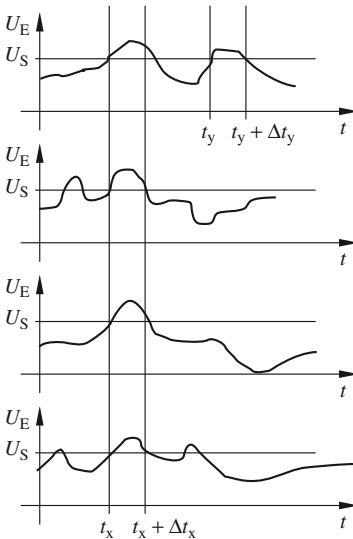
Dann gilt:

*Maximale Drehgeschwindigkeit*

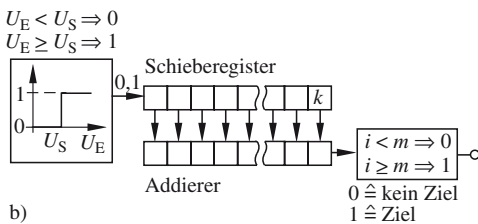
$$\Omega_{\max} = \frac{\Phi}{n \cdot t_2} \quad (\text{XIII.6})$$

$\Phi$  Winkel, um den der Radarstrahl aufgeweitet wird;  $n$  Zahl der Echos;  $t_2$  Impulspause nach Bild XIII-1 in s

- **Zielextraktor:** Die endliche Strahlbreite der Radarantenne ergibt beim Überstreichen eines reflektierenden Objektes mehrere Echos, die in der Regel gestört sind. Bild XIII-3a stellt vier solcher gestörten Signale dar. Beim ersten Echo ( $U_E$ ) wird im Bereich  $t_x$  bis  $t_x + \Delta t_x$  ein erhöhtes Empfangssignal festgestellt und die Schwelle mit der Spannung  $U_s$  (Erfahrungswert) überschritten. Das gilt auch für den Bereich  $t_y$  bis  $t_y + \Delta t_y$ . Beim Eintreffen des zweiten Echos wird die Spannung  $U_s$  wiederum näherungsweise im Bereich  $t_x$  bis  $t_x + \Delta t_x$  überschritten, während im Bereich  $t_y$  bis  $t_y + \Delta t_y$  die Schwellenspannung nicht erreicht wird. Auch beim dritten und vierten Echo ist die empfangene Signalspannung wieder näherungsweise



a)



b)

**Bild XIII-3** Echosignale vier aufeinanderfolgender Sendersignale

- a) Signalverläufe
- b) Wanderfensterdetektor

im Bereich  $t_x$  bis  $t_x + \Delta t_x$  größer als die Spannung  $U_s$ , während in allen anderen Fällen gilt, dass die Spannung  $U_s$  nur einmal überschritten wurde. Damit ist das Signal im Bereich  $t_x$  bis  $t_x + \Delta t_x$  einem Körper zuzuordnen. Bei den anderen die Schwellenspannung überschreitenden Werten handelt es sich um Störungen. Die beschriebene Auswertung erfolgt in einem binären Wanderfensterdetektor nach Bild XIII-3b. Das Echosignal wird laufend digitalisiert (insgesamt  $k$  Werte) und digital mit der Schwellenspannung  $U_s$  verglichen. Entsprechend wird 0 oder 1 zugeordnet. Diese Werte werden in ein Schieberegister mit  $k$  Stellen eingeschoben und am Ende in  $k$  Addierern (für jede der  $k$  Stellen ein Addierer) gespeichert. Beim zweiten Echo geschieht das gleiche, wobei am Ende die im Schieberegister enthaltenen Digitalwerte zu denen des ersten Echos hinzuaddiert werden. Nach Eintreffen des vierten Echos und Addition enthalten die Zellen, die den Digitalwerten im Bereich  $t_x$  bis  $t_x + \Delta t_x$  zugeordnet sind, die Zahl 4, da für jedes Echo die Schwellenspannung überschritten wurde. Alle anderen Zellen enthalten nur eine 1 (Schwellenspannung einmal überschritten) oder nur eine 0 (Schwellenspannung nie überschritten). Mit der Festlegung Summe  $\geq 3 \hat{=}$  Ziel, Summe  $< 3 \hat{=}$  kein Ziel (Bild XIII-3b:  $i \geq m \Rightarrow 1 \hat{=}$  Ziel,  $i < m \Rightarrow 0 \hat{=}$  kein Ziel) wird die Entscheidung über das Vorhandensein eines Zieles getroffen.

## 1.2 Daten von Radaranlagen

Die für die Flugüberwachung eingesetzten Radaranlagen haben beispielsweise die folgenden technischen Daten:

- Umlaufzeiten zwischen 3 s und 15 s
- Hochfrequenz-Spitzenleistung bis 10 MW
- Impulsdauer 10  $\mu$ s
- Pausendauer 10 ms
- Antenne horizontal scharf gebündelt, vertikal weniger scharf gebündelt
- Frequenzen zwischen 400 MHz bis 75 GHz in dafür vorgesehenen Bereichen

Für eine Rundsichtanlage (Allzweckgerät, z.B. Radaranlage auf kleineren Schiffen) werden die folgenden typischen Werte angegeben:

- Frequenzband: 9,320 ... 9,480 GHz
- Impulslänge: Nahbereich 0,1  $\mu$ s, Fernbereich 0,2  $\mu$ s
- Impulsfolgefrequenz: 1000 Hz
- Impulsspitzenleistung: 10 kW
- Horizontaler Antennen-Öffnungswinkel:  $1,75^\circ$
- Vertikaler Antennen-Öffnungswinkel:  $20^\circ$
- Nahauflösung: 30 m
- Abstandsauflösung: 20 m
- Entfernungsbereiche: 0,5–1–3–8–15–30 Seemeilen
- Antennendrehzahl: 24 pro Minute
- Leistungsbedarf: 200 W



## 2 Funkortungssystem OMEGA

Unter einer Vielzahl von Funkortungssystemen hat das System *OMEGA* Bedeutung, weil es erdumspannend ist und voraussichtlich noch einige Zeit bestehen bleiben wird. Es gibt 8 Bodenstationen in Japan, Australien, Norwegen, Trinidad, USA, Argentinien und auf Madagaskar und Hawaii. Jeder Sender sendet 3 Frequenzen im VLF-Bereich aus:  $f_1 = 10,2$  kHz (Hauptträger),  $f_2 = 13,60$  kHz (1. Hilfsträger) und  $f_3 = 11,33$  kHz (2. Hilfsträger). Wegen der großen Reichweite dieser Wellen ist jeder Punkt der Erde von mehreren Sendern erreichbar. Die einzelnen Sender senden die drei Frequenzen synchron mit einer für jeden Sender typischen Zeitdauer aus. Sie können damit identifiziert werden. In den zur Positionsbestimmung eingesetzten Empfängern werden die zwei Differenzfrequenzen  $f_0 = f_2 - f_1 = 3,40$  kHz und  $f_4 = f_3 - f_1 = 1,13$  kHz gebildet, und damit wird eine grobe Ortsbestimmung vorgenommen. Da gilt:  $3 \cdot f_0 = f_1$  und  $4 \cdot f_0 = f_2$ , kann aus den Signalen zweier Sender ( $S_1, S_2$ ) die Phasendifferenz  $\Delta\varphi_1$  gemessen und daraus eine Linie für  $\Delta\varphi_1 = \text{konst}$  gezeichnet werden (Bild XIII-4). Diese Linie ist eine Hyperbel, deswegen gehört dieses Verfahren zu den Hyperbelortungsverfahren:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{2 \cdot \pi}{c} \cdot 3 \cdot 4 \cdot f_0 \cdot (PS_1 - PS_2) \quad (\text{XIII.7})$$

Das gleiche Verfahren wird mit einem weiteren Sender,  $S_3$ , durchgeführt. Es ergibt sich eine zweite Hyperbel für  $\Delta\varphi_2 = \text{konst}$ . Der Schnittpunkt beider Hyperbeln ergibt den Standort  $P$ .

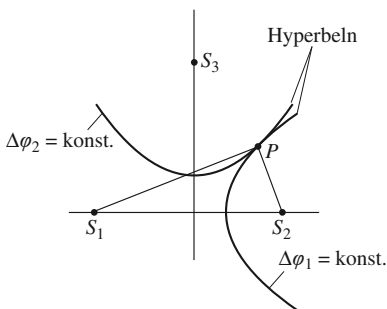


**Bild XIII-4** Standortbestimmung mit dem Ortungssystem OMEGA

## 3 GPS – Global Positioning System

GPS ist ein satellitengestütztes Navigationssystem. Es wurde 1995 für militärische Zwecke errichtet und wird vom amerikanischen Verteidigungsministerium betrieben. Es dient zur Zeitübertragung und zur Ortung. Insgesamt umkreisen etwa 30 Satelliten den Erdball in einer Höhe von 20183 km. Sie sind also nicht geostationär (stationär: ortsfest, bezogen auf die

Erdoberfläche, wie etwa die Fernsehsatelliten der ASTRA-Serie). Die Umlaufbahnen sind genau vorgegeben, und zwar so, dass an jedem Punkt der Erdoberfläche die Signale von mindestens 3 Satelliten stets gleichzeitig empfangen werden können. Damit ist es möglich, die absolute Lage eines Punktes, d.h. geografische Länge, geografische Breite und Höhe über Normal-Null (NN), zu bestimmen. Das Prinzip beruht darauf, dass die genaue Position des Satelliten übermittelt wird und aus der Laufzeit der Signale Satellit-Empfänger die Position des Empfängers bestimmt werden kann. Der Fehler der Ortung hängt u.a. auch ab von der Synchronisation der Zeit des Empfängers auf der Erdoberfläche mit der Zeit des GPS-Systems. Deshalb ist es wünschenswert, dass ein vierter Satellit für diese Synchronisation empfangen werden kann. In der Regel sind sogar 5 oder 6 Satellitensignale gleichzeitig zu empfangen, was bei entsprechender Auswertung durch z.B. Mittelwertbildung zu einer Verringerung des Messfehlers führt. Das von den Satelliten ausgesendete Signal ist sehr schwach und wird vom Rauschen überdeckt. Es sind deshalb statistische Verfahren zur Signalerkennung erforderlich (siehe Kapitel *Optimierte Nachrichten- und Datenübertragung, 3 Anwendung der Korrelation bei gestörten Signalen*).

Bis zum Jahr 2000 wurde das von den Satelliten ausgesendete Signal künstlich nach einem geheim gehaltenen Schlüssel „verrauscht“, was zu einem erhöhten Fehler bei der Ortsbestimmung führte. Nur das Militär konnte durch die entsprechende Entschlüsselung dieses Verrauschens rückgängig machen. Auf der Erdoberfläche hat man dieses „Verrauschen“ dadurch korrigiert, dass man ortsfeste Punkte genau vermessen und die Entfernungen dieser Punkte zueinander gespeichert hat. Abweichungen der aktuell gemessenen Werte zu den tatsächlichen korrekten Entfernungen dieser Punkte untereinander waren dann auf die „Verrauschung“ zurückzuführen. Das Prinzip der Ausnutzung ortsfester Bezugspunkte hat zum *Differential-GPS (DGPS)* geführt. Damit wird eine genauere Ortsbestimmung erreicht, weil z.B. atmosphärische Störungen weniger Bedeutung haben. Wünschenswert ist eine möglichst große Anzahl solcher Referenzpunkte. In der Praxis allerdings hat man den Weg der virtuellen Referenzpunkte gewählt, deren Daten z.B. von Rundfunksendern der ARD mit dem RDS-Signal übertragen werden.

Seit dem Jahr 2000 wird das GPS in den Navigationssystemen der Kraftfahrzeuge mit Erfolg eingesetzt. Auch in Handys wird es zunehmend eingebaut, zumal es in die vorhandenen elektronischen Bausteine problemlos zusätzlich integriert werden kann.

Der Fehler der Ortsbestimmung auf der Erdoberfläche hängt ab u.a. von der momentanen Entfernung der Satelliten zueinander, der Synchronisation der Zeiten von Sender und Empfänger, vom Standort des Empfängers (Hindernisse, Reflexionen) und von Störungen. Die Praxis hat gezeigt, dass der Ort in der

Regel mit vertretbarem Aufwand (Navigationssysteme im Kraftfahrzeug und im Handy) bis auf eine absolute Abweichung von maximal 2 m bis 10 m bestimmt werden kann.

Da über die weitere Nutzung der Satelliten für zivile Zwecke von den USA jährlich neu entschieden wird, planen die europäischen Staaten ein eigenes System mit dem Namen Galileo.

## XIV Elektroakustische Wandler

Um Sprache und Musik über größere Entfernungen zu übertragen, wird der *Hörschall* mit einem *Mikrofon* in ein proportionales elektrisches Signal umgewandelt und auf drahtlosem Wege (Beispiel Rundfunkübertragung) oder drahtgebunden (Beispiel Telefon, Kabelrundfunk, oft in Kombination mit dem drahtlosen Weg) zum Empfänger übermittelt. Am Empfangsort setzt z.B. ein Lautsprecher das elektrische Signal wieder in ein akustisches Signal um.

### 1 Definitionen, Kenngrößen

Im folgenden sind einige Kenngrößen der Akustik zusammengestellt, weitere können z.B. DIN 1320 entnommen werden.

- **Schall:** Mechanische Energie in Form von Schwingungen und Wellen eines elastischen Mediums.
- **Hörschall, Infraschall, Ultraschall:**  
Hörschall: Schall im Frequenzbereich des menschlichen Hörens, ca. 16 Hz bis 16 kHz.  
Infraschall: Schall unterhalb ca. 16 Hz.  
Ultraschall: Schall oberhalb ca. 16 kHz.
- **Geräusch:** Schallsignal, das meistens ein nicht zweckbestimmtes Schallereignis charakterisiert (Beispiel Maschinengeräusch).
- **Schallkennimpedanz** (kurz *Kennimpedanz*): Widerstand, den das Medium der Schallwelle entgegensetzt (siehe auch Erläuterung zu Gleichung XIV.3):

*Schallkennimpedanz:*

$$W_0 = c \cdot \rho \quad \text{in } \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \quad (\text{XIV.1})$$

$c$  Schallgeschwindigkeit in m/s,  $\rho$  Dichte in kg/m<sup>3</sup>

In Luft bei Normaldruck und 20 °C ist die Kennimpedanz 413 N · s/m<sup>3</sup>.

- **Wellenwiderstand:** Ist das Medium verlustfrei, wird die Schallkennimpedanz reell und als *Wellenwiderstand* bezeichnet.
- **Schalldruck:** Durch die Schallschwingung hervorgerufener Wecheldruck  $p$  in N/m<sup>2</sup> (siehe auch Erläuterung zu Gleichung XIV.3). Der Praxis angepasst gibt man ihn häufig in  $\mu\text{bar}$  an:

$$1 \mu\text{bar} = 10^{-1} \text{ N/m}^2 = 10^{-1} \text{ Pa} \quad (\text{XIV.2})$$

- **Schallschnelle:** Geschwindigkeit, mit der sich die Atome bzw. Moleküle durch den Schalldruck um ihre Ruhelage bewegen:

$$v = \omega \cdot s = \frac{p}{W_0} \quad \text{in } \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\text{XIV.3})$$

$\omega$  Kreisfrequenz in s<sup>-1</sup>,  $s$  Schwingweg der Schallquelle in m,  $p$  Schalldruck in N/m<sup>2</sup> bzw. kg/(s<sup>2</sup> · m),  $W_0$  Schallkennimpedanz in kg/(s · m<sup>2</sup>)

Diese Gleichung legt die Analogie zum elektrischen Feld nahe: Mit den Entsprechungen  $v \Leftrightarrow I$ ,  $p \Leftrightarrow U$ ,  $W_0 \Leftrightarrow Z$  folgt daraus das Ohmsche Gesetz, angewendet auf den Wechselstromkreis. Die äquivalente Definition lautet dann: „Die Stromschnelle ist die Geschwindigkeit, mit der die Elektronen durch die Spannung ihre Lage ändern.“

- **Schallgeschwindigkeit:** Geschwindigkeit, mit der sich die Schallwelle fortpflanzt. Sie berechnet sich aus den Materialeigenschaften zu:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{in m/s} \quad (\text{XIV.4})$$

$E$  Elastizitätsmodul in N/m<sup>2</sup>,  $\rho$  Dichte in kg/m<sup>3</sup>

Sie beträgt in Luft bei 20 °C und Normalluftdruck 340 m/s, in Wasser ca. 1500 m/s und in Stahl 5050 m/s.

- **Dämpfungsmaß:** Logarithmisches Verhältnis der Amplituden einer Feldgröße an zwei hintereinanderliegenden Punkten.
- **Schallintensität:** Produkt aus Schallschnelle und Schalldruck oder Quotient aus Schalleistung und Fläche:

$$J = v \cdot p = \frac{p^2}{W_0} \quad \text{in } \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}}{\text{s}} \quad (\text{XIV.5})$$

$$\text{oder } \frac{\text{N}}{\text{m} \cdot \text{s}} \quad \text{oder } \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Formelzeichen siehe Gleichungen (XIV.1, 2, 3 und 4).

Es handelt sich dabei um eine Leistung pro Fläche, wie die letzte Einheitenangabe zeigt.

- **Schalleistung:** Produkt aus Schallintensität  $J$  und Fläche  $A$ :

$$P_{ak} = J \cdot A \quad \text{in W} \quad \text{oder} \quad \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{s}} \quad (\text{XIV.6})$$

- **Hörschwelle:** Die Hörschwelle ist der Schalldruck, den das Ohr gerade noch wahrnehmen kann, er beträgt  $p_0 = 2 \cdot 10^{-4} \mu\text{bar} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$ .



- **Schallpegel:** Logarithmisches Verhältnis des tatsächlichen Schalldruckes  $p_1$  zu einem *Bezugs-Schalldruck*  $p_b$ . Die Bezugsgröße  $p_b$  ist anzugeben.
- **Schalldruckpegel:** Logarithmisches Verhältnis des tatsächlichen Schalldruckes  $p_1$  zum *Schalldruck der Hörschwelle*  $p_0 = 2 \cdot 10^{-4}$  μbar (siehe auch „Lautstärkepegel“, Gleichung (XIV.13)):

$$L_p = 20 \cdot \lg \frac{p_1}{p_0} \quad \text{in dB} \quad (\text{XIV.7})$$

- **Elektroakustischer Übertragungsfaktor für Schallsender (Lautsprecher),** im folgenden kurz Übertragungsfaktor genannt:

$$B_S = \frac{p}{U} \quad \text{in } \frac{\text{Pa}}{\text{V}} \quad (\text{XIV.8})$$

$p$  Schalldruck in Pa,  $U$  elektrische Spannung in V

- **Elektroakustischer Übertragungsfaktor für Schallempfänger (Mikrofone),** im folgenden kurz Übertragungsfaktor genannt:

$$B_E = \frac{U}{p} \quad \text{in } \frac{\text{V}}{\text{Pa}} \quad (\text{XIV.9})$$

$p$  Schalldruck in Pa,  $U$  elektrische Spannung in V

- **Absoluter elektroakustischer Übertragungsfaktor:**

$$B_{S0} = 1 \text{ Pa/V} \quad \text{für Schallsender (Lautsprecher)} \quad (\text{XIV.10a})$$

$$B_{E0} = 1 \text{ V/Pa} \quad \text{für Schallempfänger (Mikrofone)} \quad (\text{XIV.10b})$$

- **Elektroakustisches Übertragungsmaß für Schallsender (Lautsprecher):**

$$G_S = 20 \cdot \lg \frac{B_S}{B_{S0}} \quad \text{in dB} \quad (\text{XIV.11})$$

Formelzeichen siehe Gleichungen (XIV.8, 10a)

- **Elektroakustisches Übertragungsmaß für Schallempfänger (Mikrofone):**

$$G_E = 20 \cdot \lg \frac{B_E}{B_{E0}} \quad \text{in dB} \quad (\text{XIV.12})$$

Formelzeichen siehe Gleichungen (XIV.9, 10b)

- **Lautstärkepegel:** Er ist gleich dem Schalldruckpegel (in dB, siehe oben) des als gleichlaut beurteilten Normschalles (1 kHz):

$$L = 20 \cdot \lg \frac{p_1}{p_0} \quad \text{in phon} \quad (\text{XIV.13})$$

$p_1$  Schalldruck des Normschalles,  $p_0 = 2 \cdot 10^{-4}$  μbar Schalldruck des Normschalles an der Hörschwelle

Da Schalldruckpegel und Lautstärkepegel nicht zwingend den gleichen Wert ergeben, wird die Einheit „phon“ verwendet. Bild XIV-1 zeigt den Zusammenhang zwischen dem Schalldruckpegel  $L_p$  und der Frequenz  $f$ . Aufgetragen sind Kurven gleicher Lautstärkeempfindung. Danach werden Frequenzen im Bereich 2 ... 5 kHz vom Ohr am besten aufgenommen.

- **Lautheit:** Zusammenhang zwischen der *tatsächlichen Zunahme* des Lautstärkepegels und der *menschlichen Empfindung über das Maß dieser Zunahme*. Die Abhängigkeit ist experimentell ermittelt worden und ist nichtlinear, siehe Bild XIV-2. Gibt man die gleiche *Zunahme* des Lautstärkepegels bei kleinen und bei großen Lautstärkepegeln vor, wird die Zunahme bei kleinen Pegeln als größer empfunden als bei großen Pegeln. Zur Unterscheidung zum Lautstärkepegel wurde die Einheit „sone“ gewählt.
- **Schmerzschwelle:** Sie liegt bei etwa  $(10^6 \dots 10^7) p_0 = (20 \dots 200) \text{ N/m}^2$ .

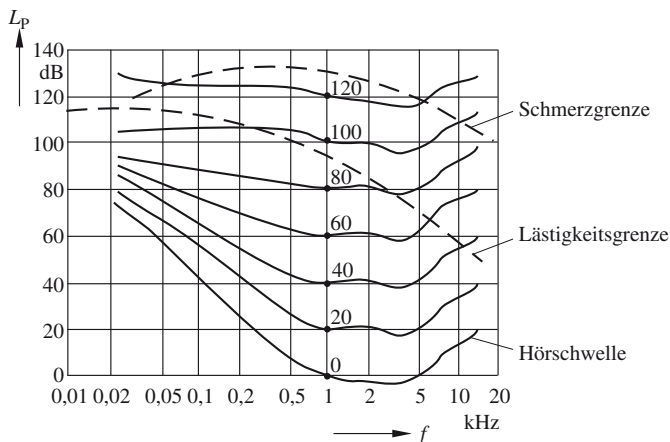


**Bild XIV-1**

Schalldruckpegel als Funktion der Frequenz (Kurven gleicher Lautstärkeempfindung), nach [XIV.1]

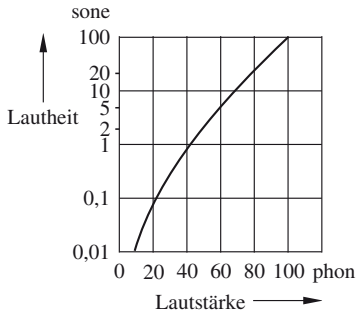


**Bild XIV-2** Zusammenhang von Lautstärke und Lautheit, nach [XIV.1)

- **Klirrfaktor:** Dieser in Kapitel I.4.12.3 behandelte Begriff bekommt hier eine praktische Bedeutung. Durch Messungen mit einer Vielzahl von Versuchspersonen hat man festgestellt, dass das menschliche Ohr Klirrfaktoren  $> 1\%$  wahrnimmt. Für eine Übertragung muss demnach gelten, dass dieser Wert insgesamt nicht überschritten werden darf, wenn die Wiedergabe unverzerrt klingen soll.
- **Schallwerte aus der Praxis:** Für den vom Menschen verursachten Schall werden die folgenden drei Werte angegeben:
  - Direkt am Mund herrscht ein Schalldruck von etwa 0,5 ... 1,5 Pa.
  - Die Schalleistung der menschlichen Stimme liegt in der Größenordnung  $10^{-5}$  W.
  - Die in der Praxis auftretende maximale Schalleistung liegt bei einigen mW.

## 2 Schallempfänger

### 2.1 Kenngrößen für Mikrofone

Für die als Schallempfänger eingesetzten Mikrofone sind u.a. die folgenden Kenngrößen eingeführt worden:

- **Übertragungsbereich:** Das ist der vom Mikrofon gewandelte Frequenzbereich, der im Idealfall den gesamten Hörschall umfasst.
- **Richtcharakteristik:** Richtungsabhängigkeit des Übertragungsfaktors  $B_E$  (Gleichung (XIV.9)). In der Hauptrichtung (0-Achse) wird  $B_E = 1$  gesetzt, und für abweichende Richtungen wird der zugehörige Übertragungsfaktor auf den Wert in der Hauptrichtung bezogen. Die Richtcharakteristik ist von der Frequenz abhängig und wird häufig für eine bestimmte Frequenz angegeben. Bild XIV-3 zeigt die bei Mikrofonen am häufigsten auftretenden Richtcharakteristiken.

Die Mikrofone mit Kreis- und Achtercharakteristik sind nach Kapitel VIII.1, Rundfunk-Stereoübertragung, für Stereoaufnahmen bestimmt. Allgemein eignet sich das Mikrofon mit Kreischarakteristik für Rundumaufnahmen. Wird ein solches Mikrofon mit Verstärkeranlage und Lautsprecher(n) betrieben

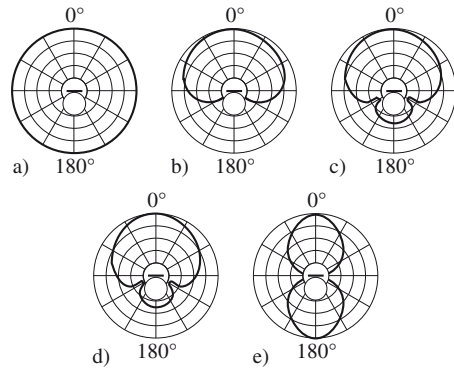


**Bild XIV-3** Richtcharakteristiken von Mikrofonen mit folgenden Formen:

- Kreis
- Niere oder Cardioide
- Supercardioid
- Hypercardioid
- Acht

(Raum- oder Freiplatzbeschallung), kommt es leicht zum Rückkopplungspfeifen, wenn das verstärkte Schallsignal das Mikrofon mit großer Amplitude erreicht und erneut verstärkt wird. Deshalb konstruiert man Mikrofone, die durch die Form des Gehäuses, durch Schallabschirmung zu bestimmten Seiten,

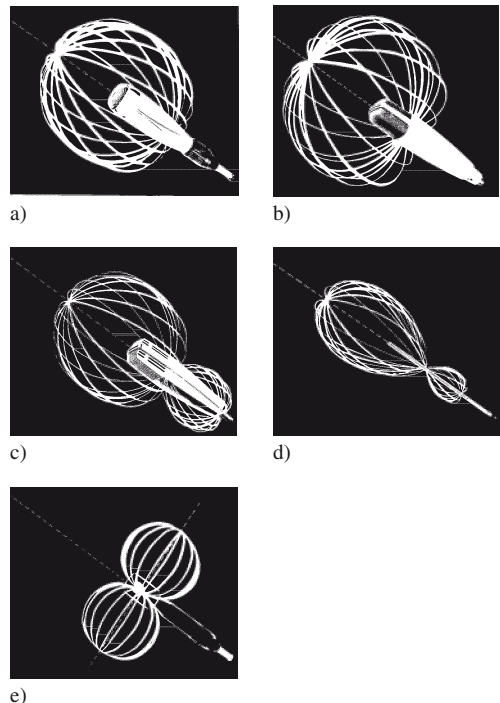


**Bild XIV-4** Richtcharakteristiken nach Bild XIV-3, räumlich dargestellt (Unterlagen Fa. Sennheiser)

durch Luftöffnungen auf der Membranrückseite und durch Wölbung der Membran die verschiedenen Cardioide-Charakteristiken erhalten. Durch diese Maßnahmen soll eine Richtcharakteristik erreicht werden, die im Wesentlichen nur den Schalldruck von vorn verarbeitet, den von der Rückseite aber nicht. Soll eine extreme Richtwirkung erreicht werden, kann das Mikrofon im Brennpunkt eines Parabolspiegels angeordnet werden. Die Richtcharakteristik wird als ebenes Diagramm dargestellt, weil die Mikrofone in dieser Hinsicht rotationssymmetrisch bezüglich der Längsachse und damit der Hauptachse sind. Bild XIV-4 stellt die Richtdiagramme aus Bild XIV-3 räumlich dar.

- *Elektrische Impedanz, minimale Abschlussimpedanz:* Das Mikrofon ist als Spannungsquelle mit Innenwiderstand (*Elektrische Impedanz*) zu sehen, an die ein ausreichend großer Lastwiderstand (*minimale Abschlussimpedanz*) angeschlossen werden muss, damit der Spannungsfall am Innenwiderstand des Mikrofons nicht zu groß wird und außerdem die Eigenschaften des Mikrofons nicht durch einen zu kleinen Lastwiderstand nachteilig beeinflusst werden (Klirrfaktor, Amplitudengang).

2.2 Mikrofonsysteme

Die am häufigsten eingesetzten Mikrofonarten lassen sich nach dem Wandlerprinzip einteilen (Tabelle XIV-1).

2.2.1 Kohlemikrofon

Bild XIV-5a stellt den Aufbau dar. Durch den Schalldruck bewegt sich die Membran in horizontaler Richtung und drückt die Kohlekörner mehr oder weniger stark zusammen. Dadurch ändert sich der Widerstand. Die Widerstandsänderung, die in etwa dem Schalldruck proportional ist, kann nach Bild XIV-5b in eine proportionale Spannungsänderung  $u$  umgewandelt werden. Dabei hat die Lösung mit Übertrager den Vorteil der galvanischen Trennung zwischen Mikrofon- und Signalkreis. Das Kohlemikrofon benötigt eine Spannungsversorgung. Der

Klirrfaktor kann bis zu 25 % betragen, deshalb wurde es für Sprachübertragung im Telefon eingesetzt, wo es auf die Verständlichkeit und nicht die originalgetreue Übertragung ankommt. Es ist das einzige Mikrofon, das, bedingt durch die erforderliche Spannungsversorgung, eine Leistungsverstärkung bewirkt. Nimmt man an, dass die Schallleistung der Sprache bei  $10^{-5}$  W liegt und dass davon 1/10 vom Mikrofon verarbeitet wird, erhält man am Mikrofonausgang eine elektrische Leistung von etwa 1 mW. Die Leistungsverstärkung ist dann  $1 \text{ mW} / 1 \text{ }\mu\text{W} = 1000$ . Der Übertragungsfaktor (Gleichung (XIV.9)) beträgt  $B_E \approx 100 \text{ mV}/\mu\text{bar} = 1000 \text{ mV}/\text{Pa} = 1 \text{ V}/\text{Pa}$ .

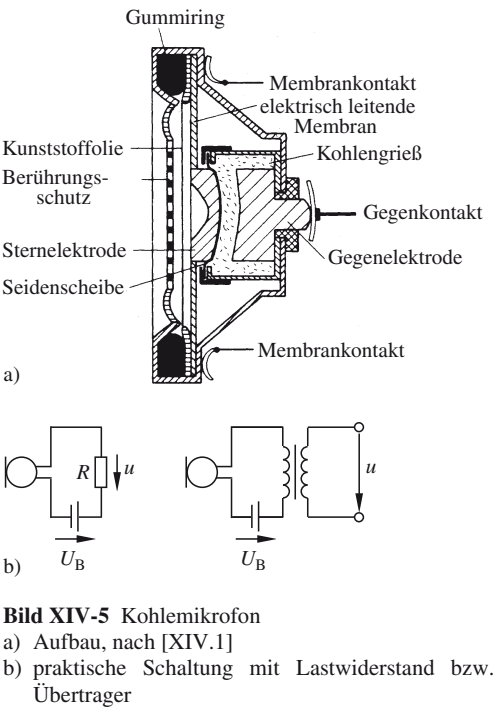


**Bild XIV-5** Kohlemikrofon  
a) Aufbau, nach [XIV.1]  
b) praktische Schaltung mit Lastwiderstand bzw. Übertrager

**Tabelle XIV-1** Wandlerprinzipien für Mikrofone und deren Anwendungen

| Wandlerprinzip                                                                       | Name des Mikrofons                                  | Anwendung                                               |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| Piezo-Prinzip<br>a) piezoresistiv<br>b) piezoelektrisch                              | Kohlemikrofon<br>Kristallmikrofon                   | im Telefon älterer Bauart<br>billiges Gebrauchsmikrofon |
| Elektromagnetisches Prinzip                                                          | Magnetisches Mikrofon                               | u.a. in Hörgeräten                                      |
| Elektrodynamisches Prinzip                                                           | Dynamisches Mikrofon                                | u.a. als Studiomikrofon                                 |
| Elektrostatisches Prinzip<br>a) Normalausführung<br>b) Sonderausführung mit Elektret | Kondensatormikrofon<br>Elektret-Kondensatormikrofon | u.a. als Studiomikrofon<br>als Gebrauchsmikrofon        |

### 2.2.2 Kristallmikrofon

Es wird der piezoelektrische Effekt ausgenutzt, nach dem bestimmte Materialien (Quarz, Seignettesalz, Piezokeramik) bei Druck eine proportionale Spannung abgeben, Bild XIV-6. Eine Membran aus Metall oder Kunststoff ist mechanisch mit dem Kristall verbunden. Membranbewegungen erzeugen Druck- und Zugspannungen im Kristall und können als Spannung  $u$  an den Elektroden abgegriffen werden. Da der Effekt durch Ladungsverschiebungen hervorgerufen wird, ist die elektrische Impedanz sehr groß ( $M\Omega$ -Bereich), sodass zunächst ein Verstärker als Impedanzwandler nachgeschaltet werden muss. Der Klirrfaktor liegt bei einigen %, der Übertragungsfaktor bei etwa 5 mV/Pa.

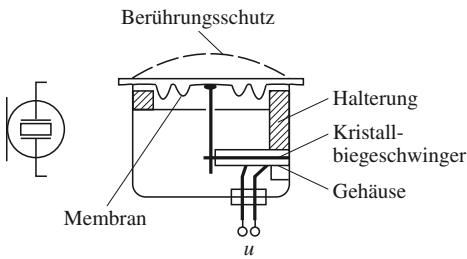


Bild XIV-6 Kristallmikrofon

### 2.2.3 (Elektro-)Magnetisches Mikrofon

Nach Bild XIV-7 besteht dieses Mikrofon aus einem feststehenden Dauermagneten, auf dessen Polschuhen eine ebenfalls feststehende Spule sitzt. Als Joch befindet sich vor den Polschuhen die durch den Schalldruck bewegte Membran, die den magnetischen Widerstand des Kreises und damit den magnetischen Fluss ändert. Damit wird in der Spule eine Spannung  $u$  induziert. Das Mikrofon ist robust und billig, der Klirrfaktor liegt bei einigen %. Durch das physikalische Prinzip bedingt steigt die Ausgangsspannung mit steigender Schallfrequenz. Diese lineare Verzerrung muss durch einen entsprechend ausgelegten Verstärker beseitigt werden.

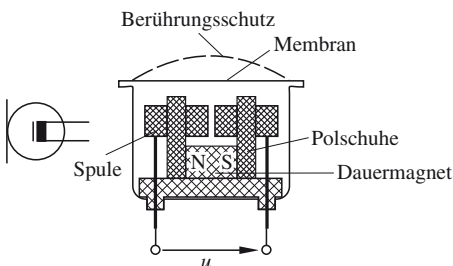


Bild XIV-7 Elektromagnetisches Mikrofon

### 2.2.4 (Elektro-)Dynamisches Mikrofon als Tauchspul- oder Bändchenmikrofon

An der Membran ist eine Spule befestigt, die in das Feld eines feststehenden Dauermagneten eintaucht, Tauchspulmikrofon, Bild XIV-8a. Die Ausgangsspannung steigt mit steigender Schallfrequenz, der Übertragungsfaktor ist in der Größenordnung 1 mV/Pa. Deshalb ist ein Vorverstärker erforderlich, der die niedrige Ausgangsspannung verstärkt und den Amplitudenfrequenzgang korrigiert. Der Klirrfaktor ist gering ( $\leq 1\%$ ), deshalb wird es auch als Studiomikrofon eingesetzt. Eine Sonderausführung ist das Bändchenmikrofon, Bild XIV-8b, bei dem die Membran als geripptes Bändchen ausgeführt ist, das sich direkt im Feld des Dauermagneten bewegt. Auch hier steigt die Ausgangsspannung mit steigender Schallfrequenz, wobei bei hohen Schallfrequenzen die Ausgangsspannung durch die geringe Masse des Bändchens der Schalländerung praktisch trägheitslos folgt. Der Übertragungsfaktor ist, da es sich um eine Spule mit nur einer Windung handelt, in der Größenordnung 10 ... 100  $\mu$ V/Pa. Der Klirrfaktor liegt unter 1 %.

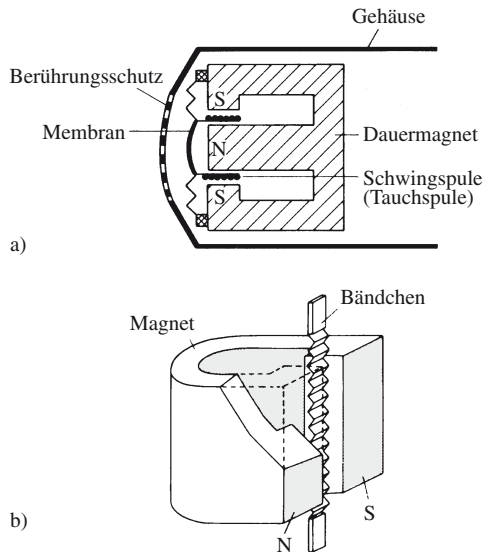


Bild XIV-8 Elektrodynamisches Mikrofon, nach [XIV.1]

- a) Tauchspulmikrofon
- b) Bändchenmikrofon

### 2.2.5 Kondensatormikrofon

Wie in Bild XIV-9a dargestellt, bildet die Membran die eine Platte eines Plattenkondensators, die andere Platte ist eine im Abstand von etwa 10  $\mu$ m angebrachte feste Elektrode. Ändert sich der Schalldruck, ändert sich der Abstand der Elektroden und damit die Kapazität ( $C \pm \Delta C$ ). Der Kondensator erhält nach Bild XIV-9b über eine Spannungsquelle mit der

Spannung  $U_B$  und zwei hochohmige Widerstände  $R$  (10 ... 100 M $\Omega$ ) eine Ladung  $Q$ , die dann konstant ist, wenn die Periodendauer der niedrigsten Schallfrequenz viel kleiner ist als die Zeitkonstante  $2RC$ . Dann gilt:  $u = U \cdot \pm \Delta C / C$ .  $C$  liegt in der Größenordnung 500 ... 1000 pF, sodass für  $R$  bei  $f = 16$  Hz und  $C = 1$  nF gilt:  $R \gg 10$  M $\Omega$ . Die zwei Leitungen zum Mikrofon führen sowohl die Signalspannung als auch die Spannung zur Ladungserzeugung, und damit ist nur eine zweiadrige abgeschirmte Leitung erforderlich (Tonaderspeisung nach DIN 45595). Mit dem Übertrager werden Speisespannung und Nutzspannung voneinander getrennt. Der Klirrfaktor ist we-

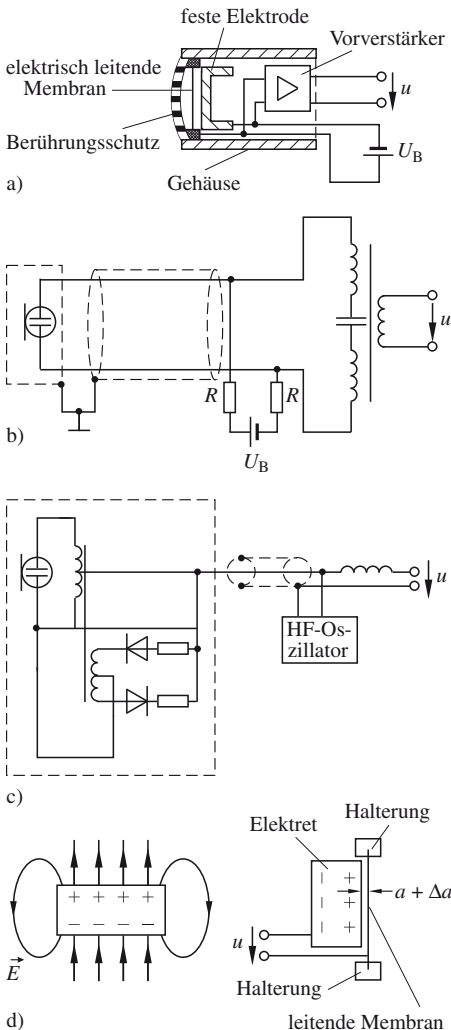


**Bild XIV-9** Kondensatormikrofon

- a) Aufbau, nach [XIV.1]
- b) Tonaderspeisung (DIN 45595)
- c) Hochfrequenzschaltung
- d) Elektretmikrofon

sentlich kleiner als 1 %, sodass dieses Mikrofon als Studiomikrofon eingesetzt wird. Allerdings empfiehlt es sich, in das Mikrofon einen Vorverstärker mit einem Eingangswiderstand  $> 1$  G $\Omega$  zu integrieren, um Leitungskapazitäten nicht wirksam werden zu lassen und Störeinstrahlungen in den hochohmigen Signalkreis zu verringern. Ohne Verstärker erreicht man Übertragungsfaktoren von etwa 1 mV/Pa. Eine weitere Möglichkeit zur Mikrofonspesung, die *Hochfrequenzschaltung*, zeigt Bild XIV-9c. Das Mikrofon erhält keine Gleichspannung, sondern liegt als Kondensator in einem Oszillatorkreis, dessen Frequenz sich schallproportional ändert (Frequenzmodulation). In einem Demodulator wird das Signal demoduliert und zusammen mit dem Hochfrequenzsignal über die Leitung übertragen. Die Spule trennt Hochfrequenz- und Nutzsignal. Der Vorteil dieser Schaltung ist, dass nur eine einadrige abgeschirmte Leitung erforderlich ist.

## 2.2.6 Elektret-Kondensatormikrofon

Eine zunehmend eingesetzte Variante ist das Elektret-Kondensatormikrofon. Ein Elektret hat auf zwei gegenüberliegenden Stirnflächen ortsfeste elektrische Ladungen, sodass ein elektrisches Feld auch ohne äußeres Anlegen einer Spannung dauerhaft vorhanden ist, Bild XIV-9d. Man beschichtet die Membran eines Kondensatormikrofons mit einem Elektret, und damit bewirkt die als konstant angenommene elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  bei einer Lageänderung  $\Delta a$  der Membran eine Spannungsänderung  $\Delta u$  an den Kondensatorplatten:  $\Delta u = E \cdot \Delta a$ . Diese Mikrofone werden u.a. in Kassettenrecordern und Anrufbeantwortern eingesetzt, weil sie unempfindlich gegen Körperschall und magnetische Streufelder sind.

## 2.3 Daten und Eigenschaften verschiedener Mikrofonsysteme

Tabelle XIV-2 stellt die Eigenschaften von Mikrofonsystemen qualitativ einander gegenüber.

Tabelle XIV-3 listet typische Werte der verschiedenen Mikrofonsysteme auf.

## 3 Schallsender

Unter den Begriff Schallsender fallen Lautsprecher und Hörer. Es wurden bzw. werden die folgenden Systeme verwendet.

### 3.1 Lautsprecher- und Hörer-Systeme

#### 3.1.1 Elektrodynamisches System

Im Luftspalt eines *Elektromagneten* bewegt sich eine Spule, deren Strom einen annähernd proportionalen Schalldruck erzeugt. Dieses System wurde angewendet, als noch keine leistungsfähigen Dauermagnete zur Verfügung standen.

**Tabelle XIV-2** Qualitative Eigenschaften von Mikrofonsystemen

|                       | Empfindlichkeit gegenüber Erschütterungen | Übertragungsfaktor | Klirrfaktor | Verarbeitung tiefer Frequenzen | Verarbeitung hoher Frequenzen | Preis, Schaltungsaufwand |
|-----------------------|-------------------------------------------|--------------------|-------------|--------------------------------|-------------------------------|--------------------------|
| Kohlemikrofon         | –                                         | +                  | – –         | –                              | 0                             | +                        |
| Kristallmikrofon      | 0                                         | 0                  | 0           | +                              | +                             | +                        |
| magnetisches Mikrofon | +                                         | 0                  | –           | –                              | +                             | +                        |
| dynamisches Mikrofon  | +                                         | +                  | +           | +                              | +                             | +                        |
| Bändchenmikrofon      | 0                                         | 0                  | +           | 0                              | +                             | +                        |
| Kondensatormikrofon   | +                                         | +                  | ++          | +                              | +                             | 0                        |
| Elektretmikrofon      | +                                         | +                  | 0           | 0                              | +                             | +                        |

Eigenschaften: – – schlecht, – weniger gut, 0 mittelmäßig, + gut, ++ sehr gut

**Tabelle XIV-3** Typische Werte für verschiedene Mikrofonssysteme

|                       | Übertragungsfaktor in mV/Pa | Elektrische Impedanz in Ω | Klirrfaktor in % | Frequenzbereich in Hz | Dynamik in dB <sup>*)</sup> |
|-----------------------|-----------------------------|---------------------------|------------------|-----------------------|-----------------------------|
| Kohlemikrofon         | 1000                        | 50 ... 500                | 25               | 600 ... 4000          |                             |
| Kristallmikrofon      | 5                           | 1 ... 5 MΩ                | 2                | 30 ... 10000          | 60                          |
| magnetisches Mikrofon | 10                          | 2000                      | 10               | 300 ... 6000          |                             |
| dynamisches Mikrofon  | 1                           | 200                       | 1                | 40 ... 14000          | 60                          |
| Bändchenmikrofon      | 0,1                         | 0,1                       | 0,5              | 40 ... 18000          | 50                          |
| Kondensatormikrofon   | 1                           | 100 MΩ                    | 0,1              | 20 ... 20000          | 80                          |

<sup>\*)</sup> Die Dynamik ist das logarithmische Verhältnis von der größten noch einwandfrei verarbeitbaren Schallamplitude zur kleinstmöglichen verarbeitbaren Schallamplitude (siehe auch DIN 40146).

**3.1.2 (Elektro-)Magnetisches System**

Eine Membran bewegt sich im Luftspalt eines Dauermagneten, Bild XIV-10. Auf dem Dauermagneten bzw. seinen Polschuhen sind zusätzlich zwei in Reihe geschaltete Spulen angebracht, durch die der zum Schalldruck proportionale Wechselfluss erzeugt wird und der sich dem Gleichfluss des Dauermagneten überlagert. Dieses System wird u.a. im Telefon (auch als Mikrofon möglich) und in Kopfhörern eingesetzt. Die auf die Membran ausgeübte Kraft  $F$  ist proportional dem Quadrat der Flussdichte  $B$ . Ist  $B_0$  die vom Dauermagneten erzeugte Flussdichte und nimmt

man die Flussdichte des Nutzsignales sinusförmig an,

$B_S = \hat{B} \cdot \sin \omega t$ , folgt für die Kraft:

$$\begin{aligned} F &\sim B^2 = (B_0 + \hat{B} \cdot \sin \omega t)^2 \\ &= B_0^2 + 2 \cdot B_0 \cdot \hat{B} \cdot \sin \omega t + \hat{B}^2 \cdot \sin^2 \omega t \end{aligned} \tag{XIV.14}$$

Der Summand  $\hat{B}^2 \cdot \sin^2 \omega t$  führt zu nichtlinearen Verzerrungen, sodass für die Konstruktion des Systems gelten muss:  $B_0 \gg \hat{B}$ .



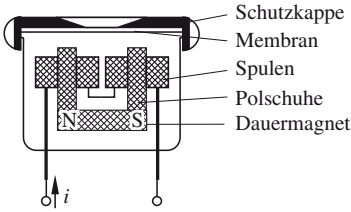


**Bild XIV-10** (Elektro-)Magnetisches System

### 3.1.3 Dynamisches System

Da keine Verwechslung mehr mit dem elektrodynamischen System (Kapitel XIV.3.1.1) gegeben ist, spricht man vom dynamischen System anstelle vom permanentdynamischen System. Nach Bild XIV-11 bewegt sich eine vom Signalstrom  $i$  durchflossene Spule im Feld eines Dauermagneten. Mit der Spule mechanisch verbunden ist eine trichterförmige Membran, die die umgebende Luft zu Schallschwingungen anregt. Die auf die Spule ausgeübte Kraft berechnet sich nach der *Lorentz-Kraft*:

$$F \sim B_0 \cdot i \quad (\text{XIV.15})$$

$B_0$  vom Dauermagneten erzeugte Flussdichte im Luftspalt in  $\text{V} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ ,  
 $i$  Signalstrom in A

Man erhält damit theoretisch einen linearen Zusammenhang zwischen der Membranauslenkung und dem Signalstrom.

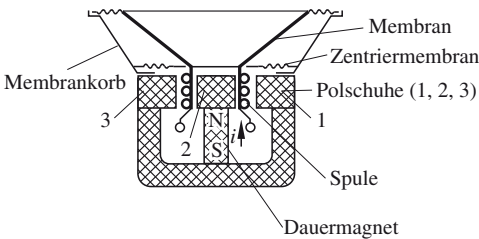


**Bild XIV-11** Aufbau eines dynamischen Lautsprechers

### 3.1.4 Elektrostatishes System

Es handelt sich hierbei um die Umkehrung des beim Kondensatormikrofon eingesetzten Prinzips. Nach Bild XIV-12 ist in geringem Abstand zu einer festen Elektrode FE die Membran M als bewegliche Elektrode angebracht. Beide sind elektrisch voneinander isoliert und bilden damit die Platten eines Kondensators. Beim Anlegen einer Spannung an die Elektroden wird die Membran M von FE angezogen, wölbt sich durch und überträgt diese Bewegung an die umgebende Luft. Da die Kraft  $F$  proportional zum Quadrat der Spannung ist, muss auch hier durch eine entsprechend große Gleichspannung  $U_0$  eine Linearisierung erreicht werden. Es gilt die Ableitung zu Gleichung (XIV.14), wenn man

die Flussdichte durch die Spannung ersetzt:

$$\begin{aligned} F &\sim u^2 = (U_0 + \hat{u} \cdot \sin \omega t)^2 \\ &= U_0^2 + 2 \cdot U_0 \cdot \hat{u} \cdot \sin \omega t + \hat{u}^2 \cdot \sin^2 \omega t \end{aligned} \quad (\text{XIV.16})$$

Für eine nahezu lineare Abhängigkeit muss gelten:  
 $U_0 \gg \hat{u}$ .

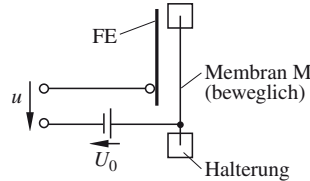


**Bild XIV-12** Prinzip eines elektrostatishes Lautsprechers

Durch die geringe Masse der bewegten Teile ergibt sich besonders bei hohen Frequenzen ein geringer Klirrfaktor. Diese Lautsprecher können allerdings nur wenig Leistung abgeben, und die Schallabstrahlung ist stark gerichtet.

### 3.1.5 Piezoelektrisches System

Es handelt sich um die Umkehrung des beim Kristallmikrofon verwendeten Prinzips. Bild XIV-13 zeigt das Kristallelement, das einseitig fest eingespannt ist und mit dem anderen Ende spannungsproportional schwingt und die Lautsprechermembran bewegt. Es sind zwei Kristallplättchen so aufeinandergeklebt, dass sich die entsprechende Biegung analog zu einem Bimetallsystem ergibt. Die mechanische Auslenkung ist nur bedingt proportional zur angelegten Spannung, sodass diese Lautsprecher einen nicht zu vernachlässigenden Klirrfaktor haben. Sie werden zur Wiedergabe von mittleren und hohen Frequenzen eingesetzt.

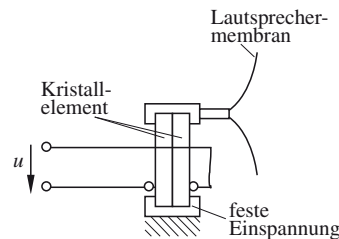


**Bild XIV-13** Kristall-Lautsprecher

## 3.2 Kenngrößen, Daten

Es folgen noch einige Begriffe im Zusammenhang mit Lautsprechern und Hörern.

- **Akustischer Kurzschluss:** Befindet sich eine Lautsprechermembran frei im Raum, d.h. sowohl Vorder- als auch Rückseite strahlen eine Schallwelle ab, können sich beide Schallwellen im Raum so



überlagern, dass sie sich ungünstigenfalls genau auslöschen. Man spricht dann von *akustischem Kurzschluss*. Das ist besonders kritisch, wenn die Wellenlänge  $\lambda$  der Schallschwingung groß ist gegen den Membrandurchmesser. Fügt man dagegen den Lautsprecher in eine passende Öffnung einer starren, sehr großen Wand ein, wird dieser Kurzschluss vermieden. Eine alternative Lösung mit weniger großen Abmessungen sind Lautsprechergehäuse, die allseitig geschlossen sind und nur vorn eine Öffnung in Lautsprechergröße haben.

- **Richtcharakteristik:** Kommt die abgestrahlte Schallwellenlänge in die Größenordnung des Membrandurchmessers, setzt eine Richtwirkung ein, die mit weiter sinkender Wellenlänge zunimmt. Es gilt:

|                   |       |        |         |        |          |
|-------------------|-------|--------|---------|--------|----------|
| Schallfrequenz    | 10 Hz | 100 Hz | 1000 Hz | 10 kHz | 16 kHz   |
| Schallwellenlänge | 34 m  | 3,4 m  | 34 cm   | 3,4 cm | 2,125 cm |

bei 20 °C in Luft und 1000 hPa

Demnach ist es nur unvollkommen möglich, mit *einem* Lautsprecher den gesamten Hörschall zu übertragen. Als Obergrenze zwischen höchster und niedrigster von einem Lautsprecher übertragbarer Frequenz gilt der Wert 100. Man setzt deshalb zwei oder drei Lautsprecher ein und optimiert jeden für einen Teilfrequenzbereich. Bei zwei Lautsprechern wählt man z.B. einen Tieftonlautsprecher für den Frequenzbereich 30 Hz bis 500 Hz und einen Mittel-Hochton-Lautsprecher für den Frequenzbereich

500 Hz bis 15 kHz (Bild XIV-14). Bei drei Lautsprechern kann die Unterteilung so aussehen: 30 Hz bis 500 Hz, 500 Hz bis 4 kHz, 4 kHz bis 20 kHz. Die einzelnen Lautsprecher werden über Frequenzweichen mit dem zugeordneten Frequenzbereich angesteuert.

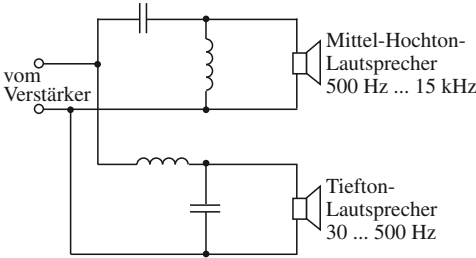


**Bild XIV-14** Trennung von Tiefton- und Hochtonlautsprechern durch Filter (Frequenzweichen)

- **Hörer, Kopfhörer:** Hörer sind Schallsender, die den Schall direkt am Ohr abstrahlen. Deshalb heißen sie auch Kopfhörer. Prinzipiell sind für Hörer alle genannten Systeme brauchbar, allerdings hat sich für die Wiedergabe hochwertiger Musikaufnahmen der dynamische Hörer durchgesetzt, der seinen Namen vom verwendeten dynamischen System hat. Die bei 1 kHz gemessene Impedanz liegt bei 4, 8 oder 16  $\Omega$  zum direkten Anschluss an die Lautsprecherausgänge eines Verstärkers oder bei 200  $\Omega$ . Es gibt sie als *offene Hörer*, bei denen die Membran nach vorn und hinten abstrahlt, und als *geschlossene Hörer*, bei denen der Hörer nur nach vorn abstrahlt.

**Tabelle XIV-4** Typische Kenndaten verschiedener Schallsendersysteme

|                            | Nennscheinwiderstand bzw. Kapazität | Frequenzbereich   | Leistung bis max. | Übertragungsfaktor | Verzerrungen | Anwendungen               |
|----------------------------|-------------------------------------|-------------------|-------------------|--------------------|--------------|---------------------------|
| magnet. Lautsprecher       | 200 ... 2000 $\Omega$               | 300 Hz ... 5 kHz  | 3 W               | 5 Pa/V             | groß         | billige Systeme           |
| magnet. Kopfhörer          | 200 ... 2000 $\Omega$               | 100 Hz ... 6 kHz  | 50 mW             | 5 Pa/V             | groß         | Telefon, Kleinhörer       |
| dynam. Breitband-Lautspr.  | 3 ... 25 $\Omega$                   | 30 Hz ... 18 kHz  | 200 W             | 0,5 Pa/V           | klein        | universell                |
| dynam. Tiefton-Lautspr.    | 2 ... 8 $\Omega$                    | 30 ... 500 Hz     | 500 W             | 0,7 Pa/V           | klein        | HiFi-Anlagen              |
| dynam. Hochton-Lautspr.    | 3 ... 25 $\Omega$                   | 500 Hz ... 20 kHz | 80 W              | 0,2 Pa/V           | klein        | HiFi-Anlagen              |
| dynam. Kopfhörer           | 4 ... 200 $\Omega$                  | 16 Hz ... 20 kHz  | 100 mW            | 0,1 Pa/V           | sehr klein   | höchste Ansprüche         |
| Piezoel. Lautsprecher      | 1 ... 5 nF                          | 1 ... 20 kHz      | 2 W               | 0,5 Pa/V           | mittel       | allgemeine Anwendung      |
| elektrostatischer Lautspr. | 100 ... 500 pF                      | 1 ... 20 kHz      | 5 W               | 0,1 Pa/V           | klein        | in kleineren HiFi-Anlagen |

Tabelle XIV-4 listet einige Eigenschaften der verschiedenen Systeme auf.

- **Motional Feedback-System:** Vor allem bei Tief-tonlautsprechern gibt es durch die relativ große Masse der Membran mit Schwingspule Signalverzerrungen. Man bringt deshalb auf der Membran einen Weg- oder Beschleunigungsaufnehmer an,

der den tatsächlichen Weg bzw. die momentane Beschleunigung ermittelt und mit dem Sollwert der ansteuernden elektrischen Größe vergleicht. Weichen beide voneinander ab, wird der Spulenstrom entsprechend eingestellt. Man erreicht auf diese Weise kleinere Klirrfaktoren.

## XV Vermittlungstechnik

### 1 Grundbegriffe

In einem vorhandenen Nachrichtennetz sorgt die *Vermittlungstechnik* dafür, dass Informationen zu jeder Zeit von einem beliebigen *Zugangspunkt* zu einem beliebigen anderen Zugangspunkt übertragen werden können. Der gesamte Vorgang wird mit *Vermittlung* bezeichnet. Das größte weltweit vorhandene Nachrichtennetz ist das kombinierte Internet-Telefonnetz. Die *Zugangspunkte* sind die Anschlusspunkte (*ortsfeste Anschlussdosen*) für die *Endgeräte*, wie z.B. Rechner, Telefonapparate, Faxgeräte oder Modems, oder aber ein *ortsveränderliches* Endgerät wie ein Laptop, ein schnurloses Telefon oder ein Funktelefon („Handy“). Die Informationen werden vorwiegend als elektrische Signale übertragen, allerdings gewinnt die optische Signalübertragung an Bedeutung, siehe Kapitel XII. Die Verbindung zweier oder mehrerer Zugangspunkte kann entweder nur für eine bestimmte Zeit (Telefongespräch, Senden eines Faxes) oder dauernd erfolgen („Standleitung“ als Telefon- und/oder Datenleitung zur Verbindung von z.B. Zweigwerken einer Firma oder als Internetverbindung über DSL, siehe Kapitel XVI, 2.2.2). Bisher wurden überwiegend *geschaltete* Kanäle eingesetzt, d.h., beide Endgeräte wurden über einen für diese Verbindung reservierten Kanal verbunden: *Leistungs- oder Durchschalte-Vermittlung*. Im Gegensatz dazu spricht man von *virtuellen* Kanälen, wenn ein Kanal für mehrere Verbindungen „gleichzeitig“ eingesetzt wird: Bei Telefongesprächen kann der Kanal in den Sprechpausen anderweitig genutzt werden. Das setzt voraus, dass

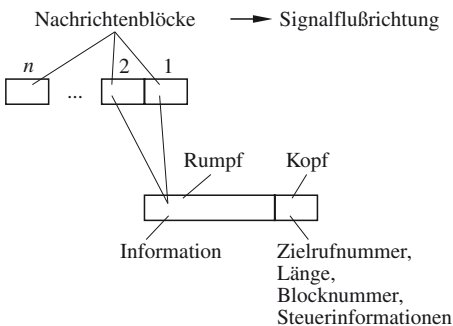


**Bild XV-1** Paketvermittlung

die Übertragung in zeitlich begrenzten Paketen geschieht: *Paketvermittlung*. Nach Bild XV-1 besteht die gesamte Nachricht aus einzelnen *Nachrichtenblöcken*, die sich aus dem *Kopf* mit den zugehörigen Zuordnungs- und Steuerinformationen und dem *Rumpf* mit der eigentlichen Information zusammensetzen.

Die Paketvermittlung wird im digitalen Datex-P-Netz der Deutschen Telekom angewendet, siehe auch Kapitel XVI.2.2.2.

### 2 Vermittlung

Um das oben genannte Ziel einer Vermittlung zu erreichen, zeigt Bild XV-2 eine naheliegende Lösung für deren Aufbau. *Jeder* der *N* Teilnehmer kann *jederzeit* mit jedem anderen Teilnehmer verbunden werden. Das setzt voraus, dass die *Teilnehmer-Anschlussleitung* (TA) jedes Teilnehmers bis zur *Ortsvermittlungsstelle* (OVST) (kurz auch *Vermittlungsstelle*) geführt wird. Diese Lösung mag bei maximal einigen tausend Teilnehmern (Telefonanschlüssen) durchführbar sein, für die gesamte Bundesrepublik ist dieser Lösungsweg nicht praktikabel. Die Vermittlungstechnik für das Festnetz ist historisch gewachsen und gibt deshalb gewisse Rahmenbedingungen vor.

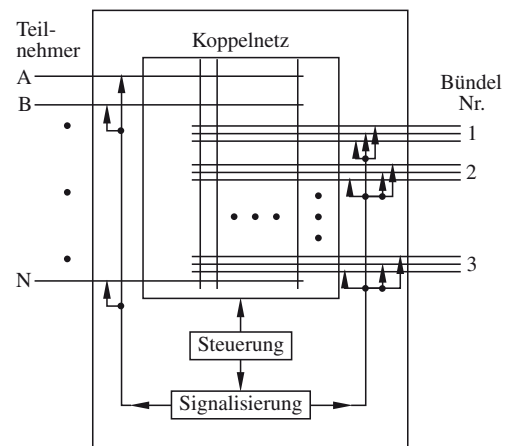


**Bild XV-2** Prinzip einer Vermittlungsstelle mit maximal möglicher Zahl von Verbindungen

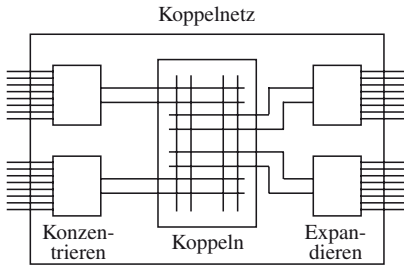


**Bild XV-3** Koppelnetz mit Konzentration und Expansion

Dazu gehört, dass 1. die Rufnummer in der Regel noch die Struktur der Vorgängerkennung aufweist und 2. die Teilnehmer-Anschlussleitungen noch als 2-Draht-Kupferleitungen vorliegen und häufig bis zur Vermittlungsstelle geführt worden sind. Weiterhin hat die Erfahrung gezeigt, dass von den *möglichen* Verbindungen im Mittel lediglich etwa 10 bis 15 % gleichzeitig belegt sind. Deshalb hat man das im Bild XV-3 gezeigte Verfahren der Konzentration-Expansion angewendet. Das war nicht nur auf höheren Ebenen der Fall, auch im Bereich der OVST wurde bei der Erschließung von Neubaugebieten die Ankopplung an das bestehende Netz zwecks Erweiterung vorgenommen. Zum besseren Verständnis der Begriffe sei hier kurz die Vorgängerkennung erläutert, und zwar an der Rufnummer 05723 71xx bzw. 71xx (xx steht für 2 Ziffern). Bei der Rufnummer 71xx handelt es sich um einen Teilnehmer aus Bad Nenn-dorf (westlich von Hannover). Die unterste Ebene der Vermittlung war die Ortsvermittlungsstelle (OVST), die räumlich die durch die Ortsgrenzen vorgegebenen Teilnehmer erfasste. Angrenzende kleinere Orte wurden größeren Orten zugeordnet. Um einen Teilnehmer aus dem eigenen Ortsnetz anzurufen, wurde und wird die Rufnummer vorausgeschickt werden, im Beispiel 05723. Jeder Ortsbereich hat seine eigene eindeutige Vorwahl. An der 0, der *Verkehrsausscheidungsziffer Inland*, erkennt die OVST, dass es sich um ein Ferngespräch handelt, also ein Gespräch, dass den Bereich der eigenen OVST verlässt und in das sog. *Nationale Fernnetz* übergeht. An den Ziffern 5723 zeigt sich die Hierarchie des Telefonnummern-aufbaus: Die OVST stellt zunächst eine Verbindung mit der höchsten Ebene, einer von 8 Zentralvermittlungsstellen (ZVST), hier Hannover anhand der Ziffer 5, her. Dann folgt die nächstniedrigere Ebene, die Hauptvermittlungsstelle (HVST), anhand der 57 in Minden/Westf., weitergehend über die Knoten-vermittlungsstelle (KVST) 572 in Stadthagen zur

Ortsvermittlungsstelle (OVST) 5723 in Bad Nenn-dorf. Dieser Weg war auch von dem Anrufenden in umgekehrter Reihenfolge zu beschreiten. Dieser sog. *Kennzahlweg* war streng strukturiert aber nicht immer der optimale Weg (längerer Verbindungsaufbau, Belegen längerer Leitungen/Umweg und damit erhöhte Leitungsblockierungen). Es wurden deshalb im Laufe der Zeit schon viele Quer- oder Direktverbindungen eingerichtet (OVST A direkt zu OVST B, OVST A direkt zu HVST D), um den Fernspreverkehr zu optimieren. Der Kennzahlweg wurde zur Ausnahme. Soll ein Anruf ins Ausland erfolgen, muss der OVST dies mitgeteilt werden. Vor der eigentlichen Rufnummer wird deshalb 00yy gewählt, wobei die 00 die *Verkehrsausscheidungsziffer Ausland* ist, gefolgt von der *Länderkennzahl yy* (49 ist für Anrufer aus dem Ausland die Länderkennzahl für Deutschland). Der Verbindungsaufbau erfolgt dann über die Auslandsvermittlungsstelle (AVST) in Frankfurt. Allerdings ist heute eine eindeutige Zuordnung zwischen Rufnummer und Vermittlungsstelle nicht mehr in jedem Fall möglich. Zum einen kann die Rufnummer bei Umzug mitgenommen werden, zum anderen werden Rufnummern blockweise an Telefonanbieter vergeben.

Mit der Einführung von ISDN (siehe Kapitel XVI, 2.2) und der damit verbundenen Digitalisierung der Sprachsignale fand ein mehr oder weniger gleitender Übergang von der alten zur neuen Vermittlungstechnik statt. Die strenge hierarchische Struktur ist nicht mehr vorhanden. Es gibt letztlich nur noch 2 Ebenen, die sehr stark vernetzt sind. Es wird unterschieden zwischen:

- Vermittlungseinheit Ortsnetz (VE:O),
  - Vermittlungseinheit Fernnetz (VE:F),
  - Vermittlungseinheit mit Netzübergangsfunktion (VE:N),
  - Vermittlungseinheit Ausland (VE:A),
  - Durchgangsvermittlungsstelle.
- *Vermittlungseinheit Ortsnetz (VE:O)*: Sie sind Bestandteil der unteren Ebene, sind gegenüber der früheren OVST wesentlich größer und können mehr als 100000 Anschlüsse verwalten. Mehrere VE:O lassen sich zusammenschalten, auch Teilvermittlungsstellen als Zusammenfassung kleinerer Einheiten werden eingesetzt, die dann mit einer VE:O verbunden werden. Die VE:Os können direkt mit anderen Vermittlungseinheiten Verbindung aufnehmen.
  - *Vermittlungseinheit Fernnetz (VE:F)*: National gehören sie zur oberen Ebene. Sie sind sehr intensiv untereinander vernetzt und Durchgangsvermittlungsstellen. Mehrere geografisch angrenzende bzw. benachbarte VE:O sind mit ihrer VE:F verbunden. Sie haben i.a. keine direkten Teilnehmeranschlüsse.
  - *Vermittlungseinheit mit Netzübergangsfunktion (VE:N)*: Hier werden Verbindungen aus dem

eigenen Netz in das Netz einer anderen Telefongesellschaft weitergeleitet. Sie sind häufig in die VE:F integriert.

- **Vermittlungseinheit Ausland (VE:A):** Sie übernehmen den Telefonverkehr mit dem Ausland. Es sind reine Durchgangsvermittlungsstellen.
- **Durchgangsvermittlungsstelle:** Sie wickeln nur den Verkehr zwischen Vermittlungsstellen ab und sind sehr stark mit anderen Vermittlungsstellen vernetzt.

Für die Orts- und Fernvermittlung werden die Systeme EWSD (Siemens, Bosch, Telekom) und S 12 (Alcatel) eingesetzt. Ein Unterschied besteht darin, dass Hin- und Rückweg bei einer Telefonverbindung bei EWSD gemeinsam geschaltet werden, bei S 12 getrennt. Technisch gesehen sind die Vermittlungsanlagen riesige Schränke, die gefüllt sind mit elektronischen Baugruppen. Mechanische Schalteinrichtungen sind nicht mehr enthalten. Die gesamte Vermittlung wird über Rechner gesteuert. Das hat den Vorteil, dass Verschleißelemente entfallen, die Vermittlungsstellen vollautomatisch und teilweise ohne anwesendes Personal betrieben werden und die Kontrolle und Fehlersuche über Fernzugriff möglich ist. Von den Telefongesellschaften angebotene Dienste können bei Bedarf über Knopfdruck zu- oder abgeschaltet werden.

### 3 Verkehrstheorie

Betrachtet man die im Mittel auftretende Belegung von Vermittlungseinrichtungen an Werktagen über einen Zeitraum von 24 Stunden, ergeben sich Schwankungen, die u.a. von den Geschäftszeiten, den Mittagspausen, dem Beginn des ermäßigten Tarifs und dem Eintritt der Nachtruhe abhängen. An Sonn- und Feiertagen erhält man eine andere Verteilung, außerdem ist sie unterschiedlich für den Orts- und den Fernverkehr. Um ein Beurteilungskriterium für den Ausbau einer Anlage zu bekommen, ermittelt man eine *repräsentative Stunde*, die *Hauptverkehrsstunde*. Die in ihr festgelegte Belegung liegt zwischen dem Mittelwert über 24 Stunden und dem Maximalwert und ergibt sich u.a. aus einer Wirtschaftlichkeitsberechnung.

- **Verkehrsmenge:**  $Y = c \cdot T_m$   
in Erlangstunden (Erl · h) (XV.1)  
 $c$  Zahl der Belegungen,  $T_m$  mittlere Belegungsdauer in s
- **Verkehrswert**  $y_v = Y/T = c \cdot T_m/T$   
in Erlang (Erl) (XV.2)  
 $T$  Beobachtungsdauer in s

1 Erl bedeutet, dass die Einrichtung dauernd durch Belegung genutzt wird. Dies ist damit der Höchstwert, der erreicht werden kann. Für den Teilnehmeranschluss an das öffentliche Netz gilt ein Mittelwert von etwa 0,1 Erl.

- **Angebot:** Verkehrswert, der einer Anlage zugeführt wird, unabhängig davon, ob er bearbeitet werden kann oder nicht.

$$\text{Angebot } A = C_a \cdot T_m \quad (\text{XV.3})$$

$C_a$  Zahl der Belegungen bzw. Belegungsversuche,  $T_m$  mittlere Belegungsdauer in s

- **Leistung:** Maximaler Verkehrswert einer Anlage.

$$\text{Leistung } y = C_y \cdot T_m \quad (\text{XV.4})$$

$C_y$  Zahl der maximal möglichen Belegungen,  $T_m$  mittlere Belegungsdauer in s

- **Verlustsystem:** Das Angebot übersteigt die Leistung. Dann gilt:

$$\text{Restverkehr } R = A - y = (C_a - C_y) \cdot T_m \quad (\text{XV.5})$$

und für den Verlust erhält man:

- **Verlust**  $V = R/y$   
(bezogen auf die Leistung) (XV.6)

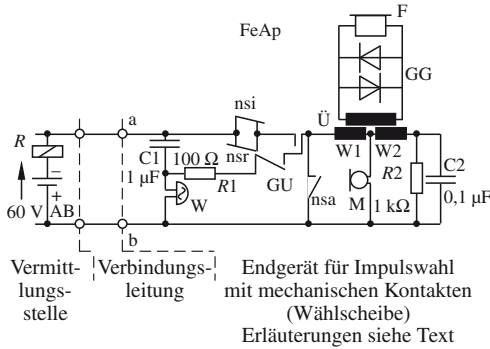
- **Wartezeitsystem:** Eine momentan nicht herstellbare Belegung wird solange in einer Warteschleife gespeichert, bis sie durch eine freiwerdende Einrichtung durchgeführt werden kann. Daraus folgt die

$$\text{mittlere Wartedauer } T_w = T_{w \text{ ges}} / C_w \quad (\text{XV.7})$$

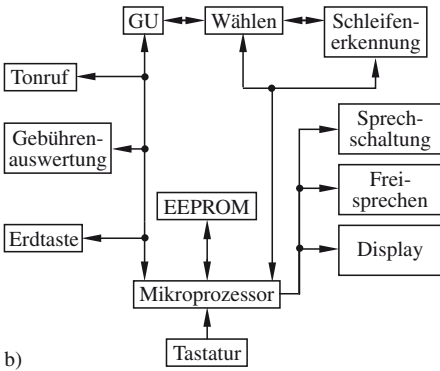
$T_{w \text{ ges}}$  Wartezeit aller wartenden Belegungen zusammen,  $C_w$  Anzahl der verzögerten Belegungen

### 4 Endgerät

Ein häufig eingesetztes Endgerät ist der *Fernsprechapparat*, abgekürzt FeAp (Telefonapparat). Bild XV-4a zeigt den Innenaufbau einer älteren Ausführung mit mechanischen Kontakten. Dieses Modell ist heute durch vollelektronische Geräte ersetzt worden, Bild XV-4b, kann aber manchmal noch verwendet werden (siehe unten). Es werden 2 Leitungen, die a- und die b-Ader, benötigt. Bei aufgelegtem Hörer sind die Kontakte des Gabelumschalters GU geöffnet. Ein eingehender Ruf (Klingelzeichen) wird als 25- oder 50-Hz-Wechselspannung eingespeist und gelangt über C1 an den Wecker W. Ist die Wählscheibe in Ruhestellung, sind die Kontakte nsi und nsr geschlossen, nsa ist geöffnet. Beim Abheben des Hörers schließen die Kontakte des GU, und die Sprechwechselspannung des Anrufers gelangt über den Übertrager Ü an den Fernhörer F (Hörkapsel). Die zwei antiparallelen Dioden (GG) begrenzen Störgeräusche mit sehr hohen Amplituden auf ein erträgliches Maß. Spricht der Angerufene in das Mikrofon M, wird die Sprechwechselspannung zum Anrufer übertragen. In der Wicklung w1 des Übertragers Ü fließt der Sprech-Wechselstrom entgegengesetzt zu dem in Wicklung w2, sodass sich die Flüsse auf der Sekundärseite des Übertragers teilweise aufheben. Damit hört der Sprechende seine eigene Sprache nur noch mit geringer Amplitude im Hörer, was als angenehm



a)



b)

**Bild XV-4** Fernsprechapparate

- a) Innenschaltung des FeAp 48/61 für Impulswahl (ältere Ausführung)
- b) Prinzip eines Komforttelefons für Mehrfrequenzwahl

empfundener wird. Eine vollständige Kompensation ist übrigens nicht erwünscht, weil dann beim Sprechen der Eindruck eines defekten Telefons entsteht. Die Kombination aus R2 und C2 hat auch die Aufgabe des Leitungsabschlusses. Wird der Hörer abgehoben, fließt über nsf/nsr, GU, w1, w2, R2 und das in der Vermittlungsstelle vorhandene Relais R ein Gleichstrom, sodass das Relais anzieht und den Verbindungswunsch erkennt und weiterleitet. Wird die Wählscheibe aufgezogen, Bild XV-5, schließt der Kontakt nsa, und der Kontakt nsr öffnet. Durch Überbrücken von R2 durch nsa kann in der Vermittlungsstelle ein noch höherer Strom fließen, der für die Steuerung eines Wählers benutzt wird (Änderung des Schleifenstromes). Lässt man die Wählscheibe nach Wahl der Ziffer N ablaufen, öffnet nsi (N + 2)-mal. Die letzten 2 zusätzlichen Öffnungen werden aber durch nsr wieder unterdrückt, sodass die Zahl der Unterbrechungen tatsächlich der gewählten Ziffer entspricht. Bild XV-5 stellt den Ablauf bei Wahl der Ziffer 4 dar. Der Wähler in der Vermittlungsstelle

erkennt eine neue gewählte Ziffer daran, dass zwischen zwei Unterbrechungen eine Zeit von mindestens 400 ms vergeht. Mit den zwei zusätzlichen unterdrückten Impulsen lässt sich diese Zeit auch bei sehr schnellem Wählen zweier aufeinanderfolgender Ziffern mit der Wählscheibe erreichen. Bei Telefonapparaten mit Zifferntasten wird die Ziffernfolge bei zu schneller Tastenbetätigung intern zwischengespeichert und dann zur Wähleinrichtung entsprechend den Vorgaben übertragen.

Die in Bild XV-4b im Prinzip dargestellte Innenschaltung neuer Telefonapparate setzt einen Mikroprozessor zur Steuerung ein, um den wesentlich erweiterten Funktionsumfang zu bearbeiten. Dazu gehören die Ansteuerung eines LCD-Displays und die Bereitstellung der Wählfrequenzen. Weiterhin müssen Funktionseinheiten wie die Freisprecheinrichtung, die Gebührenerfassung, besondere Tastenbelegungen und der Wahlvorgang bedient werden. In einem EEPROM werden das Steuerprogramm und z.B. vom Anwender häufig benutzte Telefonnummern oder Nummern für die Wahlwiederholung abgespeichert.

Für die Übermittlung der Ziffern einer Rufnummer gibt es zwei Verfahren:

- **Impulswahlverfahren:** Dieses Verfahren wurde oben beschrieben. Die einzelnen Ziffern werden durch eine entsprechende Anzahl von Änderungen des Schleifenstromes übermittelt. Dieses Wahlverfahren wird nicht mehr verwendet. Nur in privaten Telefonanlagen ist es noch manchmal einstellbar, wird dann aber intern in das Mehrfrequenzwahlverfahren umgesetzt.
- **Mehrfrequenzwahlverfahren:** Die Ziffern werden durch gleichzeitiges Senden von zwei unterschiedlichen Frequenzen übertragen. Bild XV-5 zeigt die Zuordnung. Die 4 Tasten in der Spalte ganz rechts sind für den Verbindungsaufbau nicht erforderlich und werden, falls vorhanden, für Sonderfunktionen eingesetzt (z.B. Wahlwiederholung der zuletzt gewählten Telefonnummer).
- **Netzkennzahl:** Diese Zahlenkombination wird der eigentlichen vollständigen Rufnummer vorangestellt und legt fest, mit welcher Telefongesellschaft die folgende Verbindung durchgeführt und abgerechnet werden soll.

|        |         |         |         |         |
|--------|---------|---------|---------|---------|
| 697 Hz | 1       | 2       | 3       |         |
| 770 Hz | 4       | 5       | 6       |         |
| 852 Hz | 7       | 8       | 9       |         |
| 941 Hz | *       | 0       | #       |         |
|        | 1209 Hz | 1336 Hz | 1477 Hz | 1633 Hz |

**Bild XV-5**

Zuordnung der Frequenzen zu den Tasten beim Mehrfrequenzwahlverfahren



## XVI Kommunikations- und Datennetze

Die zur Zeit vorhandenen Kommunikations- und Datennetze werden ständig weiterentwickelt und dem Stand der Technik angepasst. Von den momentan zur Verfügung stehenden Netzen sollen einige mit ihren wesentlichen Eigenschaften dargestellt werden. Weitere Einzelheiten siehe auch Kapitel *Datenkommunikation*.

Bei Kommunikations- und Datennetzen unterscheidet man drei Betriebsarten:

- **Simplex-Betrieb:** Die Übertragung von Informationen oder Daten ist nur in *einer* Richtung möglich. Sender und Empfänger können ihre Funktion nicht tauschen.
- **Halbduplex-Betrieb:** Informationen können nicht gleichzeitig in beiden Richtungen übertragen werden. Beide Seiten einigen sich, wer momentan der Sender und wer der Empfänger ist. Bekannt ist das Verfahren unter dem Begriff *Gegensprechverkehr*.
- **Vollduplex-Betrieb:** Der Informationsaustausch geschieht in beiden Richtungen gleichzeitig, entweder auf getrennten Kanälen (Leitungen), für jede Richtung ein Kanal, oder über nur einen Kanal (Leitung), wobei beide Informationsflüsse ineinandergeschachtelt werden, was bei einer Digitalübertragung einfach realisierbar ist und bei entsprechend hoher Bitrate einer „quasi gleichzeitigen“ Übertragung in beiden Richtungen entspricht.

### 1 Strukturen lokaler Kommunikations- und Datennetze

Diese Netze, mit LAN (local area network) bezeichnet, überschreiten streng genommen nicht die Grundstücksgrenzen. Sie werden sowohl gewerblich in Firmen als auch im privaten häuslichen Bereich eingesetzt. Bild XVI-1 zeigt verschiedene Möglichkeiten der Vernetzung der einzelnen Stationen.

Bei der Sternform sorgt eine Zentraleinheit für einen geordneten und damit sicheren Datenaustausch. Allerdings ist das gesamte System bei Ausfall der

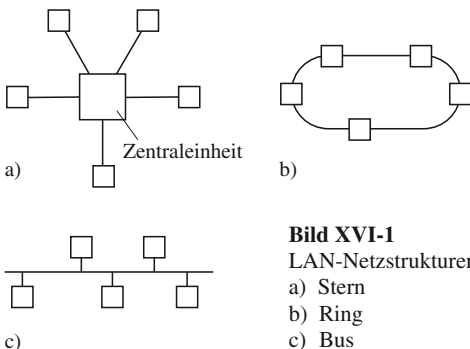


**Bild XVI-1**  
LAN-Netzstrukturen  
a) Stern  
b) Ring  
c) Bus

Zentraleinheit nicht mehr funktionsfähig. Das Ring-system erfordert einen relativ geringen Verdrahtungsaufwand. Bei Ausfall einer Station kann das gesamte System nur eingeschränkt weiter benutzt werden. Der Datentransfer ist problematischer, da er über mehrere Zwischenstationen zur Zielstation (Zielrechner) weitergeleitet wird. Das Senden und Empfangen von Daten wird durch das *Token-(Ring)-Verfahren* geregelt: Erst wenn eine Station ein bestimmtes Bitmuster, das Token erhält, sendet sie die Daten einschließlich Empfängeradresse. Diejenigen Stationen, die nicht an sie adressierte Daten erhalten, leitet sie an die Folgestation weiter. Wenn die Zielstation den Empfang der Daten quittiert hat, gibt die Sendestation den Token an die Nachbarstation weiter.

Die Organisation auf der Busleitung geschieht nach der *Ethernet*-Spezifikation. Eine Station sendet nur dann, wenn auf dem Bus keine Aktionen stattfinden. Senden mehrere Stationen gleichzeitig, weil sie zum gleichen Zeitpunkt starten, wird der Sendevorgang von den beteiligten Stationen abgebrochen und nach zufallsbestimmten und damit unterschiedlichen Verzögerungszeiten erneut gestartet. Die auf dem Bus übertragenen Daten sind mit einer Zieladresse versehen und werden auch nur von der adressierten Station aufgenommen und quittiert. Dieses Organisationsform wird mit *CSMA/CD-Verfahren* bezeichnet (*carrier-sense multiple access/collision detection*).

Tabelle XVI-1 fasst wesentliche Eigenschaften der drei Netzstrukturen zusammen.

### 2 Öffentliche Kommunikations- und Datensysteme

Aus der Vielzahl der Systeme zur Informations- und Datenübertragung sind hier einige Systeme herausgegriffen worden, die im allgemeinen Sprachgebrauch mit den Begriffen Telefon, Handy, Internet, VoIP, Telefax und PC (Rechner) in Verbindung gebracht werden.

#### 2.1 Einführung

Die Vorteile der Digitaltechnik, hier speziell bezogen auf den Telefonverkehr, sind: höhere Sprachqualität, geringere Fehlerquote, schnellerer Verbindungsaufbau, die Möglichkeit der Verschlüsselung und effektivere Ausnutzung der vorhandenen Leitungen. Über den Telefonverkehr hinaus waren, begünstigt durch den technischen Fortschritt, neue Dienste möglich und auch von den Anwendern gewünscht. Das deshalb neu zu entwickelnde System hatte folgende Zielvorgaben:

- Bestehende Dienste sind in einem einheitlichen System zusammenzufassen.

**Tabelle XVI-1** Eigenschaften von Netzstrukturen

| <b>Sternstruktur</b>     |                                                                                                                                                        |
|--------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Kennzeichen              | Zentralrechner (Server) und Einzelrechner                                                                                                              |
| Vorteile                 | Relativ hohe Übertragungsrate – Keine Systemstörung, wenn Einzelrechner oder Leitung ausfällt – Mit wenig Aufwand um weitere Einzelrechner erweiterbar |
| Nachteile                | Bei Ausfall des Zentralrechners fällt gesamte Anlage aus – Der Zentralrechner muss bei großen Netzen sehr leistungsfähig sein                          |
| Max. Übertragungsrate    | 2 ... 100 Mbit/s, auch abhängig vom verwendeten Verbindungskabeltyp                                                                                    |
| max. Zahl der Teilnehmer | » 100, hängt von der Leistungsfähigkeit des Zentralrechners ab                                                                                         |
| Verbindungskabel         | Koaxialkabel; UTP; STP; Lichtwellenleiter <sup>1)</sup>                                                                                                |
| Steuerung                | Zentralrechner                                                                                                                                         |

| <b>Ringstruktur</b>      |                                                                                                                |
|--------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Kennzeichen              | Einzelrechner in geschlossener Ringform miteinander verbunden                                                  |
| Vorteile                 | Kein Zentralrechner erforderlich – Zugriff auf andere Einzelrechner relativ einfach                            |
| Nachteile                | Störung des Betriebes bei Ausfall eines Einzelrechners oder Kabels (lässt sich mit einigem Aufwand minimieren) |
| Max. Übertragungsrate    | ca. 16 Mbit/s (theoretisch), 1 Mbit/s praktisch (kritisch: Übergang Ring auf Rechner)                          |
| max. Zahl der Teilnehmer | ca. 100                                                                                                        |
| Verbindungskabel         | Koaxialkabel; UTP; STP <sup>1)</sup>                                                                           |
| Steuerung                | Token-Ring-Struktur                                                                                            |

| <b>Busstruktur ohne File-Server</b> |                                                                                                               |
|-------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Kennzeichen                         | Anschluss der Einzelrechner an einen Systembus, kein Zentralrechner                                           |
| Vorteile                            | Zusätzliche Einzelrechner leicht einfügbar                                                                    |
| Nachteile                           | Zunehmende Zahl von Einzelrechnern verringert die Übertragungsrate – Bei Kabeldefekt fällt gesamte Anlage aus |
| Max. Übertragungsrate               | 10 Mbit/s (10 Base T); 100 Mbit/s (100 Base TX), 1000 Mbit/s (1000 Base T)                                    |
| max. Zahl der Teilnehmer            | ca. 100                                                                                                       |
| Verbindungskabel                    | UTP; STP <sup>1)</sup> ; Koaxialkabel <sup>2)</sup>                                                           |
| Steuerung                           | Einzelrechner untereinander. Ethernet-Spezifikation                                                           |

| <b>Busstruktur mit File-Server</b> |                                                                                                                                                       |
|------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Kennzeichen                        | Anschluss der Einzelrechner an einen Systembus, mit File-Server (Zentralrechner)                                                                      |
| Vorteile                           | Zusätzliche Einzelrechner leicht einfügbar – File-Server stellt häufig benötigte Daten zur Verfügung, d.h. Anlage einfach erweiterbar mit neuen Daten |
| Nachteile                          | Zunehmende Zahl von Einzelrechnern verringert die Übertragungsrate – Bei Kabel- und Server-Defekt fällt gesamte Anlage aus                            |
| Max. Übertragungsrate              | 10 Mbit/s (10 Base T); 100 Mbit/s (100 Base TX), 1000 Mbit/s (1000 Base T)                                                                            |
| max. Zahl der Teilnehmer           | ca. 100                                                                                                                                               |
| Verbindungskabel                   | UTP; STP <sup>1)</sup> ; Koaxialkabel <sup>2)</sup>                                                                                                   |
| Steuerung                          | File-Server und Einzelrechner. Ethernet-Spezifikation                                                                                                 |

<sup>1)</sup> UTP: Verdrehte Doppelader, nicht abgeschirmt, bis 100 Mbit/s (Kategorie 5; ev. Kategorie 6, 7); STP: Verdrehte Doppelader, abgeschirmt, bis 100 Mbit/s (Kategorie 5).

<sup>2)</sup> 50-Ω-Kabel UG-274 (Thinnet-Cable), doppelt abgeschirmt, und RG 58 (Cheapernet Cable), einfach abgeschirmt



- Neu hinzukommende Dienste müssen sich einfach integrieren lassen.
- Mehrere Dienste müssen parallel genutzt werden können.
- Die genannten Vorteile der Digitaltechnik müssen für alle Dienste nutzbar gemacht werden können.
- Die vorhandenen Telefonleitungen sollen für alle Dienste gemeinsam weiter verwendet werden können.

Vorgegeben war, dass die vorhandenen Telefonleitungen mit dem Telefonverkehr nicht ausgelastet waren (Datenrate 144 kBit/s bei ISDN). Die erreichbaren Datenraten hängen wesentlich von der Kabellänge zwischen Vermittlungsstelle und Kundenstandort ab und liegen in der Größenordnung 1 MBit/s bei etwa 8 bis 10 km bis zu 16 MBit/s (übliche Angabe 16000 kBit/s) bei etwa 1 km.

2.2 ISDN

Mit der Einführung des ISDN (Integrated Services Digital Network) wurde dieses neue System geschaffen. Inzwischen ist das zunächst in der Bundesrepublik verwendete nationale ISDN durch das europaweit gültige Euro-ISDN (DSS1, Digital Subscriber Signaling System 1) abgelöst worden. Wenn im Folgenden von ISDN gesprochen wird, ist Euro-ISDN gemeint.

Das ISDN ist ein digitales Netz. Es ermöglicht die Übertragung von Informationen und Daten von unterschiedlichen Anwendungen, z.B. Telefon (Festnetz), Internet, Telefax, VoIP (Voice over IP, Internettelefonie), Datex-Netz und Bild-Telefonie. Für die Verbindung vom Endteilnehmer zur Vermittlungsstelle (häufig Telekom) dient die vorhandene 2-Draht-Leitung. Da unterschiedliche Dienste über die gleiche Leitung übertragen werden, müssen die beim Kunden angeschlossenen Geräte erkennen können, ob ein eingehender Ruf für sie bestimmt ist, sie ihn also

annehmen oder aber ablehnen sollen. Man hat dazu die *Dienstekennung* eingeführt, eine Zahl, die den Dienst kennzeichnet, u.a. Sprache, Fax Gruppe 2 oder 3, Fax Gruppe 4, E-Mail oder Daten.

Insgesamt bietet ISDN folgende Dienste:

- Telefonie
- Telefax (Gruppe 4)
- Datenübertragung (64 kBit/s pro B-Kanal)
- Teletex
- Bildübertragung

Die folgende Gliederung orientiert sich an den Begriffen und Anwendungen in der Praxis.

2.2.1 Telefon, Telefax, Internet (<64 kBit/s)

In diesem Kapitel werden diejenigen Dienste genannt, die im Frequenzbereich bis 144 kHz (theoretisch) bzw. 120 kHz (praktisch) übertragen werden.

Die von der Vermittlungsstelle kommende 2adrige Leitung wird beim Kunden mit dem NT (Netzabschluss, Network Terminator) abgeschlossen (mit vorhandenem Internetanschluss über DSL siehe weiter unten). Je nach Anforderung des Kunden gibt es mehrere Ausführungsformen des Telefonanschlusses nach Tabelle XVI.2.

Ein ISDN-Gerät muss für den Mehrgeräte- oder Anlagen-Anschluss geeignet sein. Zwar wird für beide das gleiche Protokoll verwendet, aber es sind ev. unterschiedliche Funktionen zu erfüllen. Es gibt Geräte, die die Art des Anschlusses automatisch erkennen. Wird ein Basisanschluss verwendet, wird der zugeordnete Netzabschluss mit NTBA bezeichnet. Bei einem Anlagenanschluss muss der Kunde eine Telefonanlage (TK Telekommunikationsanlage) installieren, weil der Provider beim Erkennen der Rufnummer die von den Anrufenden angehängte Durchwahlnummer zum Endkunden durchreicht. Die Telefonanlage muss diese Nummern dann den vorgesehenen Apparaten zuordnen. Da bei einem Basisan-

Tabelle XVI-2 ISDN-Anschlussarten, weitere Erläuterungen siehe Text

| Basisanschluss                                          |                                                     | Primärmultiplex-Anschluss<br>(PM × As)     |
|---------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| Mehrgeräte-Anschluss                                    | Anlagen-Anschluss                                   |                                            |
|                                                         |                                                     | Sonderform des Anlagenanschlusses          |
| 8 Endgeräte anschließbar                                | Zahl der Endgeräte gleich Zahl der Durchwahlnummern | für mittlere bis große TK- oder DV-Anlagen |
| Telefonanlage (TK) anschließbar                         | Erfordert Telefonanlage (TK)                        |                                            |
| 3 (max 10) Rufnummern (Multiple Subscriber Number, MSN) | Eine Rufnummer mit angehängter Durchwahlnummer      |                                            |
| 2 B-Kanäle (Nutzkanäle)                                 | 2 B-Kanäle (Nutzkanäle)                             | 30 B-Kanäle                                |
| 1 D-Kanal (Steuerkanal)                                 | 1 D-Kanal (Steuerkanal)                             | 1 D-Kanal                                  |

schluss zwei B-Kanäle zur Verfügung stehen, können gleichzeitig zwei voneinander unabhängige Aktionen durchgeführt werden, z.B. zwei Telefonate, ein Telefonat und ein Faxversand oder ein Telefonat und eine Internetverbindung. Im Folgenden wird ein Basisanschluss-Mehrgeräteanschluss mit NTBA angenommen.

### ● POTS

Mit POTS (Plain Old Telephone Service) wird der Telefon-Dienst bezeichnet, der Sprache analog überträgt. Damit hat der Begriff hier eigentlich keine Bedeutung, er wird aber häufig zu Vergleichszwecken herangezogen.

### ● Teilnehmeranschlussleitung

Die Teilnehmeranschlussleitung (TAL) ist die Verbindungsleitung, die die Vermittlungsstelle mit dem Endkunden verbindet. Sie ist als 2adriges Kupferleitung ausgeführt und wird auch mit „Letzte Meile“ bezeichnet. Beim Endkunden wird sie mit dem NTBA (s.u.) abgeschlossen. Sie hat die Schnittstellenbezeichnung  $U_{k0}$  ( $k$  für Kupfer, 0 für Basisanschluss). Die Länge kann maximal etwa 8 km betragen, ohne dass Zwischenverstärker erforderlich sind. Für die auf der Leitung übertragenen Signale wird der 4B3T-Code (auch mit MMS43 bezeichnet) verwendet. Das codierte Signal ist ternär, hat also 3 Zustände: +2 V, -2 V und 0. Es werden jeweils 4 Bits des Digitalsignals in 3 Schritte des ternären Signals umgesetzt. Damit stehen  $2^4 = 16$  Digitalwerten  $3^3 = 27$  Ternärwerte gegenüber. Durch geschickte Zuordnung lässt sich eine Datenreduktion auf maximal 120 kBit/s und eine Gleichstromfreiheit der übertragenen Signalfolge erreichen. Letzteres ist erforderlich, weil im NTBA Transformatoren eingesetzt werden. Siehe dazu NTBA.

### ● NTBA

Der NTBA wandelt die  $U_{k0}$ -Schnittstelle um in einen 4adrigen  $S_0$ -Bus. Damit benötigt der NTBA für seine aktiven elektronischen Komponenten eine eigene externe Stromversorgung, in der Regel aus dem 230-V-Netz. Er kann und muss allerdings auf diese externe Versorgung verzichten können für den Fall, dass das 230-V-Netz ausfällt und trotzdem noch der Telefonverkehr für z.B. einen Notruf funktionsfähig gehalten werden muss. Er ist demnach so ausgelegt, dass er ein Telefon, das keine eigene externe Versorgung hat (Netzteil, Steckernetzteil) oder eine Telefonanlage (nur Steuerung des Einganges, nicht der gesamten Anlage) versorgen kann. Die Leistung dazu bekommt er über die Spannung auf der  $U_{k0}$ -Schnittstelle (etwa 40 V, maximal etwa 0,4 W) und einen eingebauten Spannungswandler. Mit angeschlossenem 230-V-Netz am NTBA kann er 4 Telefone (Endgeräte), die über kein eigenes externes Netzteil (Steckernetzteil) verfügen, mit Strom versorgen. Bei mehr als 4 Geräten am  $S_0$ -Bus müssen diese

ein eigenes Netzteil haben. Für eine ev. angeschlossene Telefonanlage ist wichtig, dass sie bei Ausfall des 230-V-Netzes ein Telefon aus der Anlage herauslöst und dieses einzeln und direkt an den  $S_0$ -Bus anschaltet. An diesen  $S_0$ -Bus können maximal 12 parallel geschaltete Steckdosen angeschlossen werden. Daran sind maximal 8 gleichzeitig aktive Endgeräte zu betreiben. Die Kabellänge kann zwischen 100 m und 1000 m liegen, je nach Anschlussart und Qualität der Leitungsverlegung. Zu den verschiedenen Auslegungen des Busses gibt es Unterlagen der Netzbetreiber. Der NTBA nimmt auch die Trennung der Signale für Hin- und Rückleitung (Sprechsignal und Hörsignal) vor. Dazu ist ein Transformator mit Leitungsnachbildung erforderlich, siehe Bild XV-4.

### ● Digitalisierung

Jedes Endgerät muss die Signale in digital codierter Form nach den Vorgaben des  $S_0$ -Busses zur Verfügung stellen. Damit benötigt jeder Telefonapparat (Fernsprechapparat) einen Analog-Digital-Umsetzer. Es wird deshalb zwischen analogen und ISDN-Telefonen unterschieden. Analoge Telefone sind nur dann noch verwendbar, wenn ein zwischengeschalteter Terminaladapter die notwendige Anpassung vornimmt. Das gilt auch für Modems und Faxgeräte, die man aber häufig von analog auf digital umschalten kann. Telefonanlagen haben den Terminaladapter in der Regel eingebaut. Für den beim Telefonieren übertragenen Frequenzbereich ist die Sprachverständlichkeit entscheidend (300 Hz bis 3,4 kHz, bewährte Werte aus der Analog-Übertragungstechnik) und nicht die originalgetreue Übertragung der Sprache (etwa 50 Hz bis 10 kHz). Zur Anwendung kommt der Code G.711, der die höchste Frequenz mit 3,5 kHz vorgibt. Dieser Wert ist in der Vermittlungsstelle fest eingestellt, deshalb ist die Anwendung der HD-Telefonie mit der höchsten Frequenz 7 kHz im Festnetz nicht ohne weiteres möglich. Die Abtastfrequenz beträgt 8 kHz. Codiert wird zunächst mit 12 Bit, anschließend wird umcodiert, indem für die großen Lautstärken (große Signalamplituden) weniger Bit verwendet werden als für leise Töne. Das Ohr empfindet das eher als Vorteil denn als Nachteil. Die Umcodierung geschieht über eine quasilogarithmische Kennlinie (a-Law). Daraus folgt ein Digitalsignal mit 8-Bit-Codierung. Für jeden der zwei B-Kanäle ergeben sich daraus 64 kBit/s, für den D-Kanal werden 16 kBit/s benötigt. Insgesamt ergibt das eine Bitrate von 144 kBit/s am  $S_0$ -Bus.

### ● Telefax (Fax)

Es können Faxgeräte der Gruppen 3 (digitale Daten im analogen Festnetz, max. 14,4 kBit/s) und 4 (digitale Daten im ISDN-Netz, max. 64 kBit/s) angeschlossen werden. Häufig werden Faxgeräte in Multifunktionsgeräte eingebaut, in denen die Funktionen Faxen, Drucken, Scannen und Fotokopieren vereint sind. Die Verbindung zum ISDN-Telefonnetz ge-

schiebt entweder über einen Terminaladapter oder häufig über ein Kombigerät, das die Funktionen Modem und Router für die Einwahl ins Internet über DSL gestattet, sowie eine Kleintelefonanlage mit dem Übergang analog  $\leftrightarrow$   $S_0$ -Bus enthält.

Ein Fax wird erstellt, indem eine Vorlagenseite punktweise über Fotodiodenzeilen abgetastet wird und die jeweiligen Helligkeitswerte übertragen werden. Das hat den Vorteil, dass auch beliebige Grafiken übertragen werden können. Sender und Empfänger sind nicht mehr an einen gemeinsamen Zeichensatz gebunden. Bei „feiner“ Auflösung ergeben sich 7,7 Zeilen pro mm („mittlere“ Auflösung 3,85 Zeilen pro mm, Grad der Auflösung am Fax-Gerät einstellbar) und pro Zeile 1728 Punkte. Das ergibt ca. 3,9 Millionen Bildpunkte und erfordert bei einer Übertragungsrate von 10000 Bit/s etwa 400 s Übertragungszeit. Um diese Zeit zu verringern, wählt man folgende Codierung: Haben z.B. 1728 aufeinanderfolgende Bildpunkte den Helligkeitswert „weiß“, was bei Schriftübertragung zwischen den einzelnen Zeilen auftritt, werden nur diese Zahl und der Wert „weiß“, beide entsprechend kodiert, übertragen. Damit kann eine Seite im Mittel in einer Minute gesendet werden. Die hier genannten Zahlenwerte sind Beispiele, weil bei den Faxgeräten mehrere unterschiedliche Abtastparameter möglich sind.

### ● Teletex, Telex

Mit diesem Dienst verbindet sich der Begriff *Fernschreiber*. Der Teletex-Dienst ist eine Weiterentwicklung des Telex-Dienstes. Im internationalen Verkehr ist der Telexdienst (noch) weit verbreitet, sodass auch in der Bundesrepublik die Teletex-Geräte telex-fähig sein sollten. Die wesentlichen Unterschiede beider Dienste sind:

| Telex-Format                                              | Teletex-Format             |
|-----------------------------------------------------------|----------------------------|
| 5 Bit pro Zeichen                                         | 8 Bit pro Zeichen          |
| Übertragung mit 50 bit/s                                  | Übertragung mit 2400 bit/s |
| Internationales Telegraphenalphabet Nr. 2, ca. 64 Zeichen | ca. 310 Zeichen            |

Im internationalen Verkehr geschieht die Übertragung im Telex-Format. Dieses kann national in das Teletex-Signal umgewandelt werden. Als Endgeräte sind neben dem Fernschreiber auch Schreibmaschinen und Rechner mit Drucker- und Bildschirmausgabe möglich. Im nationalen Verkehr hat dieser Dienst nur noch eine untergeordnete Bedeutung.

### ● Leistungsmerkmale

Der Einsatz der Digitaltechnik ermöglicht die Bereitstellung nützlicher Funktionen, mit *Leistungsmerkmalen* bezeichnet. Sie sind teilweise providerabhängig und wechseln zeitweise. Deshalb sind hier nur

einige angeführt, bei Bedarf ist der aktuelle Stand zu erfragen.

- Halten einer Verbindung: Während eines Telefongesprächs ein zweites Gespräch annehmen und den ersten Anrufer in eine Warteschleife legen, ohne die Verbindung zu unterbrechen.
- Umstecken am Bus: Ein Telefon kann aus einer Telefonbuchse ausgesteckt werden (Raum 1) und innerhalb von 3 min an einem anderen Ort in eine andere Telefonbuchse (Raum 2) wieder eingesteckt werden, ohne dass das Gespräch unterbrochen wird.
- Übermittlung der Rufnummer.
- Anrufweiterschaltung: Der Anrufer kann vom Angerufenen mit jedem Telefonanschluss weltweit weiterverbunden werden, auch mit Mobiltelefonen des D- und E-Netzes.
- Anklopfen: Während eines Gesprächs wird durch Töne angezeigt, dass ein weiterer Anruf ansteht.
- Dreierkonferenz: Drei Personen mit unterschiedlichen Rufnummern (Aufenthaltsorten) können gemeinsam miteinander sprechen und sich hören.

### ● Internetzugang

Die Verbindung vom Rechner zum Internet erfolgt über ein ISDN-Modem oder eine ISDN-Schnittstellenkarte im Rechner (CAPI-Schnittstelle). Beide nehmen die entsprechende Umcodierung mit dem Protokoll des  $S_0$ -Busses vor. Die Daten werden über einen der B-Kanäle mit maximal 64 kBit/s übertragen. Dabei besteht die Möglichkeit, ein Telefonat und die Internetverbindung gleichzeitig auszuführen. Die Datenrate ist auf maximal 64 kBit/s begrenzt. Durch geeignete Software können beide B-Kanäle zusammengefasst werden, sodass sich eine Datenrate von 128 kBit/s ergibt.

#### 2.2.2 Internet über DSL (>64 kBit/s), VoIP, IPTV

Der auf den vorhandenen 2adrigen Leitungen noch verfügbare Frequenzbereich (siehe Einführung) wird für DSL (Digital Subscriber Line) genutzt. Unter DSL werden unterschiedliche Trägersysteme verstanden, die gemäß der Umsetzung geeigneter Protokollvorgaben moduliert werden. Für die Organisation der Übertragung wird das Protokoll IP (Internet Protocol) in der Version 4 verwendet, dass durch die Version 6 abgelöst wird, weil in absehbarer Zeit nicht mehr genügend Geräteadressen zur Verfügung stehen (siehe auch Kapitel *Datentechnik VI Datenkommunikation*). Unter Berücksichtigung der Anwenderpraxis ist das asymmetrische Verfahren ADSL eingerichtet worden, bei dem für den Download (Herunterladen) wesentlich mehr Frequenzbereich zur Verfügung gestellt wird als für den Upload (Heraufladen). Dazu ein Beispiel für die Verwendung des Frequenzbereiches 0 bis 1,1 MHz:

- Bis 120 kHz verwendet für ISDN-Telefonie,
- 138 kHz bis 276 kHz verwendet für Upload,
- 276 kHz bis 1,1 MHz verwendet für Download.

Als obere Frequenzgrenze werden von den Providern unterschiedliche Werte abgeboten, abhängig von der Leitungslänge zwischen dem Endkunden und der Vermittlungsstelle und dem Übertragungsverfahren. Begonnen wurde mit dem Verfahren ADSL (8 MBit/s Download, 640 kBit/s Upload), das zunächst von ADSL2 abgelöst wurde (12 MBit/s Download, 1,2 MBit/s Upload) und dann durch ADSL2+ ersetzt worden ist (25 MBit/s Download, 3,5 MBit/s Upload). Moduliert wird mit dem DMT-Verfahren (Discrete Multiton). Bei ADSL z.B. wird der Frequenzbereich bis 1,1 MHz mit 256 Trägern mit dem Abstand 4,3125 kHz belegt. Die Träger 32 bis 64 (ca. 138 bis 276 kHz) werden dem Uplink zugeordnet, die Träger 65 bis 256 dem Downlink (ca. 276 bis 1104 kHz). Mit zunehmender Frequenz werden die Übertragungseigenschaften der Leitung schlechter. Es ist vorgesehen, dass man den einzelnen Trägern wahlweise zwischen 2 und 15 Bits aufmodulieren kann. Damit erhält man eine angepasste Übertragung dadurch, dass den Trägern mit steigender Frequenz eine abnehmende Bit-Zahl aufmoduliert wird. Ziel ist VDSL1 mit etwa 50 MBit/s für den Download und etwa 2,5 MBit/s für den Upload, VDSL2 soll dann etwa 100 MBit/s bereitstellen. Hier wird überlegt, ob unterschiedliche Datenraten für Up- und Downlink noch sinnvoll sind. Ein Problem dabei ist die geringe Reichweite von unter einem Kilometer. Es haben sich einige Übertragungsraten mit den dazu maximal erreichbaren Entfernungen als Standardwerte herausgebildet: 1 MBit/s bei maximal 8 bis 10 km, 6 MBit/s bei maximal 4 bis 6 km und 16 MBit/s bei maximal 1 bis 2 km. Es hat sich eingebürgert, von 1000 kBit/s, 2000 kBit/s, 6000 kBit/s bzw. 16000 kBit/s zu sprechen (auch „1000er Anschluss“, „2000er Anschluss“, „6000er Anschluss“ bzw. „16000er Anschluss“). Höhere Werte, 25 MBit/s bis 50 MBit/s, sind im Aufbau.

Die Trennung der Frequenzbereiche von Telefon und ADSL wird erreicht durch eine passive Filterkombination, den sog. Splitter (oder auch BBAE), mit einem Tiefpass von 0 bis 120 kHz und einem Hochpass ab 138 kHz, so festgelegt in „Annex B“. („Annex A“ nur im Ausland, Grenzfrequenz für beide Filter 25 kHz, für analoge Telefonübertragung). Das auf der Teilnehmeranschlussleitung beim Endkunden ankommende Signal wird zunächst auf den Eingang des Splitters gegeben. Er hat 2 Ausgänge. An den einen wird der NTBA angeschlossen, an den anderen z.B. ein Router, der wiederum die Verbindung zum Internet herstellt. Der zur Verfügung gestellte Frequenzbereich ab etwa 138 kHz kann vielfach genutzt werden, hier werden 3 häufige Anwendungen vorgestellt.

### ● Begriffe

**Modem:** Ein Modem wandelt analoge Signale (Sprache vom Telefon) in digitale Signale, die dann zusammen mit Steuersignalen moduliert und übertragen

werden. Der Empfänger demoduliert die empfangenen Signale und wandelt sie in analoge zurück, daher der Name MOdulation-DEmodulation. Für den Internetverkehr werden höhere Übertragungsraten zur Verfügung gestellt, bis zu 56000 Bit/s.

**Router:** Er dient dazu, die Verbindung zwischen 2 unterschiedlichen Netzwerken mit unterschiedlichen Protokollen und Architekturen herzustellen. In der Praxis wird er häufig eingesetzt, um ein lokales Netzwerk, ein LAN (Local Area Network) mit dem Internet (WAN, Wide Area Network) zu verbinden.

**LAN (Local Area Network):** Ein Netzwerk, dass in einem in der Regel auf die Grundstücksgrenzen beschränkten Gebiet elektronische Geräte miteinander zur gemeinsamen Nutzung (z.B. Drucker, Massenspeicher, Scanner, ...), zum Informationsaustausch (Rechner, ...) oder zur Wartung und Programmierung (Messgeräte, Anlagenprogrammierung, ...) verbindet. Jeder kann mit jedem verbunden werden und kommunizieren, wobei Zugriffsrechte vergeben werden können. Neben Firmen nutzen auch zunehmend Privathaushalte diese Netzwerke, sofern mehr als ein Rechner genutzt wird. Rechner und Geräte haben in der Regel bereits eine LAN-Schnittstelle eingebaut. Preislich ist der Aufbau dieser Netzwerke erschwinglich.

**WLAN:** Siehe Kapitel 3 Funknetze unten.

**WAN (Wide Area Network):** Weitbereichsnetzwerk. Ein Beispiel für ein WAN ist das Internet.

**Switch:** Er ist der „Sternpunkt“, mit dem die einzelnen Rechner und Geräte zum LAN zusammengeschaltet werden. Er verbindet gemäß Anforderung die in Frage kommenden Rechner und Geräte miteinander. Es sind *mehrere* Verbindungen *gleichzeitig* möglich. Die früher eingesetzten *Hubs* ermöglichten nur *eine* Verbindung *gleichzeitig*. Alle Geräte, die zum LAN zusammengeschaltet werden sollen, werden am Switch in eine der vorhandenen Anschlussbuchsen eingesteckt, ein beliebiger Anschluss wird bei Bedarf mit dem Router verbunden. Damit können alle Rechner gleichzeitig und jeder völlig selbstständig mit dem Internet verbunden werden. Die Zuordnung der Pakete für die einzelnen LAN-Teilnehmer übernimmt der Router durch entsprechende Adressierung.

### ● Internetzugang

Für den Internetzugang muss zunächst eine persönliche eindeutige Zugangskennung (Ziffern, Zeichen, Sonderzeichen) mit Passwort für den sicheren Zugang vom Provider bereitgestellt werden. Im Rechner wird ein Internetzugangsprogramm gestartet, dass die Signale aufbereitet und dem Router zur Codierung übergibt. Diesen Router hat der Kunde zwischen Rechner und Splitter bereitzustellen, entweder als Schnittstellenkarte im Rechner (weniger gebräuchlich) oder als getrenntes Gerät. Jeder Rechner, jeder Router, der sich im Internet anmeldet, hat eine eindeutige einmalige Adresse, die IP-Adresse, unter der

er zweifelsfrei zu identifizieren ist. So können ihm auch die angeforderten Informationen, versehen mit seiner Adresse, zugesandt werden. Das Internet hat sich zu einem weltweiten Verbund entwickelt, über den u.a. wesentliche Teile des Informationsaustausches und des geschäftlichen Briefverkehrs in Form von E-Mails (elektronischer Post, bei Bedarf mit eingescannten Vorlagen als Anhang), die Informationsbeschaffung (Produktbeschreibungen, Datenblätter, Nachschlagewerke, ...) und ein Teil des Zahlungsverkehrs (Online-Banking) stattfinden.

### • Triple Play

Die oben angeführten Datenraten von bis zu 16 MBit/s bzw. 25 MBit/s benötigt der normale Haushalt nicht für den Internetverkehr, weil die Internetseiten-Betreiber die dazu erforderlichen Serverkapazitäten nicht bereitstellen (können). Die Idee ist vielmehr, den Kunden über das Internet hinaus weitere Anwendungen anzubieten, und zwar über eine Leitung in gebündelter Form die folgenden drei Dienste: Telefon in Form von VoIP, Internet und Fernsehen. Es bleibt festzuhalten, dass die Verbindung vom Kunden zur Vermittlungsstelle selbst dann, wenn nur das Internet genutzt wird, bereits eine „Standleitung“ ist und sich damit gut für Internettelefonie (schnelle Einwahl, stete Bereitschaft sowohl für den Anrufer als auch für den Angerufenen) und Fernsehprogrammübertragung (stete Bereitschaft, Übertragung ohne Unterbrechungen) eignet. Voraussetzung ist, dass der Kunde eine sog. *Flatrate* mit dem Provider vereinbart hat, er also eine monatliche Pauschale zahlt, die den permanenten Verbleib im Internet beinhaltet und unabhängig von der übertragenen Informationsmenge ist.

### • VoIP

VoIP (Voice over IP, Internettelefonie) ermöglicht die Sprachübertragung (Telefonieren) über das Internet. Es wird das paketorientierte IP-Protokoll verwendet. Ein weiteres Protokoll ist H.323. Es ist übergreifend für die Videokommunikation über TCP/IP geschaffen. Für die Sprachübertragung sind Einzelheiten in H.245 und H.450 geregelt. Als Signalisierungsprotokoll wird SIP verwendet.

Die Telefonapparate müssen VoIP-geeignet sein, denn sie haben bei der Sprachübertragung und der Signalisierung die entsprechenden Protokolle umzusetzen. Auf dem Markt werden aber Geräte angeboten, die die Signale von gewöhnlichen Analogtelefonen entsprechend umsetzen. Für VoIP werden keine geografisch festen Anschlüsse mit zugeordneten Telefonnummern vergeben, sondern die Identifizierung erfolgt (noch vorwiegend) über die IP-Adresse, die beim Provider hinterlegt ist. Anhand der Telefonnummer wird entschieden, ob es sich um ein Gespräch beim gleichen Provider handelt (meist gebührenfrei) oder zu einem anderen Provider oder ins Festnetz oder ins Funknetz führt. (die letzten 3 Mög-

lichkeiten sind u.U. gebührenpflichtig). Eine Voraussetzung für einen sinnvollen Einsatz ist eine dauernde Verbindung ins Internet. Der Vorteil ist, dass jeder, der eine solche Verbindung hat, weltweit jederzeit über Telefon erreicht werden kann, allerdings nicht in jedem Fall gebührenfrei. Probleme treten auf durch die paketorientierte Übermittlung, bei der sowohl prinzipbedingte konstante Laufzeiten (Analog-Digital-Analog-Umsetzung, Protokollumsetzungen, Wertsuche) als auch schwankende Laufzeiten, sog. Jitter, durch sich ändernde Übertragungswege auftreten. Laufzeiten oberhalb von etwa 300 ms werden als unangenehm empfunden. Für eine VoIP-Verbindung werden etwa 100 kBit/s benötigt.

### Internetfernsehen IPTV

Beim Digitalfernsehen ist die Übertragung von etwa 4 MBit/s für ein einwandfreies Bild einschließlich dazugehörigem Ton ausreichend (siehe Kapitel VIII *Ton- und Bildübertragung*, 2.2 *Farbfernsehtechnik*). Bei einer Internetverbindung ab 6 MBit/s kann deshalb ein Fernsehprogramm über das Internet übertragen werden (Television over IP), wobei in der Regel noch ausreichend Bandbreite für den Internetverkehr zur Verfügung steht. Der Fernsehzuschauer wählt über Internet aus einer theoretisch riesigen, praktisch je nach Anbieter auf 100 ... 300 begrenzten Anzahl von Fernsehprogrammen eines aus, dass dann über Internet einem Receiver übergeben wird, der das demodulierte Bild- und Tonsignal über einen SCART-Anschluss in den Fernseher einspeist. Zusätzlich können, je nach Anbieter, weitere Leistungen kostenlos oder gebührenpflichtig zur Verfügung gestellt werden (z.B. Spezialsendungen, Wiederholungen, Filme). Auch hier ist eine ununterbrochen bestehende Leitung zur Vermittlungsstelle unbedingt erforderlich. Bei Leitungen mit 16 MBit/s oder höher ist die Übertragung mehrerer Programme gleichzeitig möglich, sofern der Provider diese Möglichkeit vorsieht.

## 3 Öffentliche Funknetze

Bei den Funknetzen wird die Kommunikation bzw. der Datenaustausch beim Endkunden über Funkwellen, also drahtlos, ausgeführt.

### 3.1 Mobilfunk mit GSM-Technik

Der aktuell angebotene Mobilfunk läuft im allgemeinen Sprachgebrauch auch unter dem Begriff *Handy*. Er gehört technisch zur Generation 2G und verwendet für die Übertragung die GSM-Technik (Global System for Mobile Communications) mit den Eigenschaften: digital, leitungsvermittelt, 9,6 kBit/s, Übertragung in TDMA (Time Division Multiple Access). In der Bundesrepublik werden das D- und das E-Netz verwendet. Die Frequenzbereiche zeigt Tabelle XVI.3. Mit Uplink ist die Informationsflussrichtung von A nach B gekennzeichnet, mit Downlink die Gegenrichtung. Da die einzelnen Provider den Mobil-



**Tabelle XVI.3** Frequenzbereiche des D- und E-Netzes

| System                                                                                                | Frequenz                                                         | Verwendung im |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|---------------|
| GSM-900<br><u>G</u> lobal <u>S</u> ystem<br>for <u>M</u> obile<br><u>C</u> ommunica-<br><u>t</u> ions | 890 ... 915 MHz<br>(Uplink)<br>935 ... 960 MHz<br>(Downlink)     | D-Netz        |
| DCS-1800<br><u>D</u> igital <u>C</u> ommuni-<br><u>c</u> ation <u>S</u> ystem                         | 1710 ... 1785 MHz<br>(Uplink)<br>1805 ... 1880 MHz<br>(Downlink) | E-Netz        |

funk sowohl im D- als auch im E-Netz betreiben, wurden die *Dualband-Handys* entwickelt, die für beide Netze geeignet sind.

Das Handy des Teilnehmers A nimmt Kontakt mit einem nahegelegenen Funkturm auf, der die Verbindung zum Teilnehmer B herstellt und damit den Informationsaustausch einleitet. Teilnehmer B kann ein Handy-Teilnehmer sein oder er kann einen VoIP- oder Festnetz-Anschluss besitzen. Es bleibt festzuhalten, dass das Mobilfunknetz mit seiner vergleichsweise niedrigen Datenrate (9,6 kBit/s. s.o.) nur beschränkt für den Datenaustausch geeignet ist. Hier folgen häufig verwendete Begriffserklärungen.

*Basisstation:* Die Basisstation besteht aus einer Sender-Empfänger-Kombination, die die Verbindung zum Handy drahtlos herstellt. Die Basisstation erhält und versendet ihr Signal in der Regel über Kabel, es sind aber auch Richtfunkstrecken möglich.

*Funkzelle:* Die Funkzelle gibt geografisch das Gebiet an, in dem der Empfänger (Handy) die Signale der Basisstation ausreichend gut empfangen kann. Ihre Größe hängt ab von der Sendeleistung und den vorgegebenen Hindernissen (Berge, Bäume, hohe Gebäude). Die Größe liegt zwischen einigen m<sup>2</sup> und maximal etwa 4 km<sup>2</sup>. Eine Funkzelle kann bis maximal etwa 900 Gespräche gleichzeitig durchführen. Soll ein Empfang über den Bereich einer Funkzelle hinaus ohne Unterbrechung möglich sein, müssen sich die Funkzellen an den Grenzen überlappen.

*Netzabdeckung:* Sie gibt an, wie viel Prozent der Bevölkerung den entsprechenden Funkdienst nutzen können.

*Roaming:* Beim Roaming ist es möglich, das eigene Land (z.B. Bundesrepublik) zu verlassen und trotzdem problemlos mit einem Teilnehmer im eigenen Land weiter zu kommunizieren (telefonieren). Das setzt voraus, dass das fremde Land die gleichen Systeme einsetzt wie das eigene Land und dass ein Abkommen zwischen beiden Ländern über die Handhabung (z.B. Gebührenabrechnung) besteht.

*Handover:* Dies wird angewendet, wenn ein Empfänger (Handy) den Bereich einer Basisstation verlässt und in den Bereich einer benachbarten Basisstation wechselt (Wanderung, Autofahrt). Das Gerät des Empfängers erkennt die abnehmende Empfangsfeldstärke und sucht laufend nach Basisstationen mit größeren Feldstärken. Bei erfolgreicher Suche schaltet der Empfänger auf die Basisstation mit der größeren oder, sofern vorhanden, der größten Feldstärke um. Bei der Sprachübertragung ist dieses Verfahren problemlos anwendbar, weil kurzzeitige Aussetzer oder Fehler, die bei dem Übergang nicht zu vermeiden sind, meist in Kauf genommen werden können. Problematisch wird es bei der Datenübertragung, wenn diese u.U. mehr oder weniger kurzfristig unterbrochen wird. Es gibt Provider, die den Übergang unter bestimmten Bedingungen unterbrechungsfrei vornehmen können.

*SIM-Karte:* Diese Karte muss in den Sockel des Handys eingesteckt werden. Sie enthält einen Chip, auf dem eine weltweit einmalige Kennung, eine PIN (Personal Identity Number) und vom Handy-Besitzer eingespeicherte Daten (z.B. Notizbuch, Telefonbuch) eingetragen sind.

*SMS (Short Message Service):* Eine SMS ist eine Kurznachricht, die vorwiegend von Handy zu Handy übertragen wird. Sie kann aus maximal 160 Zeichen (Buchstaben, Zahlen, Sonderzeichen) oder maximal 140 Byte bestehen. Aber auch dazu geeignete Festnetz-Telefone können am SMS-Austausch teilnehmen.

**3.2 Mobilfunk mit UMTS-Technik**

Die Übertragungsrate der GSM-Technik mit 9,6 kBit/s reicht für eine schnelle Datenübertragung in der Regel nicht aus. Deshalb wurde mit UMTS eine neue Generation des Funknetzes geschaffen, das eine Übertragungsrate von theoretisch etwa 2 MBit/s vorsieht. In der Praxis wird aber mit einem wesentlich kleineren Wert gerechnet, der bei etwa (200 ... 400) kBit/s liegt. Da dieses Netz im Aufbau ist, lassen sich gesicherte Werte dafür noch nicht angeben. Einige Kennwerte sind in Tabelle XVI.4 aufge-

**Tabelle XVI.4** Kennwerte UMTS

| Name                                                        | Modulationsverfahren                                                                 | Frequenzbereich                                                      |
|-------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| FDD                                                         | <u>F</u> requency <u>D</u> ivision<br>Multiplex<br>(Frequenzmultiplex-<br>verfahren) | 1,920 ... 1,980 GHz<br>(Uplink)<br>2,110 ... 2,170 GHz<br>(Downlink) |
| TDD                                                         | <u>T</u> ime <u>D</u> ivision<br>Multiplex<br>(Zeitmultiplex-<br>verfahren)          | 1,900 ... 1,920 GHz<br>2,010 ... 2,025 GHz                           |
| Verwendung des IP-Protokolles; paketvermittelte Übertragung |                                                                                      |                                                                      |

listet. Für den Vollduplexverkehr werden getrennte Kanäle für beide Richtungen verwendet, hier mit Uplink und Downlink gekennzeichnet. Mit UMTS sollen zunächst folgende Kommunikationsdienste zur Verfügung gestellt werden, weitere können folgen:

- Internet
- Bild- und Videotelefonie
- E-Mail-Verkehr
- Datenübertragung
- Rundfunk- und Fernsehempfang
- Navigation

UMTS bietet die Möglichkeit, mehrere unterschiedliche Dienste gleichzeitig zu nutzen, also z.B. zu telefonieren und parallel dazu Daten zu versenden.

Zunächst werden GSM und UMTS parallel betrieben, um den Übergang kontinuierlich zu gestalten (eingeschränkte Kompatibilität) und durch den Aufbau bedingte Überlastungen der UMTS-Zellen durch GSM abfangen zu können. Langfristig aber soll GSM abgelöst werden.

## 4 Private Funknetze

Diese Funknetze werden so eingesetzt, dass sie die Grundstücksgrenzen in der Regel nicht überschreiten.

### 4.1 Schnurlostelefone

Die Schnurlostelefone stellen eine Verbindung über Funk zu einer Basisstation her. Die Basisstation kann mehrere Telefone miteinander verbinden, sie erfüllt dann die Funktion einer Telefonanlage. Die Basisstation kann aber auch zusätzlich mit einem Festnetzanschluss (analog oder ISDN) oder dem VoIP-Anschluss, meist über Kabel, verbunden werden. Die Reichweite beträgt im Freien bis zu 300 m, in Gebäuden ist sie wesentlich geringer und liegt bei 10 m bis 30 m. Es können mehrere Basisstationen betrieben werden, die sich in überlappenden Funkzellen organisieren lassen, entsprechend dem Zellenaufbau bei Handys. Es ist Handover und damit die Abdeckung größerer Areale möglich. Die technische Grundlage ist der DECT-Standard (Digital Enhanced Cordless Telecommunications). Der Hochfrequenz-Übertragungsbereich liegt bei 1880 MHz bis 1900 MHz. Er wird in 12 Bereiche eingeteilt, je ein Bereich an der oberen und unteren Frequenzgrenze wird als Schutzband ausgespart. Damit bleiben 10 Bereiche mit je einem Träger. Als Modulationsverfahren für diese Träger wird GFSK (Gaussian Frequency Shift Keying) eingesetzt. Jeder Träger hat 24 Zeitfenster pro Block (Rahmen), je 12 für beide Richtungen. Das Nutzsignal wird mit ADPCM (Adaptive Differential Pulse Code Modulation) versehen und aufmoduliert. Damit ergibt sich eine Rate von 24 kBit/s pro Kanal. Für die Datenübertragung lassen sich 23 Kanäle softwaremäßig bündeln (ein Kanal muss für die entgegengesetzte Richtung bereitstehen), und es stehen

552 kBit/s zur Verfügung. Die in die Schnurlostelefone eingebauten technischen Möglichkeiten sind denen von Festnetztelefonen und Handys gleichwertig. Hier seien einige genannt:

- Gebührenfreie interne Gespräche
- Gleichzeitiger Betrieb mehrerer Mobiltelefone
- Gute Tonqualität
- Eigenschaften wie leistungsfähige Festnetztelefone
- Geringer Stromverbrauch
- Telefone unterschiedlicher Hersteller verwendbar
- Minimale Verzögerung
- Verschlüsselung der übertragenen Informationen

Ein Kriterium bei den Schnurlostelefonen ist die strahlungsreduzierte bzw. strahlungsarme Auslegung. Die Sendeleistung ist im Laufe der Jahre stetig reduziert worden. Es gibt Anlagen, bei denen sich die Sendeleistung automatisch nach der Entfernung zur Basisstation einstellt. Außerdem wird die Sendeleistung auf ein Minimum reduziert, wenn das Telefon nicht benutzt wird.

### 4.2 Bluetooth

Mit Bluetooth wird eine Funkverbindung über kurze Entfernungen bezeichnet. Die Reichweite hängt ab von der Sendeleistung und wird in 3 Klassen eingeteilt:

| Klasse | maximale Senderleistung | Reichweite bei optischer Sicht etwa |
|--------|-------------------------|-------------------------------------|
| 1      | 100 mW                  | 100 m                               |
| 2      | 2,5 mW                  | 20 m                                |
| 3      | 1,0 mW                  | 10 m                                |

Diese Funkverbindung wird häufig im häuslichen Bereich eingesetzt, wobei Hindernisse (Mauern, Einrichtungsgegenstände) die Reichweite verringern. Damit können Kabelverlegungen vereinfacht werden oder ganz entfallen. Hier einige Beispiele für den Einsatz:

- Übertragung von gespeicherten Bildern der Digitalkamera auf die Festplatte eines Rechners
- Verbindung von kabelloser Maus und Tastatur mit dem Rechner
- Verbindung eines CD- oder DVD-Laufwerkes mit dem Rechner
- Übertragung der Tonsignale vom Mischpult/Equalizer/Receiver zur Leistungs-Endstufe
- Übertragung von auf dem Handy gespeicherten Daten auf den Rechner

Gesendet wird auf einer Frequenz zwischen 2,40 und 2,48 GHz. Das ist das ISM-Band (Industrial, Scientific, Medical)), das von vielen Anwendern benutzt wird, u.a. auch von Mikrowellengeräten und vom WLAN (siehe 4.3 unten). Um eine ausreichende Störsicherheit zu bekommen, springt die Frequenz



1600mal pro Sekunde. Es können Daten mit einer Rate von etwa 720 kBit/s (Download) und etwa 55 kBit/s (Upload) übertragen werden bzw. etwa 430 kBit/s für beide Richtungen bei symmetrischem Betrieb. Durch die Festlegung von Profilen lassen sich die Verbindungen unabhängig von den Herstellern der Geräte betreiben. So gibt z.B. das Profil BIP vor, dass es sich um eine Bildübertragung handelt. Besondere Bedeutung kommt dem Profil HDP zu, das die Übertragung medizinischer Daten festlegt. Bluetooth ist für die Medizintechnik einsetzbar. Die übertragenen Daten können mit einem 128-Bit-Wort verschlüsselt werden. Der Stromverbrauch ist sehr gering, was für den Einsatz in Kameras und Handys von Bedeutung ist.

4.3 WLAN

Das WLAN (Wireless Local Area Network) ist ein drahtloses LAN (siehe 2.2.2 oben). Ihm liegen die Standards IEEE 802.11a, IEEE 802.11b, IEEE 802.11g und IEEE 802.11n zugrunde, die für verschiedene Frequenzbänder vorgesehen sind. In der Praxis lassen sich die folgenden Werte erreichen:

| Standard IEEE | Frequenzband                     | Brutto-Übertragungsrate max. | Netto-Übertragungsrate (für Nutzdaten) max. |
|---------------|----------------------------------|------------------------------|---------------------------------------------|
| 802-11a       | 5,15–5,725 GHz                   | 54 MBit/s                    | 25 MBit/s                                   |
| 802-11b       | 2,4–2,4835 GHz                   | 11 MBit/s                    | 5 MBit/s                                    |
| 802-11g       | 2,4–2,4835 GHz                   | 54 MBit/s                    | 25 MBit/s                                   |
| 802-11n       | 2,4–2,4835 GHz<br>5,15–5,725 GHz | 300 MBit/s                   | 100 MBit/s                                  |

Im 2,4-GHz-Band stehen 13 Kanäle im Frequenzbereich von 2,412 GHz bis 2,472 GHz zur Verfügung. Da eine WLAN-Verbindung einen Frequenzbereich von 20 MHz benötigt, können überlappungsfrei nur 3 WLAN-Verbindungen in einem gemeinsam genutzten Bereich betrieben werden, und zwar auf den Kanälen 1, 7 und 13.

Die zulässige effektive Strahlungsleistung (EIRP) beträgt 100 mW bei 2,4 GHz bzw. 200 mW bis 1000 mW (frequenz- und verfahrensabhängig) bei 5,4 GHz. Damit lassen sich Reichweiten von 10 m bis 100 m erreichen.

Die Übertragung im 5-GHz-Band ist weniger gestört als im 2,4-GHz-Band. Viele Geräte unterstützen alle 4 Standards und suchen den jeweils optimalen Übertragungsstandard aus. Der Standard IEEE 802-11n kann nur eingesetzt werden, wenn das Gerät das Verschlüsselungsverfahren WPA2 (verwendet AES, Advanced Encryption Standard) unterstützt und dieses auch vom Anwender eingestellt ist. Das Verschlüsselungsverfahren WEP ist veraltet und unsicher, WPA ist weniger sicher als WPA2.

Das an das Netzwerk anzuschließende Gerät erhält einen Sender-Empfänger, häufig in Form eines USB-Sticks, der in einen USB-Port eingesteckt wird. Er nimmt über eine Funkverbindung Kontakt auf mit einem speziellen Sender-Empfänger, dem sog. *Access-Point*, der wiederum direkt mit dem Netzwerk verbunden ist.

XVII Optimierte Nachrichten- und Datenübertragung

Bei der Nachrichten- und Datenübertragung gibt es drei wesentliche Vorgaben:

1. Die Wirtschaftlichkeit des Übertragungskanals;
2. die begrenzte Bandbreite der zur Verfügung stehenden Übertragungskanäle und
3. sehr stark gestörte Übertragungskanäle, bei denen ein Ausweichen auf weniger gestörte Kanäle nicht möglich ist (Bildübertragung aus dem Weltraum). Diesen Vorgaben sind die vom Anwender häufig gestellten Forderungen nach einer möglichst preiswerten, schnellen und fehlerfreien Übertragung anzupassen. Im folgenden werden einige Wege zur Realisierung aufgezeigt. Es wird vorausgesetzt, dass die Informationen in digital codierter Form vorliegen, was auch in der Technik angestrebt wird.

1 Codierung

Bei der Codierung der Nachrichten bzw. Daten unterscheidet man zwei Bereiche: Die *Quellen-* und die *Kanalcodierung*.

- *Quellencodierung*: Die Information der Quelle enthält neben der „eigentlichen“ Information noch zwei weitere Anteile:
  1. Redundanz (siehe auch Kapitel I.4.4);
  2. Irrelevante Information. Sie entsteht als Nebenprodukt und hat keinerlei Verknüpfung mit der eigentlichen Information.

Aufgabe der Quellencodierung ist zunächst die Beseitigung der irrelevanten Information. Anschließend wird die vorhandene Redundanz so weit wie möglich

reduziert, weil sie in der Regel zur Fehlererkennung und -korrektur nicht *optimal* geeignet ist.

- **Kanalcodierung:** Ist der Übertragungskanal gestört, wird das von der Quelle gelieferte „quel-lencodierte“ Signal so umkodiert und mit neuer Redundanz versehen, dass eine optimale Fehlererkennung und -korrektur möglich wird.

## 1.1 Quellencodierung

### 1.1.1 Grundlagen

Es wird vorausgesetzt, dass die irrelevante Information bereits entfernt worden ist. Außerdem wird von dem praxisnahen Fall ausgegangen, dass die zu codierenden  $k$  Zeichen (Einzelzeichen oder Zeichenfolgen) nicht alle mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten und dass nicht *genau*  $2^n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) unterschiedliche Zeichen zu codieren sind, d.h.  $k \neq 2^n$ . Die Aufgabe der Codierung besteht darin, die mittlere Codewortlänge  $l_m$  so klein wie möglich zu machen, weil dadurch die Übertragungszeit bzw. die benötigte Kanalbandbreite gering gehalten werden kann (Kapitel I.4.7):

- **Mittlere Codewortlänge**

$$l_m = \sum_{i=1}^k l_i \cdot p(x_i) \quad \text{in bit} \quad (\text{XVII.1})$$

$l_i$  Codewortlänge (Anzahl der Binärstellen) des Zeichens bzw. der Zeichenfolge  $x_i$  in bit,  $p(x_i)$  Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Zeichens  $x_i$

Die naheliegende Lösung, nämlich alle Zeichen mit der gleichen Anzahl von Stellen zu codieren ( $l_1 = l_2 = \dots = l_k$ ), führt zu einer mittleren Codewortlänge  $l_{mg} = l_i$ , d.h. die mittlere Codewortlänge ist genau so groß wie die Codewortlänge der einzelnen Zeichen. Eine Reduzierung der mittleren Codewortlänge ( $l_m < l_{mg}$ ) lässt sich dadurch erreichen, dass

1. die Zeichen mit den größeren Wahrscheinlichkeiten kürzere Codewortlängen erhalten als die mit den geringeren (Beispiel XVII.1), und
2. nicht *einzelne* Zeichen, sondern *Zeichengruppen* codiert werden (Beispiel XVII.2).

Für die Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer Zeichengruppe aus zwei Zeichen ( $x_1, x_2$ ) gilt die bedingte Wahrscheinlichkeit beider Zeichen,  $p(x_1, x_2)$ , d.h. die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des zweiten Zeichens ( $x_2$ ) unter der Voraussetzung, dass das erste Zeichen ( $x_1$ ) aufgetreten ist. Sie wird berechnet, indem die Wahrscheinlichkeiten der beiden Zeichen miteinander multipliziert werden:

- **Bedingte Wahrscheinlichkeit für zwei Zeichen**

$$p(x_1, x_2) = p(x_1) \cdot p(x_2) \quad (\text{XVII.2})$$

Für die Codierung gelten zwei wichtige Sätze:

1. **Eindeutigkeit:** Den einzelnen Zeichen oder Zeichengruppen dürfen nur solche Codierungen zugeordnet werden, die *Endpunkte* im Codebaum sind. Andernfalls kann die empfangene Bitfolge nicht eindeutig decodiert werden (Beispiel XVII.1).
2. **Existenz:** Ein decodierbarer Code existiert genau dann, wenn die Ungleichung von Kraft erfüllt ist:

- **Ungleichung von Kraft**

$$\sum_{i=1}^k 2^{-l_i} \leq 1 \quad \text{für Binärcode} \quad (\text{XVII.3})$$

$l_i$  Zahlenwert der Codewortlänge (Anzahl der Binärstellen) des Zeichens bzw. der Zeichenfolge  $x_i$

Beide Sätze sind inhaltlich ähnlich, wobei die Ungleichung von Kraft noch nichts über die Eindeutigkeit der Decodierung aussagt (Beispiel XVII.1).

Shannon hat eine Beziehung für die mittlere Codewortlänge angegeben:

- **Satz von Shannon**  $H \leq l_m \leq H + 1$  bit (XVII.4)

$H$  Entropie nach Gleichung (I.2) in bit,  $l_m$  mittlere Codewortlänge nach Gleichung (XVII.1) in bit

■ **Beispiel XVII.1:** Es sollen die Zeichen  $x, y$  und  $z$  codiert werden, die mit den Wahrscheinlichkeiten  $p(x) = 0,5$ ;  $p(y) = 0,3$  und  $p(z) = 0,2$  auftreten. Tabelle XVII-1 gibt verschiedene Möglichkeiten der Codierung wieder, wenn die Zeichen einzeln, also noch keine Zeichengruppen, codiert werden.

Codierung 1 als naheliegende Lösung ergibt eine vergleichsweise große mittlere Codewortlänge und ist

**Tabelle XVII-1** Auswahl von Möglichkeiten zur Codierung von drei Zeichen ( $l_i$ : Zahlenwert)

| Zeichen               |          | Codierung 1                               |       | Codierung 2                 |       | Codierung 3                   |       | Codierung 4                               |       |
|-----------------------|----------|-------------------------------------------|-------|-----------------------------|-------|-------------------------------|-------|-------------------------------------------|-------|
| $x_i$                 | $p(x_i)$ | Codewort                                  | $l_i$ | Codewort                    | $l_i$ | Codewort                      | $l_i$ | Codewort                                  | $l_i$ |
| $x$                   | 0,5      | 00                                        | 2     | 0                           | 1     | 0                             | 1     | 0                                         | 1     |
| $y$                   | 0,3      | 01                                        | 2     | 01                          | 2     | 10                            | 2     | 10                                        | 2     |
| $z$                   | 0,2      | 10                                        | 2     | 10                          | 2     | 11                            | 2     | 110                                       | 3     |
| mittlere Länge        |          | $l_m = 2$ bit                             |       | $l_m = 1,5$ bit             |       | $l_m = 1,5$ bit               |       | $l_m = 1,7$ bit                           |       |
| Ungleichung von Kraft |          | $\sum_{i=1}^k 2^{-l_i} = \frac{3}{4} < 1$ |       | $\sum_{i=1}^k 2^{-l_i} = 1$ |       | $\sum_{i=1}^k 2^{-l_i} = 1$   |       | $\sum_{i=1}^k 2^{-l_i} = \frac{7}{8} < 1$ |       |
| Bemerkungen           |          | „Standard-codierung“                      |       | nicht eindeutig decodierbar |       | Optimalcode nach Huffman/Fano |       | Kommacode                                 |       |

Tabelle XVII-2 Zu Beispiel XVII.2

| Zeichengruppe                    | xx                                                                                 | xy   | xz  | yy   | yx   | yz   | zz    | zx   | zy    |
|----------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|------|-----|------|------|------|-------|------|-------|
| Wahrscheinlichkeit <sup>1)</sup> | 0,25                                                                               | 0,15 | 0,1 | 0,09 | 0,15 | 0,06 | 0,04  | 0,1  | 0,06  |
| Optimalcode nach Fano            | 00                                                                                 | 01   | 101 | 1101 | 100  | 1110 | 11111 | 1100 | 11110 |
| Ungleichung von Kraft            | $\sum_{i=1}^k 2^{-l_i} = \frac{16+8+6+2}{32} = 1$                                  |      |     |      |      |      |       |      |       |
| Satz von Shannon                 | $H = 2,97 \text{ bit} \Rightarrow 2,97 \text{ bit} \leq l_m \leq 3,97 \text{ bit}$ |      |     |      |      |      |       |      |       |
| mittlere Codewortlänge           | $l_m = 3,05 \text{ bit}$                                                           |      |     |      |      |      |       |      |       |

<sup>1)</sup> mit Gleichung (XVII.2)

deshalb weniger geeignet. Völlig ungeeignet ist Codierung 2, weil z.B. bei der Übertragung der Bitfolge 010 diese entweder als yx (01-0) oder als xz (0-10) interpretiert werden kann. Im Codebaum ist die codierte 0 kein „Endpunkt“, denn es folgt noch die Codierung 01. Codierung 3 ist eine optimierte Lösung und wird als *Optimalcode* bezeichnet. Er ist eindeutig decodierbar und hat die kleinste Codewortlänge. Die Codierung 4 ist ebenfalls eindeutig, hat aber eine größere Codewortlänge als der Optimalcode. Sie besitzt den Vorteil, dass die 0 das Ende jedes einzelnen Codewortes angibt und sofort mit der Decodierung begonnen werden kann. Dieser Code wird auch als Kommacode bezeichnet: Die Null steht für ein Trennzeichen, so wie das Komma bei Aufzählungen.

■ **Beispiel XVII.2:** Zur weiteren Verringerung der mittleren Codewortlänge werden *Zeichengruppen* aus zwei (oder mehr) aufeinanderfolgenden Zeichen gebildet und codiert. Tabelle XVII-2 listet die vorkommenden Kombinationen und deren

Wahrscheinlichkeiten nach Gleichung (XVII.2) auf. Weiterhin ist der Optimalcode nach Fano gebildet und eingetragen (Tabelle XVII-3). Zu Kontrollzwecken sind die Gleichungen (XVII.1, 3 und 4) ausgewertet und die Zahlenwerte eingefügt. Der Code ist nahezu optimal, weil  $l_m$  nur geringfügig größer ist als  $H$ .

1.1.2 Optimalcodes

Optimalcodes zeichnen sich dadurch aus, dass die mittlere Codewortlänge  $l_m$  nur geringfügig über der Entropie  $H$  liegt. Dazu werden häufig auftretende Zeichen oder Zeichengruppen mit weniger Bit, selten auftretende entsprechend mit mehr Bit codiert. Die dazu notwendigen Codierungsverfahren sind von *Huffman* und *Fano* entwickelt worden. Der im folgenden dargestellte Fano-Algorithmus (siehe dazu auch Tabelle XVII-3) wird nach folgenden Regeln gebildet:

1. Die Zeichen oder Zeichengruppen werden nach abnehmender Wahrscheinlichkeit sortiert.

Tabelle XVII-3 Codierverfahren nach Fano (zu Beispiel XVII.2)

| Zeichengruppe                | xx             | xy   | yx              | xz  | zx              | yy   | yz              | zy             | zz    |
|------------------------------|----------------|------|-----------------|-----|-----------------|------|-----------------|----------------|-------|
| Wahrscheinlichkeit, sortiert | 0,25           | 0,15 | 0,15            | 0,1 | 0,1             | 0,09 | 0,06            | 0,06           | 0,04  |
| 1. Teilstrich                | $\sum p = 0,4$ |      | $\sum p = 0,6$  |     |                 |      |                 |                |       |
| 1. Bit                       | 0              | 0    | 1               | 1   | 1               | 1    | 1               | 1              | 1     |
| 2. u. 3. Teilstrich          |                |      | $\sum p = 0,25$ |     | $\sum p = 0,35$ |      |                 |                |       |
| 2. Bit                       | 0              | 1    | 0               | 0   | 1               | 1    | 1               | 1              | 1     |
| 4. u. 5. Teilstrich          |                |      |                 |     | $\sum p = 0,19$ |      | $\sum p = 0,16$ |                |       |
| 3. Bit                       |                |      | 0               | 1   | 0               | 0    | 1               | 1              | 1     |
| 6. u. 7. Teilstrich          |                |      |                 |     |                 |      |                 | $\sum p = 0,1$ |       |
| 4. Bit                       |                |      |                 |     | 0               | 1    | 0               | 1              | 1     |
| 8. Teilstrich                |                |      |                 |     |                 |      |                 |                |       |
| 5. Bit                       |                |      |                 |     |                 |      |                 | 0              | 1     |
| Codierung                    | 00             | 01   | 100             | 101 | 1100            | 1101 | 1110            | 11110          | 11111 |

**Tabelle XVII-4** Weitere Codiermöglichkeit nach *Fano* (zu Beispiel XVII.2)

| Zeichengruppe                                                     | xx | xy  | xz  | yy   | yx  | yz   | zz   | zx  | zy   |
|-------------------------------------------------------------------|----|-----|-----|------|-----|------|------|-----|------|
| Optimalcode nach <i>Fano</i>                                      | 00 | 010 | 100 | 1100 | 011 | 1101 | 1111 | 101 | 1110 |
| Daraus folgt: $l_m = 3,00 \text{ bit}; \sum_{i=1}^k 2^{-l_i} = 1$ |    |     |     |      |     |      |      |     |      |

- Die Liste wird durch einen ersten Teilstrich so in zwei Teile zerlegt, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten je Teil etwa 0,5 ist. Die Elemente des einen Listenteils erhalten eine 0 als erstes Bit, die anderen eine 1.
- Die Elemente des Listenteils mit der 0 werden wiederum durch einen zweiten Teilstrich in zwei Teile geteilt, sodass beide etwa die gleiche Wahrscheinlichkeitssumme erhalten. Der eine Teil erhält als zweite Codierung eine 0, der andere eine 1. Mit dem Teil, der als erstes Bit eine 1 erhalten hat, wird genauso verfahren.
- Das Prinzip wird solange fortgesetzt, bis nach einer Teilung nur noch Einzelelemente übrig sind.

Tabelle XVII-3 zeigt das Verfahren mit den Zeichengruppen und Wahrscheinlichkeiten aus Beispiel XVII.2 und Tabelle XVII-2.

Man kann durchaus zu unterschiedlichen Lösungen kommen, wenn man z.B. den ersten Teilstrich so setzt, dass links davon die Zeichengruppen *xx*, *xy* und *yx* stehen.

Je nach Lage der anderen Teilstriche kann das zu einer in Tabelle XVII-4 dargestellten weiteren Möglichkeit der Codierung führen.

**1.1.3 Datenreduktion**

Die zur Datenreduktion verwendeten Verfahren sind unter Kapitel V.4.4.7 und V.4.4.8 aufgeführt. Angewendet werden sie auch beim „digitalen Fernsehen“, wobei dort der Sonderfall besteht, dass kurzzeitige geringe Signalverfälschungen in Kauf genommen werden, weil das Auge als Empfänger sie nicht oder als nur wenig störend wahrnimmt.

**1.2 Kanalcodierung**

Bei der Kanalcodierung wird dem quellencodierten und damit nahezu redundanzfreien Signal neue Redundanz hinzugefügt mit dem Ziel, Übertragungsfehler so weit wie möglich zu erkennen und zu korrigieren.

**1.2.1 Grundlagen**

Für die Kanalcodierung sind die folgenden Begriffe von Bedeutung:

- *Hamming-Distanz h*: Sie gibt an, in wieviel Stellen sich die einzelnen (gleichlangen) Codewörter *minimal* unterscheiden.

- Gewicht eines Codewortes: Anzahl der Einsen im Codewort.
- *Gleichgewichtige Codes*: Jedes Codewort enthält die gleiche Anzahl von Einsen.
- *Fehlererkennende Codes*: Es wird erkannt, dass ein übertragenes Bitmuster falsch ist, es kann aber nicht ermittelt werden, welches Bit falsch ist. Es muss deshalb eine erneute Übertragung gestartet werden.
- *Fehlerkorrigierende Codes*: Das falsch übertragene Bitmuster wird als falsch erkannt und korrigiert. Eine erneute Übertragung ist nicht erforderlich.  
Die Anzahl der erkennbaren bzw. korrigierbaren Fehler ergibt sich aus der Hamming-Distanz *h*:

- *Zahl der erkennbaren Fehler (ohne Korrektur)*:  
$$h - 1 \tag{XVII.5a}$$

- *Zahl der selbständig korrigierbaren Fehler*:  
$$\frac{h-1}{2} \quad \text{für } h = 1, 3, 5, \dots$$
  
$$\frac{h}{2} - 1 \quad \text{für } h = 2, 4, 6, \dots \tag{XVII.5b}$$

Bei einem Code mit *h* = 3 kann man entweder zwei Fehler erkennen, ohne sie zu korrigieren, oder einen Fehler erkennen und korrigieren (Beispiel XVII.3).

- *Blockcodes*: Alle Codewörter sind gleich lang.
- *Faltungscodes*: Die Kontrollbits werden nicht zu jedem einzelnen Codewort hinzugefügt, sondern während der Übertragung der Daten gebildet und in geeigneter Form eingebaut (siehe Kapitel XVII.1.2.3). Die Eigenschaften dieser Codes werden in der Regel durch Simulation erfasst, weil die mathematische Darstellung umfangreich ist.
- *Systematische Codes*: Die ersten Stellen sind stets die Informationsstellen, die restlichen enthalten die Prüfbits (siehe Codierung im Beispiel XVII.3). Diese Codes sind vom Aufbau her übersichtlich.
- *Zyklische Codes*: Die Codewörter werden nach Rechenvorschriften mit sogenannten *Generatorpolynomen* gebildet. Sie sind nicht übersichtlich, haben aber den Vorteil, dass besonders bei langen Codewörtern die Codierung und Decodierung durch die Verwendung mathematischer Algorithmen mit relativ niedrigem Aufwand möglich ist.

**Tabelle XVII-5** Codierung zu Beispiel XVII.3. Die Prüfbits ergänzen auf eine gerade Anzahl von Einsen

| $x_1$                                                     | $x_2$ | $x_3$                                           | $x_4$             | $x_5$                       |
|-----------------------------------------------------------|-------|-------------------------------------------------|-------------------|-----------------------------|
| 0                                                         | 0     | 0                                               | 0                 | 0                           |
| 0                                                         | 1     | 0                                               | 1                 | 1                           |
| 1                                                         | 0     | 1                                               | 0                 | 1                           |
| 1                                                         | 1     | 1                                               | 1                 | 0                           |
| zu übertragende Daten                                     |       | Prüfbit für $x_1$                               | Prüfbit für $x_2$ | Prüfbit für $x_1$ und $x_2$ |
| <b>Bedingungen</b>                                        |       |                                                 |                   |                             |
| 1: $x_1$ falsch $\Rightarrow x_3$ und $x_5$ nicht erfüllt |       | 3: $x_3$ falsch $\Rightarrow x_1$ nicht erfüllt |                   |                             |
| 2: $x_2$ falsch $\Rightarrow x_4$ und $x_5$ nicht erfüllt |       | 4: $x_4$ falsch $\Rightarrow x_2$ nicht erfüllt |                   |                             |
| 5: $x_5$ falsch $\Rightarrow x_1$ und $x_2$ nicht erfüllt |       |                                                 |                   |                             |

■ **Beispiel XVII.3:** Übertragen werden sollen 4 Daten, die mit 00, 01, 10 und 11 codiert werden ( $x_1, x_2$ ). Es soll *ein* Fehler erkannt und selbstständig korrigiert werden. Nach Gleichung (XVII.5) ist eine Hamming-Distanz  $h = 3$  erforderlich. Es wird nach Tabelle XVII-5 mit 5 Bit codiert.

a) Es wird angenommen, dass *ein* Fehler auftritt, d.h. die fehlerhafte Codierung 01001 übertragen wird. Darin ist die unterstrichene Null für  $x_4$  falsch. Die Bedingungen für die Fehlererkennung und -korrektur nach Tabelle XVII-5 liefern:

- Erste Bedingung erfüllt  $\Rightarrow x_1, x_3, x_5$  ohne Fehler.
- Zweite Bedingung nicht erfüllt  $\Rightarrow x_2, x_4, x_5$  enthalten Fehler.
- Dritte Bedingung erfüllt  $\Rightarrow x_1, x_3$  ohne Fehler.
- Vierte Bedingung nicht erfüllt  $\Rightarrow x_2, x_4$  enthalten Fehler.
- Fünfte Bedingung erfüllt  $\Rightarrow x_1, x_2, x_5$  ohne Fehler.

Die 2. und 5. Bedingung ergeben die eindeutige Aussage, dass  $x_4$  falsch ist, sodass die Codierung richtig lautet: 01011. Wichtig ist die Voraussetzung, dass nur *ein* Fehler auftritt, der mit  $h = 3$  erkannt und korrigiert werden kann!

b) Das übertragene Codewort 00110 enthält *zwei* Fehler ( $x_3, x_4$ ). Die Auswertung der Bedingungen nach Tabelle XVII-5 ergibt:

- Erste Bedingung nicht erfüllt  $\Rightarrow x_1, x_3, x_5$  enthalten Fehler.
- Zweite Bedingung nicht erfüllt  $\Rightarrow x_2, x_4, x_5$  enthalten Fehler.
- Dritte Bedingung nicht erfüllt  $\Rightarrow x_1, x_3$  enthalten Fehler.
- Vierte Bedingung nicht erfüllt  $\Rightarrow x_2, x_4$  enthalten Fehler.
- Fünfte Bedingung erfüllt  $\Rightarrow x_1, x_2$  und  $x_5$  ohne Fehler.

Mit der 5. Bedingung, dass  $x_1, x_2, x_5$  richtig sind, ergibt sich, dass  $x_3, x_4$  falsch sein müssen, was in diesem Spezialfall eine Fehlerkorrektur ermöglichen könnte. Sind dagegen  $x_2, x_5$  falsch, erhält man aus den 5 Bedingungen, dass zwei von den Bits  $x_1, x_2, x_5$  falsch sind. Damit sind 2 Fehler erkannt, aber wegen fehlender Eindeutigkeit ist eine Korrektur nicht möglich. Gleichung (XVII.5a) gilt also für den allgemeinen Fall.

1.2.2 Maximum-Likelihood-Verfahren

Die Quelle sendet Zeichen  $x_i$  ( $i = 1 \dots k$ ) aus ihrem Zeichenvorrat aus, die die Senke (Empfänger) einem Zeichen  $y_j$  ( $j = 1 \dots k$ ) ihres Zeichenvorrates zuordnet. Es wird hier angenommen, dass Quelle und Senke den gleichen Zeichenvorrat besitzen. Diese Zeichen werden bei der Übertragung über einen gestörten Kanal teilweise so verändert, dass man der Senke ein Entscheidungskriterium zur Verfügung stellen muss. Dazu wird die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen

eines Zeichens  $y_j$  am Empfänger verwendet, wenn das Zeichen  $x_i$  gesendet wurde. Tabelle XVII-6 zeigt zwei Beispiele.

**Tabelle XVII-6** Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten des Zeichens  $y_j$ , wenn  $x_i$  gesendet wurde. Erläuterungen siehe Text

| $p(y_j x_i)$ | $y_1$             | $y_2$ | $y_3$ |
|--------------|-------------------|-------|-------|
| $x_1$        | 0,7 <sup>1)</sup> | 0,2   | 0,1   |
| $x_2$        | 0,1               | 0,8   | 0,1   |
| $x_3$        | 0,2               | 0,2   | 0,6   |

| $p(y_j x_i)$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ |
|--------------|-------|-------|-------|
| $x_1$        | 0,7   | 0,2   | 0,1   |
| $x_2$        | 0,2   | 0,2   | 0,6   |
| $x_3$        | 0,4   | 0,2   | 0,4   |

a)

b)

Der mit <sup>1)</sup> gekennzeichnete Wert 0,7 im Tabellenteil XVII-6a ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Empfänger das Zeichen  $y_1$  decodiert, wenn  $x_1$  gesendet wurde. Die übrigen Tabellenwerte sind entsprechend zu interpretieren. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten einer Zeile ergibt 1, weil angenommen wird, dass der Empfänger mit Sicherheit eines seiner drei Zeichen dem empfangenen Zeichen zuordnet. Die aufgelisteten Wahrscheinlichkeiten als wesentliche Eigenschaft des gestörten Kanals müssen bekannt sein. Dann lautet die Likelihood-Bedingung:

● **Likelihood-Bedingung**  
$$p(y_j|x_{i-opt}) \geq p(y_j|x_{i \neq i-opt}) \tag{XVII.6}$$

Der Empfänger empfängt das Zeichen  $y_i$  und ordnet ihm das Zeichen  $x_i = x_{i-opt}$  mit der größten vorhandenen Wahrscheinlichkeit zu. In Tabelle XVII-6a ist die Zuordnung eindeutig, denn bei empfangenem  $y_2$  wird das Zeichen  $x_2$  zugeordnet, weil es mit der größten Wahrscheinlichkeit auftritt. Ebenso wird  $y_1$  zu  $x_1$  und  $y_3$  zu  $x_3$  gehörig erkannt. Die Wahrscheinlichkeiten in Tabelle XVII-6b lassen diese eindeutige Zuordnung nicht mehr für alle Werte zu. Wird z.B.  $y_2$  empfangen, kann es  $x_1, x_2$  oder  $x_3$  zugeordnet werden, da alle

drei mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Die Auswahl geschieht zufällig, was darauf hindeutet, dass der Kanal nach Tabelle XVII-6b weniger gut zur Datenübertragung geeignet ist.

1.2.3 Faltungscodierer  
mit Likelihood-Viterbi-Decodierer

Bild XVII-1 zeigt ein einfaches Beispiel für einen Faltungscodierer. Mit jedem Schiebetakt wird ein Datenbit in das 3-Bit-Schieberegister geschoben. Der obere Modulo-2-Addierer erzeugt das erste Bit, der untere das zweite Bit des Codewortes, wobei der Schalter S als Parallel-Seriell-Umsetzer dient. Das Codeword wird übertragen und ist eine Kombination

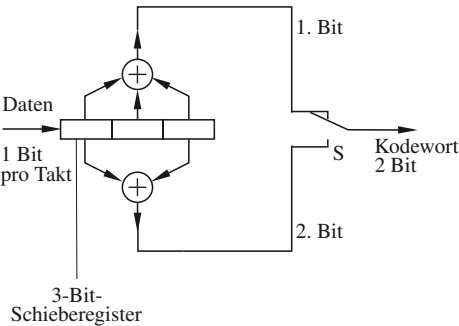


Bild XVII-1 Faltungscodierer

aus Daten- und Korrekturbit. Tabelle XVII-7 zeigt das übertragene Codeword in Abhängigkeit vom Zustand des Schieberegisters und dem eingeschobenen Datenbit.

Zur Erklärung der prinzipiellen Wirkungsweise des Decodierers wird angenommen, dass der Inhalt des Schieberegisters 000 ist. In der Praxis wird das durch die Übertragung geeigneter Bitmuster erreicht. Es werde die Codewortfolge 00 11 10 00 01 01 11 00 00 (Codeworte 1 ... 9) empfangen. Da der Decodierer das Funktionsprinzip des Faltungscodierers kennt, ermittelt er für jeden empfangenen Codewortwechsel das zugehörige Datenbit. Tabelle XVII-8 zeigt den Vorgang.

Der Übergang vom ersten auf das zweite Codewort in der Codewortfolge (zweite Spalte Tabelle XVII-8) von 00 auf 11 wurde, sofern die Übertragung fehlerfrei erfolgte, durch Einschieben des Datenbits „1“ in das Schieberegister hervorgerufen, wie sich aus der vierten Zeile der Tabelle XVII-7 ablesen lässt (000 → 100). Der nächste Codewortübergang von 11 auf 10 ergibt sich, wenn sich das im Schieberegister enthaltene Wort 100 (Tabelle XVII-7, Zeile 11) durch Einschieben einer „0“ in 010 ändert. Das Verfahren wird weiter fortgesetzt, wobei die übertragene Codewortfolge und die daraus ermittelten Datenbits zunächst bis zur Auswertung des letzten Codewortes zwischengespeichert werden. Da kein Widerspruch zwischen der Aufeinanderfolge der Schieberegister-

Tabelle XVII-7 Codeword des Faltungscodierers nach Bild XVII-1

| Inhalt Schieberegister (von links) |                         |     | Änderung des Codewortes               |                                       |
|------------------------------------|-------------------------|-----|---------------------------------------|---------------------------------------|
| alt                                | eingeschobenes Datenbit | neu | alt<br>1. Bit/2. Bit<br>(Bild XVII-1) | neu<br>1. Bit/2. Bit<br>(Bild XVII-1) |
| 000                                | 0                       | 000 | 00                                    | 00                                    |
| 000                                | 1                       | 100 | 00                                    | 11                                    |
| 001                                | 0                       | 000 | 11                                    | 00                                    |
| 001                                | 1                       | 100 | 11                                    | 11                                    |
| 010                                | 0                       | 001 | 10                                    | 11                                    |
| 010                                | 1                       | 101 | 10                                    | 00                                    |
| 011                                | 0                       | 010 | 01                                    | 11                                    |
| 011                                | 1                       | 101 | 01                                    | 00                                    |
| 100                                | 0                       | 010 | 11                                    | 10                                    |
| 100                                | 1                       | 110 | 11                                    | 01                                    |
| 101                                | 0                       | 010 | 00                                    | 10                                    |
| 101                                | 1                       | 110 | 00                                    | 01                                    |
| 110                                | 0                       | 011 | 01                                    | 01                                    |
| 110                                | 1                       | 111 | 01                                    | 10                                    |
| 111                                | 0                       | 011 | 10                                    | 01                                    |
| 111                                | 1                       | 111 | 10                                    | 10                                    |

**Tabelle XVII-8** Decodiervorgang ohne Übertragungsfehler

|                            |                                                                                                 |                                       |
|----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|
| Empfangenes Codewort alt   | 00 11 10 00 01 01 11 00 00                                                                      | Codeworte 1 ... 9                     |
| Empfangenes Codewort neu   | 11 10 00 01 01 11 00 00                                                                         | Codeworte 2 ... 9                     |
| Schieberegister-Inhalt alt | 000 100 010 101 110 011 001 000 000                                                             |                                       |
| Schieberegister-Inhalt neu | <u>1</u> 00 <u>0</u> 10 <u>1</u> 01 <u>1</u> 10 <u>0</u> 11 <u>0</u> 01 <u>0</u> 00 <u>0</u> 00 | eingeschobenes Datenbit unterstrichen |
| Datenbit                   | 1 0 1 1 0 0 0 0                                                                                 | zunächst zwischen- gespeichert        |

Ausgegebene Datenbitfolge: 10110000

inhalte und den Codewörtern besteht, sind die in der letzten Zeile von Tabelle XVII-8 aufgeführten Datenbits in dieser Reihenfolge auch tatsächlich ausgesendet und fehlerfrei empfangen worden und können vom Decoder freigegeben werden.

Die fehlerfreie Codewortfolge von oben, 00 11 10 00 01 01 11 00 00, wird jetzt bei der Übertragung verfälscht und als 00 11 10 10 01 01 11 00 00 empfangen. Die unterstrichene „1“ kennzeichnet die fehlerhafte Stelle.

Nach Eintreffen des dritten Codewortes (10) schließt der Empfänger auf den Schieberegisterinhalt 010 (3. Spalte, Tabelle XVII-9, fett gedruckt). Trifft das folgende falsche Codewort 10 ein, ist das ein Übergang 10 auf 10, was dem „Wechsel“ des Schieberegisterinhaltes von 111 (Spalte 4, Tabelle XVII-9, fett gedruckt) auf 111 gemäß der letzten Zeile in Tabelle XVII-7 entspricht. Spalte 3 bestimmt den Schieberegisterinhalt zu 010, Spalte 4 zu 111. Dieser Widerspruch deutet auf einen Übertragungsfehler hin. Um das Verfahren einfach darstellen zu können, wird der Schieberegisterinhalt 010 nach Eintreffen des dritten Codewortes (10) als richtig angenommen. Damit kann der nächste Schieberegisterinhalt entweder nur 001 sein, wenn eine 0 eingeschoben wird, oder 101, wenn das Datenbit 1 ist. Im ersten Fall ergibt sich für

010 → 001 das neue Codewort 11 (7. Zeile Tabelle XVII-7), im zweiten Fall 010 → 101 das neue Codewort 00. Nach Empfang des letzten Codewortes wird in einem zweiten Durchlauf das Codewort, das zum Widerspruch führte, nämlich das vierte (10, hier das fehlerhafte), durch das eben bestimmte Codewort 11 ersetzt und der Zyklus nach Tabelle XVII-9 bis zum Schluss durchlaufen. Tabelle XVII-10 stellt den Vorgang bis zum erneuten Widerspruch dar.

In einem dritten Durchlauf wird das andere Codewort, 00, eingesetzt. Es folgt der in Tabelle XVII-8 aufgelistete Sachverhalt. Da es keinen Widerspruch gibt, wird die in der letzten Zeile dargestellte Datenbitfolge ausgegeben.

Der Vorgang der Decodierung lässt sich anschaulich im *Trellis-Diagramm* darstellen. In Bild XVII-2a ist der Codebaum für den Faltungscodierer nach Bild XVII-1 abgebildet. Der Ausgangszustand des Schieberegisterinhaltes ist 000. Je nachdem, welches Informationsbit eingeschoben wird, verzweigt sich der Codebaum nach oben (Informationsbit 0) oder unten (Informationsbit 1). Im Codebaum sind die Codeworte aufeinanderfolgend eingetragen. Es zeigt sich, dass der Codebaum innerhalb des Wiederholungsintervalls (Linien I, II) alle möglichen Zustände bzw. Über-

**Tabelle XVII-9** Decodiervorgang mit einem Übertragungsfehler, erster Durchlauf

|                            |                                                   |                                     |
|----------------------------|---------------------------------------------------|-------------------------------------|
| Empfangenes Codewort alt   | 00 11 10 <u>1</u> 0 01 01 11 00 00                | fehlerhafte Stelle                  |
| Empfangenes Codewort neu   | 11 10 <u>1</u> 0 01 01 11 00 00                   | unterstrichen                       |
| Schieberegister-Inhalt alt | 000 100 <b>111</b> 111 <b>110</b> 011 001 000 000 | hervorgehobene Stellen: Widerspruch |
| Schieberegister-Inhalt neu | 100 <b>010</b> 111 <b>011</b> 011 001 000 000     |                                     |
| Datenbit                   | (1) (0) ? ? ? ? ? ?                               | noch nicht angebar                  |

**Tabelle XVII-10** Decodiervorgang mit einem Übertragungsfehler, zweiter Durchlauf

|                            |                                            |                                 |
|----------------------------|--------------------------------------------|---------------------------------|
| Empfangenes Codewort alt   | 00 11 10 <u>1</u> 1 01 01 11 00 00         | eingesetztes Codewort           |
| Empfangenes Codewort neu   | 11 10 <u>1</u> 1 01 01 11 00 00            | unterstrichen                   |
| Schieberegister-Inhalt alt | 000 100 010 <b>100</b> 110 011 001 000 000 | Widerspruch fett gekennzeichnet |
| Schieberegister-Inhalt neu | 100 010 <b>001</b> 110 011 001 000 000     |                                 |
| Datenbit                   | (1) (0) (0) ? ? ? ? ?                      | noch nicht angebar              |



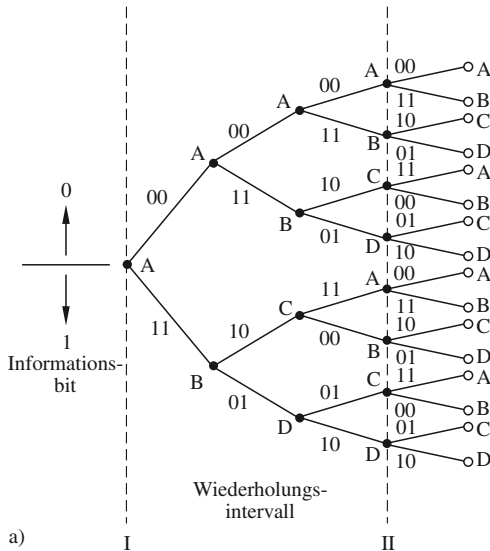


Bild XVII-2c zeigt vereinfacht den Entscheidungs-  
vorgang, wenn die (fehlerhafte) Codewortfolge 00 11  
11 11 00 empfangen wurde. Nur für den Fall, dass im  
Entscheidungspunkt E1 das wahrscheinlichere Code-  
wort 10 eingesetzt wird, gelangt man zur Ebene A  
(durchgezogene Linie). Die anderen Möglichkeiten  
(gestrichelte Linien) haben eine größere Hamming-  
Distanz zur wahrscheinlichsten Codewortfolge und  
scheiden aus. Es wird deshalb die Codewortfolge  
0011 10 11 00 decodiert. Wird eine längere Code-  
wortfolge gesendet, benötigt man letztlich nur den im  
Bild XVII-2c dargestellten Teil des Diagramms zur  
Decodierung, weil sich die Entscheidungsvorgänge  
durch die Codewortwechsel in gleicher Art wiederho-  
len (*Viterbi-Algorithmus*).

In der Praxis werden Schieberegister mit bis zu acht  
Stellen eingesetzt. Damit können mehrere Fehler er-  
kannt und korrigiert werden. Dieses Verfahren wird u.a.  
auch bei der Datenübertragung über Satelliten einge-  
setzt.

## 2 Optimalfilter

Ein Optimalfilter hat die Aufgabe, ein Nutzsignal,  
dem ein Störsignal überlagert ist, möglichst wenig zu  
verändern und das Störsignal so weit wie möglich zu  
unterdrücken. Das Prinzip wird an dem folgenden  
Modell dargestellt, Bild XVII-3a.

Hinweis: Um Verwechslungen zu vermeiden, wird  
die Laplace-Transformierte mit  $p$  und nicht mit  $s$   
bezeichnet.

Gegeben sind ein ungestörtes Signal  $u_s(t)$  mit der  
spektralen Leistungsdichte  $\Phi_s(f)$  (Kapitel I.4.11.2)  
und ein Störsignal  $u_N(t)$  mit der spektralen Leis-  
tungsdichte  $\Phi_N(f)$ , die sich additiv überlagern. Dies-  
es Signal wird auf den Eingang eines Filters mit  
der Übertragungsfunktion  $\underline{H}(f)$  (Kapitel I.4.9.3)  
gegeben.

Am Ausgang erscheint das Signal  $u_o(t)$ , Bild XVII-  
3a. Für Nutz- und Störsignal werden spektrale Leis-  
tungsdichten, wie in Bild XVII-3b eingezeichnet,  
angenommen, wobei  $\Phi_N(f)$  „weißem“ Rauschen  
entspricht (Kapitel I.4.11.1, Rauschen). Die eigent-  
liche Aufgabe besteht darin, eine optimale Filter-  
Übertragungsfunktion  $\underline{H}(f) = \underline{H}_{\text{opt}}(f)$  zu finden, die das  
Signal  $u_s(t)$  wenig verändert und die Störung aus-  
reichend unterdrückt. Hier wird zunächst angenom-  
men,  $\underline{H}(f) = \underline{H}_{\text{opt}}(f)$  sei berechnet worden und habe  
einen „idealen“ Tiefpass ergeben, dessen Grenz-  
frequenz  $f_g$  aber für unser Modell noch einstellbar  
ist. „Ideal“ heißt hier, dass bis  $f_g$  alle Frequenzanteile  
mit unveränderter Amplitude durchgelassen werden  
und oberhalb  $f_g$  alle Frequenzanteile vollständig  
unterdrückt werden. Die Grenzfrequenz  $f_g$  ist in  
Bild XVII-3b an beliebiger Stelle eingetragen. Es  
ergeben sich zwei Fehler:

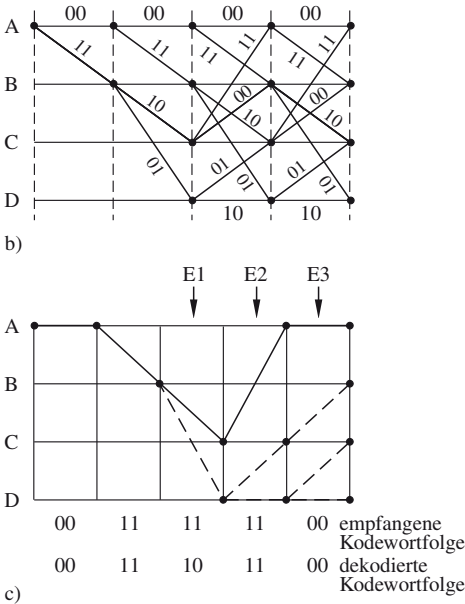


**Bild XVII-2** Decodierung eines Faltungcodes

- a) Codebaum für die Codeworte
- b) Trellis-Diagramm
- c) Prinzip der Decodierung mit Likelihood-Viterbi-Decoder

gänge enthält (Verzweigungspunkte A, B, C, D). Man  
kann deshalb den unteren Teil mit dem oberen zu-  
sammenfassen und alle weiteren, rechts der Linie II  
auftretenden Codierungen weglassen. Es ergibt sich  
das Trellis-Diagramm nach Bild XVII-2b.

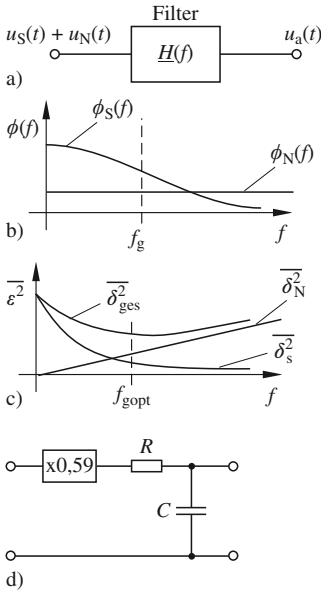


Bild XVII-3 Optimalfilter

- Prinzip
- Spektrale Leistungsdichte von Nutz- und Störsignal
- Gesamtfehler
- Realisierung des Beispiels

- $\delta_S^2$ : Durch die Begrenzung der Signalfrequenzen auf den Bereich  $0 \dots f_g$  wird das ungestörte Signal  $u_S(t)$  verfälscht, und zwar um so mehr, je kleiner  $f_g$  gewählt wird.
- $\delta_N^2$ : Gleichzeitig wird der Bereich der Störfrequenzen auch auf den Bereich  $0 \dots f_g$  begrenzt. Je kleiner  $f_g$  gewählt wird, desto geringer sind die Verfälschungen von  $u_S(t)$  durch das Störsignal.

Es gibt damit eine optimale Grenzfrequenz  $f_g = f_{g, \text{opt}}$ , bei der die Signalverfälschungen noch vertretbar und die Störungen ausreichend klein sind. Um das zu zeigen, werden die zwei Fehler berechnet:

$$\overline{\delta_S^2} = 2 \cdot \int_{f_g}^{\infty} \Phi_S(f) df; \quad \overline{\delta_N^2} = 2 \cdot \int_0^{f_g} \Phi_N(f) df \quad (\text{XVII.7})$$

Das Nutzsignal  $u_S(t)$  habe die spektrale Leistungsdichte

$$\Phi_S(f) = \frac{1}{1 + 4\pi^2 \frac{f^2}{f_0^2}} \quad (\text{XVII.8})$$

und für das Störsignal soll gelten

$$\Phi_N(f) = 0,2 = \text{konst.} \quad (\text{XVII.9})$$

abgeleitet vom „weißen“ Rauschen.

Setzt man diese Ausdrücke in die Formeln Gleichung (XVII.7) ein, ergeben sich die Fehler in Abhängigkeit von  $f_g$  wie in Bild XVII-3c dargestellt. Da beide Fehler unkorreliert sind, werden sie für den Gesamtfehler  $\overline{\delta_{\text{ges}}^2}$  addiert. Ziel der Optimierung ist, den Gesamtfehler zu minimieren:

$$\overline{\delta_{\text{ges}}^2} = \overline{\delta_S^2} + \overline{\delta_N^2} = \text{Minimum} \quad (\text{XVII.10})$$

Setzt man (XVII.8) und (XVII.9) in die Gleichungen (XVII.7) ein und bildet die Summe nach (XVII.10), so folgt:

$$\begin{aligned} & 2 \int_{f_g}^{\infty} \frac{1}{1 + 4\pi^2 \frac{f^2}{f_0^2}} df + 2 \int_0^{f_g} 0,2 df \\ &= \frac{f_0}{2} - \frac{f_0}{\pi} \cdot \arctan \left[ \frac{f_g}{f_0} 2\pi \right] + 0,2 \cdot f_g = \text{Minimum} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich das Minimum zu  $f_g \approx 0,47 \cdot f_0$ . Die bisher als bekannt vorausgesetzte optimale Übertragungsfunktion  $\underline{H}(f) = \underline{H}_{\text{opt}}(f)$  lässt sich berechnen nach der Beziehung

$$\underline{H}_{\text{opt}}(f) = \frac{\Phi_S(f)}{\Phi_S(f) + \Phi_N(f)} \quad (\text{XVII.11})$$

Werden die Ausdrücke aus (XVII.8) und (XVII.9) in (XVII.11) eingesetzt, erhält man:

$$\underline{H}_{\text{opt}}(f) = \frac{\frac{1}{1 + 4\pi^2 \frac{f^2}{f_0^2}}}{\frac{1}{1 + 4\pi^2 \frac{f^2}{f_0^2}} + \frac{1}{5}} = \frac{5 \cdot f_0^2}{6 \cdot f_0^2 + 4\pi^2 f^2} \quad (\text{XVII.12})$$

Diese Übertragungsfunktion lässt sich so nicht realisieren, weil sie Polstellen in der rechten  $p$ -Halbebene hat. Man kann sie aber dadurch annähern, dass die Polstellen in der rechten Halbebene vernachlässigt werden. Zunächst zerlegt man  $\Phi_S(f) + \Phi_N(f)$  in der  $p$ -Ebene sowohl im Zähler als auch im Nenner in ein Produkt aus konjugiert komplexen Null- bzw. Polstellen:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 + 4\pi^2 \frac{f^2}{f_0^2}} + \frac{1}{5} = \frac{6 \cdot f_0^2 + 4\pi \cdot f^2}{5(f_0^2 + 4\pi \cdot f^2)} \\ & \Rightarrow \frac{(p + \sqrt{6} \cdot f_0) \cdot (p - \sqrt{6} \cdot f_0)}{5 \cdot (p + f_0) \cdot (p - f_0)} \quad p \Leftrightarrow j2\pi \cdot f \end{aligned}$$

Der Ausdruck wird wie folgt zerlegt und bezeichnet:

$$\begin{aligned} & \frac{(p + \sqrt{6} \cdot f_0) \cdot (p - \sqrt{6} \cdot f_0)}{5 \cdot (p + f_0) \cdot (p - f_0)} \\ &= \frac{(p + \sqrt{6} \cdot f_0)}{5 \cdot (p + f_0)} \cdot \frac{(p - \sqrt{6} \cdot f_0)}{(p - f_0)} \\ &= \underbrace{\frac{(p + \sqrt{6} \cdot f_0)}{5 \cdot (p + f_0)}}_{\Phi_+} \cdot \underbrace{\frac{(p - \sqrt{6} \cdot f_0)}{(p - f_0)}}_{\Phi_-} \end{aligned}$$

Man bildet

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_s(p)}{\Phi_-(p)} &= \frac{f_0^2}{f_0^2 - p^2} \cdot \frac{p - f_0}{p - \sqrt{6} \cdot f_0} \\ &= \frac{-f_0^2}{(p + f_0) \cdot (p - f_0)} \cdot \frac{p - f_0}{p - \sqrt{6} \cdot f_0} \\ &= \frac{-f_0^2}{(p + f_0) \cdot (p - \sqrt{6} \cdot f_0)} \\ &= \frac{\frac{f_0}{\sqrt{6} + 1}}{\underbrace{\frac{(p + f_0)}{\sqrt{6} + 1}}_{\text{realisierbar}}} - \frac{\frac{f_0}{\sqrt{6} + 1}}{\underbrace{(p - \sqrt{6} \cdot f_0)}_{\text{nicht realisierbar}}} \\ \Rightarrow \left. \frac{\Phi_s(p)}{\Phi_-(p)} \right|_{\text{real}} &= \frac{\frac{f_0}{\sqrt{6} + 1}}{(p + f_0)} \end{aligned}$$

Der vorletzte Ausdruck wurde durch Partialbruchzerlegung in den letzten umgewandelt. Davon nimmt man den ersten Summanden, weil er realisierbar ist, den zweiten lässt man als nicht realisierbar weg. Damit folgt:

$$\begin{aligned} \underline{H}_{\text{real}}(p) &= \frac{1}{\Phi_+(p)} \cdot \left. \frac{\Phi_s(p)}{\Phi_-(p)} \right|_{\text{real}} \\ &= \frac{5(p + f_0)}{p + \sqrt{6} \cdot f_0} \cdot \frac{1}{(p + f_0)} \cdot \frac{f_0}{\sqrt{6} + 1} \\ &= \frac{5f_0}{p + \sqrt{6} \cdot f_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{6} + 1} \\ \underline{H}_{\text{real}}(f) &= \frac{5f_0}{(\sqrt{6} + 1)j2\pi f + (\sqrt{6} + 1)\sqrt{6} \cdot f_0} \\ &= \frac{0,59}{1 + \frac{j2\pi f}{2,45f_0}} \end{aligned}$$

Das ist ein Tiefpassfilter erster Ordnung, das nach Bild XVII-3d mit  $R \cdot C = 1/(2,45 \cdot f_0)$  und einem Abschwächer mit dem Faktor 0,59 realisiert werden kann.

### 3 Anwendung der Korrelation bei gestörten Signalen

Den hier betrachteten Nutzsignalen ist ein Störsignal in Form von Rauschen additiv überlagert. Nach

Kapitel I.4.11.2 und Beispiel I.8 gilt für die Autokorrelationsfunktion von Rauschen

$$\Phi_{ss(N)}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot T} \int_{-T}^T u_N(t) \cdot u_N(t - \tau) dt = 0 \quad (\text{XVII.13})$$

$u_N(t)$  Rauschspannung in V

Für das Nutzsignal erhält man:

$$\begin{aligned} \Phi_{ss(S)}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot T} \int_{-T}^T u_S(t) \cdot u_S(t - \tau) dt \\ &\triangleq (u_S(t))^2 \quad \text{für } \tau \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (\text{XVII.14})$$

$u_S(t)$  Nutzsignalspannung in V

Der zu übertragende Datenblock wird inhaltlich nicht verändert und mehrfach übertragen. Der Empfänger addiert die Amplituden der empfangenen Datenblöcke, und zwar so, dass die Bedingung  $\tau \rightarrow 0$  nach Gleichung (XVII.14) erfüllt ist. In der Praxis heißt das, dass jeweils nur solche Amplitudenwerte addiert werden, die stets zu den gleichen Zeitpunkten des Nutzsignals gehören. Dazu muss man wiederum den Beginn des im gestörten übertragenen Signal enthaltenen Nutzsignales kennen. Das aber ist in den meisten Anwendungen wenigstens näherungsweise gegeben. Damit geht  $u_N(t)$  mit wachsender Zahl von Additionen gegen Null, während das Nutzsignal  $u_S(t)$  unverändert bleibt, weil immer die gleichen Amplitudenwerte addiert werden. Bild XVII-4 zeigt ein Beispiel dazu.  $n$  gibt die Anzahl der Überlagerungen an. In dem verwendeten Rechnerprogramm wird  $n$  stets um 1 erhöht, wobei zu jedem neuen  $n$  ein neues zufälliges Rauschen erzeugt wird. Für  $n = 1$  sind zunächst nur das Nutzsignal und das Rauschen der ersten zwei Diagramme überlagert. Von den 600 ausgegebenen Diagrammen sind einige ausgesucht, die den Rückgang der Amplitude der resultierenden Rauschspannung und damit die zunehmende Erkennbarkeit des Nutzsignals zeigen (im Programm: Addition von  $n$  Amplitudenwerten und anschließende Division durch  $n$ ). Dem Programm ist in diesem Fall der jeweilige Beginn eines neuen gestörten Signalverlaufes bekannt, sodass die Auswertung mit minimalem Aufwand möglich ist. Sind nach Bild XVII-4 die Scheitelwerte der Rauschspannungen etwa 10mal so groß wie die des Nutzsignals, muss das gestörte Signal zwischen 10- und 25mal übertragen werden, damit ein digital codierter 1-0-Wechsel sicher erkannt werden kann. Es zeigt sich weiterhin, dass bei der Übertragung analoger Signale eine sehr große Anzahl von Wiederholungen notwendig ist, um einigermaßen fehlerfreie Werte zu erhalten ( $n = 600$  oder mehr).

Angewendet wird dieses Verfahren z.B. bei der Übertragung von Bildern der Oberfläche weit entfernter Planeten.

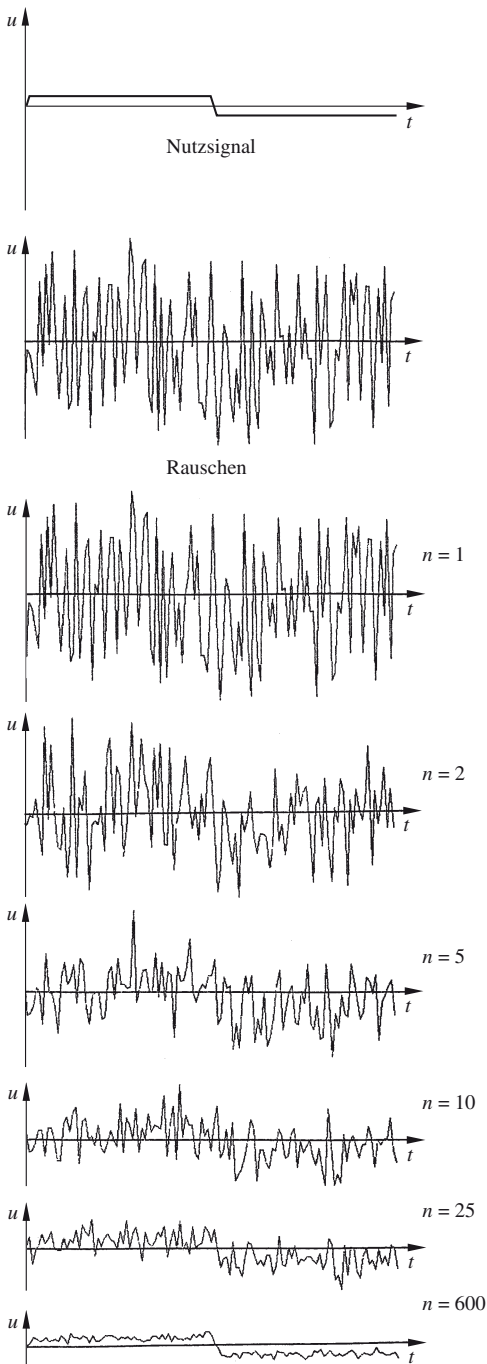


**Bild XVII-4** Signalformen von korrelierten gestörten Signalen,  $n$ : Zahl der Überlagerungen

## 4 Verschlüsselung von Daten

Die Verschlüsselung von Daten ist zu einer Notwendigkeit geworden. Als Beispiel soll hier der Geldver-

kehr in Form von Online-Banking oder das Abheben von Geld am Geldautomaten mit der erforderlichen Identifikation des Abhebenden genannt werden. Im Folgenden wird neben allgemeinen Anmerkungen die Datenverschlüsselung an dem aktuellen RSA-Verfahren (benannt nach den Erfindern Rivest, Shamir und Adlleman) praktisch gezeigt. Grundlage für diese Art der Verschlüsselung ist die Primzahlrechnung. Weitergehende Informationen bekommt man in der Literatur unter den Begriffen *Euler-Funktion*, *Kleiner Satz von Fermat* und *Satz von Euler-Fermat*.

Für die Entwicklung von Verschlüsselungsverfahren gilt: Eine hundertprozentig sichere Verschlüsselungsmethode gibt es nicht. Man kann allerdings die Verfahren so auswählen, dass der apparative Aufwand und vor allem der Zeitaufwand für „Codeknacker“ in keinem lohnenden Verhältnis mehr zum Nutzen stehen.

Forderungen:

1. Die Verschlüsselung soll möglichst so sicher sein, dass nur befugte Personen oder Einrichtungen an die Information der verschlüsselten Datei gelangen können. Beispiele: Übertragung wichtiger Dokumente im Internet; Übertragung der Daten (PIN, Kontonummern, Geldbetrag) zur Bank beim Bezahlvorgang mit Scheckkarte im Geschäft.
2. Eine berechtigte Person soll nachweisen können, dass genau sie und nur sie die Berechtigung zu bestimmten Handlungen besitzt. Beispiel: Geld abheben am Geldautomaten. Hierbei muss eine sichere Verbindung zu einem Zentralrechner hergestellt werden, der die notwendigen Schritte zur Identifizierung durchführt.

Die Verschlüsselung (Codierung) geschieht häufig über ein *Schlüsselwort* (kurz *Schlüssel*) oder *Password*, mit dessen Hilfe die Information so verändert wird, dass sie keinen Sinn ergibt. Nur das korrekte Passwort ergibt bei der Umkehrung des Verschlüsselungsvorganges, auch Entschlüsselung oder Decodierung genannt, die Originalinformation.

Am Vorgang des Verschlüsseln sind zwei Gruppen beteiligt:

Die erste Gruppe sind die Entwickler, die ein geeignetes Verfahren bereitstellen. Hierzu sind allgemeine mathematische und insbesondere Statistik-Kenntnisse erforderlich. Der verschlüsselte Text darf z.B. keine Rückschlüsse auf die Buchstaben- oder Silbenhäufigkeit zulassen. Auch an bestimmten Stellen vermutete öfter wiederkehrende Formulierungen (Datum, Anrede, Adressen, Schlüsselwörter) dürfen als solche nicht das Entschlüsseln erleichtern. Die enorme Leistungssteigerung von Rechnern, auch die der Heim-PCs, hat es ermöglicht, dass Verschlüsselungsverfahren, wenn sie nicht ausreichend konsequent eingesetzt werden, mehr oder weniger unterlaufen werden können. Genannt sei der „Brute-Force-Angriff“ (wörtlich „Rohe-Gewalt-Angriff“), bei dem an

einer verschlüsselten Datei sehr viele unterschiedliche Passwörter der Reihe nach ausprobiert werden. Entweder man erhält schließlich eine sinnvolle Information oder der Angriff ist fehlgeschlagen. Die verwendete Sammlung von Passwörtern wird gebildet aus den Eintragungen in Lexika, in Wörterbüchern und in einer „Hitliste“ der weltweit häufig verwendeten Passwörter, die nicht im Lexikon oder im Rechtsschreibwörterbuch stehen. Mit Heim-PCs und dem geschickten Einsatz von Grafikkartenprozessoren, die sehr leistungsfähig sind, können einige Hunderttausend Wörter innerhalb von wenigen Sekunden ausprobiert werden. Der „Brute-Force-Angriff“ ist einfach zu automatisieren und erfordert keine speziellen Kenntnisse der Verschlüsselungstheorie. Zwei wichtige Folgerungen aus dem „Brute-Force-Angriff“ sind (siehe auch Anmerkung oben): 1. Es kann keine absolut sichere Verschlüsselung geben. 2. Es nimmt immer mehr Zeit in Anspruch, das richtige Passwort durch Ausprobieren zu bekommen, je mehr unterschiedliche Zeichen verwendet werden (nur Ziffern oder Ziffern + Großbuchstaben oder Ziffern + Großbuchstaben + Kleinbuchstaben + Sonderzeichen) und je länger das Passwort ist (6 oder 10 oder 15 Zeichen). Bei einem 10-stelligen Passwort, bei dem jede Stelle aus einem Element des Zeichenvorrates von insgesamt 128 Zeichen besteht (Großbuchstaben + Kleinbuchstaben + Ziffern + Sonderzeichen) und dieses dann binär mit 7 Bit codiert wird, ergeben sich insgesamt  $2^{70} = 1\,180\,591\,620\,717\,411\,303\,424$  unterschiedliche Werte. Werden 256 unterschiedliche Zeichen eingesetzt, die mit 8 Bit codiert werden, und wird ein Passwort mit 16 Bit verwendet, ergeben sich insgesamt  $2^{128} = 340\,282\,366\,920\,938\,463\,463\,374\,607\,431\,768\,211\,456$  unterschiedliche Werte. Ein Unsicherheitsfaktor bei der Angabe der Zeit bis zur erfolgreichen Entschlüsselung ist die Tatsache, dass man im günstigsten Fall (das ist der ungünstigste Fall für die Verschlüsselung) das gesuchte Passwort beim ersten Versuch erhält (Wahrscheinlichkeit ist  $(1/(2^{70}))$  bzw.  $(1/(2^{128}))$  in den Beispielen oben) oder im ungünstigsten Fall (das ist der optimale Fall für die Verschlüsselung) beim 2<sup>70</sup>ten bzw. 2<sup>128</sup>sten Versuch (Wahrscheinlichkeit ist dann 1). Mit Großrechnern im Verbund und 10<sup>15</sup> Tests auf Richtigkeit pro Sekunde werden dafür z.Zt. *maximal* 13,7 Tage bzw. 10<sup>16</sup> Jahre benötigt (Beispiele oben). Irgendwann im Zeitbereich zwischen „praktisch Null“ und 13,7 Tagen bzw. 10<sup>16</sup> Jahren und einem enormen apparativen Aufwand bekommt man das richtige Ergebnis. Es stellt sich dann die Frage, ob sich das „Codeknacken“ noch lohnt. Die zweite Gruppe sind die Anwender, die für eine verschlüsselte Übertragung ein Passwort selber erzeugen. Hier liegt eine große Gefahr für die Sicherheit der Verschlüsselung. Der „Erfolg“ eines Angriffes kann nur dadurch erschwert werden, dass für das Passwort 1. völlig sinnlose Zeichenkombinationen gewählt werden (Begriffe aus Lexika und Passwort-

Hitlisten werden als erstes – und leider häufig auch erfolgreich – zum Codeknacken eingesetzt) und 2. so viel Zeichen wie möglich verwendet werden. Es empfiehlt sich auch, das oder die Codewörter im Abstand von wenigen Wochen zu ändern. Es ist sicher nicht wünschenswert, dass der Code geknackt worden ist und die eigenen Informationen weiter verwendet werden, ohne dass man selber davon weiß. Die Erfahrung, verknüpft mit dem momentanen Stand der Technik, zeigt, dass niemals weniger als 8 bis 10 Zeichen für das Passwort verwendet werden sollten und dass Klein- und Großbuchstaben, Ziffern und Sonderzeichen zum Einsatz kommen. Das Problem für den Anwender ist, dass er sich solche Passwörter kaum merken kann. Er wird sie aufschreiben oder auf dem Rechner speichern. Beides sind, wenn sie nicht sehr sorgfältig gehandhabt werden, zusätzliche Gefahrenquellen.

Bezogen auf den Schlüsselaustausch kann man zwei Verfahren unterscheiden:

1. Symmetrische Verfahren: Der Sender der Nachricht und der Empfänger verwenden das gleiche Schlüsselwort, das sie vor Anwendung der verschlüsselten Übertragung schon ausgetauscht haben müssen, natürlich geheim. Nehmen  $n$  Teilnehmer an dem verschlüsselten Datenaustausch teil, und will ein Sender an  $(n - 1)$  Empfänger eine Nachricht senden, müssen  $(n - 1)$ mal die Schlüsselwörter ausgetauscht bzw. versendet worden sein, wieder geheim. Es besteht die Gefahr, dass eine unerwünschte Person das Passwort mithört oder abfängt. Wollen alle  $n$  Teilnehmer mit jedem anderen Teilnehmer verschlüsselte Nachrichten austauschen und jeder sein eigenes Passwort benutzen, müssen zuvor  $(n \cdot (n - 1)) / 2$  Passwörter geheim ausgetauscht werden.
2. Asymmetrische Verfahren: Sender und Empfänger müssen *kein* *gemeinsam* benutztes *geheimes* Schlüsselwort austauschen, sondern nur mehrere nicht geheime Wörter. Beide können daraus ihr *eigenes* Schlüsselwort erzeugen, aber *nicht* das Schlüsselwort des anderen, und ein Mithörer kann daraus weder das Schlüsselwort des Senders noch des Empfängers generieren.

In einem weltweit ausgeschriebenen Wettbewerb hat sich das RSA-Verfahren als z.Zt. zuverlässigstes Verfahren herausgestellt. Sein Wirkungsprinzip ist bewusst offengelegt, damit Schwachstellen aufgedeckt werden können. Ganz allgemein formuliert nutzt das Verfahren die Tatsache aus, dass es für die Folge der Primzahlen kein Bildungsgesetz gibt und damit die Zerlegung einer sehr großen Zahl (mehr als 20 ... 50 Stellen) in Primzahlfaktoren ohne jegliche Zusatzinformation sehr zeitintensiv ist.

#### ● RSA-Verfahren, Schlüsselaustausch

Der Schlüsselaustausch beim RSA-Verfahren wird hier an vergleichsweise kleinen Primzahlen gezeigt.

Vorteil: Das Prinzip ist nachvollziehbar. Nachteil: Eine ausreichende Sicherheit ergibt sich erst mit einer sehr viel größeren Stellenzahl der Primzahlen.

Anna (A) und Bernd (B) wollen eine geheim zu haltende Nachricht austauschen. Als erstes tauschen sie den Schlüssel aus. Dazu wählt einer von beiden eine beliebige Primzahl  $p$  und eine Zufallszahl  $z$  und teilt dem anderen diese beiden Zahlen mit. Sie werden nicht verschlüsselt übertragen.

Anna wählt eine Zufallszahl  $a$  mit der Bedingung  $a < p$  und hält diese Zahl geheim.

Bernd wählt eine Zufallszahl  $b$  mit der Bedingung  $b < p$  und hält diese geheim.

Anna berechnet  $A \equiv z^a \pmod{p}$ ; Bernd  $B \equiv z^b \pmod{p}$ .

Anna sendet das Ergebnis  $A$  an Bernd, Bernd das Ergebnis  $B$  an Anna, unverschlüsselt.

Anna berechnet  $S_{ab} \equiv B^a \pmod{p}$ ; Bernd berechnet  $S_{ab} \equiv A^b \pmod{p}$ .

Beide erhalten den gleichen Wert, also das gleiche Schlüsselwort  $S_{ab}$ .

Mit Zahlenwerten: Beide einigen sich auf die Primzahl  $p = 157$  und die Zufallszahl  $z = 13$ . Das tauschen sie unverschlüsselt untereinander aus. Anna wählt die Zufallszahl  $a = 111$  und hält sie geheim, Bernd wählt die Zufallszahl  $b = 14$  und hält sie geheim. Beide Zahlen sind voraussetzungsgemäß kleiner als  $p$ .

Anna bildet  $A \equiv z^a \pmod{p} \equiv 13^{111} \pmod{157} \equiv 156$ .

Bernd bildet  $B \equiv z^b \pmod{p} \equiv 13^{14} \pmod{157} \equiv 12$ .

Anna sendet 156 an Bernd, Bernd sendet 12 an Anna, unverschlüsselt.

Anna berechnet  $S_{ab} \equiv 12^{111} \pmod{157} \equiv 1$ .

Bernd berechnet  $S_{ab} \equiv 156^{14} \pmod{157} \equiv 1$ .

Beide Werte sind gleich. Aus den unverschlüsselt übertragenen Zahlen  $z = 13$ ,  $p = 157$ ,  $A = 156$  und  $B = 12$  lässt sich der Schlüssel nicht bestimmen, und weder Anna noch Bernd können die Zufallszahl  $b$  bzw.  $a$  des anderen errechnen.

### ● RSA-Verfahren, Prinzip Datenaustausch

Zur Übertragung größerer Datenmengen geht man folgendermaßen vor:

#### 1. Bestimmen der Verschlüsselungsparameter:

Wählen zweier (beliebiger) Primzahlen  $p$  und  $q$  mit der Bedingung, dass die Zahl der unterschiedlichen zu übertragenden Zeichen (bei Textübertragung z.B. Zahl der Großbuchstaben + Zahl der Kleinbuchstaben + Zahl der Ziffern + Zahl der Sonderzeichen) kleiner als  $p \cdot q$  ist.

Berechnen des Produktes  $n = p \cdot q$  ( $n$  ist der RSA-Modul.)

Wählen einer Zahl  $e$  aus dem Zahlenbereich  $2 \leq e \leq (n-1)$  mit der Bedingung „ $e$  ist teilerfremd zu  $J(n) = (p-1) \cdot (q-1)$ “. ( $J(n)$  ist die Euler-Funktion.)

Wählen einer Zahl  $d$  aus dem Zahlenbereich  $1 \leq d \leq (n-1)$  mit der Bedingung „ $e \cdot d = 1 \pmod{J(n)}$ “.

Die Zahlen  $p$ ,  $q$  und  $J(n)$  werden jetzt nicht mehr benötigt.

$\rightarrow (n, e)$  ist der öffentliche Schlüssel, der unverschlüsselt ausgetauscht wird.

$\rightarrow (n, d)$  ist der geheime Schlüssel, wobei nur  $d$  geheim zu halten ist. Er kann z.B. nach dem oben erläuterten Verfahren ausgetauscht werden.

#### 2. Verschlüsseln:

Die zu verschlüsselnde Nachricht liegt entweder als eine einzelne Zahl  $M$  oder als Zahlenfolge mit den Einzelementen  $M_i$  vor. Bei der Textübertragung könnte das z.B. der ASCII-Code der einzelnen Zeichen sein. Dann werden die einzelnen Zahlen (eindeutig verknüpft mit den Zeichen), in der Reihenfolge wie in der Nachricht, der Operation  $C_i \equiv (M_i)^e \pmod{n}$  unterzogen. Diese Einzelemente  $C_i$  werden, in der Reihenfolge unverändert, aneinandergereiht und übertragen.

#### 3. Entschlüsseln:

Die übertragenen Einzelemente werden, in der Reihenfolge unverändert, der Operation  $M_i \equiv (C_i)^d \pmod{n}$  unterzogen, und das ergibt, aneinandergereiht, den unverschlüsselten Text.

### ● RSA-Verfahren, einfaches Beispiel zum Datenaustausch

Übertragen eines verschlüsselten Textes nach dem RSA-Verfahren.

Zunächst  $p = 5$ ,  $q = 11$  gewählt, ergibt  $n = p \cdot q = 55$ .  $J(n) = (5-1) \cdot (11-1) = 40$ . Gewählt  $e = 27$ . Dazu wird  $d = 3$  so gewählt, dass die notwendige Bedingung  $e \cdot d = 27 \cdot 3 = 81 \pmod{40} = 1$  erfüllt ist. Die Wahl von  $e$  und dem dazu geeigneten  $d$  kann durchaus mit einigem Aufwand verbunden sein. Es können wegen  $n = 55$  insgesamt 54 unterschiedliche Zeichen übertragen werden, also z.B. 26 Großbuchstaben, 10 Ziffern und 18 Sonderzeichen.

Verschlüsselt übertragen werden soll der Text „1000 EUR“ – ohne die Anführungsstriche. Die Text-Elemente (Text-Zeichen) sind wie folgt den Zahlenwerten zugeordnet (nicht ganz konsequent der ASCII-Code): 1  $\leftrightarrow$  31, 0  $\leftrightarrow$  30, Leerzeichen  $\leftrightarrow$  20, E  $\leftrightarrow$  40, U  $\leftrightarrow$  54, R  $\leftrightarrow$  52. Diese Zuordnung muss Sender und Empfänger bekannt sein und kann gegebenenfalls vorher öffentlich ausgetauscht werden. Es können damit Zahlen bis maximal 54 verschlüsselt werden. Tabelle XVII-11 zeigt die Berechnungen zur Ver- und Entschlüsselung.

Ungünstig bei dieser Art der Codierung ist, neben den viel zu kleinen Primzahlen und damit einhergehender unsicherer Verschlüsselung, dass dreimal das Zahlenpaar 30 hintereinander übertragen wird. Das deutet auf gleiche Zeichen im Originaltext hin. Günstiger wäre z.B., mehrere Zeichen zu einer Gruppe zusammenzufassen und diese dann insgesamt zu verschlüsseln. Wenn zwei benachbarte Zeichen zu einer Gruppe zusammengefasst werden, sieht das z.B. so aus: 3130, 3030, 2040, 5452. Der Empfänger muss nach



**Tabelle XVII-11** Codier- und Decodiervorgang

|                                                                                                                                                                        |                                        |                                        |                                        |                                        |                                                       |                                        |                                        |                                        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------|-------------------------------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------|
| Originaltext                                                                                                                                                           | 1                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | Leerzeichen                                           | E                                      | U                                      | R                                      |
| $i$ (fortlaufend nummeriert)                                                                                                                                           | 1                                      | 2                                      | 3                                      | 4                                      | 5                                                     | 6                                      | 7                                      | 8                                      |
| Zuordnung:<br>Textelement $\leftrightarrow$ Zahl $M_i$                                                                                                                 | $1 \leftrightarrow 31$                 | $0 \leftrightarrow 30$                 | $0 \leftrightarrow 30$                 | $0 \leftrightarrow 30$                 | Leerz. $\leftrightarrow 20$                           | $E \leftrightarrow 40$                 | $U \leftrightarrow 54$                 | $R \leftrightarrow 52$                 |
| Originaltext verschlüsseln                                                                                                                                             |                                        |                                        |                                        |                                        |                                                       |                                        |                                        |                                        |
| $C_i \equiv (M_i)^e \text{ (modulo } n) \Rightarrow$<br>$C_i \equiv (M_i)^{27} \text{ (modulo } 55)$                                                                   | $C_1 \equiv 26$                        | $C_2 \equiv 35$                        | $C_3 \equiv 35$                        | $C_4 \equiv 35$                        | $C_5 \equiv 15$                                       | $C_6 \equiv 50$                        | $C_7 \equiv 54$                        | $C_8 \equiv 13$                        |
| Nachricht senden                                                                                                                                                       |                                        |                                        |                                        |                                        |                                                       |                                        |                                        |                                        |
| $C_1 C_2 \dots C_8$                                                                                                                                                    | 26 35 35 35 15 50 54 13                |                                        |                                        |                                        |                                                       |                                        |                                        |                                        |
| Gesendete Nachricht entschlüsseln                                                                                                                                      |                                        |                                        |                                        |                                        |                                                       |                                        |                                        |                                        |
| $M_i \equiv (C_i)^d \text{ (modulo } n) \Rightarrow$<br>$M_i \equiv (C_i)^3 \text{ (modulo } 55) \rightarrow$<br>ergibt Zahl $\leftrightarrow$ ergibt Text-<br>element | $M_1 \equiv 31$<br>$\leftrightarrow 1$ | $M_2 \equiv 30$<br>$\leftrightarrow 0$ | $M_3 \equiv 30$<br>$\leftrightarrow 0$ | $M_4 \equiv 30$<br>$\leftrightarrow 0$ | $M_5 \equiv 20$<br>$\leftrightarrow$ Leer-<br>zeichen | $M_6 \equiv 40$<br>$\leftrightarrow E$ | $M_7 \equiv 54$<br>$\leftrightarrow U$ | $M_8 \equiv 52$<br>$\leftrightarrow R$ |
| Originaltext, formatiert                                                                                                                                               | 1000 EUR                               |                                        |                                        |                                        |                                                       |                                        |                                        |                                        |

dem Empfang die Gruppe wieder in die Originalzeichen auftrennen. In dem hier dargestellten Beispiel ist diese Gruppenbildung allerdings nicht möglich. Dazu müssten  $p$  und  $q$  und anschließend  $e$  und  $d$  neu gewählt werden mit der Bedingung  $p \cdot q = n > 5452$  (größter Gruppenwert).

**5 Fensterung**

Häufig ergibt sich die Forderung, die in einem Signal enthaltenen Frequenzanteile zu bestimmen. Ein gängiger Lösungsweg dazu ist die Digitalisierung des Signals und die Anwendung der Fourieranalyse bei periodischen Signalen bzw. der Fouriertransformation in Form der schnellen Fouriertransformation (FFT, siehe Kapitel *Signal- und Systemtheorie, IX, 2 Schnelle Fouriertransformation*) bei einmaligen Signalen. In der Praxis lassen sich dazu speziell entwickelte und optimierte mathematische Programme einsetzen. Der Anwender oder das Programm wählt aus dem gegebenen Zeitsignal entweder einen Ausschnitt oder das gesamte Signal aus. Dabei wird der Startzeitpunkt  $t = 0$  und die Dauer  $T_{Fe}$  festgelegt (Bilder XVII-5 bis XVII-8). Das gesamte Signal oder der Ausschnitt wird digitalisiert und zur weiteren Verarbeitung abgespeichert. Das verarbeitende Programm muss davon ausgehen, dass es sich um ein periodisches Signal mit der Periodendauer  $T_{Fe}$  handelt (Voraussetzung für die Anwendung der FFT). Der gespeicherte Signalverlauf wird also mit der Periodendauer  $T_{Fe}$  periodisch fortgesetzt. Dabei tritt das Problem auf, dass dem Signalwert zum Zeitpunkt  $t = T_{Fe}$  der Signalwert zum Zeitpunkt  $t = 0$  folgt. Damit ergibt sich in der Regel ein Sprung im Signal-

verlauf, der aber in Wirklichkeit nicht vorhanden ist und der im Frequenzspektrum zusätzliche, im Originalsignal nicht vorhandene, Frequenzanteile bewirkt. Die Ergebnisse der Fourierzerlegung bzw. Fouriertransformation sind verfälscht. Dabei bewirkt ein Signalsprung Harmonische mit den Frequenzen  $f_n = n/T_{Fe}$  mit  $n = 1, 2, 3, \dots$  und besonders großen Amplituden. An einem einfachen Beispiel mit einem periodischen sinusförmigen Signalverlauf mit der Frequenz  $f = 1 \text{ kHz}$  soll das gezeigt werden. Aus diesem Signal wird ein Signalausschnitt (Zeitfenster) mit der Dauer  $T_{Fe} = 4,3 \text{ ms}$  entnommen, Bild XVII-5. Das Programm zur Berechnung der FFT setzt dieses Signal periodisch fort, Bild XVII-6, und bildet daraus die Fouriertransformierte. Das Frequenzspektrum zeigt Bild XVII-8. Bei  $t = 4,3 \text{ ms}$  und Vielfachen davon gibt es einen

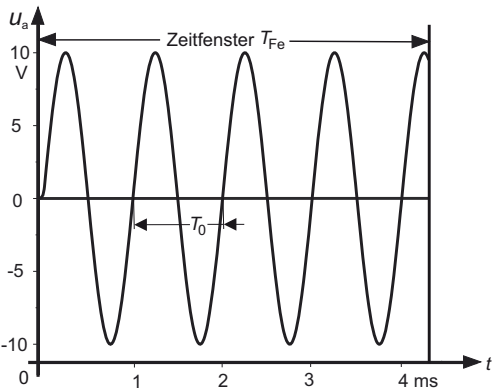


**Bild XVII-5** Signalausschnitt zur Bildung der FFT



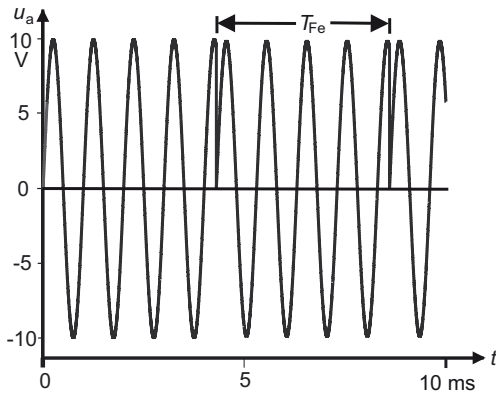


**Bild XVII-6** Periodisch fortgesetztes Signal aus Bild XVII-5

Sprung im Signalverlauf, der einen Gleichanteil (der Signalanteil von 4,0 bis 4,3 ms wird nicht mehr durch einen gleich großen negativen Signalanteil kompensiert) und ein Spektrum mit abnehmender Amplitude bei steigender Frequenz zur Folge hat. Es werden demnach Frequenzanteile ermittelt, die im Originalsignal nicht vorhanden sind und deren Ursache in dem Signalsprung liegt.

Will man diesen Fehler verringern, gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Die Zeitdauer  $T_{Fe}$  des abgespeicherten Signals wird so gewählt, dass sie ein ganzzahliges Vielfaches der Periodendauer  $T_0$  des gegebenen periodischen Signals ist:  $T_{Fe} = n \cdot T_0$  mit  $n = 1, 2, \dots$ . Dazu muss  $T_0$  überhaupt erst einmal vorhanden sein (periodisches Signal) und dann auch noch sicher erkannt werden. Diese Maßnahme ist besonders dann kaum durchführbar, wenn es sich um einen automatisch ablaufenden Vorgang handelt, bei dem in der Regel  $T_{Fe}$  fest vorgegeben ist.
2. Das abgespeicherte Signal wird zu jedem Zeitpunkt mit einem Faktor, auch *Gewichtungsfunktion* genannt, multipliziert und erst dann ausgewertet. Dieser Faktor ist zu Beginn ( $t = 0$ ) null, geht am Ende ( $t = T_{Fe}$ ) des gespeicherten Signals wiederum gegen Null und ist im überwiegenden Teil des Signalverlaufes 1 oder nahe 1. Damit hat die periodische Fortsetzung des gespeicherten Signals keinen zusätzlichen Sprung, da es zu Beginn und am Ende der „Periode“ den – erzwungenen – Wert 0 hat. Die Gewichtungsfunktion wird auch mit Fenster oder Fensterfunktion bezeichnet.

Im Bild XVII-7 ist das abgespeicherte Signal mit der Gewichtungsfunktion eines Trapezes multipliziert (*Trapezfenster*). Der Sprung bei  $t = T_{Fe}$  ist nicht mehr vorhanden, und der Gleichanteil hat sich verringert. Das zeigt auch der Verlauf in Bild XVII-8, Trapezfenster. Wenn das gespeicherte Signal wie in Bild XVII-5 ohne Einwirken einer Gewichtungsfunktion verarbeitet wird, ist das gleichbedeutend mit der

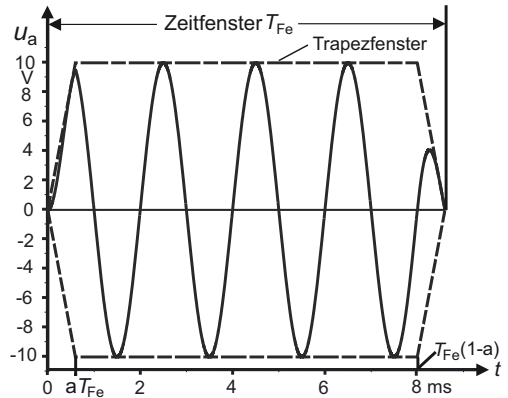


**Bild XVII-7** Signal aus Bild XVII-5 nach Passieren eines Trapezfensters

Multiplikation mit einer Gewichtungsfunktion, die konstant gleich 1 ist. Man spricht dann formal von einem Rechteckfenster, Bild XVII-8.

Für die Gewichtungsfunktionen gibt es unterschiedliche Möglichkeiten. Der Anwender muss entscheiden, welche Funktion für seine Anwendung geeignet ist. Einige bewährte Beispiele sind im Folgenden dargestellt. Neben der bereits oben genannten Forderung nach kleinen Werten in der Nähe der Fenstergrenzen sollte die Gewichtungsfunktion auch keine Knickstellen enthalten, weil diese ein ausgeprägtes Spektrum bis hin zu höheren Frequenzen besitzen. Insofern ist die hier verwendete Trapezfunktion nur bedingt einsetzbar. Ein Trapezfenster mit „abgerundeten“ Knickstellen findet als *Tukey-Fenster* Verwendung.

Es folgen einige Beispiele für häufiger verwendete Gewichtungsfunktionen (Fensterfunktionen)  $f_{Fe}$ :

1. Rechteckfenster:  $f_{Fe}(t) = 1$  für  $0 < t < T_{Fe}$ ,  
0 sonst

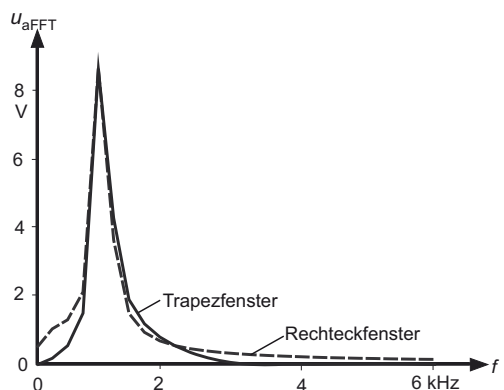


**Bild XVII-8** FFT der Signale nach Bild XVII-5 (Rechteckfenster) und Bild XVII-7 (Trapezfenster)

2. Trapezfenster:  $f_{\text{Fe1}}(t) = \frac{1}{a \cdot T_{\text{Fe}}} \cdot t$   
für  $0 \leq t \leq a \cdot T_{\text{Fe}}$   
 $f_{\text{Fe2}}(t) = 1$  für  $a \cdot T_{\text{Fe}} \leq t \leq T_{\text{Fe}} \cdot (1-a)$   
 $f_{\text{Fe3}}(t) = \left(1 - \frac{t}{T_{\text{Fe}}}\right) \cdot \frac{1}{a}$  für  $T_{\text{Fe}}(1-a) \leq t \leq T_{\text{Fe}}$   
mit  $0 < a < 1/2$
3. Tukey-Fenster: Trapezfenster mit abgerundeten Knickstellen
4. Hamming-Fenster:  
 $f_{\text{Fe}}(t) = 0,54 - 0,46 \cdot \cos((2 \cdot \pi \cdot t)/T_{\text{Fe}})$   
für  $0 \leq t \leq T_{\text{Fe}}$
5. Hanning-Fenster:  $f_{\text{Fe}}(t) = 1 - \cos^2((\pi \cdot t)/T_{\text{Fe}})$   
für  $0 \leq t \leq T_{\text{Fe}}$
6. Blackman-Fenster:  
 $f_{\text{Fe}}(t) = 0,42 - 0,5 \cdot \cos((2 \cdot \pi \cdot t)/T_{\text{Fe}})$   
 $+ 0,08 \cdot \cos((4 \cdot \pi \cdot t)/T_{\text{Fe}})$  für  $0 \leq t \leq T_{\text{Fe}}$
7. Von Hann-Fenster:  
 $f_{\text{Fe}}(t) = 0,5 \cdot (1 - \cos((2 \cdot \pi \cdot t)/T_{\text{Fe}}))$  für  $0 \leq t \leq T_{\text{Fe}}$

In der Nachrichtentechnik treten eigentlich nur stochastische Signalverläufe auf, da nur sie Information enthalten. Die auf die oben geschilderte Art bestimmten Frequenzanteile sind dann „Momentaufnahmen mit mehr oder weniger großen Abweichungen“. Anhand von Bild XVII-5 ist zu erkennen, dass sich die Ergebnisse der FFT auch ändern, wenn das Zeitfenster bei gleicher Dauer nur verschoben wird oder wenn die Dauer des Zeitfensters geändert wird. Die erhaltenen Ergebnisse sind deshalb durch geeignete Maßnahmen der Realität anzupassen. Auch hier können die im Kapitel VI *Filter* genannten Entwurfs- und Simulationsprogramme nützlich sein.

## Literaturverzeichnis

### Literatur allgemein:

- Herter, E., Lörcher, W.: Nachrichtentechnik. Verlag Hanser München, Wien. 4.9. Auflage 2003.
- Küpfmüller, K.: Die Systemtheorie der elektrischen Nachrichtenübertragung. Verlag Hirzel Stuttgart. Dritte Auflage 1968.
- Bossert, M., Fliege, N., Kammeyer, K. D.: Nachrichtentechnik. Verlag Vieweg-Teubner Wiesbaden. 4. Auflage 2008.
- Von Grüningen, D.: Digitale Signalverarbeitung. Fachbuchverlag Leipzig. 4. Auflage 2008.
- Werner, M.: Nachrichten-Übertragungstechnik. Verlag Vieweg-Teubner. 1. Auflage 2006.
- Nocker, R.: Digitale Kommunikationssysteme 2. Verlag Vieweg-Teubner. 1. Auflage 2005.
- Butz, T.: Fouriertransformation für Fußgänger. Verlag Vieweg-Teubner. 6. Auflage 2009.

### Literatur zu Kapitel II:

- [II.1] Weißgerber, W.: Elektrotechnik für Ingenieure 3. Verlag Vieweg-Teubner Wiesbaden. 7. Auflage 2009.

### Literatur zu Kapitel III:

- Doebke, W.: Die Berechnung von Leitungsproblemen mit neuen Systemgrößen. AEU, Band 11, 1957, Heft 12.
- Geschwinde, H.: Kreis- und Leitungs-Diagramme. Verlag Franzis München. 1975.
- Janssen, W.: Hohlleiter und Streifenleiter. Verlag Hüthig Heidelberg. 1977.
- Krank, W.: Über die Theorie und Technik des elliptischen Wellrohrleiters. Dissertation D 82 RWTH Aachen.
- Meinke-Gundlach: Taschenbuch der Hochfrequenztechnik. Hrsg. L. Lange und K. H. Löcherer. Verlag Springer Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo. 1986.
- Michel, K.-J.: Zweitoranalyse mit Leistungswellen. Verlag B. G. Teubner Stuttgart. 1981.
- Scheffler, E.: Flexwell-Kabel – Koaxiale Hochfrequenzkabel mit gewelltem Außenleiter. Telefonen-Zeitung. Jahrgang 33, Heft 136.
- Stadler, E.: Hochfrequenztechnik. Verlag Vogel Würzburg. 1973.
- Voges, E.: Hochfrequenztechnik. Band 1, Bauelemente und Schaltungen. Verlag Hüthig Heidelberg. 1986.

### Literatur zu Kapitel IV:

- [IV.1] Unger, H.-G.: Hochfrequenztechnik in Funk und Radar. Verlag Teubner Stuttgart. 1972.
- [IV.2] Schumny, H.: Signalübertragung. Verlag Vieweg Braunschweig/Wiesbaden. 2. Auflage 1987.

### Literatur zu Kapitel V:

- [V.1] Mäusl, R.: Analoge Modulationsverfahren. Verlag Hüthig Heidelberg. 1988.
- [V.2] Steinbuch, K., Rupprecht, W.: Nachrichtentechnik, Band 2: Nachrichtenübertragung. Verlag Springer Berlin, Heidelberg, New York. 3. Auflage 1982.
- [V.3] Hölzer, E., Holzwarth, H.: Pulstechnik, Band 1: Grundlagen. Verlag Springer Berlin, Heidelberg, New York. 1982.
- [V.4] Mäusl, R.: Digitale Modulationsverfahren. Verlag Hüthig Heidelberg. 3. Auflage 1991.

### Literatur zu den Kapiteln VIII, XII, XIV und XVII:

- [VIII.1] Mäusl, R.: Fernsehtechnik. Hüthig-Verlag Heidelberg. 4. Auflage 2006.
- [XII.1] Opielka, D.: Optische Nachrichtentechnik. Verlag Vieweg Braunschweig/Wiesbaden. 1995.
- [XII.2] Brückner, V.: Optische Nachrichtentechnik. Verlag Vieweg-Teubner Wiesbaden. 1. Auflage 2003.
- [XII.3] Schiffner, G.: Optische Nachrichtentechnik. Verlag Vieweg-Teubner Wiesbaden. 1. Auflage 2005.
- [XIV.1] siehe [IV.2].
- [XVII] Werner, M.: Information und Codierung. Verlag Vieweg-Teubner Wiesbaden. 2. Auflage 2008.

# Signal- und Systemtheorie

## Häufig verwendete Formelzeichen

Nähere Erläuterungen dazu finden sich an der angegebenen Stelle im Text

|                            |                                                                                                                                          |                     |                                                                                                                                      |
|----------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a$                        | Verhältnis von Nutz- zu Störsignal allgemein, [Gleichung (X.51)]                                                                         | $h(x)^*$            | Wahrscheinlichkeitsdichte(funktion), Häufigkeit, Gaußverteilung mit $\bar{x}$ im Koordinatenursprung [Gleichung (X.40)]              |
| $\underline{C}_k$          | komplexer Fourierkoeffizient [Gleichungen (III.5) und (III.7)]                                                                           | $\mathbf{L}$        | Laplace transformierte [Kapitel IV.2.1]                                                                                              |
| $ \underline{C}_k $        | (komplexes) Amplitudenspektrum [Gleichung (III.8)]                                                                                       | $\mathbf{L}^{-1}$   | inverse Laplace transformierte, [Kapitel IV.2.1]                                                                                     |
| $E_{s1}$                   | Energie des Signals $s_1$ [Gleichung (X.23)]                                                                                             | $\underline{S}(f)$  | Spektralfunktion, Spektraldichte [Gleichung (II.9)]                                                                                  |
| $\mathbf{F}$               | Fourier transformierte [Kapitel IV.1.1]                                                                                                  | $S(f)$              | alternative Schreibweise für $\underline{S}(f)$ in der Literatur                                                                     |
| $\mathbf{F}^{-1}$          | inverse Fourier transformierte [Kapitel IV.1.1]                                                                                          | $S_1(f)$            | Frequenzabhängige Eingangsgröße des Systems bei der Fourier transformation [Bild I-1]                                                |
| $F(s)$                     | Laplace transformierte allgemein [Kapitel IV.2.1]                                                                                        | $S_1(j\omega)^1$    | alternative Schreibweise für $S_1(f)$ in der Literatur                                                                               |
| $F_1(s)$                   | Frequenzabhängige Eingangsgröße des Systems bei der Laplace transformation [Bild I-1]                                                    | $S_2(f)$            | Frequenzabhängige Ausgangsgröße des Systems bei der Fourier transformation [Bild I-1]                                                |
| $F_2(s)$                   | Frequenzabhängige Ausgangsgröße des Systems bei der Laplace transformation [Bild I-1]                                                    | $S_1(z)$            | Frequenzabhängige Eingangsgröße des Systems bei der $z$ -Transformation [Bild I-1]                                                   |
| $f_1(t)$                   | Zeitabhängige Eingangsgröße des Systems; nur bei der Laplace transformation wegen Verwechslungsgefahr mit $s_1(t)$ verwendet, [Bild I-1] | $S_2(z)$            | Frequenzabhängige Ausgangsgröße des Systems bei der $z$ -Transformation [Bild I-1]                                                   |
| $F(j\omega)^1$             | Alternative Schreibweise für $\underline{S}(f)$ in der Literatur                                                                         | $S_{ss}$            | Leistungsspektralfunktion [Gleichung (II.10)]                                                                                        |
| $H(f)$                     | Übertragungsfunktion in Abhängigkeit von der Frequenz bei der Fourier transformation [Bild I-1]                                          | $s$                 | Variable bei der Laplace transformation [Kapitel IV.2.1]                                                                             |
| $H(x)$                     | Summenhäufigkeitsfunktion, Summenfunktion [Kapitel X.1]                                                                                  | $s_1(t)$            | Zeitabhängige Eingangsgröße des Systems; bei der Laplace transformation wegen Verwechslungsgefahr mit $f_1(t)$ bezeichnet [Bild I-1] |
| $H(x)^*$                   | Summenhäufigkeitsfunktion, Summenfunktion, Gaußverteilung mit $\bar{x}$ im Koordinatenursprung [Gleichung (X.41)]                        | $s_2(t)$            | Zeitabhängige Ausgangsgröße des Systems; bei der Laplace transformation wegen Verwechslungsgefahr mit $f_2(t)$ bezeichnet [Bild I-1] |
| $H(f)_{nT_{ab}}$           | Übertragungsfunktion bei abgetasteten Signalen [Gleichung (IX.6)]                                                                        | $w(x)$              | Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses $x$ [Gleichung (X.1a)]                                                         |
| $H(s)$                     | Übertragungsfunktion in Abhängigkeit von der Frequenz bei der Laplace transformation [Bild I-1]                                          | $\bar{x}$           | Mittelwert, [Gleichungen (X.4) und (X.5)]                                                                                            |
| $H(z)$                     | Übertragungsfunktion in Abhängigkeit von der Frequenz bei der $z$ -Transformation [Bild I-1]                                             | $\Phi_{ss}$         | Autokorrelationsfunktion, AKF [Gleichung (X.11)]                                                                                     |
| $\underline{H}(\omega)^1$  | Alternative Schreibweise für $H(f)$ in der Literatur                                                                                     | $\Phi_{s_1s_2}$     | Kreuzkorrelationsfunktion der zwei Signale $s_1(t)$ und $s_2(t)$ , KKF [Gleichung (X.21)]                                            |
| $\underline{H}(j\omega)^1$ | Alternative Schreibweise für $H(f)$ in der Literatur                                                                                     | $\Phi_{NN}$         | Kreuzkorrelierte von Rauschen, [Gleichung (X.48 a)]                                                                                  |
| $h(t)$                     | Übertragungsfunktion des Systems in Abhängigkeit von der Zeit [Bild I-1]                                                                 | $\delta, \delta(t)$ | Stoßfunktion, $\delta$ -Funktion, Dirac-Impuls [Kapitel V.1]                                                                         |
| $h(x)$                     | Wahrscheinlichkeitsdichte(funktion), Häufigkeit [Kapitel X.1]                                                                            | $\sigma, \sigma(t)$ | Sprungfunktion [Kapitel V.2]                                                                                                         |
|                            |                                                                                                                                          | $\sigma^2$          | Varianz [Gleichung (X.7)]                                                                                                            |

<sup>1</sup> alternative Schreibweisen in der Literatur, hier nicht verwendet

# I Einführung

## 1 Darstellung in der Zeit- und in der Frequenzebene

Bild I-1 stellt den Aufgabenbereich der Signal- und Systemtheorie dar. Ein Eingangssignal, das entweder als Funktion der Zeit ( $s_1(t)$ ) oder als Funktion der Frequenz ( $\underline{S}_1(f)$ ,  $F_1(s)$ ,  $S_1(z)$ ) gegeben ist, erfährt durch ein System, dessen Eigenschaften durch  $h(t)$  bzw.  $\underline{H}(f)$ ,  $H(s)$  oder  $H(z)$  gekennzeichnet werden, eine Beeinflussung und erscheint als geändertes Ausgangssignal  $s_2(t)$  bzw.  $\underline{S}_2(f)$ ,  $F_2(s)$  oder  $S_2(z)$ . Die Signal- und Systemtheorie erfasst in einem ersten Schritt die Zusammenhänge zwischen den eingezeichneten Größen. Stellt das System z.B. die Übertragungsstrecke für Daten dar, dann sind sehr hohe Anforderungen zu erfüllen: Schnelle und (fast) fehlerfreie Übertragung möglichst vieler unterschiedlicher Daten gleichzeitig, die sich eindeutig wieder trennen lassen müssen, wobei nur eine begrenzte Bandbreite zur Verfügung steht. Deshalb folgt häufig in einem zweiten Schritt die Optimierung aller an der Übertragung beteiligten Größen, d.h., sowohl die Eingangsgrößen als auch die Systemgrößen müssen geeignet gewählt bzw. aneinander angepasst werden. Für die Darstellung im Frequenzbereich werden drei Verfahren angewendet: Die Fouriertransformation mit den Größen  $\underline{S}_1(f)$ ,  $\underline{H}(f)$ ,  $\underline{S}_2(f)$ , die Laplacetransformation mit  $F_1(s)$ ,  $H(s)$ ,  $F_2(s)$  und die  $z$ -Transformation mit  $S_1(z)$ ,  $H(z)$ ,  $S_2(z)$ . Obwohl die Größen in der Frequenzebene komplexe Größen sein können, müssen sie nicht als solche gekennzeichnet werden, siehe Gleichungen (II.6) und (II.7).

Es gelten folgende Bezeichnungen:

$s_1(t)$ , ( $f_1(t)$ ): Zeitabhängige Eingangsgröße des Systems; bei der Laplacetransformation wegen Verwechslungsgefahr mit  $f_1(t)$  bezeichnet,

$h(t)$ : Übertragungsfunktion des Systems in Abhängigkeit von der Zeit,

$s_2(t)$ , ( $f_2(t)$ ): Zeitabhängige Ausgangsgröße des Systems; bei der Laplacetransformation wegen Verwechslungsgefahr mit  $f_2(t)$  bezeichnet,

$S_1(f)$ ,  $\underline{S}_1(f)$ : Frequenzabhängige Eingangsgröße des Systems, Fouriertransformation,

$H(f)$ ,  $\underline{H}(f)$ : Übertragungsfunktion in Abhängigkeit von der Frequenz, Fouriertransformation,

$S_2(f)$ ,  $\underline{S}_2(f)$ : Frequenzabhängige Ausgangsgröße des Systems, Fouriertransformation,

$F_1(s)$ : Frequenzabhängige Eingangsgröße des Systems, Laplacetransformation,

$H(s)$ : Übertragungsfunktion in Abhängigkeit von der Frequenz, Laplacetransformation,

$F_2(s)$ : Frequenzabhängige Ausgangsgröße des Systems, Laplacetransformation,

$S_1(z)$ : Frequenzabhängige Eingangsgröße des Systems,  $z$ -Transformation,

$H(z)$ : Übertragungsfunktion in Abhängigkeit von der Frequenz,  $z$ -Transformation,

$S_2(z)$ : Frequenzabhängige Ausgangsgröße des Systems,  $z$ -Transformation.

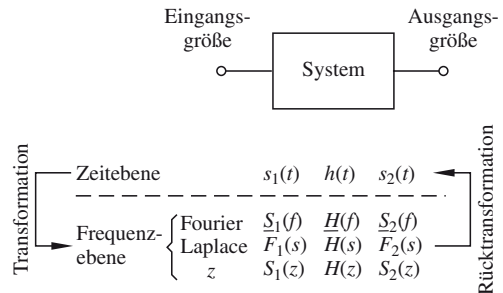


**Bild I-1** System mit zugeordneten Größen

Nach Bild I-1 können die Signale am Ein- und Ausgang sowie die Systemeigenschaften sowohl als Funktion der Zeit (z.B. Spannungsimpuls der Höhe 2 V und der Dauer 2 ms) als auch der Frequenz (z.B. Tiefpass mit der Grenzfrequenz  $f_g$ ) dargestellt werden. Während  $s_1(t)$ ,  $h(t)$  und  $s_2(t)$  „anschauliche“ Größen sind, werden die Systemeigenschaften häufig in der Frequenzebene dargestellt. Das hat im wesentlichen zwei Gründe:

1. Zwischen den Ein- und Ausgangsgrößen besteht die einfache Beziehung:

$$\underline{S}_2(f) = \underline{H}(f) \cdot \underline{S}_1(f) \quad \text{bei der Fouriertransformation,} \quad (\text{I.1 a})$$

$$F_2(s) = H(s) \cdot F_1(s) \quad \text{bei der Laplacetransformation,} \quad (\text{I.1 b})$$

$$S_2(z) = H(z) \cdot S_1(z) \quad \text{bei der } z\text{-Transformation.} \quad (\text{I.1 c})$$

Die Größen  $s_1(t)$ ,  $h(t)$  und  $s_2(t)$  dagegen sind über die mathematisch aufwendigere Operation der Faltung verknüpft (siehe Kapitel VII):

$$s_2(t) = h(t) * s_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot s_1(t - \tau) d\tau. \quad (\text{I.2})$$

\* Symbol für „Faltung“

2. Nahezu jedes System enthält, absichtlich eingesetzt oder vom Aufbau gegeben, die Elemente  $L$  und  $C$  in einer ihm eigenen spezifischen Kombination. Die Beziehung zwischen der Spannung  $u$  und dem Strom  $i$  beim Kondensator bzw. bei der Spule wird über je einen Differentialquotienten in der Zeitebene erfasst:  $u_L = L \cdot di_L/dt$ ,  $i_C = C \cdot du_C/dt$ . Damit führt die Verknüpfung von  $s_1(t)$  mit  $s_2(t)$  auf eine Differentialgleichung. Für die Berechnung ist es aber i.a. günstiger, wenn eine der Gleichungen (I.1 a, b, c) verwendet werden kann, weil dann, unter Anwendung geeigneter Transforma-

tionen, keine Differentialgleichung gelöst werden muss und die Signal- und die Systemeigenschaften in getrennten, voneinander unabhängigen Ausdrücken zusammengefasst sind:  $\underline{S}_1(f)$  und  $\underline{H}(f)$  bzw.  $F_1(s)$  und  $H(s)$  oder  $S_1(z)$  und  $H(z)$ . Für *sinusförmige* Größen im *eingeschwungenen* Zustand kann die Berechnung analog zu Gleichung (I.1 a, b) ohne Lösen einer Differentialgleichung in Form der komplexen Rechnung erfolgen. Das führt zu den Impedanzen  $\underline{Z}_C = 1/j\omega C$  bzw.  $\underline{Z}_L = j\omega L$ , die nicht mehr unmittelbar in ihrer Zeit-, sondern in ihrer Frequenzabhängigkeit gegeben sind. Damit liegen auch die Ergebnisse der Berechnung in Abhängigkeit von der Frequenz vor.

Über die Fourier- und die Laplace-Transformation bei zeitkontinuierlichen Signalen bzw. die  $z$ -Transformation bei zeitdiskreten Signalen lässt sich eine der komplexen Rechnung analoge Methode auch bei Einschwingvorgängen und nichtsinusförmigen periodischen oder einmaligen Signalverläufen anwenden. Es ergibt sich dann ebenfalls eine Darstellung in Abhängigkeit von der Frequenz.

Für die Darstellung der Signal- und Systemtheorie gilt hier die folgende Zielsetzung: Die gegebenen oder geforderten Größen, die in ihrer Zeitabhängigkeit vorliegen, werden in die Frequenzebene transformiert. Für das System müssen die Eigenschaften ebenfalls in der Frequenzebene vorliegen. Dann kann mit Gleichung (I.1 a, b, c) die gesuchte Größe berechnet und anschließend in die Zeitebene zurücktransformiert werden. In der Praxis werden vorwiegend die zeitabhängigen Größen ausgewertet: Bei der Datenübertragung ist entscheidend, in welcher Form die Digitalsignale empfangen werden, denn daraus ergibt sich, ob sie noch fehlerfrei erkannt werden können oder nicht. Auch beim Einsatz von Filtern ist meist nur von Bedeutung, wie sich der zeitliche Signalverlauf ändert. Da sehr umfangreiche Transformationstabellen zur Verfügung stehen, lohnt häufig der „Umweg“ über die Frequenzebene, weil insgesamt die Berechnungen mit weniger Aufwand möglich sind als die direkte Erfassung in der Zeitebene.

Da die Leistungsfähigkeit der Rechner stetig zugenommen hat, wurden in den letzten Jahren Programme entwickelt, die die Systemberechnungen direkt in der Zeitebene durchführen, also  $h(t)$ ,  $s_1(t)$  und  $s_2(t)$  verwenden.

## 2 Hinweise zur Anwendung

Im folgenden werden Verfahren zur Erfassung von Systemen und Signalen dargestellt. Letztlich bleibt es dem Anwender überlassen, welchen Weg er zur Lösung des gegebenen Problems bevorzugt. Soll eine Transformation verwendet werden, ist diejenige auszuwählen, die prinzipiell geeignet ist und die die geringeren Schwierigkeiten aufweist: Die Fouriertransformation hat eventuell Konvergenzprobleme,

die die Laplacetransformation vermeidet. Für abgetastete Signale bietet sich die  $z$ -Transformation an. Mit geeigneten Rechner- bzw. Mathematikprogrammen kann auch die direkte Lösung in der Zeitebene mit dem Faltungsintegral (Gleichung (I.2)) sinnvoll sein.

Zum besseren Verständnis seien noch die folgenden Bemerkungen angeführt:

1. Bei dem System kann es sich z.B. handeln um
  - ein Energieübertragungssystem (Generator–Transformator–Leitung–Transformator–Verbraucher),
  - ein Nachrichtenübertragungssystem (Fernsehkamera–Sender–Kabel–Empfänger–Bildschirm),
  - ein Datenübertragungssystem PC-Netzwerk-karte–Router–DSL-Leitung–Kontoführungseinrichtung des Geldinstitutes),
  - ein Regelsystem (Konstanthaltung einer vorgegebenen Flughöhe),
  - einen Gleichstromsteller mit angeschlossenem Motor,
  - eine Verstärkerschaltung,
  - eine Filterschaltung (Tiefpass, Bandpass zur Signalselektion),
  - einen Modulator bzw. Demodulator (Rundfunksender, Rundfunkempfänger).
2. Ein System kann eine große Anzahl von Einzelkomponenten enthalten und damit sehr komplex sein, wie in den ersten 3 Beispielen unter Punkt 1, es kann aber auch aus nur wenigen Elementen bestehen und damit überschaubar sein, so wie in den letzten 2 Beispielen unter Punkt 1. Bei komplexen Systemen kann man gegebenenfalls auf Vereinfachungen und Näherungslösungen zurückgreifen, die übersichtlich sind und die die wesentlichen Eigenschaften trotzdem noch erfassen. Die optimale Lösung findet man, falls erforderlich, durch Teststreihen mit Parameteränderungen.
3. Bei den im folgenden dargestellten formelmäßigen Zusammenhängen und bei den Transformationsvorschriften stößt man durchaus in mathematische Grenzbereiche vor. Ziel dieses Kapitels ist aber nicht die umfassende theoretische Behandlung der Signal- und Systemtheorie, sondern der Gedanke, das Verständnis für die Zusammenhänge zu fördern und dem Anwender ein Hilfsmittel zur Lösung der ihm gestellten Aufgaben an die Hand zu geben.
4. Die Signal- und Systemtheorie befasst sich auch mit stochastischen, d.h. mit nicht vorhersagbaren Signalen. Sie tut dies, weil zum einen Störsignale (Rauschen) in dieser Form auftreten, zum anderen eine Nachrichten- bzw. Datenübertragung nur in Form von nicht deterministischen Signalen möglich ist, denn nur sie enthalten Information (siehe Abschnitt „Nachrichtentechnik“, Kapitel I.4).
5. Zur Beurteilung der Eigenschaften des Systems werden spezielle Eingangssignale verwendet. Man kann dann über das gemessene  $s_2(t)$  die Größe  $h(t)$  bzw.  $\underline{H}(f)$  bestimmen. Anschließend lässt sich



eine Aussage über den Verlauf von  $s_2(t)$  bei beliebigen Funktionen  $s_1(t)$  angeben. Zu diesen besonderen Funktionen gehören die Sprungfunktion, der (angenäherte) Dirac-Impuls und (weißes) Rauschen.

6. Der Themenkreis Zweitore (Vierpole) kann sowohl im Kapitel Nachrichtentechnik als auch in

diesem Kapitel behandelt werden. Hier wurde der erste Weg gewählt, weil die Ein- und Ausgangsgrößen sinusförmig sind und nur der eingeschwungene Zustand betrachtet wird.

7. In der Literatur werden unterschiedliche Formelzeichen bzw. Bezeichnungen verwendet, siehe Gleichungen (II.4, 5, 6, 6a, 7, 8, 9).

## II Grundbegriffe

Für die Begriffe Systemanalyse und -synthese gilt:

- *Systemanalyse*: Das Eingangssignal ist gegeben, das Ausgangssignal gesucht.
- *Systemsynthese*: Das Eingangssignal ist gegeben, das Ausgangssignal muss bestimmte Bedingungen erfüllen. Gesucht ist ein geeignetes System.

Für die weiteren Ausführungen wird angenommen, dass das System drei Bedingungen erfüllt:

- 1. *Stabilität*: Es muss gelten:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{s_2(t)\} = 0 \quad \text{für} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \{s_1(t)\} = 0. \quad (\text{II.1})$$

- 2. *Linearität*:

$s_{1a}(t) \circ \text{---} s_{2a}(t)$ ,  $s_{1b}(t) \circ \text{---} s_{2b}(t)$ ; dann folgt

$$s_{1a}(t) + s_{1b}(t) \circ \text{---} s_{2a}(t) + s_{2b}(t) \quad (\text{II.2})$$

$\circ \text{---}$  allgemein für Zuordnung

- 3. *Zeitinvarianz*:

$s_1(t) \circ \text{---} s_2(t)$ ; dann gilt auch

$$s_1(t + \tau) \circ \text{---} s_2(t + \tau) \quad (\text{II.3})$$

$\tau$  beliebige Zeitverschiebung,  $\circ \text{---}$  allgemein für Zuordnung

Die folgenden Begriffe und Beziehungen werden in der Signal- und Systemtheorie häufig verwendet (siehe auch DIN 1311).

- *Übertragungsfaktor allgemein*:

$$T = \frac{S_2}{S_1} = |T| \cdot e^{j \arctan T} \quad (\text{II.4})$$

Die Größen  $S_1$  und  $S_2$  sind beliebig, d.h., sie können auch unterschiedliche Dimensionen haben. Soll gekennzeichnet werden, dass es sich um komplexe Größen handelt, kann die folgende Schreibweise gewählt werden:

- *Übertragungsfaktor, wahlweise für komplexe Größen*:

$$\underline{T} = \frac{\underline{S}_2}{\underline{S}_1} = |\underline{T}| \cdot e^{j \arctan \underline{T}} \quad (\text{II.5})$$

Durch den folgenden Ausdruck wird die Frequenzabhängigkeit des Übertragungsfaktors besonders gekennzeichnet. Er heißt dann Übertragungsfunktion und wird häufig bei Zweitoren (Vierpolen) angewendet:

- *Übertragungsfunktion, Fouriertransformation*:

$$\underline{H}(\omega) = \underline{S}_2(\omega) / \underline{S}_1(\omega) = |\underline{H}(\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)} \quad (\text{II.6})$$

Alternativ werden in der Literatur auch die Schreibweisen

$$\underline{H}(j\omega) = \underline{S}_2(j\omega) / \underline{S}_1(j\omega)$$

bzw.

$$H(j\omega) = S_2(j\omega) / S_1(j\omega) \quad (\text{II.6a})$$

oder

$$\underline{H}(f) = \underline{S}_2(f) / \underline{S}_1(f) \quad \text{bzw.} \quad H(f) = S_2(f) / S_1(f) \quad (\text{II.6b})$$

verwendet. Wird die Laplacetransformation eingesetzt, gilt die folgende Schreibweise:

- *Übertragungsfunktion, Laplacetransformation*:

$$H(s) = \frac{F_2(s)}{F_1(s)} \quad (\text{II.7})$$

$F_2(s)$  Ausgangsgröße,  $F_1(s)$  Eingangsgröße, beide in der symbolischen  $s$ -Ebene. Um Verwechslungen zu vermeiden, wird die Schreibweise  $F(s)$  anstatt  $S(s)$  verwendet.

- *Übertragungsfunktion, z-Transformation*:

$$H(z) = \frac{S_2(z)}{S_1(z)} \quad (\text{II.8})$$

$S_2(z)$  Ausgangsgröße,  $S_1(z)$  Eingangsgröße

- *Spektralfunktion, Spektraldichte*:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (\text{II.9})$$

In der Literatur wird auch  $F(j\omega)$  verwendet.

- *Leistungsspektralfunktion*:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \cdot |S(f)|^2 = S_{ss}(f) \quad (\text{II.10})$$

### III Periodische nichtsinusförmige zeitkontinuierliche Signale

#### 1 Reelle und komplexe Fourierreihen

Jeder periodische Signalverlauf  $s(t)$  kann nach Fourier dargestellt werden als eine unendliche Summe aus sinus- und cosinusförmigen Signalen, deren Frequenzen ein ganzzahliges Vielfaches der Frequenz des gegebenen Signals sind:

$$s(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos k\omega t + b_k \cdot \sin k\omega t) \quad (\text{III.1})$$

$a_0$  ist der Gleichanteil (arithmetischer Mittelwert),  $\omega$  die Kreisfrequenz des gegebenen Signalverlaufes. Für  $k$  gilt:  $k = 1, 2, 3, \dots$   $a_k$  und  $b_k$  sind die Scheitelwerte der Signale mit der Kreisfrequenz  $k \cdot \omega$ . Folgende Bezeichnungen werden allgemein verwendet:

Signal mit der Kreisfrequenz  $1 \cdot \omega$ :

Grundschwingung oder erste Harmonische;

Signal mit der Kreisfrequenz  $2 \cdot \omega$ :

Erste Oberschwingung oder zweite Harmonische;

Signal mit der Kreisfrequenz  $3 \cdot \omega$ :

Zweite Oberschwingung oder dritte Harmonische;

usw.

Die Größen  $a_0$ ,  $a_k$  und  $b_k$  werden nach folgender Vorschrift berechnet:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt \quad (\text{III.2a})$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \cos k\omega t dt \quad (\text{III.2b})$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \sin k\omega t dt \quad (\text{III.2c})$$

Daneben gibt es noch eine zweite Art der Darstellung für die Fourierreihe:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{s}_k \cdot \sin(k\omega t + \varphi_k) \quad (\text{III.3})$$

Die Darstellungsarten nach Gleichung (III.1) und (III.3) lassen sich ineinander überführen:

$$\hat{s}_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \quad \varphi_k = \arctan \frac{a_k}{b_k} \quad (\text{III.4})$$

- **Symmetriebedingungen:** Erfüllt der gegebene Signalverlauf  $s(t)$  bestimmte Bedingungen, treten nicht alle in Gleichung (III.1) aufgeführten Frequenzen auf:

1. Symmetrie:  $s(t) = s(-t)$ , gerade Funktion,  
 $\Rightarrow b_k = 0$  für alle  $k$ ,

$$\Rightarrow a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} s(t) dt, \quad a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} s(t) \cdot \cos k\omega t dt$$

2. Symmetrie:  $s(t) = -s(-t)$  ungerade Funktion,

$$\Rightarrow a_0 = 0, a_k = 0 \text{ für alle } k,$$

$$\Rightarrow b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} s(t) \cdot \sin k\omega t dt$$

3. Symmetrie:  $s(t + T/2) = -s(t)$ ,  $\Rightarrow a_{2k} = 0, b_{2k} = 0$  für alle  $k$ ,

$$\Rightarrow a_{2k+1} = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} s(t) \cdot \{\cos(2k+1)\omega t\} dt,$$

$$\Rightarrow b_{2k+1} = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} s(t) \cdot \{\sin(2k+1)\omega t\} dt$$

1. und 3. Symmetrie gleichzeitig:  $\Rightarrow b_k = 0, a_{2k} = 0$  für alle  $k$ ,

$$\Rightarrow a_{2k+1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} s(t) \cdot \{\cos(2k+1)\omega t\} dt$$

2. und 3. Symmetrie gleichzeitig:  $\Rightarrow a_0 = 0, a_k = 0, b_{2k} = 0$  für alle  $k$ ,

$$\Rightarrow b_{2k+1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} s(t) \cdot \{\sin(2k+1)\omega t\} dt$$

Liegen Symmetriebedingungen vor, vereinfacht sich die Berechnung.

- **Sprungstellen:** Besitzt eine Funktion eine Sprungstelle, konvergiert die Fourierreihe gegen den arithmetischen Mittelwert aus links- und rechtsseitigem Grenzwert an dieser Stelle. Das in Bild III-2 dargestellte Signal hat zwei Sprungstellen, für  $t = 0$  und  $t = aT$ . Die Fourierreihe konvergiert für beide Sprungstellen gegen den Wert  $(0 + U_0)/2 = U_0/2$ .
- **Gibbsches Phänomen:** Wird eine Funktion  $s(t)$  nach Gleichung (III.1) zusammengesetzt, und enthält die Funktion  $s(t)$  Sprungstellen, dann zeigt sich an den Sprungstellen ein geringes Überschwingen, das auch für  $k \rightarrow \infty$  nicht verschwindet ( $\approx 9\%$ ). In Bild III-4 ist das zu erkennen. Ursache dafür ist u.a., dass die Funktion an den Sprungstellen nicht definiert ist.

Funktionsverläufe in der Physik bzw. Elektrotechnik sind im gesamten Zeitbereich eindeutig definiert, sodass keine Sprungstellen auftreten und das Gibbsche Phänomen nicht wirksam wird.

Mit den Beziehungen

$$\cos \alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}, \quad \sin \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$$

lässt sich Gleichung (III.1) wie folgt schreiben:

$$s(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_k}{2} \cdot e^{jk\omega t} + \frac{a_k}{2} \cdot e^{-jk\omega t} + \frac{b_k}{2j} \cdot e^{jk\omega t} - \frac{b_k}{2j} \cdot e^{-jk\omega t} \right\}$$



$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \underbrace{\left( \frac{a_k + b_k}{2} \right)}_{\underline{C}_k} \cdot e^{jk\omega t} + \underbrace{\left( \frac{a_k - b_k}{2} \right)}_{\underline{C}_{-k}} \cdot e^{-jk\omega t} \right\} \quad (\text{III.5})$$

Es lässt sich zeigen, dass  $\underline{C}_{-k}$  durch  $\underline{C}_k$  ersetzt werden kann, wenn in der Summe  $k$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  läuft. Dann ergibt sich die Fourierreihe in der komplexen Form:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_k \cdot e^{jk\omega t}$$

mit

$$\underline{C}_k = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T s(t) \cdot e^{-jk\omega t} dt \quad (\text{III.6})$$

Formal wurden hier negative Frequenzen eingeführt, die physikalisch aber nicht existieren (siehe dazu Bild III-1).

In Gleichung (III.5) kann man schreiben:

$$\underline{C}_k = \frac{a_k}{2} - j \frac{b_k}{2} = |\underline{C}_k| \cdot e^{j\phi_k} \quad (\text{III.7})$$

Daraus leiten sich, verknüpft mit den Gleichungen (III.3) und (III.4), zwei für die Anwendung praktische Begriffe ab:

- (komplexes) Amplitudenspektrum:

$$|\underline{C}_k| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \frac{1}{2} \cdot \hat{s}_k \quad (\text{III.8})$$

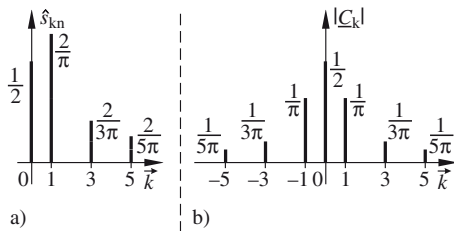


**Bild III-1** Amplitudenspektrum (siehe Beispiel III.1 und Bild III-2 für  $a = 1/2$ ) in reeller (a) und komplexer Form (b)

In Bild III-1 ist das Amplitudenspektrum in der reellen Form (links) und in der komplexen Form (rechts) für das Beispiel III.1 (Bild III-2) mit  $a = 1/2$  dargestellt. Man gelangt von der komplexen Darstellung zur reellen, wenn die Amplituden der negativen Frequenzen zu den Amplituden der entsprechenden positiven Frequenzen addiert werden. Damit gilt für den Zusammenhang zwischen reellen und komplexen Koeffizienten:

$$a_k = 2 \cdot \operatorname{Re}(\underline{C}_k); \quad b_k = -2 \cdot \operatorname{Im}(\underline{C}_k) \quad (\text{III.9})$$

Die Amplitudenwerte nach Gleichung (III.11) (Beispiel III.1) sind durch  $U_0$  geteilt. Auf der Abszisse (Bild III-1) kann wahlweise die Frequenz, die Kreisfrequenz oder, wie hier,  $k$  aufgetragen werden.

- (komplexes) Phasenspektrum:

$$\phi_k = \arctan \frac{-b_k}{a_k}, \text{ siehe Gleichung (III.7)}$$

Andererseits gilt nach Gleichung (III.4):

$$\varphi_k = \arctan \frac{a_k}{b_k}. \text{ Damit lassen sich beide ineinander umrechnen:}$$

$$\begin{aligned} \phi_k &= \arctan \frac{-b_k}{a_k} = -\arctan \frac{b_k}{a_k} \\ &= -\left( \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{b_k}{a_k} \right) = \arctan \frac{a_k}{b_k} - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

oder

$$\phi_k = \varphi_k - \frac{\pi}{2} \quad (\text{III.10})$$

Zu der Darstellung der Spektren (Gleichung III.8 und III.10) gehört deshalb die Angabe, ob sie aus der reellen oder der komplexen Form abgeleitet worden sind.

## 2 Beispiele und Anwendungen

- **Beispiel III.1:** Soll der Effektivwert einer Gleichspannung verringert werden, wird sie in eine Rechteckspannung mit einstellbarem Tastgrad umgeformt, Bild III-2 (Anwendung: Stromrichter, Gleichstromsteller, Helligkeitseinstellung von gepulsten LEDs). Die Gleichspannung wird periodisch ein- und ausgeschaltet. Damit hat dieses Verfahren nur geringe Verluste, weil elektronische Schalter weitgehend ideale Bauelemente sind. Allerdings entstehen gemäß Fourierzerlegung des Signals Wechselspannungen mit Frequenzen nach Gleichung (III.1), die die u.U. als Störquelle unangenehm in Erscheinung treten.

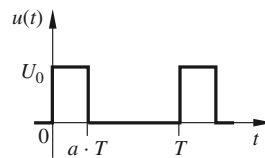


**Bild III-2** Rechteckförmiger Spannungsverlauf mit veränderlichem Tastgrad  $a$

Der Effektivwert (Bild III-2) ergibt sich zu:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \{u(t)\}^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{aT} U_0^2 dt} = U_0 \sqrt{a}; \quad 0 \leq a \leq 1;$$

Tastgrad:  $aT/T = a$

Für den Gleichanteil  $a_0$  und die Scheitelwerte  $a_k$  und  $b_k$  folgt mit den Gleichungen (III.2 a, b, c):

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^{aT} U_0 dt = U_0 \cdot a$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^{aT} U_0 \cdot \cos k\omega t dt = \frac{2U_0}{T} \cdot \frac{T}{k2\pi} \cdot \sin k2\pi \cdot \frac{t}{T} \Big|_0^{aT}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{U_0}{k\pi} \cdot \sin k \cdot 2 \cdot \pi \cdot a \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^{aT} U_0 \cdot \sin k\omega t \, dt = \frac{2U_0}{T} \cdot \frac{-T}{k \cdot 2\pi} \cdot \cos k \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{T} \Big|_0^{aT} \\ &= \frac{U_0}{k\pi} \cdot (1 - \cos k \cdot 2 \cdot \pi \cdot a) \end{aligned}$$

Die Amplituden der Harmonischen sind abhängig vom Tastgrad. Mit den Gleichungen (III.3) und (III.4) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \hat{s}_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \frac{U_0}{k\pi} \sqrt{\sin^2(k \cdot 2 \cdot \pi \cdot a) + 1 - 2 \cdot \cos(k \cdot 2 \cdot \pi \cdot a)} \\ &= \frac{U_0}{k\pi} \cdot \sqrt{2(1 - \cos k \cdot 2 \cdot \pi \cdot a)} \end{aligned}$$

Der Ausdruck unter der Wurzel ist maximal für  $\cos k \cdot 2 \cdot \pi \cdot a = -1$ , d.h. für  $a = 1/2$  und  $k = 1, 3, 5, \dots$ :

$$\hat{s}_{k \max} = \frac{2 \cdot U_0}{k \cdot \pi} \quad \text{für } a = 1/2 \quad \text{und } k = 1, 3, 5, \dots \quad (\text{III.11})$$

Damit sind die Amplituden der Harmonischen für  $a = 1/2$  maximal.

Für  $k = 2, 4, 6, \dots$  ist die Amplitude Null, d.h. es entstehen für den Sonderfall  $a = 1/2$  keine geradzahlgigen Harmonischen.

- **Beispiel III.2:** Um die im vorigen Beispiel angesprochenen Störungen ausreichend klein zu halten, ist in IEC 555-2 bzw. VDE 0838 Teil 2 festgelegt worden, dass die Amplituden der Oberschwingungen des Stromes  $i_{\text{netz}}$  im 50-Hz-Stromversorgungsnetz bestimmte Maximalwerte nicht überschreiten dürfen. Bild III-3 stellt den typischen Stromverlauf eines Gerätes mit Zweiweggleichrichter und Ladekondensator dar.

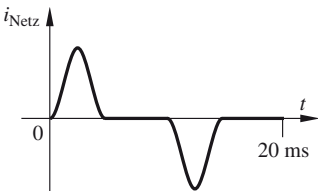


**Bild III-3** Prinzipieller Stromverlauf bei Geräten mit Brückengleichrichter und Ladekondensator

Tabelle III-1 enthält auszugsweise die maximal zulässigen Stromamplituden der Oberschwingungen, bezogen auf eine 16-A-Grundschwingungsamplitude. Infolge der Symmetriebedingung  $i(t + T/2) = -i(t)$  (3. Symmetrie, siehe oben) treten nur ungeradzahlgige Harmonische auf.

- **Beispiel III.3:** Die Grenzfrequenz von Oszilloskopen bezieht sich auf einen sinusförmigen Signalverlauf am Eingang. Werden nichtsinusförmige periodische Signale gemessen, was der Regelfall ist, dann verarbeitet das Gerät nur Harmonische bis zur Grenzfrequenz. Dadurch ist der auf dem Schirm dargestellte Signalverlauf nicht mehr mit dem zu messenden identisch. Nur dadurch, dass

die Signalfrequenz wesentlich geringer als die Grenzfrequenz des Oszilloskopes ist (Erfahrungswert  $1/10 \dots 1/20$ ), kann der Fehler klein gehalten werden. Ein unbekanntes Signal mit der Frequenz 10 MHz erfordert damit ein Oszilloskop mit der Grenzfrequenz  $100 \dots 200$  MHz, soll der Verlauf mit geringem Fehler erfasst werden.

Bild III-4 stellt entsprechende Schirmbilder dar. Der verwendete ideale Tiefpass lässt keine Frequenzanteile oberhalb  $f_g$  durch, während der reale Tiefpass ab  $f_g$  die folgenden Frequenzanteile bis zur angegebenen Frequenz mit 20 dB/Dekade absenkt. Das Überspringen an den Sprungstellen ist in der Praxis geringer, weil die darzustellenden Signalverläufe keine „echten“ Sprungstellen aufweisen (siehe Gibbsches Phänomen oben).

- **Beispiel III.4:** Bei der analogen Stereo-Rundfunkübertragung (siehe Abschnitt „Nachrichtentechnik“, Kapitel VIII.1) wird ein Hilfsträger mit 19 kHz übertragen, der im Rundfunkempfänger in einen phasenrichtigen Träger mit 38 kHz umgesetzt werden muss. Das geschieht durch Brückengleichrichtung des sinusförmigen 19-kHz-Trägers. Im neu entstehenden Signal ist die Frequenz 19 kHz nicht mehr enthalten, dafür die benötigte phasenrichtige Frequenz 38 kHz als neue Grundschwingung. Die Fourierreihe berechnet sich zu:

$$u(t) = \frac{2 \cdot \hat{u}}{\pi} - \frac{4 \cdot \hat{u}}{\pi} \sum_k \frac{\cos k\omega t}{k^2 - 1}$$

für  $k = 2, 4, 6, \dots$  und  $\omega = 2\pi \cdot 19 \text{ kHz}$

Die Fourierreihe ist hier noch auf die ursprüngliche Frequenz 19 kHz bezogen. Mit dieser Schaltungstechnik ist die Gewinnung des phasenrichtigen Signals mit der Frequenz 38 kHz ohne großen Aufwand möglich, und die nicht benötigten Oberschwingungen ( $k = 4, 6, \dots$ ), die u.U. Störungen verursachen könnten, nehmen in ihrer Amplitude durch den Faktor  $(k^2 - 1)$  im Nenner relativ stark ab und lassen sich deshalb auf einfache Weise unterdrücken. Die Frequenz 76 kHz tritt nicht auf (Symmetriebedingung), erst 104 kHz ist vorhanden, aber wegen  $(k^2 - 1)$  im Nenner mit kleiner Amplitude.

- **Beispiel III.5:** Für den Spannungsverlauf nach Bild III-2 wird die komplexe Fourierreihe aufgestellt. Nach der Ableitung der reellen Fourierkoeffizienten folgt der Vergleich mit dem Ergebnis aus Beispiel III.1.

Für  $a = 1/2$  folgt mit Gleichung (III.6):

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{T} \int_0^{T/2} U_0 \cdot e^{-jk\omega t} \, dt = \frac{U_0}{T} \cdot \frac{e^{-jk\omega t}}{-jk\omega} \Big|_0^{T/2} \\ &= \frac{U_0 T}{-Tjk2\pi} \left( e^{-jk \frac{2\pi T}{2}} - 1 \right) = \frac{U_0}{-jk2\pi} (e^{-jk\pi} - 1) \end{aligned}$$

Mit  $e^{-jk\pi} = (-1)^k$  erhält man die komplexe Fourierreihe:

$$C_k = \frac{U_0}{jk\pi} \quad \text{für } k = 1, 3, 5, \dots \Rightarrow s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{U_0}{jk\pi} \cdot e^{jk\omega t}$$

Mit Gleichung (III.9) lassen sich  $a_k$  und  $b_k$  der reellen Fourierreihe bestimmen.

$a_k = 0$ , da  $C_k$  imaginär.

$$C_k = \frac{U_0}{jk\pi} = -j \frac{U_0}{k\pi}; \Rightarrow b_k = -2 \cdot \text{Im}(C_k) = \frac{2U_0}{k\pi}$$

für  $k = 1, 3, 5, \dots$

Das Ergebnis ist in Übereinstimmung mit Gleichung (III.11).

**Tabelle III-1** Strom-Maximalwerte der Harmonischen im 50-Hz-Stromversorgungsnetz bei Stromverläufen nach Bild III-3 (Auszug)

| Nummer der Harmonischen | 3    | 5    | 7    | 9    | 11   | 13   | 15   | ... | 25    | ... |
|-------------------------|------|------|------|------|------|------|------|-----|-------|-----|
| Max. Stromwert in A     | 2,30 | 1,14 | 0,77 | 0,40 | 0,30 | 0,21 | 0,15 |     | 0,090 |     |

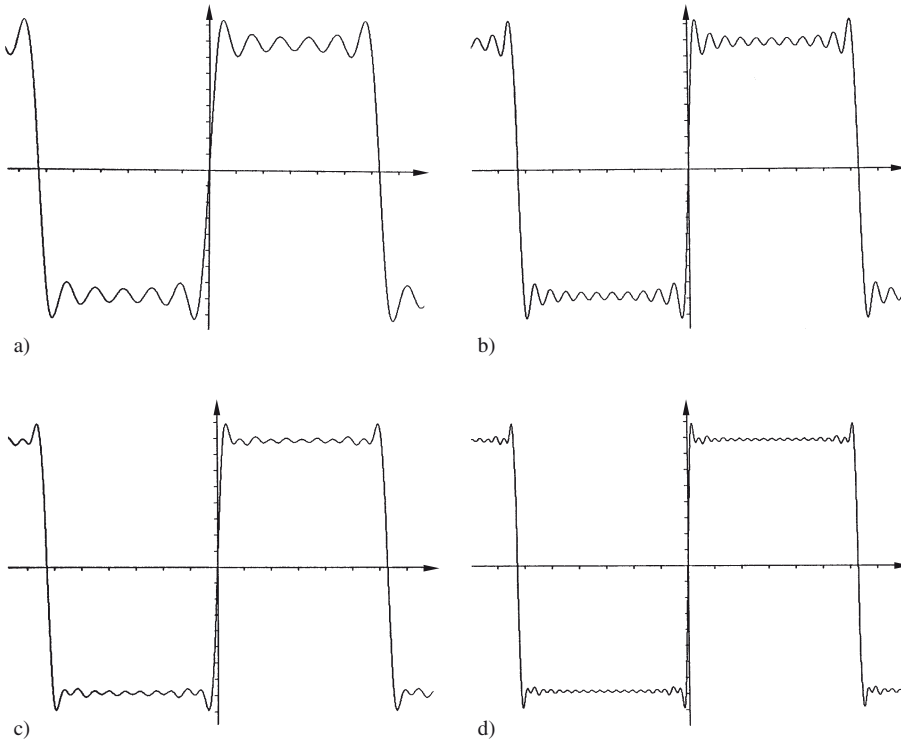


**Bild III-4** Idealer Rechteckverlauf mit Frequenz  $f$  nach Passieren eines idealen (a, b) bzw. realen (c, d) Tiefpasses mit der Grenzfrequenz  $f_g$

- a)  $f_g = 11f$ ;
- b)  $f_g = 21f$ ;
- c)  $f_g = 11f$ , bis  $21f$  Abfall mit 20 dB/Dekade
- d)  $f_g = 21f$ , bis  $41f$  Abfall mit 20 dB/Dekade

Probleme kann es, wie hier, bei der Bestimmung von  $\mathcal{L}_0$  geben. Es ist sinnvoll, in der Berechnungsformel für  $\mathcal{L}_k$  (Gleichung (III.6)) im Exponenten der e-Funktion  $k = 0$  zu setzen. Dann geht das Integral in die eindeutig lösbare Form nach Gleichung (III.2 a) über, und damit stimmt der Gleichanteil aus der reellen Fourierreihe mit dem aus der komplexen überein.

■ **Beispiel III.6:** Um ein Maß für die Signalverzerrungen eines Verstärkers zu erhalten, ist der Begriff des Klirrfaktors eingeführt worden. Im Abschnitt „Nachrichtentechnik“, Kapitel I.4.12.3, sind dazu weitere Einzelheiten dargestellt. Grundlage für das Messverfahren ist das Auftreten von Oberschwingungen, wenn ein sinusförmiges Signal verzerrt wird. Die Amplituden der Oberschwingungen nehmen mit zunehmender Abweichung von der Sinusform, d.h. mit zunehmender Verzerrung, zu und sind damit ein Maß für den Grad der Verzerrung.

## IV Nichtperiodische zeitkontinuierliche Signale

Nichtperiodische Signale haben eine große Bedeutung für die Nachrichten- und Datenübertragung, weil Information nur in nichtdeterministischen Signalen enthalten ist (Abschnitt „Nachrichtentechnik“, Kapitel I.4.1). Aber auch für die Energie- und Regelungstechnik sind sie von Interesse, weil sie entweder Ein- und Ausschaltvorgänge erfassen oder den Übergang von einem momentan stationären Zustand in einen neuen darstellen (Kurzschluss im Energieversorgungsnetz, Auftreten einer Störgröße im Regelsystem). Die Fourier- und die Laplacetransformation können nach den Gleichungen (I.1a) und (I.1b) bei nichtperiodischen zeitkontinuierlichen Signalen eingesetzt werden.

### 1 Fouriertransformation

#### 1.1 Transformationsregeln

Für den Übergang von den periodischen zu den nichtperiodischen (aperiodischen, einmaligen) Signalen wird in Gleichung (III.6)

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_k \cdot e^{jk\omega t},$$

mit

$$\underline{C}_k = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T s(t) \cdot e^{-jk\omega t} dt = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} s(t) \cdot e^{-jk\omega t} dt,$$

der Grenzübergang  $T \rightarrow \infty$  durchgeführt. Mit  $T = 2\pi/\omega$  geht  $\omega$  entsprechend gegen Null, d.h., das diskrete Spektrum  $k\omega$  geht in ein kontinuierliches Spektrum  $\omega$  über. Verkürzt dargestellt folgt damit:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} s(t) \cdot e^{-jk\omega t} dt \right\} \cdot e^{jk\omega t} \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \right\}}_{\underline{\mathcal{S}}(f)} \cdot e^{j\omega t} df \quad (\text{IV.1})$$

Die mit  $\underline{\mathcal{S}}(f)$  bezeichnete Größe ist die *Fouriertransformierte* der Zeitfunktion  $s(t)$ . Sie existiert nur dann,

wenn für das Integral gilt:  $\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)| dt < \infty$ .

Hinweis: In der Literatur wird anstelle von  $\underline{\mathcal{S}}(f)$  auch  $S(f)$  oder  $F(j\omega)$  verwendet. Wird bei der Rücktransformation  $F(j\omega)$  eingesetzt, ist der Faktor  $1/2\pi$  vor das Integral zu schreiben gemäß  $d\omega = 2\pi df$ , siehe Gleichung (IV.2b).

Damit erhält man die folgenden zwei Formeln für die Transformation bzw. Rücktransformation:

- *Fouriertransformation, Rücktransformation:*

$$\underline{\mathcal{S}}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt, \quad (\text{IV.2a})$$

symbolische Schreibweise:  $\underline{\mathcal{S}}(f) \bullet \circ s(t)$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\mathcal{S}}(f) \cdot e^{j2\pi ft} df$$

bzw.

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{IV.2b})$$

symbolische Schreibweise:  $s(t) \circ \bullet \underline{\mathcal{S}}(f)$ .

In der Literatur wird auch  $S(f)$  und  $F(j\omega)$  verwendet, siehe Hinweis oben.

Auch folgende Schreibweise ist üblich:

$$\underline{\mathcal{S}}(f) = \mathbf{F}\{s(t)\}; s(t) = \mathbf{F}^{-1}\{\underline{\mathcal{S}}(f)\}.$$

$\mathbf{F}$  Fouriertransformierte,  $\mathbf{F}^{-1}$  inverse Fouriertransformierte

- *Spektrum, Spektraldichte:* Die Fouriertransformierte  $\underline{\mathcal{S}}(f)$  ist eine Funktion der Frequenz und stellt damit das *Spektrum* (*Spektraldichte*) der Funktion  $s(t)$  dar. Die Fouriertransformierte lässt sich auch folgendermaßen darstellen:

$$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \cdot \sin \omega t \Rightarrow$$

$$\underline{\mathcal{S}}(f) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \cos \omega t dt}_{R(f)} + j \cdot \underbrace{(-1) \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \sin \omega t dt}_{X(f)}$$

$$\underline{\mathcal{S}}(f) = R(f) + jX(f) = |\underline{\mathcal{S}}(f)| \cdot e^{j\varphi(f)} \quad (\text{IV.3})$$

$R$  Realteil,  $X$  Imaginärteil von  $\underline{\mathcal{S}}(f)$

- *Amplitudenspektrum:*  
 $|\underline{\mathcal{S}}(f)|$  nach Gleichung (IV.3) (IV.4)

- *Phasenspektrum:*  
 $\varphi(f)$  nach Gleichung (IV.3) (IV.5)

Es gilt:

$$|\underline{\mathcal{S}}(f)| = \sqrt{\{R(f)\}^2 + \{X(f)\}^2};$$

$$\varphi(f) = \arctan \frac{X(f)}{R(f)} \quad (\text{IV.6})$$

$R(f)$  Realteil,  $X(f)$  Imaginärteil von  $\underline{\mathcal{S}}(f)$

#### 1.2 Eigenschaften

Es folgen einige wichtige Eigenschaften der Fouriertransformation.

1. Multiplikation mit einer Konstanten  $k$ :  
 $k \cdot s(t) \circ \bullet k \cdot \underline{\mathcal{S}}(f)$  (IV.7)

2. Addition zweier Funktionen:  
 $s_1(t) + s_2(t) \circ \bullet \underline{\mathcal{S}}_1(f) + \underline{\mathcal{S}}_2(f)$  (IV.8)

3. Zeitverschiebung:  
 $s(t) \circ \bullet \underline{\mathcal{S}}(f) \Rightarrow s(t - t_0) \circ \bullet \underline{\mathcal{S}}(f) \cdot e^{-j\omega t_0}$  (IV.9)

4. Frequenzverschiebung:  
 $\underline{\mathcal{S}}(f) \bullet \circ s(t) \Rightarrow \underline{\mathcal{S}}(f - f_0) \bullet \circ s(t) \cdot e^{j\omega_0 t}$  (IV.10)

**Tabelle IV-1** Korrespondenzen zur Fouriertransformation

| $s(t)$                                                                                                       | $\underline{S}(f)$                                                                                                         |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\delta(t)$ : Stoßfunktion, $\delta$ -Funktion, Dirac-Impuls                                                 | 1                                                                                                                          |
| 1                                                                                                            | $\delta(f)$ Dirac-Impuls                                                                                                   |
| $\sigma(t)$ : Sprungfunktion                                                                                 | $\frac{1}{2} \cdot \delta(f) + \frac{1}{j2\pi \cdot f}$                                                                    |
| $\sin \omega_0 t$                                                                                            | $\frac{1}{2j} (\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0))$                                                                         |
| $\cos \omega_0 t$                                                                                            | $\frac{1}{2} \cdot (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$                                                                    |
| $\sigma(t) \cdot \sin \omega_0 t$                                                                            | $\frac{f_0 \cdot 2\pi}{(2\pi \cdot f_0)^2 - (2\pi \cdot f)^2} + \frac{1}{4j} \cdot (\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0))$    |
| $\sigma(t) \cdot \cos \omega_0 t$                                                                            | $\frac{jf \cdot 2\pi}{(2\pi \cdot f_0)^2 - (2\pi \cdot f)^2} + \frac{1}{4} \cdot (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$      |
| $\sigma(t) \cdot e^{-t/T} \cdot \sin \omega_0 t$                                                             | $T \cdot \frac{2\pi \cdot f_0 \cdot T}{(j2\pi \cdot f \cdot T + 1)^2 + (2\pi \cdot f_0 \cdot T)^2}$<br>Re ( $T$ ) > 0*)    |
| $\sigma(t) \cdot e^{-t/T} \cdot \cos \omega_0 t$                                                             | $T \cdot \frac{j2\pi \cdot f \cdot T + 1}{(j2\pi \cdot f \cdot T + 1)^2 + (2\pi \cdot f_0 \cdot T)^2}$<br>Re ( $T$ ) > 0*) |
| $s(t) = 1$ für $-T < t < T$<br>$s(t) = 0$ für $t < -T, t > T$ Rechteckimpuls                                 | $2 \cdot \frac{\sin(2\pi \cdot f \cdot T)}{2\pi \cdot f}$                                                                  |
| $s(t) = 1 - \frac{ t }{T};  t  < T$<br>$s(t) = 0;  t  > T$ Dreieckimpuls                                     | $\frac{4}{T} \cdot \left\{ \frac{\sin(\pi \cdot f \cdot T)}{2\pi \cdot f} \right\}^2$                                      |
| $s(t) = \cos^2\left(\frac{\pi \cdot t}{2 \cdot T}\right);  t  < T$<br>$s(t) = 0;  t  > T$ $\cos^2 x$ -Impuls | $\frac{\sin 2\pi \cdot f \cdot T}{2\pi \cdot f} \cdot \frac{1}{1 - (2 \cdot f \cdot T)^2}$                                 |
| $s(t) = e^{-t/T}; t > 0$<br>$s(t) = 0; t < 0$ Exponentialimpuls                                              | $\frac{T}{1 + j2\pi \cdot f \cdot T}, \text{ Re } (T) > 0^*)$                                                              |

\*) Re: Realteil

## 5. Faltung im Zeitbereich:

$$\underline{s}_1(f) \cdot \underline{s}_2(f) \bullet \circ s_1(t) * s_2(t) \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) \cdot s_2(t-\tau) d\tau \quad (IV.11)$$

\* Zeichen für die Operation „Faltung“

## 6. Faltung im Frequenzbereich:

$$s_1(t) \cdot s_2(t) \circ \bullet \underline{s}_1(f) * \underline{s}_2(f) \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{s}_1(v) \cdot \underline{s}_2(f-v) dv \quad (IV.12)$$

\* Zeichen für die Operation „Faltung“

## 7. Integration im Zeitbereich:

$$\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \circ \bullet \frac{\underline{s}(f)}{j2\pi \cdot f} \quad (IV.13)$$

## 8. Differentiation im Zeitbereich:

$$\frac{ds(t)}{dt} \circ \bullet (j2\pi \cdot f) \cdot \underline{s}(f) \quad (IV.14)$$

In den Gleichungen (IV.13) und (IV.14) wird die Transformierte  $\underline{s}(f) \bullet \circ s(t)$  verwendet und die Operation Differenzieren durch Multiplikation mit  $(j2\pi \cdot f)$  und die Operation Integrieren durch Multiplikation mit  $1/(j2\pi \cdot f)$  erfasst.

## • Parsevalsche Gleichung:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\underline{s}(f)|^2 df \quad (IV.15)$$

Mit  $s(t) = u(t)$  bzw.  $s(t) = i(t)$  steht unter dem Integral, bis auf einen Proportionalitätsfaktor, der Momentanwert der Leistung. Der Proportionalitätsfaktor ist in diesem Fall der Widerstand  $R$ :  $p = \{i(t)\}^2 \cdot R = \{u(t)\}^2 / R$ . Über den gesamten Zeitbereich integriert ergibt sich die im Signal-

verlauf enthaltene Energie (Faktor  $R$  bzw.  $1/R$  eingesetzt, s.o.). Den gleichen Wert erhält man, wenn man die Leistungsbilanz über die im Signal enthaltenen Frequenzanteile bildet.

## 1.3 Korrespondenztabelle

Tabelle IV-1 listet einige Korrespondenzen zur Fouriertransformation auf.

In Tabelle IV-2 sind die Impulsantworten von einem idealen Tiefpass, einem idealen Hochpass und einem idealen Bandpass dargestellt. Für  $\underline{s}(f)$  wird ein linearer Phasenverlauf vorausgesetzt. Die Sprungantworten von Tief-, Hoch- und Bandpass beginnen bereits bei  $t \rightarrow -\infty$ , obwohl erst bei  $t=0$  ein Signal am Eingang anliegt. Das System heißt deshalb *nichtkausal*. Es ist technisch nicht realisierbar, weil es im Widerspruch zur physikalischen Wirklichkeit steht. Trotzdem ermöglicht die Auswertung dieses Verhaltens Rückschlüsse auf die realen Eigenschaften des Systems auch bei anderen Eingangssignalen.

- *Unschärferelation*: Multipliziert man die Impulsbreite  $T$  eines einmaligen Impulses mit dem Frequenzabstand  $\Delta f$  zweier benachbarter Nulldurchgänge der Spektralfunktion bei  $f=0$  (Bild IV-1), so gilt die Unschärferelation:

$$\Delta f \cdot T \geq \frac{1}{2\pi} \quad (IV.16)$$

Daraus lässt sich folgendes ableiten: 1. Wird bei unveränderter Impulsform nur die Impulsbreite  $T$  verkleinert, rücken die Nulldurchgänge der Spektralfunktion weiter auseinander, und damit nehmen die Amplituden zu. 2. Der optimale Wert ergibt sich zu  $\Delta f \cdot T = 1/2\pi$ , d.h. bei gegebener Impulsbreite sind

**Tabelle IV-2** Beispiele zur Fouriertransformation: Impulsantwort von idealem Tiefpass, Hochpass und Bandpass

| Impulsantwort                                                                                                                                                                                       | $\underline{s}(f)$                                                                                                                                                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $2U_0 \cdot f_g \cdot \frac{\sin 2\pi \cdot f_g \cdot (t-t_0)}{2\pi \cdot f_g \cdot (t-t_0)}$ $= 2U_0 \cdot f_g \cdot \text{si}(2\pi \cdot f_g \cdot \{t-t_0\})^{*)}$                               | $\underline{s}(f) = U_0 \cdot e^{-j2\pi f t_0}; \quad  f  < f_g$ $\underline{s}(f) = 0; \quad  f  > f_g$ <p>Idealer Tiefpass, Grenzfrequenz <math>f_g</math></p>                                                                     |
| $\delta(t-t_0) - 2U_0 \cdot f_g \cdot \frac{\sin 2\pi \cdot f_g \cdot (t-t_0)}{2\pi \cdot f_g \cdot (t-t_0)}$ $= \delta(t-t_0) - 2U_0 \cdot f_g \cdot \text{si}(2\pi \cdot f_g \cdot (t-t_0))^{*)}$ | $\underline{s}(f) = U_0 \cdot e^{-j2\pi f t_0}; \quad  f  > f_g$ $\underline{s}(f) = 0; \quad  f  < f_g$ <p>Idealer Hochpass, Grenzfrequenz <math>f_g</math></p>                                                                     |
| $\frac{2U_0}{\pi \cdot (t-t_0)} \cdot \sin \{ \pi \cdot (f_{g2} - f_{g1}) \cdot (t-t_0) \}$ $\times [ \cos \{ \pi \cdot (f_{g2} + f_{g1}) \cdot (t-t_0) \} ]$                                       | $\underline{s}(f) = U_0 \cdot e^{-j2\pi f t_0}; \quad f_{g1} < f < f_{g2}$ $-f_{g2} < -f < -f_{g1}$ <p><math>\underline{s}(f) = 0</math> im übrigen Bereich</p> <p>Idealer Bandpass, Grenzfrequenzen <math>f_{g1}, f_{g2}</math></p> |

\*) In der Literatur häufig benutzte Definition:  $\text{si}(x) = \sin(x)/x$

die Amplituden des Spektrums am kleinsten. Das wird erreicht mit dem Gaußschen Glockenimpuls:

$$s(t) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-k^2 \cdot t^2} \quad (\text{IV.17})$$

In Bild IV-1 ist  $\Delta f$  eingezeichnet. Die zugehörige Impulsbreite  $T$  kann Bild IV-7 entnommen werden. Siehe dazu auch die beiden folgenden Beispiele IV.1 und IV.2.

## 1.4 Beispiele

- **Beispiel IV.1:** Berechnet werden soll das Amplitudenspektrum  $|\underline{S}(f)|$  und das Phasenspektrum  $\varphi(f)$  für einen Rechteckimpuls mit der Amplitude  $U$  und der Dauer  $T$ . Mit Gleichung (IV.2 a) folgt:

$$\begin{aligned} \underline{S}(f) &= \int_0^T U \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{U}{j\omega} \cdot (1 - e^{-j\omega T}) \\ &= U \cdot \frac{1 - \cos(\omega \cdot T) + j \sin(\omega \cdot T)}{j\omega} \\ &= U \cdot \frac{j \cdot [-1 + \cos(\omega \cdot T)] + \sin(\omega \cdot T)}{\omega} \\ \Rightarrow |\underline{S}(f)| &= \frac{U}{|\omega|} \cdot \sqrt{2 \cdot (1 - \cos(\omega \cdot T))} \quad (\text{IV.18}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi(f) = \arctan \frac{\cos(\omega \cdot T) - 1}{\sin(\omega \cdot T)} \quad (\text{IV.19})$$

- **Beispiel IV.2:** Gesucht ist das Amplitudenspektrum des Impulses  $U \cdot \sin^2(\omega \cdot T)$ . Mit  $\sin^2(\omega \cdot T) = 0,5 \cdot (1 - \cos(2 \cdot \omega \cdot T))$  folgt:

$$\begin{aligned} \underline{S}(f) &= U \cdot \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{+T/2} \{1 - \cos(2\omega \cdot T)\} \cdot e^{-j\omega \cdot t} dt \\ &= \frac{U}{2} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-j\omega \cdot t} dt - \frac{U}{2} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} \frac{e^{j2\omega T} + e^{-j2\omega \cdot t}}{2} \cdot e^{-j\omega \cdot t} dt \\ &= \frac{U}{\omega} \cdot \frac{e^{j\omega \cdot T/2} - e^{-j\omega \cdot T/2}}{2j} - \frac{U}{2} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} \frac{e^{j\omega \cdot t}}{2} dt \\ &\quad - \frac{U}{2} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} \frac{e^{-j\omega \cdot 3 \cdot t}}{2} dt \\ &= \frac{U}{\omega} \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) - \frac{U}{2\omega} \cdot \frac{e^{j\omega \cdot T/2} - e^{-j\omega \cdot T/2}}{2j} \\ &\quad - \frac{U}{6\omega} \cdot \frac{e^{j3\omega \cdot T/2} - e^{-j3\omega \cdot T/2}}{2j} \\ &= \frac{U}{\omega} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) - \frac{1}{6} \cdot \sin\left(\frac{3\omega \cdot T}{2}\right) \right\} \quad (\text{IV.20}) \end{aligned}$$

In Bild IV-1 sind  $|\underline{S}(f)|$  aus Beispiel IV.1 und IV.2 gleichzeitig dargestellt. Die Amplituden des Spektrums eines  $\sin^2 \omega \cdot T$ -Impulses sind deutlich geringer als die eines Rechteckimpulses der Dauer  $T$ . Besteht bei der gleichzeitigen Übertragung mehrerer digital kodierter Signale die Gefahr der gegenseitigen Beeinflussung, ist der  $\sin^2 \omega \cdot T$ -Impuls vorteilhafter. Im Beispiel IV.7, Kapitel 2.6, Beispiele zur Laplacetransformation, wird gezeigt, wie ein Rechteck- und ein  $\sin^2 \omega \cdot T$ -Impuls durch einen Tiefpass im zeitlichen Verlauf geändert werden und in wieweit eine fehlerfreie Signalerkennung noch möglich ist.

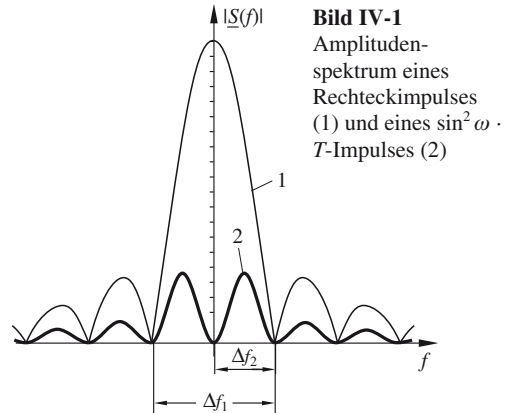


**Bild IV-1**

Amplitudenspektrum eines Rechteckimpulses (1) und eines  $\sin^2 \omega \cdot T$ -Impulses (2)

## 2 Laplacetransformation

### 2.1 Einführung

Bei der Anwendung der Laplacetransformation treten die bei der Fouriertransformation angesprochenen Probleme mit der Kausalität nicht auf, was im wesentlichen daran liegt, dass gilt:

$$s(t) \equiv 0 \quad \text{für} \quad t \leq 0_- \quad (\text{IV.21})$$

$0_-$  linksseitiger Grenzwert von  $s(t)$ , siehe Erläuterung weiter unten

Sie ist damit für die Berechnung der in der Praxis auftretenden Vorgänge besonders geeignet.

- **Verwendete Bezeichnungen:**

Variable:  $s$  (in der Literatur wird auch  $p$  benutzt).

Funktion in der Zeitebene: allgemein  $f(t)$ ; speziell  $u(t)$ ,  $i(t)$ .

Transformierte in der  $s$ - oder Bildebene: allgemein

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ; speziell  $\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s)$ ;

$\mathcal{L}\{i(t)\} = I(s)$ .

Symbolische Schreibweise:  $f(t) \circ \bullet F(s)$ .

Rücktransformation aus der  $s$ - in die  $t$ -Ebene:

$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ .

$\mathcal{L}$  Laplacetransformierte,  $\mathcal{L}^{-1}$  inverse Laplacetransformierte

Hier wird bewusst  $f(t)$  anstatt  $s(t)$  verwendet, um Verwechslungen mit der Variablen  $s$  zu vermeiden.

Für die Variable  $s$  gilt:  $s = \alpha + j\omega$ ;  $\alpha > 0$ . Der Realteil wurde eingeführt, um einen endlichen Wert für die Transformationsintegrale zu erhalten (Gleichungen IV.22, 23 a). Damit können für  $f(t)$  die in der Praxis vorkommenden Funktionen eingesetzt werden. Auch der Dirac-Impuls  $\delta(t)$  und die Sprungfunktion  $\sigma(t)$  besitzen eine Laplacetransformierte und lassen sich, obwohl es sich um physikalisch nicht realisierbare Vorgänge handelt, erfolgreich als Näherungslösungen bei der Systemanalyse oder bei Schaltvorgängen einsetzen. Die Einheit von  $s$  ist  $1/s$ .

### 2.2 Transformation

Die Transformation bzw. Rücktransformation erfolgt durch das Lösen der folgenden Integrale:



- *Transformation in die Bildebene:*

$$F(s) = \int_{0_+}^{\infty} f(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt \quad (\text{IV.22})$$

Integrationsgrenze  $0_+$  siehe „Linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert“ (weiter unten)

- *Rücktransformation in die Zeitebene:*

$$f(t) = \frac{1}{2j\pi} \cdot \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} F(s) \cdot e^{s \cdot t} ds \quad (\text{IV.23 a})$$

Die Integrationsgrenze  $0_+$  kennzeichnet den rechtsseitigen Grenzwert der Funktion  $f(t)$  für  $t = 0$ . Das Integral (IV.23a) wird zweckmäßigerweise über eine Partialbruchzerlegung und die Anwendung des Residuensatzes gelöst. Dazu zerlegt man die Funktion  $F(s)$  in eine Summe, wobei der Nenner der einzelnen Summanden die Form  $s^k$ ,  $(s \pm a_i)^m$  oder  $(s^2 \pm b_r^2)^p$ ,  $i, k, m, p, r = 0, 1, 2, \dots$ , hat und  $0, a_i, b_r$  die Nullstellen des Nennerpolynoms sind. Der zum jeweiligen Nennerausdruck gehörende Zählerwert kann mit dem Residuensatz bestimmt werden:

$$\text{Res}_{s=s_0} \{F(s)\} = \frac{1}{(n-1)!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \left[ (s-s_0)^n \cdot F(s) \right] \right\}_{s=s_0}$$

für  $n$ -fache Polstelle (IV.23 b)

Dabei hat  $F(s)$  an der Stelle  $s = s_0$  eine  $n$ -fache Polstelle. Für  $n = 1$  vereinfacht sich Gleichung (IV.23 b) zu:

$$\text{Res}_{s=s_0} \{F(s)\} = (s-s_0) \cdot F(s) \Big|_{s=s_0}$$

für einfache Polstelle (IV.23 c)

Die Rücktransformation geschieht dann auf einfache Weise mit den Korrespondenzen Nr. 5, 8, 16, 17, 24, 25 und 27 in Tabelle IV-3.

- *Linksseitiger ( $t = 0_-$ ) und rechtsseitiger ( $t = 0_+$ ) Grenzwert:* Die untere Grenze des Integrals in Gleichung (IV.22) ist mit  $0_+$  bezeichnet und soll darauf hinweisen, dass für die Funktion  $f(t)$  der rechtsseitige Grenzwert für  $t = 0$  einzusetzen ist. Für die in Bild III-2 dargestellte Rechteckfunktion gilt:  $u(t = 0_-) = 0$ ,  $u(t = 0_+) = U_0$ . Da laut Voraussetzung  $f(t < 0) \equiv 0$  ist, ergibt sich der linksseitige Grenzwert zu

$$f(t = 0_-) \equiv 0 \quad (\text{IV.24})$$

Tabelle IV-3 enthält häufig benötigte Transformationen und kann sowohl für die Transformation in die  $s$ -Ebene als auch für die Rücktransformation in die Zeitebene benutzt werden. Für die Funktion  $f(t)$  gilt:  $f(t) = f(t \geq 0_+)$ ,  $f(t \leq 0_-) \equiv 0$ . In der Literatur wird manchmal eine alternative Schreibweise gewählt, indem  $f(t)$  mit einer Sprungfunktion  $\sigma(t)$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  multipliziert wird. Es sei darauf hingewiesen, dass einige Transformationen aufgenommen wurden, deren Darstellung in der Zeitebene nur für einen begrenzten Zeitbereich möglich ist (Transformationen Nr. 4, 5, 12, 14, 17, 25, 27 mit der Eigenschaft:  $f(t) \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow \infty$ ). Als Beispiel dient ein elektronischer Integrierer mit Operationsverstärker, der nur bis zum Erreichen der Betriebsspannung die Übertragungsfunktion  $1/s$  hat.

Durch die Anwendung der Laplacetransformation wird eine Differentialgleichung auf eine algebraische Gleichung zurückgeführt.

**Tabelle IV-3** Korrespondenzen zur Laplacetransformation

| Nr. | $F(s)$                                       | $f(t \geq 0_+)$<br>Hinweis: $f(t \leq 0_-) \equiv 0$         |
|-----|----------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| 1   | 1                                            | $\delta(t)$ : Stoßfunktion, $\delta$ -Funktion, Dirac-Impuls |
| 2   | $e^{-a \cdot s} \quad a > 0$                 | $\delta(t - a)$                                              |
| 3   | $\frac{1}{s}$                                | 1, d.h. Sprungfunktion $\sigma(t)$                           |
| 4   | $\frac{1}{s^2}$                              | $t$                                                          |
| 5   | $\frac{1}{s^{n+1}} \quad n = 0, 1, 2, \dots$ | $\frac{t^n}{n!}$                                             |
| 6   | $\frac{1}{s + a}$                            | $e^{-at}$                                                    |
| 7   | $\frac{1}{(s + a)^2}$                        | $t \cdot e^{-at}$                                            |

Tabelle IV-3 Fortsetzung

| Nr. | $F(s)$                                                       | $f(t \geq 0_+)$<br>Hinweis: $f(t \leq 0_-) \equiv 0$                                                                             |
|-----|--------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 8   | $\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$                                      | $\frac{t^n}{n!} \cdot e^{-at}$                                                                                                   |
| 9   | $\frac{1}{(s+a)(s+b)} \quad a \neq b$                        | $\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$                                                                                              |
| 10  | $\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)} \quad a \neq b \neq c$            | $\frac{e^{-a \cdot t}}{(b-a) \cdot (c-a)} + \frac{e^{-b \cdot t}}{(a-b) \cdot (c-b)} + \frac{e^{-c \cdot t}}{(a-c) \cdot (b-c)}$ |
| 11  | $\frac{1}{s(s+a)}$                                           | $\frac{1}{a} \cdot (1 - e^{-at})$                                                                                                |
| 12  | $\frac{1}{s^2(s+a)}$                                         | $\frac{1}{a^2} \cdot (e^{-a \cdot t} + a \cdot t - 1)$                                                                           |
| 13  | $\frac{1}{s(s+a)^2}$                                         | $\frac{1 - e^{-at} - a \cdot t \cdot e^{-at}}{a^2}$                                                                              |
| 14  | $\frac{1}{s^2(s+a)^2}$                                       | $\frac{t}{a^2} - \frac{2}{a^3} + \frac{t \cdot e^{-a \cdot t}}{a^2} + \frac{2 \cdot e^{-a \cdot t}}{a^3}$                        |
| 15  | $\frac{1}{s(s+a)(s+b)} \quad a \neq b$                       | $\frac{1}{ab} + \frac{b \cdot e^{-at} - a \cdot e^{-bt}}{a \cdot b(a-b)}$                                                        |
| 16  | $\frac{1}{s^2 + a^2}$                                        | $\frac{\sin a \cdot t}{a}$                                                                                                       |
| 17  | $\frac{1}{s^2 - a^2}$                                        | $\frac{\sinh a \cdot t}{a}$                                                                                                      |
| 18  | $\frac{1}{s \cdot (s^2 + a^2)}$                              | $\frac{1 - \cos a \cdot t}{a^2}$                                                                                                 |
| 19  | $\frac{1}{(s+a) \cdot (s^2 + b^2)}$                          | $\frac{1}{a^2 + b^2} \left[ e^{-at} + \frac{a}{b} \cdot \sin b \cdot t - \cos b \cdot t \right]$                                 |
| 20  | $\frac{1}{(s^2 + a^2) \cdot (s^2 + b^2)} \quad a \neq b$     | $\frac{1}{b^2 - a^2} \left[ \frac{\sin a \cdot t}{a} - \frac{\sin b \cdot t}{b} \right]$                                         |
| 21  | $\frac{1}{(s+a)^2 + b^2}$                                    | $\frac{e^{-a \cdot t} \cdot \sin b \cdot t}{b}$                                                                                  |
| 22  | $\frac{1}{(s+a)(s+b)^2} \quad a \neq b$                      | $\frac{e^{-a \cdot t}}{(a-b)^2} + \frac{(a-b) \cdot t - 1}{(a-b)^2} \cdot e^{-b \cdot t}$                                        |
| 23  | $U \cdot \frac{e^{-a \cdot s}}{s} \quad U \text{ Konstante}$ | $U(t-a)$                                                                                                                         |
| 24  | $\frac{s}{s^2 + a^2}$                                        | $\cos a \cdot t$                                                                                                                 |

Tabelle IV-3 Fortsetzung

| Nr. | $F(s)$                                                | $f(t \geq 0_+)$<br>Hinweis: $f(t \leq 0_-) \equiv 0$                                                                                                                                    |
|-----|-------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 25  | $\frac{s}{s^2 - a^2}$                                 | $\cosh a \cdot t$                                                                                                                                                                       |
| 26  | $\frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)} \quad a \neq b$     | $\frac{\cos a \cdot t - \cos b \cdot t}{b^2 - a^2}$                                                                                                                                     |
| 27  | $\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}$                             | $\frac{t}{2a} \cdot \sin at$                                                                                                                                                            |
| 28  | $\frac{s + d}{s(s + a)}$                              | $\frac{d - (d - a) \cdot e^{-a \cdot t}}{a}$                                                                                                                                            |
| 29  | $\frac{s + d}{(s + a)(s + b)} \quad a \neq b$         | $\frac{(d - a) \cdot e^{-a \cdot t} - (d - b) \cdot e^{-b \cdot t}}{b - a}$                                                                                                             |
| 30  | $\frac{s + d}{s \cdot (s + a)(s + b)} \quad a \neq b$ | $\frac{d}{a \cdot b} + \frac{(a - d) \cdot e^{-a \cdot t}}{a \cdot (b - a)} + \frac{(b - d) \cdot e^{-b \cdot t}}{b \cdot (a - b)}$                                                     |
| 31  | $\frac{s + d}{(s + a)(s^2 + b^2)}$                    | $\frac{(d - a) \cdot e^{-a \cdot t}}{a^2 + b^2} + \sqrt{\frac{(b^2 + d^2)}{(a^2 \cdot b^2 + b^4)}} \cdot \sin(b \cdot t + \Phi),$<br>$\Phi = \arctan \frac{a}{b} - \arctan \frac{d}{b}$ |
| 32  | $\frac{s}{(s + a) \cdot (s + b)}, \quad a \neq b$     | $\frac{a \cdot e^{-a \cdot t}}{a - b} - \frac{b \cdot e^{-b \cdot t}}{a - b}$                                                                                                           |
| 33  | $\frac{s}{(s + a)^2}$                                 | $(1 - a \cdot t) \cdot e^{-a \cdot t}$                                                                                                                                                  |

### 2.3 Sätze zur Laplacetransformation

Für die Anwendung der Laplacetransformation werden notwendige und nützliche Regeln aufgeführt. Wenn nicht besonders darauf hingewiesen wird, gelten die Gleichheits- und Verknüpfungszeichen in beiden Richtungen.

1. Multiplikation mit einer Konstanten  $K$ :

$$K \cdot f(t) \circ \bullet K \cdot F(s) \quad (\text{IV.25})$$

Die Begründung liegt darin, dass in den Transformationsgleichungen (IV.22) und (IV.23 a) die Konstante  $K$  vor das Integralzeichen gesetzt werden kann.

2. Addition zweier Zeitfunktionen:

$$f_1(t) + f_2(t) \circ \bullet F_1(s) + F_2(s)$$

mit

$$F_1(s) = \mathbf{L}\{f_1(t)\}, \quad F_2(s) = \mathbf{L}\{f_2(t)\} \quad (\text{IV.26})$$

In einer Summe können die einzelnen Summanden getrennt transformiert und zur Gesamtsumme

vorzeichenrichtig addiert werden. Das gilt für die Bild- und die Zeitebene und folgt aus der Regel:

$$\int \{f_1(t) + f_2(t)\} dt = \int f_1(t) dt + \int f_2(t) dt$$

3. Transformierte einer in der Zeitebene abgeleiteten Funktion:

$$\mathbf{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$\Rightarrow \mathbf{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = s \cdot \mathbf{L}\{f(t)\} - f(0_+)$$

$$= s \cdot F(s) - f(0_+) \quad (\text{IV.27})$$

Es wird die Laplacetransformierte der *nicht abgeleiteten* Funktion in der Zeitebene gebildet und mit  $s$  multipliziert, d.h. die Multiplikation mit  $s$  kennzeichnet die Differentiation. Die Konstante  $f(0_+)$  wurde hier eingeführt, weil es in der Elektrotechnik Funktionsverläufe gibt, die stetig verlaufen müssen. Da die Laplacetransformation aber die Funktionen  $f(t)$  für  $t \leq 0_-$  zu Null festlegt, muss

ein von Null abweichender Wert, der sich nur stetig ändern kann, auf diese Weise berücksichtigt werden (Bezugsgröße in Gleichung (IV.27) ist die nicht abgeleitete Funktion  $F(s)$ ). Diese Konstante hat eine anschauliche Bedeutung, wie noch gezeigt wird (Gleichung IV.37, IV.39).

4. Transformierte der  $n$ -ten Ableitung in der Zeitebene:

$$\mathbf{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n - s^{n-1} \cdot f(0_+) - s^{n-2} \cdot \left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{0_+} - \dots - \left.\frac{df^{n-1}}{dt^{n-1}}\right|_{0_+} \quad (\text{IV.28})$$

5. Transformierte des Integrals in der Zeitebene

$$\mathbf{L}\{f(t)\} \circ \bullet F(s) \\ \Rightarrow \mathbf{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} \cdot \mathbf{L}\{f(t)\} - \frac{f(0_+)}{s} \quad (\text{IV.29})$$

Die *nicht integrierte* Zeitfunktion wird transformiert und durch  $s$  dividiert. Auch hier muss eine Größe  $f(0_+)$  aus Kontinuitätsgründen (siehe Erläuterungen zu Gleichung IV.27 oben) eingeführt werden. Für  $f(0_+)/s$  folgt noch eine anschauliche Interpretation (Gleichungen (IV.37) und (IV.39)).

6. Faltung:

$$F_1(s) \cdot F_2(s) = \mathbf{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \mathbf{L}\left\{\int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau\right\} \quad (\text{IV.30})$$

\* Faltung

Diese Regel kann nützlich sein, wenn die Rücktransformation von  $F(s)$  schwierig oder aufwendig ist, die Zerlegung in ein Produkt  $F_1(s) \cdot F_2(s)$  aber möglich ist und deren Rücktransformierten  $f_1(t)$  und  $f_2(t)$  bekannt sind.

7. Differenzieren in der Bildebene:

$$F(s) \bullet \circ f(t) \\ \Rightarrow \frac{dF(s)}{ds} = -\mathbf{L}\{t \cdot f(t)\} \quad (\text{IV.31})$$

Differenzieren in der  $s$ -Ebene entspricht der Multiplikation von  $f(t)$  mit dem Faktor  $-t$ .

8. Integrieren in der Bildebene:

$$F(s) \bullet \circ f(t) \Rightarrow \int F(s) ds = \mathbf{L}\left\{\frac{1}{t} \cdot f(t)\right\} \quad (\text{IV.32})$$

Integrieren in der  $s$ -Ebene ist gleichbedeutend mit der Division von  $f(t)$  durch  $t$ .

9. Dämpfung in der Zeitebene:

$$\mathbf{L}\{f(t)\} = F(s) \\ \Rightarrow \mathbf{L}\{f(t) \cdot e^{-at}\} = F(s+a) \quad (\text{IV.33})$$

10. Zeitliche Verschiebung um  $T_0$ :

$$\mathbf{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$\Rightarrow \mathbf{L}\{f(t-T_0)\} = e^{-T_0 \cdot s} \cdot F(s) \quad (\text{IV.34})$$

Dieser Satz findet Anwendung bei periodischen Funktionen  $f(t)$ , siehe Beispiel IV.8.

11. Endwert:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s) \quad (\text{IV.35})$$

Voraussetzung ist, dass  $s \cdot F(s)$  keine Polstellen im Bereich  $\text{Re}(s) \geq 0$  besitzt, d.h.  $F(s)$  darf bei  $s = 0$  nur eine einfache Polstelle haben. Gilt diese Voraussetzung nicht, ergibt sich bei den aufgeführten Faktoren im Nenner von  $F(s)$  für  $f(t) \rightarrow \infty$  folgendes Verhalten:

- a)  $1/s^k, k = 2, 3, \dots \Rightarrow f(t) \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow \infty$   
(Transformation Nr. 5, Tab. IV-3)).  
b)  $(s^2 + a^2)^k, k = 1 \Rightarrow f(t)$  endlich, oszillierend, sin- bzw. cos-förmiger Verlauf,  
(Transformationen Nr. 16 und 24);  
 $k \geq 2 \Rightarrow f(t) \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow \infty$ .  
c)  $(s^2 - a^2)^k, k = 1, 2, \dots \Rightarrow f(t) \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow \infty$   
(Transformationen Nr. 17 und 25).

12. Anfangswert:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s) \quad (\text{IV.36})$$

## 2.4 Anwendung der Laplace-transformation bei bekanntem $H(s)$

Es wird davon ausgegangen, dass die Ausgangsspannung eines Systems mit der Übertragungsfunktion  $H(s)$  bei einer vorgegebenen Eingangsspannung berechnet werden soll. Die Übertragungsfunktion  $H(s)$  ist bereits bekannt. Dann wird die Eingangsspannung  $u_1(t)$  in die  $s$ -Ebene transformiert, und zwar entweder durch Lösen des Transformationsintegrals Gleichung (IV.22) oder Auswählen des entsprechenden Ausdrucks aus Tabelle IV-3. Über  $U_2(s) = U_1(s) \cdot H(s)$  und Rücktransformation in die Zeitebene erhält man  $u_2(t)$ . Beispiel IV.5 zeigt diesen Weg.

## 2.5 Bestimmung von $H(s)$

Das System enthält die Elemente  $R, L, M$  und  $C$  sowie Spannungs- und Stromquellen. Die Übertragungsfunktion  $H(s)$  lässt sich auf zwei Arten bestimmen:

### 2.5.1 Bestimmung von $H(s)$ mit Differenzialgleichung

Für das System wird die Differenzialgleichung des Verhältnisses  $(u_2/u_1) = f(t)$  in der Zeitebene aufgestellt und mit den Gleichungen (IV.27) und (IV.28) in die  $s$ -Ebene transformiert.

### 2.5.2 Bestimmung von $H(s)$ durch direkte Transformation der Einzelelemente

Die im System enthaltenen Komponenten ( $R_i, L_i, M_i, C_i, u_i$  und  $i_i, i = 1, 2, \dots$ ) werden direkt in die  $s$ -Ebene übertragen und das Verhältnis  $(U_2/U_1) = H(s)$  berechnet. Grundlage dazu sind die Sätze entsprechend den Gleichungen (IV.25) und (IV.26). Daraus folgt, dass

ein Widerstand  $R$  unverändert in die  $s$ -Ebene transformiert wird. Das zeitliche Verhalten eventuell vorhandener Spannungs- und Stromquellen wird über die Transformationsgleichung (IV.22) oder mit Tabelle IV-3 in die  $s$ -Ebene übertragen.

Es muss noch gezeigt werden, wie eine Spule und ein Kondensator in die Bildebene übertragen werden und wie der Strom durch eine Spule zum Zeitpunkt  $t=0$  und die Spannung eines zum Zeitpunkt  $t=0$  aufgeladenen Kondensators erfasst werden. Für gekoppelte Spulen kann im folgenden  $L$  durch  $M$  ersetzt werden.

Die Beziehung  $i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$  wird transformiert:

$$\mathbf{L}\{i_C(t)\} = \mathbf{L}\left\{C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}\right\} = C \cdot \mathbf{L}\left\{\frac{du_C(t)}{dt}\right\}$$

$\Rightarrow I_C(s) = C \cdot s \cdot \mathbf{L}\{u_C\} - C \cdot f(0_+)$ . Dabei wurden die Bezeichnungen nach Kapitel IV.2.1 und die Gleichungen (IV.25) und (IV.27) verwendet. (Hinweis: Kettenregel  $\rightarrow dC/dt = 0$ ). Die Größe  $f(0_+)$  gibt die zum Zeitpunkt  $t=0$  auf dem Kondensator vorhandene Spannung an, die sich nur stetig ändern kann. Damit erhält man die folgende Gleichung:

$$I_C(s) = s \cdot C \cdot U_C(s) - C \cdot u_C(t=0) \quad (\text{IV.37})$$

Beide Seiten werden durch  $s \cdot C$  geteilt und die Gleichung nach  $U_C(s)$  aufgelöst:

$$U_C(s) = I_C(s) \cdot \frac{1}{s \cdot C} + \frac{u_C(t=0)}{s} \quad (\text{IV.38})$$

Diese Gleichung ergibt das in Bild IV-2a dargestellte Ersatzschaltbild eines auf die Spannung  $u_C(t=0)$  aufgeladenen Kondensators in der  $s$ -Ebene. Die Richtung der Spannung  $u_C(t=0)/s$  in der  $s$ -Ebene ist gleich der Richtung der Kondensatorspannung  $u_C(t=0)$  in der Zeitebene. Wichtig ist, dass für den physikalisch realen Kondensator in der Zeitebene die eingezeichneten Anschlüsse 1 und 2 gültig sind und damit die „Gesamtspannung“  $U_C(s) \bullet \circ u_C(t)$  nach Gleichung (IV.38) maßgebend ist. Die Unterteilung von  $U_C(s)$  in die zwei Summanden  $I_C(s) \cdot \frac{1}{s \cdot C}$  und  $\frac{u_C(t=0)}{s}$  ergibt sich zunächst rein formal aus

Gleichung (IV.37), erleichtert aber die Berechnung, weil beide Größen eine anschauliche Interpretation zulassen. Wie wichtig es ist, dass der physikalisch reale Kondensator in der Zeitebene die besagten Anschlüsse 1 und 2 hat und die zwei Einzelgrößen nur „formale“ (aber praktische) Größen in der  $s$ -Ebene sind, sieht man an folgendem Beispiel: Die Spannung  $u_C(t=0)/s$  eines aufgeladenen Kondensators in der  $s$ -Ebene bleibt für den Zeitbereich  $0_+ \leq t < \infty$  unverändert. Wird ein aufgeladener Kondensator über einen Widerstand entladen, geht die Spannung am Kondensator für  $t \rightarrow \infty$  aber gegen

Null. Rechnet man  $U_C(s)$  nach Gleichung (IV.38) zwischen den Anschlüssen 1 und 2 aus,

$$U_C(s) = -\frac{u_C(t=0)}{s} \cdot \frac{1}{s \cdot C} \cdot \frac{1}{R + 1/s \cdot C} + \frac{u_C(t=0)}{s},$$

und transformiert in die Zeitebene zurück, erhält man die korrekte Lösung  $u_C(t) = u_C(t=0) \cdot e^{-t/RC}$ . Anschaulich kann das in der  $s$ -Ebene so erklärt werden, dass sich der Kondensator über den externen (Entlade-)Widerstand auf  $-u_C(t=0)$  auflädt, sodass die von außen über die Anschlüsse 1 und 2 gemessene Summenspannung am physikalisch realen Kondensator für  $t \rightarrow \infty$  tatsächlich gegen Null geht. Auch der Strom durch den Widerstand geht rechnerisch für  $t \rightarrow \infty$  gegen Null, was in der  $s$ -Ebene anschaulich daraus folgt, dass die Differenz der zwei Spannungen, die an den Anschlüssen 1 und 2 gemessen wird und die den Strom durch den Widerstand verursacht, ebenfalls für  $t \rightarrow \infty$  gegen Null geht.

Wird Gleichung (IV.37) in folgender Weise umgeformt,

$$\frac{U_C(s)}{\{1/s \cdot C\}} = I_C(s) + C \cdot u_C(t=0),$$

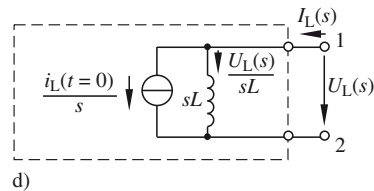
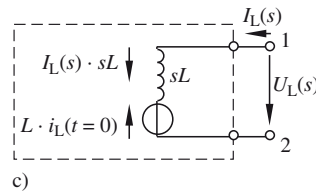
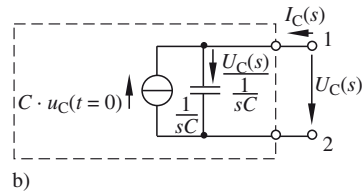
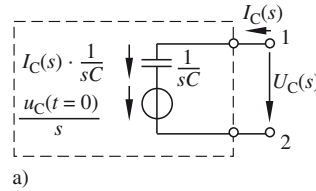


**Bild IV-2** Ersatzschaltbild von Kondensator (a, b) und Spule (c, d) in der  $s$ -Ebene mit Spannungsquelle (a, c) oder Stromquelle (b, d)

ergibt sich die in Bild IV-2b gezeigte zweite Möglichkeit für das Ersatzschaltbild eines zum Zeitpunkt  $t = 0$  aufgeladenen Kondensators in der  $s$ -Ebene. Für den physikalisch realen Kondensator in der Zeitebene sind wiederum die Anschlüsse 1 und 2 maßgebend, d.h. die zwei Teilströme sind lediglich Hilfsgrößen in der  $s$ -Ebene, die aber anschaulich interpretiert werden können (siehe Ausführungen im vorigen Absatz).

In gleicher Weise erhält man das Ersatzschaltbild einer Spule in der  $s$ -Ebene mit einem zum Zeitpunkt  $t = 0$  fließenden Strom. Die Differenzialgleichung für die Spule

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$$

wird transformiert

$$\mathbf{L}\{u_L(t)\} = \mathbf{L}\left\{L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}\right\} = L \cdot \mathbf{L}\left\{\frac{di_L(t)}{dt}\right\}$$

$$\Rightarrow U_L(s) = L \cdot s \cdot \mathbf{L}\{i_L\} - L \cdot f(0_+)$$

$$U_L(s) = L \cdot s \cdot I_L(s) - L \cdot f(0_+)$$

Der Ausdruck  $f(0_+)$  stellt den zum Zeitpunkt  $t = 0$  durch die Spule fließenden Strom dar. Auch diese Größe muss bei der Transformation der Differenzialgleichung in die  $s$ -Ebene berücksichtigt werden, weil der Strom durch eine Spule nur stetig verlaufen kann. Damit ergibt sich:

$$U_L(s) = L \cdot s \cdot I_L(s) - L \cdot i_L(t=0) \quad (\text{IV.39})$$

Die Auswertung dieser Gleichung führt zum Ersatzschaltbild einer zum Zeitpunkt  $t = 0$  stromdurchflossenen Spule in der  $s$ -Ebene nach Bild IV-2c. Die Polarität der Spannung  $L \cdot i_L(t=0)$  in der  $s$ -Ebene und die Stromflussrichtung von  $i_L(t=0)$  im Zeitbereich sind entgegengesetzt, weil die Spule einen (mathematisch) stetigen Stromfluss erzeugen muss und damit zum Generator wird. Die erforderliche Energie ist im Magnetfeld enthalten. Wird Gleichung (IV.39) umgeformt, erhält man die zweite Möglichkeit eines Ersatzschaltbildes einer zum Zeitpunkt  $t = 0$  stromdurchflossenen Spule, Bild IV-2d.

$$I_L(s) = \frac{U_L(s)}{s \cdot L} + \frac{i_L(t=0)}{s} \quad (\text{IV.40})$$

Auch für die Spule gelten die Ausführungen zu den Anschlüssen 1 und 2 des physikalisch realen Kondensators sinngemäß.

- Hinweise zur Anwendung:

Für die Anwendung der Laplacetransformation nach diesem Verfahren sollen noch einige Hinweise gegeben werden.

1. Die Berechnung der Übertragungsfunktion geschieht mit den gleichen Regeln, mit denen Netzberechnungen durchgeführt werden (Ohmsches Gesetz, Kirchhoffsche Regeln 1 und 2, Spannungsteiler, Überlagerungssatz, ...).

2. Die Einheit der „Spannung“ in der  $s$ -Ebene ist  $V \cdot s$ , die des „Stromes“  $A \cdot s$ .
3. Hat ein zurückzutransformierender Ausdruck in der  $s$ -Ebene die Eigenschaft „Zählergrad = Nennergrad“, kann sich in der Zeitebene ein Dirac-Impuls ergeben. Es sollte geklärt werden, inwieweit diese Lösung realistisch ist. Es kann auch sein, dass sich der Ausdruck durch algebraische Umformung in die Form Zählergrad < Nennergrad umwandeln lässt (Hinweis darauf: Minuszeichen bei einem Summanden).
4. Bei der Berechnung einer Schaltung sollte beachtet werden, dass für die Rücktransformation eine Nennerdarstellung der Art

$$\frac{1}{s \cdot s \dots (s+a) \cdot (s+b) \dots (s^2 + a^2) \dots}$$

erforderlich ist. Deshalb empfiehlt es sich in der Regel, Klammern *nicht* auszumultiplizieren.

## 2.6 Beispiele

Um die Anwendung der Laplacetransformation zu zeigen, folgen einige Beispiele. Dabei wird durchgehend der im Kapitel IV.2.5.2 aufgezeigte Lösungsweg verwendet. Bei der Berechnung werden elemen-

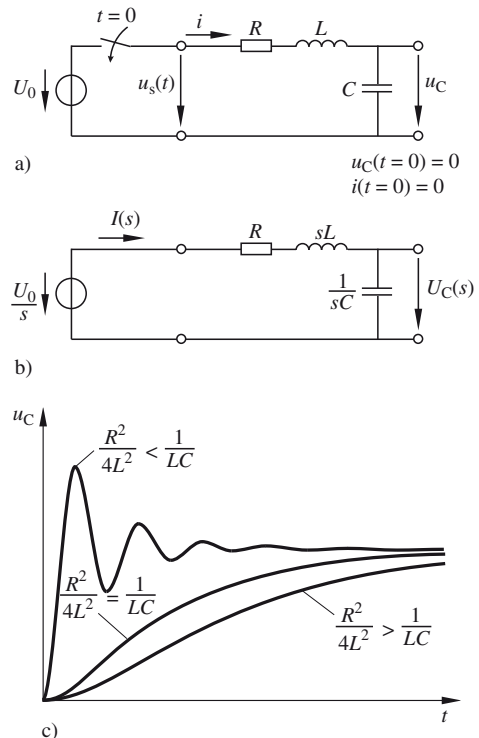


**Bild IV-3** Schaltung zu Beispiel IV.3

- a) Zeitebene
- b)  $s$ -Ebene
- c) Kondensatorspannung

tare Umformungen nicht in Einzelschritten durchgeführt. Für die mathematische Darstellung der gesuchten Größe im Zeitbereich wurde in der Regel berücksichtigt, dass trotz punktweise nicht definierter Eingangssignale die Ausgangsgröße für diese Zeitpunkte eindeutig existiert (Kondensatorspannung bzw. Spulenstrom können sich nur stetig ändern, Bild IV-3).

■ **Beispiel IV.3:** Anschalten eines Reihenschwingkreises an eine Gleichspannung, Bild IV-3.

Für die Spannung  $u_s(t)$  gilt:  $u_s(t < 0) = 0$ ;  $u_s(t > 0) = U_0$ , d.h. in der  $s$ -Ebene wird sie als Spannung  $U_0/s$  (Transformation Nr. 3, Tabelle IV-3) eingesetzt. Es wird vorgegeben, dass zum Zeitpunkt  $t = 0$  die Spannung am Kondensator und der Strom durch die Spule Null sind, d.h. die in Bild IV-2a bzw. IV-2c eingetragenen Spannungsquellen haben ebenfalls den Wert Null und sind deshalb nicht eingezeichnet. Die Spannung  $U_C(s)$  berechnet sich nach der Spannungsteilerregel zu:

$$\underbrace{U_C(s)}_{u_2(s)} = \underbrace{U_0}_{u_1(s)} \cdot \underbrace{\frac{1}{sC}}_{H(s)} = \frac{U_0}{LC} \cdot \frac{1}{s \cdot \left\{ s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} \right\}}$$

Dabei kann man der Schaltung die Bezeichnungen nach Gleichung (1.1) zuordnen. Um die zugehörige Zeitfunktion zu bekommen, muss der Nenner die Form  $s(s+c)(s+d)$  erhalten. Dazu werden die Nullstellen  $s_{01}$ ,  $s_{02}$  des in der geschweiften Klammer enthaltenen Ausdrucks bestimmt:

$$\begin{aligned} s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} &= 0 \\ \Rightarrow s_{01,02} &= -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \\ \Rightarrow s_{01} &= -a + b; \quad s_{02} = -a - b \end{aligned}$$

Es gilt:  $s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = (s - s_{01})(s - s_{02})$ . Damit folgt:

$$\begin{aligned} U_C(s) &= \frac{U_0}{LC} \cdot \frac{1}{s(s - \{-a+b\})(s - \{-a-b\})} \\ &= \frac{U_0}{LC} \cdot \frac{1}{s \left( s + \frac{a-b}{c} \right) \left( s + \frac{a+b}{d} \right)} \\ &= \frac{U_0}{LC} \cdot \frac{1}{s(s+c)(s+d)}; \quad c \neq d \end{aligned}$$

1. Fall:  $c \neq d$ , d.h.  $b \neq 0$ :

Mit der Transformation Nr. 15 (Tabelle IV-3) ergibt sich die gesuchte Größe  $u_C(t)$ :

$$u_C(t) = \frac{U_0}{LC} \left[ \frac{1}{cd} + \frac{d \cdot e^{-ct} - c \cdot e^{-dt}}{cd(c-d)} \right]$$

Wird der Ausdruck  $cd$  im Nenner ausgeklammert und durch  $a$  und  $b$  ersetzt, folgt:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{U_0}{LC} \cdot \frac{1}{a^2 - b^2} \left[ 1 + \frac{d \cdot e^{-ct} - c \cdot e^{-dt}}{-2b} \right] \\ &= \frac{U_0}{LC} \cdot \left\{ \frac{1}{a^2 - b^2} \right\} \\ &\quad \times \left[ 1 + \frac{(a+b) \cdot e^{-(a-b)t} - (a-b) \cdot e^{-(a+b)t}}{-2b} \right]; \end{aligned}$$

$$\frac{1}{a^2 - b^2} = LC$$

$$\begin{aligned} &= U_0 \left[ 1 + \frac{(a+b) \cdot e^{-(a-b)t} - (a-b) \cdot e^{-(a+b)t}}{-2b} \right] \\ &= U_0 \left[ 1 + e^{-at} \cdot \frac{a \cdot e^{bt} + b \cdot e^{bt} - a \cdot e^{-bt} + b \cdot e^{-bt}}{-2b} \right] \\ u_C &= U_0 \left[ 1 - e^{-at} \cdot \left\{ \frac{a}{b} \cdot \frac{e^{bt} - e^{-bt}}{2} + \frac{e^{bt} + e^{-bt}}{2} \right\} \right] \quad (\text{IV.41}) \end{aligned}$$

$$\text{mit } a = \frac{R}{2L}, \quad b = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

Die Werte von  $R$ ,  $L$  und  $C$  legen fest, ob der Ausdruck unter der Wurzel positiv oder negativ ist und damit  $b$  reell oder imaginär.

a)  $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC} \Rightarrow b$  reell: Es ergibt sich die Lösung nach Gleichung (IV.41). Man kann sie auch mit Hyperbelfunktionen ausdrücken:

$$\begin{aligned} u_C &= U_0 \left[ 1 - e^{-at} \cdot \left\{ \frac{a}{b} \cdot \frac{e^{bt} - e^{-bt}}{2} + \frac{e^{bt} + e^{-bt}}{2} \right\} \right] \\ &= U_0 \left[ 1 - e^{-at} \cdot \left\{ \frac{a}{b} \cdot \sinh bt + \cosh bt \right\} \right] \end{aligned}$$

b)  $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC} \Rightarrow b$  imaginär. In Gleichung (IV.41) eingesetzt, folgt:

$$\begin{aligned} u_C &= U_0 \left[ 1 - e^{-at} \cdot \left\{ \frac{a}{b} \cdot \frac{e^{jbt} - e^{-jbt}}{2j} + \frac{e^{jbt} + e^{-jbt}}{2} \right\} \right] \\ &= U_0 \left[ 1 - e^{-at} \cdot \left\{ \frac{a}{b} \cdot \sin bt + \cos bt \right\} \right] \end{aligned}$$

$a, b$  siehe Gleichung (IV.41).

$$2. \text{ Fall: } \frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC} \Rightarrow b = 0$$

Dann erhält man eine doppelte Nullstelle des Nenners bei  $s_{01} = s_{02} = -R/2L$ . Daraus folgt für  $U_C(s)$ :

$$U_C(s) = \frac{U_0}{LC} \cdot \frac{1}{s(s+a)^2} \quad \text{mit } a = \frac{R}{2L}$$

Mit der Korrespondenz Nr. 13 aus Tabelle IV-3 und  $a = R/2L$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{U_0}{LC} \cdot \frac{1 - e^{-a \cdot t} - a \cdot t \cdot e^{-a \cdot t}}{a^2} \\ &= U_0 \cdot \frac{4L}{R^2 C} \cdot \left\{ 1 - e^{\frac{R}{2L}t} - \frac{R}{2L} \cdot t \cdot e^{\frac{R}{2L}t} \right\} \end{aligned}$$

■ **Beispiel IV.4:** Die Reihenschaltung aus Spule und Widerstand wird zu einem beliebigen Zeitpunkt an eine sinusförmige Spannung  $u(t)$  geschaltet, Bild IV-4. Es soll gelten:  $i_L(t=0) = 0$ . Der Verlauf des Stromes  $i(t)$  ist zu berechnen und daraus abzuleiten, ob es einen günstigen Einschaltzeitpunkt gibt, damit der Momentanwert des Stromes  $i(t)$  ab dem Einschaltzeitpunkt so klein wie möglich bleibt.

Die Spannung  $u_1(t)$  wird zum (willkürlich gewählten) Zeitpunkt  $t = 0$  eingeschaltet und hat sinusförmigen Verlauf mit einem beliebigen Anfangsphasenwinkel:

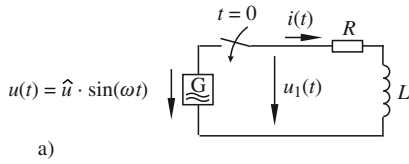
$$\begin{aligned} u_1(t) &= \hat{u} \cdot (\sin \{ \omega \cdot t + \varphi_0 \}) \\ &= \hat{u} \cdot \{ (\sin \varphi_0) (\cos \omega \cdot t) + (\cos \varphi_0) (\sin \omega \cdot t) \} \end{aligned}$$

Dabei wurde ein Additionstheorem verwendet. Mit den Korrespondenzen Nr. 16 und Nr. 24 aus Tabelle IV-3 ergibt sich  $U_1(s)$ :

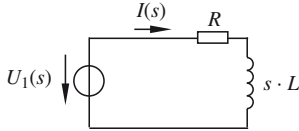
$$U_1(s) = \hat{u} \cdot \frac{(\sin \varphi_0) \cdot s + \omega \cdot (\cos \varphi_0)}{s^2 + \omega^2}$$

$$\text{Für } I(s) \text{ folgt: } I(s) = \frac{U_1(s)}{R + sL} = \hat{u} \cdot \frac{\sin \varphi_0}{L} \cdot \frac{s + \frac{\omega \cdot (\cos \varphi_0)}{\sin \varphi_0}}{\left( s + \frac{R}{L} \right) (s^2 + \omega^2)}$$





a)



b)

**Bild IV-4** Zu Beispiel IV.4

a) Zeitebene

b) s-Ebene

Dieser Ausdruck lässt sich unmittelbar mit der Korrespondenz Nr. 31 in die Zeitebene zurücktransformieren:

$$i(t) = \hat{u} \cdot \frac{\sin \varphi_0}{L} \cdot \left[ \frac{\left\{ \omega \cdot \frac{\cos \varphi_0}{\sin \varphi_0} - \frac{R}{L} \right\} \cdot e^{-\frac{Rt}{L}}}{\frac{R^2}{L^2} + \omega^2} + \frac{\sqrt{\omega^2 + \left\{ \omega \cdot \frac{\cos \varphi_0}{\sin \varphi_0} \right\}^2}}{\frac{R^2}{L^2} \cdot \omega^2 + \omega^4} \cdot \sin(\omega \cdot t + \Phi) \right]$$

$$\Phi = \arctan \frac{R}{L \cdot \omega} - \arctan \frac{\cos \varphi_0}{\sin \varphi_0}$$

Der Strom ergibt sich als Summe aus einem periodischen Anteil und einem mit der Zeit abnehmenden Anteil. Der Momentanwert von  $i(t)$  ist für  $t \geq 0$  dann so klein wie möglich, wenn der zeitlich abnehmende Anteil (erster Summand in der eckigen Klammer) Null ist:

$$\omega \cdot \frac{\cos \varphi_0}{\sin \varphi_0} - \frac{R}{L} = 0$$

$$\text{oder, umgeformt: } \tan \varphi_0 = \frac{\omega \cdot L}{R} \Rightarrow \varphi_0 = \arctan \frac{\omega \cdot L}{R}$$

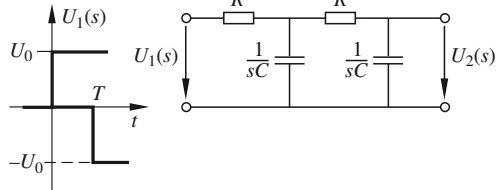
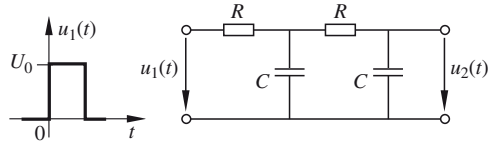
Bei dieser Dimensionierung gibt es keinen Einschwingvorgang! Ist  $R = 0$ , muss der Schalter bei  $\varphi_0 = \pm 90^\circ$ , d.h. bei dem positiven oder negativen Scheitelwert der Generatorspannung, geschlossen werden. Ist andererseits  $L = 0$ , ergibt sich der Phasenwinkel zu Null. Für diesen Grenzfall ist es allerdings ohne Bedeutung, wie groß  $\varphi_0$  gewählt wird, weil der erste Summand in der eckigen Klammer stets Null ist. Man kann übrigens zeigen, dass der Ausdruck oben für  $L = 0$  in die Form  $i(t) = \frac{\hat{u} \cdot \sin \omega \cdot t}{R}$  übergeht. Das erfordert aber einige Umformungen und die Anwendung von Additionstheoremen.

■ **Beispiel IV.5:** Ein rechteckförmiger Impuls der Dauer  $T$  wird auf einen passiven RC-Tiefpass zweiter Ordnung gegeben, Bild IV-5a. Gesucht ist die Spannung am Ausgang als Funktion der Zeit. Zunächst werden die Elemente direkt in die s-Ebene transformiert, Bild IV-5b, und dann die Übertragungsfunktion  $U_2(s)/U_1(s) = H(s)$  entweder über eine Netzwerkberechnung oder mit Hilfe der Vierpoltheorie ( $V_{10}(s)$  für T-Vierpol mit  $1/sC$  als Lastimpedanz, siehe Abschnitt „Nachrichtentechnik“, Kapitel II, (Vierpole) ermittelt. Sie lautet:

$$H(s) = \frac{1}{R^2 C^2 s^2 + 3RCs + 1}$$

Für  $0_+ \leq t < T$  liegt die zum Zeitpunkt  $t = 0_+$  eingeschaltete Spannung  $U_0$  als  $U_1/s$  am Eingang. Dann ergibt sich:

$$U_2(s) = U_1(s) \cdot H(s) = \frac{U_0}{s} \cdot \frac{1}{R^2 C^2} \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{3}{RC}s + \frac{1}{R^2 C^2}}$$

**Bild IV-5** Passiver RC-Tiefpass 2. Ordnung, mit Rechteckimpuls angesteuert

a) Darstellung in der Zeitebene

b) Darstellung in der Bildebene

Die Nullstellen des Nenners erhält man durch Lösen der quadratischen Gleichung:  $s^2 + \frac{3}{RC}s + \frac{1}{R^2 C^2} = 0$ .

Es ergibt sich:

$$s_{01,02} = -\frac{1}{RC} \left\{ \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} \right\} \Rightarrow s_{01} \approx -\frac{2,62}{RC}, \quad s_{02} \approx -\frac{0,38}{RC}$$

(numerische Näherung, soll die Übersichtlichkeit erhöhen). Die Rücktransformation mit Korrespondenz Nr. 15 (Tabelle IV-3) liefert:

$$u_2(t) \approx \frac{U_0}{R^2 C^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{R^2 C^2}} \left\{ 1 + \frac{0,38 \cdot e^{-2,62 \cdot \frac{t}{RC}} - 2,62 \cdot e^{-0,38 \cdot \frac{t}{RC}}}{2,24} \right\}$$

für  $0 \leq t \leq T$

$$u_2(t) \approx U_0 \cdot \left\{ 1 + \frac{0,38 \cdot e^{-2,62 \cdot \frac{t}{RC}} - 2,62 \cdot e^{-0,38 \cdot \frac{t}{RC}}}{2,24} \right\}$$

für  $0 \leq t \leq T$

Für  $t > T$  bleibt die zum Zeitpunkt  $t = 0$ , eingeschaltete Spannung  $U_0$  weiter eingeschaltet, und die Eingangsspannung Null wird für  $t > T$  durch Addition der Spannung  $-U_0$  zum bestehenden Wert  $+U_0$  erzwungen. In der Berechnung ergibt das die Größe  $\frac{-U_0}{s} \cdot e^{-Ts}$  (Verschiebungssatz). Das hat den Vorteil, dass zu

dem Ergebnis aus der Berechnung  $u_2(t)$  für  $0_+ \leq t \leq T$  ein zweiter Term addiert wird, bei dem lediglich  $t$  durch  $t - T$  ersetzt wird. Dieses Ergebnis ist dann gültig für  $t \geq T$ .

$$U_2(s) = U_1(s) \cdot H(s) = \frac{U_0}{s} (1 - e^{-Ts}) \cdot \frac{1}{R^2 C^2} \times \frac{1}{s^2 + \frac{3}{RC}s + \frac{1}{R^2 C^2}}, \quad t \geq T$$

Zurücktransformiert erhält man:

$$u_2(t) \approx U_0 \cdot \left\{ 1 + \frac{0,38 \cdot e^{-2,62 \cdot \frac{t}{RC}} - 2,62 \cdot e^{-0,38 \cdot \frac{t}{RC}}}{2,24} \right\} - U_0 \cdot \left\{ 1 + \frac{0,38 \cdot e^{-2,62 \cdot \frac{t-T}{RC}} - 2,62 \cdot e^{-0,38 \cdot \frac{t-T}{RC}}}{2,24} \right\}, \quad t \geq T$$

Auch hier wurde der Verschiebungssatz angewendet. Das Ergebnis stellt den tatsächlichen Verlauf der Spannung am Ausgang des Tiefpasses dar, ohne dass Idealisierungen oder Näherungen (numerische Näherung ausgenommen, siehe oben) verwendet wurden. Es treten auch keine Kausalitätsprobleme auf.

- **Beispiel IV.6:** Der mit passiven Elementen realisierte Tiefpass aus Beispiel IV.5 wird durch einen Tiefpass zweiter Ordnung mit der Übertragungsfunktion  $\frac{1}{(1+sRC)^2}$  ersetzt. Eine entsprechende

Schaltung kann z.B. mit Operationsverstärkern aufgebaut werden. Die Eingangsspannung hat wiederum rechteckförmigen Verlauf. Für  $U_2(s)$  folgt damit:

$$U_2(s) = U_1(s) \cdot H(s) = \frac{U_0}{s} \cdot \frac{1}{R^2 C^2} \cdot \frac{1}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)^2}$$

Zurücktransformiert mit der Korrespondenz Nr. 13 ergibt sich für  $0 \leq t \leq T$ :

$$u_2(t) = \frac{U_0}{R^2 C^2} \cdot \frac{1 - e^{-t/RC} - \frac{t}{RC} \cdot e^{-t/RC}}{\frac{1}{R^2 C^2}} = U_0 \cdot \left\{ 1 - e^{-t/RC} - \frac{t}{RC} \cdot e^{-t/RC} \right\}, \quad t < T$$

Bei dem hier verwendeten Tiefpass steigt die Ausgangsspannung schneller an als beim Tiefpass nach Bild IV-5, siehe Bild IV-6.

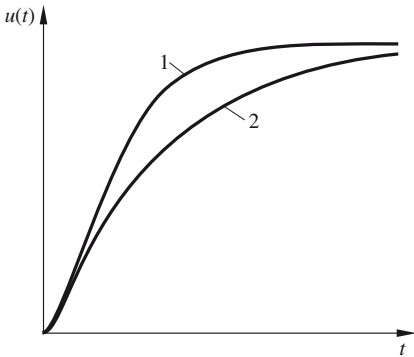


**Bild IV-6** Vergleich der Ausgangsspannung von Tiefpass zweiter Ordnung bei einer Sprungfunktion am Eingang: 1 Tiefpass mit Operationsverstärker aufgebaut, 2 passiver Tiefpass nach Bild IV-5

Der Verlauf für  $t > T$  kann entsprechend Beispiel IV.5 berechnet werden.

- **Beispiel IV.7:** Ein Rechteckimpuls der Dauer  $T$  und ein  $\sin^2(\pi \cdot t/T)$ -Impuls mit der Amplitude  $U$  werden auf einen passiven RC-Tiefpass erster Ordnung gegeben. Die Übertragungsfunktion lautet:

$$H(s) = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{s+1/RC}. \quad \text{Die Eingangsspannung für}$$

den Zeitbereich  $0 \leq t < T$  ergibt sich zu:  $U_1(s) = \frac{U}{s}$ .

a) Rechteckimpuls: Erster Zeitbereich:  $0 \leq t \leq T$ :

$$U_2(s) = \frac{U}{s} \cdot \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{s+1/RC}$$

$$\Rightarrow u_2(t \leq T) = \frac{U}{RC} \cdot RC \cdot (1 - e^{-t/RC}) = U \cdot (1 - e^{-t/RC})$$

Zweiter Zeitbereich: Für  $t \geq T$  ergibt sich mit dem Ersatzschaltbild nach Bild IV-2a und  $u_C(t=T) = U(1 - e^{-T/RC})$ :

$$U_C(s) = \frac{u_C(t=T)}{s} - I(s) \cdot \frac{1}{sC} = \frac{u_C(t=T)}{s} - \frac{1}{sC} \cdot \frac{u_C(t=T)}{s \cdot (R+1/sC)} = \frac{u_C(t=T)}{s} - \frac{u_C(t=T)}{s \cdot (1+RsC)}$$

$$u_2(t \geq T) = u_C(t=T) - u_C(t=T) \cdot \left\{ 1 - e^{-(t-T)/RC} \right\} = u_C(t=T) \cdot e^{-(t-T)/RC}$$

Das gleiche Ergebnis erhält man bei der Anwendung des Verschiebungssatzes.

b)  $\sin^2(\pi \cdot t/T)$ -Impuls: 1. Zeitbereich:  $0 \leq t \leq T$

$$u_1(t) = U \cdot \sin^2 \omega \cdot t = \frac{U}{2} \cdot (1 - \cos 2\omega \cdot t)$$

$$\Rightarrow U_1(s) = \frac{U}{2} \cdot \left\{ \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4\omega^2} \right\}$$

$$U_2(s) = \frac{U}{2} \cdot \left\{ \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4\omega^2} \right\} \cdot \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{s+1/RC} = \frac{U}{2} \cdot \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+1/RC} - \frac{U}{2} \cdot \frac{s}{s^2 + 4\omega^2} \cdot \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{s+1/RC}$$

Zurücktransformiert ergibt sich:

$$u_2(t \leq T) = \frac{U}{2} \cdot \left\{ 1 - e^{-t/RC} - \frac{e^{-t/RC}}{1 + 4\omega^2 R^2 C^2} + \sqrt{\frac{1}{1 + 4\omega^2 R^2 C^2}} \times \sin(2\omega \cdot t + \arctan 1/\omega RC) \right\}$$

Für  $t \geq T$  kann der zeitliche Verlauf mit Hilfe des Verschiebungssatzes oder des Ersatzschaltbildes nach Bild IV-2a berechnet werden. Bild IV-7 stellt den Verlauf der Eingangsspannung und die zugehörige Ausgangsspannung für die zwei folgenden Dimensionierungen dar: 1. Die „Frequenz“  $f = 1/T$  des Impulses ist gleich der Grenzfrequenz  $f_g = 1/(2\pi \cdot RC)$  des Tiefpasses, d.h.  $f = f_g$ ; 2.  $f = 2 \cdot f_g$ .

Der  $\sin^2(\pi/T)$ -Impuls lässt sich, verglichen mit dem Rechteckimpuls, bei der Dimensionierung  $f = f_g$  ebenfalls einsetzen, weil die Zustände 1 und 0 im Empfänger ausreichend sicher erkannt werden können. Gilt  $f = 2 \cdot f_g$ , kann er u.U. auch noch verwendet werden, um die im Beispiel IV.2, Kapitel IV.1.4, aufgeführten Vorteile auszunutzen.

- **Beispiel IV.8:** Auch periodische Funktionsverläufe lassen sich mit Hilfe des Verschiebungssatzes einfach berechnen. Bild IV-8a stellt einen rechteckförmigen Verlauf  $u(t)$  dar, der zum Zeitpunkt  $t=0$  auf einen RC-Tiefpass erster Ordnung gegeben wird (Bild IV-8b). Gesucht ist die Spannung  $u_C(t)$  zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t \geq 0$ . Die Übertragung in der  $s$ -Ebene geschieht nach Bild IV.8a und Bild IV.8c: Für  $t=0$  wird die Spannung  $U_0$  eingeschaltet, für  $t=aT$  folgt  $-U_0$ , für  $t=T$  wiederum  $U_0$  usw., wobei die einmal eingeschalteten Spannungen dauernd eingeschaltet bleiben. Der Tiefpass hat die Übertragungsfunktion

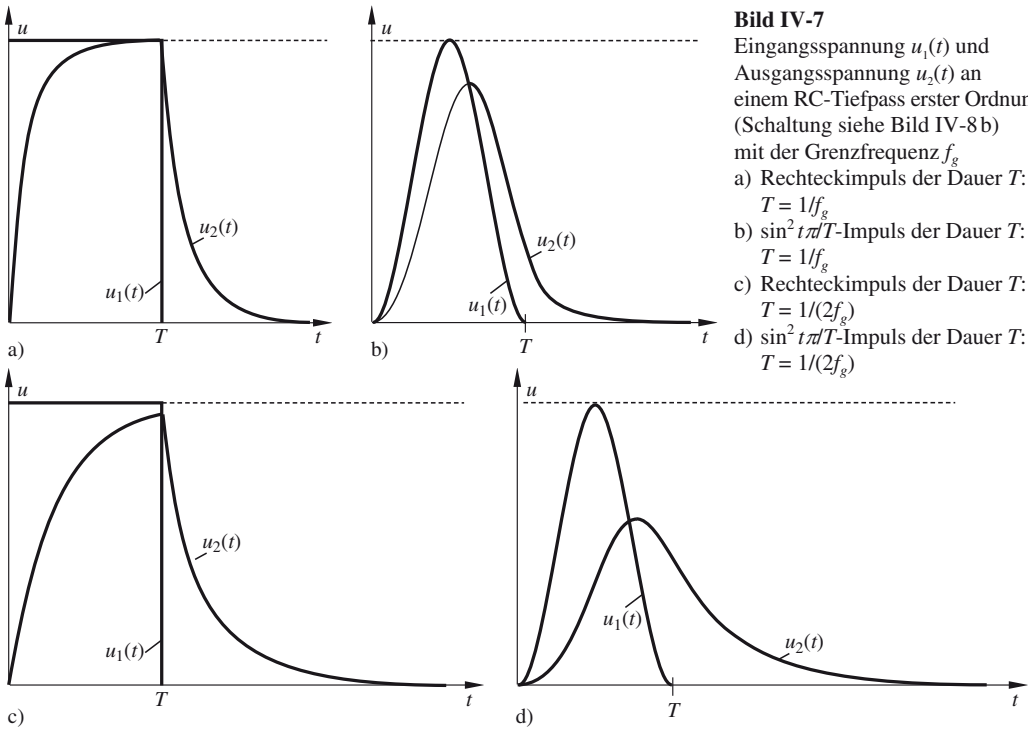
$$H(s) = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{s+1/RC}. \quad \text{Für die Funktion } U_1(s) \text{ folgt mit dem Verschiebungssatz (Gleichung IV.34):}$$

$$U_1(s) = \frac{U_0}{s} \left( 1 - e^{-aTs} + e^{-Ts} - e^{-(T+aT)s} + e^{-2Ts} - \dots \right)$$

Daraus ergibt sich  $U_C(s)$ :

$$U_C(s) = U_1(s) \cdot H(s) = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{s+1/RC} \cdot \frac{U_0}{s} \cdot \left( \underbrace{1 - e^{-aTs}}_{1. \text{ Impuls}} + \underbrace{e^{-Ts} - e^{-(T+aT)s}}_{2. \text{ Impuls}} + e^{-2Ts} \dots \right) = \left( \underbrace{1 - e^{-(n-1)Ts}}_{n\text{-ter Impuls}} - e^{-\{(n-1)T+aT\}s} \right)$$

Zurücktransformiert in die Zeitebene erhält man mit dem Verschiebungssatz zunächst rein formal:



$$u_c(t) = \underbrace{U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) - U_0 \left(1 - e^{-\frac{aT+t}{RC}}\right) + U_0 \left(1 - e^{-\frac{-aT+t}{RC}}\right)}_{1. \text{ Impuls}} - U_0 \left(1 - e^{-\frac{-T-aT+t}{RC}}\right) + \dots + \underbrace{U_0 \left(1 - e^{-\frac{-(n-1)T+t}{RC}}\right) - U_0 \left(1 - e^{-\frac{-(n-1)T-aT+t}{RC}}\right)}_{n\text{-ter Impuls}}$$

mit der Bedingung, dass der Ausdruck im Exponenten stets  $< 0$  sein muss.

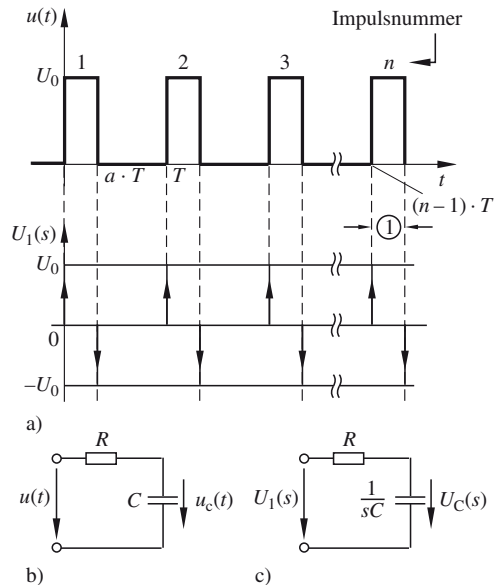
Soll der Spannungsverlauf des  $n$ -ten Impulses im Bereich  $(n-1)T \leq t \leq (n-1)T + aT$  (Bereich ① in Bild IV.8a) berechnet werden, lässt man zweckmäßigerweise im Punkt  $(n-1)T$  die neue Zeit  $t^*$  mit dem Wert 0 beginnen. Dadurch erhält man nach einigen Umformungen:

$$u_c(0 \leq t^* \leq aT) = U_0 + U_0 \cdot e^{-\frac{t^*}{RC}} \times \left\{ -1 + \left[ e^{\frac{aT}{RC}} - 1 \right] \times \left[ e^{-\frac{T}{RC}} + e^{-\frac{2T}{RC}} + \dots + e^{-\frac{(n-1)T}{RC}} \right] \right\}$$

Für den Bereich  $(n-1)T + aT \leq t \leq nT$  kann ein ähnlicher Ausdruck abgeleitet werden. Hinweis: Wird in obiger Formel zu Kontrollzwecken  $a = 0$  gesetzt, heißt das, dass die Spannung erst ab  $(n-1)T$  eingeschaltet wird. Damit ergibt sich:

$$u_c(t) = u_c(t^*) = U_0 (1 - e^{-t^*/RC}). \text{ Für } a = 1 \text{ heben sich alle Ausdrücke auf bis auf } u_c(t) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{(n-1)T+t}{RC}}\right), \text{ d.h. es wurde}$$

für  $t = 0$  die Spannung  $U_0$  einmalig eingeschaltet. Weitere Spannungen werden nicht zugeschaltet, weil sich je eine positive und eine negative Spannung in den Zeitpunkten  $T, 2T, 3T \dots$  aufheben.



## V Spezielle Signale

In der Signal- und Systemtheorie werden spezielle Signalformen eingesetzt, die die Systemeigenschaften für den praktischen Gebrauch besonders vorteilhaft beschreiben bzw. die theoretische Erfassung und Berechnung erleichtern oder erst ermöglichen. Dazu gehören die im folgenden dargestellten Funktionen.

### 1 Stoßfunktion, $\delta$ -Funktion, Dirac-Impuls

Eine – ideale – harmonische Schwingung hat ein unendlich schmales Spektrum und eine unendliche Dauer. Ein komplementärer Vorgang weist eine unendlich kurze Dauer und ein unendlich ausgedehntes Spektrum auf. Man kann sich die Entstehung eines solchen Signals so vorstellen, dass z.B. bei einem Gaußschen Glockenimpuls der Grenzwert

$$s(t) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 t^2} \Big|_{k \rightarrow \infty} \quad \text{gebildet wird. Die gesuchte}$$

Funktion  $\delta(t)$  wird mit Stoßfunktion,  $\delta$ -Funktion oder Dirac-Impuls bezeichnet und soll die zwei folgenden Bedingungen erfüllen:

$$1. \delta(t) \rightarrow \infty \text{ für } t=0 \quad \text{und} \quad \delta(t)=0 \text{ für } t \neq 0. \quad (\text{V.1 a})$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (\text{V.1 b})$$

Aus der zweiten Bedingung folgt, dass die Fläche endlich ist. Mathematisch handelt es sich bei  $\delta(t)$  nicht mehr um eine Funktion, sondern um eine Distribution, weil die oben angesprochenen Grenzwerte nicht existieren. Trotzdem ist die  $\delta$ -Funktion in der Physik bzw. in der Technik eingeführt worden, weil sie die theoretische Behandlung der Systemanalyse und -synthese erleichtert: Sie tritt in der Regel nicht in singulärer Form auf, sondern in Verbindung mit anderen Funktionen, sodass die Grenzwertprobleme dann u.U. nicht zum Tragen kommen. Außerdem genügt es in der Praxis, den idealen Verlauf in physikalisch realisierbarer Form anzunähern, ohne dass sich die Ergebnisse merklich ändern. Im einzelnen liegt die Bedeutung von  $\delta(t)$  in folgendem:

1. In der Beziehung

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) \cdot \delta(t-\tau) d\tau \quad (\text{V.2})$$

kann  $\delta(t-\tau)$  als Auswahlfunktion verstanden werden, die aus den Werten von  $s(t)$  genau diejenigen Werte auswählt, für die das Argument Null ist. Dadurch wird die Signalabtastung auch formelmäßig beschreibbar.

2. Für die ideale  $\delta$ -Funktion haben die Fouriertransformierte (Tabelle IV-1) und die Laplacetransformierte den Wert 1 (Tabelle IV-3). Wird  $\delta(t)$  in Form der physikalisch möglichen Realisierbarkeit

als Eingangssignal für ein System benutzt, so folgt mit Gleichung (I.1):  $S_2(f) = S_1(f) \cdot H(f) \approx 1 \cdot H(f)$  bzw.  $F_2(s) = F_1(s) \cdot H(s) \approx 1 \cdot H(s)$ . Man erhält also am Ausgang unmittelbar die Übertragungsfunktion  $H(f)$  bzw.  $H(s)$  und nicht deren Kombination mit dem Eingangssignal  $S_1(f)$  bzw.  $F_1(s)$ . Bild V-1 zeigt die Ausgangsspannung  $u_2(t)$  von Tiefpasssystemen erster Ordnung,  $U_2/U_1 = 1/(s+a)$ , und zweiter Ordnung,  $U_2/U_1 = 1/(s+a)^2$ , bei Anregung mit einer  $\delta$ -Funktion.

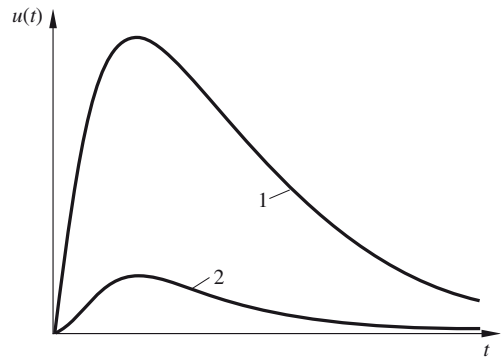


**Bild V-1** Ausgangsspannung von Tiefpässen (TP) bei Anregung mit einer  $\delta$ -Funktion  
1 TP erster Ordnung ( $1/(s+a)$ )  
2 TP zweiter Ordnung ( $1/(s+a)^2$ )

### 2 Sprungfunktion $\sigma(t)$

Für die Sprungfunktion  $\sigma(t)$  gilt:  $\sigma(t) = 0$  für  $t < 0$  und  $\sigma(t) = 1$  für  $t > 0$ . Die  $\delta$ -Funktion lässt sich als Differentialquotient der Sprungfunktion  $\sigma(t)$  schreiben:

$$\delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt} \quad (\text{V.3})$$

Duhamel hat gezeigt, dass der zeitliche Verlauf  $s(t)$  aus unendlich kleinen Sprüngen  $\sigma(t-\tau) ds(\tau)$  aufgebaut werden kann:

$$s(t) = s(0) \sigma(t) + \int_0^t \frac{ds(\tau)}{d\tau} \cdot \sigma(t-\tau) d\tau \quad (\text{V.4})$$

Duhamelsches Integral

Auch wenn die Sprungfunktion für  $t=0$  nicht definiert ist, wird sie erfolgreich in der Technik angewendet:

1. Ein- und Ausschaltvorgänge können theoretisch erfasst und kalkuliert werden, auch wenn in der Praxis der Sprung  $\sigma(t)$  nur näherungsweise realisiert werden kann bzw. nur angenähert auftritt.
2. Die Übertragung digital kodierter Signale kann mit Sprungfunktionen simuliert und berechnet werden (siehe Verschiebungssatz Gleichung (IV.34) und Beispiel IV.7). Für den Anwender lassen sich

diese Ergebnisse auf das technisch ausgeführte System übertragen.

3. In der Schaltungs-, Steuerungs- und Regelungstechnik können Sprungfunktionen zur Untersuchung der Systemreaktion und zur Stabilitätskontrolle eingesetzt werden, weil die Änderung der Signalamplitude pro Zeiteinheit theoretisch unendlich groß und in der Praxis sehr groß ist. Damit wird die für die meisten Systeme kritischste aller auftretenden Signalformen erfasst. Die Systemantwort in der Zeitebene wird auch mit Übergangsfunktion bezeichnet.

### 3 Verknüpfung von $\sigma$ - und $\delta$ -Funktion

Es kann gezeigt werden, dass für die Anwendung in der Elektrotechnik die folgende Beziehung zwischen beiden Signalen gilt:

$$\delta(t) = \frac{d\{\sigma(t)\}}{dt} \quad \text{bzw.} \quad \sigma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad (\text{V.5})$$

$\delta(t)$  Dirac-Impuls,  $\sigma(t)$  Sprungfunktion

Mit dem Duhamelschen Integral nach Gleichung (V.4) und dessen Interpretation lässt sich folgende Aussage ableiten:

Bekannt ist die Impulsantwort  $s_2(t) = s_2(t)_\delta$  am Ausgang des Systems, verursacht durch einen Dirac-Impuls  $\delta(t)$  am Eingang. Dann berechnet sich die Sprungantwort  $s_2(t) = s_2(t)_\sigma$  am Ausgang durch Integration von  $s_2(t)_\delta$ . Andererseits folgt aus der bekannten Sprungantwort  $s_2(t)_\sigma$  durch Differenzieren von  $s_2(t)_\sigma$  die entsprechende Impulsantwort  $s_2(t)_\delta$ :

$$s_2(t)_\sigma = \int_{-\infty}^t s_2(\tau)_\delta d\tau \quad \text{bzw.} \quad s_2(t)_\delta = \frac{ds_2(t)_\sigma}{dt} \quad (\text{V.6})$$

■ **Beispiel V.1:** Ein passiver RC-Hochpass erster Ordnung hat folgende Spannungs-Übertragungsfunktion in der Zeitebene:

$$h(t) = \delta(t) - \frac{1}{T} \cdot e^{-t/T}$$

Sie kann z.B. dadurch ermittelt werden, dass der Dirac-Impuls  $\delta(t)$  als Eingangssignal verwendet wird. Damit gilt auch:

$$s_2(t)_\delta = \delta(t) - \frac{1}{T} \cdot e^{-t/T}$$

$s_2(t)_\delta$  Systemausgangsgröße bei einem Dirac-Impuls am Eingang (Impulsantwort)

Durch Integration ergibt sich:

$$\int_0^t s_2(\tau)_\delta d\tau = \int_0^t \left\{ \delta(\tau) - \frac{1}{T} \cdot e^{-\tau/T} \right\} d\tau = \left[ 1 + \frac{1}{T} T \cdot e^{-\tau/T} \right]_0^t = e^{-t/T} = s_2(t)_\sigma$$

$s_2(t)_\sigma$  Systemausgangsgröße bei einem Sprung am Eingang (Sprungantwort)

Bei der Berechnung wurde berücksichtigt, dass die Funktionen für  $t < 0$  Null sind und dass das Integral des Dirac-Impulses den Wert 1 ergibt.

## 4 Harmonische Schwingungen

Die harmonischen Schwingungen

$$s(t) = \hat{s} \cdot e^{j\omega_0 t} = \hat{s} \cdot (\cos n\omega_0 \cdot t + j \cdot \sin n\omega_0 \cdot t);$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

haben mit  $m = 1, 2, 3, \dots$  und  $n = 1, 2, 3, \dots$  die Eigenschaft:

$$\int_0^T (\cos m \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot (\cos n \cdot \omega_0 \cdot t) dt = 0 \quad \text{für } m \neq n;$$

$$\int_0^T (\sin m \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot (\sin n \cdot \omega_0 \cdot t) dt = 0 \quad \text{für } m \neq n;$$

$$\int_0^T (\sin m \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot (\cos n \cdot \omega_0 \cdot t) dt = 0 \quad \text{für alle } m, n. \quad (\text{V.7})$$

Es handelt sich damit um ein orthogonales Funktionensystem. In der Elektrotechnik gibt es noch weitere orthogonale Systeme, z.B. Walsh-Funktionen, bei denen beliebige periodische Signalverläufe durch Rechteckfunktionen geeigneter Dauer und Amplitude dargestellt werden. Dass die harmonischen Schwingungen eine besondere Bedeutung haben, liegt an ihrem Auftreten in der Physik:

- Projektion von Drehbewegungen auf eine Gerade und damit zusammenhängend die Form der Spannung im Wechsel- bzw. Drehstrom-Versorgungsnetz;
- Spannungs- und Stromverlauf eines verlustfreien elektrischen Schwingkreises aus  $L$  und  $C$ ;
- Erfassung von Systemeigenschaften in der Frequenzebene für sinusförmige Spannungen und Ströme im eingeschwungenen Zustand (z.B. Netzwerke oder Vierpole aus den Elementen  $R$ ,  $L$ ,  $C$ ). Ausgehend von diesen Eigenschaften sind gewisse Rückschlüsse auf das Verhalten bei nichtsinusförmigen Signalen und bei Einschwingvorgängen möglich. Die theoretische Behandlung wird erleichtert durch die Anwendung der komplexen Rechnung. Die sinusförmigen Größen gewinnen noch dadurch an Bedeutung, dass periodische nichtsinusförmige Funktionsverläufe durch die Fourierreihe und damit durch Sinusfunktionen dargestellt werden können. Siehe dazu auch Abschnitt „Nachrichtentechnik“, Kapitel II, Vierpole, Zweitere.

## VI Leistung

Die Erfassung der am Ausgang eines Systems zur Verfügung stehenden Wirkleistung  $P$  ist nicht nur für die Energietechnik von Interesse. Je nach Art der Signalform von Strom und Spannung können verschiedene Berechnungsverfahren eingesetzt werden.

### 1. Spannung und Strom periodisch, sinusförmig

Für die Wirkleistung gilt:

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi \quad (\text{VI.1})$$

$U, I$  Effektivwerte von Spannung  $\underline{U}$  und Strom  $\underline{I}$  in V bzw. A,  $\varphi$  Phasenwinkel zwischen  $\underline{U}$  und  $\underline{I}$

Liegen die Systemeigenschaften in Form von Vierpolgrößen vor, können letztere auch zur Bestimmung des Verhältnisses von Ausgangs- zu Eingangsleistung herangezogen werden. Nähere Einzelheiten zu den Vierpolgrößen sind im Abschnitt „Nachrichtentechnik“, Kapitel II, Vierpole, aufgeführt. Das Leistungsverhältnis  $v_p$  ist folgendermaßen definiert:

$$v_p = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} \quad (\text{VI.2})$$

$P_{\text{out}}$  Leistung am Ausgang,  $P_{\text{in}}$  Leistung am Eingang des Systems (Vierpols) in W

Weiterhin gilt:

$$P_{\text{in}} = U_1^2 \cdot G_{\text{in}} = I_1^2 \cdot R_{\text{in}}; \quad P_{\text{out}} = U_2^2 \cdot G_a = I_2^2 \cdot R_a \quad (\text{VI.3})$$

$U_1$  Eingangsspannung und  $U_2$  Ausgangsspannung des Systems (Vierpols) in V,  $I_1$  Eingangsstrom und  $I_2$  Ausgangsstrom des Systems (Vierpols) in A,  $G_{\text{in}}$  Realteil der Eingangsadmittanz  $Y_{\text{in}} = G_{\text{in}} + jB_{\text{in}}$  des Systems in  $1/\Omega$ ,  $G_a$  Realteil der Lastadmittanz  $Y_a = G_a + jB_a$  in  $1/\Omega$ ,  $R_{\text{in}}$  Realteil der Eingangsimpedanz  $Z_{\text{in}} = R_{\text{in}} + jX_{\text{in}}$  des Systems in  $\Omega$ ,  $R_a$  Realteil der Lastimpedanz  $Z_a = R_a + jX_a$  in  $\Omega$

Daraus folgt das Leistungsverhältnis:

$$v_p = \left| \underline{y}_{\text{uf}} \right|^2 \cdot \frac{G_a}{G_{\text{in}}} = \left| \underline{y}_{\text{if}} \right|^2 \cdot \frac{R_a}{R_{\text{in}}} \quad (\text{VI.4})$$

$\underline{y}_{\text{uf}}, \underline{y}_{\text{if}}$  siehe Abschnitt „Nachrichtentechnik“, Kapitel II, Vierpole, Tabellen II-5 und II-6; weitere Formelzeichen siehe Gleichung (VI.3) oben

Sind  $\underline{Z}_{\text{in}}$  und  $\underline{Z}_a$  reell, ergibt sich:

$$v_p = \left| \underline{y}_{\text{uf}} \right| \cdot \left| \underline{y}_{\text{if}} \right|$$

Stehen die A-Parameter des Systems (Vierpols) zur Verfügung, gilt:

$$v_p = \frac{G_a}{\text{Re} \left\{ \left( \underline{A}_{21} + \underline{A}_{22} \cdot \underline{Y}_a \right) \cdot \left( \underline{A}_{11}^* + \underline{A}_{12}^* \cdot \underline{Y}_a^* \right) \right\}} \quad (\text{VI.5})$$

Formelzeichen siehe Gleichung (VI.3), \* konjugiert komplexe Größe, Re {...} Realteil des Klammersausdrucks

### 2. Spannung und Strom periodisch, nicht sinusförmig

Es gibt zwei Möglichkeiten zur Leistungsberechnung. 2.1: Die gegebenen Signalverläufe von Spannung und Strom werden in eine Fourierreihe entwickelt (Gleichung (III.1)):

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \hat{u}_{ka} \cdot \cos k\omega \cdot t + \hat{u}_{kb} \cdot \sin k\omega \cdot t \right\}$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \hat{i}_{ka} \cdot \cos k\omega \cdot t + \hat{i}_{kb} \cdot \sin k\omega \cdot t \right\}$$

Werden nach der Produktbildung aus beiden Reihen die Werte von  $\hat{u}_{ka}, \hat{u}_{kb}, \hat{i}_{ka}, \hat{i}_{kb}$  bestimmt, ergeben alle diejenigen Integrale den Wert Null, die der Orthogonalitätsbeziehung nach Gleichung (V.7) unterliegen. Damit folgt für jede Harmonische die Leistungsberechnung gemäß Gleichung (VI.1). Für die Gesamtwirkleistung müssen die Einzelleistungen aller Harmonischen einschließlich des Gleichanteiles addiert werden.

$$P = U_0 \cdot I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \cdot I_k \cdot \cos \varphi_k \quad (\text{VI.6})$$

Sind  $U$  und  $I$  über einen ohmschen Widerstand  $R$  verknüpft und haben damit den gleichen Kurvenformverlauf, kann die Beziehung  $U_k = I_k \cdot R$  benutzt werden.

2.2: Zur Berechnung wird die folgende Formel verwendet:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt \quad (\text{VI.7})$$

Praktischer Hinweis zum Einsatz der Formeln (VI.6) und (VI.7): Die Erfahrung zeigt, dass die Anwendung der Formel (VI.6) nur dann zu empfehlen ist, wenn die Fourierreihenentwicklung für den gegebenen Kurvenformverlauf bereits vorliegt und damit die Effektivwerte  $U_k, I_k$  bekannt sind und die Fourierreihe nur aus wenigen Summanden besteht. Ein derartiger Verlauf ergibt sich beispielsweise, wenn ein rechteckförmiger Signalverlauf mit der Frequenz  $f$  ein ideales Tiefpassfilter mit der Grenzfrequenz  $3f$  passiert und die Leistung am Ausgang des Filters bestimmt werden soll.

■ **Beispiel VI.1:** Eine sägezahnförmige Spannung  $u(t) = U_0 \cdot t/T$  speist einen Ohmschen Widerstand  $R$ , Bild VI-1. Gesucht ist die in  $R$  umgesetzte Wirkleistung.

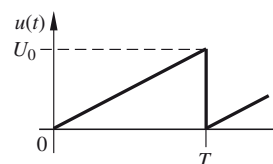


**Bild VI-1**  
Spannungsverlauf zu Beispiel VI.1

Nach dem praktischen Hinweis zu den Gleichungen (VI.6) und (VI.7) empfiehlt es sich, die Formel (VI.7) zu verwenden. Für den Verlauf der Spannung erhält man:  $u(t) = U_0 \cdot t/T$ . Für  $i(t)$  gilt:  $i(t) = u(t)/R$ . Damit ergibt sich

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left\{ u(t) \cdot \frac{u(t)}{R} \right\} dt = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{R} \cdot \int_0^T [u(t)]^2 dt$$

$$= \frac{1}{R \cdot T} \cdot U_0^2 \cdot \int_0^T \left\{ \frac{t}{T} \right\}^2 dt = \frac{U_0^2}{R \cdot T^3} \cdot \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^T = \frac{U_0^2}{3R}$$

Für den arithmetischen Mittelwert (Gleichanteil) folgt:  $\bar{u} = U_0/2$ . Es kann also nicht unmittelbar von  $\bar{u}$  auf  $P$  geschlossen werden.

- **Beispiel VI.2:** Für das in Bild VI-2 dargestellte System (Vierpol) soll das Leistungsverhältnis  $v_p$  berechnet werden. Mit Tabelle II-4b (Abschnitt „Nachrichtentechnik“, Kapitel II, Vierpole) ergeben sich die  $\underline{A}$ -Parameter wie folgt:

$$\underline{A}_{11} = 1 + j\omega \cdot R_1 C; \quad \underline{A}_{12} = R_1; \quad \underline{A}_{21} = j\omega \cdot C; \quad \underline{A}_{22} = 1$$

Daraus folgt mit Gleichung (VI.5):

$$v_p = \frac{G_a}{\operatorname{Re} \left\{ (\underline{A}_{21} + \underline{A}_{22} \cdot \underline{Y}_a) \cdot (\underline{A}_{11}^* + \underline{A}_{12}^* \cdot \underline{Y}_a^*) \right\}}$$

$$= \frac{1/R_a}{\operatorname{Re} \left\{ \left( j\omega \cdot C + \frac{1}{R_a} \right) \cdot \left( 1 - j\omega \cdot R_1 C + \frac{R_1}{R_a} \right) \right\}}$$

$$= \frac{1/R_a}{\operatorname{Re} \left\{ j\omega \cdot C + \frac{1}{R_a} + R_1 \omega^2 C^2 - \frac{R_1 j\omega \cdot C}{R_a} + \frac{R_1 j\omega \cdot C}{R_a} + \frac{R_1}{R_a^2} \right\}}$$

$$= \frac{1/R_a}{\frac{1}{R_a} + R_1 \omega^2 C^2 + \frac{R_1}{R_a^2}}$$

$$= \frac{R_a}{R_a + R_1 + R_a^2 R_1 \omega^2 C^2}$$

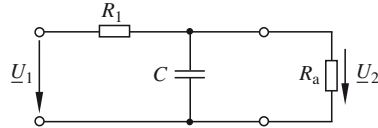


**Bild VI-2** System (Vierpol) zu Beispiel VI.2

Wird zur Kontrolle  $C = 0$  gesetzt, ergibt sich die auch anschaulich einsichtige Lösung  $v_p = \frac{R_a}{R_a + R_1}$ .

## VII Faltungsintegral

Es gelten folgende Bezeichnungen:

- $s_1(t)$ ,  $(f_1(t))$ : Zeitabhängige Eingangsgröße des Systems, bei der Laplacetransformation wegen Verwechslungsgefahr mit  $f_1(t)$  bezeichnet,  
 $h(t)$ : Übertragungsfunktion des Systems in Abhängigkeit von der Zeit,  
 $s_2(t)$ ,  $(f_2(t))$ : Zeitabhängige Ausgangsgröße des Systems, bei der Laplacetransformation wegen Verwechslungsgefahr mit  $f_2(t)$  bezeichnet,  
 $\underline{S}_1(f)$ : Frequenzabhängige Eingangsgröße des Systems,  
 $\underline{H}(f)$ : Übertragungsfunktion in Abhängigkeit von der Frequenz,  
 $\underline{S}_2(f)$ : Frequenzabhängige Ausgangsgröße des Systems.

Nach Gleichung (I.1) gilt:

$$\underline{S}_2(f) = \underline{H}(f) \cdot \underline{S}_1(f).$$

Für die zugeordneten zeitabhängigen Größen folgt die Beziehung

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^t s_1(t-\tau) \cdot h(\tau) d\tau \quad (\text{VII.1})$$

oder, in Kurzschreibweise,

$$s_2(t) = s_1(t) * h(t) \quad (\text{VII.2})$$

Der allgemeine Zusammenhang zwischen Zeit- und Frequenzebene ist demnach durch die folgende Beziehung gegeben:

$$s_a(t) * s_b(t) \longleftrightarrow \bullet S_a(f) \cdot S_b(f) \quad (\text{VII.3})$$

Gleichung (VII.1) wird als Faltungsintegral bezeichnet, das Symbol „\*“ bedeutet „gefaltet mit“. Das Faltungsintegral hat folgende Eigenschaft:

$$s_a(t) * s_b(t) = s_b(t) * s_a(t) \quad (\text{VII.4a})$$

Angewendet auf Gleichung (VII.1) kann man auch schreiben:

$$\int_{-\infty}^t s_1(t-\tau) \cdot h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t s_1(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau \quad (\text{VII.4b})$$

bzw.

$$\int_{-\infty}^t s_1(t-\tau) \cdot h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t h(\tau) \cdot s_1(t-\tau) d\tau \quad (\text{VII.4c})$$

Die untere Integrationsgrenze wird in den Gleichungen (VII.1) und (VII.4b, c) für kausale Systeme, die für  $t < 0$  Null sind, zu Null gesetzt.

Die Faltung kann auch im Frequenzbereich angewendet werden. Es gilt:

$$s_a(t) \cdot s_b(t) \longleftrightarrow \bullet S_a(f) * S_b(f). \quad (\text{VII.5})$$

Das Faltungsintegral wird u.a. in folgenden Fällen eingesetzt:

1. Die zeitabhängige Systemeingangsfunktion  $s_1(t)$  und die zeitabhängige Übertragungsfunktion  $h(t)$  sind gegeben. Dann kann die zeitabhängige Ausgangsgröße  $s_2(t)$  mit Gleichung (VII.1) berechnet werden.



2. Gesucht ist die zeitabhängige Funktion  $f(t)$ . Die zugehörige Laplacetransformierte  $F(s)$  kann in ein Produkt  $F(s) = F_1(s) \cdot F_2(s)$  zerlegt werden, wobei die Rücktransformierten der beiden Faktoren bekannt sind. Mit  $F(s) \bullet \longrightarrow f(t)$ ,  $F_1(s) \bullet \longrightarrow f_1(t)$ ,  $F_2(s) \bullet \longrightarrow f_2(t)$  ergibt sich:

$$f(t) = \mathbf{L}^{-1} \{ F_1(s) \cdot F_2(s) \} = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau \quad (\text{VII.6})$$

- **Beispiel VII.1:** Ein passiver RC-Hochpass erster Ordnung hat die Übertragungsfunktion  $\delta(t) - \frac{1}{T} \cdot e^{-t/T}$ .

An den Eingang wird zum Zeitpunkt  $t = 0$  eine Sprungfunktion mit dem Wert 1 für  $t > 0$  angelegt. Für die Ausgangsgröße folgt dann mit Gleichung (VII.6):

$$\begin{aligned} s_2(t) &= \int_0^t \left\{ \delta(t-\tau) - \frac{1}{T} \cdot e^{-(t-\tau)/T} \right\} \cdot 1 d\tau \\ &= \int_0^t \left\{ \delta(\tau) - \frac{1}{T} \cdot e^{-\tau/T} \right\} \cdot 1 d\tau \\ &= \int_0^t \delta(\tau) d\tau - \int_0^t \left\{ \frac{1}{T} \cdot e^{-\tau/T} \right\} d\tau = 1 + \frac{1}{T} \cdot T \cdot e^{-t/T} - 1 = e^{-t/T} \end{aligned}$$

Dabei wurde Gleichung (VII.4b) verwendet und berücksichtigt, dass die zeitabhängigen Funktionen für  $t < 0$  Null sind.

- **Beispiel VII.2:** Gegeben ist die Laplacetransformierte

$$F(s) = \frac{1}{(s+a) \cdot (s+b)} = \frac{1}{s+a} \cdot \frac{1}{s+b} \quad \text{mit} \quad F(s) \bullet \longrightarrow f(t).$$

Die Rücktransformierten der beiden Faktoren sind bekannt:

$$F_1(s) \bullet \longrightarrow e^{-at}, \quad F_2(s) \bullet \longrightarrow e^{-bt}$$

Mit Gleichung (VII.6) ergibt sich:

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t e^{-a\tau} \cdot e^{-b(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{-bt} \cdot \int_0^t e^{-(a-b)\tau} d\tau \\ &= e^{-bt} \cdot \left. \frac{e^{-(a-b)\tau}}{-(a-b)} \right|_0^t = e^{-bt} \cdot \frac{e^{-(a-b)t} - 1}{-a+b} = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a} \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist in Übereinstimmung mit der Transformation Nr. 9 in Tabelle IV-3.

## VIII Abtasttheorem

Die Übertragungskanäle der Nachrichten- und der Datentechnik sind in ihrer Frequenzbandbreite beschränkt. Häufig besitzen sie Tiefpassverhalten erster oder höherer Ordnung. Bei der theoretischen Behandlung wird in der Regel ein idealer Tiefpass angenommen, d.h. bis zur Grenzfrequenz  $f_g$  bleiben die Amplitudenverhältnisse aller Frequenzanteile untereinander konstant. Oberhalb der Grenzfrequenz werden keine Signalanteile mehr übertragen. Shannon hat gezeigt, dass es genügt, von einem frequenzbandbeschränkten Signal diskrete Probenwerte zu nehmen, weil aus diesen Probenwerten das Originalsignal wiederhergestellt werden kann. Die Ableitung wird hier in verkürzter Form dargestellt. Man macht für das bandbegrenzte Signal den Ansatz

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot x_n(t)$$

und verwendet das orthogonale Funktionensystem

$$\begin{aligned} x_n(t) &= \frac{1}{2B} \cdot \int_{-B}^{+B} e^{j\omega \cdot \left(t - \frac{n}{2B}\right)} d\omega \\ &= \frac{\sin 2\pi \cdot B \cdot \left(t - \frac{n}{2B}\right)}{2\pi \cdot B \cdot \left(t - \frac{n}{2B}\right)} \end{aligned}$$

Darin ist  $B$  die Bandbreite, die bei einem Tiefpasssystem der Grenzfrequenz  $f_g$  entspricht. Eine Integration liefert:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot x_n(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) dt \cdot \frac{1}{2B} \int_{-B}^{+B} e^{j\omega \cdot \left(t - \frac{n}{2B}\right)} d\omega \\ &\quad \times df = \frac{a_n}{2B} \end{aligned}$$

Die gesuchte Funktion lautet damit

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s\left(\frac{n}{2B}\right) \cdot x_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s\left(\frac{n}{2B}\right) \\ &\quad \frac{\sin 2\pi \cdot B \cdot \left(t - \frac{n}{2B}\right)}{2\pi \cdot B \cdot \left(t - \frac{n}{2B}\right)} \quad (\text{VIII.1}) \end{aligned}$$

Die frequenzbandbegrenzte Funktion  $s(t)$  ist also durch eine diskrete Folge von Abtastwerten eindeutig darstellbar. Man kann nämlich zeigen, dass sich durch die diskreten Abtastwerte nur *ein* möglicher Kurvenverlauf legen lässt. Nach Gleichung (VIII.1) muss der zeitliche Abstand  $t_{ab}$  der Abtastwerte – theoretisch – halb so groß sein wie die Periodendauer  $T_g$  der höchsten im Signal vorkommenden sinusförmigen Frequenz  $f_g$ , oder, auf die Frequenzen bezogen,

$$f_{ab} = 2 \cdot f_g \quad (\text{theoretisch})$$

$$f_{ab} \approx (2,2 \dots 4) \cdot f_g \quad (\text{praktisch}) \quad (\text{VIII.2})$$

In der Praxis wird  $f_{ab} > 2 \cdot f_g$  gewählt, um u.a. den mehr oder weniger theoretischen Fall abzudecken, dass das abgetastete Signal sinusförmig mit  $f_g$  ist und in

den Nulldurchgängen abgetastet wird. In der Praxis genügt erfahrungsgemäß  $f_{ab} \approx (2,2 \dots 3) \cdot f_g$ . Wählt man dennoch  $f_{ab} > 3 \cdot f_g$ , hat das keinen Einfluss auf die originalgetreue Wiederherstellung des abgetasteten Signals, vielmehr spielen u.a. folgende Gesichtspunkte eine Rolle:

1. Verringerung des Quantisierungsgeräusches (Abschnitt „Nachrichtentechnik“, Kapitel V.4.4.5).
2. Die für die Abtastung und damit für die originalgetreue Wiederherstellung des Signals erforderlichen idealen Tiefpassfilter (Antialiasingfilter) im oben geschilderten Sinne gibt es nicht. Frequenzanteile oberhalb  $f_g$  führen zum Aliasing-Effekt (Abschnitt „Nachrichtentechnik“, Kapitel V.4.4 und Bild V-31b). Je höher aber die Abtastfrequenz  $f_{ab}$  im Vergleich zur Grenzfrequenz  $f_g$  ist, desto geringer sind auch die Amplituden der durch die nichtidealen Filtereigenschaften verursachten störenden Frequenzanteile oberhalb  $f_g$ .

Aus Gleichung (VIII.1) folgt weiterhin, dass der *Abtastzeitpunkt* keine Rolle spielt, was anschaulich einsichtig ist und die Anwendung der Signalabtastung ganz wesentlich erleichtert. Schließlich ergibt sich aus dem Wertebereich von  $n$  in der Summe, dass das frequenzbandbeschränkte Signal zeitlich *nicht* beschränkt ist.

Das Abtasttheorem lässt sich auch auf *zeitlich begrenzte* Signalverläufe anwenden. Entwickelt man das auf das Zeitintervall  $-T \dots +T$  beschränkte Signal in eine Fourierreihe, erhält man nach einigen Zwischenschritten:

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S\left(\frac{n}{2T}\right) \cdot \frac{\sin 2\pi \cdot T \cdot \left(f - \frac{n}{2T}\right)}{2\pi \cdot T \cdot \left(f - \frac{n}{2T}\right)} \quad (\text{VIII.3})$$

Das Spektrum eines zeitlich beschränkten Signals ist frequenzmäßig nicht beschränkt und durch diskrete Abtastwerte der Spektraldichte im Abstand  $1/2T$  vollständig bestimmt.

Die Rückgewinnung des Originalsignals geschieht nach Gleichung (VIII.1) dadurch, dass die Abtastwerte auf ein Tiefpassfilter mit der Grenzfrequenz  $f_g$  gegeben werden.

Besondere Bedeutung hat das Abtasttheorem in der Form nach Gleichung (VIII.1) für diejenigen Verfahren, bei denen mehrere analoge Signale quasi gleichzeitig über einen Kanal übertragen werden oder ein analoger Signalwert in einen digital kodierten Wert umgesetzt und übertragen oder gespeichert wird. Beispiele dafür sind:

- Pulsmodulationsverfahren, siehe Abschnitt „Nachrichtentechnik“, Kapitel V.4.
- Speicherung von Sprache und Musik auf Compact-Disks (CDs). Die Abtastfrequenz beträgt 44,1 kHz.
- Fernsprechen:  $f_g = 3,4$  kHz,  $f_{ab} = 8$  kHz,  $\Rightarrow f_{ab}/f_g \approx 2,35$ .
- Anwendung des Zeitmultiplexverfahrens (Abschnitt „Nachrichtentechnik“, Kapitel IX.1).

## IX Nichtkontinuierliche (zeitdiskrete) Signale

Zeitdiskrete Signale werden häufig aus zeitkontinuierlichen Signalen durch Abtastung erzeugt. Dass beide Signale gleichwertig sind, zeigt das Abtasttheorem (Kapitel VIII) von *Shannon*, sofern die Bedingung nach Gleichung (VIII.2),  $f_{ab} \approx (2,2 \dots 4) \cdot f_g$  eingehalten wird. Bild IX-1 zeigt den prinzipiellen Aufbau einer zeitdiskreten Signalverarbeitung. Der abgetastete Wert kann analog (unterer Signalweg) oder digital codiert (oberer Signalweg) weiterverarbeitet werden. Der Tiefpass am Eingang ist ein Antialiasingfilter und sorgt für die Erfüllung von Gleichung (VIII.2), der Tiefpass am Ausgang wandelt das zeitdiskrete Signal in ein zeitkontinuierliches Signal um. Der Einsatz dieser nichtkontinuierlichen Signale hat zwei Vorteile: 1. Es können Zeitmultiplexverfahren angewendet werden. 2. Liegen die Signale in digital codierter Form vor, können sie gespeichert werden (z.B. auf CDs) oder mit geringem Fehler

übertragen werden (z.B. Datenfernübertragung). Deshalb hat die digitale Codierung der abgetasteten Werte die größte praktische Bedeutung. Für diesen Fall können die Signale am Ausgang des Systems (Bild IX-1) auch mit der Laplacetransformation und Sprungfunktionen am Systemeingang erhalten werden.

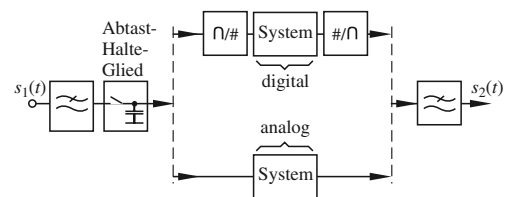


**Bild IX-1** Prinzip der zeitdiskreten Signalverarbeitung

## 1 Diskrete Fouriertransformation (DFT)

Es wird vorausgesetzt, dass die Bedingung nach Gleichung (VIII.2),  $f_{ab} \approx (2,2 \dots 4) \cdot f_g$ , erfüllt ist. Die Funktion  $s(t)$  wird im Zeitbereich  $0 \leq t < T$  betrachtet, wobei sie für  $t > T$  nicht zwangsweise Null sein muss. Durch  $N$ -maliges Abtasten innerhalb des Zeitintervalls  $T$  erhält man die diskreten Funktionswerte  $s(0), s(T_{ab}), s(2T_{ab}), s(3T_{ab}) \dots, s((N-1)T_{ab})$  mit  $T_{ab} = T/N$ , denen entsprechende Werte des Spektrums zugeordnet werden. Die Transformationsformeln lauten:

$$S\left(\frac{2\pi \cdot m}{NT_{ab}}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n \cdot T_{ab}) \cdot e^{-j2\pi \cdot m \cdot n/N} \quad \text{mit } m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{IX.1})$$

$$s(nT_{ab}) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} S\left(\frac{2\pi \cdot m}{NT_{ab}}\right) \cdot e^{j2\pi \cdot m \cdot n/N} \quad \text{mit } n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{IX.2})$$

Auch bei der zeitdiskreten Signalverarbeitung haben die Sprungfunktion  $\sigma(nT_{ab})$  und der Dirac-Impuls  $\delta(nT_{ab})$  besondere Bedeutung. Impuls- und Sprungantwort am Ausgang des Systems hängen analog zu den Beziehungen bei kontinuierlichen Signalen nach Kapitel V.3, Gleichung (V.5) und (V.6), in folgender Weise zusammen:

$$s_2(nT_{ab})_{\delta} = s_2(nT_{ab})_{\sigma} - s_2((n-1)T_{ab})_{\sigma} \quad (\text{IX.3})$$

$$s_2(nT_{ab})_{\sigma} = \sum_{\mu=-\infty}^n s_2(\mu T_{ab})_{\delta} \quad (\text{IX.4})$$

Die Indizes  $\sigma$  (Sprungfunktion) bzw.  $\delta$  (Dirac-Impuls) weisen auf die Ursache des Ausgangssignals hin.

Ist die Systemantwort auf einen Dirac-Impuls am Eingang bekannt, kann das Ausgangssignal für beliebige Eingangssignale mit der Faltungssumme (entsprechend dem Faltungsintegral nach Gleichung (VII.1) bzw. (VII.4a, b, c) bei zeitkontinuierlichen Signalen) berechnet werden:

$$s_2(nT_{ab}) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} s_1(\{n-\mu\}T_{ab}) \cdot h(\mu T_{ab}) \quad (\text{IX.5})$$

Die Übertragungsfunktion  $H(f)_{nT_{ab}}$  erhält man aus folgender Beziehung:

$$H(f)_{nT_{ab}} = \frac{s_2(nT_{ab})}{s_1(nT_{ab})} \Big|_{s_1(nT_{ab}) = e^{jn\omega T_{ab}}} \quad (\text{IX.6})$$

Ist die Impulsantwort  $s_2(nT_{ab})_{\delta}$  am Systemausgang bekannt, gilt:

$$H(f)_{nT_{ab}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_2(nT_{ab})_{\delta} \cdot e^{-jn\omega T_{ab}} \quad (\text{IX.7})$$

Der Index  $\delta$  weist auf den Dirac-Impuls als Eingangssignal hin.

Analog zur Fourierreihe aus Kapitel III.1, Gleichungen (III.2a, b, c), können die Koeffizienten der diskreten Fouriertransformation auch in der reellen Form dargestellt werden, wenn das Integral durch eine Summe ersetzt wird (wegen des Vergleiches mit den Gleichungen (III.2a, b, c) wurde  $k$  beibehalten):

$$a_0 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} s_m \quad (\text{IX.8a})$$

$$a_k = \frac{2}{N} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} s_m \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot m\right) \quad (\text{IX.8b})$$

$$b_k = \frac{2}{N} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} s_m \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot m\right) \quad (\text{IX.8c})$$

Man kann hier die Bedeutung der auftretenden Größen besonders anschaulich darstellen:  $N$  ist die Zahl der Abtastwerte im Intervall  $0 \dots T$ , der zeitliche Abstand  $T_{ab}$  der Abtastwerte ist mit dem Intervall  $T$  über  $N$  verknüpft:  $T_{ab} = T/N$  (wie bei den Gleichungen (IX.1) und (IX.2) oben). Die Zahl der maximal zu berücksichtigenden Fourierkoeffizienten gibt  $k_{\max}$  an. Für die höchste im Signal enthaltene Frequenz  $f_{\max}$ , die über die Grenzfrequenz  $f_g$  des Tiefpasses (Antialiasingfilter) festgelegt wird, d.h.  $f_{\max} = f_g$ , gilt:  $f_{\max} = k_{\max}/T$ . Dabei muss zwischen  $T_{ab}$  und  $f_{\max}$  die Bedingung für die Abtastung nach Gleichung (VIII.2) erfüllt sein:  $f_{ab} \approx (2,2 \dots 4) \cdot f_g$  oder  $T_{ab} \approx 1/((2,2 \dots 4) \cdot f_{\max})$ .

Die Auswertung der Transformationsgleichungen erfordert wegen des erhöhten Rechenaufwandes den Einsatz von Rechnern. Je nachdem, ob die reelle oder komplexe Darstellung der Fourierreihe verwendet wird und ob das gegebene Signal Symmetriebedingungen erfüllt oder nicht, ergibt sich eine unterschiedliche Anzahl von Multiplikationen. Als Orientierungswert kann dienen, dass bei  $N$  Abtastwerten etwa  $N^2$  Multiplikationen erforderlich sind. Dabei sind es weniger die Multiplikationen an sich, die zeitaufwendig sind, sondern vielmehr die Berechnungsroutinen zur Bestimmung der sin- und cos-Werte.

Für die Anwendung der diskreten Fouriertransformation werden die folgenden Formeln häufiger benötigt:

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} a^{\mu} = \frac{1}{1-a} \quad \text{für } |a| < 1 \quad (\text{IX.9})$$

$$\sum_{\mu=0}^k a^{\mu} = \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1} \quad \text{für } a \neq 1 \quad (\text{IX.10})$$

$$\sum_{\mu=k}^{\infty} a^{\mu} = \frac{a^k}{1-a} \quad \text{für } |a| < 1 \quad (\text{IX.11})$$

■ **Beispiel IX.1:** Die Impulsantwort eines Systems ist gegeben zu:

$$s_2(nT_{ab})_{\delta} = \underbrace{A}_{1} \cdot \underbrace{\delta(0)}_{2} + \underbrace{\sigma(\{n-1\}T_{ab})}_{3} \cdot \underbrace{B}_{4} \cdot 0,5^{(n-1)} \quad (\text{IX.12})$$

Erläuterungen siehe Text, Funktionen sind Null für  $t < 0$

Erläuterungen zu den Ziffern: 1, 4: Die Konstanten  $A$  und  $B$  werden allgemein eingeführt, um die Zahlenwerte später geeignet zu wählen. 2: Die Konstante  $A$  erscheint zum Zeitpunkt  $t=0$  als Dirac-Impuls. 3: Die genannte Abhängigkeit tritt mit einer Verzögerung von  $T_{ab}$  auf.

Die Sprungantwort ergibt sich mit Gleichung (IX.4):

$$s_2(nT_{ab})_a = A + B \cdot \sum_{\mu=1}^n 0,5^{\mu-1} = A + B \cdot \sum_{\mu=0}^{n-1} 0,5^{\mu} \quad (\text{IX.13})$$

Die Übertragungsfunktion  $H(f)_{nT_{ab}}$  berechnet sich mit Gleichung (IX.7):

$$\begin{aligned} H(f)_{nT_{ab}} &= A + B \cdot \sum_{n=1}^{\infty} 0,5^{n-1} \cdot e^{-j\omega nT_{ab}} \\ &= A + B \cdot e^{-j\omega T_{ab}} \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} 0,5^{\mu} e^{-j\omega \mu T_{ab}} \\ &= A + B \cdot e^{-j\omega T_{ab}} \cdot \frac{1}{1 - 0,5 \cdot e^{-j\omega T_{ab}}} \end{aligned} \quad (\text{IX.14})$$

Dabei wurde die Beziehung  $\sum_{\mu=0}^{\infty} a^{\mu} = \frac{1}{1-a}$ , Gleichung (IX.9),

verwendet.

Bestimmt man das Quadrat des Betrages der Übertragungsfunktion, Gleichung (IX.14), erhält man mit

$$\begin{aligned} |H(f)_{nT_{ab}}|^2 &= H(f)_{nT_{ab}} \cdot H^*(f)_{nT_{ab}} \\ H(f)_{nT_{ab}} &= \left\{ A + e^{-j\omega T_{ab}} \cdot \frac{B}{1 - 0,5 \cdot e^{-j\omega T_{ab}}} \right\} \\ &= \frac{A - A \cdot 0,5 \cdot e^{-j\omega T_{ab}} + B \cdot e^{-j\omega T_{ab}}}{1 - 0,5 \cdot e^{-j\omega T_{ab}}} \\ \Rightarrow |H(f)_{nT_{ab}}|^2 &= \frac{A + (B - 0,5 \cdot A) \cdot e^{-j\omega T_{ab}}}{1 - 0,5 \cdot e^{-j\omega T_{ab}}} \cdot \underbrace{\frac{A + (B - 0,5 \cdot A) \cdot e^{+j\omega T_{ab}}}{1 - 0,5 \cdot e^{+j\omega T_{ab}}}}_{\substack{H^*(f)_{nT_{ab}} \\ \text{konjug. kompl. zu } H(f)_{nT_{ab}}}} \\ &= \frac{A^2 + A \cdot (B - 0,5 \cdot A) \cdot \{e^{-j\omega T_{ab}} + e^{+j\omega T_{ab}}\} + (B - 0,5 \cdot A)^2}{1 + \{-e^{-j\omega T_{ab}} - e^{j\omega T_{ab}}\} \cdot 0,5 + 0,25} \\ &= \frac{1,25 \cdot A^2 + B^2 - AB + (AB - 0,5 \cdot A^2) \cdot 2 \cdot \cos(\omega T_{ab})}{1,25 - \cos(\omega T_{ab})} \end{aligned}$$

Mit den Konstanten  $A$  und  $B$  lassen sich die Eigenschaften des Systems einstellen. So sind der Zähler und der Nenner gleich, wenn gewählt wird:  $A = -0,5$ ,  $B = 0,75$

(Ansatz:  $1,25 \cdot A^2 + B^2 - AB = 1,25$ ;  $(AB - 0,5 \cdot A^2) \cdot 2 = -1$ ):

$$|H(f)_{nT_{ab}}|_{A=-0,5; B=0,75} = 1 \neq f(f)$$

Dann hat das System Allpassverhalten und kann z.B. zur Phaseneinstellung benutzt werden.

## 2 Schnelle Fouriertransformation (FFT)

Die gesamte Rechenzeit bei der DFT kann nur dadurch wesentlich verringert werden, dass u.a. die Anzahl der Berechnungen für die sin- und cos-Werte reduziert wird. Die schnelle Fouriertransformation (Fast Fourier Transform, FFT) nutzt zu diesem Zweck bestimmte Symmetrieeigenschaften der Sinus-

und Cosinusfunktion aus, was besonders effektiv ist, wenn die Anzahl  $N$  der Abtastwerte auf einer Potenz der Zahlen 2, 4, 8 usw. basiert:  $N = 2^M$  (Basis-2-FFT),  $N = 4^M$  (Basis-4-FFT) usw. In [IX.1] ist ausführlich dargestellt, wie z.B. eine Basis-2-FFT für  $N = 1024$  entwickelt und für die Berechnung mit einem Rechner aufbereitet wird. Beispiel IX.2 zeigt die Symmetrieeigenschaften für  $N = 2^4 = 16$ .

■ **Beispiel IX.2:** Um zu zeigen, wie die Symmetrieeigenschaften bei der FFT ausgenutzt werden, wird  $N = 2^4 = 16$  gewählt. Dann sind die sin- und cos-Werte von  $n \cdot 22,5^\circ$ ,  $n = 0 \dots 15$ , erforderlich. Es genügt aber, zwei sin- und einen cos-Wert zu berechnen (jeweils unterstrichen) und je nach Quadrant das Vorzeichen entsprechend zu setzen, wenn die dargestellten Symmetriebedingungen beachtet werden:

$$\begin{aligned} \underline{\sin 22,5^\circ} &= \sin 157,5^\circ = -\sin 202,5^\circ = -\sin 337,5^\circ \\ &= \cos 67,5^\circ = -\cos 112,5^\circ = -\cos 247,5^\circ \\ &= \cos 292,5^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\cos 22,5^\circ} &= -\cos 157,5^\circ = -\cos 202,5^\circ = \cos 337,5^\circ \\ &= \sin 67,5^\circ = \sin 112,5^\circ = -\sin 247,5^\circ \\ &= -\sin 292,5^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\sin 45^\circ} &= \sin 135^\circ = -\sin 225^\circ = -\sin 315^\circ \\ &= \cos 45^\circ = -\cos 135^\circ = -\cos 225^\circ = \cos 315^\circ \end{aligned}$$

Die Werte für  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  und  $270^\circ$  brauchen als „Trivialwerte“ nicht berechnet zu werden.

Die Erstellung eines entsprechenden Rechnerprogrammes ist zwar aufwendig, aber sinnvoll, weil der Anwender bei jedem Programmdurchlauf von der Zeitersparnis profitiert.

## 3 z-Transformation

Die  $z$ -Transformation dient ebenfalls zur Beschreibung von Abtastsystemen. Sie gibt eine geschlossene Darstellung der Folge der Abtastwerte ohne Rückgriff auf die Einhüllende. Die Regelungstechnik wendet sie häufig bei Abtastregelsystemen an, weil die dort auftretenden absichtlich eingefügten oder prinzipiell vorhandenen Zeitverzögerungen  $nT_{ab}$  einfach erfasst werden können. Hier sollen nur die Grundlagen dargestellt werden, weitere Einzelheiten sind z.B. in [IX.2] enthalten.

Die Transformationsgleichungen sind wie folgt definiert:

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_{ab}) \cdot z^{-n}$$

zweiseitige  $z$ -Transformation (IX.15)

oder, in symbolischer Darstellung:

$$S(z) \circ \circ \circ s(nT_{ab})$$

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} s(nT_{ab}) \cdot z^{-n} \quad \text{einseitige } z\text{-Transformation,}$$

d.h.

$$s(nT_{ab}) \equiv 0 \quad \text{für } n < 0 \quad (\text{IX.16})$$

**Tabelle IX-1** Korrespondenzen der  $z$ -Transformation

| Nr. | $f(t)$                                | $F(s)$                                  | $F(z)$                                                                                                                        |
|-----|---------------------------------------|-----------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1   | $\sigma(t)$                           | $\frac{1}{s}$                           | $\frac{z}{z-1}$                                                                                                               |
| 2   | $t$                                   | $\frac{1}{s^2}$                         | $T \cdot \frac{z}{(z-1)^2}$                                                                                                   |
| 3   | $t^2$                                 | $\frac{2}{s^3}$                         | $T^2 \cdot z \cdot \frac{z+1}{(z-1)^3}$                                                                                       |
| 4   | $e^{at}$                              | $\frac{1}{s-a}$                         | $\frac{z}{z-e^{aT}}$                                                                                                          |
| 5   | $t \cdot e^{at}$                      | $\frac{1}{(s-a)^2}$                     | $T \cdot e^{aT} \cdot \frac{z}{(z-e^{aT})^2}$                                                                                 |
| 6   | $\sin(\omega_0 \cdot t)$              | $\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$     | $z \cdot \frac{\sin(\omega_0 \cdot T)}{z^2 - 2 \cdot z \cdot \cos(\omega_0 \cdot T) + 1}$                                     |
| 7   | $\cos(\omega_0 \cdot t)$              | $\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$            | $z \cdot \frac{z - \cos(\omega_0 \cdot T)}{z^2 - 2 \cdot z \cdot \cos(\omega_0 \cdot T) + 1}$                                 |
| 8   | $e^{at} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$ | $\frac{\omega_0}{(s-a)^2 + \omega_0^2}$ | $z \cdot \frac{e^{aT} \cdot \sin(\omega_0 \cdot T)}{z^2 - 2 \cdot z \cdot e^{aT} \cdot \cos(\omega_0 \cdot T) + e^{2aT}}$     |
| 9   | $e^{at} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$ | $\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega_0^2}$      | $z \cdot \frac{z - e^{aT} \cdot \cos(\omega_0 \cdot T)}{z^2 - 2 \cdot z \cdot e^{aT} \cdot \cos(\omega_0 \cdot T) + e^{2aT}}$ |
| 10  | $\delta(t-nT)$                        | $e^{-nTs}$                              | $z^{-n}$                                                                                                                      |

|    | $F(s)$                                                                                                                                                | $F(z)$                                                                                                                                      |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 11 | $\frac{b_0 + b_1 \cdot e^{-Ts} + b_2 \cdot e^{-2Ts} \dots b_n \cdot e^{-nTs}}{a_0 + a_1 \cdot e^{-Ts} + a_2 \cdot e^{-2Ts} \dots a_m \cdot e^{-mTs}}$ | $\frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2} \dots b_n \cdot z^{-n}}{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} \dots a_m \cdot z^{-m}}$ |

|    | $f(t)$                                                                                                     | $F(z)$                           |
|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| 12 | $\sigma(n-1) \cdot a^{n-1 \cdot 1)}$                                                                       | $\frac{1}{z-a},  z  >  a $       |
| 13 | $\sigma(n-\mu) \cdot \left[ \begin{matrix} n-1 \\ \mu-1 \end{matrix} \right] \cdot a^{n-\mu \cdot 1), 2)}$ | $\frac{1}{(z-a)^\mu},  z  >  a $ |
| 14 | $\delta(n-\mu)^{3)}$                                                                                       | $\frac{1}{z^\mu}$                |

<sup>1)</sup>  $\sigma$  Sprungfunktion, <sup>2)</sup> siehe Gleichung (IX.22), <sup>3)</sup>  $\delta$  Dirac-Impuls

Die Unterscheidung zwischen ein- und zweiseitiger  $z$ -Transformation wurde aus praktischen Erwägungen heraus eingeführt.

Die Rücktransformation geschieht nach folgender Beziehung:

$$s(nT_{ab}) = \frac{1}{2j\pi} \cdot \oint S(z) \cdot z^{n-1} dz \quad (\text{IX.17})$$

symbolische Darstellung:  $s(nT_{ab}) \circ\!\!\!\circ S(z)$ .

Für die Anwendung sind folgende Eigenschaften von Bedeutung:

1. Multiplikation mit einer Konstanten  $K$ :

$$K \cdot s(nT_{ab}) \circ\!\!\!\circ K \cdot S(z) \quad (\text{IX.18})$$

2. Addition zweier Zeitfunktionen:

$$s_1(nT_{ab}) + s_2(nT_{ab}) \circ\!\!\!\circ S_1(z) + S_2(z) \quad (\text{IX.19})$$

3. Verschiebung:

$$\begin{aligned} s(nT_{ab}) \circ\!\!\!\circ S(z); \\ \rightarrow s(\{n-\mu\} T_{ab}) \circ\!\!\!\circ z^{-\mu} \cdot S(z) \end{aligned} \quad (\text{IX.20})$$

4. Faltung:

$$\begin{aligned} s_1(nT_{ab}) * s_2(nT_{ab}) &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n=0)}}^{+\infty} s_1(\tau T_{ab}) \\ &\quad \times s_2(\{n-\tau\} T_{ab}) \\ \circ\!\!\!\circ S_1(z) \cdot S_2(z) \end{aligned} \quad (\text{IX.21})$$

Tabelle IX-1 enthält einige Korrespondenzen zur  $z$ -Transformation. Zum Vergleich sind teilweise die zugeordneten Laplacetransformierten mit aufgeführt.

Korrespondenz Nr. 11 in Tabelle IX-1 zeigt, analog zur Laplacetransformation, eine allgemeine Lösung zur Rücktransformation. Sind die Null- und Polstellen bestimmt, kann eine Partialbruchzerlegung durchgeführt werden. Anschließend lassen sich die erhaltenen Summanden einzeln nach Tabelle IX-1, Korrespondenzen 12 bis 14, zurücktransformieren. Der in der Transformation Nr. 13 auftretende Binomialkoeffizient wird wie folgt berechnet:

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ \mu-1 \end{bmatrix} = \frac{(n-1)!}{\{(\mu-1)!\} \cdot \{[(n-1)-(\mu-1)]!\}} \quad (\text{IX.22})$$

Da die Koeffizienten  $a_0 \dots a_m, b_0 \dots b_n$  der Korrespondenz Nr. 11 in Tabelle IX-1 reell sind, ergeben sich reelle oder konjugiert komplexe Pol- und Nullstellen.

Für ein System mit der Übertragungsfunktion  $H(z)$ , der Eingangsgröße  $S_1(z)$  und der Ausgangsgröße  $S_2(z)$  gilt analog zur Fourier- und Laplacetransformation:

$$S_2(z) = H(z) \cdot S_1(z) \quad (\text{IX.23})$$

Ob ein Abtastsystem stabil ist, lässt sich anhand der Übertragungsfunktion  $H(z)$  feststellen. Mit

$$H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

$$P(z) \text{ Zählerpolynom, } Q(z) \text{ Nennerpolynom} \quad (\text{IX.24})$$

gilt: Ein System ist stabil, wenn die Nullstellen des Nennerpolynoms innerhalb des Einheitskreises der  $z$ -Ebene liegen und der Zählergrad den Nennergrad nicht übersteigt.

Mit der  $z$ -Transformation lassen sich auch Differenzengleichungen erfassen. Bild IX-2 zeigt eine Schaltung, die eine Differenzengleichung erster Ordnung ergibt. Es gilt für die Ausgangsgröße  $s_2(nT_{ab})$ :

$$\begin{aligned} s_2(nT_{ab}) &= b_0 \cdot s_1(nT_{ab}) + b_1 \cdot s_1(\{n-1\} T_{ab}) \\ &\quad + a_1 \cdot s_2(\{n-1\} T_{ab}) \end{aligned}$$

bzw. umgeformt

$$\begin{aligned} s_2(nT_{ab}) - a_1 \cdot s_2(\{n-1\} T_{ab}) \\ = b_0 \cdot s_1(nT_{ab}) + b_1 \cdot s_1(\{n-1\} T_{ab}) \end{aligned} \quad (\text{IX.25})$$

Für die Übertragungsfunktion folgt mit Gleichung (IX.7), (IX.23) und (IX.25):

$$\begin{aligned} H(f)_{nT_{ab}} \cdot e^{jn\omega T_{ab}} - H(f)_{nT_{ab}} \cdot a_1 \cdot e^{j\{n-1\}\omega T_{ab}} \\ = b_0 \cdot e^{jn\omega T_{ab}} + b_1 \cdot e^{j\{n-1\}\omega T_{ab}} \end{aligned}$$

Umgeformt ergibt sich:

$$H(f)_{nT_{ab}} = \frac{b_0 + b_1 \cdot e^{-j\omega T_{ab}}}{1 - a_1 \cdot e^{-j\omega T_{ab}}} \quad (\text{IX.26})$$

Daraus erhält man die Transformierte  $H(z)$  mit  $e^{-j\omega T_{ab}} = z^{-1}$  zu:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1}}{1 - a_1 \cdot z^{-1}} \quad (\text{IX.27})$$

Der gemeinsame Faktor  $e^n$  kürzt sich in Gleichung (IX.26) heraus, was anschaulich auch einsichtig ist, denn  $H(f)_{nT_{ab}}$  bzw.  $H(z)$  dürfen sich nicht in Abhängigkeit von der Zahl der Abtastwerte ändern.

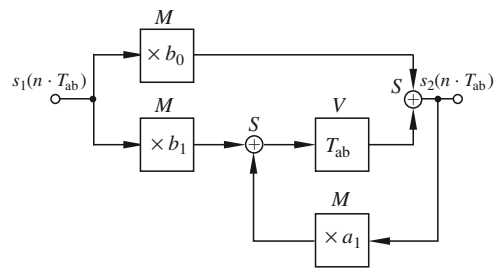


**Bild IX-2** Schaltung für eine Differenzengleichung erster Ordnung; M: Multiplizierer, V: Verzögerungsglied, S: Summierer

Durch geeignete Wahl von  $a_1, b_0$  und  $b_1$  kann das Verhalten der Übertragungsfunktion eingestellt werden. Für eine Differenzengleichung zweiten Grades lässt sich in analoger Weise ableiten:

$$\begin{aligned} a_2 \cdot s_2(nT_{ab}) + a_1 \cdot s_2(\{n-1\} T_{ab}) \\ + a_0 \cdot s_2(\{n-2\} T_{ab}) &= b_2 \cdot s_1(nT_{ab}) \\ + b_1 \cdot s_1(\{n-1\} T_{ab}) + b_0 \cdot s_1(\{n-2\} T_{ab}) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich  $H(z)$ :

$$H(z) = \frac{b_2 \cdot z^2 + b_1 \cdot z + b_0}{a_2 \cdot z^2 + a_1 \cdot z + a_0} = \frac{b_2 + b_1 \cdot z^{-1} + b_0 \cdot z^{-2}}{a_2 + a_1 \cdot z^{-1} + a_0 \cdot z^{-2}} \quad (\text{IX.28})$$

Häufig ist  $b_2 = 1$  oder  $a_2 = 1$ , was durch entsprechenden Multiplizieren der gesamten Formel mit  $1/b_2$  bzw.  $a_2$  erreicht werden kann

■ **Beispiel IX.3:** Ausgangspunkt sind Gleichung (IX.25) und Bild IX-2. Das System ist stabil, wenn nach Gleichung (IX.24) gilt:  $|a_1| < 1$ . Anschaulich nimmt  $s_2(nT_{\text{ab}})$  für  $|a_1| > 1$  mit jeder Abtastung zu und wächst mit  $n \rightarrow \infty$  über alle Grenzen. Wird als Eingangsgröße ein Sprung mit der Amplitude  $U$  verwendet, und sind alle Größen für  $n < 0$  Null, ergibt sich für die Ausgangsgröße  $s_2(nT_{\text{ab}})$  nach der  $n$ -ten Abtastung (Zählbeginn mit  $n=0$ ; einige Rechnung erforderlich):

$$s_2(nT_{\text{ab}}) = U \cdot b_0 \cdot \sum_{\mu=0}^n c^\mu + U \cdot (b_0 + b_1) \cdot \sum_{\mu=0}^n c^{\mu-1} \quad (\text{IX.29})$$

Gilt  $0 < a_1 < 1$ , nähert sich  $s_2(nT_{\text{ab}})$  asymptotisch dem Wert  $U \cdot \frac{2b_0 + b_1}{1 - a_1}$ . Für  $-1 < a_1 < 0$  dagegen ergibt sich für  $n \rightarrow \infty$

der Endwert  $U \cdot \frac{2b_0 + b_1}{1 + a_1}$ , dem sich  $s_2(nT_{\text{ab}})$  oszillierend nähert.

Die in Bild IX-2 dargestellte Schaltung kann damit wegen der Sprungantwort nach Gleichung (IX.29) als Tiefpass interpretiert werden. Für die Auswertung wurden die Summenformeln

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot (-1)^n = \frac{1}{1+x}$$

verwendet.

■ **Beispiel IX.4:** Gegeben ist die Übertragungsfunktion  $H(z)$  eines Systems:

$$H(z) = \frac{z}{z^2 - z + 0,5} = \frac{z}{(z - 0,5 - j \cdot 0,5) \cdot (z - 0,5 + j \cdot 0,5)} \quad (\text{IX.30})$$

Gesucht sind die Impulsantwort und eine Schaltung, mit der sich  $H(z)$  realisieren lässt, sofern das System stabil ist.

Das System ist stabil, weil die Abstände  $x$  der zwei konjugiert komplexen Nullstellen des Nenners vom Koordinatenursprung in der  $z$ -Ebene kleiner als 1 sind:

$$x = +\sqrt{0,5^2 + 0,5^2} = +\sqrt{0,5} < 1$$

Außerdem ist der Zählergrad nicht größer als der Nennergrad. Für die Rücktransformation soll die Korrespondenz Nr. 12 aus Tabelle IX-4 benutzt werden. Eine Partialbruchzerlegung liefert:

$$H(z) = \frac{z}{(z - 0,5 + j \cdot 0,5) \cdot (z - 0,5 - j \cdot 0,5)} = \frac{0,5 + j \cdot 0,5}{(z - 0,5 + j \cdot 0,5)} + \frac{0,5 - j \cdot 0,5}{(z - 0,5 - j \cdot 0,5)}$$

Mit der genannten Korrespondenz folgt:

$$s_2(nT_{\text{ab}}) = \left\{ \sigma[(n-1)T_{\text{ab}}] \times \left\{ \begin{aligned} &[0,5 + j \cdot 0,5] \cdot [0,5 - j \cdot 0,5]^{n-1} \\ &+ [0,5 - j \cdot 0,5] \cdot [0,5 + j \cdot 0,5]^{n-1} \end{aligned} \right\} \right\}$$

Mit  $[0,5 \pm j \cdot 0,5]^{n-1} = \left[ \sqrt{0,5^2 + 0,5^2} \cdot e^{\pm j\phi} \right]^{n-1}$  und  $\phi = \arctan(1)$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} s_2(nT_{\text{ab}}) &= \left\{ \sigma[(n-1)T_{\text{ab}}] \cdot \left\{ \left( \sqrt{0,5} \right)^{n-1} \times \left\{ \begin{aligned} &(0,5 + j \cdot 0,5) \cdot e^{-j \cdot (n-1)\phi} \\ &+ (0,5 - j \cdot 0,5) \cdot e^{j \cdot (n-1)\phi} \end{aligned} \right\} \right\} \right\} \\ &= \left\{ \sigma[(n-1)T_{\text{ab}}] \cdot \left\{ \left( \sqrt{0,5} \right)^{n-1} \times \left\{ \begin{aligned} &0,5 \cdot e^{j \cdot (n-1)\phi} + 0,5 \cdot e^{-j \cdot (n-1)\phi} \\ &+ (-j \cdot 0,5 \cdot e^{j \cdot (n-1)\phi} + j \cdot 0,5 \cdot e^{-j \cdot (n-1)\phi}) \end{aligned} \right\} \right\} \right\} \\ &= \left\{ \sigma[(n-1)T_{\text{ab}}] \cdot \left\{ \left( \sqrt{0,5} \right)^{n-1} \times \left\{ \cos[(n-1)\phi] + \sin[(n-1)\phi] \right\} \right\} \right\} \end{aligned}$$

Am Faktor  $\left\{ \left( \sqrt{0,5} \right)^{n-1} \right\}$  wird auch anschaulich sichtbar, dass das

System stabil ist. Das Ausgangssignal ist die Summe aus einer Sinus- und einer Cosinusschwingung mit abnehmender Amplitude. Mit den Ausführungen zu Gleichung (IX.28) kann die Differenzengleichung, hier zweiten Grades, aus  $H(z)$  nach Gleichung (IX.30) aufgestellt werden. Besonders geeignet ist die Darstellung

$$H(z) = \frac{b_2 + b_1 \cdot z^{-1} + b_0 \cdot z^{-2}}{a_2 + a_1 \cdot z^{-1} + a_0 \cdot z^{-2}}, \quad \text{wenn man beachtet, dass ein Fak-}$$

tor  $z^{-\mu}$  eine  $(\mu \cdot T_{\text{ab}})$ -fache Verzögerung gegenüber  $(n \cdot T_{\text{ab}})$  bedeutet (siehe Gleichung (IX.20)). Dann folgt:

$$H(z) = \frac{z}{z^2 - z + 0,5} \cdot \frac{z^{-2}}{z^{-2}} = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0,5 \cdot z^{-2}}$$

und daraus

$$\begin{aligned} s_2(nT_{\text{ab}}) - s_2((n-1)T_{\text{ab}}) + 0,5 \cdot s_2((n-2)T_{\text{ab}}) \\ = s_1((n-1)T_{\text{ab}}) \end{aligned}$$

Bild IX-3 zeigt eine Schaltung, die das berechnete Verhalten aufweist. Bei Bedarf lässt sich die Zahl der Verzögerungsglieder noch minimieren.

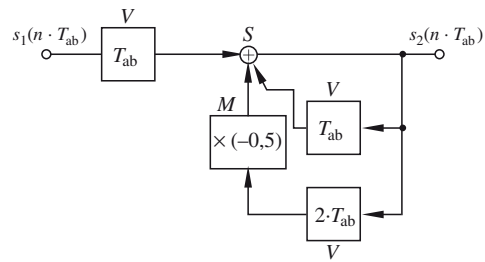


**Bild IX-3** Realisierung zu Beispiel IX.4;  
M: Multiplizierer,  
V: Verzögerungsglied,  
S: Summierer



## X Zufällige Signale

Die hier betrachteten Signale werden auch als stochastische Signale bezeichnet. Sie sind zufällig, d.h. ihr Augenblickswert ist nicht vorhersagbar. Bild X-1 zeigt eine Unterteilung nach den Signaleigenschaften. Über die *nichtstationären* Signale lässt sich keinerlei Aussage machen, und sie werden hier deshalb auch nicht weiter betrachtet. Für die *stationären* Signale gilt, dass ihr Momentanwert zwar auch nicht vorhergesagt werden kann, dass sie aber trotzdem gewisse auswertbare Eigenschaften besitzen, die allerdings statistischer Art sind und deshalb nur mit den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitstheorie erfasst werden können. Zwar sind – theoretisch – für die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie unendlich viele Probenwerte zu nehmen, in der Praxis hat sich aber gezeigt, dass man auch mit einer endlichen Anzahl dem gesuchten Wert schon ausreichend nahe kommen kann.

### 1 Grundbegriffe und Kenngrößen

Die nachfolgend dargestellten Grundbegriffe und Kenngrößen werden in den Beispielen X.1 bis X.7 anschaulich erläutert. Weiterhin haben einige der Begriffe eine zentrale Bedeutung in der Messtechnik und treten deshalb im Abschnitt „Messtechnik“, Kapitel 1, ebenfalls auf. Es wird unterschieden zwischen einer Verteilung und einer Stichprobe. Die funktionale Abhängigkeit einer Verteilung ist in ihrem Verlauf durch häufiges Erfassen bzw. Messen relativ gesichert und damit auch ihre Kenngrößen, während es sich bei einer Stichprobe um einige wenige Werte handelt, von denen auf gewisse statistische Eigenschaften geschlossen werden soll.

- **Wahrscheinlichkeitsdichte(funktion), Häufigkeit,  $h(x)$ :** Sie gibt die relative Häufigkeit an, mit der der Wert  $x$  vorhanden ist. Für einen bestimmten Wert  $x = x_0$  ist ihr Wert gleich der Wahrscheinlichkeit  $w(x = x_0)$ , mit der dieser Wert auftritt. Sie kann aus diskreten Werten bestehen oder aus einer stetigen Funktion.
- **Summenfunktion, Summenhäufigkeitsfunktion,  $H(x)$ :** Sie ist die Summenfunktion der Wahrscheinlichkeitsdichte  $h(x)$ . Sie gibt die Wahrscheinlichkeit  $w(x_0 \leq x)$  an, dass die Zufallsgröße  $x = x_0$  kleiner oder höchstens gleich dem betrachteten Wert  $x$  ist:

$$w(x_0 \leq N) = H(N) = \sum_{x=0}^N h(x)$$

für diskretes  $h(x)$  (X.1a)

bzw.

$$w(x_0 \leq x) = H(x) = \int_{y=-\infty}^x f(y) dy$$

für stetiges  $h(x)$  (X.1b)

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsgröße  $x = x_0$  größer ist als der betrachtete Wert  $x$ , errechnet sich zu:

$$w(x_0 > N) = 1 - w(x_0 \leq N) = 1 - \sum_{x=0}^N h(x)$$

bzw.

$$w(x_0 > x) = 1 - \int_{y=-\infty}^x f(y) dy \quad (\text{X.2})$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert zwischen einem unteren Wert  $x_{\min}$  und einem oberen Wert  $x_{\max}$  liegt, ist:

$$w(x_{\min} \leq X \leq x_{\max}) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} h(x) dx = \int_{-\infty}^{x_{\max}} h(x) dx - \int_{-\infty}^{x_{\min}} h(x) dx \quad (\text{X.3})$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte  $h(x)$  einer stetigen Verteilung kann allerdings nicht mehr als die Wahrscheinlichkeit aufgefasst werden, dass genau der Wert  $x$  auftritt. Dieser Wert ergibt mit Gleichung (X.3) Null.

- **Linearer Mittelwert oder Erwartungswert  $\bar{x}$  einer Verteilung:**

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^N x \cdot h(x) \quad \text{bzw.} \quad \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot h(x) dx \quad (\text{X.4})$$

- **Linearer Mittelwert oder Erwartungswert  $\bar{x}$  einer Stichprobe:** Die gemessenen Werte (z.B. Messwerte, Daten auf einer Datenleitung bei Mehrfachübertragung zur Fehlerreduktion) bilden eine Stichprobe. Wird daraus der Mittelwert gebildet, kann dieser häufig als Schätz- oder Näherungswert eingesetzt werden. In der Messtechnik wird in der Regel aus mehreren Einzelmessungen durch Mittelwertbildung auf den „wahren“ Wert geschlossen.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n \quad (\text{X.5})$$

(Siehe dazu auch Abschnitt „Messtechnik“, Kapitel 1.3 und Beispiel 1.3.)

- **Geometrischer Mittelwert  $\bar{x}_g$ :** Er ist für diskrete Werte  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , definiert:

$$\bar{x}_g = \sqrt[N]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_N} \quad (\text{X.6})$$

- **Median oder Zentralwert  $x_{50}$ :** Die  $x$ -diskreten Werte sind der Größe nach geordnet. Bei einer ungeraden Anzahl ist der in der Mitte liegende Wert der Median, bei einer geraden Anzahl wird aus den beiden mittleren der arithmetische Mittelwert gebildet. Auch dieser Wert wird in der

Messtechnik als Annäherung an den „wahren“ Wert genommen, wenn Ausreißer bei den einzelnen Messwerten eine entsprechend geringe Wertigkeit haben sollen.

- **Varianz  $\sigma^2$  einer Verteilung:** Mit dem linearen Mittelwert aus Gleichung (X.4) folgt:

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^N (x - \bar{x})^2 \cdot h(x)$$

bzw.

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 \cdot h(x) dx \quad (\text{X.7})$$

- **Varianz  $s^2$  einer Stichprobe:** Sie ist ein Maß für die Streuung der Einzelwerte.

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})^2 \quad (\text{X.8})$$

(Siehe dazu auch Abschnitt „Messtechnik“, Kapitel I.3 und Beispiel I.4.)

Der Faktor  $N-1$  im Nenner ergibt sich aus wahrscheinlichkeitstheoretischen Überlegungen und lässt sich praktisch so interpretieren, dass es nicht sinnvoll ist, aus *einem* Messwert die Varianz, d.h. die Streuung, zu bilden:  $s^2(N=1) \rightarrow \infty$ .

- **Standardabweichung  $s$ :**

$$s = +\sqrt{s^2} \quad (\text{X.9})$$

Sie dient in der Messtechnik dazu, Messreihen zu beurteilen mit der Tendenz, dass um so eher vom Mittelwert der Stichprobe nach Gleichung (X.5) auf den „wahren“ Wert geschlossen werden kann, je geringer die Standardabweichung ist.

- **Stationärer Prozess:** Die Wahrscheinlichkeitsdichte und damit die Bestimmung der Mittelwerte nach den Gleichungen (X.4) bis (X.9) hängt nicht davon ab, zu welchem Zeitpunkt dies geschieht:

$$h(x)|_{t=t_1} = h(x)|_{t=t_2}$$

Daraus folgt z.B.

$$\bar{x}|_{t=t_1} = \bar{x}|_{t=t_2} \quad (\text{X.10})$$

- **Ergodischer Prozess:** Gegeben sind mehrere gleichzeitig ablaufende gleichartige Prozesse (Schar). Sind die Mittelwerte eines Prozesses, gebildet über die Zeit, gleich den Mittelwerten, gebildet über die Schar zum gleichen Zeitpunkt, ist der Prozess stationär und ergodisch. Bei Würfeln folgt die gleiche Aussage z.B. über den Mittelwert (Erwartungswert), unabhängig davon, ob mit einem Würfel  $N$ -mal gewürfelt wird oder mit  $N$  Würfeln einmal. Dazu ist ein Hinweis erforderlich: Es kann sein, dass man im Experiment nur eine endliche Anzahl von Proben durchführen kann und damit zwangsweise nicht genau zum gleichen Mittelwert (Erwartungswert) kommt.

- **Autokorrelationsfunktion  $\Phi_{ss}$  (AKF):** Sie gibt die Ähnlichkeit des Signales mit sich selber in Abhängigkeit von der gegenseitigen Verschiebung  $\tau$  an:

$$\Phi_{ss}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^T s(t) \cdot s(t+\tau) dt \quad (\text{X.11})$$

Sind  $s(t)$  und  $s(t+\tau)$  orthogonal zueinander, folgt:

$$\Phi_{ss}(\tau) = 0 \quad (\text{X.11a})$$

Für  $\tau = 0$  erhält man:

$$\Phi_{ss}(\tau = 0) = \overline{s^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^T [s(t)]^2 dt \quad (\text{X.12})$$

Das ist das Quadrat des Effektivwertes und gibt die im Signal enthaltene mittlere Gesamtleistung an ( $P \sim s^2$ ). Es wird vorausgesetzt, dass der Wert des Integrals endlich ist.

Das Maximum hat die AKF für  $\tau = 0$ :

$$\Phi_{ss}(\tau = 0) \geq \Phi_{ss}(\tau \neq 0) \quad (\text{X.13})$$

Mit  $\tau \rightarrow \infty$  folgt für ein beliebiges Signal:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \Phi_{ss}(\tau) = \overline{s^2} \quad (\text{X.14a})$$

Quadrat des zeitlichen Mittelwertes

Die Autokorrelationsfunktion eines stochastischen Signals mit verschwindendem Mittelwert geht mit zunehmender Verschiebung gegen Null:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \Phi_{ss}(\tau) = 0 \quad (\text{X.14b})$$

Mit der Beziehung

- **Parsevalsche Gleichung:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df, \quad (\text{X.15})$$

(siehe auch Erläuterungen zu Gleichung (IV.15)), eingesetzt in Gleichung (X.12), erhält man:

$$\overline{s^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^T [S(f)]^2 df \quad (\text{X.16})$$

- **Spektrale Leistungsdichte, Theorem von Wiener-Khintchine:**

Der Ausdruck

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot |S(f)|^2 = S_{ss}(f) \quad (\text{X.17})$$

aus Gleichung (X.16) wird als spektrale Leistungsdichte bezeichnet. Damit gilt auch:

$$\overline{s^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{ss}(f) df \quad (\text{X.18})$$

Man kann zeigen, dass die Fouriertransformierte der spektralen Leistungsdichte gleich ist der Autokorrelationsfunktion und umgekehrt (Theorem von Wiener-Khintchine):

$$\mathbf{F}\{S_{ss}(f)\} = \Phi_{ss}(\tau)$$

bzw.

$$\mathbf{F}^{-1} \{ \Phi_{ss}(\tau) \} = S_{ss}(f) \quad (\text{X.19})$$

Damit reicht das Vorhandensein der Autokorrelationsfunktion aus, um das spektrale Verhalten eines Vorganges vollständig zu beschreiben. Allerdings enthält die spektrale Leistungsdichte keine Phaseninformation mehr, denn sie ist durch die Betragsbildung verlorengegangen. Damit steht sie auch der Autokorrelationsfunktion nicht zur Verfügung.

Das Leistungsdichtespektrum von Signalen, auch stochastischen, ist durch Bandpassfilter bestimmbar:

$$S_{ss}(f = f_0) = \frac{1}{\Delta f} \cdot s_0^2 \quad (\text{X.20})$$

Aus Gleichung (X.16) folgt, dass es einen Vorgang, der bis zu unendlich hohen Frequenzen eine konstante Leistungsdichte hat, nicht geben kann, weil das Integral dann divergiert. Deshalb ist der Begriff „Weißes Rauschen“ so zu verstehen, dass das Spektrum stets frequenzbegrenzt ist. Stationäre stochastische Signale haben keine Fouriertransformierte. Korrelationsfunktionen gehen aber für größere Verschiebungen gegen Null, sodass sie transformierbar sind. Damit wird die Beziehung nach Gleichung (X.18) möglich.

Allgemein gilt, dass Transformationen umkehrbar sind, Mittelungsoperationen dagegen nicht.

- **Kreuzkorrelationsfunktion  $\Phi_{s_1 s_2}$  (KKF):**

Erfasst wird die Ähnlichkeit zweier unterschiedlicher Signale in Abhängigkeit von der Verschiebung  $\tau$ :

$$\Phi_{s_1 s_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^T s_1(t) \cdot s_2(t + \tau) dt \quad (\text{X.21})$$

$s_1, s_2$  beliebige zeitkontinuierliche Funktionen

Zwei Signale sind voneinander unabhängig (*nicht korreliert*), wenn gilt

$$\Phi_{s_1 s_2}(\tau) = 0 \quad \text{für alle } \tau \quad (\text{X.22})$$

Beispiel X.2 zeigt, dass der Kreuzkorrelationsfunktion eine physikalische Bedeutung gegeben werden kann.

Die zwei Signale  $s_1(t)$  und  $s_2(t)$  haben die Energie

$$E_{s_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \{s_1(t)\}^2 dt$$

bzw.

$$E_{s_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \{s_2(t)\}^2 dt \quad (\text{X.23})$$

Erfüllen die zwei Funktionen die Bedingung

$$s_1(t) \sim s_2(t), \quad (\text{X.24})$$

hat die Kreuzkorrelationsfunktion ihren größten Wert:

$$\Phi_{s_1 s_2}(0) = \sqrt{E_{s_1} \cdot E_{s_2}} \quad (\text{X.25})$$

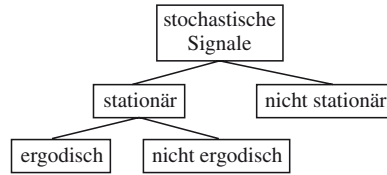


**Bild X-1** Einteilung stochastischer Signale

Dies gilt für jedes  $\tau$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{s_1(t)\}^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \{s_1(t + \tau)\}^2 dt \quad (\text{X.26})$$

Danach liefert die Kreuzkorrelierte den Maximalwert, wenn für ein bestimmtes  $\tau$  gilt:

$$s_1(t) \sim s_2(t + \tau) \quad (\text{X.27})$$

Nach *N. Wiener* gilt auch:

$$\Phi_{ss}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(f) \cdot S_1^*(f) \cdot e^{j2\pi f \tau} df \quad (\text{X.28})$$

Verglichen mit

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(f) \cdot H(f) \cdot e^{j2\pi f t} df \quad (\text{X.29})$$

folgt daraus:

$s_2(t = 0)$  ist maximal, wenn gilt:

$$H(f) = k \cdot S_1^*(f) \quad (\text{X.30})$$

Darin ist  $k$  eine dimensionsbehaftete Konstante vom Betrag 1.

■ **Beispiel X.1:** Es wird mit einem oder mehreren Würfeln mit den Augenzahlen 1 bis 6 gewürfelt. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für das Auftreten der Augenzahlen 1, 2, ..., 6 besteht aus diskreten Werten:  $w(1) = w(2) = w(3) = w(4) = w(5) = w(6) = 1/6$ . Wird die Augenzahl 4 betrachtet ( $x = 4$ ), ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Augenzahlen  $x \leq 4$  nach Gleichung (X.2):  $w(x_0 \leq 4) = w(1) + w(2) + w(3) + w(4) = 2/3$ . Für das Auftreten der Augenzahlen 5 und 6 gilt:  $w(5) + w(6) = 1/3$ , oder, mit Gleichung (X.3):  $w(x_0 > 4) = 1 - w(x_0 \leq 4) = 1 - 2/3 = 1/3$ . Zählt man die Augenzahlen der einzelnen Würfel zusammen und teilt durch die Anzahl der Würfel, nähert man sich mit zunehmender Zahl der Würfel dem Erwartungswert

$$\frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = 3,5. \quad \text{Der Median berechnet sich bei gerader}$$

Anzahl der Werte zu  $(3 + 4)/2 = 3,5$ . Für die Varianz  $s^2$  erhält man mit Gleichung (X.8):  $s^2 = 3,5$ . Weiterhin ist der Erwartungswert unabhängig davon, wie die einzelnen Würfel zeitlich liegen, der Prozess ist damit stationär. Er ist auch nicht davon abhängig, ob mit einem Würfel  $N$  Würfel nacheinander ausgeführt werden oder ob mit  $N$  Würfeln gleichzeitig gewürfelt wird: Der Prozess ist stationär und ergodisch. Hier zeigt sich anschaulich, dass die endliche Anzahl von Proben (Würfen) zu einem geringfügig voneinander abweichenden Erwartungswert für beide Experimente führt.

■ **Beispiel X.2:** Von den zwei Signalen  $s_1(t) = \hat{u} \cdot \sin \omega_0 t$ ;  $s_2(t) = \hat{i} \cdot \sin \omega_0 t$  soll die Kreuzkorrelationsfunktion  $\Phi_{s_1 s_2}$  nach Gleichung (X.21) gebildet werden:

$$\Phi_u(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \hat{u} \cdot \sin \omega_0 t \cdot \hat{i} \cdot \sin \omega_0(t + \tau) dt$$

Unter Verwendung eines Additionstheorems und einiger Rechnung folgt mit  $\varphi = \omega_0 \cdot \tau$ :

$$\Phi_{uu}(\varphi) = \frac{\hat{u} \cdot \hat{u}}{2} \cdot \cos \varphi = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot \cos \varphi$$

Das ist die Wirkleistung in Abhängigkeit von der Verschiebung  $t$  bzw.  $\varphi$ .

Wird nur  $s_1$  verwendet und die Autokorrelationsfunktion nach Gleichung (X.11) gebildet, erhält man:

$$\Phi_{uu}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \hat{u}^2 \cdot \sin \omega_0 t \cdot \sin \omega_0 (t + \tau) dt$$

$$\text{und daraus } \Phi_{uu}(\varphi) = \frac{\hat{u}^2}{2} \cdot \cos \varphi.$$

Die Ähnlichkeit ist maximal, wenn die Zeitverschiebung Null ist.  $\Phi_{uu}$  stellt, bis auf den Maßstabsfaktor  $1/R$  (Ohmscher Widerstand), die Wirkleistung dar. Anschaulich einsichtig ist, dass sie am größten ist, wenn die Ähnlichkeit des Signals mit sich selbst am größten ist. Der für  $\Phi_{uu}$  berechnete Ausdruck ist Null für  $\varphi = \pm 90^\circ$ , und damit sind nach Gleichung (X.11a) die Sinus- und die Cosinusfunktion orthogonale Funktionen.

## 2 Verteilungen

Um die in der Praxis gegebenen Abhängigkeiten formelmäßig wiedergeben zu können, sind unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsfunktionen entwickelt worden. Hier sollen drei betrachtet werden.

### 2.1 Binomialverteilung

Das Kennzeichen dieser Verteilung ist, dass nur zwei Ereignisse auftreten können, die sich aber gegenseitig ausschließen ( $E$ ,  $\bar{E}$ ). Die zugeordneten Wahrscheinlichkeiten  $w$  werden mit  $p$  und  $q$  bezeichnet:

$$w(E) = p; \quad w(\bar{E}) = 1 - p = q \quad (\text{X.31})$$

Das Experiment wird  $N$ -mal wiederholt. Es gilt:

$$w(x_0 = x) = h(x) = \binom{N}{x} \cdot p^x \cdot q^{(N-x)} \quad (\text{X.32})$$

Die Funktion  $h(x)$  gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass bei  $N$  Proben (Versuchen) das Ereignis  $E$  mit der Wahrscheinlichkeit  $w(E) = p$  genau  $x$ -mal eintritt und daraus folgend das Ereignis  $\bar{E}$  mit der Wahrscheinlichkeit  $w(\bar{E}) = 1 - p = q$  genau  $(N - x)$ -mal.

- **Summenfunktion:**

$$w(x_0 \leq x) = H(x) = \sum_{m=0}^N \binom{N}{m} p^m \cdot q^{(N-m)} \quad (\text{X.33})$$

- **Mittelwert:**

$$\bar{x} = \sum_{x=0}^N x \cdot \binom{N}{x} \cdot p^x \cdot q^{(N-x)} = N \cdot p \quad (\text{X.34})$$

- **Standardabweichung:**

$$s = \sqrt{N \cdot p \cdot q} \quad (\text{X.35})$$

Mit entsprechenden Programmen oder Tabellen können die Werte für  $h(x)$  und  $H(x)$  bei gegebenem  $p$  und  $x$  auf einfache Weise bestimmt werden.

■ **Beispiel X.3:** Bei der Fertigung von Geräten sind 5 % fehlerhaft. Zur Qualitätskontrolle werden Stichproben durchgeführt, indem ein beliebiges Gerät entnommen, geprüft und wieder zurückgestellt wird. Anschließend wird das nächste Gerät entnommen usw. Das geschieht insgesamt 50mal. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, unter den 50 untersuchten Teilen genau fünf fehlerhafte zu finden. Mit  $N = 50$ ,  $p = 0,05$ ,  $q = 0,95$ ,  $x_0 = 5$  ergibt sich:

$$w(x_0 = 5) = h(5) = \binom{50}{5} \cdot 0,05^5 \cdot 0,95^{45} = 0,0658$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 6,58 %.

### 2.2 Poissonverteilung

Betrachtet werden Ereignisse, die zu zufälligen Zeitpunkten stattfinden.  $x$  ist die Anzahl der Ereignisse in einem vorgegebenen Zeitintervall, die nicht von der Lage des Zeitintervalls abhängt. Für unterschiedliche aber gleichlange Zeitintervalle ergeben sich auch unterschiedliche Werte für  $x$ . Mit steigender Zeitintervalllänge steigt auch die Anzahl der Ereignisse. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem Zeitintervall genau  $x_0$  Ereignisse stattfinden, ist durch folgende Formel gegeben:

$$w(x_0 = x) = h(x) = \frac{a^x}{x!} \cdot e^{-a} \quad \text{mit } a = \bar{x} \quad (\text{X.36})$$

Sie erfüllt also die Nebenbedingung, dass der Mittelwert, gebildet nach Gleichung (X.4), den Wert  $a$  ergibt. Für die Summenfunktion  $H(x)$  gilt:

$$H(x) = \sum_{m=0}^x \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a} \quad (\text{X.37})$$

■ **Beispiel X.4:** Messungen in einer verkehrsberuhigten Zone haben folgendes ergeben: 1. Im Mittel fährt alle 10 Minuten ein Auto. 2. Es gilt die Poissonverteilung. Mit  $a = 1$  können folgende Aussagen gemacht werden:

1. Wahrscheinlichkeit, dass in 10 Minuten kein Auto fährt:

$$w(x_0 = 0) = h(0) = \frac{1^0}{0!} \cdot e^{-1} = 0,368$$

2. Wahrscheinlichkeit, dass in 10 Minuten genau zwei Autos fahren:

$$w(x_0 = 2) = h(2) = \frac{1^2}{2!} \cdot e^{-1} = 0,184$$

3. Wahrscheinlichkeit, dass in 10 Minuten höchstens zwei Autos fahren:

$$w(x_0 \leq 2) = H(2) = \frac{1^0}{0!} \cdot e^{-1} + \frac{1^1}{1!} \cdot e^{-1} + \frac{1^2}{2!} \cdot e^{-1} = 0,925$$

4. Wahrscheinlichkeit, dass in 10 Minuten weniger als zwei Autos fahren:

$$w(x_0 < 2) = w(x_0 \leq 1) = H(1) = 0,74$$

5. Wahrscheinlichkeit, dass in 10 Minuten mindestens drei Autos fahren:

$$w(x_0 \geq 3) = 1 - w(x_0 \leq 2) = 1 - H(2) = 1 - 0,925 = 0,075$$

6. Wahrscheinlichkeit, dass in 10 Minuten mehr als drei Autos fahren:

$$w(x_0 > 3) = 1 - w(x_0 \leq 3) = 1 - H(3) = 1 - 0,98 = 0,02$$

### 2.3 Normalverteilung, Gaußverteilung

Die Normal- oder Gaußverteilung wird sehr häufig eingesetzt. Sie beschreibt statistische Vorgänge immer dann, wenn viele unterschiedliche Einflussgrößen

ßen wirksam sind und diese sich untereinander nicht beeinflussen (siehe dazu „Zentraler Grenzwertsatz der Statistik“ unten). Dichte- und Summenfunktion sind wie folgt definiert:

$$h(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x-\bar{x}}{\sigma} \right)^2} \quad (\text{X.38})$$

$$w(x_0 \leq x) = H(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{y=-\infty}^x e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{y-\bar{x}}{\sigma} \right)^2} dy \quad (\text{X.39})$$

Diese Art der Darstellung wird mit  $(\bar{x}, \sigma)$ -Normalverteilung bezeichnet. Darin ist  $\bar{x}$  der Erwartungswert und  $\sigma$  die Standardabweichung. Die Funktion  $h(x)$  hat einen glockenförmigen Verlauf („Gaußsche Glockenkurve“) und ist symmetrisch zum Mittelwert  $\bar{x}$ . Die Wendepunkte liegen bei  $x_{1,2} = \bar{x} \pm \sigma$ . Durch eine Koordinatentransformation kann der Mittelwert in den Koordinatenursprung gelegt werden:

$$h^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} y^2} \quad \text{mit} \quad y = \frac{x-\bar{x}}{\sigma} \quad (\text{X.40})$$

$$H^*(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-v^2/2} dv \quad (\text{X.41})$$

Sie wird  $(0, 1)$ -Normalverteilung genannt, ihre Wendepunkte liegen bei  $\pm y$ . Folgende Angaben werden häufig benutzt:

- Im Bereich  $-1 \leq y \leq +1$  liegen 68,3 % der Werte ( $\sigma$ -Grenze),
- im Bereich  $-2 \leq y \leq +2$  liegen 95,5 % der Werte ( $2\sigma$ -Grenze),
- im Bereich  $-3 \leq y \leq +3$  liegen 99,7 % der Werte ( $3\sigma$ -Grenze). (X.42)

Außerhalb der  $3\sigma$ -Grenze liegen demnach nur noch 0,3 % der Zufallsgrößen.

- **Zentraler Grenzwertsatz der Statistik:** Die Summe aus  $N$  voneinander unabhängigen stochastischen Vorgängen mit untereinander gleicher, aber beliebiger Wahrscheinlichkeitsdichte strebt für  $N \rightarrow \infty$  gegen die Gaußverteilung.

- **Beispiel X.5:** Die Lebensdauer von Leuchtmitteln (mit Glühfaden) bei Nennspannung beträgt etwa 1200 Stunden und ist normalverteilt. Die Standardabweichung liegt bei etwa 100 Stunden. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Leuchtmittel mindestens 1400 Stunden brennt, berechnet sich zu:

$$w(x_0 > 1400) = 1 - w(x_0 \leq 1400) = 1 - H(1400) = 1 - 0,977 = 0,023 = 2,3 \%$$

Die Wahrscheinlichkeit für eine mindestens 1000stündige Brenndauer beträgt:

$$w(x_0 > 1000) = 1 - w(x_0 \leq 1000) = 1 - 0,023 = 0,977 = 97,7 \%$$

Die Wahrscheinlichkeit für eine Brenndauer im Bereich (1000 ... 1400) h liegt bei

$$w(1000 \leq x_0 < 1400) = H(1400) - H(1000) = 0,954 = 95,4 \%$$

### 3 Rauschen

Rauschen ist ein zufälliges Signal, das durch die ungeordnete Wärmebewegung von Ladungsträgern hervorgerufen wird. Im Abschnitt „Nachrichtentechnik“, Kapitel 4.11.1, Rauschen, sind die wichtigsten Rauschquellen und deren Rauschspannungen bzw. -ströme dargestellt. Hier sollen weitere Einzelheiten behandelt werden.

• **Zusammenschalten mehrerer rauschender Elemente:**  
Ein Widerstand liefert die folgenden Größen:  
Rauschspannung am Widerstand

$$\bar{u}_R = \sqrt{4kTB/R} \quad (\text{X.43})$$

Rauschstrom im Widerstand

$$\bar{i}_R = \sqrt{4kTB/R} \quad (\text{X.44})$$

$k$  Boltzmann-Konstante  $1,38 \cdot 10^{-23}$  Js/K,  $T$  absolute (thermodynamische) Temperatur in K,  $B$  Bandbreite (ausgewerteter oder berücksichtigter Frequenzbereich) in Hz,  $R$  Widerstand in  $\Omega$

Das Ersatzschaltbild eines rauschenden Widerstandes ist in Bild X.2 dargestellt. Zu dem als rauschfrei angenommenen Widerstand  $R$  wird eine Rauschspannungsquelle mit einer Spannung nach Gleichung (X.43) in Reihe geschaltet bzw. eine Stromquelle mit einem Rauschstrom nach Gleichung (X.44) parallelgeschaltet. Da es sich um statistische Größen handelt, wird der Mittelwert eingesetzt. Bei der Reihenschaltung zweier rauschender Widerstände werden die rauschfreien Anteile sowie die Quadrate der Rauschspannungen addiert. Das ist möglich und erforderlich, weil die einzelnen Rauschspannungen nicht korreliert sind (Bild (X-2b):

$$\begin{aligned} R_g &= R_1 + R_2; \\ \bar{u}_{R_g}^2 &= 4kT_1BR_1 + 4kT_2BR_2 \\ &= 4kB(T_1R_1 + T_2R_2) \end{aligned} \quad (\text{X.45 a})$$

Dabei können die Widerstände unterschiedliche Temperatur haben, die Bandbreite ist in der Regel als ausgewerteter Frequenzbereich für beide Widerstände gleich.

Sind die Widerstände parallelgeschaltet, wird das Stromquellenersatzschaltbild eingesetzt, und man erhält nach Bild X-2b:

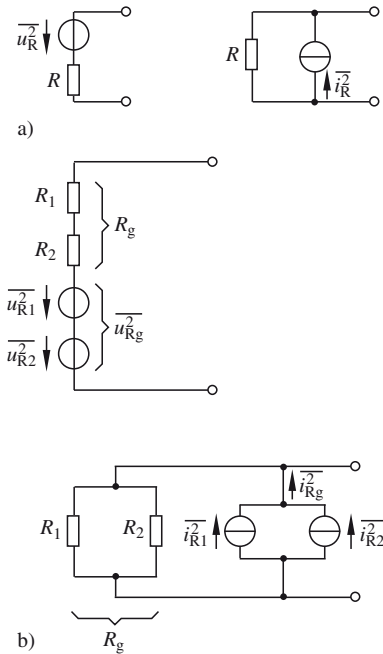
$$\begin{aligned} R_g &= \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}; \\ \bar{i}_{R_g}^2 &= 4kT_1B/R_1 + 4kT_2B/R_2 \\ &= 4kB(T_1/R_1 + T_2/R_2) \end{aligned} \quad (\text{X.45 b})$$

Es ist möglich, für die Rauschquellen eine Spannungs- bzw. Stromrichtung anzugeben, obwohl das nach den Gleichungen (X.43) und (X.44) nicht sinnvoll ist.

Enthält ein Signalkreis z.B. neben einem rauschenden Widerstand eine weitere Rauschquelle, die z.B. das Schrotrauschen erfasst (Abschnitt „Nachrichtentechnik“, Kapitel 4.11.1):

$$\bar{i}_s^2 = 2 \cdot q_e \cdot I \cdot B \quad (\text{X.46})$$

$q_e$  Elementarladung des Elektrons  $1,6 \cdot 10^{-19}$  As,  $I$  Anoden- bzw. Halbleiterstrom in A,  $B$  Bandbreite in Hz

**Bild X-2** Widerstände als Rauschquelle

a) Ersatzschaltbild

b) Zusammenschaltung von rauschenden Widerständen

folgt für das Quadrat des Gesamttrauschstromes  $\overline{i_g^2}$ :

$$\overline{i_g^2} = \overline{i_R^2} + \overline{i_s^2} = 4kTB/R + 2q_e IB \quad (\text{X.47})$$

Formelzeichen siehe Gleichungen (X.44) und (X.46).

Für die Korrelationsfunktionen gilt:

$$\Phi_{NN}(\tau) = 0 \quad \text{für } \tau \neq 0 \quad (\text{theoretisch}) \quad (\text{X.48 a})$$

$$\Phi_{s1N} = 0 \quad \text{für alle } \tau \quad (\text{theoretisch}) \quad (\text{X.48 b})$$

Indizes:  $N$  für Rauschen (Noise),  $s1$  beliebiges Signal außer Rauschen

Diese theoretischen Werte werden in der Praxis nur angenähert erreicht.

• **Kennzeichnung von stochastischen Signalen:**

Da die Signale in ihrem Verlauf nicht vorhersagbar sind, können nur statistische Größen zur Kennzeichnung verwendet werden. Ist die Entstehung des stochastischen Signals bekannt, lassen sich Leistungsdichte und relative Häufigkeiten im voraus berechnen. Sie beschreiben dann das Signal.

■ **Beispiel X.6:** Für den Eingangswiderstand eines Oszilloskops gelten folgende Werte:  $R = 1 \text{ M}\Omega$ , Temperatur  $T = 300 \text{ K}$  ( $\approx 27^\circ \text{C}$ ), berücksichtigte Bandbreite  $B = 10 \text{ MHz}$ . Dann berechnet sich die Rauschspannung nach Gleichung (X.43) zu:

$$\begin{aligned} \overline{u_R} &= \sqrt{4kTB R} \\ &= \sqrt{4 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{VAs}}{\text{K}} \cdot 3 \cdot 10^2 \text{ K} \cdot 10^7 \frac{1}{\text{s}} \cdot 10^6 \frac{\text{V}}{\text{A}}} = 407 \mu\text{V} . \end{aligned}$$

Eine Rauschspannung dieser Größenordnung müsste am Bildschirm sichtbar sein, wenn weitere Rauschquellen vernachlässigt werden und wenn nicht zwei Effekte den Wert verringerten: 1. Am Oszilloskopeingang liegt ein Kondensator von etwa  $50 \text{ pF}$  parallel zum Widerstand, sodass die höherfrequenten Rauschanteile in ihrer Amplitude abnehmen. 2. Der Innenwiderstand der den Oszilloskopeingang speisenden Quelle ist häufig niedriger als der Eingangswiderstand des Oszilloskops.

## 4 Signalerkennung bei gestörter Übertragung

An dieser Stelle können nur die Grundüberlegungen vorgestellt werden, weitere Einzelheiten sind z.B. in [X.1] enthalten. Einige zusätzliche Informationen können im Abschnitt „Nachrichtentechnik“, Kapitel XVII, nachgesehen werden.

### 4.1 Erkennen versteckter Periodizitäten

Ein Signal  $s_g(t)$  besteht aus der Summe von Nutzsignal  $s(t)$  und Störsignal  $n(t)$ :  $s_g(t) = s(t) + n(t)$ . Wird von  $s_g(t)$  die Autokorrelationsfunktion gebildet, entstehen die folgenden Kombinationen:

$$\Phi_{s_g s_g}(\tau) = \Phi_{ss}(\tau) + \Phi_{nn}(\tau) + \Phi_{sn}(\tau) + \Phi_{ns}(\tau) .$$

Darin sind  $\Phi_{ss}(\tau)$  und  $\Phi_{nn}(\tau)$  Autokorrelationsfunktionen,  $\Phi_{sn}(\tau)$  und  $\Phi_{ns}(\tau)$  Kreuzkorrelationsfunktionen. Sind Nutz- und Störsignal unkorreliert, was in der Regel der Fall ist, ergeben die zwei Kreuzkorrelationsfunktionen Null. Gilt für das Nutzsignal z.B.  $s(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ , berechnet sich  $\Phi_{ss}$  mit Gleichung (X.11) zu:

$$\Phi_{ss}(\tau) = \frac{\hat{u}^2}{2} \cdot \cos \omega \tau .$$

Der Wert der Autokorrelationsfunktion des Störsignals, das sein Entstehen dem Zufall verdankt, nimmt für wachsendes  $\tau$  stetig ab.

Dagegen ist  $\Phi_{ss}(\tau)$  periodisch mit konstantem Scheitelwert, sodass das Verhältnis von Nutz- zu Störsignal mit wachsendem  $\tau$  immer größer wird. In der Praxis können nur endliche Zeiten verwendet werden, und damit sind die „Kurzzeitkorrelierten“  $\Phi_{nn}(\tau)$ ,  $\Phi_{sn}(\tau)$  und  $\Phi_{ns}(\tau)$  noch nicht Null und erschweren die Signalerkennung.

### 4.2 Signalerkennung allgemein

Die Grundlage bildet Gleichung (X.27). Das Signal  $s_1(t)$  wird gespeichert und anschließend die Kreuzkorrelierte mit den nachfolgenden Signalen gebildet. Sind für ein bestimmtes  $\tau$  das gespeicherte und das ankommende Signal einander proportional, ergibt sich ein maximaler Wert im Korrelator. Er ist gleich dem Maximalwert der Autokorrelationsfunktion  $\Phi_{ss}$ .

### 4.3 Signalangepasste Filter (matched filter)

Nach Gleichung (X.30) muss für ein optimales Filter gelten:  $H(f) = k \cdot S_1^*(f)$ . Das setzt voraus, dass das empfangende Signal in seinem Verlauf bekannt ist, was aber häufig der Fall ist. Im Abschnitt „Nach-



richtentechnik“, Kapitel XVII.2, sind weitere Einzelheiten aufgeführt.

Es kann noch eine Aussage über den Einfluss eines signalangepassten Filters auf das Verhältnis von Nutz- zu Störsignal gemacht werden. Die Spektraldichte von weißem Rauschen sei  $N_0$ , dann folgt daraus mit Gleichung (X.12) und Gleichung (X.15):

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot |S_N(f)|^2 = \frac{N_0}{2} \quad (\text{X.49})$$

$S_N(f)$  im Intervall  $-T \dots +T$  enthaltener Rauschteil

Die im Signal  $s_1(t)$  enthaltene Energie ist nach einem entsprechendem Ansatz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |S_1(f)|^2 df = E_{S1} \quad (\text{X.50})$$

Das quadratische Verhältnis von Nutz- zu Störsignal beträgt:

$$a_{SN}^{(2)} \Big|_{\text{Korr}} = \frac{2E_{S1}}{N_0} \quad (\text{X.51})$$

Bei einem Bandfilter berechnet sich das entsprechende quadratische Verhältnis (hier ohne Ableitung) zu:

$$a_{SN}^{(2)} \Big|_{\text{BaFi}} = \frac{E_{S1}}{N_0 BT} \quad (\text{X.52})$$

$B$  Bandbreite des Filters in Hz,  $T$  Signaldauer in s

Darin ist für das – ideale – Filter angenommen worden:  $|H(f)| = 1$  im Bereich  $-B \dots +B$ , 0 sonst.

Bildet man den Quotienten

$$\frac{a_{SN}^{(2)} \Big|_{\text{Korr}}}{a_{SN}^{(2)} \Big|_{\text{BaFi}}} = \frac{\frac{2E_{S1}}{N_0}}{\frac{E_{S1}}{N_0 BT}} = 2BT \quad (\text{X.53})$$

so folgt daraus: Das quadratische Verhältnis von Nutz- zu Störsignal ist bei einem signalangepassten Filter gegenüber einem – idealen – Bandfilter um so größer, je größer die Bandbreite und die Signaldauer sind.

■ **Beispiel X.7:** Die praktische Anwendung von Rauschsignalen und der Korrelation soll an einigen Beispielen gezeigt werden [X.1].

1. In der Automobiltechnik werden zum Testen der Federungs-einrichtungen stochastische Signale eingesetzt, weil sie alle Möglichkeiten der in der Praxis vorkommenden Belastungs-fälle erfassen.
2. Zum Messen der Schalldämmung zwischen nebeneinander-liegenden Räumen werden in einem Raum Rauschsignale über Lautsprecher ausgesendet und im Nachbarraum über Mikrofon empfangen. Dieses Verfahren hat gegenüber der Aussendung von Sinussignalen veränderbarer Frequenz den Vorteil, dass im Senderraum keine stehenden Wellen auftreten und das Er-gebnis verfälschen.
3. Zum Testen der Störsicherheit von elektronischen Geräten (z.B. Router) werden Rauschsignale verwendet, weil bei genügend langer Testzeit so gut wie alle Möglichkeiten der in der Praxis auftretenden Störsignale vorhanden waren.
4. Im Abschnitt „Messtechnik“, Kapitel XI.4.2.3, ist ein Verfah-ren zur Abstandsmessung unter Verwendung der Korrelation beschrieben.

## Literaturverzeichnis

### Literatur allgemein:

- Holbrook, J. G.:* Laplace-Transformationen. Verlag Vieweg + Sohn Braunschweig. 1970.
- Küpfmüller, K.:* Die Systemtheorie der elektrischen Nachrichtenübertragung. Verlag S. Hirzel Stutt-gart. 3. Auflage 1968.
- Weißgerber, W.:* Elektrotechnik für Ingenieure 3. Verlag Vieweg-Teubner Wiesbaden. 7. Auflage 2009.

### Literatur zu Kapitel IX:

- [IX.1] *Lechner, W. und Lohl, N.:* Analyse digitaler Signale. Verlag Vieweg Braunschweig/Wiesbaden. 1990.
- [IX.2] *Doetsch, G.:* Anleitung zum praktischen Ge-brauch der Laplace- und der Z-Transformation. Verlag Oldenbourg München Wien. 4. Auflage 1981.

### Literatur zu Kapitel X:

- [X.1] *Ehrenstrasser, G.:* Stochastische Signale und ihre Anwendung. Verlag Hüthig Heidelberg. 1974.



# Sachwortverzeichnis

8051 581, 582  
8085 569, 591, 595, 599  
80C515 590  
8155 572, 573, 574  
8255 565, 566, 567, 568

## A

AB-Betrieb 375  
Abbildungsgleichung 180  
Abbildungsmaßstab 180  
A-Betrieb 375  
Abfallzeit 392  
Abgleichverfahren 740  
abhängige Variablen 961  
Abhängigkeitsnotation 451  
Ablauf-Funktionsplan 661  
Ablaufkette 662  
Ablaufsteuerung 661  
Ablaufabelle 448  
Abschirmung 777  
absolute Dielektrizitätskonstante 223  
absolute Messabweichung 718  
absoluter elektroakustischer Übertragungsfaktor 1051  
absoluter Leistungspegel 916  
absoluter Spannungspegel 916  
absoluter Strompegel 916  
Absorptionsgesetz 469  
Abstandsmessung 791  
Abtastfrequenz 910  
Abtast-Halte-Glied 788, 1000  
Abtasttheorem 910, 1115  
–, im Frequenzbereich 911  
–, im Zeitbereich 910  
Abtastzeit  $T_A$  675, 683  
Abweichungsförtpflanzung 720  
Abweichungsgrenzen 719, 790  
adaptive Deltamodulationsverfahren 1004  
Addierer 386, 486, 487, 488, 489  
Adressbus 538  
Adressdecoder 562, 565  
Adressdecodierer 564  
Adressen 537  
Adressenzwischenspeicher 536  
Adressierung 596  
Adressierungsarten 596  
Adress-Latch 572  
ADSL 1067  
Aiken-Code 481, 482

Akkumulator 536, 541  
Aktionsblock 663, 664  
aktiven Hochpass-Filter 390  
akustischer Kurzschluss 1057  
Akzeptanzwinkel 1040  
ALGOL 615  
Aliasing 788  
Aliasing-Effekt 1000  
Allpass 700  
Allpassfilter 1022  
alternative Energien 841  
Alternativ-Verzweigung 663  
ALU 533, 536, 583  
Amplitudenmodulation 979  
Amplitudenrand 706  
Amplitudenreserve 706  
Amplitudenspektrum 906, 1097  
–, komplexes 1094  
Amplitudenumtastung (ASK) 992  
Amplitudenverstärkung 387  
Analog-Digital-Wandler 397  
analoge Signale 419, 903  
Analogverstärker 349  
Analyse 473, 475  
Anfangsreaktanz der Synchronmaschine 892  
Ankerrückwirkungen 821  
Anlagenräume 878  
Anlassverfahren 808  
Anlaufmoment 823  
Anomalie des Wassers 160  
Anpassung 938  
Anpassungsfaktor 943  
Anregelzeit 708  
Anreicherungstyp 336  
Anschlusskennzeichnung 446  
Anschlussplan 448  
Anstiegsgeschwindigkeit 399  
Anstiegszeit 392  
Antennen 968  
Antennengewinn 970  
Antennengewinnfaktor 970  
Antennengewinnmaß 970, 1036  
Antennenverlängerung 969  
Antialiasingfilter 1116  
Antidiffusionsspannung 299  
Antiferromagnetismus 264  
 $\Delta$ -Parameter 922  
Approximation 789  
Äquipotentiallinien 245  
Arbeit 150, 241  
Arbeit im Wechselstromkreis 288

Arbeiten an elektrischen Anlagen 889  
Arbeitsgerade 350  
Arbeitspunkt 350, 692  
Arbeitspunkt-Stabilisierung 355  
arithmetischer Mittelwert 312, 719, 722, 789, 913  
Aron 747  
Array 507, 520  
ASCII-Code 483  
ASI 782  
AS-i-Bus 667  
ASIC 520  
Assembler 592, 599, 600, 601, 602, 614  
Assoziativgesetz 469  
astabile Kippstufen 505  
Asynchronzähler 500, 501  
Ätzen 454  
Auflösung 612  
Aufruf von Funktionen in AWL 661  
Aufruf von Funktionsbausteinen in AWL 660  
Aufruf von Funktionsbausteinen in FBS 660  
Aufstellen von Transformatoren 801  
Auftrieb 158  
Auftriebskraft 158  
Auge 182  
Ausbreitungsgeschwindigkeit 170  
Ausbreitungskoeffizient 937, 955  
ausfahrbare Schaltgeräte 873  
Ausgabeeinheit 584  
Ausgabeport 564  
Ausgangsreflexionsfaktor 960  
Ausgleichsgerade 790  
Ausgleichsleitungen 762  
Ausgleichsstrom 238, 800  
Ausgleichszeit 678  
Auslöseregel 862  
Ausregelzeit 687, 708  
Ausschaltzeit 392  
Ausschlagverfahren 740  
Außenleiterspannungen 851  
Außenpolmaschine 814  
austeine 528  
Austrittsarbeit 190  
Auswahl von Motoren 831  
Autokorrelation 791

Autokorrelationsfunktion 913, 1123  
 automatische Verstärkungsregelung 1024  
 Automatisierung 643  
 Automatisierung von Messabläufen 791  
 Autonegotiation 633  
 Avogadro-Konstante 161

## B

B2B 619  
 Bahngeschwindigkeit 146  
 Bandbreite 287, 980  
 Bandbreite B 1005  
 Bändchenmikrofon 1054  
 Bandfilter 1011  
 Bandpass 391  
 Bandpass aus R-C-Hochfilter 1007  
 Bandpass aus Tiefpassfilter 1007  
 Bandpassfilter 1005  
 Bandpassschaltung 287  
 Bandsperre 391, 1005  
 barometrische Höhenformel 158  
 BASIC 615  
 Basisband 978  
 Basisband-Durchschaltung 1038  
 Basisbandsignal 978  
 Basisbandübertragung 622  
 Basiseinheiten 141, 718  
 Basisschaltung 353  
 Basisspannungsteiler 354  
 Basisvorspannung 354  
 Batch-Betrieb 619  
 Baud 629  
 Bauform 438, 831  
 Baugrößen 831  
 Baumnetz 624  
 BBAE 1068  
 B-Betrieb 375  
 BCD-Code 481, 482  
 BCD-Zähler 503  
 Bedienfeld 666  
 bedingte Wahrscheinlichkeit 1073  
 Befehl 593, 614  
 Befehlsaufbau 592  
 Befehlsdarstellung 592  
 Befehlssatz 532, 591  
 Befehlsvorrat 599  
 Befehlszähler 533, 534  
 Befehlszeit 597, 598, 599  
 Befehlszyklus 597, 598, 599  
 Begrenzungspegel 311  
 Beharrungszustand 676, 678  
 belasteter Generator 961  
 Beleuchtungsanlagen 895  
 Beleuchtungsstärke 411, 896

Beleuchtungswirkungsgrad 899  
 Berechnung von Beleuchtungsanlagen 898  
 Bernoulli-Gleichung 158  
 Beschleunigung 143  
 Beschleunigungsaufnehmer 776  
 Bessel-Filter 1018  
 Besselfunktionen 988  
 Bestimmungszeichen für Aktionen 665  
 Betragskennlinie 696  
 Betragsoptimum 713  
 Betriebsartenteil 665  
 Betriebsgrößen 352  
 Betriebsmittel 427, 441  
 Betriebsmittelkennzeichnung 444  
 Beugung 172, 185  
 Beugung am Gitter 185  
 Beugung am Spalt 185  
 Bezeichnung von Elektroblechen 215  
 BFOC(ST)-Verbindung 1046  
 bibliotheksfähige Programme 646  
 BIBO-Stabilität 702  
 BiCMOS 507, 518  
 Bildebene 1101  
 Binär-Code 481  
 binäre System 465  
 Binomialverteilung 1125  
 Biomasse 849  
 Biot-Savartsche Gesetz 255  
 Bi-Phase-Verfahren 1004  
 bistabile Kippstufe 494  
 Bit 465  
 bleibende Regeldifferenz 681  
 Blindleistung 290, 746  
 Blindleistungsmessung 749  
 Bloch-Wände 262  
 Blockierbereich 319  
 Blockkodes 1075  
 Blockkondensator 247  
 Bluetooth 1071  
 Bode-Diagramm 387, 696  
 Bodenwelle 974  
 Bohrsches Magneton 261  
 Boltzmann-Konstante 161, 188  
 Bottom-Up-Methode 617, 618  
 Brechung 172, 1040  
 Brechungsgesetz 178  
 Brechungsindex 178  
 Breitbanddipol 973  
 Breitband-Frequenzmodulation 988  
 Breitbandübertragung 622  
 Brennstoffzellen 849  
 Brennweite 180  
 Brewsterschen Winkel 186  
 Brückenspannung 240  
 Brummspannung 312

Bündelleiter 855  
 Bürstenfeuer 822  
 Buschbeck-Diagramm 962  
 Business-to-Business-System 619  
 Busnetz 623  
 Bussysteme 779  
 Bustiming 536, 537  
 BUS-Treiber 562  
 Butterworth-Filter 1018  
 Byte 465

## C

C 615  
 CAD (Computer Aided Design) 458  
 Candela 189  
 CAS 559  
 Cassegrain-Antenne 974  
 Cauer-Filter 1018  
 CD-ROM 608  
 CD-ROM-Laufwerk 603  
 CELLFLEX-Kabel 952  
 Central-Process-Unit 532  
 Chi-Quadrat-Test 723, 789  
 CISC-Prozessoren 532  
 Client 620  
 Client/Server-Netz 620  
 CMOS 507, 515, 516  
 CMOS-Bausteine 517  
 CMOS-Familie 517  
 CMOS-Inverter 515  
 CMOS-NOR 515  
 CMOS-Schalter 517  
 CMOS-Technik 409  
 Code 481  
 –, alphanumerischer 481  
 –, bewerteter 481  
 –, einschrittiger 481  
 –, gewichteter 481  
 –, mehrschrittiger 481  
 –, numerischer 481  
 –, tetradischer 481  
 –, unbewerteter 481  
 –, ungewichteter 481  
 Codetabellen 481  
 Codewandler 491, 492  
 Codierer 492  
 Codierung 481  
 4B/5B-Code 631  
 4B3T-Code 1066  
 COFDM 1029  
 Compact Disc 608  
 Compiler 616  
 Complementary MOS 515  
 Computer 603  
 cos  $\varphi$  746  
 Coulombsches Gesetz 243  
 C-Parameter 922

CPU 534, 535, 539, 542, 544, 545,  
546, 583, 597  
CSMA/CD 632  
CSMA/CD-Verfahren 1063  
Curie-Gesetz 261  
Curie-Weißches Gesetz 264  
CW-Radar 1047

## D

Dahlander 812  
Dämpfung 390, 694  
Dämpfungsfaktor 915  
Dämpfungskoeffizient 937  
Dämpfungskoeffizienten 955  
Dämpfungsmaß 914, 916, 917,  
1006  
Dämpfungsmaß bei Bandfiltern  
1012  
Dämpfungsverzerrungen 914  
Daten 537, 647, 903  
Datenbus 532  
Datennetze 1063  
Datenreduktion 1075  
Datenreduzierung 1028  
Datenspeicher 587  
Datentransport-Befehlen 592  
Datentyp 647  
Dauerkurzschlussstrom 798  
De Morgan 472  
De Morgansche Gesetz 469  
Decoder 491, 538, 563  
Decodierer 564  
Decodierung 481, 561  
–, unvollständige 561  
–, vollständige 561  
Deemphase 989  
Dehnung 157  
Dehnungsmessstreifen 765  
Deklaration einer Funktion 645  
Deklaration eines Funktions-  
bausteins 646  
Delay-Flipflop 496  
Delon-Schaltung 316  
Deltamodulation (DM) 1004  
Delta-Sigma-Modulation 1004  
Demodulation von AM 982  
Demodulation von Frequenz-  
modulation 991  
Demodulation von Phasen-  
modulation 991  
Demultiplexer 492, 494  
Denial-of-Service-Angriff 619  
Dense Wavelength Division  
Multiplexing 622  
D-Flipflop 495  
 $\delta$ -Funktion 1111  
D-Glied 691, 693  
DHCP 640

Diagramme 441  
Diamagnetismus 261  
Dielektrika 246  
dielektrische Polarisation 223  
dielektrische Verlustzahl 226  
Differentialrelais 878  
Differentiators 388  
Differenzglied 691  
Differenz-Pulsmodulation  
(DPCM) 1004, 1028  
Differenzverstärker 380  
Differenzverstärkung 381  
Diffusion 299  
Diffusionsverfahren 306  
Digitalbausteine 511  
digitale Abtastregelung 683  
digitale Filter 791, 1013  
digitale Signale 419, 903  
digitaler Schrittreger mit PI-Ver-  
halten 686  
Digitalisierung 786  
Digitalisierungsfehler 786  
Digitalmultimeter 734  
Digitalschaltungen 506  
Digitaltechnik 465  
Digitalvoltmeter 733, 736  
Dioptrie 180  
Dipol 244, 968  
Dirac-Impuls 1111  
Disjunktive Normalform 469, 653  
Diskette 603, 604  
Diskettenlaufwerk 606  
Dispersion 178, 938  
Distanzrelais 878  
Distributivgesetz 469  
DMA 540  
DM-Verfahren 1004  
DNS 639  
Domain Name Service 639  
Doppel-Kreisdiagramm 965  
Doppelschlussmotor 826  
Doppel-T-Filter 932  
Dopplereffekt 173  
Dot Pitch 612  
Dotierung 298  
Drahtbruchsicherheit 654  
Drahtpotentiometer 757  
DRAM 559  
Dreheisen-Messwerk 725  
Drehfeld 804  
Drehfrequenz 768  
Drehimpuls 154  
Drehmomente 767  
Drehpul-Messwerk 724  
Drehstromasynchronmaschine 805  
Drehstrombrücken 830  
Drehstrommaschinen 804  
Drehstromnetze 850  
Drehstromsynchronmaschinen 814

Drehstrom-Transformatoren 799  
Drehzahl 146, 768  
Drehzahlsteuerung 810, 823  
Dreieckschaltung 292  
Drei-Finger-Regel 257  
dreipoliger Kurzschlussstrom 891  
Driftgeschwindigkeit 231  
Drosselspulen 802  
Druck 157  
Druckentlastungskappen 875  
Drucker 613  
Druckwasserreaktor 845  
DSL 1067  
DSQ-Kodierung 631  
DSR – Digitales Satellitenradio  
1038  
Dual-Code 481  
Dual-Gray-Codierer 474  
Dualsystem 476  
Dualzahl 478  
Duhamelsches Integral 1111  
Durchflussmessung 770  
Durchflutung 254  
Durchlassbereich 1005  
Durchtrittsfrequenz 706  
DVBT 1026  
DWDM 622  
Dynamik 905  
dynamischen Viskosität 159  
dynamischer Durchlasswiderstand  
302  
dynamisches System 1057

## E

E/A-Bausteine 571, 575  
 $E_{01}$ -Welle im Rundhohlleiter 955  
 $E_{11}$ -Welle im Rechteckhohlleiter  
955  
E-Banking 619  
Echtzeitübertragung 906  
ECL 507, 514  
Editor 616  
EEPROM 521  
EEPROM 555, 556  
Effektivwert 273, 722, 913  
Eichbehörde 717  
Eichen 717  
Eigenleitfähigkeit 206  
Eigenleitung 297  
Eindringtiefe 951  
Einerkomplement 480  
Einer-Komplement 488  
Eingabeeinheit 584  
Eingabeport 563  
Eingangsimpedanz 939  
Eingangsreflexionsfaktor 960  
Eingangsruhestrome 383  
Eingangsspannungsteiler 736

- Eingangswchselspannung 350  
 Eingangswiderstand 971  
 Einheiten 717  
 Einleiterstromwandler 804  
 Einmoden-Stufenindex 1042  
 Einphasen-Asynchronmotoren 817  
 Einphasennetze 850  
 Einquadrantenantrieb 828  
 Einrichtungstreiber 562  
 Einschaltzeit 392  
 Einseitenbandmodulation (ESB, SSB) 983  
 Einstellregel 713  
 Eintakt-Betrieb 375  
 Einzelelement-Variable 647  
 Einzelkompensation 893  
 EIRP, equivalent isotropically radiated power 1039  
 Eisenkerne 793  
 Eisenverlustleistung 795  
 Elastischer Stoß 152  
 Elastizitätsmodul 157  
 Elektret-Kondensatormikrofon 1055  
 elektrisch kurze Leitung 941, 943  
 elektrisch lange Leitung 942  
 elektrische Energieanlagen 841  
 elektrische Feldkonstante 223, 243  
 elektrische Feldstärke 244  
 elektrische Leiter 205  
 elektroakustische Wandler 1050  
 elektroakustischer Übertragungsfaktor 1051  
 elektroakustisches Übertragungsmaß 1051  
 Elektrochemie 200  
 elektrochemische Spannungsreihe 200  
 elektrodynamisches Messwerk 725  
 elektrodynamisches Mikrofon 1054  
 Elektrofachkräfte 889  
 elektromagnetisches Mikrofon 1054  
 elektromagnetischen Schwingungen 411  
 elektromagnetisches System 1056  
 Elektronegativitätsskala 200  
 Elektronenvolt 190, 246  
 elektrostatisches System 1057  
 elektrotechnisch unterwiesene Personen 889  
 elektrotechnische Normung 439  
 Elementarladung 231  
 Elementarvierpole 921  
 Elementarwelle 171  
 elliptischer Wellenrohrhohlleiter 956  
 Emitter Coupled Logic 514  
 Emitterschaltung 352  
 Empfindlichkeit 717, 760  
 EMV-Richtlinie 671  
 Endgerät 1061  
 Endstufe 370  
 Endtransistoren 379  
 Energie 152  
 Energie eines Kondensators 249  
 Energie in einer Spule 271  
 Energiebedarf 842  
 Energieerhaltungssatz 152  
 Energieversorgungsunternehmen (EVU) 841  
 Energieverwischung 1029  
 Entfernungsauflösung 1047  
 Entladen eines Kondensators 251  
 Entladungslampen 897  
 Entropie 904  
 Entschwefelungsanlagen 846  
 Entstaubungsanlagen 846  
 E-Nummer 956  
 Epitaxie-Verfahren 306  
 EPROM 553, 554  
 Erdanziehungskraft 156  
 Erdatmosphäre 975  
 Erdschlussgefahr 654  
 Erdschlussrichtungsrelais 878  
 Erdungsschalter 877  
 E-Reihen 433  
 ergodischer Prozess 1123  
 Ersatzschaltbild 449, 796  
 Ersatzschaltbild der Asynchronmaschine 805  
 Ersatzschaltplan 448  
 Ersatzschaltung von Kabeln 868  
 Ersatzschaltung von Leitungen 868  
 Ersatzspannungsquelle 237  
 Ersatzstromquelle 238  
 Erwärmung 856  
 Erwartungswert 719  
 Erzeugung von Frequenzmodulation 989  
 Erzeugung von Phasenmodulation 989  
 Erzwungene Schwingungen 166  
 E-Shopping 619  
 Ethernet 628  
 3-Excess-Code 481
- F**
- Fadenpendel 166  
 Fall  
 – aperiodischer 694  
 – periodischer 694  
 Fallgeschwindigkeit 144  
 Faltungsgesetz 1114  
 Faltungskodes 1075  
 Faltungskodierer 1077  
 Fan Out 508  
 Fano 1074  
 Farbbildröhre 612  
 Farbmonitor 611  
 FAST 510  
 Fast-Ethernet 627  
 Faxgerät 1066  
 FDM 622  
 Federpendel 165  
 Fehler 718  
 Fehlererkennende Kodes 1075  
 Fehlerfortpflanzung 720  
 Fehlerkorrigierende Kodes 1075  
 Fehlerstromschutzschalter 882  
 Feld (Array) 647  
 Feld in einer Ringspule 254  
 Feld um einen Leiter 254  
 Feldbussystem 667  
 Feldlinien 244  
 Feldplatten 754  
 Feldverläufe in einem Rechteck-Hohlleiter 954  
 Feldwellenwiderstand 955  
 Fensterung 1085  
 Fernfeld 969  
 Fernglas 183  
 Fernsprechapparat 1061  
 Ferrimagnetismus 264  
 Ferritantenne 972  
 Ferromagnetismus 262  
 fest eingebauten Betriebsmitteln 873  
 Festplatte 603, 607, 608  
 Festpunktzahl 478  
 Festwertregelung 689  
 Festwertspeicher 552  
 FIFO-Prinzip 621  
 Filter 1005  
 FI-Schutteinrichtung 888  
 Flächenwiderstand 951  
 Flag 594  
 Flagregister 533, 593, 594  
 Flags 599, 600, 601  
 Flankenbewertung 655  
 Flankensteilheit 398  
 Flash-EPROM 556  
 FLEXWELL-Kabel 952  
 Flipflop 494, 495, 496  
 Floppy-Disk 603  
 Floppy-Disk-Computer 607  
 Floppy-Disk-Controller 606  
 Flügelradzähler 770  
 Flusssichte 256  
 Flüssigkristalle 416  
 Folgeregung 689  
 Foliendicke, Füllstandsmessung 767

Foliendicke, Messung 767  
 Footprint 1038  
 Formatierung 604  
 Formfaktor 724, 739  
 FORTRAN 615  
 Fotodiode 760, 761  
 Fotoelement 414  
 Fotovervielfacher 760, 761  
 Fotowiderstand 758, 761  
 Fourierreihe 907  
 –, komplexe 907  
 Fouriertransformation 791, 907,  
 1092, 1097  
 –, diskrete 1117  
 –, diskrete (DFT) 909  
 –, schnelle 1118  
 –, schnelle (Fast Fourier  
 Transform, FFT) 909  
 Fourierzerlegung 791  
 FPGA 521  
 Freilaufdiode 394  
 Freileitungen 854  
 Freiraumdämpfung 971, 1035  
 Freiraumdämpfungsmaß 972  
 Frequency Division Multiplexing  
 622  
 Frequenz 146, 165  
 –, kritische 955  
 Frequenzabstand 911  
 Frequenzdiversity 1035  
 Frequenzen 735  
 Frequenzgang 387  
 Frequenzgangfunktion 695  
 Frequenzkennlinie 696  
 Frequenzkompensation 384  
 Frequenzmessung 772  
 Frequenzmodulation (FM) 986  
 Frequenzmultiplexverfahren 1033  
 Frequenzteiler 499, 500  
 Frequenzumtastung (FSK) 993  
 Frequenzverhältnis 956  
 Führungsgröße  $w$  673, 674, 689  
 Funkelrauschen 912  
 Funkfelddämpfung 971  
 Funkmesstechnik 1046  
 Funktion 645  
 Funktionsbaustein 645  
 Funktionskleinspannung 886  
 Fusionsreaktor 850  
 Fußpunktwiderstand 971

## G

GAL 521, 525, 526, 527  
 galvanischen Kopplung 370  
 GAN 620  
 Gangunterschied 170  
 gasdicht metallgekapstelt  
 Sammelschiene 874

Gaskonzentrationen 764  
 Gatespannungsteiler 364  
 Gatter 465  
 Gatterlaufzeit 509  
 Gauß-Filter 390  
 Gaußverteilung 1125  
 Gedämpfte Schwingungen 166  
 gedruckte Schaltungen 453, 458  
 Gegeninduktion 270  
 Gegeninduktivität 270  
 Gegenkopplung 355  
 Gegenstrombremsen 824  
 Gegenstrombremsung 810, 825  
 Gegentakt-Betrieb 375  
 gekapselte Schaltanlage 873  
 Genauigkeit  
 – stationäre 707  
 Genauigkeitsklassen 721  
 Geometrische Optik 176  
 geometrischer Mittelwert 1122  
 geostationäre Umlaufbahn 1036  
 Geradeempfänger 1023  
 Geräusch 1050  
 Geräuschabstand 787  
 Geräuschmessung 791  
 Germanium 207  
 Gesamttauschzahl 912  
 geschottete Schaltanlage 873  
 Geschwindigkeitssensor 776  
 Gesetz von Boyle-Mariotte 161  
 Gesetz von Gay-Lussac 161  
 Gewicht eines Kodewortes 1075  
 Gewichtskraft 147  
 Gezeitenkraftwerke 847  
 Gibbssches Phänomen 1093  
 Gittermonochromatoren 186  
 Gleichgewichtige Codes 1075  
 Gleichstrombremsung 809  
 Gleichstromgeneratoren 826  
 Gleichstrommaschinen 820  
 –, Aufbau 821  
 Gleichstrom-Messbrücken 740  
 Gleichstromnetze 850  
 Gleichtaktunterdrückung 381  
 Gleichtaktverstärkung 380, 381  
 Gleichtaktwiderstand 383  
 Gleichung  
 – charakteristische 703  
 Gleichwellennetz 1030  
 Gleitpunktzahl 478  
 Gleitpunktzahlen 480  
 Glitches 509  
 Global Area Network 620  
 Glühlampen 897  
 GPS 1039  
 Grad  $n$  eines Filters 1005  
 Gradientenindexfaser 628  
 GRAFCET 662  
 Grafikkarten 612

Graphische Darstellung 789  
 Gravitationskonstanten 156  
 Gravitationskraft 156  
 Gray-Code 481, 482, 774  
 Grenzdaten 507  
 Grenzfall  
 – aperiodischer 694  
 Grenzfrequenz 333, 1005  
 –, obere 287  
 –, untere 287  
 Grenzfrequenz (RC) 285, 286  
 Grenzfrequenz (RL) 286, 287  
 Grenzwert 301  
 Größengleichungen 717  
 Größenwert 717  
 Grundfunktionen 465  
 Grundgrößen der Lichttechnik 895  
 Grundlast 842  
 Grundverknüpfungen 465, 466,  
 467  
 Gruppengeschwindigkeit 938, 954  
 Gruppengeschwindigkeit im  
 Plasma 975  
 Gruppenkompensation 893  
 Gruppenstrahler 973  
 GSM 1069  
 Güte  $Q$  1006  
 Gütefaktor, Messung von  $L$ ,  $C$  752

## H

$H_{10}$ -Welle im Rechteckhohlleiter  
 955  
 $H_{11}$ -Welle im Rundhohlleiter 955  
 Halbaddierer 486  
 Halbbrücken 743  
 Halbleiter 202  
 Halbleiterspeicher 548  
 Halbwellenbetrieb 322  
 Halleffekt 204  
 Hall-Effekt 259  
 Hall-Koeffizient 259  
 Hallsonde 754  
 Hall-Sonde 259, 754  
 Hallspannung 259  
 Hamming-Code 485, 486  
 Hamming-Distanz 1075  
 Handlungen im Notfall 672  
 Hangabtriebskraft 148  
 Hardware 458, 532  
 harmonische Schwingungen 1112  
 harmonische Wellen 169  
 Hartmagnetika 220  
 Häufigkeit 1122  
 Häufigkeitsverteilung 722  
 Helmholtzsche Überlagerungs-  
 verfahren 239  
 Hertzscher Elementardipol 968  
 Hexadezimalsystem 478



Hexadezimalzahlen 478  
 High-Speed-CMOS 518  
 hinlaufende Welle 960  
 Histogramm 722  
 Hochfrequenzdurchschaltung 1038  
 Hochfrequenz-Koaxialkabel 951  
 Hochfrequenzleitungen 951  
 Hochfrequenzschaltung 1055  
 hochohmige Leitungsabschnitte 959  
 Hochpassfilter 1005  
 Hochpassschaltung mit RC-Glied 285  
 Hochpassschaltung RL-Glied 285  
 Hochspannungskaskadenschaltung 316  
 Hochspannungsschaltanlagen 873  
 Hohlleiter 953  
 –, elliptische 954  
 –, Querschnittsformen 954  
 Hooksche Gesetz 157  
 Hörer 1058  
 Hörer-Systeme 1055  
 Horizontalfrequenz 611  
 Horizontalsteuerung 325  
 Hörschall 1050  
 Hörschwelle 1050  
H-Parameter 332, 922  
 HUB 623  
 Hubarbeit 151  
 Huffman 1074  
 Hurwitz-Kriterium 703  
 Huygensches Prinzip 171, 185  
 Hybrid-Technik 409  
 hydrostatischer Druck 157  
 Hyper Text Transfer Protocol 625  
 Hysterese 262  
 Hystereseschleife 755

## I

I/O-mapped-Adressierung 562  
 IEC-Bus 780  
 I-Glied 691, 693, 710  
 Impedanz des Asynchronmotors 892  
 Impedanzen 744  
 Impedanzwandler 353  
 Impuls 150  
 Impulsantwort 693  
 Impulsbetrieb 393  
 Impulserhaltungssatz 150  
 Impulsverbreiterung 1041  
 Impulswahlverfahren 1062  
 Impulszeitplan 465  
 Induktion 267  
 Induktionsflussdichte 260  
 Induktionsgesetz 269

induktive Aufnehmer 759  
 induktiver Blindwiderstand 276  
 Induktivität 270  
 Induktivitätsmessbrücke 753  
 Industrial Ethernet-TCP/IP 670  
 industrielle Kommunikation 668  
 induzierte Spannung 268  
 inelastischer Stoß 152  
 Influenz 246  
 Information 903  
 Informationseinheiten 465  
 Informationsfluss 905  
 Informationsgehalt 903  
 Infraschall 1050  
 Inklinations 253  
 inkrementale Wegaufnehmer 774  
 in-line-Röhre 611  
 Innenpolmaschine 814  
 Innenwiderstand 238, 736  
 innere Reibung 159  
 Installationsplan 449  
 Instanziierung 645  
 Instrumentenbeschriftungen 726  
 Integrationsdichte 407  
 Integrator 387  
 Integrierglied 691, 710  
 integrierte Schaltkreise 506  
 integrierte Schaltungen 407, 507  
 integrierte Standardbausteine 467  
 Intelsat 1039  
 INTERBUS-S 667  
 Interface 532, 562  
 Interfaceschaltungen 419, 519  
 Interferenz 170, 184  
 Internet 620  
 Internet Protokoll 634  
 Interpret 616  
 Interrupt 539, 540, 541, 542, 586, 595, 596  
 Interrupteingänge 595  
 Interrupt-Programm 542  
 Interruptroutine 540  
 Intransparenzfähigkeit 206  
 Inversion 965  
 IPv4 634  
 IPv6 637  
 I-Regelfunktion 681  
 I-Regler 681, 709  
 Irrelevanz 1026, 1028, 1031  
 $I_s$ -Begrenzer 877  
 Isentrope Zustandsänderung 163  
 Isentropenexponent 164  
 isobare Zustandsänderungen 163  
 Isolationsüberwachung 888  
 Isolator 202  
 Isolierstoffklassen 834

isotherme Zustandsänderungen 163  
 I-Strecke 678

## J

Jahreswirkungsgrad 799  
 JEDEC 523  
 JEDEC-Datei 524, 525  
 JK-Flipflop 496  
 Justieren 717

## K

Kabel 855  
 Kabeldämpfung 951  
 Kabelkonzentrator 624  
 Kalibrieren 717  
 Kanalkapazität 905  
 Kanalkodierung 1075  
 Kanalvermittlung 621  
 Kapazität 246, 247  
 Kapazität einer Leitung 247  
 Kapazitäten 735  
 Kapazitätsmessbrücke 753  
 kapazitive Aufnehmer 759  
 kapazitive Kopplung 370  
 kapazitiver Blindwiderstand 276  
 Kenndaten 302, 507  
 Kenngrößen 790  
 Kennimpedanz 1050  
 Kennlinienfelder 330  
 Kennlinienglied 691  
 Kennwiderstand 736  
 Keplerschen Gesetzen 156  
 keramische Filter 1012  
 Kernkraftwerke 844  
 Kettenleiter 943  
 Keyboard 609  
 K-Faktor 765  
 kinetischen Gastheorie 162  
 Kippmoment 807  
 Kippschaltung 395  
 Kippvorgang 395  
 Klassierung 723, 790  
 Kleinsignal-Transistoren 329  
 Kleinsignalverhalten 332  
 KL-Glied 691  
 Klirrdämpfung 915  
 Klirrfaktor 915, 1002  
 Knoten 961  
 Knotenregel 234  
 Koaxialkabel 626, 951  
 –, Feldlinienbild 954  
 Kodierung 1003, 1072  
 Koerzitivfeldstärke 262, 755  
 Kohärenzlänge 184  
 Kohlemikrofon 1053  
 Kohlestaubbefeuerung 844

Kollektorschaltung 353  
 Kombikraftwerke 844  
 Kommunikationsnetze 1063  
 Kommutativgesetz 469  
 Kompanierung 1002  
 Komparator 399, 490, 489, 491  
 Kompensationsanlagen 893  
 Kompensationswicklungen 822  
 Kompensator 737  
 Komplementärtransistoren 376  
 komplexe Fourierreihe 1093  
 komplexe Widerstände 964  
 komplexe Zahl 274  
 komplexer Frequenzgang 913  
 komplexer Reflexionsfaktor 963  
 komplexer Übertragungsfaktor 913  
 komplexes Wellendämpfungsmaß 932  
 Kompressibilität 157  
 Kondensatoren 225, 246  
 Kondensatormikrofon 1054  
 Kondensatormotor 817  
 konjugiert komplexe Anpassung 962  
 konjugiert komplexer Abschlusswiderstand 961  
 konstante Anpassungsfaktoren 962  
 Konstantstromquellen 368, 378  
 Kontinuitätsgleichung 158  
 konventionell richtigen Wert 718  
 Kopfhörer 1058  
 Koppelkondensatoren 358  
 Kopplungsfaktor 1011  
 Korpuskel 176  
 Korpuskulartheorie 176  
 Korrektur 718  
 Korrekturglied 709  
 Korrelation 1081  
 Kosinus-Transformation 1028  
 Kraft 147  
 Kraftmessdose 767  
 Kraftmessung 765  
 Kraftstoß 150  
 Kreisdiagramm 962, 963, 964, 965  
 Kreise konstanter Verstärkung im Kreisdiagramm 967  
 Kreisfrequenz 146, 165, 273  
 Kreisfrequenzhub FM 987  
 Kreisfrequenzhub PM 987  
 Kreisgüte 288  
 Kreisprozesse 164  
 Kreisradius für konstante Verstärkung 966  
 Kreisstrom 261  
 Kreuzkorrelation 791  
 Kreuzkorrelationsfunktion 913, 1124

Kreuzmodulation 983  
 Kreuzparitätsprüfung 485  
 Kreuzschaltung 933  
 Kreuzsicherungsprüfung 485  
 Kreuzvierpol 933  
 Kristallmikrofon 1054  
 Kugelkondensator 247  
 Kugelwelle 170  
 Kühlart 834  
 Kühlkörper 304  
 Kühlung 794  
 künstlicher Sternpunkt 747  
 Kurvenformfaktor 724, 739  
 Kurzschlussberechnung 891  
 Kurzschlussfestigkeit 871  
 –, mechanische 871  
 –, thermische 872  
 Kurzschlussläufer 807  
 Kurzschlusschutz 863  
 Kurzschlussstrom 238  
 Kurzschlussversuch 797  
 Kurzschlusswiderstand 959  
 Kurzunterbrechungsrelais 878  
 Kurzzeichen 865  
 Kurzzeichen für Kabel 857  
 KUSA-Schaltung 809  
 KV-Tabelle 473

## L

$\lambda/2$ -Dipol 969, 973  
 $\lambda/2$ -Faltdipol 973  
 $\lambda/4$ -Transformation 963  
 Ladekondensator 312  
 Laden eines Kondensators 250  
 Lag-Glied 711  
 Lambda-Sonde 764  
 Lambertsches Gesetz 187  
 Lambert-Strahler 187  
 Lampen 896  
 LAN (local area network) 621, 1063, 1068  
 Land 608  
 Langdrahtantenne 974  
 Längenausdehnung von Stromschienen 870  
 Längssymmetrische passive 931  
 Laplacetransformation 909, 1092, 1100  
 Laser-Dioden 416  
 Laserdrucker 613  
 Lasteinheit 508  
 Lastschalter 876  
 Lasttrennschalter 876  
 Late Collision 633  
 Laufwasserkraftwerke 847  
 Lautheit 1051  
 Lautsprecher-Systeme 1055  
 Lautstärkepegel 1051

Lawineneffekt 309  
 Lawinen-Fotodioden 1045  
 Layout 454, 458  
 LCD-Bildschirm 613  
 LC-Filter 315  
 Lead-Glied 710  
 Least Significant Bit 465  
 Lebensdauererwartung 225  
 Leerlauf 794  
 Leerlaufleistung 795  
 Leerlaufverstärkung 382  
 Leerlaufversuch 796  
 Leerlaufwiderstand 959  
 Leistung 151, 241, 1113  
 Leistungsanpassung 241, 376  
 Leistungsaufnahme 548  
 Leistungsschalter 430  
 Leistungsdämpfungsfaktor 915  
 Leistungsdämpfungsmaß 916  
 Leistungsfaktor 290  
 Leistungsfaktormessung 750  
 Leistungsfluss 806  
 Leistungshyperbel 309  
 Leistungsmessung 746  
 Leistungsschalter 876, 880  
 Leistungsspektralfunktion 1092  
 Leistungsübertragungsfaktor 915  
 Leistungsübertragungsmaß 916  
 Leistungsverstärkung 962  
 Leiterformen 856  
 Leiterisolierung 856  
 Leiterplatten 410  
 Leiterwerkstoffe 855  
 Leitfähigkeit 232  
 Leitung als Transformator 943  
 Leitung als Vierpol 940  
 Leitung im Wechselstromkreis 288  
 Leitungen 864  
 Leitungsbeläge 934  
 Leitungsgleichungen 934  
 Leitungsimpedanzen 892  
 Leitungsmechanismus 201  
 Leitungsschutzschalter 882  
 Leitwert 232  
 Leitwertdiagramm 964, 965  
 Leitwerte 964  
 Lenzsche Regel 268  
 Leuchten 897  
 Leuchtstofflampen 897  
 Licht 411  
 Lichtempfänger 1045  
 Lichtempfindlichkeit 411  
 Lichtgeschwindigkeit 176, 954  
 Lichtleiter 179  
 Lichtquant 176  
 Lichtquellen 896  
 Lichtsender 1044  
 Lichtstärke 415



Lichtwellenleiter (LWL) 627, 1040  
 Lifo-Prinzip 534  
 Likelihood-Bedingung 1076  
 Likelihood-Viterbi-Dekodierer 1077  
 linearer Ausdehnungskoeffizient 160  
 Linearisierung um den Arbeitspunkt 692  
 Linearität 1092  
 Linearmotor 814  
 Linien-Netz 625  
 Links-Rechts-Stereofonie 1024  
 Linsen 179  
 Lissajous-Figuren 168  
 Listener 780  
 Local Area Network 621  
 Logik 465  
 Logikschaltungen 507  
 logische Grundsaltungen 466  
 logische Grundverknüpfung 652  
 logische Verknüpfungen 467  
 Longitudinalwelle 169  
 Lorentzkraft 257, 723, 754  
 Löschvorgang 318  
 Low-Power-Schottky 514  
 LS 510  
 LSA-Verbindung 1046  
 Lumen 189  
 Lupe 182

## M

Machsehen Kegel 174  
 MAG, Maximum available gain 962  
 Magnetbandgeräte 608  
 Magnetfeld der Erde 253  
 Magnetika 214  
 magnetische Feldkonstante 256  
 magnetische Feldstärke 753, 754  
 magnetische Flussdichte 753, 754  
 magnetische Spannung 265  
 magnetische Suszeptibilität 260  
 magnetischer Fluss 753  
 Magnetischer Widerstand 265  
 magnetisches Moment 258  
 Magnetostruktion 264  
 MAN 621  
 Manchester-Kodierung 630  
 Maschenetz 853  
 Maschenregel 234  
 Maschinencode 591  
 Maschinenrichtlinie 89/392/EG 671  
 Maschinensprache 591  
 Maschinenzyklus 539, 599  
 Masken-ROM 553

Massenspeicher 603  
 Massenstrom 158  
 Master 496, 581  
 Master-Slave-Flipflop 497  
 Master-Slave-JK-Flipflop 496  
 Matrixdrucker 613  
 Maus 610  
 maximale Kurzschlussdauer 864  
 maximaler Amplitudenfehler 1002  
 maximaler Quantisierungsfehler 1002  
 Maximum-Likelihood-Verfahren 1076  
 Maxterme 470  
 Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung 162  
 MC 8051 581  
 Median 723, 789, 1122  
 Mehrfachübertragung 1031  
 Mehrfrequenzwahlverfahren 1062  
 Mehrmoden-Gradientenindex 1042  
 Mehrmoden-Stufenindex 1041  
 Memory-mapped-Adressierung 562  
 Messabweichung 718, 736  
 Messaufnehmer 756, 757  
 Messbereich 717  
 Messbereichserweiterung 736, 738  
 Messbus 779  
 Messdatenaufbereitung 776  
 Messeinrichtung 689  
 Messen 717  
 Messergebnis 717  
 Messfehler 718  
 Messgeräte 717, 724  
 –, analog anzeigende 721  
 –, digital anzeigende 721  
 –, digitale 733  
 –, Fehlerangaben 721  
 Messglieder 689, 756  
 Messgliedkoeffizient 757  
 Messkette 756  
 Messkettenkoeffizient 757  
 Messprinzip 717  
 Messsignalanalyse 789, 790  
 Messsysteme, Erdung 778  
 Messumformer 717  
 Messumsetzer 717  
 Messung der Arbeit 750  
 Messung des Klirrfaktors 791  
 Messverfahren 717  
 –, analoge 717  
 –, digitale 717  
 –, PC-gestützte 789  
 Messverstärker 778  
 Messwandler 717  
 Messwerke 724  
 Messwert 717

Metropolitan Area Network 621  
 M-Glied 691  
 MIC-Verbindung 1046  
 Mikrocomputer 532  
 Mikrocontroller 580, 581, 588, 589  
 Mikrofone 1052  
 Mikroprozessoren 532, 533, 534, 578  
 Mikroskop 183  
 Mikrowellenfenster 1035  
 Mindestgangbreiten 879  
 Minterme 470  
 Minutenreserve 854  
 Mischspannung 349  
 Mischung 978  
 Mitkopplung 355  
 Mittellast 842  
 Mittelspannungsanlagen 873  
 Mittelwerte 912  
 Mitte-Seiten-Stereofonie 1025  
 mittlere Kodewortlänge 1073  
 mittlerer Informationsgehalt 904  
 MLT3-Kodierung 631  
 Mnemoniks 592  
 Moden 1041, 1068  
 Modendispersion 1041  
 Modulation 978  
 –, additive 985  
 –, multiplikative 985  
 Modulation an einer nichtlinearen 981  
 Modulation an einer quadratischen Kennlinie 980  
 Modulation durch Multiplikation 979  
 Modulationsgrad 979  
 Modulationsindex  $\eta$  bei FM 987  
 Modulationstrapez 981  
 Modulator für Einseitenband-AM 984  
 modulierendes Signal 978  
 Modulo-16-Zähler 502  
 molare Wärmekapazität 162  
 Monitor 610, 611, 612  
 monochrome Licht 416  
 Monoflop 504, 505  
 Mono-Mode-Fasern 628  
 MOS 507  
 Most Significant Bit 465  
 Motional Feedback-System 1059  
 Motormoment 825  
 Motorregel 257  
 Motorschutz 834  
 MPEG 1027  
 Multielement-Variable 647  
 Multiplexer 492, 493  
 Multiplexverfahren 1031  
 Multiplizierglied 691  
 Multiscan-Monitor 612

**N**

Nachricht 903  
 Nachrichtenquader 905  
 Nachrichtenübertragungssystem 901  
 Nachstellzeit 681, 709  
 Nahfeld 969  
 NAND-Technik 470, 471  
 NAT 636  
 Nebenschlussgenerator 827  
 Nebenschlussmotor 822  
 Nebensprechen 983  
 Nennstromregel 862  
 Network Address Translation 636  
 Netzbelastungskurve 842  
 Netzimpedanz 891  
 Neutralleiterstrom 294  
 Newtonsche Axiome 147  
 NF-Bootstrap-Verstärker 389  
 Nibble 465  
 nichtperiodische zeitkontinuierliche Signale 1097  
 nichtrekursive Filter 1014  
 NICHT-Verknüpfung 466  
 niederohmige Leitungsabschnitte 959  
 Niederspannungsrichtlinie 73/23/EWG 671  
 Niederspannungsschaltanlagen 879  
 Niederspannungs-Schaltgeräte 880  
 Niederspannungs-Schaltgerätekombinationen 880  
 Non Return to Zero/Invert 630  
 Normalform  
 –, disjunktive 470  
 –, konjunktive 470  
 Normalkraft 148  
 Normalspannung 156  
 Normalverteilung 722, 789, 1125  
 normierte Parallelschaltung 963  
 normierte Serienschaltung 963  
 normierte Verstärkung 966  
 normierte Verstimmung 1012  
 NOR-Technik 470, 471  
 $n$ -Phasen-Umtastung 996  
 NRZI 630  
 NRZ-Verfahren 1004  
 NTBA 1066  
 Nullkippspannung 319  
 Nullstelle 695  
 numerische Apertur 1040  
 Nutzsignal 978  
 NVRAM 558  
 Nyquistflanke 985  
 Nyquist-Kriterium 703

**O**

Oberes Seitenband (OS) 980  
 ODER-Verknüpfung 467  
 offene Anlage 873  
 Öffnungswinkel 970  
 Offset-Spannung 384  
 Ohmsche Aufnehmer 757  
 ohmscher Wechselstromwiderstand 275  
 Ohmsches Gesetz 232  
 OLMC 526, 527  
 OPC-Technologie 669  
 open-collector-Ausgang 384  
 Operationscode 539, 599  
 Operationszyklen 599, 600, 601  
 Operatoren 275  
 Operatoren der Anweisungsliste (AWL) 650  
 Optimalfilter 1079  
 Optimalcodes 1074  
 Optimum  
 – symmetrisches 714  
 Optische Aufnehmer 759  
 Optische Schalter 1046  
 Optokoppler 418  
 Ortskurve 696  
 Ortskurven für konstante Werte 966  
 OSI-Referenzmodell 625  
 Oszilloskop 727  
 Ovalradzähler 771  
 Oversampling 788  
 Oversamplingrate OSR 788

**P**

Paketfilter-Firewall 637  
 Paketvermittlung 1059  
 PAL 521, 522, 523, 524, 525  
 PAM-5-Kodierung 631  
 Parabolantenne 974  
 Parabolspiegel 177  
 parallele Schnittstelle 780  
 Parallelresonanz 283, 288  
 Parallelresonanz an einer Streifenleitung 959  
 Parallelschaltung 235  
 – von Transformatoren 800  
 – von Wechselstromwiderständen 281  
 Parallel-Serienumsetzer 498  
 Paramagnetismus 261  
 Parität 484  
 Paritätsbit 484, 485  
 Paritäts-Bit 483  
 Parsevalsche Gleichung 1099, 1123  
 PASCAL 615  
 passive R-C-Filter 1006  
 passive R-C-Hochpassfilter 1007  
 Patch-Kabel 627  
 PC 603  
 PD-Regler 709  
 – realer 709  
 Peer-to-Peer 780  
 Peer-to-Peer-Netz 620  
 Pegel 465, 507, 916  
 –, absoluter 916  
 –, relativer 916  
 Pegeldiagramm 917  
 Pegelwerte 508  
 Pendelzeiger 987  
 Periodendauer 273  
 Peripheriebausteine 562  
 Permeabilität 753, 755  
 Permittivitätszahl 223, 951  
 P-Glied 691, 693, 709  
 Phasenanschnittsteuerung 322  
 Phasendifferenzkodierung (2-DPSK) 995  
 Phasengeschwindigkeit 170, 938, 954  
 Phasenhub 990  
 Phasenhub FM 987  
 Phasenhub PM 987  
 Phasenkenlinie 696  
 Phasenkoeffizient 937  
 Phasenmaß 914  
 Phasenmodulation (PM) 986  
 Phasenrand 706  
 Phasenregelkreis 991  
 Phasenreserve 706  
 Phasenschieberbetrieb 816  
 Phasenschiebersoszillator 404  
 Phasenspektrum 1097  
 –, komplexes 1094  
 Phasenumtastung (PSK) 993  
 Phasenverschiebung 273  
 Phasenverzerrungen 914  
 Photoapparat 183  
 Photoeffekt 189  
 Photometrie 186  
 Photonen 189  
 photovoltaische Kraftwerke 848  
 pH-Wert 763  
 Physikalisch-Technische Bundesanstalt 718  
 PID-Abtastregler 685  
 PID-Regelfunktion 683  
 PID-Regler 683, 709  
 – realer 709  
 piezoelektrische Konstante 761  
 piezoelektrischer Effekt 760  
 piezoelektrisches System 1057  
 PIN-Fotodioden 1045  
 PI-Regelfunktion 681  
 PI-Regler 681, 709  
 PI-Schrittregler 686

Pit 608  
 Planarverfahren 306  
 Plancksche Strahlungsformel 188  
 Plancksches Wirkungsquant 188  
 Plasmafrequenz 975  
 Plattenkondensator 248  
 PLD 507, 520, 521  
 pLSI 528  
 Poissonschen Gleichungen 163  
 Poissonverteilung 1125  
 Poissonzahl 157  
 Pol 695  
 Polarisation 186, 760, 761, 969,  
     1038  
 –, elliptische 969  
 –, kreisförmige 969  
 Polarisationsfilter 186  
 Polarisationswinkel 186  
 Polling 539  
 Polpaare 804  
 Polradspannung 815  
 Polradwinkel 816  
 Popcorn-Rauschen 912  
 Portbaustein 564, 573  
 Portbausteine 562  
 Potential 244  
 Potentialanschlüsse 735, 741  
 POTS 1066  
 Poynting-Vektor 968  
 Präzisionsmessgerät 718  
 Preemphase 989  
 P-Regelfunktion 680  
 P-Regler 680, 709  
 Primärradar 1047  
 Prisma 179  
 PROFIBUS-DP 667  
 PROFINET 667  
 PROFINET-Kommunikationskanal  
     669  
 Program-Counter 533  
 Programm  
   – gegliedertes 650  
   – lineares 650  
   – parametrierbares 650  
 Programm (P) 645  
 Programmiersprache 614, 649  
 Programmiersprachen 614  
 Programmorganisationseinheit  
     644  
 Programmspeicher 587  
 Programm-Test 618  
 Programmzähler 597  
 PROM 521, 553  
 Proportionalbeiwert 709  
 Proportionalglied 691, 709  
 Prozess 689  
 Prozessor 535  
 Prüffristen 889  
 Pseudotetraden 481

PSRAM 560  
 P-Strecke 676  
 $PT_1$ -Glied 691, 693  
 $PT_1$ -Strecke 678  
 $PT_2$ -Glied 691, 694  
 $PT_1$ -Strecke 678  
 Pull-up-Widerstände 564  
 Pulsamplitudenmodulation (PAM)  
     997  
 Pulsocodemodulation (PCM) 999  
 Pulsdauermodulation (PDM) 999  
 Pulsfrequenzmodulation (PFM)  
     997  
 pulsierende Gleichspannung 312  
 Pulsphasenmodulation (PFM)-  
     997  
 Pumpspeicherkraftwerke 847  
 Punkt-zu-Punkt-Kanal 621  
 Punkt-zu-Punkt-Verbindung 1037  
 Pyroelektrischer Effekt 761

## Q

QAPSK 997  
 quadratischen Mittelwert 312  
 quadratischer Mittelwert 913  
 Quadraturmodulation 985  
 Quantile 723, 789  
 Quantisierung 1002  
 Quantisierungsgeräusch 1002  
 Quantisierungsrauschen 787, 1002  
 Quantisierungsrauschspannung  
     787  
 Quarzfilter 1012  
 Quasi-Komplementär-Endstufe  
     379  
 Querkodierung 1073  
 Quellspannung 238  
 Querkontraktionszahl 767

## R

Radar 1046  
 Radarquerschnitt 1046  
 Rahmenantenne 972  
 RAM 532  
 RAS 559  
 Ratiodektors 991  
 Raumdiversity 1035  
 Raumfaktor 898  
 Raummultiplexverfahren 1034  
 Raumwelle 974  
 Raumwinkel 187  
 Rauschabstand 912  
 Rauschen 333, 911, 1126  
 –, atmosphärisches 911  
 –, kosmisches 911  
 –, thermisches 911  
 $1/f$ -Rauschen 912

Rauschleistung 911  
 Rauschmaß 912  
 Rauschzahl 912  
 Rayleigh-Streuung 1041  
 RC-Filter 315  
 Rechenverstärker 380  
 Rechenwerk 533  
 Rechteckgeneratoren 401, 406  
 Rechteckhohlleiter 954, 956  
 Redundanz 484, 904, 1026  
 –, relative 904  
 Reed-Solomon-Verfahren 1029  
 reelle Bilder 177  
 reelle Fourierreihe 1093  
 Referenzspannung 385  
 Reflexion 171, 941, 1040  
 Reflexion des Lichtes 176  
 Reflexionsfaktoren 938, 963  
 –, äußere 962  
 Reflexionsgesetz 178  
 Regelabweichung 689  
 Regeldifferenz 674, 689  
 Regelfehler 689  
 Regelglied 689  
 Regelgröße 674, 689  
 Regelkreis 674, 689  
 Regelstrecke 674, 677, 689  
   – mit Ausgleich 676  
   – mit Totzeit 676  
   – ohne Ausgleich 676  
 Regelung 643, 674  
 Register 497  
 Regler 689  
   – digitaler 675  
 Reglerausgangssignal  $y_R$  674  
 Regression 723, 790  
 Reibungsarbeit 151  
 Reichweite eines Radargerätes  
     1047  
 Reihenfolgeverriegelung 655  
 Reihenresonanz 280, 288  
 Reihenschaltung von Wechsel-  
   stromwiderständen 277  
 Reihenschaltung von Widerständen  
     235  
 Reihenschlussgenerator 827  
 Reihenschlussmotor 824  
 rekursive Filter 1014  
 relative Brechzahl Differenz 1040  
 relative Dielektrizitätszahl 223  
 relative Kurzschlussspannung 798  
 relative Messabweichung 718, 719  
 relative Permeabilität 260  
 relativer Leistungspegel 916  
 relativer Spannungspegel 917  
 relativer Strompegel 917  
 relatives Leerlaufstromverhältnis  
     797  
 Remanenz 262

Remanenzflussdichte 755  
 RESET 584  
 Resonanz 167  
 Resonanzfrequenz 288, 699, 1006  
 Resonanzkurve 167  
 Resonanzüberhöhung 699  
 Resonator 403  
 Restseitenbandmodulation  
   (RM, VSB) 984  
 Restseitenbandübertragung 985  
 Restwelligkeit 315  
 R-Glied 695  
 Richtcharakteristik 1052  
 Richtdiagramm 970  
 Richtfunktechnik 1035  
 Ringmodulator 984  
 Ringnetz 624, 625, 853  
 Ringschieberegister 498  
 Ringverstärkung 403  
 RISC-Prozessoren 532  
 RJ45-Stecker 627  
 R-L-C-Bandpass 1009  
 R-L-C-Bandsperre 1009  
 RLL-Code 631  
 R-Nummer 956  
 Robustheit 689  
 Rohrschlitzstrahler 974  
 ROM 532, 552, 553  
 ROM-losen Versionen 581  
 ROM-Versionen 581  
 Rostfeuerung 844  
 Rotationsenergie 155  
 Router 626, 636, 1068  
 RSA-Verfahren 1082  
 RS-Flipflop 495  
 Rückführgröße  $r$  674  
 Rückführung 689  
 Rückkopplung 355, 689  
 Rückkopplungsnetzwerk 403  
 rücklaufender Welle 960  
 Rückübertragungsfaktor 960  
 Rückwärtszähler 501, 502  
 Rundhohlleiter 954, 956  
 Rundsendekanal 621  
 RZ-Verfahren 1003

## S

Sägezahngenerator 319  
 Sägezahngeneratoren 406  
 Sallen-Key-Filter 1022  
 Sammellinsen 180  
 Sammelschienen 868  
 Satellit 1036  
 Sättigung 330  
 Satz von Shannon 1073  
 Sauerstoffkonzentration 764  
 Scatterverbindung 976, 1036  
 SC-Filter 1014

Schadenfrüherkennung 791  
 Schall 1050  
 Schalldruck 1050  
 Schalldruckpegel 1051  
 Schalleistung 1050  
 Schallempfänger 1052  
 Schallgeschwindigkeit 175,  
   1050  
 Schallintensität 1050  
 Schallkennimpedanz 1050  
 Schallmauer 174  
 Schallpegel 1051  
 Schallschnelle 1050  
 Schallsender 1055  
 Schaltalegebra 468, 469  
 Schaltanlagen 872  
 Schaltgeräte 875  
 Schaltgruppen 800  
 Schalthysterese 398, 687  
 Schaltnetze 486  
 Schaltungsminimierung 470  
 Schaltungsunterlagen 439  
 Schaltwerke 494  
 Schaltzeichen 427, 441  
 Scheibenläufermotor 820  
 Scheinleistung 290, 746  
 Scheinleistungsmessung 750  
 Scheitelwert 273  
 Schenkelpol 815  
 Schering-Messbrücke 753  
 Schicht 1 629  
 Schicht 2 632  
 Schicht 3 634  
 Schicht 4 637  
 Schichten 5–7 639  
 Schichtpotentiometer 757  
 Schieberegister 497, 498  
 Schieberegisteranwendung 499  
 schiefer Wurf 145  
 Schleifdraht-Messbrücke 741  
 Schleife 663  
 Schleifenbildung 475  
 Schleifringläufer 812  
 Schlitzleitung 957  
 Schlupf  $s$  805  
 Schmalband-Frequenzmodulation  
   988  
 Schmerzschwelle 1051  
 Schmitt-Trigger 397  
 Schnittstellenbausteine 562  
 Schreib-Lesespeicher 552, 557  
 Schritte 662  
 Schrittmotor 819  
 Schrotrauschen 912  
 Schubspannung 156  
 Schutz durch Abschalten 886  
 Schutz durch Melden 886  
 Schutz durch nichtleitende Räume  
   885

Schutz gegen direktes Berühren  
   883  
 Schutz gegen indirektes Berühren  
   883  
 Schutzart 427, 831  
 Schütze 430, 880  
 Schutzgeräte 878  
 Schutzintervall 1030  
 Schutzisolierung 884  
 Schutzkleinspannung 885  
 Schutzmaßnahmen 882  
 Schutztrennung 884  
 schwarzer Strahler 188  
 Schwebung 168  
 Schwellenwertschalter 397  
 Schwellspannung 398  
 Schweredruck 157  
 Schwerkraft 147  
 Schwerpunkt 153  
 Schwingkreise 287  
 Schwingungstypen 956  
 Schwingungszeit 165  
 Schwund 1035  
 Schwunderscheinungen 976  
 SC-Verbindung 1046  
 SDM 1034  
 Seitenbänder 979  
 Sekundärradar 1047  
 Sekundenreserve 854  
 Selbstinduktion 269  
 selektive Filter 391  
 7-Segment-Anzeigen 417  
 Sensor 756  
 Sequentielle Logik 494  
 Serielle Schnittstelle 588, 780  
 Serienbetrieb 392  
 Serien-Parallel-Umsetzer 498  
 Server 620  
 Servomotor 819  
 SFN 1030  
 S-Glied 691  
 Shannon 1115  
 SI-Basiseinheiten 718  
 Sicherheitsbegriff 671  
 Sicherheitskategorie 672  
 Sicherungen 877, 882  
 Siedewasserreaktor 845  
 Signalangepasste Filter (matched  
   filter) 1127  
 Signale 903, 906  
 –, analoge 906, 651  
 –, binäre 651  
 –, digitale 906, 651  
 –, diskrete 906  
 –, kontinuierliche 906  
 –, nichtstationären 1122  
 –, stationären 1122  
 –, stochastische 1122  
 –, stochastische 911

- , stochastische, Kenngrößen 912
- , zufällige 911, 1122
- Signalerkennung, bei gestörter Übertragung 1127
- Signalflussdiagramm des beschalteten Vierpols 962
- Signalflussdiagramme 960, 961
- Signalflüsse 961, 962
- Signalflussplan 690
- Signalleistung 349
- Signal-Quantisierungs-Geräuschabstand 1002
- Signal-Rausch-Verhältnis 787
- Silicium 207
- Simplex-Betrieb 1063
- Simultan-Verzweigung 663
- Skin-Effekt 951
- Slave 496, 581
- SMD-Technik 410
- Smith-Diagramm 963
- Solkraftwerke 848
- Solar-Wasserstoff-Anlage 849
- Solarzelle 414
- Soll-Istwert-Vergleich 689
- sone 1051
- Sonnenwärmekraftwerke 848
- Sonnenwind 253
- Spaltpolmotor 818
- Spannarbeit 151
- Spannenwert 790
- Spannung 156, 231, 244
- Spannungsdämpfungsfaktor 915
- Spannungsdämpfungsmaß 916, 932
- Spannungserhöhung 894
- Spannungsfall auf Kabeln 867
- Spannungsfall auf Leitungen 867
- Spannungsfestigkeit 951
- Spannungsmesser 736
- Spannungsmessgeräte
  - , analog 736
  - , digitale 736
- Spannungspfad 726, 746
- Spannungsstabilisierung 317
- Spannungsstoß 256
- Spannungsteiler, frequenzkompensierter 933
- Spannungsübertragungsfaktor 915, 939
- Spannungsübertragungsmaß 916
- Spannungswandler 750, 803
- Spannungszwischenkreisumrichter 810
- s-Parameter 960
- s-Parameter im Kreisdiagramm 966
- Spartransformatoren 802
- Speicher 548, 549, 550, 551, 553
- Speichererweiterung 560
- Speicherfunktion 654
- Speicherkapazität 532, 542, 548, 550
- Speicherkraftwerke 847
- Speichermatrix 549, 558
- Speichern mit vorrangigem Rücksetzen 654
- Speichern mit vorrangigem Setzen 654
- Speicherorganisation 548
- speicherprogrammierbare Steuerung SPS 643
- Speichertechnologie 549
- Speichertypen 552
- Speicherwerk 533
- Speicherzeit 392
- Speicherzelle 557
- Spektraldichte 1092, 1097
- spektrale Leistungsdichte 913, 1123
- Spektralfarben 411
- Spektralfunktion 1092
- Spektrum 1097
- Sperrbereich 1005
- Sperrschicht 300
- Sperrschichtkapazität 303
- Sperrverzögerungszeit 304
- spezielle Gaskonstante 161
- spezifische Wärmekapazität 162
- spezifischer Widerstand 232, 951
- Spiegelgalvanometer 725
- Spitzenlast 842
- Spleißverbindung 1045
- Splines 723, 790
- Splitter 1068
- Sprung 663
- Sprungantwort 693
- Sprungfunktion  $\sigma(t)$  1111
- Sprungstellen 1093
- SPS-Programmiernorm DIN EN 61131-3 644
- SPS-Regelstruktur 686
- SRAM 557
- Stabankermotoren 820
- Stabilität 702, 1092
  - asymptotische 702
- Stabilitätskriterium
  - grundlegendes 702
- Stack 541, 594, 595
- Stackpointer 533, 595
- Standardabweichung 719, 789, 913, 1123
- Standardregelkreis 702
- Stapelspeicher 595
- Start-Funktion 671
- 3-state 513
- State-Diagramm 530
- stationärer Prozess 1123
- statischer Durchlasswiderstand 302
- statischer Sperrwiderstand 303
- Statistischer Multiplex 1030
- Steckverbindung 1045
- Steckvorrichtungen 431
- Stefan-Boltzmann-Gesetz 165, 188
- stehende Wellen 171, 943
- Stehwellenverhältnisse 962
- Steigung des Amplitudenganges 1005
- Steinersche Satz 156
- Steinkohleeinheit 843
- Steinmetzschtaltung 818
- Stellgröße 673, 674, 689
- Steradian 187
- Stereoübertragung 1024
- Stern-Bus-Netz 625
- Stern-Dreieck Umwandlung 235
- Stern-Dreieck-Anlauf 808
- Sternnetz 623
- Sternschaltung 291
- Stern-Stern-Netz 624
- Steuereinrichtung 689
- Steuergröße 673
- Steuerstrecke 689
- Steuerung 643, 673, 689
- Steuerungssicherheit 670
- Steuerwerke 533
- Steuerwortregister 565
- Stichleitungen 959
- Stichprobe
  - , Erwartungswert 1122
  - , linearer Mittelwert 1122
- Stopp-Funktion 671
- Störabstand 507, 508, 912
- Störeinflüsse 776
- Störgröße 673, 689
- Störlichtbogenfestigkeit 874
- Störsicherheit 508
- Störungsbeseitigung 838
- Stoßfunktion 1111
- Stoßkurzschluss 891
- Strahlcharakteristik 188
- Strahldichte 187
- Strahlennetz 852
- Strahlstärke 187
- Strahlungsdichte 968
- Strahlungsleistung 187
- Strahlungswiderstand 971
- Strangspannungen 851
- Streamer 608
- Strecke 689
- Streifenleitungen 956
- Streuung 913
- Stromdämpfungsfaktor 915
- Stromdämpfungsmaß 916, 932
- Stromdichte 232



Stromflusswinkel 322  
 Stromlaufplan 448  
 Strommesser 737  
 Strommessgeräte  
 –, analoge 737  
 –, digitale 737  
 Strommessung 737  
 Strompfad 726, 746  
 Stromstärke 232  
 Stromtarife 841  
 Stromübertragungsfaktor 915, 939  
 Stromübertragungsmaß 916  
 Stromverdrängungsläufer 808  
 Stromverstärkungen 329, 735  
 Stromwandler 750, 804  
 Stromzwischenkreisumrichter 810  
 Struktur 648  
 Struktur einer Ablaufsteuerung 665  
 Strukturbild 690  
 Stufenindexfaser 628  
 Subtrahierer 386, 488  
 Summenfunktion 1122  
 Summenhäufigkeitsfunktion 1122  
 Summenzeitkonstante 711  
 Summierglied 691  
 Superpositionsprinzip 691  
 Supraleiter 203, 209  
 Switch 623, 1068  
 Symbole 450, 726  
 Symmetriebedingungen 1093  
 symmetrische Brückenschaltung 828  
 synchrone Zählern 503  
 Synthese 474, 476, 477  
 System 689, 1090  
 Systemanalyse 1092  
 systematische Abweichungen 718  
 systematische Codes 1075  
 systematische Messabweichung 737  
 System-Kontrollsignale 538  
 Systemsynthese 1092

## T

Taktfrequenz 401  
 Talker 780  
 Tastatur 609  
 Tastaturmatrix 610  
 Tastgrad beim Impulsradar 1047  
 Tauchspulmikrofon 1054  
 TCM 631  
 TCP/IP 637  
 TDM 622  
 Teilkirrfaktoren 915  
 Temperaturbereich 508  
 Temperaturen 735  
 Temperaturkoeffizient 233

Temperaturkoeffizienten 309  
 TEM-Typ, transversal  
 elektromagnetisch 934  
 Terminaladapter 1066  
 Tetrade 465  
 TE-Welle, Transversal-elektrische Wellen 954  
 T-Flipflop 497  
 Theorem von Wiener-Khintchine 913, 1123  
 thermischer Auslöser 835  
 Thermistor-Motorvollschutz 836  
 Thermoelemente 761  
 Thermoempfindlichkeit 761, 763  
 Thermoumformermesswerke 739  
 Thin Client 620  
 Thinwire Ethernet 626  
 Thomson-Messbrücke 741  
 Tiefpassfilter 1005  
 Tiefpassschaltung mit RC-Glied 286  
 Tiefpassschaltung mit RL-Glied 286  
 Time Division Multiplexing 622  
 TIMER 401, 569, 585  
 Time-Sharing-Betrieb 619  
 Timing 534  
 Tintenstrahldrucker 613  
 TM-Welle, Transversal-magnetische-Wellen 954  
 Toggle-Flipflop 497  
 Token Ring 624, 633  
 Token-(Ring-)Verfahren 1063  
 Token-Verfahren 780  
 Toleranzen 433  
 Tonaderspeisung 1055  
 Top-Down-Methode 617, 618  
 Torsionsmoment 767  
 Totalreflexion 179  
 Totzeit 678  
 Totzeitglied 691  
 Trafoimpedanz 891  
 Träger 978  
 Trägerrückgewinnung 995  
 Trägheitsmoment 154  
 Transformationen 964  
 Transformationsgleichung 962  
 Transformator 793  
 Transformatorschutz 801  
 Transistor-Grundsaltungen 351  
 Transistorschalter 392  
 Transitfrequenz 333  
 transistionaler Kopplungsfaktor 1011  
 Transitionen 662  
 Transponder 1038  
 Transversalwelle 169  
 Treiberstufen 370  
 Trellis-Code-Modulation 631

Trellis-Diagramm 1078  
 Trennschalter 875  
 Trigger-Flipflop 497  
 Trinitron-Farbbildröhre 612  
 Triplate-Leitung 957  
 Triple Play 1069  
 Tristate 514  
 Tristate-Treiber 558  
 Tschebyscheff-Filter 1018  
 TTL 507, 510  
 Turboläufer 815  
 Turn-Around-Time 616  
 Twisted-Pair-Kabel 627  
 Typenraddrucker 613  
 TZ-Glied 691, 693

## U

Überlagerungsempfänger 1023  
 Überlagerungsprinzip 691  
 Überlastrelais 878  
 Überlastschutz 862  
 Überlastung von Transformatoren 801  
 Übernahmeverzerrungen 376  
 Überprüfung der Schutzmaßnahme 890  
 Überreichweiten 976  
 Überschwingweite 687  
 Übersetzungsverhältnis 795  
 Übersichtsschaltplan 447  
 Übersteuerungsfaktor 392  
 Überstromrelais 878  
 Überstromschutz 324, 862  
 Überstromschutzeinrichtung 887  
 Überstromzeitrelais 878  
 Übertragungsbeiwert  $K_{PS}$  676  
 Übertragungseigenschaften 351  
 Übertragungsfaktor 915, 938, 971  
 – allgemeiner 1092  
 Übertragungsfunktion 695, 908, 914, 1090, 1092  
 Übertragungsglied 690  
 – akausales 692  
 – dynamisches 691  
 – kausales 692  
 – lineares 691  
 – nichtlineares 691  
 – statisches 690  
 – zeitinvariantes 692  
 – zeitvariantes 692  
 Übertragungsmaß 916, 917  
 – Vierpole  
 – passives längssymmetrisches  
 UDP 639  
 Ultraschall 175, 1050  
 Ultraschall-Durchflussmessung 771  
 Umfangsgeschwindigkeit 146

Umkehrverstärker 384  
 UMTS 1070  
 unabhängige Variablen 961  
 UND-Verknüpfung 466  
 unendlich lange Leitung 938  
 Ungleichung von Kraft 1073  
 Universalmotor 830  
 Universalplatinen 453  
 universelle Gaskonstante 161  
 Unschärferelation 1099  
 unsymmetrischen Einphasen-  
 Brückenschaltung 828  
 unsymmetrisches Dreileiternetz  
 293  
 Unterbrechungssteuerung 595  
 unteres Seitenband (US) 980  
 Unterprogramme 594  
 untersynchrone Kaskade 813  
 USART 576  
 User Data Protocol 639

## V

V.24 629  
 Valenzelektronen 231  
 Variablen 647  
 – direkte 648  
 – globale 649  
 Varianz einer Stichprobe 1123  
 Varianz einer Verteilung 1123  
 Verarmungstyp 336  
 Verbinden von Lichtleitern 1045  
 Verbindungshalbleiter 208  
 Verbundnetz 853  
 Verbundseile 855  
 verdrahtete ODER-Schaltung  
 512  
 verdrahtete UND-Schaltung 512  
 Verdrahtungsplan 448  
 Verdrängungsprinzip 770  
 Vergleichsfunktion 659  
 Vergleichsfunktion 658  
 Vergleichsglied 689  
 Vergleichsstelle 762  
 Verify Check 555  
 Verkettungsfaktor 851  
 Verknüpfungssteuerung 652  
 Verlegung in Erde 858  
 Verlegung in Luft 858  
 Verlegung von Kabeln 868  
 Verlegung von Leitungen 868  
 verlustarme Leitung 941  
 Verlustfaktor 934  
 –, Messung von  $L$ ,  $C$  752  
 Verlustleistung 302, 509  
 Verlustlose Leitung 937, 941  
 Verlustziffer 226  
 Vermaschung 472  
 Vermittlungstechnik 1059  
 Verriegeln über die Rücksetz-  
 eingänge 655  
 Verriegeln über die Setzeingänge  
 655  
 Verstärkerwirkung 350  
 Verstärkungsmaß 916  
 Verstärkungsprinzip 691  
 Verteilung  
 –, Erwartungswert 1122  
 –, linearer Mittelwert 1122  
 Verteilungen 1125  
 Verteilungsgesetz 469  
 Vertikalantenne 972  
 Vertrauensbereich 722, 790  
 Vertrauensgrenzen 722, 789  
 Vertrauensniveau 722  
 Verzerrungen 913  
 –, lineare 914  
 –, nichtlineare 914  
 verzerrungsfreie Leitung 940  
 Verzögerungsglied erster Ordnung  
 691  
 Verzögerungsglied zweiter  
 Ordnung 691  
 Verzögerungssystem 711  
 Verzögerungszeit 392  
 Verzugszeit 678  
 Videointerface 613  
 Vielfachzugang 1037  
 Vierphasenumtastung (4-PSK)  
 995  
 Vierpole 918  
 –, aktive 918  
 –, Betriebskenngrößen 921  
 –, längssymmetrische 930  
 –, längssymmetrische passive,  
 Wellenwiderstand 931  
 –, lineare 918  
 –, nichtlineare 918  
 –, passive 918  
 –, passive, Wellenparameter 930  
 –, rückwirkungsfreie 930  
 –, übertragungssymmetrische  
 (reziproke) 929  
 –, widerstandssymmetrische 930  
 –, Zusammenschaltung 918  
 Vierpol-Ersatzschaltbild 351  
 Vierpolgleichungen 351, 918  
 Vierquadrantenbetrieb 829, 830  
 Viertelbrücke 743  
 Villard-Schaltung 316  
 virtuelle Bilder 177  
 Viskosität 159  
 Voice-over-IP 619  
 VoIP 619, 1069  
 Volladdierer 486, 487  
 Vollbrücken 743  
 vollgesteuerte Einphasen-Brücken-  
 schaltung 829

vollständige Messschaltung 747  
 Vollverbindung 624  
 Volumenausdehnungskoeffizienten  
 160  
 Volumenstrom 158  
 Vorhaltezeit 709  
 Vorhaltzeit  $T_V$  683  
 Vorsteuerung 690  
 Vorstufen 370  
 Vorwärtsübertragungsfaktor 960  
 Vorwärtszähler 500, 502  
 $VZ_1$ -Glied 691

## W

wahrer Wert 718  
 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  
 1122  
 WAN 620, 1068  
 Wanderwellen 941  
 Wärmekapazität 162  
 Wärmekraftwerke 843  
 Wärmeleitung 164  
 Wärmestrahlung 165  
 Wärmeströmung 165  
 Wärmewiderstand 304  
 Wartung von Maschinen 837  
 Wasserkraftwerke 847  
 Wechselfeldpermeabilität 213  
 Wechselspannungen, Messung 738  
 Wechselspannungsmessgeräte 739  
 Wechselstrom 272  
 Wechselstrombrücken 828  
 Wechselströme, Messung 740  
 Wechselstromgegenkopplung 358  
 Wechselstrom-Messbrücken,  
 Impedanzmessung 743  
 Wegaufnehmer 776  
 Wegmessung 773  
 Weißes Rauschen 912  
 Weißsche Bezirke 262  
 Wellen 169  
 –, cosinuselliptische 956  
 –, sinuselliptische 956  
 Wellenausbreitung 974, 977  
 Wellenausbreitung im Plasma 975  
 Wellenfilter 944  
 Wellenlänge, kritische 955  
 Wellenoptik 184  
 Wellentheorie 176  
 Wellentheorie des Lichtes 176  
 Wellentyp 955  
 Wellenwiderstand 936, 951  
 Wellenwiderstand als Funktion  
 von  $w/h$  959  
 Wellenwiderstand des leeren  
 Raumes 968  
 Wellenwiderstand des Plasmas 975  
 Wellenzahl 170



Wellrohre 952  
Weltenergiereserven 843  
Wendepole 822  
Wertetabelle 465  
3/2-Wegeventil 655  
5/2-Wegeventil 655  
5/3-Wegeventil 656  
Wheatstone-Messbrücke 740  
Wheatstone-Messbrücke,  
  Abgleichverfahren 741  
Wickelstromwandler 804  
Wicklungen 793  
Wide Area Network 620  
Widerstand 232  
Widerstandsänderung 758  
Widerstandsbremung 824, 825  
Widerstandsmessung 740  
Widerstandsrauschen 911  
Widerstandsthermometer 757  
Wien-Brücke 405  
Wien-Robinson-Brücke 405  
Wiensche Verschiebungsgesetz  
  188  
Windkraftwerke 848  
Winkelbeschleunigung 146  
Winkelgeschwindigkeit 146  
Winkelmessung 773  
Winkelmodulation 986  
Wirbelschichtfeuerung 844  
Wired AND 513  
Wired OR 513  
Wirkfläche 971  
Wirkleistung 290, 746, 961  
Wirkleistungsmessung 746  
Wirkungsgrad 151, 242, 798  
WLAN 1072  
Woltmann-Zähler 770

**X**

X-Y-Stereofonie 1024

**Y**

Yagi-Antenne 973  
Yellow Cable 626  
Y-Parameter 340, 922

**Z**

Zahlensysteme 476, 477  
Zahlenwertgleichungen 717  
Zähler 500  
Zähler in Automatisierungs-  
  systemen 657  
Zählerkonstante 751  
Zählpfeilsystem 234  
Zeichnungsnormen 426  
Zeiger 167, 275  
Zeigerdiagramm 274, 981  
Zeilensprungverfahren 611  
zeitdiskreten Signalverarbeitung  
  1116  
Zeitgeber 585  
Zeitgeberbausteine 569  
Zeitglieder nach IEC 61131-3 658  
Zeitinvarianz 1092  
Zeitkonstante 166, 250, 272, 713  
Zeitmessung 772  
Zeitmultiplexverfahren 492, 622,  
  1032  
Zeitrelais 431  
Zener-Effekt 309  
Zentraleinheit 532  
zentraler Grenzwertsatz der  
  Statistik 1126

Zentralkompensation 893  
Zentralspeicher 560, 561  
Zentralwert 789, 1122  
Zentripetal-Beschleunigung  
  149  
Zentripetalkraft 149  
Zerstreuungslinsen 180  
Zielextraktor 1048  
Z-Parameter 922  
z-Transformation 1092, 1118  
Zufällige Abweichungen 719  
Zugriffszeit 548  
Zündimpulse 326  
Zündspannung 321  
Zündstrom 321  
Zündvorgang 318  
Zündzeit 322  
zusätzlicher Potentialausgleich  
  888  
Zuverlässigkeit 431  
Zweierkomplement 478, 480,  
  488  
Zweig 961  
Zweiphasenumtastung (2-PSK)  
  994  
Zweipunkt-Regelfunktion 686  
Zweiquadrantenantrieb 829  
Zweiquadrantenbetrieb 830  
Zweirichtungstreiber 562, 563  
Zweiseitenband-Amplituden-  
  modulation 980  
Zweitore 918  
Zwischenfrequenzdurchschaltung  
  1038  
Zyklische Kodes 1075  
Zylinderkondensator 247  
Zylinderspule 252