

Ekbert Hering · Rolf Martin · Martin Stohrer

Taschenbuch der Mathematik und Physik

Ekbert Hering
Rolf Martin
Martin Stohrer

Taschenbuch der Mathematik und Physik

4., aktualisierte Auflage

Mit 185 Abbildungen



Springer

Professor Dr. Dr. EKBERT HERING
Im Bürglesbühl 41
73540 Heubach-Lautern

Professor Dr. rer. nat. ROLF MARTIN
Wolf-Hirth-Weg 7
73257 Köngen

Prof. Dr. rer. nat. MARTIN STOHRER
Schlürfergasse 16
70329 Stuttgart

Dieses Buch entstand unter Mitarbeit von:
Professor Dr. Dirk Flottmann, Hochschule Aalen
Professor Dr. Rainer Gräf, Hochschule Esslingen
Professor Dr. Karlheinz Schöffler, Fachhochschule Niederrhein
Dr. Wolfgang Schulz, Wave GmbH Stuttgart

Die 3. Auflage, ISBN 3-540-41181-X, erschien in der VDI-Reihe

ISBN 3-540-22148-4 Springer Berlin Heidelberg New York

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media
springer.de

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2001 and 2005
Printed in Germany

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Buch berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Sollte in diesem Werk direkt oder indirekt auf Gesetze, Vorschriften oder Richtlinien (z. B. DIN, VDI, VDE) Bezug genommen oder aus ihnen zitiert worden sein, so kann der Verlag keine Gewähr für die Richtigkeit, Vollständigkeit oder Aktualität übernehmen. Es empfiehlt sich, gegebenenfalls für die eigenen Arbeiten die vollständigen Vorschriften oder Richtlinien in der jeweils gültigen Fassung hinzuzuziehen.

Einbandentwurf: Design & Production, Heidelberg
Satz: Fotosatz-Service Köhler GmbH, Würzburg

Gedruckt auf säurefreiem Papier 68M – 5 4 3 2 1 0

Vorwort zur vierten Auflage

Die ersten drei Auflagen des Kompendiums der Mathematik und Physik fanden ein erfreuliches Echo. Dies ermunterte uns, den eingeschlagenen Weg, die Zusammenhänge in der Mathematik und der Physik in einem Werk komprimiert und kompetent darzustellen, konsequent fortzusetzen. So entstand die vierte Auflage des Werkes, in der im wesentlichen Fehler beseitigt, der Übersichtscharakter noch klarer strukturiert wurde, die Informatik komprimiert und die Chemie erweitert wurde. Wir wünschen uns, dass das Werk für alle Anwender, den Studierenden wie den Praktikern von großem Nutzen ist. Über Anregungen zur weiteren Verbesserung des Nachschlagewerkes und eine weitere kritische Begleitung durch unsere Leser würden wir uns freuen.

Heubach, Esslingen, Stuttgart
August 2004

Ekbert Hering
Rolf Martin
Martin Stohrer

Vorwort zur zweiten Auflage

Die erste Auflage dieses Werkes fand ein erfreulich großes Echo und machte bereits nach gut einem Jahr eine Neuauflage erforderlich. In dieser nun vorliegenden zweiten Auflage wurden Fehler berichtigt und geringfügige Ergänzungen vorgenommen. Möge das Werk vielen Nutzern bei der Alltagsarbeit helfen! Über Anregungen zur weiteren Verbesserung des Nachschlagewerkes würden wir uns sehr freuen.

Heubach, Esslingen, Stuttgart
Juli 1995

*Ekbert Hering
Rolf Martin
Martin Stohrer*

Vorwort zur ersten Auflage

Das Physikalisch-Technische Taschenbuch ist ein Kompendium und Nachschlagewerk für Ingenieure und Naturwissenschaftler in Studium und Berufspraxis. Das Werk faßt alle wichtigen Formeln der Mathematik, Physik und Technik in einem Band zusammen. Dabei sind neben klassischen Gebieten auch moderne Bereiche wie Optoelektronik, Nachrichtentechnik, Informatik und Umweltschutz berücksichtigt. Es ersetzt kein Lehrbuch, doch werden kompakt und handlich die wesentlichen Zusammenhänge erläutert. Häufig gebrauchte Stoffwerte, Konstanten und Umrechnungen von Einheiten sowie die Eigenschaften der chemischen Elemente sind in Tabellen zusammengestellt, um den schnellen Zugriff sicherzustellen.

Der Inhalt umfaßt im einzelnen: Mathematik – Fehlerrechnung – physikalische Grundlagen – Gravitation – Technische Mechanik – Hydro- und Aeromechanik – Festigkeitslehre – Wärme- und Stoffübertragung – Elektrotechnik und Elektronik – Magnetismus – Metalle und Halbleiter – Optoelektronik – Festkörperphysik – Nachrichtentechnik – Atom- und Kernphysik – Relativitätstheorie – Energietechnik – Eigenschaften der chemischen Elemente – Informatik und Umwelttechnik.

Ein klar gegliedertes Inhaltsverzeichnis und ein ausführliches Sachwortverzeichnis erleichtern dem Leser das Auffinden der gesuchten Information. Autoren und Verlag wünschen ihren Lesern einen erfolgreichen Einsatz dieses Werkes und freuen sich auf konstruktive Kritik und Verbesserungsvorschläge.

Heubach, Esslingen, Stuttgart
Mai 1994

*Eckbert Hering
Rolf Martin
Martin Stohrer*

Inhalt

A Mathematik	1
A.1 Mathematische Zeichen und Normzahlen	1
A.1.1 Mathematische Symbolik	1
A.1.2 Mathematische Logik	2
A.1.3 Normzahlen	3
A.2 Reelle Zahlen	4
A.3 Komplexe Zahlen	6
A.4 Logarithmus und Logarithmengesetze	9
A.5 Trigonometrische Funktionen	10
A.6 Analytische Geometrie der Ebene	13
A.7 Geometrische Sätze	22
A.8 Flächen und Körper	24
A.9 Vektorrechnung	26
A.10 Funktionen	29
A.11 Algebraische Gleichungen	44
A.12 Matrizenrechnung und Determinanten	50
A.13 Differentialrechnung	56
A.14 Integralrechnung	64
A.15 Summen, Folgen und Reihen	88
A.16 Fourier-Reihen	93
A.17 Fourier-Transformation	96
A.18 Gewöhnliche Differentialgleichungen	99
A.18.1 Differentialgleichung $y' = f(x, y)$	99
A.18.2 Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung	100
A.18.3 Separierbare Differentialgleichungen	101
A.18.4 Exakte Differentialgleichungen	103
A.18.5 Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung	104
A.18.6 Differentialgleichungen 2. Ordnung und Energiesatz	105
A.18.7 Spezielle Differentialgleichungen höherer Ordnung	105
A.19 Elemente der Wahrscheinlichkeitstheorie	107
A.19.1 Kombinatorik	107
A.19.2 Wahrscheinlichkeiten	108
A.19.3 Verteilungsfunktionen	109
B Fehlerrechnung	111
B.1 Meßgenauigkeit	111
B.2 Analyse statistischer Meßwertverteilungen	111
B.3 Fehlerfortpflanzung	114
B.4 Regression – Kurvenanpassung	114
B.5 Ausgleichsgeradenkonstruktion	122
B.6 Korrelationsanalyse	122

C Physikalische Größen und Konstanten	124
C.1 Physikalische Basisgrößen und Definitionen	124
C.2 Umrechnungen gebräuchlicher Größen	124
C.3 Naturkonstanten	124
D Kinematik	135
D.1 Eindimensionale Kinematik	135
D.1.1 Geschwindigkeit	135
D.1.2 Beschleunigung	135
D.1.3 Kinematische Diagramme	135
D.1.4 Spezialfälle	136
D.2 Dreidimensionale Kinematik	138
D.2.1 Ortsvektor und Bahnkurve	138
D.2.2 Geschwindigkeitsvektor	138
D.2.3 Beschleunigungsvektor	139
D.2.4 Kreisbewegungen	140
D.2.5 Wurfbewegungen	140
E Dynamik	143
E.1 Grundgesetze der klassischen Mechanik	143
E.1.1 Die Newtonschen Axiome	143
E.1.2 Wechselwirkungskräfte der Mechanik	145
E.2 Dynamik in bewegten Bezugssystemen	148
E.2.1 Geradlinig bewegtes Bezugssystem	148
E.2.2 Gleichförmig rotierende Bezugssysteme	149
E.3 Arbeit, Leistung und Energie	150
E.3.1 Arbeit W	150
E.3.2 Leistung P	150
E.3.3 Energie E	152
E.4 Impuls und Stoßprozesse	153
E.4.1 Systeme materieller Punkte	153
E.4.2 Stoßprozesse	155
E.4.3 Raketengleichung	156
E.5 Drehbewegungen	160
E.5.1 Drehmoment	160
E.5.2 Drehimpuls	161
E.5.3 Dynamisches Grundgesetz der Rotation	162
E.5.4 Arbeit, Leistung und Energie bei der Drehbewegung	163
E.6 Erhaltungssätze der Mechanik	164
E.7 Mechanik starrer Körper	164
E.7.1 Freiheitsgrade und Kinematik	164
E.7.2 Statik	165
E.7.3 Dynamik	167

F Gravitation	170
F.1 Newtonsches Gravitationsgesetz	171
F.2 Gravitationsfeldstärke	171
F.3 Gravitations- oder Hubarbeit	172
F.4 Potentielle Energie der Gravitation	172
F.5 Gravitationspotential	172
F.6 Planetenbewegung	173
F.7 Schwereigenschaften der Erde	176
G Festigkeitslehre	177
G.1 Spannung und Spannungszustand	177
G.2 Verformungsarten	178
G.3 Zugversuch nach DIN 50 145	180
G.4 Elementare Belastungsfälle	181
G.4.1 Biegung	183
G.4.2 Knickung	185
G.4.3 Torsion	186
G.5 Bruchmechanik	186
G.6 Schwingende Beanspruchung	187
G.7 Zeitstandsverhalten	187
G.8 Energie	188
G.9 Härte	189
H Hydro- und Aeromechanik	190
H.1 Ruhende Flüssigkeiten	192
H.1.1 Druck, Kompressibilität, Volumenausdehnung	192
H.1.2 Kolbendruck, Schweredruck und Seitendruck	193
H.1.3 Auftrieb	194
H.1.4 Bestimmung der Dichte	195
H.1.5 Grenzflächeneffekte	195
H.2 Ruhende Gase	197
H.2.1 Druck und Volumen	197
H.2.2 Schweredruck	197
H.3 Strömende Flüssigkeiten und Gase	199
H.3.1 Ideale (reibungsfreie) Strömungen	199
H.3.2 Strömungen realer Flüssigkeiten und Gase	206
H.3.2.1 Laminare Strömung	206
H.3.2.2 Turbulente Strömung	208
H.4 Molekularbewegungen	213
H.4.1 Diffusion	213
H.4.2 Lösungen	213
J Schwingungen und Wellen	214
J.1 Schwingungen	214
J.1.1 Freie ungedämpfte Schwingung	215
J.1.1.1 Grundlagen	215
J.1.1.2 Allgemeine Beschreibung durch eine Differentialgleichung	216
J.1.1.3 Schwingungssysteme	216

J.1.1.4	Gesamtenergie	216
J.1.2	Freie gedämpfte Schwingung	220
J.1.3	Erzwungene Schwingung	223
J.1.3.1	Erzwungene mechanische Schwingung	223
J.1.3.2	Erzwungene elektrische Schwingung	226
J.1.4	Überlagerung von Schwingungen	228
J.1.4.1	Überlagerung in gleicher Raumrichtung und mit gleicher Frequenz	229
J.1.4.2	Überlagerung in gleicher Raumrichtung und mit geringen Frequenzunterschieden (Schwebung)	230
J.1.4.3	Überlagerung in gleicher Raumrichtung und mit großen Frequenzunterschieden	231
J.1.4.4	Überlagerung in gleicher Raumrichtung mit ganzzahligen Frequenzverhältnissen (Fourier-Analyse)	231
J.1.4.5	Überlagerung von Schwingungen in ganzzahligen Frequenzverhältnissen, die senkrecht aufeinanderstehen (Lissajous-Figuren)	233
J.1.5	Gekoppelte Schwingungen	235
J.1.6	Orts- und zeitabhängige Schwinger	235
J.2	Wellen	236
J.2.1	Harmonische Wellen	236
J.2.2	Energietransport	236
J.2.3	Phasengeschwindigkeit	240
J.2.4	Gruppengeschwindigkeit	241
J.2.5	Doppler-Effekt	241
J.2.6	Interferenz	242
K	Akustik	244
K.1	Schallausbreitung	244
K.1.1	Schallfrequenz	244
K.1.2	Schallgeschwindigkeit	244
K.1.3	Schallwellenlänge	246
K.1.4	Schallwiderstand (Schallkennimpedanz)	246
K.1.5	Schalldruck	246
K.1.6	Schallschnelle	247
K.1.7	Energiedichte	248
K.1.8	Schallintensität	248
K.1.9	Schalleistung	248
K.1.10	Dämpfungskoeffizient der Schallabsorption	248
K.2	Schallwandler	249
K.2.1	Schallpegel	250
K.2.2	Gesamtschallpegel	250
K.2.3	Schallfrequenzspektrum, Bandfilter	251
K.3	Schallwelle an Grenzflächen	252
K.3.1	Schallreflexionsgrad	252
K.3.2	Schalltransmissionsgrad	252
K.3.3	Schallabsorptionsgrad	252
K.4	Schalldurchgang durch Trennwände	254
K.4.1	Schalltransmissionsgrad	254
K.4.2	Schalldämmmaß einer Trennwand	254
K.4.3	Spuranpassungs-Schallwellenlänge	255
K.4.4	Spuranpassungsfrequenz	255

K.5	Physiologische Akustik	256
K.5.1	Lautstärke	256
K.5.2	Lautheit	257
K.5.3	A-bewerteter Schallpegel	257
K.5.4	Äquivalenter Dauerschallpegel	257
K.6	Raumakustik	258
K.6.1	Äquivalente Absorptionsfläche	258
K.6.2	Schalleistungspegel des diffusen Schallfeldes	258
K.6.3	Nachhallzeit	258
K.6.4	Hallradius	259
K.7	Technische Akustik und Bauakustik	259
K.7.1	Luftschall-Dämmmaß	259
K.7.2	Norm-Trittschallpegel	259
K.7.3	Körperschall-Isolierungswirkungsgrad	260
K.7.4	Strömungsgeräusche	261
K.8	Ultraschall	263
L	Optik	264
L.1	Geometrische Optik	264
L.1.1	Lichtstrahlen und Abbildung	265
L.1.2	Reflexion des Lichtes	265
L.1.2.1	Reflexion an ebenen Flächen	265
L.1.2.2	Reflexion an gekrümmten Flächen	266
L.1.3	Brechung des Lichts	267
L.1.3.1	Brechungsgesetz	267
L.1.3.2	Lichtwellenleiter	268
L.1.3.3	Brechung an Prismen	268
L.1.3.4	Berechnung an Kugelflächen	270
L.1.4	Abbildung durch Linsen	270
L.1.4.1	Dünne Linsen	270
L.1.4.2	Dicke Linsen	271
L.1.4.3	Linsensysteme	273
L.1.5	Blenden	273
L.1.6	Abbildungsfehler	273
L.1.7	Optische Instrumente	273
L.1.7.1	Das menschliche Auge	273
L.1.7.2	Vergößerungsinstrumente	275
L.1.7.3	Fotoapparat	276
L.2	Fotometrie	277
L.2.1	Strahlungsphysikalische Größen	277
L.2.2	Lichttechnische Größen	279
L.3	Wellenoptik	281
L.3.1	Interferenz und Beugung	281
L.3.1.1	Kohärenz	281
L.3.1.2	Interferenzen an dünnen Schichten	282
L.3.1.3	Interferometer	283
L.3.1.4	Beugung am Spalt	283
L.3.1.5	Auflösungsvermögen optischer Instrumente	283
L.3.1.6	Beugung am Gitter	284
L.3.1.7	Spektralapparate	285

L.3.1.8	Röntgenbeugung an Kristallgittern	285
L.3.1.9	Holografie	286
L.3.2	Polarisation des Lichts	287
L.3.2.1	Polarisationsformen	287
L.3.2.2	Erzeugung von polarisiertem Licht	288
L.3.2.3	Technische Anwendungen der Doppelbrechung	288
L.3.2.4	Optische Aktivität	289
L.4	Quantenoptik	290
L.4.1	Lichtquanten	290
L.4.2	Laser	290
L.4.3	Materiewellen	293
M	Elektrizität und Magnetismus	294
M.1	Elektrisches Feld	296
M.1.1	Elektrische Feldstärke	296
M.1.2	Elektrische Kraft	298
M.1.3	Elektrisches Potential	299
M.1.4	Materie im elektrischen Feld	300
M.2	Gleichstromkreis	306
M.2.1	Stromstärke	306
M.2.2	Elektrische Spannung	306
M.2.3	Widerstand und Leitwert	307
M.2.4	Elektrische Arbeit, elektrische Leistung und Wirkungsgrad	310
M.2.5	Ohmsches Gesetz	311
M.2.6	Elektrische Netze – Kirchhoffsche Regeln	311
M.2.7	Messung von Strom und Spannung	315
M.2.8	Ausgewählte Meßverfahren	315
M.3	Ladungstransport in Flüssigkeiten	317
M.4	Ladungstransport im Vakuum und in Gasen	321
M.4.1	Ladungstransport im Vakuum	321
M.4.2	Stromleitung im Vakuum	322
M.4.3	Stromleitung in Gasen	324
M.5	Magnetisches Feld	325
M.5.1	Beschreibung	325
M.5.2	Magnetische Feldstärke (magnetische Erregung)	325
M.5.3	Magnetische Induktion (Flußdichte)	326
M.5.4	Materie im Magnetfeld	331
M.6	Wechselstromkreis	340
M.6.1	Wechselspannung und Wechselstrom	340
M.6.2	Wechselstromkreis	342
M.6.3	Arbeit und Leistung	346
M.6.4	Transformation von Wechselströmen	347
M.7	Ein- und Ausschaltvorgänge	348
M.7.1	Ein- und Ausschalten eines Kondensators	348
M.7.2	Ein- und Ausschalten einer Spule	349
M.8	Elektrische Maschinen	349
M.9	Elektromagnetische Schwingungen	351
M.9.1	Ungedämpfte elektromagnetische Schwingung	351
M.9.2	Gedämpfte elektromagnetische Schwingung	352

N Nachrichtentechnik	353
N.1 Informationstheorie	353
N.2 Signale und Systeme	353
N.2.1 Zeit- und Frequenzbereich	353
N.2.2 Abtasttheorem	355
N.2.3 Modulation	356
N.2.4 Pegel und Dämpfungsmaß	359
N.2.5 Verzerrungen	360
N.2.6 Rauschen	362
N.3 Nachrichtenübertragung	362
N.3.1 Sender	362
N.3.2 Übertragungsmedium	362
N.3.3 Empfänger	365
O Thermodynamik	366
O.1 Grundlagen	366
O.1.1 Thermodynamische Grundbegriffe	366
O.1.2 Temperatur	367
O.1.3 Thermische Ausdehnung	368
O.1.4 Allgemeine Zustandsgleichung idealer Gase	369
O.2 Kinetische Gastheorie	370
O.2.1 Gasdruck	370
O.2.2 Thermische Energie und Temperatur	370
O.2.3 Geschwindigkeitsverteilung von Gasmolekülen	371
O.3 Hauptsätze der Thermodynamik	371
O.3.1 Wärme	371
O.3.2 Erster Hauptsatz der Thermodynamik	372
O.3.3 Wärmekapazität idealer Gase	373
O.3.4 Spezielle Zustandsänderungen idealer Gase	375
O.3.5 Kreisprozesse	375
O.3.6 Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik	378
O.3.7 Thermodynamische Potentiale	383
O.3.8 Dritter Hauptsatz der Thermodynamik	383
O.4 Reale Gase	383
O.4.1 Van-der-Waalssche Zustandsgleichung	383
O.4.2 Gasverflüssigung (Joule-Thomson-Effekt)	385
O.4.3 Phasenumwandlungen	387
O.4.3.1 Thermodynamisches Gleichgewicht	387
O.4.3.2 Koexistenz dreier Phasen	390
O.4.4 Dämpfe und Luftfeuchtigkeit	390
P Wärme- und Stoffübertragung	392
P.1 Wärmeleitung	392
P.2 Konvektion	397
P.3 Wärmestrahlung	401
P.4 Wärmedurchgang	404
P.5 Stoffübertragung	405

Q Energietechnik	407
Q.1 Energieträger	407
Q.2 Energiewandler	410
Q.3 Energiespeicher	412
Q.4 Energieverbrauch	413
R Umwelttechnik	417
R.1 Abwassertechnik	419
R.1.1 Entstehung von schadstoffbelastetem Abwasser	419
R.1.2 Verminderung der Ausschleppungen	419
R.1.3 Standzeitverlängerung des Wirkbades	419
R.1.4 Spültechnik	420
R.1.5 Kreislaufführung des Spülwassers (Ionenaustauscher)	422
R.1.6 Abwasseraufbereitung (-behandlung)	422
R.2 Reinhaltung der Luft	423
R.2.1 Entstehung von Luftverunreinigungen	424
R.2.2 Auswirkungen von Luftverunreinigungen	424
R.2.3 Primärmaßnahmen der Schadstoffbegrenzung	424
R.2.4 Sekundärmaßnahmen der Schadstoffbegrenzung	424
R.3 Abfallwirtschaft	426
R.3.1 Entstehung von Abfällen	427
R.3.2 Grundsatz der Abfallwirtschaft	427
R.3.3 Primärmaßnahmen der Abfallvermeidung	427
R.3.4 Sekundärmaßnahmen der Abfallvermeidung	427
S Atomphysik	429
S.1 Atombau und Spektren	429
S.2 Systematik des Atombaus	429
S.2.1 Aufbau der Atome	429
S.2.2 Atommasse und Anzahl der Atome	430
S.3 Quantentheorie	430
S.4 Atomhülle	432
S.4.1 Atommodelle	432
S.4.2 Wasserstoff-Atommodell	433
S.4.3 Quantenzahlen	435
S.4.4 Röntgenstrahlung	438
S.5 Molekülspektren	439
S.5.1 Rotations-Schwingungs-Spektren	439
S.5.2 Raman-Effekt	440
S.6 Quanten-Hall-Effekt	441
T Kernphysik	443
T.1 Radioaktiver Zerfall	444
T.1.1 Stabilität des Kerns	444
T.1.2 Zerfall	444

T.2	Dosisgrößen	450
T.3	Strahlenschutz	451
T.3.1	Wechselwirkung mit Materie (Schwächung)	451
T.3.2	Dosismeßverfahren	452
T.3.3	Biologische Wirkung der Strahlung	452
T.3.4	Schutz vor Strahlenbelastung	452
T.4	Kernreaktionen	463
T.4.1	Energetik	463
T.4.2	Wirkungsquerschnitt	464
T.5	Kernfusion	466
T.6	Elementarteilchen	466
T.6.1	Fundamentale Wechselwirkung	466
T.6.2	Erhaltungssätze	466
T.6.3	Einteilung	467
U	Relativitätstheorie	470
U.1	Relativität des Bezugssystems	470
U.2	Lorentz-Transformation	470
U.3	Relativistische Effekte	471
U.4	Relativistische Dynamik	471
U.5	Relativistische Elektrodynamik	472
U.6	Doppler-Effekt des Lichtes	474
V	Festkörperphysik	475
V.1	Arten der Kristallbildung	475
V.2	Kristalline Strukturen	476
V.2.1	Kristallsysteme und dichteste Kugelpackungen	476
V.2.2	Richtungen und Ebenen im Kristallgitter	476
V.2.3	Gitterfehler	478
V.3	Makromolekulare Festkörper	479
V.4	Thermodynamik fester Körper	481
V.4.1	Schwingendes Gitter (Phononen)	481
V.4.2	Molare und spezifische Wärmekapazität	482
V.4.3	Wärmeleitfähigkeit	484
W	Metalle und Halbleiter	485
W.1	Energiebänder	485
W.2	Metalle	485
W.2.1	Energiezustände und Besetzung	486
W.2.2	Elektrische Leitung	486
W.3	Halbleiter	487
W.3.1	Eigenleitung	487
W.3.2	Störstellenleitung	487
W.3.3	pn-Übergang	489

W.3.4	Transistor	489
W.3.4.1	Bipolarer Transistor	489
W.3.4.2	Feldeffekt-Transistor (FET)	494
W.4	Supraleitung	499
X	Optoelektronik	503
X.1	Halbleiter-Sender	503
X.1.1	Strahlungsemission aus Halbleitern	504
X.1.2	Lumineszenzdiode	504
X.1.3	Laserdiode	504
X.2	Halbleiter-Detektoren	506
X.2.1	Strahlungsabsorption in Halbleitern	506
X.2.2	Fotowiderstand	506
X.2.3	Fotodiode	507
X.2.4	Solarzelle	507
X.2.5	Fototransistor	508
X.3	Optokoppler	509
Y	Informatik	510
Y.1	Digitaltechnik	510
Y.1.1	Zahlensysteme	510
Y.1.2	Kodes	510
Y.1.3	Logische Verknüpfungen	513
Y.1.4	Digitale Bauelemente	514
Y.1.5	Schaltzeichen	515
Y.1.6	Speicherbauelemente	516
Y.1.7	Mikroprozessoren	517
Y.1.8	Leitungen digitaler Signale	519
Y.1.9	ASIC	520
Y.2	Schnittstellen, Bussysteme und Netzwerke	520
Y.2.1	Schnittstellen	522
Y.2.2	Bussysteme	524
Y.2.3	Netze	525
Y.3	Programmstrukturen	529
Y.4	Datenstrukturen	533
Y.5	Sprachen	536
Z	Chemische Elemente und ihre Eigenschaften	537
Z.1	Atom und chemische Bindung	537
Z.1.1	Das Periodensystem der Elemente	537
Z.1.2	Die Basisgröße „Stoffmenge“	537
Z.1.3	Edelgaskonfiguration und Atombindung	538
Z.1.3.1	Hybridisierung	538
Z.1.3.2	Polare Atombindungen und Elektronegativität	539

Z.1.3.3	Mehrfachbindungen	540
Z.1.3.4	Komplexbindungen	540
Z.1.4	Die Ionenbindung	541
Z.1.5	Metallische Bindung und Metallstrukturen	541
Z.2	Wäßrige Lösungen	542
Z.2.1	Lösevorgänge und Konzentrationsangaben	542
Z.2.2	Ionenprodukt des Wassers	542
Z.2.3	Säuren und Basen	543
Z.2.4	Der pH-Wert	545
Z.2.5	Redoxreaktionen in wäßriger Lösung	545
Z.3	Verbindungsklassen der organischen Chemie	546
Z.3.1	Alkane (gesättigte Kohlenwasserstoffe, Paraffine)	546
Z.3.2	Erdöl	546
Z.3.3	Ungesättigte Kohlenwasserstoffe	547
Z.3.4	Benzol und Aromaten	547
Z.3.5	Weitere Verbindungsklassen der organischen Chemie	549
Z.4	Elektrochemie	549
Z.4.1	Die Elektrolyse	549
Z.4.2	Galvanische Zellen	550
Z.4.2.1	Die Spannungsreihe	551
Z.4.2.2	Die Nernst'sche Gleichung	551
Z.4.3	Die elektrochemische pH-Messung	552
Z.4.4	Elektrochemische Stromerzeugung (Batterien)	552
Z.4.4.1	Der Bleiakkumulator	552
Z.5	Industrielle anorganische Chemie	554
Z.5.1	Schwefelsäure	554
Z.5.2	Ammoniak	554
Z.5.2.1	Ammoniak-Synthese	554
Z.5.2.2	Verwendung von Ammoniak	555
Z.5.3	Die Alkalichlorid-Elektrolyse – Erzeugung von Cl_2 , NaOH und H_2	555
Z.5.4	Gewinnung von Eisen und Stahl	556
Z.6	Industrielle organische Chemie	558
Z.6.1	Erdöl	558
Z.6.2	Erdgas	558
Z.6.3	Kohle	558
Z.6.4	Biomasse	559
Z.6.5	Olefine	559
Z.6.6	Schmier- und Mineralöle	560
Z.6.7	Tenside	560
Z.6.8	Polymere	561
Z.6.8.1	Allgemeines	561
Z.6.8.2	Lineare Polyester	561
Z.6.8.3	Weitere technische Kondensationspolymerisate	562
Z.6.8.4	Polyethylen, Polypropylen	562
Z.6.8.5	Poly(vinylchlorid)PVC, Poly(tetrafluorethylen) PTFE	562

Sachwortverzeichnis	583
--------------------------------------	------------

A Mathematik

A.1 Mathematische Zeichen und Normzahlen

A.1.1 Mathematische Symbolik

Übersicht A-1. Mathematische Zeichen.

Standardzeichen	
$=$	Gleichheitszeichen
\approx	ungefähr gleich; im Rahmen numerischer Vergleiche zweier Terme, Größen gebräuchlich
\equiv	zueinander kongruent
\sim	proportional, also $y \sim x$, falls es ein $k \in \mathbb{R}$ (reelle Zahlen) gibt mit $y = k \cdot x$ – Linearität
$<, \leq, >, \geq$	Symbole für kleiner–größer Beziehungen reeller Zahlen
$:=$	häufig gebrauchtes Symbol für eine definitorische Festlegung innerhalb der Ebene von Formelausdrücken; so wird z. B. in „ $e^{ix} := \cos x + i \sin x$ “ das Symbol e^{ix} vermöge der bekannten rechten Seite, $\cos x + i \sin x$, als komplexe Zahl definiert.
$\cdot, *, \times$	Multiplikationssymbole; das Zeichen \times kennzeichnet auch das Vektorprodukt in \mathbb{R}^3 .
$/, \div$	Divisionssymbole
$\hat{=}$	„entspricht der Aussage ...“
Δ	allgemeingebräuchliches Differenzensymbol
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	Sekantensteigung, Differenzenquotient
∇	Symbol für den Laplace-Operator
$n!$	n Fakultät, wobei n eine natürliche Zahl ist $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$
$\binom{n}{k}$	Binomialkoeffizienten: Für $k, n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$ ist $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
	Anwendungen: Kombinatorik,
	Binomialformel: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
	für $k, n \in \mathbb{N}$, a, b reelle (oder komplexe) Zahlen.
	Ermittlung der $\binom{n}{k}$ -Ausdrücke mittels Pascalschem Dreieck.
$\sqrt[n]{}$	n -te Wurzel: $y := \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow x = y^n$
	(bei geradem n für $x \geq 0$ definiert, bei ungeradem n in ganz \mathbb{R})
\log	Logarithmus-Symbol; für $a > 0$ folgendermaßen definiert:
	$y := \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^y$
	Gebräuchlich sind: \ln für den Fall $a = e$ (Eulersche Zahl, natürlicher Logarithmus)
	\lg für $a = 10$, \lg für $a = 2$.
$\frac{d}{dx}$	Differentiationssymbolik (wie üblich);
	$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
\in	Elementzeichen; Bedeutung: $x \in M \hat{=} x$ gehört zur Menge M
	Beispiel: $2 \in \mathbb{N} \hat{=}$ Die Zahl 2 gehört zur Menge der natürlichen Zahlen
	$2 \notin [3, 4] \hat{=}$ Die Zahl 2 gehört nicht zum Intervall $[3, 4]$

Übersicht A-1 (Fortsetzung)

Zahlenbereiche		
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen	$\{0, 1, 2, \dots\}$
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen	$\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$
\mathbb{Q}	Menge der rationalen Zahlen	$\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \}$
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen	$\{x \mid x \text{ rational oder } x \text{ irrational}\}$
\mathbb{C}	Menge der komplexen Zahlen	$\{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
Mathematische Konstanten		
0	neutrales Element der Addition in \mathbb{R} und \mathbb{C}	
1	neutrales Element der Multiplikation in \mathbb{R} und \mathbb{C}	
e	Symbol der sogenannten Euler'schen Zahl; $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718282 \dots$ e ist eine irrationale Zahl, transzendent	
π	Kreiszahl; π ist definierbar als Fläche des Kreises (Radius 1), Länge des Halbkreisbogens (Radius 1) π ist irrational, transzendent $\pi = 3,14159 \dots$; gute Näherung ist $\frac{22}{7}$	
$\frac{\pi}{180} \cdot \alpha$	Bogenmaß x eines im $0 \leq \alpha < 360^\circ$ gemessenen Winkel α ; numerisch: $x \cong \alpha \cdot 0,017453 \dots$	
$\sqrt{2}, \sqrt{3}$	Diese (und andere) in zahlreichen Formeln auftretenden Wurzeln beläßt man möglichst in dieser Form – allenfalls in Endergebnissen könnten numerische Näherungen wie 1,41421... bzw. 1,73205... benutzt werden	
$i(j)$	Symbol für die sogenannte imaginäre Einheit; man definiert i als eine Lösung der Gleichung: $x^2 + 1 = 0$, d.h. $i^2 = -1$	

A.1.2 Mathematische Logik

Mathematischen Aussagen ($A, B, C \dots$) werden sogenannte „Wahrheitswerte“ W (wahr) oder F (falsch) zugeordnet mit folgenden Grundregeln und Aussageverbindungen.

Grundregel 1: Eine Aussage A ist entweder wahr oder falsch (ausschließende Alternative)

Grundregel 2: Die Verneinung (Negation) einer Aussage A – häufig mit $\neg A$ notiert – ist festgelegt durch

A	$\neg A$
W	F
F	W

Grundregel 3: Zwei Aussagen A, B heißen äquivalent (in Zeichen $A \Leftrightarrow B$), wenn sie die gleichen Wahrheitswerte besitzen.

Grundregel 4: Die Aussage „ A und B “ ($A \wedge B$), die Aussage „ A oder B “ ($A \vee B$), die Aussage „Aus

A folgt B “ ($A \Rightarrow B$, Implikation, Folgerung) sind gemäß nachstehender Tabelle festgesetzt.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	W	W	W	W
W	F	F	W	F	F
F	W	F	W	W	F
F	F	F	F	W	W

Man leitet hieraus logische Regeln ab, wie zum Beispiel

- ① $[(A \Rightarrow B) \text{ und } (B \Rightarrow A)] \Leftrightarrow [A \Leftrightarrow B]$
- ② $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
- ③ $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
- ④ $[A \Rightarrow B] \text{ und } [B \Rightarrow C] \Rightarrow [A \Rightarrow C]$,
Kettenschluß
- ⑤ $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$,
Distribution
- ⑥ $[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow [\neg B \Rightarrow \neg A]$,
indirekter Beweis

A.1.3 Normzahlen

In der DIN-Verordnung (323) ist dieser – aus dem letzten Jahrhundert stammende – Begriff noch anzutreffen. Bezogen auf den speziellen Vergrößerungsfaktor 10 lautet die Aufgabe („geometrische Progression“):

Sei $n \geq 1$, $a > 0$ gegeben.

Bestimme $n + 1$ Zahlen (sog. Stufen)

$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ mit

$$1) a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 10a$$

$$2) \frac{x_{k+1}}{x_k} = \text{const (bezügl. } k)$$

Die Lösung ist – mit $q := \sqrt[n]{10}$ – die geometrische Folge aq^k , und betrachtet man die komplette Skala aq^k , $k \in \mathbb{Z}$, so hat man eine feingliedrige Abstufung der Zehnerpotenzskala $a10^k$, $k \in \mathbb{Z}$. Speziell sind in früheren Zeiten die Abstufungen $n = 5$, $n = 10$, $n = 20$, $n = 40$ und $n = 80$ gewählt worden – entsprechend spricht man von den Grundreihen R5, R10 usw. Diese „Reihen“ sind Auflistungen der Folgen

$$(\sqrt[n]{10})^k, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

($n = 5/10/20/40/80$) und zwar in verschiedenen Näherungen und Genauigkeitsangaben hinsichtlich der numerischen Werte der Zahlen $(\sqrt[n]{10})^k$ (deren Berechnung in früheren Zeiten verständlicherweise Probleme bereitete). Nennwerte elektrischer Bauelemente, wie Widerstände und Kondensatoren, werden nach E-Reihen gestuft:

Reihe	E 6	E 12	E 24
Stufensprung	$\sqrt[6]{10}$	$\sqrt[12]{10}$	$\sqrt[24]{10}$

Übersicht A-2. Normzahlen und E-Reihen.

Normzahlen (DIN 323)

Grundreihen				Genauwerte	lg
R 5	R 10	R 20	R 40		
1,00	1,00	1,00	1,00	1,0000	0,0
			1,06	1,0593	0,025
		1,12	1,12	1,1220	0,05
			1,18	1,1885	0,075
	1,25	1,25	1,25	1,2589	0,1
			1,32	1,3335	0,125
		1,40	1,40	1,4125	0,15
			1,50	1,4962	0,175
1,60	1,60	1,60	1,60	1,5849	0,2
			1,70	1,6788	0,225
		1,80	1,80	1,7783	0,25
			1,90	1,8836	0,275
	2,00	2,00	2,00	1,9953	0,3
			2,12	2,1135	0,325
		2,24	2,24	2,2387	0,35
			2,36	2,3714	0,375
2,50	2,50	2,50	2,50	2,5119	0,4
			2,65	2,6607	0,425
		2,80	2,80	2,8184	0,45
			3,00	2,9854	0,475
	3,15	3,15	3,15	3,1623	0,5
			3,35	3,3497	0,525
		3,55	3,55	3,5481	0,55
			3,75	3,7584	0,575
4,00	4,00	4,00	4,00	3,9811	0,6
			4,25	4,2170	0,625
		4,50	4,50	4,4668	0,65
			4,75	4,7315	0,675
	5,00	5,00	5,00	5,0119	0,7
			5,30	5,3088	0,725
		5,60	5,60	5,6234	0,75
			6,00	5,9566	0,775
6,30	6,30	6,30	6,30	6,3096	0,8
			6,70	6,6834	0,825
		7,10	7,10	7,0795	0,85
			7,50	7,4989	0,875
	8,00	8,00	8,00	7,9433	0,9
			8,50	8,4140	0,925
		9,00	9,00	8,9125	0,95
			9,50	9,4409	0,975
10,0	10,0	10,0	10,0	10,0000	1,0

Übersicht A-2 (Fortsetzung)

E-Reihen (DIN 41426)

E 6	E 12	E 24
1,0	1,0	1,0 1,1
	1,2	1,2 1,3
1,5	1,5	1,5 1,6
	1,8	1,8 2,0
2,2	2,2	2,2 2,4
	2,7	2,7 3,0
3,3	3,3	3,3 3,6
	3,9	3,9 4,3
4,7	4,7	4,7 5,1
	5,6	5,6 6,2
6,8	6,8	6,8 7,5
	8,2	8,2 9,1
10,0	10,0	10,0

A.2 Reelle Zahlen (\mathbb{R})

Der Aufbau des Zahlensystems geschieht über den Prozeß der Zahlbereichserweiterungen.

Natürliche Zahlen:

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$, die Menge der natürlichen Zahlen, kann als gegebene (abzählbare) Zahlenmenge vorliegen (aber auch aus abstrakten mengentheoretischen Axiomen gewonnen werden).

In \mathbb{N} gibt es die bekannte Addition und Ordnung ($n < m \Leftrightarrow$ es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $m = n + k$).

Die wesentlichste Eigenschaft in \mathbb{N} ist das Prinzip der vollständigen Induktion:

Prinzip der vollständigen Induktion

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien $A(n)$ (mathematische) Aussagen, für welche zunächst nicht bekannt ist, ob sie wahr oder falsch sind. Dann gilt:

Ist erstens $A(1)$ wahr und zweitens aus $A(n)$ wahr folgt auch $A(n+1)$ wahr, so folgt:

$A(n)$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Ganze Zahlen:

$\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, die Menge der ganzen Zahlen, wird aus \mathbb{N} durch Hinzunahme der Lösungen der Gleichungen $n + x = 0 \Leftrightarrow x = -n$ gewonnen, wobei 0 als neutrales Element der Addition zu \mathbb{N} hinzugenommen wird.

Rationale Zahlen:

$\mathbb{Q} := \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$, die Menge der rationalen Zahlen (Brüche), wird aus \mathbb{Z} gewonnen vermöge der Hinzunahme der Lösungen der Gleichungen $qx = p \Leftrightarrow x = p/q$.

Addition, Multiplikation und Ordnung werden von \mathbb{N} bzw. \mathbb{Z} auf \mathbb{Q} übertragen (es entsteht die Bruchrechnung), so ist z. B.

$$\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + p'q}{qq'}$$

$$\frac{p}{q} < \frac{p'}{q'} \Leftrightarrow pq' < p'q \quad (\text{für positive } q \text{ und } q')$$

Eine einfache Überlegung zeigt den Zusammenhang zur Dezimaldarstellung:

Jede rationale Zahl p/q besitzt eine periodische Dezimaldarstellung, und umgekehrt kann jede periodische Dezimalzahl als Bruch geschrieben werden:

Beispiele: $0,\overline{3} = \frac{1}{3}$, $0,\overline{9} = 1$ (!),

$$1,\overline{27} = 1 + \frac{27}{99} = \frac{126}{99} = \frac{14}{11}$$

Reelle Zahlen:

\mathbb{R} := Menge der rationalen und irrationalen Zahlen, wobei x irrational ist genau dann, wenn x eine nichtperiodische Dezimaldarstellung hat.

Beispiele für Irrationalzahlen:

- $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ (allgemein: alle Zahlen \sqrt{n} , wenn $n \in \mathbb{N}$ und falls \sqrt{n} nicht ganzzahlig ist)
- $0,123456789101112\dots$
- π, e (sogenannte transzendente Zahlen, das sind per Def. Zahlen, welche nicht Lösung einer polynomialen Gleichung $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ mit $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ sind (letztere – also Lösungen solcher Gleichungen – heißen algebraisch).

Die meisten reellen Zahlen sind transzendent. Wurzelausdrücke (aus ganzen Zahlen), wie z.B. $\sqrt{2}, \sqrt[3]{1-4\sqrt{7}}$ sind dagegen algebraisch.

In \mathbb{R} gibt es die Addition und Multiplikation sowie eine *Totalordnung*:

Für je zwei reelle Zahlen gilt stets $x < y$ oder $x = y$ oder $x > y$.

Dies gestattet die Konstruktion von Intervallen:

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$,
abgeschlossenes Intervall

$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$,
offenes Intervall

$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$,
halboffenes Intervall

$[a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$,
abgeschlossenes Intervall (!)

Satz: Die rationalen Zahlen \mathbb{Q} liegen *dicht* in \mathbb{R} ; d. h.

- 1) Zu je zwei reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ (mit $a < b$) gibt es mindestens eine (sogar unendlich viele) rationale Zahl r mit $a < r < b$
- 2) Sei $a \in \mathbb{R}$, dann gibt es eine Folge rationaler Zahlen x_1, x_2, x_3, \dots mit $x_n \rightarrow a$ bei $n \rightarrow \infty$

Schrankenbegriffe

Sei $M \subset \mathbb{R}$ (eine Teilmenge von \mathbb{R}).

Jedes $b \in \mathbb{R}$, für welches gilt $\{x \leq b \text{ für alle } x \in M\}$, heißt obere Schranke von M . Die kleinste obere Schranke einer Menge M heißt Supremum von M ($\sup M$). Beispiel: $M = \{-\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, dann ist $\sup M = 0$. Beachte, daß das Supremum einer Menge nicht selbst zur Menge gehören muß. Ein weiteres Beispiel

Übersicht A-3. Rechenregeln für Ungleichungen.

Ungleichungen	
allgemein	Beispiele
1) $x < y \Rightarrow x + a < y + a$ ($x, y, a \in \mathbb{R}$)	$2x - 4 < 5x + 2$
2) $x < y$ und $a > 0 \Rightarrow xa < ya$	$\Leftrightarrow -6 < 3x$
3) $x < y$ und $a < 0 \Rightarrow xa > ya$	$\Leftrightarrow -2 < x$
4) $x^2 < a^2 \Leftrightarrow -a < x < a$ (für $a > 0$) $x^2 > a^2 \Leftrightarrow x < -a$ oder $x > a$ (für $a \geq 0$)	
Beträge	
Für $x \in \mathbb{R}$ definiert man $ x := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$	
1) $ x + y \leq x + y $	$ x + 2 > 1$
2) $ ax = a \cdot x $	$\Leftrightarrow x + 2 > 1$ oder $(x + 2) < -1$
3) $ x \leq a \Leftrightarrow -a < x < a$	$\Leftrightarrow x > -1$ oder $x < -3$

ist $M = \{\arctan x \mid x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \sup M = \frac{\pi}{2}$. Dagegen gilt für das Maximum einer Menge die Forderung: $a = \max M \Leftrightarrow a$ ist obere Schranke von M und $a \in M$. Ähnlich sind Infimum (größte untere Schranke) und Minimum einer Menge definiert. Man nennt eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ beschränkt \Leftrightarrow es gibt $a, b \in \mathbb{R}$ mit $M \subset [a, b]$.

Die fundamentalste Eigenschaft von \mathbb{R} ist folgendes Theorem:

Theorem

(Supremumsaxiom und Vollständigkeit)

- ① Jede beschränkte Menge hat ein Supremum und ein Infimum
- ② \mathbb{R} ist vollständig, d.h.: jede Cauchy-Folge besitzt einen Grenzwert

Zusatz: Die Aussagen ① und ② sind äquivalent.

Hierbei heißt eine Zahlenfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge, wenn die Bedingung erfüllt ist:

[Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein N mit der Eigenschaft, daß $|x_m - x_n| < \varepsilon$ ist, sobald $n > N$ und $m > N$ ist].

Mittelwerte

Für x_1, x_2, \dots, x_n definiert man

- 1) das arithmetische Mittel:

$$A := \frac{1}{n} (x_1 + \dots + x_n)$$

- 2) das geometrische Mittel:

$$G := \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$$

- 3) das harmonische Mittel:

$$H := \left[\frac{1}{n} \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \right]^{-1}$$

- 4) das quadratische Mittel:

$$Q := \sqrt{\frac{1}{n} (x_1^2 + \dots + x_n^2)}$$

Sie gehorchen folgendem Vergleich:

$$H \leq G \leq A \leq Q$$

Anwendungen: A : gewöhnliche, arithmetische Durchschnitte

G : Progressionen, Zuwachsfaktoren, Zinsrechnung

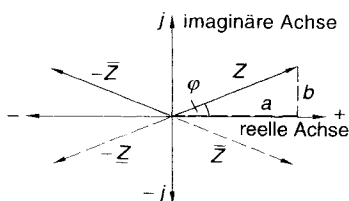
H : Frequenzanalysen

Q : Fehlerrechnung, Regression

A.3 Komplexe Zahlen

Übersicht A-4. Komplexe Zahlen. Darstellungsformen und Rechenoperationen.

komplexe Zahlen



Komplexe Zahl Z

$$Z = a + jb = Z(\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

↑ Imaginärteil
↑ Realteil

Eulersche Formel

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$

$$Z = Z \cdot e^{j\varphi}$$

$$j = \sqrt{-1}$$

$$Z = a + jb \quad \text{komplexe Zahl}$$

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{Betrag}$$

$$\tan \varphi = \frac{b}{a} \quad \text{Richtung}$$

$$\left(\sin \varphi = \frac{b}{|Z|}; \quad \cos \varphi = \frac{a}{|Z|} \right)$$

$$\bar{Z} = a - jb \quad \text{konjugiert-komplexe Zahl}$$

$$Z \cdot \bar{Z} = (a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2 = |Z|^2$$

Übersicht A-4 (Fortsetzung)

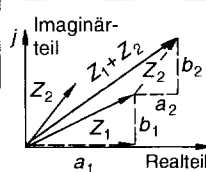
Darstellungsform	komplex	konjugiert-komplex
Real- und Imaginärteil trigonometrische Form	$Z = a + jb$	$\bar{Z} = a - jb$
	$Z = Z (\cos \varphi + j \sin \varphi)$	$\bar{Z} = Z (\cos \varphi - j \sin \varphi)$
	Eulersche Formel	
	$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$	$e^{-j\varphi} = \cos \varphi - j \sin \varphi$
Exponential-Form	$Z = Z e^{j\varphi}$	$\bar{Z} = Z e^{-j\varphi}$
Gleichungen	Gaußsche Zahlenebene	Beispiel

Addition/Subtraktion

$$Z_1 + Z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

$$Z_1 - Z_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$$

Real- und Imaginärteil müssen
getrennt berechnet werden



$$Z_1 = 3 + 2j$$

$$Z_2 = 1 + 1,2j$$

$$Z_1 + Z_2 = 4 + 3,2j$$

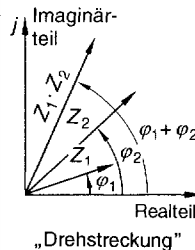
Multiplikation/Division

$$Z_1 Z_2 = |Z_1| |Z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$Z_1 Z_2 = |Z_1| |Z_2| e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$|Z_1| |Z_2| = \sqrt{(a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)^2}$$

$$\tan(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{a_1 b_2 + b_1 a_2}{a_1 a_2 - b_1 b_2}$$



$$Z_1 = 3 + 2j$$

$$Z_2 = 1 + 1,2j$$

$$|Z_1| |Z_2| = \sqrt{\frac{9+4}{1+1,44}} = 2,3$$

$$\tan(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$= \frac{2 \cdot 1 - 3 \cdot 1,2}{3 \cdot 1 + 2 \cdot 1,2} = -0,296$$

$$Z_1/Z_2 = |Z_1|/|Z_2| (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$Z_1/Z_2 = |Z_1|/|Z_2| \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$|Z_1|/|Z_2| = \sqrt{\frac{a_1^2 + b_1^2}{a_2^2 + b_2^2}}$$

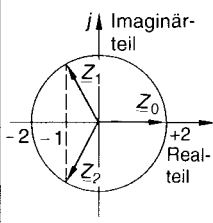
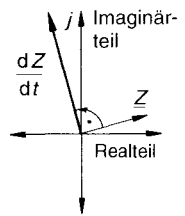
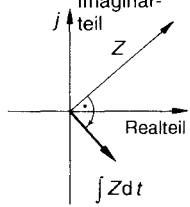
$$\tan(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_1 a_2 + b_1 b_2}$$

„Drehstreckung“

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = -0,287$$

$$(Z_1/Z_2) = 2,3 e^{j(-0,287)}$$

Übersicht A-4 (Fortsetzung)

Potenzieren/Wurzelziehen		
$Z^n = Z^n (\cos n\varphi + j \sin n\varphi)$ $Z^n = Z^n \cdot e^{jn\varphi}$ $\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{ Z } \left(\cos \left(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} \right) + j \sin \left(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} \right) \right)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(n-1))$ $= \sqrt[n]{ Z } e^{j \left(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} \right)}$		$Z = \sqrt[3]{8}$ $\text{Radius } Z = \sqrt[3]{8} = 2$ $k = 0$ $ Z_0 = \sqrt[3]{8} (\cos(0) + j \sin(0)) = +2$ $k = 1$ $Z_1 = 2 \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + j \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right)$ $Z_1 = -1 + j\sqrt{3}$ $k = 2$ $Z_2 = 2 \left(\cos \left(\frac{4\pi}{3} \right) + j \sin \left(\frac{4\pi}{3} \right) \right)$ $Z_2 = -1 - j\sqrt{3}$
Differentiation (bzgl. Winkelvariablen)		
$Z = Z e^{j(\omega t + \varphi)}$ $\frac{dZ}{dt} = j\omega Z e^{j(\omega t + \varphi)}$ $\frac{dZ}{dt} = j\omega Z$ <p>Drehung um $+90^\circ$, Streckung aufs ω-fache</p>		$Z = 3 + 2j$ $Z = 3,6 e^{j(1,57t + 33,69^\circ)}$ $\frac{dZ}{dt} = 1,57 j Z$
Integration (bzgl. Winkelvariablen)		
$Z = Z e^{j(\omega t + \varphi)}$ $\int Z dt = \int Z e^{j(\omega t + \varphi)} dt$ $= Z e^{j\varphi} \int e^{j\omega t} dt$ $\int Z dt = -\frac{j}{\omega} Z e^{j(\omega t + \varphi)} + C$ $= -\frac{j}{\omega} \cdot Z + C$		$Z = 3 + 2j$ $Z = \sqrt{13} e^{j(1,57t + \arctan 2/3)}$ $Z = 3,6 e^{j(1,57t + 33,69^\circ)}$ $\int Z dt = -\frac{j}{1,57} Z$ $= -0,64 j Z$

A.4 Logarithmus und Logarithmengesetze

Ist bei einer Potenzfunktion die Variable im Exponenten (Exponentialfunktion, Abschnitt A.10), kann der Wert der Variablen

durch *Logarithmieren* (Logarithmusfunktion, Abschnitt A.10) ermittelt werden.

Übersicht A-5. Logarithmen.

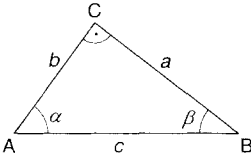
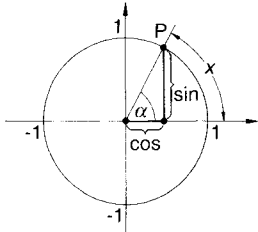
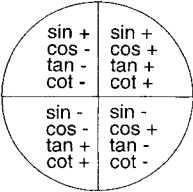
Definition	
$ \begin{array}{ccccc} & \text{Exponent} & & & \\ b^x & = a & \leftrightarrow & x = \log_b a \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\ \text{Basis} & \text{Potenzwert} & & \text{Exponent} & \text{Basis} & \text{Potenzwert} \\ 3^2 & = 9 & & 2 = \log_3 9 & & \end{array} $	$(b > 0; b \neq 1; x \text{ beliebig, reell})$
besondere Fälle	
allgemein	Beispiel
$\log_b (b^a) = a$ $\log_b b = 1$ $\log_b 1 = 0$ $b^{\log_b a} = a$ $e^{\ln a} = a$	$\log_3 (3^2) = 2$ $\log_3 3 = 1 \ (3^1 = 3)$ $\log_3 1 = 0 \ (3^0 = 1)$ $3^{\log_3 4} = 4$ $e^{\ln 18} = 18$
Logarithmensysteme	
dekadische Logarithmen	natürliche Logarithmen
Basis 10 $\log_{10} = \lg$ $10^x = a$ $x = \lg a$	Basis e $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281 \dots$ $\log_e = \ln$ $e^x = a$ $x = \ln a$
Umrechnungen	
$\lg a = \frac{\ln a}{\ln 10} \approx 0,4329 \ln a$	$\ln a = \lg a \ln 10 \approx 2,30259 \lg a$
allgemein: $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} = \frac{\ln a}{\ln b}$	

Übersicht A-5 (Fortsetzung)

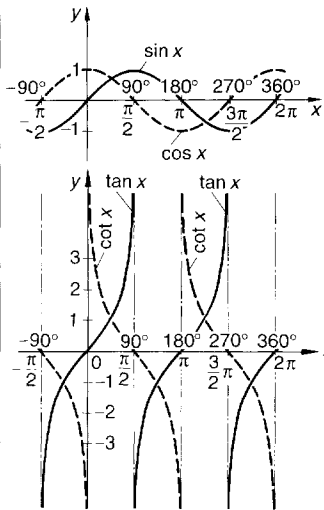
Logarithmengesetze	
allgemein	Beispiel
$\log_b (ca) = \log_b c + \log_b a$	$\lg (10x) = \lg 10 + \lg x = 1 + \lg x$
$\log_b \left(\frac{c}{a}\right) = \log_b c - \log_b a$	$\ln \left(\frac{20}{x}\right) = \ln 20 - \ln x$
$\log_b (a^n) = n \log_b a$	$\lg (4^8) = 8 \cdot \lg 4$
$\log_b (\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \log_b a$	$\ln (\sqrt[3]{18}) = \frac{1}{3} \ln 18$

A.5 Trigonometrische Funktionen

Übersicht A-6. Trigonometrische Funktionen.

Definitionen	
 <p>Rechtwinkliges Dreieck: Seitenverhältnisse</p> $\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$ $\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$ $\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b}$ $\cot \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{b}{a}$	 <p>Einheitskreis: Funktion der Bogenlänge x $\sin x$: Ordinate von P $\cos x$: Abszisse von P $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$ $x = \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot \alpha \quad (0 \leq x < 2\pi)$ $x \quad (0 \leq x < 2\pi)$ ist das Bogenmaß des Winkels α im Gradsystem $(0 \leq \alpha < 360^\circ)$. Dann ist $\sin x = \sin \alpha; \cos x = \cos \alpha; \tan x = \tan \alpha$</p>
Komplemente	Vorzeichen
$\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha)$ $\cos \alpha = \sin (90^\circ - \alpha)$ $\tan \alpha = \cot (90^\circ - \alpha)$ $\cot \alpha = \tan (90^\circ - \alpha)$	

Übersicht A-6 (Fortsetzung)

Reduktionsformen						Verlauf	
Winkel	$-\alpha$	$90^\circ \pm \alpha$	$180^\circ \pm \alpha$	$270^\circ \pm \alpha$	$360^\circ \pm \alpha$	 <p>Sinus und Kosinus periodisch in 2π (360°)</p> <p>Tangens und Kotangens in π (180°)</p> <p>Polstellen für Tangens $+\infty: n\frac{\pi}{2}$ $-\infty: -n\frac{\pi}{2}$</p> <p>Polstellen für Kotangens $+\infty: +0, n\pi$ $-\infty: -0, -n\pi$</p>	
Funktion	$-\alpha$	$90^\circ \pm \alpha$	$180^\circ \pm \alpha$	$270^\circ \pm \alpha$	$360^\circ \pm \alpha$		
$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$+\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$		
$\cos \alpha$	$+\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$+\cos \alpha$		
$\tan \alpha$	$-\tan \alpha$	$\mp \cot \alpha$	$\pm \tan \alpha$	$\mp \cot \alpha$	$-\tan \alpha$		
$\cot \alpha$	$-\cot \alpha$	$\mp \tan \alpha$	$\pm \cot \alpha$	$\mp \tan \alpha$	$-\cot \alpha$		

Übersicht A-7. Zusammenhänge und Umwandlungen trigonometrischer Funktionen.

Zusammenhänge zwischen trigonometrischen Funktionen

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\tan \alpha \cot \alpha = 1$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cot \alpha}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$1 = \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Umwandlungen

Funktion	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
$\sin \alpha$	-	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\pm \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$
$\cos \alpha$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$	-	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\pm \frac{\cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$
$\tan \alpha$	$\pm \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	-	$\frac{1}{\cot \alpha}$
$\cot \alpha$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$	$\pm \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\tan \alpha}$	-

Übersicht A-8. Winkelbeziehungen trigonometrischer Funktionen.

Addition/Subtraktion
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha$ $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha$ $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$ $\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$
Summen und Differenzen
$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$ $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\tan \alpha \pm \tan \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$ $\cot \alpha \pm \cot \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$
doppelte Winkel
$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ $\tan 2\alpha = 2/(\cot \alpha - \tan \alpha)$ $\cot 2\alpha = (\cot \alpha - \tan \alpha)/2$ $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$ $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$
halbe Winkel
$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$ $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$ $\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \pm \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \pm \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$ $\cot \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \pm \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \pm \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$

Übersicht A-8 (Fortsetzung)

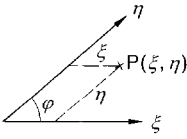
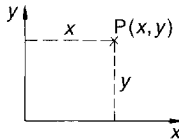
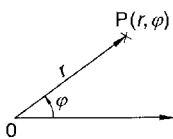
Produkte
$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$ $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$ $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$ $\tan \alpha \tan \beta = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\cot \alpha + \cot \beta}$ $\cot \alpha \cot \beta = \frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}$ $\tan \alpha \cot \beta = \frac{\tan \alpha + \cot \beta}{\cot \alpha + \tan \beta}$ $\cot \alpha \tan \beta = \frac{\cot \alpha + \tan \beta}{\tan \alpha + \cot \beta}$
Potenzen
$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha)$ $\sin^3 \alpha = \frac{1}{4} (3 \sin \alpha - \sin 3\alpha)$ $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha)$ $\cos^3 \alpha = \frac{1}{4} (3 \cos \alpha + \cos 3\alpha)$
Eulersche Formel
$y = e^{\pm j\varphi} = \cos \varphi \pm j \sin \varphi$ $\sin \varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j} \quad (j = \sqrt{-1})$ $\cos \varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$ $\tan \varphi = -\frac{j(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi})}{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}$ $\cot \varphi = \frac{j(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi})}{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}$

Übersicht A-8 (Fortsetzung)

Näherungsformeln für kleine Winkel	
$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$	(Fehler < 1% für $\alpha < 58^\circ$)
$\sin x \approx x$	(Fehler < 1% für $\alpha < 14^\circ$)
$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$	(Fehler < 1% für $\alpha < 37^\circ$)
$\cos x \approx 1$	(Fehler < 1% für $\alpha < 8^\circ$)
wobei $\alpha = \frac{x}{2\pi} \cdot 360^\circ$	

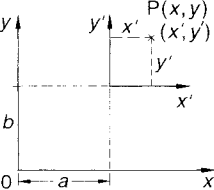
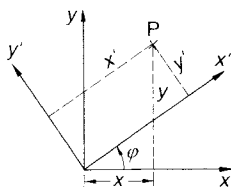
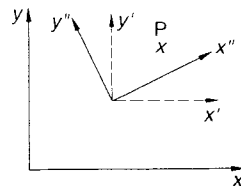
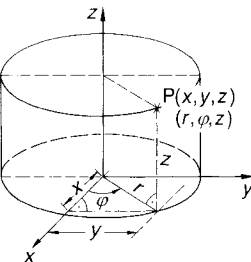
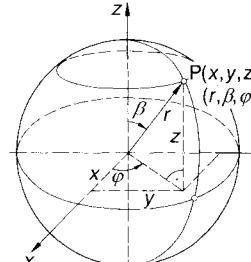
Winkleinheiten							
Einheit	°	'	"	rad	gon	cgon	mgon
1°	= 1	60	3600	0,017453	1,1111	111,11	1111,11
1'	= 0,016667	1	60	—	0,018518	1,85185	18,5185
1"	= 0,0002778	0,016667	1	—	0,0003086	0,030864	0,30864
1 rad	= 57,2958	3437,75	206265	1	63,662	6366,2	63662
1 gon	= 0,9	54	3240	0,015708	1	100	1000
1 cgon	= 0,009	0,54	32,4	—	0,01	1	10
1 mgon	= 0,0009	0,054	3,24	—	0,001	0,1	1
1 rad = 10 ³ mrad = 10 ⁶ µrad				1 gon = $\frac{\pi}{200}$ rad			
1 rad = $\frac{1 \text{ m Bogen}}{1 \text{ m Radius}} = \frac{360^\circ}{2\pi}$ = 57,296° ≈ 57,3°				1 Vollwinkel = 2π rad = 6,28318 rad = 360° = 400 gon			

A.6 Analytische Geometrie der Ebene*Übersicht A-9. Koordinatensysteme.*

schiefwinklig	rechtwinklig	polar
 $\xi = \frac{-x \sin \varphi_2 + y \cos \varphi_2}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}$ $\eta = \frac{x \sin \varphi_1 - y \cos \varphi_1}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}$ <p>φ_1 Winkel zwischen x-Achse und ξ-Achse φ_2 Winkel zwischen y-Achse und η-Achse</p>	 $x = \xi \cos \varphi_1 + \eta \cos \varphi_2$ $y = \xi \sin \varphi_1 + \eta \sin \varphi_2$	 <p>Zusammenhang zwischen rechtwinkligen und Polar-Koordinaten</p> $x = r \cos \varphi$ $y = r \sin \varphi$ $\tan \varphi = \frac{y}{x}$ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Übersicht A-9 (Fortsetzung)

Transformation rechtwinkliger Koordinaten

Parallelverschiebung	Drehung	Parallelverschiebung und Drehung
 $\begin{aligned}x' &= x - a \\y' &= y - b \\x &= x' + a \\y &= y' + b\end{aligned}$	 $\begin{aligned}x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi \\y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi \\x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi\end{aligned}$	 $\begin{aligned}x'' &= (x - a) \cos \varphi + (y - b) \sin \varphi \\y'' &= -(x - a) \sin \varphi + (y - b) \cos \varphi \\x &= x'' \cos \varphi - y'' \sin \varphi + a \\y &= x'' \sin \varphi + y'' \cos \varphi + b\end{aligned}$
Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten	
 $\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \\y &= r \sin \varphi \\z &= z \\\tan \varphi &= \frac{y}{x}\end{aligned}$	 $\begin{aligned}x &= r \sin \beta \cos \varphi \\y &= r \sin \beta \sin \varphi \\z &= r \cos \beta \\\cos \beta &= \frac{z}{r}; \\\cos \varphi &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\end{aligned}$	

Übersicht A-10. Punkt, Strecke und Dreiecke in der Ebene.

Strecke

Steigung

$$\tan \alpha = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Entfernung

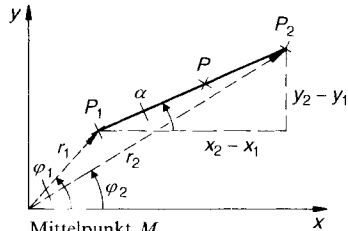
$$\overline{P_1 P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{P_1 P_2} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

Teilpunkt P

$$\lambda = \frac{\overline{P_1 P}}{\overline{P_1 P_2}}; \quad x_P = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y_P = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

$$0 \leq \lambda \leq 1$$



Mittelpunkt M

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Übersicht A-10 (Fortsetzung)

Dreieck

Schwerpunkt

$$x_s = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$y_s = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$$

Für Punktmassen m_1, m_2, m_3

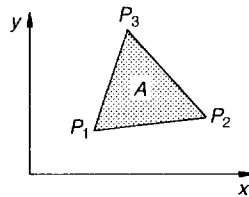
$$x_s = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$y_s = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Fläche

$$A = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]; \text{ mit Determinantenrechnung:}$$

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$



Übersicht A-11. Punkt, Strecke und Dreiecke im Raum.

Punkte und Strecken im Raum

Entfernung $|P_1 P_2| (P_1(x_1, y_1, z_1); P_2(x_2, y_2, z_2))$

$$|P_1 P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Teilung von $\overline{P_1 P_2}$ im Verhältnis λ

$$x_P = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y_P = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z_P = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

 $\lambda > 0$ innerer Teilpunkt $\lambda < 0$ äußerer TeilpunktMittelpunkt M

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Dreiecke im Raum

Schwerpunkt

$$x_s = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \quad y_s = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3};$$

$$z_s = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$

Übersicht A-11 (Fortsetzung)

Dreiecke im Raum

Für Punktmassen m_1, m_2, m_3

$$x_s = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3};$$

$$y_s = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3};$$

$$z_s = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Fläche

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}, \quad \text{mit}$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}; \quad A_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Übersicht A-11 (Fortsetzung)

Volumen des Tetraeders $P_1 P_2 P_3 P_4$ $(P_1 \text{ Spitze})$

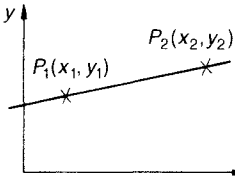
$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} (x_1 - x_2) & (y_1 - y_2) & (z_1 - z_2) \\ (x_1 - x_3) & (y_1 - y_3) & (z_1 - z_3) \\ (x_1 - x_4) & (y_1 - y_4) & (z_1 - z_4) \end{vmatrix}$$

Übersicht A-12. Gerade in der Ebene.

Zwei-Punkte-Form

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1};$$

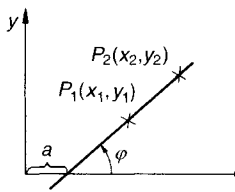
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$


Punkt-Steigungs-Form

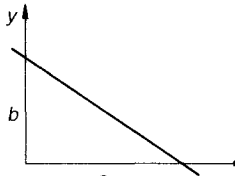
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y = m(x - a)$$

$$m = \tan \varphi;$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$


Achsenabschnitts-Form

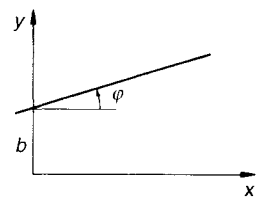
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$


Übersicht A-12 (Fortsetzung)

Normalform

$$y = mx + b$$

$$m = \tan \varphi$$



allgemeine Gleichung

$$Ax + By + C = 0$$

(A, B, C sind Konstanten; A und B nicht gleichzeitig null)

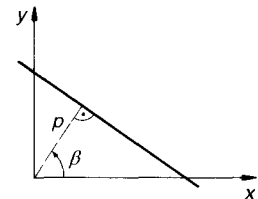
Hessesche Normalform

$$x \cos \beta + y \sin \beta - p = 0$$

$$\frac{Ax + By + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

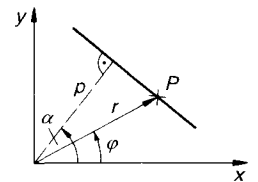
+ für: $C < 0$;

- für: $C > 0$



Polarform

$$r = \frac{p}{\cos(\alpha - \varphi)}$$



Abstand d des Punktes $P_1(x_1, y_1)$ von der Geraden

$$d = x_1 \cos \beta + y_1 \sin \beta - p$$

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = \frac{|y_1 - mx_1 - b|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

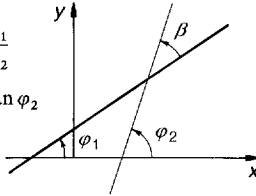
Übersicht A-12 (Fortsetzung)

Schnittwinkel β zweier Geraden

$$\tan \beta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

$$\tan \beta = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}$$

$$m_1 = \tan \varphi_1; m_2 = \tan \varphi_2$$

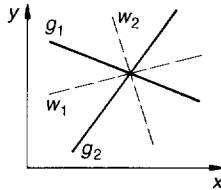


senkrechte Geraden: $m_1 m_2 = -1$
 $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$

parallele Geraden: $m_1 = m_2$
 $A_1/A_2 = B_1/B_2$

Winkelhalbierende zweier Geraden

$$\frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{\pm \sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \pm \frac{A_2 x + B_2 y + C_2}{\pm \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0$$



Hessesche Normalform

$$x(\cos \beta_1 \pm \cos \beta_2) + y(\sin \beta_1 \pm \sin \beta_2) - (p_1 \pm p_2) = 0$$

Übersicht A-13. Gerade im Raum.

Zwei-Punkte-Form

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

allgemeine Gleichung

Schnitt zweier beliebiger Ebenen

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

Winkel zwischen Gerade und Achsen

$$\left. \begin{matrix} E_1 = 0 \\ E_2 = 0 \end{matrix} \right\} \cos \alpha = \frac{1}{N} \left| \begin{matrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{matrix} \right|; \cos \beta = \frac{1}{N} \left| \begin{matrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{matrix} \right|$$

N: Normalenvektor

$$\cos \gamma = \frac{1}{N} \left| \begin{matrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{matrix} \right|$$

$$N^2 = \left| \begin{matrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{matrix} \right|^2$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Gerade durch Punkt $P_1(x_1, y_1, z_1)$

$$\frac{x - x_1}{\cos \alpha} = \frac{y - y_1}{\cos \beta} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma}$$

in Parameterform:

$$x = x_1 + t \cos \alpha; \quad y = y_1 + t \cos \beta$$

$$z = z_1 + t \cos \gamma$$

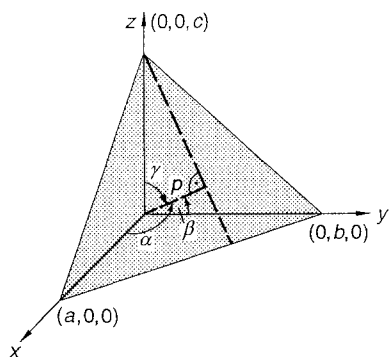
Parameterdarstellung

$$x = a_1 t + a_2; \quad y = b_1 t + b_2; \quad z = c_1 t + c_2$$

Schnittwinkel zweier Geraden

$$\cos \beta = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2$$

Übersicht A-14. Ebene.



Achsenabschnitts-Form

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Hessesche Normalform

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$$

α, β, γ Winkel zur x -, y -, z -Achse;

p Länge der Normalen durch den Nullpunkt

allgemeine Gleichung

$$E: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$a = -\frac{D}{A}; \quad b = -\frac{D}{B}; \quad c = -\frac{D}{C}$$

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \quad \cos \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \quad p = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} < 0$$

Ebene durch einen Punkt

$P_1(x_1, y_1, z_1)$ parallel zur Geraden

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

$P_1(x_1, y_1, z_1)$ senkrecht zur Geraden

$$(x-x_1) \cos \alpha + (y-y_1) \cos \beta + (z-z_1) \cos \gamma = 0$$

Übersicht A-14 (Fortsetzung)

Ebene durch drei Punkte

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} (x-x_1) & (y-y_1) & (z-z_1) \\ (x_2-x_1) & (y_2-y_1) & (z_2-z_1) \\ (x_3-x_1) & (y_3-y_1) & (z_3-z_1) \end{vmatrix} = 0$$

Abstand eines Punktes von der Ebene

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$d = x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - p$$

Winkel δ zweier Ebenen

$$\cos \delta = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Orthogonalität und Parallelität

orthogonal: zwei Ebenen \perp

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0$$

parallel: zwei Ebenen \parallel

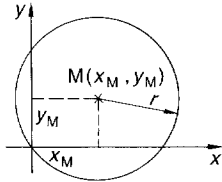
$$A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2 \quad \text{oder}$$

$$\cos \alpha_1 / \cos \alpha_2 = \cos \beta_1 / \cos \beta_2 = \cos \gamma_1 / \cos \gamma_2$$

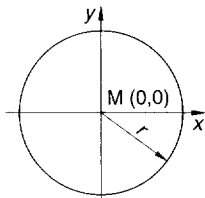
Übersicht A-15. Kreis.

Mittelpunktgleichungen

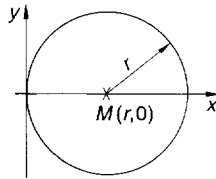
$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$$



Mittelpunkt im Ursprung Scheitel-Gleichung



$$x^2 + y^2 = r^2$$



$$y^2 = 2rx - x^2$$

allgemeine Kreisgleichung

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

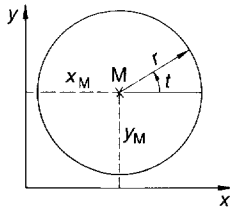
Mittelpunkt $M: (-D/A, -E/A)$

$$\text{Radius } r: r = \frac{1}{A} \sqrt{D^2 + E^2 - AF}$$

Parametergleichung

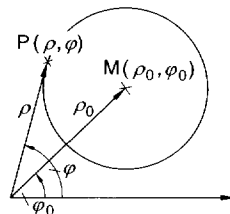
$$x = r \cos t + x_M$$

$$y = r \sin t + y_M$$



Polarkoordinaten

$$\varrho^2 - 2\varrho\varrho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \varrho_0^2 = r^2$$



Übersicht A-15 (Fortsetzung)

Schnittpunkte Gerade und Kreis

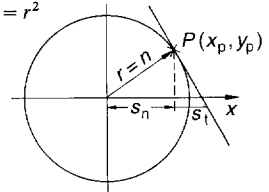
Kreis: $x^2 + y^2 = r^2$; Gerade $y = mx + b$

$$x_{1/2} = \frac{1}{1+m^2} (-mb \pm \sqrt{m^2 b^2 + (r^2 - b^2)(1+m^2)})$$

$$\text{Diskriminante } D = r^2(1+m^2) - b^2$$

für $D > 0$: 2 Schnittpunkte $D = 0$: 1 Schnittpunkt $D < 0$: kein Schnittpunkt

Tangente und Normale

Kreis: $x^2 + y^2 = r^2$ Tangente: $xx_P + yy_P = r^2$ Steigung: $m_t = -\frac{x_P}{y_P}$ Länge: $t = \left| \frac{ry_P}{x_P} \right|$ Subtangente: $s_t = \left| \frac{y_P^2}{x_P} \right|$

Normale

$$yx_P - xy_P = 0$$

Steigung $m_n = \frac{y_P}{x_P}$; Länge $n = r$;Subnormale $s_n = x_P$

Winkel im Kreis

Mittelpunktswinkel $\hat{=}$ doppelter Umfangswinkel

$$\alpha = 2\gamma;$$

$$360^\circ - \alpha = 2\delta$$

Sehntangentenwinkel

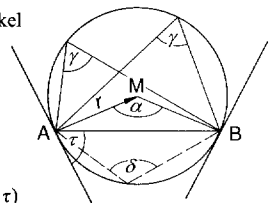
 $\hat{=}$ halbem

Mittelpunktswinkel

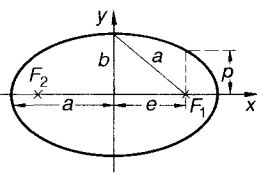
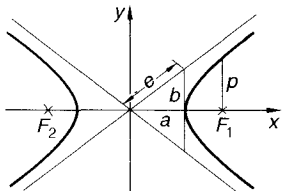
$$\tau = \frac{1}{2}\alpha; \quad \alpha = 2\tau;$$

$$360^\circ - \alpha = 2(180^\circ - \tau)$$

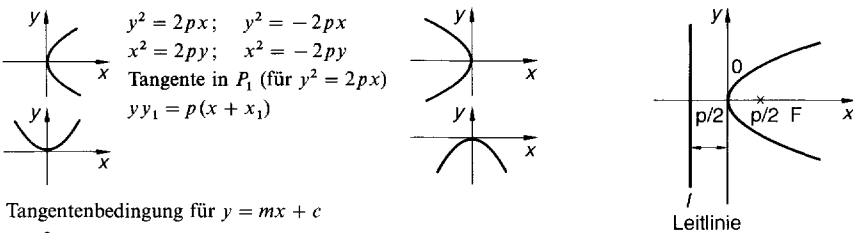
Alle Umfangswinkel sind also gleich groß



Übersicht A-16. Ellipse, Hyperbel, Parabel.

1. Normallage	Ellipse $M(0, 0)$	Hyperbel $M(0, 0)$
Schaubild		
Kurvengleichung	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Parametergleichungen	$x = a \cos t$ $y = b \sin t$	$x = \frac{a}{\cos t}; y = \pm b \tan t$ $x = \pm a \cosh t; y = b \sinh t$
Tangente mit Berührpunkt $P_1(x_1, y_1)$	$t: \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$	$t: \frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$
Asymptote	–	$y = \pm \frac{b}{a} x$
Tangentenbedingung ($y = mx + c$) ($Ax + By + C = 0$)	$c^2 = a^2 m^2 + b^2$ $a^2 A^2 + b^2 B^2 - C^2 = 0$	$c^2 = a^2 m^2 - b^2$ $a^2 A^2 - b^2 B^2 - C^2 = 0$
Normale im Kurvenpunkt $P_1(x_1, y_1)$	$n: y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1)$	$n: y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1)$
Exzentrizität	$e = \sqrt{a^2 - b^2}$	$e = \sqrt{a^2 + b^2}$
numerische Exzentrizität	$\varepsilon = \frac{e}{a}$	–
Fläche	$A = ab \pi$	–
Scheitelfgleichung (Brennpunkt auf x-Achse)	$y^2 = 2px - \frac{p}{a} x^2$	$y^2 = 2px + \frac{p}{a} x^2$
2. Achsen parallel zu Koordinatenachsen $M(x_0, y_0)$		
Kurvengleichung	$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$
Tangente mit Berührpunkt $P_1(x_1, y_1)$	$\frac{(x - x_0)(x_1 - x_0)}{a^2} + \frac{(y - y_0)(y_1 - y_0)}{b^2} = 1$	$\frac{(x - x_0)(x_1 - x_0)}{a^2} - \frac{(y - y_0)(y_1 - y_0)}{b^2} = 1$
Tangentenbedingung	$Ax + By + C = 0$ für: $A^2 a^2 + B^2 b^2$ $- (Ax_0 + By_0 + C)^2 = 0$	$Ax + By + C = 0$ für: $A^2 a^2 - B^2 b^2$ $- (Ax_0 + By_0 + C)^2 = 0$

Übersicht A-16 (Fortsetzung)

Parabel mit $S(0,0)$ Tangentenbedingung für $y = mx + c$

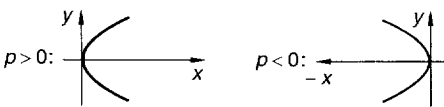
$$p = 2cm$$

Parametergleichung

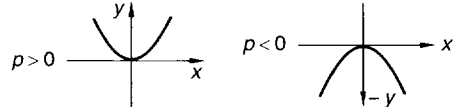
$$x = t^2; y = \pm ct$$

Parabel mit Scheitel $S(x_s, y_s)$

Parabelachse parallel x-Achse



Parabelachse parallel y-Achse



Kurvengleichung

$$(y - y_s)^2 = \pm 2p(x - x_s)$$

$$(x - x_s)^2 = \pm 2p(y - y_s)$$

Tangente in $P_1(x_1, y_1)$

$$(y_1 - y_s)(y - y_s) = \pm p(x + x_1 - 2x_s)$$

$$(x_1 - x_s)(x - x_s) = \pm p(y + y_1 - 2y_s)$$

Tangentenbedingung: $Ax + By + C = 0$

$$\text{für: } \pm pB^2 - 2A(Ax_s + By_s + C) = 0$$

$$\text{für: } \pm pA^2 - 2B(Ax_s + By_s + C) = 0$$

allgemeine Form der Kegelschnitt-Gleichungen

$$\left. \begin{array}{l} \text{Scheitelform: } y^2 = 2px - (1 - \varepsilon^2)x^2 \\ \text{Polargleichung: } r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \varepsilon < 1: \text{ Ellipse} \\ \varepsilon > 1: \text{ Hyperbel} \\ \varepsilon = 1: \text{ Parabel} \end{array}$$

$$\text{allgemeine Gleichung: } Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Ellipse: $AB > 0$ ($A = B$: Kreis)Hyperbel: $AB < 0$

Parabel (Achse parallel x-Achse):

$$A = 0 \quad \text{und} \quad BC \neq 0$$

Parabel (Achse parallel y-Achse):

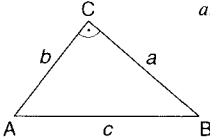
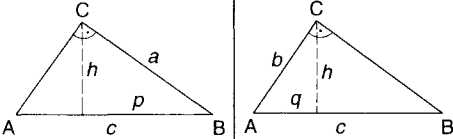
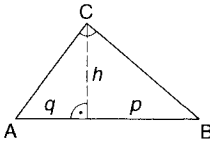
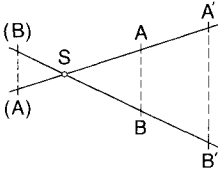
$$B = 0 \quad \text{und} \quad AD \neq 0$$

$$\text{beliebige Lage: } Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 > 0)$$

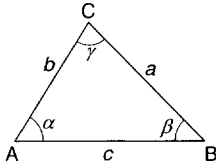
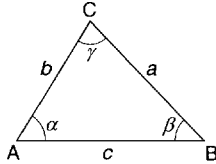
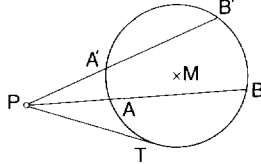
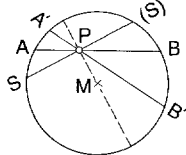
$$\text{Drehwinkel } \alpha: \tan(2\alpha) = \frac{2B}{A - C} \quad (A \neq C)$$

A.7 Geometrische Sätze

Übersicht A-17. Sätze in der Geometrie.

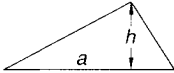
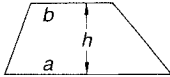
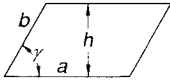
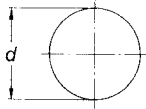
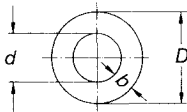

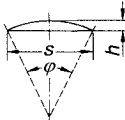
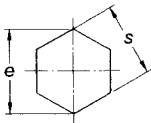
rechtwinkliges Dreieck		
Satz des Pythagoras	$c^2 = a^2 + b^2$	 <p>a, b Katheten c Hypotenuse</p>
Kathetensatz	$a^2 = c p$ $b^2 = c q$	
Höhensatz	$h^2 = p q$	
Strahlensätze wenn $AB \parallel A'B'$, dann gilt	1. $\overline{SA} : \overline{SA'} = \overline{SB} : \overline{SB'}$ $\overline{SA} : \overline{AA'} = \overline{SB} : \overline{BB'}$ 2. $\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{SA} : \overline{SA'}$	

Übersicht A-17 (Fortsetzung)

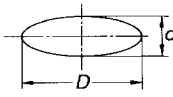
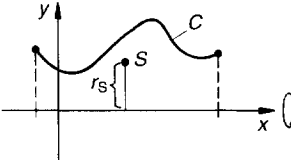
allgemeine Dreiecke		
<p>Sinussatz</p> <p>findet Anwendung, wenn eine Seite, der gegenüberliegende Winkel und eine zweite Seite oder ein zweiter Winkel gegeben sind</p>	$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}; \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$ $a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$	
<p>Kosinussatz</p> <p>findet Anwendung, wenn drei Seiten bzw. zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt sind</p>	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$	
Geometrie am Kreis		
<p>Sekanten-Tangenten-Satz</p>	$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PA'} \cdot \overline{PB'} = \overline{PT}^2$	
<p>Sekanten-Halbsehnensatz</p>	$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PA'} \cdot \overline{PB'} = \overline{PS}^2$	

A.8 Flächen und Körper

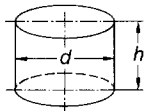
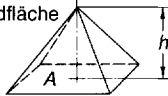
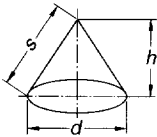
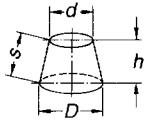
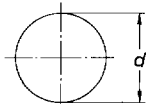
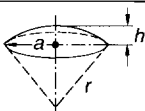
Übersicht A-18. Inhalt von Flächen.

Art der Fläche	Flächeninhalt A
<p>Dreieck</p> 	$A = \frac{ah}{2}$
<p>Trapez</p> 	$A = \frac{a+b}{2} h$
<p>Parallelogramm</p> 	$A = ah = ab \sin \gamma$
<p>Kreis</p> 	$A = \frac{\pi d^2}{4} = \pi r^2$ <p>Umfang $U = \pi d = 2\pi r$</p>
<p>Kreisring</p> 	$A = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = \frac{\pi}{2} (D + d) b$
<p>Kreisausschnitt</p>  <p>φ in Grad</p>	$A = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ} \quad (\text{Gradmaß})$ $A = r^2 \frac{\varphi}{2} \quad (\text{Bogenmaß})$ <p>Bogenlänge $l = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ} \quad (\text{Gradmaß})$</p> <p>$l = r \varphi \quad (\text{Bogenmaß})$</p>
<p>Kreisabschnitt</p>  <p>φ (Bogenmaß)</p>	$A = \frac{r^2}{2} (\varphi - \sin \varphi) \approx hs \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{s} \right)^2 \right]$ <p>Sehnenlänge $s = 2r \sin \frac{\varphi}{2}$</p> <p>Bogenhöhe $h = r \left(1 - \cos \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{s}{2} \tan \frac{\varphi}{4} = 2r \sin^2 \frac{\varphi}{4}$</p>
<p>Sechseck</p> 	$A = \frac{\sqrt{3}}{2} s^2$ <p>Eckenmaß $e = \frac{2s}{\sqrt{3}}$</p>

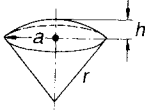
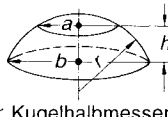
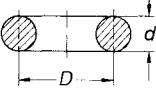
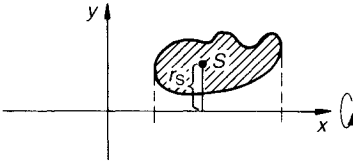
Übersicht A-18 (Fortsetzung)

Art der Fläche	Flächeninhalt A
Ellipse 	$A = \frac{\pi}{4} D \cdot d = a \cdot b \cdot \pi$ $\text{Umfang } U \approx 0,75\pi(D + d) - 0,5\pi\sqrt{Dd}$
1. Guldinsche Regel 	<p>Rotation der ebenen Kurve C um die x-Achse ergibt einen (räumlichen) Rotationskörper. Dessen Mantelfläche habe den Flächeninhalt A. Es sei L die Länge von C, und $S \in \mathbb{R}^2$ sei der Schwerpunkt von C mit dem Abstand r_s von der Drehachse. Dann ist</p> $A = \underbrace{2\pi r_s}_{\text{Weg des Schwerpunktes bei Rotation}} \cdot L.$

Übersicht A-19. Inhalt und Oberfläche von Körpern.

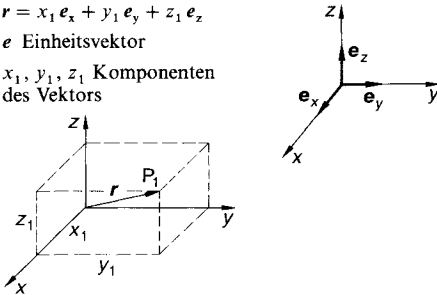
Art des Körpers	Inhalt V , Oberfläche S , Mantelfläche M
Kreiszylinder 	$V = \frac{\pi d^2}{4} h$ $M = \pi d h; \quad S = \pi d(d/2 + h)$
Pyramide 	$V = \frac{1}{3} A h$
Kreiskegel 	$V = \frac{\pi d^2 h}{12}$ $M = \frac{\pi d s}{2} = \pi r s = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$
Kegelstumpf 	$V = \frac{\pi h}{12} (D^2 + Dd + d^2)$ $M = \frac{\pi (D + d) s}{2} \quad s = \sqrt{\frac{(D - d)^2}{4} + h^2}$
Kugel 	$V = \frac{\pi d^3}{6}$ $S = \pi d^2$
Kugelabschnitt (Kalotte) 	$V = \frac{\pi h}{6} (3a^2 + h^2) = \frac{\pi h^2}{3} (3r - h)$ $M = 2\pi r h = \pi (a^2 + h^2)$

Übersicht A-19 (Fortsetzung)

Art des Körpers	Inhalt V , Oberfläche S , Mantelfläche M
Kugelausschnitt (Kugelsektor) 	$V = \frac{2\pi r^2 h}{3}$ $S = \pi r(2h + a)$
Kugelzone  r Kugelhalbmesser	$V = \frac{\pi h}{6} (3a^2 + 3b^2 + h^2)$ $M = 2\pi r h$
zylindrischer Ring 	$V = \frac{\pi^2}{4} D d^2 = 2\pi R \cdot \pi r^2$ $S = \pi^2 D d = 2\pi R \cdot 2\pi r$
Ellipsoid d_1, d_2, d_3 Länge der Achsen	$V = \frac{\pi}{6} d_1 d_2 d_3$
kreisrundes Faß D Durchmesser am Spund d Durchmesser am Boden h Abstand der Böden	$V \approx \frac{\pi h}{12} (2D^2 + d^2)$
2. Guldinsche Regel 	Wird ein ebenes Flächenstück (Inhalt A) (welches in $y > 0$ liegen möge) um die x -Achse rotiert, so entsteht ein Rotationskörper (Torus) reifenähnlicher Art. Sei S der Flächenschwerpunkt und r_s dessen y -Koordinate (d.h. Abstand vom Flächenschwerpunkt zur Drehachse). Dann gilt für das Volumen V des Rotationskörpers $V = \underbrace{2\pi r_s}_{\text{Weg des Schwerpunktes bei Rotation}} \cdot A$

A.9 Vektorrechnung

Übersicht A-20. Vektordarstellung und Gerade.

Vektordarstellung
$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_x + y_1 \mathbf{e}_y + z_1 \mathbf{e}_z$ \mathbf{e} Einheitsvektor x_1, y_1, z_1 Komponenten des Vektors 

Übersicht A-20 (Fortsetzung)

Vektordarstellung
Schreibweise als Zeilen- oder Spaltenvektor: $\mathbf{r} = (x_1, y_1, z_1) \quad \text{oder} \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ Betrag $ \mathbf{r} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ Winkel $\cos(r, x) = \frac{x_1}{ \mathbf{r} }; \quad \cos(r, y) = \frac{y_1}{ \mathbf{r} };$ $\cos(r, z) = \frac{z_1}{ \mathbf{r} };$ $\cos^2(r, x) + \cos^2(r, y) + \cos^2(r, z) = 1$

Übersicht A-20 (Fortsetzung)

Winkel und Abhängigkeiten zwischen zwei Vektoren

$$\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1); \quad \mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\text{orthogonal: } x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$$

$$\text{linear abhängig: } u r_1 + v r_2 = 0 \quad \text{oder}$$

$$u x_1 + v x_2 = 0; \quad u y_1 + v y_2 = 0;$$

$$u z_1 + v z_2 = 0 \quad (u, v \neq 0)$$

Entfernung und Teilung

$$\text{Entfernung: } \mathbf{d} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

Länge:

$$|\mathbf{d}| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$$

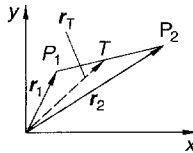
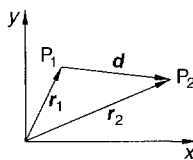
$$|\mathbf{d}| = \sqrt{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}$$

Teilung im Verhältnis λ :

$$\mathbf{r}_T = \frac{\mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{r}_2}{1 + \lambda}$$

 $\lambda = 1$: Mittelpunkt der Strecke

$$\mathbf{r}_M = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}$$



Übersicht A-20 (Fortsetzung)

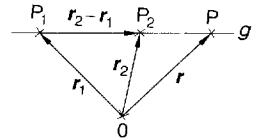
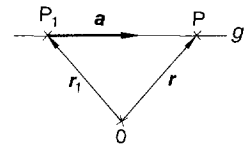
Gerade g

Punkt-Steigungs-Form:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{a}$$

Zwei-Punkte-Form:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$



Schnitt zweier Ebenen:

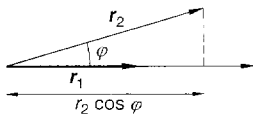
$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \quad \text{und}$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

Übersicht A-21. Multiplikation von Vektoren.

skalares Produkt

Multiplikation zweier Vektoren, so daß Ergebnis ein Skalar.



$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = |\mathbf{r}_1| |\mathbf{r}_2| \cdot \cos(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$$

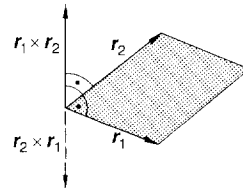
Skalarprodukt = 0: orthogonal

$$(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 0$$

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$$

Vektorprodukt

Multiplikation zweier Vektoren, so daß Ergebnis ein Vektor.



(Hinweis:
dreidimensionaler
Raum muß
orientiert sein;
Darstellung gilt
für rechtshändige
kartesische
Orthogonalsysteme)

$$\text{Betrag: } |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2| = |\mathbf{r}_1| |\mathbf{r}_2| \cdot \sin(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$$

Richtung: senkrecht zur Ebene,
welche die Vektoren \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2
aufspannen

Vektorprodukt = 0: parallel

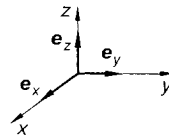
$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = 0$$

Übersicht A-21 (Fortsetzung)

Komponentendarstellung

$$\mathbf{r}_1 = x_1 \mathbf{e}_x + y_1 \mathbf{e}_y + z_1 \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{r}_2 = x_2 \mathbf{e}_x + y_2 \mathbf{e}_y + z_2 \mathbf{e}_z$$



$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2) &= \boxed{x_1 x_2 e_x^2} + x_1 y_2 \mathbf{e}_x \mathbf{e}_y + x_1 z_2 \mathbf{e}_x \mathbf{e}_z \\ &\quad + y_1 x_2 \mathbf{e}_y \mathbf{e}_x + \boxed{y_1 y_2 e_y^2} + y_1 z_2 \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z \\ &\quad + z_1 x_2 \mathbf{e}_z \mathbf{e}_x + z_1 y_2 \mathbf{e}_z \mathbf{e}_y + \boxed{z_1 z_2 e_z^2} \end{aligned}$$

alle $\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_x \mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}_y \mathbf{e}_z = 0$,
da senkrecht aufeinander

$$(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 =$$

$$\begin{aligned} &x_1 x_2 \underbrace{[\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x]}_{=0} + x_1 y_2 \underbrace{[\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y]}_{\mathbf{e}_z} + x_1 z_2 \underbrace{[\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z]}_{-\mathbf{e}_y} \\ &+ y_1 x_2 \underbrace{[\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x]}_{-\mathbf{e}_z} + y_1 y_2 \underbrace{[\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y]}_{=0} + y_1 z_2 \underbrace{[\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z]}_{-\mathbf{e}_x} \\ &+ z_1 x_2 \underbrace{[\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x]}_{\mathbf{e}_y} + z_1 y_2 \underbrace{[\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y]}_{-\mathbf{e}_x} + z_1 z_2 \underbrace{[\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z]}_{=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 &= (y_1 z_2 - z_1 y_2) \cdot \mathbf{e}_x \\ &\quad - (x_1 z_2 - z_1 x_2) \cdot \mathbf{e}_y \\ &\quad + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \cdot \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

Matrizen- und Determinantenschreibweise

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 &= (x_1 \ y_1 \ z_1) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \\ &= (y_1 z_2 - z_1 y_2) \mathbf{e}_x \\ &\quad - (x_1 z_2 - z_1 x_2) \mathbf{e}_y \\ &\quad + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

Übersicht A-21 (Fortsetzung)

Beispiele

Arbeit $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$ (konstante Kraft \mathbf{F})

$$W = |\mathbf{F}| |\mathbf{s}| \cos(\mathbf{F}, \mathbf{s})$$

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y + F_z \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{s} = s_x \mathbf{e}_x + s_y \mathbf{e}_y + s_z \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = (F_x F_y F_z) \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix}$$

$$= F_x s_x + F_y s_y + F_z s_z$$

$$\mathbf{F} = (3, -2, 4) \text{ N}$$

$$\mathbf{s} = (1, 2, -3) \text{ m}$$

$$W = (3 \ -2 \ 4) \text{ N} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ m}$$

$$= 3 \text{ Nm} - 4 \text{ Nm} - 12 \text{ Nm}$$

$$W = -13 \text{ Nm}$$

Drehmoment $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

$$M = |\mathbf{r}| \cdot |\mathbf{F}| \cdot \sin(\mathbf{r}, \mathbf{F})$$

$$\text{da } r \sin(\mathbf{r}, \mathbf{F}) = d$$

$$M = Fd$$

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = & (r_y F_z - r_z F_y) \mathbf{e}_x \\ & - (r_x F_z - r_z F_x) \mathbf{e}_y \\ & + (r_x F_y - r_y F_x) \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

$$\mathbf{r} = (1, -1, 3) \text{ m}$$

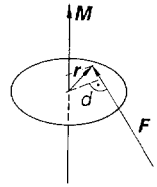
$$\mathbf{F} = (2, 3, -1) \text{ N}$$

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \text{ Nm}$$

$$\mathbf{M} = (1 \text{ Nm} - 9 \text{ Nm}) \mathbf{e}_x - (-1 \text{ Nm} - 6 \text{ Nm}) \mathbf{e}_y + (3 \text{ Nm} + 2 \text{ Nm}) \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{M} = -8 \mathbf{e}_x \text{ Nm} + 7 \mathbf{e}_y \text{ Nm} + 5 \mathbf{e}_z \text{ Nm}$$

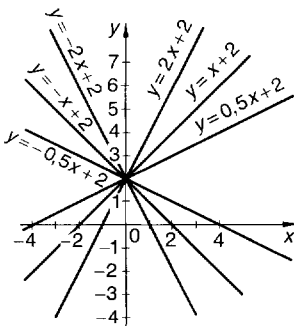
$$\mathbf{M} = (-8, 7, 5) \text{ Nm}$$



A.10 Funktionen

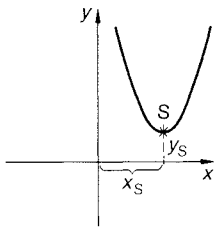
Übersicht A-22. Übersicht über Funktionen.

lineare Funktion

 $y = a_1 x + a_0$: Geradengleichung a_0 Achsenabschnitt (y-Achse) a_1 Steigung; $m = \tan \alpha$ $a_1 > 0$: positive Steigung $a_1 < 0$: negative Steigung

Übersicht A-22 (Fortsetzung)

quadratische Funktion



$$y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0:$$

 $a_2 > 0$: nach oben offen

 $a_2 < 0$: nach unten offen

 $|a_2| < 1$: Parabel flach; $|a_2| > 1$: Parabel steil; $|a_2| = 1$

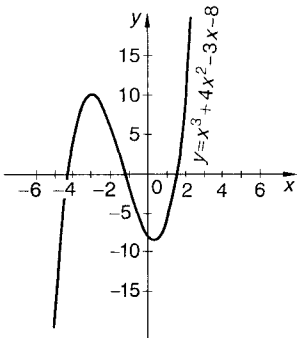
Normalparabel

$$\text{Scheitel } S \left(-\frac{a_1}{2a_2}; -\frac{a_1^2}{4a_2} + a_0 \right)$$

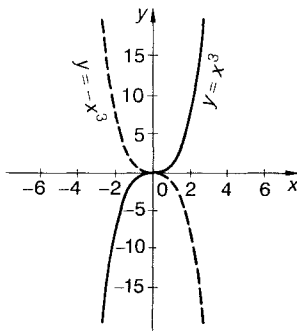
$$y = x^2 + px + q; \text{ Normalform } (a_2 = 1)$$

$$S \left(-\frac{p}{2}; -\left[\left(\frac{p}{2} \right)^2 - q \right] \right)$$

Funktion 3. Grades



$$y = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$



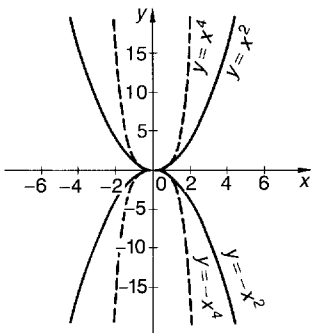
Sonderfall: kubische Normalparabel

$$y = x^3$$

$$y = -x^3$$

Übersicht A-22 (Fortsetzung)

gerade Potenzfunktionen mit positivem Exponenten



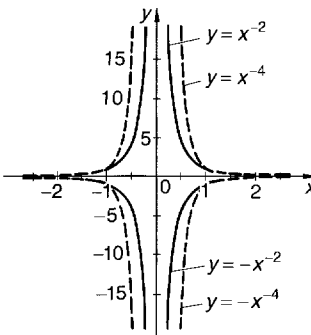
$$y = x^{2n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

(nach oben geöffnet)

$$y = -x^{2n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

(nach unten geöffnet)

gerade Potenzfunktionen mit negativem Exponenten



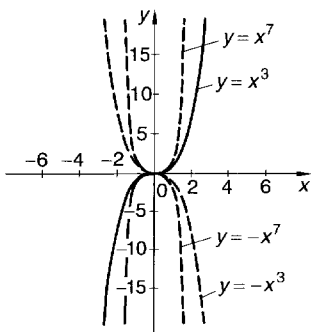
$$y = x^{-2n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

(1. und 2. Quadrant)

$$y = -x^{-2n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

(3. und 4. Quadrant)

ungerade Potenzfunktionen mit positivem Exponenten



$$y = x^{2n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

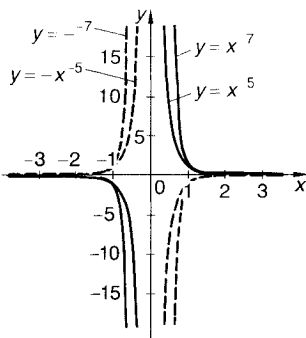
(1. und 3. Quadrant)

$$y = -x^{2n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

(2. und 4. Quadrant)

Übersicht A-22 (Fortsetzung)

ungerade Potenzfunktionen mit negativem Exponenten

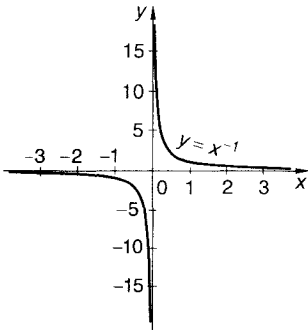


$$y = x^{-(2n+1)} \quad (n \in \mathbb{N})$$

(1. und 3. Quadrant; symmetrisch zu 0)

$$y = -x^{-(2n+1)} \quad (n \in \mathbb{N})$$

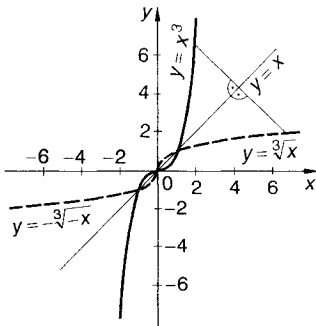
(2. und 4. Quadrant; symmetrisch zu 0)



Sonderfall: gleichseitige Hyperbel

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

ungerade Wurzelfunktionen

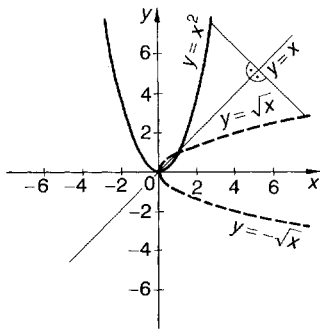


$$y = {}^{2n-1}\sqrt{x} \quad \text{für } x \geq 0$$

$$y = -{}^{2n-1}\sqrt{-x} \quad \text{für } x < 0$$

Übersicht A-22 (Fortsetzung)

gerade Wurzelfunktionen

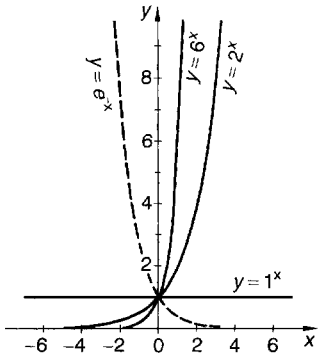
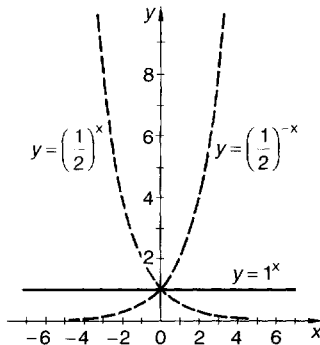


$$y = \sqrt[n]{x} \quad \text{oder} \quad y = -\sqrt[n]{x}$$

Exponentialfunktionen

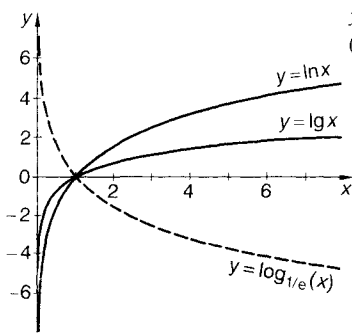
für $a > 1$

$$y = a^x$$

(für $a > 0$): alle Kurven durch $P(0, 1)$ für $0 < a < 1$ 

Übersicht A-22 (Fortsetzung)

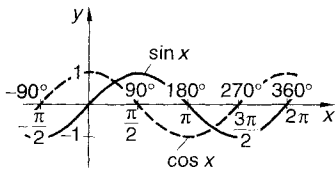
Logarithmusfunktion



$$y = \log_a(x)$$

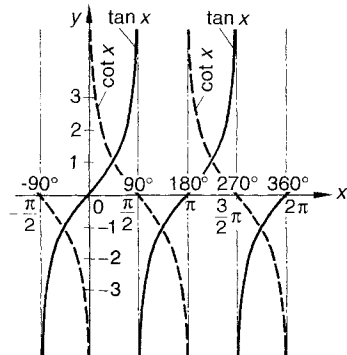
(für $x > 0$; $a > 0$; $a \neq 1$: alle Kurven durch $P(1, 0)$)

trigonometrische Funktionen



$$y = \sin x$$

$$y = \cos x$$

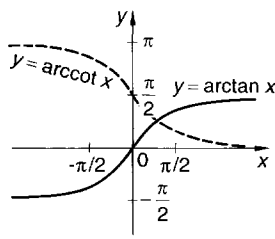
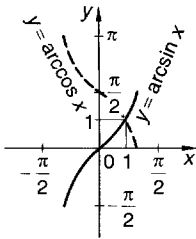


$$y = \tan x$$

$$y = \cot x$$

Übersicht A-22 (Fortsetzung)

Arcusfunktionen



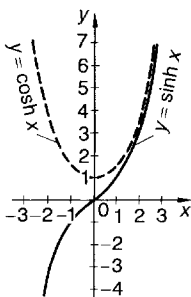
Zusammenhänge	Zusammenhang mit Logarithmus
$\arcsin(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$	$\arcsin(x) = -j \ln(xj + \sqrt{1-x^2})$
$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x) = \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$	$\arccos(x) = -j \ln(x + \sqrt{x^2-1})$
$\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot}(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$	$\arctan(x) = \frac{1}{2j} \ln\left(\frac{1+jx}{1-jx}\right)$
$\operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$	$\operatorname{arccot}(x) = -\frac{1}{2j} \ln\left(\frac{jx+1}{jx-1}\right)$

Symmetrien

$$\arcsin(-x) = -\arcsin(x); \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos(x);$$

$$\arctan(-x) = -\arctan(x); \quad \operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot}(x)$$

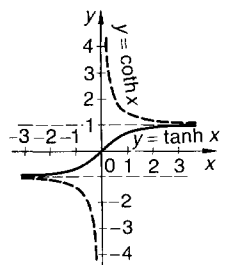
Hyperbelfunktionen



$$y = \sinh(x)$$

$$y = \cosh(x)$$

Umwandlungen	
$\sinh(x) \pm \cosh(x) = \pm e^{\pm x}$	$\sinh(0) = 0$
$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$	$\cosh(0) = 1$
$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	$\tanh(0) = 0$
$\coth(x) = \frac{1}{\tanh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$	
$1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\coth(0) = \pm \infty$
$\coth^2(x) - 1 = \frac{1}{\sinh^2(x)}$	

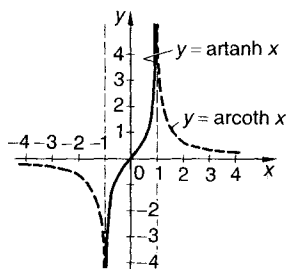
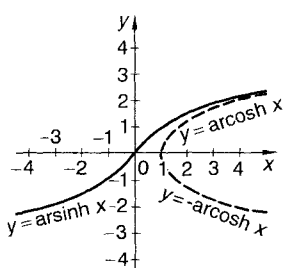


$$y = \tanh(x)$$

$$y = \coth(x)$$

Übersicht A-22 (Fortsetzung)

Areafunktionen



Übersicht A-23. Zusammenhänge bei Hyperbelfunktionen.

Hyperbelfunktionen

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; \quad \coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Symmetrien

$$\sinh(-x) = -\sinh(x); \quad \cosh(-x) = \cosh(x)$$

$$\tanh(-x) = -\tanh(x); \quad \coth(-x) = -\coth(x)$$

Zusammenhänge

$$\sinh(x) + \cosh(x) = e^x; \quad \sinh(x) - \cosh(x) = -e^{-x}$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}; \quad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

$$\coth(x) = \frac{1}{\tanh(x)}; \quad e^x = \frac{1 + \tanh\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tanh\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}; \quad \coth^2(x) - 1 = \frac{1}{\sinh^2(x)}$$

Übersicht A-23 (Fortsetzung)

Umrechnungen

Funktion Funktion	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\tanh(x)$	$\coth(x)$
$\sinh(x)$	–	$\pm \sqrt{\cosh^2(x) - 1}$	$\frac{\tanh(x)}{\sqrt{1 - \tanh^2(x)}}$	$\frac{1}{\sqrt{\coth^2(x) - 1}}$
$\cosh(x)$	$\sqrt{\sinh^2(x) + 1}$	–	$\frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2(x)}}$	$\frac{\coth(x)}{\sqrt{\coth^2(x) - 1}}$
$\tanh(x)$	$\frac{\sinh(x)}{\sqrt{\sinh^2(x) + 1}}$	$\frac{\sqrt{\cosh^2(x) - 1}}{\cosh(x)}$	–	$\frac{1}{\coth(x)}$
$\coth(x)$	$\frac{\sqrt{\sinh^2(x) + 1}}{\sinh(x)}$	$\frac{\cosh(x)}{\sqrt{\cosh^2(x) - 1}}$	$\frac{1}{\tanh(x)}$	–

Übersicht A-24. Zusammenhänge bei Areafunktionen.

Beziehungen zum Logarithmus

$$\operatorname{arsinh}(-x) = -\operatorname{arsinh}(x)$$

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x \geq 1)$$

$$\operatorname{arsinh}(-x) = -\operatorname{arsinh}(x)$$

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \quad |x| < 1$$

$$\operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \quad |x| > 1$$

Symmetrien

$$\operatorname{arsinh}(-x) = -\operatorname{arsinh}(x)$$

$$\operatorname{artanh}(-x) = -\operatorname{artanh}(x)$$

$$\operatorname{arcoth}(-x) = -\operatorname{arcoth}(x)$$

Übersicht A-24 (Fortsetzung)

Umrechnungen

	$\operatorname{arsinh} x$	$\operatorname{arcosh} x$	$\operatorname{artanh} x$	$\operatorname{arcoth} x$
$\operatorname{arsinh} x$	–	$\pm \operatorname{arcosh}(\sqrt{x^2 + 1})$	$\operatorname{artanh}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)$	$\operatorname{arcoth}\left(\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}\right)$
$\operatorname{arcosh} x$ $x \geq 1$	$\operatorname{arsinh}(\sqrt{x^2 - 1})$	–	$\operatorname{artanh}\left(\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}\right)$	$\operatorname{arcoth}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\right)$
$\operatorname{artanh} x$ $ x < 1$	$\operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$	$\pm \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$	–	$\operatorname{arcoth}\left(\frac{1}{x}\right)$
$\operatorname{arcoth} x$ $ x > 1$	$\operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\right)$	$\pm \operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\right)$	$\operatorname{artanh}\left(\frac{1}{x}\right)$	–

Die oberen Vorzeichen gelten für $x > 0$, die unteren für $x < 0$.

Summen und Differenzen

$$\operatorname{arsinh} x \pm \operatorname{arsinh} y = \operatorname{arsinh}(x\sqrt{1+y^2} \pm y\sqrt{1+x^2})$$

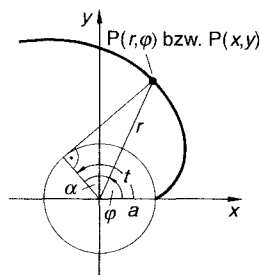
$$\operatorname{arcosh} x \pm \operatorname{arcosh} y = \operatorname{arcosh}(xy \pm \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)})$$

$$\operatorname{artanh} x \pm \operatorname{artanh} y = \operatorname{artanh} \frac{x \pm y}{1 \pm xy}$$

$$\operatorname{arcoth} x \pm \operatorname{arcoth} y = \operatorname{arcoth} \frac{1 \pm xy}{x \pm y}$$

Übersicht A-25. Ebene Kurven.

Kreisevolvente



Abwicklung eines gespannten Fadens von einem gegebenen Kreis (Radius a)

$$x = a(\cos t + t \sin t)$$

$$y = a(\sin t - t \cos t)$$

Polarkoordinaten:

$$r = \frac{a}{\cos \alpha} = \frac{a}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\varphi = \tan \alpha - \alpha = \frac{\tan t - t}{1 + t \cdot \tan t}$$

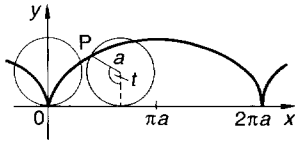
a Kreistradius

t Wälzwinkel

Übersicht A-25 (Fortsetzung)

Zykloide (Radkurve)

gewöhnliche Zykloide

Punkt eines Kreises mit Radius a , der auf einer Geraden abrollt (ohne zu gleiten)

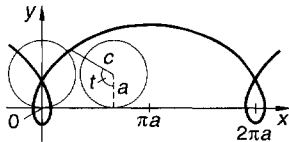
$$x = a(t - \sin t); \quad y = a(1 - \cos t)$$

$$x = a \arccos\left(\frac{a-y}{a}\right) - \sqrt{y(2a-y)} \quad (\text{Periode } 2\pi a)$$

$$\widehat{OP} = 8a \sin^2(t/4)$$

voller Zykloidenbogen: $l = 8a$ Fläche unter Zykloidenbogen: $A = 3\pi a^2$

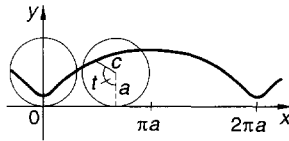
verlängerte Zykloide (Trochoide)

erzeugender Punkt liegt im Abstand c vom Mittelpunkt entfernt ($c > a$)

$$x = at - c \sin t$$

$$y = a - c \cos t$$

verkürzte Zykloide (Trochoide)

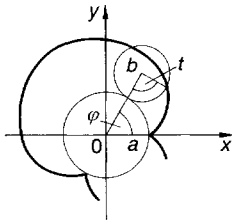
erzeugender Punkt liegt im Abstand c innerhalb des Rollkreises ($c < a$)

$$x = at - c \sin t$$

$$y = a - c \cos t$$

Epizykloide

Epizykloide

 a Radius des festen Kreises b Radius des rollenden Kreises t Wälzwinkel φ DrehwinkelKreis mit Radius b rollt auf der Außenseite eines Kreises

$$x = (a+b) \cos\left(\frac{b}{a}t\right) - b \cos\left(\frac{a+b}{a}t\right)$$

$$y = (a+b) \sin\left(\frac{b}{a}t\right) - b \sin\left(\frac{a+b}{a}t\right)$$

oder

$$x = (a+b) \cos \varphi - b \cos\left(\frac{a+b}{b} \varphi\right)$$

$$y = (a+b) \sin \varphi - b \sin\left(\frac{a+b}{b} \varphi\right)$$

$$\text{Bogenlänge } l_1 = \frac{8(a+b)}{m}$$

voller Bogen $l = 8(a+b)$ (a/b) ganzzahlig

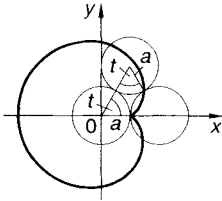
Fläche unter vollem Bogen

$$A = \frac{\pi b^2 (3a + 2b)}{a}$$

Übersicht A-25 (Fortsetzung)

Epizykloide

Kardioide (Herzkurve)



$$a = b$$

$$x = a(2 \cos t - \cos(2t))$$

$$y = a(2 \sin t - \sin(2t))$$

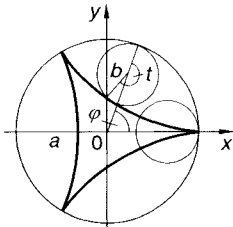
$$(x^2 + y^2 - a^2)^2 = 4a^2((x - a)^2 + y^2)$$

$$r = 2a(1 - \cos \varphi)$$

(Pol bei $(x; y) = (a; 0)$)

Hypozykloide

normale Hypozykloide

 a Radius des festen Kreises b Radius des rollenden Kreises t Wälzwinkel; φ Drehwinkel

Punkt rollt auf der Innenseite eines Kreises

$$x = (a - b) \cos\left(\frac{b}{a} t\right) + b \cos\left(\frac{a - b}{a} t\right)$$

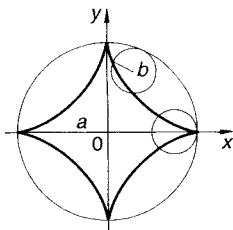
$$y = (a - b) \sin\left(\frac{b}{a} t\right) - b \sin\left(\frac{a - b}{a} t\right)$$

oder

$$x = (a - b) \cos \varphi + b \cos\left(\frac{a - b}{b} \varphi\right)$$

$$y = (a - b) \sin \varphi - b \sin\left(\frac{a - b}{b} \varphi\right)$$

Astroide (Sternlinie)



$$b = \frac{1}{4} a$$

$$x = a \cos^3\left(\frac{1}{4} t\right)$$

$$y = a \sin^3\left(\frac{1}{4} t\right)$$

oder

$$\text{oder } x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

für $b = \frac{a}{2}$ eine Geradenführung

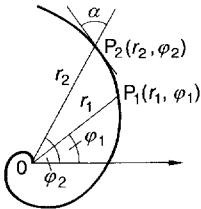
(Umwandlung einer Drehbewegung in eine Hin- und Herbewegung)

Länge L des Zweiges $L = 24a$

Übersicht A-25 (Fortsetzung)

Spiralen

logarithmische Spirale



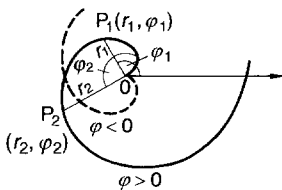
$$r = \alpha e^{k\varphi} \quad (k > 0)$$

schneidet alle Ursprungsgeraden unter dem gleichen Winkel α

$$\cot \alpha = k$$

$$\text{Länge des Bogens: } P_1 P_2 = \frac{r_2 - r_1}{\cos \alpha}$$

Archimedische Spirale



Punkt bewegt sich auf einem Leitstrahl mit konstanter Geschwindigkeit; der Leitstrahl dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um den Pol.

$$r = a\varphi \quad (\varphi = \varphi_2 - \varphi_1)$$

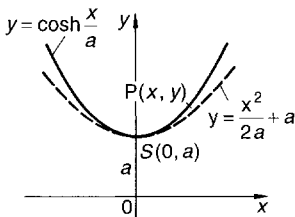
Länge des Bogens

$$P_1 P_2 = \frac{a}{2} (\varphi \sqrt{\varphi^2 + 1} + \operatorname{arsinh} \varphi)$$

Fläche des Sektors $P_1 O P_2$

$$A = \frac{a^2}{6} (\varphi_2^3 - \varphi_1^3)$$

Kettenlinie



an zwei Punkten aufgehängte Kette (Seil)

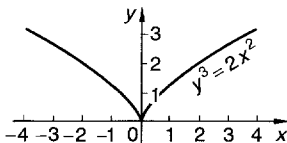
$$y = \frac{a}{2} (e^{x/a} + e^{-x/a}) = a \cosh \left(\frac{x}{a} \right)$$

Am tiefsten Punkt Näherungsformel

$$(\text{Parabel}): y = \frac{1}{2a} x^2 + a$$

$$\text{Länge des Bogens: } l = a \sinh \left(\frac{x}{a} \right)$$

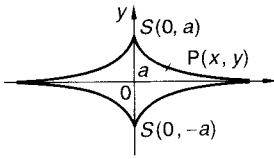
Neilsche Parabel (semikubische Parabel)



$$y^3 = ax^2$$

Übersicht A-25 (Fortsetzung)

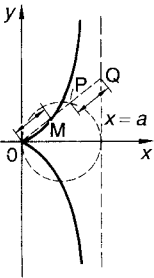
Schleppkurve (Traktrix)



$$x = a \operatorname{arccosh} \left(\frac{a}{y} \right) \mp \sqrt{a^2 - y^2}$$

Ein Fadenende wird längs einer Geraden bewegt. Der Massepunkt am anderen Fadenende verläuft auf der Schleppkurve.

Zissoide



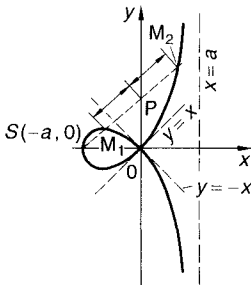
$$OM = PQ$$

$$y^2(a-x) = x^3$$

oder

$$r = a \sin \varphi \tan \varphi$$

Strophoide



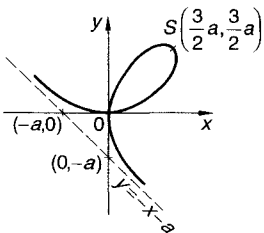
$$M_1 P = PM_2 = OP$$

$$(a-x)y^2 = (a+x)x^2$$

oder

$$r = \frac{-a \cos 2\varphi}{\cos \varphi}$$

Cartesisches Blatt



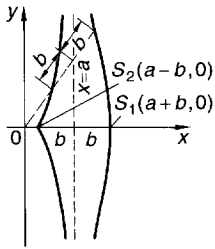
$$x^3 + y^3 = 3axy$$

oder

$$r = \frac{3a \sin \varphi \cos \varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi}$$

Übersicht A-25 (Fortsetzung)

Konchoide des Nikomedes



$$(x-a)^2(x^2+y^2) = b^2x^2$$

oder

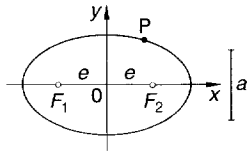
$$r = \frac{a}{\cos \varphi} \pm b$$

Cassinische Kurven

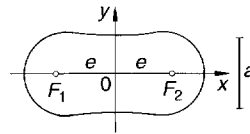
$$F_1 P \cdot F_2 P = a^2.$$

$$(x^2 + y^2)^2 - 2e^2(x^2 - y^2) = a^4 - e^4 \quad (F_1, F_2(\pm e; 0) \text{ oder } F_1 F_2 = 2e)$$

$$r^2 = e^2 \cos(2\varphi) \pm \sqrt{e^4 \cos^2(2\varphi) + a^4 - e^4}$$

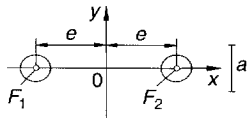


$$a^2 \geq 2e^2$$

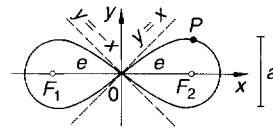


$$a^2 < 2e^2$$

$$a^2 > e^2$$



$$a^2 < e^2$$



$$a^2 = e^2$$

Lemniskate

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

$$\overline{F_1 P} \cdot \overline{F_2 P} = \left(\frac{F_1 F_2}{2}\right)^2$$

$$r = a \sqrt{2 \cos(2\varphi)}$$

A.11 Algebraische Gleichungen

Übersicht A-26. Arten algebraischer Gleichungen.

lineare Gleichung (Gleichung 1. Grades)

$$a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_1 \neq 0)$$

$$\text{Lösung: } x = -\frac{a_0}{a_1}$$

quadratische Gleichung (Gleichung 2. Grades)

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_2 \neq 0)$$

$$x^2 + \frac{a_1}{a_2} x + \frac{a_0}{a_2} = x^2 + px + q = 0$$

$$\text{Diskriminante } D = a_1^2 - 4a_0a_2 = \frac{p^2}{4} - q$$

Fallunterscheidungen

$$\begin{aligned} D > 0: \quad x_{1/2} &= \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} \\ (\text{reell}) \quad &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D = 0: \quad x_1 = x_2 &= -\frac{a_1}{2a_2} \\ (\text{zusammenfallend}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D < 0: \quad x_{1/2} &= \frac{-a_1 \pm j\sqrt{4a_0a_2 - a_1^2}}{2a_2} \\ (\text{komplex}) \quad &= -\frac{p}{2} \pm j\sqrt{\left|q - \frac{p^2}{4}\right|} \end{aligned}$$

Beziehungen zwischen x_1 und x_2
(Vietsche Wurzelsätze)

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

Kubische Gleichung

Rückführung auf quadratische Gleichung

symmetrische Gleichung 3. Grades

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

$$\text{Lösung: } x_1 = -1$$

$$a_3 x^2 + (a_2 - a_3)x + a_0 = 0$$

(quadratische Gleichung)

Übersicht A-26 (Fortsetzung)

Gleichung 4. Grades

Rückführung auf quadratische Gleichung

symmetrische Gleichung 4. Grades

$$a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

$$a_4 \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a_3 \left(x + \frac{1}{x}\right) + a_2 = 0$$

$$\text{für } u = x + \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad u - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}:$$

$$a_4 u^2 + a_3 u + (a_2 - 2a_4) = 0$$

(quadratische Gleichung)

biquadratische Gleichung

$$a_4 x^4 + a_2 x^2 + a_0 = 0$$

$$\text{für } u = x^2:$$

$$a_4 u^2 + a_2 u + a_0 = 0 \quad (\text{quadratische Gleichung})$$

kubische Gleichung (Gleichung 3. Grades)

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

$$\text{Substitution: } x = u - \frac{a_2}{3a_3}$$

$$u^3 + pu + q = 0$$

$$\text{Diskriminante: } D = \left(\frac{q}{2}\right)^3 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Fallunterscheidungen

$$D > 0 \quad u_1 = w + z$$

$$u_{2/3} = -\frac{w+z}{2} \pm j\left(\frac{w-z}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$w = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$D = 0 \quad u_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$$

$$u_{2/3} = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$$

Übersicht A-26 (Fortsetzung)

$$D < 0 \quad u_1 = 2\sqrt{\frac{|p|}{3}} \cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)$$

$$u_2 = -2\sqrt{\frac{|p|}{3}} \cos\left(\frac{\varphi}{3} - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$u_3 = -2\sqrt{\frac{|p|}{3}} \cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\left(\cos \varphi = \left(-\frac{q}{2}\right) / \left(\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3}\right)\right)$$

Gleichung n-ten Grades

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0 = 0$$

$$x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_0 = 0$$

Produktdarstellung

$$x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_0$$

$$= (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

mit komplexen x_1, x_2, \dots, x_n (im allgemeinen)

Übersicht A-26 (Fortsetzung)Gleichung n-ten Grades

x_1, x_2, \dots, x_n : Wurzeln der Gleichung (Nullstellen)

Wurzelsatz von Vieta:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = -b_{n-1}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_1 x_n \\ + x_2 x_3 + \dots + x_2 x_n \\ \dots \\ + x_{n-1} x_n \end{array} \right\} = b_{n-2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_1 x_2 x_n \\ + x_1 x_3 x_4 + \dots + x_1 x_3 x_n \\ \dots \\ + x_{n-2} x_{n-1} x_n \end{array} \right\} = -b_{n-3}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n = (-1)^n b_0$$

Übersicht A-27. Numerische Nullstellenbestimmung.lineare Interpolation (Regula falsi)

Kurve wird durch Sehne durch P_1 und P_2 ersetzt.

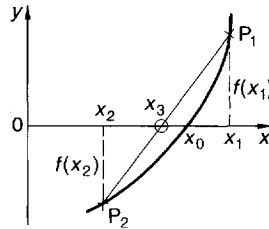
Start:

$$x_3 = x_1 - \frac{(x_2 - x_1)f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

Iteration:

$$x_{n+2} := x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)f(x_n)}{f(x_{n+1}) - f(x_n)}$$

führt (bei z. B. streng monotonen Verlauf durch die Nullstelle) zur Konvergenz, $x_1 \rightarrow x_0$

Tangentennäherung (Newtonsches Verfahren)

Kurve wird durch Tangente durch P_1 ersetzt.

Start:

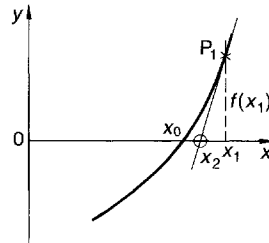
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (f'(x_1) \neq 0)$$

Iteration:

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

führt (unter der Bedingung $\left| \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1$

in der Umgebung der Nullstelle x_0) zur Konvergenz, $x_n \rightarrow x_0$



Übersicht A-27 (Fortsetzung)

Iterationsverfahren

Die Gleichung $f(x) = 0$ wird umgeformt zu $\varphi(x) = x$, wobei φ so zu wählen ist, daß $|\varphi'(x)| < 1$ ist in der Nähe einer zu bestimmenden Nullstelle x_0 (deren ungefähre Lage durch Schätzung ermittelt wird). Ist dann x_1 ein Näherungswert von $\varphi(x) = x$ bei x_0 , so führt die Iterationsfolge

$$x_{n+1} := \varphi(x_n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad x_1 \text{ Startwert}$$

zur Lösung, $x_n \rightarrow x_0$.

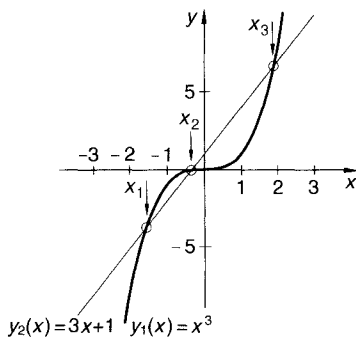
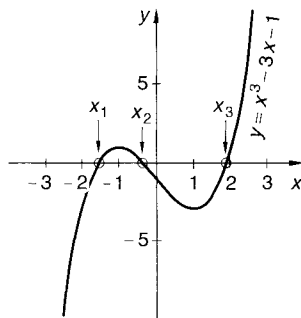
grafische Lösung

Beispiel:

Die Gleichung $x^3 - 3x - 1 = 0$ ist gleichwertig zu $x^3 = 3x + 1$. Man zeichnet $y_1(x) = x^3$ und $y_3(x) = 3x + 1$ und bestimmt die Schnittpunkte, was grafisch die Näherungslösungen

$$x_1 \approx -1,5; \quad x_2 \approx -0,35; \quad x_3 \approx 1,9$$

ergibt.



Übersicht A-28. Lineare Gleichungssysteme.

Eigenwerte, Eigenvektoren	
allgemein	Beispiel
<p>Sei A eine (n, n)-Matrix. Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, heißt Eigenvektor zu A, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit</p> $Ax = \lambda x, \text{ also } \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ <p>Man nennt ein solches λ auch Eigenwert (mit Eigenvektor x)</p> $(A - \lambda E)(x) = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$ <p>Für die Existenz und Bestimmung eines solchen Eigenwertes λ ist dann hinreichend und notwendig, daß</p> $p(\lambda) := \det(A - \lambda E) = 0$ <p>ist. $p(\lambda)$ ist ein Polynom n-ten Grades in λ (charakteristisches Polynom von A). Ist λ Null- stelle von $p(\lambda)$, so findet man alle Eigenvektoren zu λ, indem man das homogene Gleichungssystem $(A - \lambda E)(x) = 0$ löst.</p>	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad (A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 4 & 3 - \lambda \end{pmatrix}$ $p(\lambda) = (1 - \lambda)(3 - \lambda) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5$ $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + 5} = 5 \quad \text{oder} \quad -1$ $(A - \lambda_1 E)(x) = \begin{bmatrix} -4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 = 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$ <p>$x = (1, 2)$ (und alle Vielfachen hiervon) ist Eigen- vektor zu $\lambda_1 = 5$.</p> $(A - \lambda_2 E)(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 = 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$ <p>$x = (1, -1)$ (und alle Vielfachen hiervon) ist Eigen- vektor zu $\lambda_2 = -1$.</p>
allgemein	Beispiel
Darstellung des Gleichungssystems	
$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$	$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \\ 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 17 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 &= 12 \end{aligned}$

Übersicht A-28 (Fortsetzung)

allgemein	Beispiel
Matrizenform	
$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_b$ <p>Koeffizientenmatrix</p> <p>Lösung: $A^{-1}Ax = A^{-1}b$ $x = A^{-1}b$</p> <p>(A^{-1} inverse Matrix; existiert nur, wenn $\det A \neq 0$)</p>	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \\ 12 \end{pmatrix}$
Lösung nach Cramerscher Regel	
<p>Bedingung:</p> <p>Determinante der Koeffizientenmatrix $\neq 0$: $\det A \neq 0$</p> <p>1. Berechnung der Determinanten</p> $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ <p>2. Determinanten für die Variablen</p> $D_{x_1} = \begin{vmatrix} \boxed{b_1} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ $D_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{b_1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ $D_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \boxed{b_1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (3 + 10) + 1 \cdot (-3 - 15) + 2 \cdot (-6 + 9) = 1$ <p>2.</p> $D_{x_1} = \begin{vmatrix} \boxed{7} & -1 & 2 \\ 17 & -3 & 5 \\ 12 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 18$ $D_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & \boxed{7} & 2 \\ 3 & 17 & 5 \\ 3 & 12 & -1 \end{vmatrix} = 19$ $D_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \boxed{7} \\ 3 & -3 & 17 \\ 3 & -2 & 12 \end{vmatrix} = 4$

Übersicht A-28 (Fortsetzung)

Lösung nach Cramerscher Regel

3. Lösungen

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{\det A}; \quad x_2 = \frac{D_{x_2}}{\det A} \dots$$

$$x_n = \frac{D_{x_n}}{\det A}$$

3.

$$x_1 = \frac{18}{1} = 18$$

$$x_2 = \frac{19}{1} = 19$$

$$x_3 = \frac{4}{1} = 4$$

Lösung nach Gaußschem Eliminationsverfahren

$$(1) \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \quad \left| \times \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}} \right) \right| \times \left(-\frac{a_{31}}{a_{11}} \right)$$

$$(2) \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \quad \leftarrow + (2)$$

$$(3) \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \leftarrow + (3)$$

$$(n) \quad a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \quad \leftarrow + (n)$$

$$\Downarrow$$

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \quad \left| \times -\frac{a'_{32}}{a'_{22}} \right|$$

$$a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \dots + a'_{3n}x_n = b'_3 \quad \leftarrow$$

$$\vdots$$

$$a'_{n2}x_2 + a'_{n3}x_3 + \dots + a'_{nn}x_n = b'_n$$

$$\Downarrow$$

$$a''_{33}x_3 + \dots + a''_{3n}x_n = b'_3$$

$$\vdots$$

$$a^{(n-1)}_{nn}x_n = b^{(n-1)}_n$$

stufenweise Reduzierung der Gleichung durch Elimination von x_1, x_2, \dots, x_{n-1} .

$$(1) \quad x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \quad | \times (-3) \quad | \times (-3)$$

$$(2) \quad 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 17 \quad \leftarrow +$$

$$(3) \quad 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 12 \quad \leftarrow +$$

$$(1a) \quad -3x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -21$$

$$(2) \quad 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 17$$

$$0 \quad 0 \quad -x_3 = -4$$

$$\Rightarrow x_3 = 4$$

$$(1a) \quad -3x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -21$$

$$(3) \quad 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 12$$

$$0 \quad x_2 - 7x_3 = -9$$

$$\uparrow$$

$$4$$

$$\Rightarrow x_2 = 19 \quad (\text{in (1)}):$$

$$x_1 - 19 + 8 = 7$$

$$\Rightarrow x_1 = 18$$

A.12 Matrizenrechnung und Determinanten

Übersicht A-29. Übersicht Matrizen.

allgemein	Beispiel
Definition	
<p>Matrix: rechteckige Anordnung von Zahlen in m Zeilen und n Spalten.</p> $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \leftarrow \text{Zeile } i$ <p style="text-align: center;">↑ Spalte k</p> <p>a_{ik} Koeffizienten der Matrix</p>	<p>3,4-Matrix: 3 Zeilen, 4 Spalten</p> $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 12 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$
spezielle Matrizen	
<p>quadratische Matrix: Anzahl m Zeilen = Anzahl n Spalten</p> <p>$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ Hauptdiagonale</p> <p>$a_{1n}, a_{2n-1}, a_{3n-2}, \dots$ Nebendiagonale</p> $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$	<p>3-3-Matrix</p> $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & 12 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ <p>Hauptdiagonale</p> <p>$a_{11} = 2; a_{22} = 9; a_{33} = 7$</p>
<p>Einheitsmatrix E: Hauptdiagonale: 1 andere Elemente: 0</p> <p>neutrales Element der Matrix-Multiplikation</p> <p>$E \cdot A = A$</p>	$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
<p>transponierte Matrix: Vertauschen von Zeilen und Spalten</p> <p>$B = A^T$</p> <p>$(b_{ki} = a_{ik}) \quad 1 \leq i \leq m; \quad 1 \leq k \leq n$</p> <p>quadratische Matrix: A^T entsteht durch Spiegelung der Elemente an der Hauptdiagonalen</p>	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$
<p>symmetrische, quadratische Matrix:</p> <p>$A = A^T \quad a_{ik} = a_{ki} \quad 1 \leq i, k \leq n$</p>	$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & 8 \\ 5 & 8 & 3 \end{pmatrix} = A$

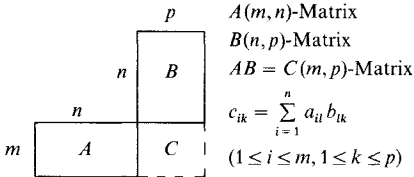
Übersicht A-29 (Fortsetzung)

schiefssymmetrische, quadratische Matrix: Elemente der Hauptdiagonale sind null; gespiegelte haben umgekehrtes Vorzeichen $A = -A^T \quad a_{ik} = -a_{ki} \quad a_{kk} = 0$	$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ -5 & -8 & 0 \end{pmatrix}$
konjugiert-komplexe Matrix: $\bar{A} = (\bar{a}_{ik})$ Eine Matrix heißt – hermitesch $\Leftrightarrow A = \bar{A}^T (a_{ik} = \bar{a}_{ki})$ – schiefhermitesch $\Leftrightarrow A = -\bar{A}^T (a_{ik} = -\bar{a}_{ki})$ – orthogonal $\Leftrightarrow A^T = A^{-1}$ – unitär $\Leftrightarrow A^{-T} = A^{-1}$	$A = \begin{pmatrix} 1+2j & 4-3j \\ 2+j & -4 \end{pmatrix}$ $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1-2j & 4+3j \\ 2-j & -4 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2+j \\ 2-j & 3 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} j & 3-j \\ -3-j & 2j \end{pmatrix}$
Matrizengesetze	
Addition $A + B = (a_{ik} + b_{ik})$ (Addition der entsprechenden Koeffizienten) Kommutativgesetz: $A + B = B + A$ Assoziativgesetz: $(A + B) + C = A + (B + C)$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 8 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 9 & 4 & 7 \\ 14 & 14 & 12 \end{pmatrix}$
Multiplikation mit reeller Zahl $\lambda A = (\lambda a_{ik}) = A \lambda$ Distributivgesetz: $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ Assoziativgesetz: $\mu(\lambda A) = (\mu \lambda) A = \mu \lambda A$	$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 15 \\ 21 & 12 & 6 \\ 18 & 24 & 27 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}$
Differenzieren und Integrieren Koeffizienten werden einzeln differenziert bzw. integriert $\frac{d}{dt} A(t) = \left(\frac{d}{dt} a_{ik}(t) \right)$ $\int_a^b A(t) dt = \left(\int_a^b a_{ik}(t) dt \right)$ $(a_{ik} \text{ differenzierbar bzw. integrierbar})$	$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 3t & 4t^2 \\ 2 & 5t+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8t \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ $\int_a^b \begin{pmatrix} 3 & 8t \\ 0 & 5 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 3(b-a) & 4(b^2-a^2) \\ 0 & 5(b-a) \end{pmatrix}$

Übersicht A-29 (Fortsetzung)

Matrizenprodukt

Falksches Schema



Koeffizienten c_{ik} der Matrix $C = AB$ stehen im Kreuzungspunkt der i -ten Zeile der Matrix A und der k -ten Spalte der Matrix B

Multiplikation von drei Matrizen

 $A(m, n); B(n, p); C(p, q)$ $(AB)C = A(BC) = ABC$ Beachte: $AB \neq BA$

(auch für quadratische Matrizen gilt im allgemeinen nicht $AB = BA$)

				B							
				3	2	3	6				
				1	1	0	7				
				6	4	7	0				
A	2	1	3	25	17	25	19	C			
	1	4	5	37	26	38	34				

Übersicht A-30. Matrix-Invertierung.

Sei A eine quadratische (n, n) -Matrix.Wann gibt es eine (n, n) -Matrix B mit $BA = E = AB$?

Antwort: Genau dann, wenn die Determinante von A (Bezeichnung $\det A$ oder $|A|$) nicht null ist.

Diese Bedingung hat zahlreiche gleichwertige Kriterien:

Theorem: Für eine (n, n) -Matrix A sind äquivalent

- (1) $\det A \neq 0$
- (2) die Zeilen von A sind linear unabhängig
- (3) die Spalten von A sind linear unabhängig
- (4) das homogene Gleichungssystem

$Ax = 0$, also $\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{bmatrix}$
 hat nur die Lösung $x = (0, \dots, 0)$

- (5) Für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ ist das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$Ax = b, \text{ also } \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{bmatrix}$$

eindeutig lösbar.

Ist eine – und damit jede andere dieser Bedingungen – erfüllt, so gibt es eine solche Matrix B – man schreibt dann $B = A^{-1}$,

$$Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$$

Man erhält mit A^{-1} z. B.

- a) mittels Gauß'schem Algorithmus
- b) mittels der Formel

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} U,$$

wobei U die „Adjunkten-Matrix“ ist (Matrix der Unterdeterminanten).

Übersicht A-30 (Fortsetzung)

allgemein	Beispiel
Bildung der Inversen (Fall $n = 3$)	
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ (Entwicklung nach der 1. Zeile) mit $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \gamma\beta$	$\det A = 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$ $= 2 \cdot (-2) - 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 = -7$
Bestimmung der Matrix U der Unterdeterminanten	
$U = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$	$U = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -11 & 16 & -3 \\ 6 & -10 & 1 \end{pmatrix}$
Bildung der Transponierten U^T	
$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{pmatrix}; U^T = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{21} & U_{31} \\ U_{12} & U_{22} & U_{32} \\ U_{13} & U_{23} & U_{33} \end{pmatrix}$ U^T : Vertauschen von Spalten und Zeilen	$U^T = \begin{pmatrix} -2 & -11 & 6 \\ 1 & 16 & -10 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$
Inverse berechnen	
$A^{-1} = \frac{1}{\det A} U^T$	$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{-7} & \frac{11}{-7} & \frac{6}{-7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{16}{7} & \frac{10}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$

Übersicht A-30 (Fortsetzung)

allgemein	Beispiel
Kontrolle	
$A \cdot A^{-1} = E$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{11}{7} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{16}{7} & \frac{10}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Übersicht A-31. Determinantenrechnung.

Sei A eine (n, n) -Matrix ($n \times n$ -Matrix)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

dann ist für ein beliebiges $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{jk} \det A_{jk}$$

wobei A_{jk} diejenige $(n-1, n-1)$ -Matrix ist, die dadurch entsteht, daß in der Matrix A die j -te Zeile und die k -te Spalte herausgenommen werden (solche Matrizen heißen „Adjunkten“, und die $n \times n$ -Matrix, welche an der Stelle (j, k) die Determinante von A_{jk} stehen hat, heißt Adjunkten-Matrix). Diese Formel heißt *Laplacesche Entwicklungsformel* – und zwar Entwicklung nach der j -ten Zeile. Die Berechnung der Determinanten der Matrizen A_{j1}, \dots, A_{jn} wird nun ebenso durchgeführt – also zurückgeführt auf Determinanten von $(n-2)$, $(n-2)$ -Matrizen usw. bis man schließlich auf $(2, 2)$ - oder auch $(3, 3)$ -Matrizen stößt, bei denen die Determinantenberechnung auf einem einfachen Schema beruht.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Entwicklung nach der 1. Zeile:

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 6 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (18 + 16 + 6 - 1 - 24 - 72) \\ &\quad - 2 \cdot (72 + 8 + 0 - 4 - 0 - 36) \\ &\quad + 3 \cdot (48 + 4 + 0 - 32 - 0 - 24) \\ &= -57 - 80 - 12 = -149 \end{aligned}$$

Wert einer zweireihigen Determinante

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 15 = -3$$

Wert einer dreireihigen Determinante (Sarrus)

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Die ersten beiden Spalten werden nochmals hingeschrieben.

Summe der Produkte parallel der Hauptdiagonalen (positiv) und parallel der Nebendiagonalen (negativ)

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} \\ &\quad + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22} a_{13} \\ &\quad - a_{32} a_{23} a_{11} - a_{33} a_{21} a_{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3 + 2 \cdot 5 \cdot 6 + 3 \cdot 4 \cdot 2 \\ &\quad - 6 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 \cdot 1 - 1 \cdot 4 \cdot 2 \\ &= 3 + 60 + 24 - 54 - 10 - 8 \\ &= 15 \end{aligned}$$

Übersicht A-31 (Fortsetzung)

Satz (Determinantenregeln)

allgemein	Beispiel
<p>(1) $\det A = \det A^T$</p> <p>(2) Vertauscht man in A zwei Zeilen oder zwei Spalten, so ändert sich das Vorzeichen von \det. Das heißt: Ist \tilde{A} diejenige Matrix, welche aus A entsteht, indem man zwei Zeilen (oder Spalten) vertauscht, so gilt $\det \tilde{A} = -\det A$</p> <p>(3) Addiert man zu einer Zeile von A (bzw. Spalte von A) beliebige Vielfache anderer Zeilen von A (bzw. Spalten von A), so ändert sich die Determinante nicht.</p> <p>(4) $\det A = 0 \Leftrightarrow$ Zeilen von A (bzw. Spalten von A) sind linear abhängig, d. h. es gibt eine Zeile (bzw. Spalte) von A, welche sich als Summe von Vielfachen anderer Zeilen (bzw. Spalten) darstellen läßt.</p> <p>(5) Ist A eine $n \times n$-Matrix, so ist $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$</p> $\det \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \dots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda^n \det A$ <p>Wird aber nur eine einzige Zeile (bzw. Spalte) mit einem Faktor $\lambda \in \mathbb{C}$ multipliziert, so erhält man $\lambda \det A$,</p> $\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{j1} & \dots & \lambda a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ <p>(6) Multiplikationssatz: Seien A und B $n \times n$-Matrizen. Dann ist das Matrixprodukt $A \cdot B$ ebenfalls eine $n \times n$-Matrix, und es gilt die wichtige Formel</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ </div>	$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 = -\det \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 11 \end{pmatrix}$ <p>$\Rightarrow \det A = \det \tilde{A} = -5$</p> <p>$\tilde{A}$: Addieren von 2×1. Zeile + 1×2. Zeile von A zur 3. Zeile</p> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 15 & -6 & 3 \end{pmatrix} \leftarrow 2 \times 1. \text{ Zeile} - 1 \times 2. \text{ Zeile} + 3 \times 3. \text{ Zeile}$ <p>$\Rightarrow \det A = 0$</p> $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 4 - 3 = 1$ $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 14 & 21 \\ 7 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \tilde{A} = 196 - 147 = 40 = 7^2 \cdot \det A$ $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 14 & 21 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \tilde{A} = 28 - 21 = 7 = 7 \cdot \det A$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ <p>$\det(AB) = 10 = \det A \cdot \det B = 5 \cdot 2$</p>

A.13 Differentialrechnung

Übersicht A-32. Differenzen- und Differentialquotient.

Differenzenquotient:

Steigung der Sekante $\overline{P_0 P}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \beta$$

Differentialquotient:

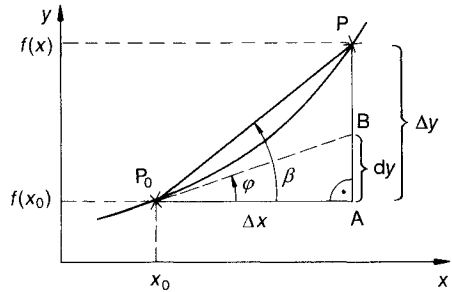
Steigung der Tangente im Punkt P_0

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

$$\text{Funktion } y = f(x) \rightarrow \text{Ableitung } y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

In der Physik wird die zeitliche Ableitung mit einem $\dot{}$ gekennzeichnet:

$$y = f(t); \text{ Ableitung } \dot{y} = \frac{dy}{dt} = \dot{f}(t)$$



Übersicht A-33. Differentiationsregeln.

Potenzregel	
$y(x) = x^n (n \in \mathbb{N}) \rightarrow y'(x) = n x^{n-1}$	$y(x) = 3x^2 \rightarrow y'(x) = 6x$
$y(x) = x^{-n} (n \in \mathbb{N}) \rightarrow y'(x) = -n x^{-n-1}$	$y(x) = \frac{1}{x^4} \rightarrow y'(x) = -\frac{4}{x^5}$
$y(x) = x^s (s \in \mathbb{R}) \rightarrow y'(x) = s x^{s-1}$ (für Exponenten $s < 1$ existiert die Ableitung nur in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$)	$y(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3} \rightarrow y'(x) = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$
	$y(x) = x^{\sqrt{2}} \rightarrow y'(x) = \sqrt{2} x^{\sqrt{2}-1}$
Summenregel	
$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$	$y(x) = x^5 + \frac{1}{x} \rightarrow y'(x) = 5x^4 - \frac{1}{x^2}$
$(af)'(x) = a f'(x) \quad (a \in \mathbb{R})$	$y(x) = 5x + 6x^7 + 2 \rightarrow y'(x) = 5 + 42x^6$
falls f, y differenzierbar sind Merke: Konstante Faktoren bleiben beim Ableiten erhalten.	
Produktregel	
$y = uv$	$y = \underbrace{(x+3)}_u \underbrace{(x^2+4)}_v$
$y' = u'v + v'u$	$y' = 1(x^2+4) + 2x(x+3) = 3x^2 + 6x + 4$
$y = uvw$	$y = (x^2+2x)(x^3+1)(x-5)$
$y' = u'vw + uv'w + uvw'$	$y' = (2x+2)(x^3+1)(x-5) + (x^2+2x)(3x^2)(x-5) + (x^2+2x)(x^3+1) \cdot 1$

Übersicht A-33 (Fortsetzung)

allgemein	Beispiel
Quotientenregel	
$y = \frac{u}{v}$ $y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$	$y = \frac{x^2 - 3x}{5x - 1}$ $y' = \frac{(5x-1)(2x-3) - 5(x^2-3x)}{(5x-1)^2} = \frac{5x^2 - 2x + 3}{(5x-1)^2}$
Kettenregel	
$y = f(\varphi(x))$ $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx}$ <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> äußere Ableitung innere Ableitung </div>	$y = (x^2 - 3x)^3$ $y' = 3(x^2 - 3x)^2(2x - 3)$
Logarithmusfunktion	
$y = \ln x$ $y' = \frac{1}{x}$ $y = \ln(f(x))$ $y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$	$y = \ln(3x)$ $y' = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$
allgemeiner Logarithmus $y = \log_c x$ 1. Umschreiben auf ln $y = \log_c x = \frac{\ln x}{\ln c}$ 2. Ableiten $y' = \frac{1}{x \ln c}$	$y = \log_{10}(3x)$ 1. $y = \frac{1}{\ln 10} \ln(3x)$ 2. $y' = \frac{1}{x \ln 10}$
Beachten der Logarithmengesetze	
$y = \log_c x^m = m \log_c x$	$y = \log_3 x^2 = 2 \log_3 x = \frac{2}{\ln 3} \ln x$ $y' = \frac{2}{x \ln 3}$
$y = \log_c(ax) = \log_c a + \log_c x$	$y = \log_4(3x) = \log_4 3 + \log_4 x$ $y = \log_4 3 + \frac{1}{\ln 4} \ln x$ $y' = \frac{1}{x \ln 4}$

Übersicht A-33 (Fortsetzung)

allgemein	Beispiel
Logarithmusfunktion	
$y = \log_c \left(\frac{a}{x} \right) = \log_c a - \log_c x$	$y = \log_5 \left(\frac{4x}{3x^2 + 1} \right) = \log_5 (4x) - \log_5 (3x^2 + 1)$ $y = \frac{1}{\ln 5} \ln (4x) - \frac{1}{\ln 5} \ln (3x^2 + 1)$ $y' = \frac{1}{x \ln 5} - \frac{1}{\ln 5} \cdot \frac{1}{(3x^2 + 1)} \cdot (6x)$
Exponentialfunktion	
$y = \underbrace{\text{konst} \cdot \text{Basis}^{\text{Exponent}}}_{\text{alte Funktion}} \quad y = c \cdot a^{f(x)}$ $y' = \text{alte Funktion} \cdot \ln \text{Basis} \quad y' = y \cdot \ln a \cdot f'(x)$ · Ableitung des Exponenten	$y = 3 \cdot 10^{x^2+4}$ $y' = 3 \cdot 10^{x^2+4} \cdot \ln 10 \cdot 2x$ $y = e^x$ $y' = e^x \cdot \underbrace{\ln e}_1 \cdot 1 = e^x$
trigonometrische Funktion	
$y = \sin x \rightarrow y' = \cos x$ $y = \cos x \rightarrow y' = -\sin x$ $y = \tan x \rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $y = \cot x \rightarrow y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$y = \sin (2x) \rightarrow y' = 2 \cos (2x)$ $y = \cos (2x) \rightarrow y' = -2 \sin (2x)$ $y = \tan (x^2) \rightarrow y' = 2x (1 + \tan^2 (x^2))$ $y = \cot (4x) \rightarrow y' = -4 (1 + \cot^2 (4x))$

Übersicht A-34. Wichtige Ableitungen.

y	y'
const	0
x	1
x^n	$n x^{n-1}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

Übersicht A-34 (Fortsetzung)

y	y'
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\frac{1}{\sin x}$	$-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$
$\frac{1}{\cos x}$	$\frac{\sin x}{\cos^2 x}$

Übersicht A-34 (Fortsetzung)

y	y'
$\ln(\sin x)$	$\cot x$
$\ln(\cos x)$	$-\tan x$
$\ln(\tan x)$	$\frac{2}{\sin(2x)}$
$\ln(\cot x)$	$-\frac{2}{\sin(2x)}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

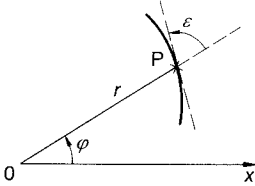
Übersicht A-34 (Fortsetzung)

y	y'
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{arcoth} x$	$\frac{1}{x^2-1}$

Übersicht A-35. Ableitung spezieller Funktionen.

allgemein	Beispiel
implizite Funktionen	
$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{f_x}{f_y}$ $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{f_y^3}$	$f(x; y) = 3x^3 + x^2y - y^3 = 0$ $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 9x^2 + 2xy; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y = x^2 - 3y^2$ $f_{xx} = 18x + 2y; \quad f_{yy} = -6y$ $f_{xy} = 2x = f_{yx}$ <p>Eingesetzt ergibt sich</p> $y' = -\frac{9x^2 + 2xy}{x^2 - 3y^2}$ $y'' = -\frac{(18x + 2y)(x^2 - 3y^2)^2 - 4x(9x^2 + 2xy)(x^2 - 3y^2) - 6y(9x^2 + 2xy)^2}{(x^2 - 3y^2)^3}$

Übersicht A-35 (Fortsetzung)

allgemein	Beispiel
Funktionen in Polarkoordinaten	
$r = r(\varphi)$ $\frac{dr}{d\varphi} = r \cot \varepsilon$  ε Winkel zwischen OP und Tangente in P Zusammenhang mit kartesischem Koordinatensystem: $x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi$ $y' = \frac{dy/d\varphi}{dx/d\varphi} = \frac{\frac{dr}{d\varphi} \sin \varphi + r \cos \varphi}{\frac{dr}{d\varphi} \cos \varphi - r \sin \varphi}$	$r = 1 + 2 \sin \varphi$ $\frac{dr}{d\varphi} = 2 \cos \varphi$ $y' = \frac{2 \cos \varphi \sin \varphi + r \cos \varphi}{2 \cos^2 \varphi - r \sin \varphi}$ $y' = \frac{\sin 2\varphi + r \cos \varphi}{2 \cos^2 \varphi - r \sin \varphi}$
Funktionen in Parameterform	
$x = \varphi(t); \quad y = \psi(t)$ $y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi_t}{\varphi_t} \quad (\varphi_t \neq 0)$ $y'' = \frac{\psi_{tt} \varphi_t - \varphi_{tt} \psi_t}{(\varphi_t)^3} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$	$x = \varphi(t) = 1 + t^2; \quad y = \psi(t) = 1 - \ln t$ $\varphi_t = 2t; \quad \psi_t = -\frac{1}{t}$ $\varphi_{tt} = 2; \quad \psi_{tt} = \frac{1}{t^2}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi_t}{\varphi_t} = \frac{1}{2t}$ $y' = \frac{-\frac{1}{t}}{2t} = -\frac{1}{2t^2}$ $y'' = \frac{\frac{1}{t^2} \cdot 2t - 2 \cdot \left(-\frac{1}{t}\right)}{(2t)^3} = \frac{\frac{4}{t}}{(2t)^3} = \frac{1}{2t^4}$ $y'' = \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2t^2} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t^3} \cdot \frac{1}{2t} = \frac{1}{2t^4}$

Übersicht A-36. Ableitungsbegriffe bei Funktionen mehrerer Veränderlicher.

allgemein	Beispiel
$y = f(x_1, \dots, x_n) = f(x), x \in \mathbb{R}^n$ $\frac{\partial y}{\partial x_1}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1+h, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$ analog sind $\frac{\partial y}{\partial x_k}, 2 \leq k \leq n$ definiert $\frac{\partial y}{\partial x_k}$ heißt k -te partielle Ableitung von f Der Vektor, gebildet aus den partiellen Ableitungen, heißt <i>Gradient</i> von f , $\text{grad } f(x) = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n}(x) \right)$ $(\text{grad } f(x), h)$ (Skalarprodukt in \mathbb{R}^n):= $h_1 \frac{\partial y}{\partial x_1}(x) + \dots + h_n \frac{\partial y}{\partial x_n}(x)$ heißt Richtungsableitung von f im Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ in Richtung $h \in \mathbb{R}^n$ und ist definitionsgemäß gleich $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$ Die Funktionen $\frac{\partial y}{\partial x_k}, 1 \leq k \leq n$, sind selber wieder Funktionen der Variablen x_1, \dots, x_n . Falls diese partiell differenzierbar sind, erhält man die $n \times n$ -Matrix der 2. Ableitungen – kurz Hessematrix von f , $Hf(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$ mit $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \equiv f_{x_j x_i}$ Falls diese 2. partiellen Ableitungen alle stetig sind, ist die Hessematrix symmetrisch, d. h. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad (1 \leq i, j \leq n)$	Für den Fall $n = 2$ $y = f(x, z) = x \sin(z^2)$ $\frac{\partial y}{\partial x} = \sin(z^2)$ $\frac{\partial y}{\partial z} = 2xz \cos(z^2)$ $\text{grad } y = (\sin(z^2), 2xz \cos(z^2))$ Ist $h = (3, 4)$ eine Richtung, so ist $\frac{\partial y}{\partial h} := 3 \sin(z^2) + 8xz \cos(z^2)$ $y_{xx} = 0$ $y_{xz} = 2z \cos(z^2)$ $y_{zx} = 2z \cos(z^2)$ $y_{zz} = 2x \cos(z^2) - 4xz^2 \sin(z^2)$ $Hf(x) = \begin{pmatrix} 0 & 2z \cos(z^2) \\ 2z \cos(z^2) & 2x \cos(z^2) - 4xz^2 \sin(z^2) \end{pmatrix}$

Übersicht A-36 (Fortsetzung)

Der Ausdruck $dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n$ heißt *totales Differential* von y und seine Bedeutung ist diese:

Ist $x \in \mathbb{R}^n$ ein Arbeitspunkt (Meßdatensatz) und ist $h = (h_1, \dots, h_n)$ eine Störung von x (was bedeutet: Bestimmung von x_k möge nur in den Toleranzen $[x_k - h_k, x_k + h_k]$ möglich sein), so ist der mögliche Fehler der Meßgröße $y = y(x_1, \dots, x_n)$ im Punkte x in „erster Näherung“ durch

$$f(x+h) - f(x) \approx df(x)(h) := \frac{\partial y}{\partial x_1} h_1 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} h_n = \frac{\partial y}{\partial h}$$

gegeben. Eine verfeinerte Darstellung der Differenzen $f(x+h) - f(x)$ benutzt die 2. Ableitungen und man hat

$$f(x+h) - f(x) = df(x)(h) + \frac{1}{2} (h, Hf(x)(h)) \leftarrow \text{Skalarprodukt in } \mathbb{R}^n$$

$$\text{mit } (h, Hf(x)(h)) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$$

Übersicht A-37. Hauptsätze der Differentialrechnung

Voraussetzungen: Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und im Innern, also in $a < x < b$, differenzierbar

Monotonie-Satz: $f'(x) > 0$ in $]a, b[\Rightarrow f$ streng monoton wachsend

$f'(x) < 0$ in $]a, b[\Rightarrow f$ streng monoton fallend

schwächer: $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) $\Rightarrow f$ monoton wachsend (fallend)

Das Beispiel $f(x) = x^3$ zeigt, daß nicht gilt: $[f$ streng monoton wachsend $\Rightarrow f'(x) > 0$ für alle $x]$.

Dabei heißt f monoton wachsend (streng monoton wachsend) \Leftrightarrow

$[x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) < f(x_2)$)]

Der Monotonie-Satz ist ein Spezialfall des Schranken-Satzes und ist zu diesem gleichwertig.

Schränken-Satz: Gilt $m < f'(x) < M$ für alle $x \in]a, b[$, so ist

$$m(x_2 - x_1) \leq f(x_2) - f(x_1) < M(x_2 - x_1) \quad \text{für } a \leq x_1 < x_2 \leq b$$

Mittelwert-Satz: Zu $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ gibt es ein x_0 mit $x_1 < x_0 < x_2$, so daß

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_0); \text{ geometrisch: Zu jeder Sekante gibt es eine parallele Tangente}$$

Satz von Rolle: Ist $f(b) = f(a)$, so gibt es ein x_0 mit $a < x_0 < b$, so daß $f'(x_0) = 0$ ist.

(Dies ist ein Spezialfall des Mittelwertsatzes, welcher äquivalent zu ihm ist)

Verallgemeinerter Mittelwert-Satz: Ist $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $a < x < b$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle x ,

so gilt: Ist $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, so gibt es ein x_0 mit $x_1 < x_0 < x_2$, so daß

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{g(x_2) - g(x_1)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Der verallgemeinerte MWS ist äquivalent zum MWS, welcher wiederum ein Spezialfall ist (mit $y(x) = x$)

Anwendung: Die Hauptsätze der Differentialrechnung sind die Grundlage der Analysis schlechthin. Insbesondere finden sie unmittelbar Anwendung bei Kurvendiskussionen, Extremwertbestimmungen, Ungleichungen und Grenzwertbestimmungen.

Übersicht A-38. Kurvendiskussion, Extremwertaufgaben, Ungleichungen und GrenzwertrechnungKurvendiskussion

Ist eine Funktion $f(x)$ vermöge Funktionsvorschrift (Formel) gegeben, so sind gefragt:

- (1) Definitionsgebiet und gegebenenfalls Symmetrien, Nullstellen
- (2) Pole (Unstetigkeits- oder Unendlichkeitsstellen)
- (3) kritische Punkte ($= f'(x) = 0$ -Stellen, waagerechte Tangenten)
Extremstellen (= lokale Maximum- oder Minimumstellen) sind kritische Stellen (aber nicht umgekehrt – siehe $f(x) = x^3$ für $x = 0$!).

Satz (Extremstellen-Test)

$f'(x_0) = 0$ und f' hat Vorzeichenwechsel ($\pm \mp$ Muster) $\Leftrightarrow f$ hat in x_0 ein lokales ^{Maximum} _{Minimum}.

Die Bedingung $f''(x_0) > 0$ bzw. $f''(x_0) < 0$ impliziert dagegen nur, daß ein lokales Minimum bzw. Maximum vorliegt, nicht umgekehrt.

(Beispiel $f(x) = x^4 \Rightarrow x_0$ ist Minimum, aber $f''(0) = 0$)

- (4) Konvexität – Konkavität: $f''(x) > 0$ (< 0) in $]a, b[\Rightarrow f$ konvex (konkav) (linksgekrümmt bzw. rechtsgekrümmt). Punkte x_0 , in denen sich die Krümmung ändert (konvex \leftrightarrow konkav) heißen Wendepunkte.

Satz (Wendepunkt-Test)

$f''(x_0) = 0$ und f'' hat Vorzeichenwechsel in x_0 (was zum Beispiel bei $f'''(x_0) \neq 0$ eintritt) mit Muster ($\pm \mp$) $\Leftrightarrow x_0$ ist Wendepunkt (mit ^{konvex \rightarrow konkav} _{konkav \rightarrow konvex}). Das Beispiel $y = x^4$ (überall konvex) zeigt, daß $x = 0$ kein Wendepunkt ist (obwohl $y''(0) = 0$ ist)!

- (5) Grenzwerte, Asymptoten (meist für $x \rightarrow \pm \infty$)
- (6) Skizze der Funktion $y = f(x)$ anhand der Daten aus (1) bis (5).

Beispiel: $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

Definitionsbereich: \mathbb{R} ohne ± 1 , wo Polstellen sind. Da $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, sind $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$ Nullstellen des Nenners mit Vorzeichenwechsel; sie sind daher Polstellen von f mit entgegengesetzten Ästen.

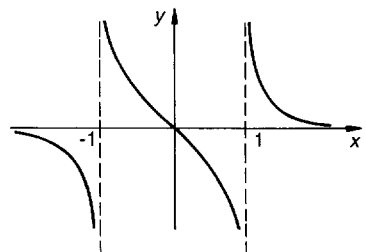
$f(-x) = -f(x)$ und 0 ist einzige Nullstelle. Es ist $f'(x) = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} < 0$ in $\text{Def}(f)$, $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0$. f ist stets

monoton fallend (was wegen der Polstellen möglich ist). Desweiteren ist $f''(x) = 2x \frac{x^2 + 3}{(x^2 - 1)^3}$ mit Wendestelle

$x = 0$ (da einfache Nullstelle von f'' – also mit Vorzeichenwechsel; das Vorzeichen von f'' kann leicht abgelesen werden – also konvex – konkav-Bestimmung möglich).

Tabelle

	-1	0	1	
f''	-	+	-	+
f'	-	-	-	-
f	\searrow	\searrow	\searrow	\searrow
	$0 - \infty$	$+\infty 0$	$0 - \infty$	$+\infty 0$

Extremwertaufgaben sind Textaufgaben

Umsetzung in mathematische Formulierung führt auf die Aufgabe, Maxima/Minima in einem gegebenen Bereich zu bestimmen.

Übersicht A-38 (Fortsetzung)

Ungleichungen

Ungleichungen können bei folgenden Voraussetzungen (und Differenzierbarkeitsvoraussetzungen) so behandelt werden:

Ist $f'(x) < g'(x)$ für $a < x$ und ist $f(a) \leq g(a) \Rightarrow f(x) < g(x)$ für $a < x$

Beispiel: $f(x) = \arctan x$, $g(x) = x : f'(x) = \frac{1}{1+x^2} < 1 = g'(x)$ ($x > 0$), $f(0) = \arctan 0 = 0 = g(0)$ also $f(x) = \arctan x < x = g(x)$ für $x > 0$

Grenzwertrechnung

Grenzwertrechnung bei unbestimmten Ausdrücken: Hier dient die Regel von l'Hospital:

Gilt $f(x) \rightarrow f(x_0) = 0$ (∞), $g(x) \rightarrow g(x_0) = 0$ (∞) bei $x \rightarrow 0$, so gilt:

$$\text{Ist } a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ so ist } a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

$$\text{Beispiel: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1 \quad \left(\frac{0}{0}\text{-Form} \right)$$

Andere unbestimmte Ausdrücke – wie $0 \cdot \infty$ (Bsp. $x \cdot \cot x$) oder 0^0 (wie $x^{\sin x}$) oder $\infty - \infty$ (wie $\left(\frac{1}{x-2} - \frac{8}{x^2+4x-12} \right)$) können durch Manipulation oder algebraische Umformung auf $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ -Form gebracht werden, denn nur dort kann man l'Hospital's Regel anwenden.

$$\text{Beispiel: } \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} (e^{\ln x})^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln x \cdot \frac{\sin x}{x}}.$$

Da $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ bei $x \rightarrow 0$, ist nur $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$ ($0 \cdot \infty$) zu berechnen.

$$\text{Man schreibt } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0} x = 0,$$

$$\text{also } \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x} = e^0 = 1.$$

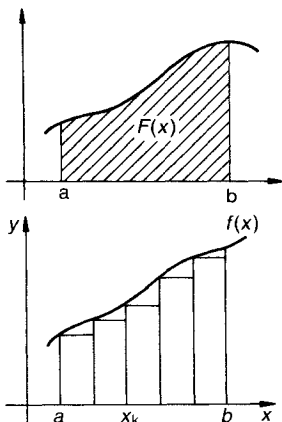
A.14 Integralrechnung

Es gibt grundsätzlich zwei Möglichkeiten zu sagen, was „das“ Integral einer Funktion $f(x)$, $a \leq x \leq b$, ist:

- Einerseits soll dies – bei positivem $f(x)$ die Flächeninhaltsfunktion sein (vgl. nebenstehende Figur)

$$F(x) =: \int_a^x f(t) dt := \text{Flächeninhalt unter Graph } f(x)$$

- Andererseits soll dies eine Funktion f sein, deren Ableitung gerade die gegebene Funktion $f(x)$ ist, also $F'(x) = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Man sagt dann, daß $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.



Die Flächeninhaltsfunktion $F(x)$ wird hierbei als Grenzwert ermittelt:

Indem das Intervall $[a, x]$ in n gleichbreite Rechtecke unterteilt wird, erhält man gemäß Skizze eine Annäherung zum gesuchten Flächeninhalt, i.e.:

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x-a}{n} \cdot f(x_k) \right)$$

Rieman'sche Summen

$$\text{mit } x_k = a + k \frac{x-a}{n}, \quad k = 0, \dots, n-1$$

Theorem (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Die vorstehende „Flächeninhaltsfunktion“ $F(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$. Es gibt im wesentlichen nur „eine“ Stammfunktion zu einer Funktion $f(x)$: Sind nämlich $F(x)$ und $G(x)$ Stammfunktionen zu ein und derselben

Funktion $f(x)$, so ist $F(x) - G(x) = \text{const.}$ Sie unterscheiden sich also nur durch eine additive Konstante.

$$F(x) = G(x) + C,$$

$F(x)$ und $G(x)$ sind Stammfunktionen zu $f(x)$

Folgerung: Sind $F(x)$ und $G(x)$ zwei Stammfunktionen zu $f(x)$, so ist

$$F(x_2) - F(x_1) = G(x_2) - G(x_1)$$

Folgerung: $\int_{x_1}^{x_2} f(t) dt = F(x_2) - F(x_1)$

$$\equiv F(x) \Big|_{x_1}^{x_2},$$

wobei $F(x)$ irgendeine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

Während die Integration als Grenzwert Riemannscher Summen technisch kaum durchführbar ist (von einfachsten Fällen abgesehen), so gibt es dagegen zur Ermittlung von Stammfunktionen einige weitreichende Methoden und Regeln:

Übersicht A-39. Rechenregeln für Integrale.

Im folgenden steht das Symbol $\int f(t) dt$ für

- a) Stammfunktion von f
- b) unbestimmte Integrale, also $F(x) := \int f(t) dt$
- c) bestimmte Integrale, also $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

wobei $F(x)$ irgendeine Stammfunktion zu $f(x)$ ist.
Alle Funktionen seien stetig.

allgemein	Beispiel
$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$	$\int (x^2 - \sin x) dx = \frac{1}{3} x^3 + \cos x$
$\int c f(x) dx = c \int f(x) dx \quad \text{für } c \in \mathbb{R}$	$\int_0^1 20 x^3 dx = [5 x^4]_0^1 = 5$
$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (a < c < b)$	
$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$	
$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$	
$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt = f(b(x)) b'(x) - f(a(x)) a'(x)$	$\frac{d}{dx} \int_0^{\sin x} e^t dt = e^{\sin x} \cos x$

Übersicht A-39 (Fortsetzung)

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Es gibt ein ξ , $a < \xi < b$ mit

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Für $f \geq 0$ in $[a, b]$:

Umwandlung der Fläche in gleichgroßes Rechteck

$\int_a^b f(t) dt$ ist der Flächeninhalt unter dem

Funktionsgraph gemäß Skizze

Merkregel: Nur für $f(x) \geq 0$ ist $\int_a^b f(x) dx$ der Flä-

cheninhalt unterhalb des Graphen! Die Interpretation als Flächeninhalt – bzw. die Näherung mittels Riemann'scher Summen – führt zu zahlreichen numerischen Integrationsmethoden

– Rechteckformel

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_a + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})$$

n Anzahl gleich großer Intervalle

– Trapezformel

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2n} (y_a + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_b)$$

– Tangentenformel

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{2(b-a)}{n} (y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{n-1})$$

n gerade

– Simpsonsche Regel

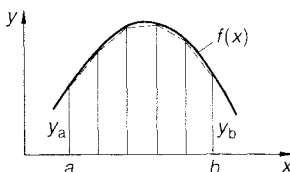
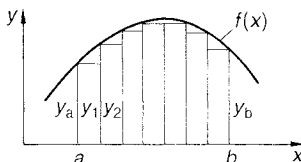
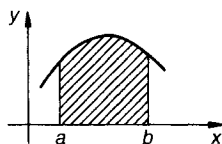
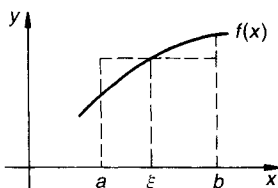
$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{3n} (y_a + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_b)$$

– Reihenentwicklung

Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ die analytische Ent-

wicklung einer Funktion $f(x)$ (sofern möglich), welche im Intervall $]x_0 - R, x_0 + R[$ konvergieren möge. Sind dann a, b aus diesem Intervall, so gilt:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_a^b (x-x_0)^k dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{1}{k+1} (x-x_0)^{k+1} \Big|_a^b \end{aligned}$$



$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$, konvergiert in ganz \mathbb{R} , also ist

$$\int_0^x e^{t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

Es gibt zu e^{x^2} keine elementare Stammfunktion.

Übersicht A-40 Uneigentliches Integral.

allgemein	Beispiel
<p>Integrale mit unendlichen Grenzen oder Integrale von Funktionen, deren Funktionswerte im Integrationsintervall unendlich werden oder allgemein von Funktionen, welche Unstetigkeitsstellen aufweisen.</p> $\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x) dx$ <p>Ist $f(x)$ stetig in $]a, b]$, aber vielleicht nicht in a, so ist</p> $\int_0^b f(t) dt = \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(t) dt$	$\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{t} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{b} \right) = 1$ $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [2\sqrt{t}]_\epsilon^1 = 2$

Übersicht A-41. Grundintegrale.

unbestimmte Grundintegrale	
$f(x)$	$\int f(x) dx$ (Stammfunktion)
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} = a^x \log_a e$
e^x	e^x
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x = -\operatorname{arccot} x$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ $(x < 1)$ $\operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$ $(x > 1)$ $-\operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1}$ $(x > 1)$
$\frac{1}{x^2-1}$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

Übersicht A-41 (Fortsetzung)

unbestimmte Grundintegrale	
$f(x)$	$\int f(x) dx$ (Stammfunktion)
$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$	$\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\frac{1}{\sinh^2 x}$	$-\coth x$
$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\tanh x$
bestimmte Grundintegrale, uneigentliche Integrale	
$\int_a^b f(x) dx$	Wert
$\int_{-1}^{+1} a^x dx$	$\frac{a^2 - 1}{a \ln a}$
$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$	$\frac{1}{2} \sqrt{\pi}$
$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx$	$n!$
$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x + 1} dx$	$\frac{\pi^2}{12}$
$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$	$\frac{\pi^2}{6}$
$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} dx$	$\frac{\pi}{2a}$
$\int_0^a \frac{1}{x^2 - a^2} dx$	$-\infty$
$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$	$\frac{\pi}{2}$
$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx$	π
$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$	$\frac{\pi}{2}$

Übersicht A-41 (Fortsetzung)

bestimmte Grundintegrale, uneigentliche Integrale	
$f(x)$	$\int_a^b f(x) dx$ (Stammfunktion)
$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$	1
$\int_0^\infty \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}} dx$	0
$\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{ax-x^2}} dx$	$\frac{3\pi a^2}{8}$
$\int_0^1 \frac{\ln x}{x+1} dx$	$-\frac{\pi^2}{12}$
$\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1} dx$	$\frac{\pi^2}{6}$
$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} dx$	$\frac{\pi^2}{8}$
$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x} dx$	$\frac{\pi}{2}: a > 0$ $-\frac{\pi}{2}: a < 0$
$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{x} dx$	∞
$\int_0^\pi \sin(ax) dx$	$\frac{1 - \cos(a\pi)}{a}$
$\int_0^\pi \cos(ax) dx$	$\frac{\sin(a\pi)}{a}$
$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos x} dx$	1
$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
$\int_0^{\pi/4} \tan x dx$	$\frac{1}{2} \ln 2$

Übersicht A-42. Integrationstechniken.

partielle Integration (Produktintegration)	
allgemein	Beispiel
$\int u v' dx = uv - \int v u' dx$	$\int x \sin x dx$ $u = x; \quad v' = \sin x$ $u' = 1; \quad v = -\cos x$ $= -x \cos x - \int 1 \cdot (-\cos x) dx$ $= -x \cos x + \sin x$

Übersicht A-42 (Fortsetzung)

Substitution

Ist $F(u)$ eine Stammfunktion von $f(u)$, so ist $G(x) := F(u(x))$ eine Stammfunktion von $f(u(x))u'(x)$ und umgekehrt.

$$\int_a^b f(u) du = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(x)) u'(x) dx$$

Zur Anwendung kommt die Substitutionsregel zu-
meist in der Situation, daß die Funktion $f(x)$ von der
Struktur $f(x) = g(u(x))$ ist. Indem man $u = u(x)$ als
neue Variable einführt, also $x = x(u)$ (umstellen),
 $dx = x'(u) du$, gelangt man zum Integral

$$\int g(u) x'(u) du$$

Gesetzt der Fall, letzteres wäre lösbar und die
Stammfunktion wäre $G(u)$, so ist $F(x) := G(u(x))$
die gesuchte Stammfunktion zu $f(x)$. Sehr oft aller-
dings wendet man Substitutionsformen an, die im
algebraischen Ausdruck für $f(x)$ nicht vorliegen.

Spezialfall:

Ist $F(u)$ Stammfunktion zu $f(u)$ (Variable: u), so
offenbar auch $F(ax+b)$ zu $af(ax+b)$ (Variable: x)

Häufig kann folgende Struktur des Integranden er-
kannt bzw. manipulativ eingerichtet werden:

$$f(x) = g(u(x)) u'(x)$$

Ist dann $G(u)$ Stammfunktion von $g(u)$, so ist

$$F(x) := G(u(x))$$

das gewünschte Integral.

Insbesondere ist die Stammfunktion von $\frac{u'(x)}{u(x)}$
durch $\ln|u(x)| + c$ gegeben, was bei Differential-
gleichungen häufig vorkommt.

$$\int \frac{dx}{3x-1} \quad u = 3x-1$$

$$du = 3dx \quad dx = \frac{1}{3} du$$

$$\frac{1}{3} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{3} \ln|u| = \frac{1}{3} \ln|3x-1|$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx: \quad x = \cos t, \quad dx = -\sin t dt,$$

$$\rightarrow \int \sqrt{1-\cos^2 t} \cdot (-\sin t) dt = -\int \sin^2 t dt$$

Die Stammfunktion von $\sin^2 t$ wird partiell ermittelt,
also:

$$\int \sin t \sin t dt = -\sin t \cos t + \int \underbrace{\cos^2 t}_{1-\sin^2 t} dt$$

$$= -\sin t \cos t + t - \int \sin^2 t dt, \quad \text{also}$$

$$\int \sin^2 t dt = \frac{1}{2} \{t - \sin t \cos t\} \text{ und die}$$

Rücksubstitution ($t = \arccos x$) ergibt

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} (\arccos x - x \sqrt{1-x^2})$$

$$\int \frac{1}{u^2} du = F(u) = -\frac{1}{u}, \quad \text{also}$$

$$\int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx \quad u = a^2-x^2, \quad dx = -\frac{du}{2x},$$

$$\rightarrow \int \frac{x}{\sqrt{u}} \cdot \left(-\frac{1}{2x}\right) du = -\frac{1}{2} \int u^{-1/2} du$$

$$= -u^{1/2} = -\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\int \frac{x}{x^2+3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+3} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+3)$$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int -\frac{(\cos x)'}{\cos x} dx$$

$$= -\ln|\cos x|$$

Übersicht A-42 (Fortsetzung)

Partialbruchzerlegung

Es ist $P(x)/Q(x)$ zu integrieren; P, Q Polynome. Durch Abspalten (Polynomdivision) muß zunächst gewährleistet sein, daß $\text{Grad } P < \text{Grad } Q$ ist (sowie keine gemeinsamen Nullstellen). Die weitere Vorgehensweise ist abhängig von der Nullstellenstruktur des Nenners. Es sei $\text{Grad } Q = n$.

1. Fall: Q hat genau n (einfache), verschiedene, reelle Nullstellen

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

~> Es gibt Konstanten A_1, A_2, \dots, A_n mit

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n}$$

2. Fall: Q hat mit Vielfachheiten genau n reelle Nullstellen (manche also vielleicht mehrfach), also

$$Q(x) = (x - x_1)^{n_1} (x - x_2)^{n_2} \cdots (x - x_m)^{n_m} \\ (n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n)$$

~> Dann ist nur folgender Ansatz erfolgreich

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x - x_1} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1n_1}}{(x - x_1)^{n_1}} \\ + \frac{A_{21}}{x - x_2} + \frac{A_{22}}{(x - x_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2n_2}}{(x - x_2)^{n_2}} \\ + \frac{A_{m1}}{(x - x_m)} + \cdots + \frac{A_{mn_m}}{(x - x_m)^{n_m}}$$

3. Fall: Q hat auch komplexe Nullstellen (welche allerdings konjugiert auftreten: Ist $z_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ eine solche Nullstelle, so ist $(z - z_1)(z - z_2) = (z - z_1)(z - \bar{z}_1) = z^2 - 2\alpha z + |\alpha \pm i\beta|^2$ ein quadratischer Faktor von Q) und Q ist von der Form

$$Q(x) = \underbrace{(x - x_1)^{n_1} \cdots (x - x_r)^{n_r}}_{\text{reelle Nullstellen}} \cdot \underbrace{(x^2 - 2\alpha_1 x + (\alpha_1^2 + \beta_1^2))^{m_1} \cdots (x^2 - 2\alpha_s x + (\alpha_s^2 + \beta_s^2))^{m_s}}_{\text{konjugiert komplexe Nullstellen}}$$

~> Der Partialbruchansatz lautet

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^r \left(\sum_{j=1}^{n_k} \frac{A_{kj}}{(x - x_k)^j} \right) + \sum_{k=1}^s \left(\sum_{j=1}^{m_k} \frac{B_{kj}x + C_{kj}}{[x^2 - 2\alpha_k x + (\alpha_k^2 + \beta_k^2)]^j} \right)$$

$$\frac{x^2 + 4}{(x-1)^2(x^2+2x+4)} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

$x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3$ nullstellenfrei in \mathbb{R} , also PBZ-Ansatz

$$\frac{x^2 + 4}{(x-1)^2(x^2+2x+4)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$$

Übersicht A-42 (Fortsetzung)

Partialbruchzerlegung	
<p>Die Bestimmung der Koeffizienten A_{kj}, B_{kj}, C_{kj} erfolgt so:</p> <ul style="list-style-type: none"> – Multiplikation des PBZ-Ansatzes mit Nenner Q → Polynomgleichheit, dann – Berechnung der A, B, C-Konstanten durch <ol style="list-style-type: none"> a) Nullstellen einsetzen b) Koeffizientenvergleich c) Differenzieren, erneut vergleichen (bei mehrfachen Nullstellen geeignet) 	$x^2 + 4 = A_1(x-1)(x^2 + 2x + 4) + A(x^2 + 2x + 4) + (Bx + C)(x-1)^2$ <p>(Polynomgleichheit)</p> <p>$x = 1$ ergibt: $5 = A_2 \cdot 7, A_2 = \frac{5}{7}$ Koeff.verg. (x^3): $0 = A_1 + B$ Koeff.verg. (x^0): $4 = -4A_1 + 4A_2 + C$ Differenzieren ergibt für $x = 1$</p> $2 = A_1(7) + A_2(2 \cdot 1 + 2) + 0$ <p>woraus $A_1 = -\frac{6}{49}, B = \frac{6}{49}, C = \frac{32}{49}$ folgt.</p> $\int \frac{x^2 + 4}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 4)} dx =$ $= -\frac{6}{49} \ln x-1 - \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{3}{49} \left[\ln(x^2 + 2x + 4) + \frac{26}{9} \sqrt{3} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{3}} \right]$

Übersicht A-43. Wichtige Integrale.

rationale Funktionen	
$f(x)$	$\int f(x) dx + C$
$(ax + b)^n$	$\frac{(ax + b)^{n+1}}{a(n+1)} \quad (n \neq -1)$
$x(ax + b)^n$	$\frac{(ax + b)^{n+2}}{a^2(n+2)} - \frac{b(ax + b)^{n+1}}{a^2(n+1)}$ $(n \neq -2; n \neq -1)$
$\frac{1}{ax + b}$	$\frac{1}{a} \ln ax + b $
$\frac{x}{(ax + b)^2}$	$\frac{1}{a^2} \left(\ln ax + b + \frac{b}{ax + b} \right)$
$\frac{x}{(ax + b)^n}$	$\frac{a(1-n)x - b}{a^2(n-1)(n-2)(ax + b)^{n-1}}$ $(n \neq 1; n \neq 2)$
$\frac{1}{x(ax + b)} \quad (\text{für } b \neq 0)$	$-\frac{1}{b} \ln \left \frac{ax + b}{x} \right $
$\frac{1}{x^2 + a^2}$	$\frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right)$

Übersicht A-43 (Fortsetzung)

irrationale Funktionen	
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\frac{1}{2} \left(x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) \quad (x < a)$
$x \sqrt{a^2 - x^2}$	$-\frac{1}{3} \sqrt{(a^2 - x^2)^3}$
$\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$	$\sqrt{a^2 - x^2} - a \ln \left \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right $
$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a}$
$\sqrt{x^2 + a^2}$	$\frac{1}{2} \left(x \sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \operatorname{ar sinh} \frac{x}{a} \right)$
$x \sqrt{x^2 + a^2}$	$\frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + a^2)^3}$
$\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x}$	$\sqrt{x^2 + a^2} - a \ln \left \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right $
$\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$	$\operatorname{ar sinh} \frac{x}{a} = \ln x + \sqrt{x^2 + a^2} $
$\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$	$\sqrt{x^2 + a^2}$
$\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$	$\frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} - \frac{a^2}{2} \operatorname{ar sinh} \frac{x}{a}$
$\frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + a^2}}$	$-\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a^2 x}$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2} \left(x \sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \operatorname{ar cosh} \frac{x}{a} \right)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$	$\operatorname{ar cosh} \frac{x}{a} = \ln \left \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right $
$\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$	$\sqrt{x^2 - a^2}$
$\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}$	$\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{ar cosh} \frac{x}{a}$

Übersicht A-43 (Fortsetzung)

trigonometrische Funktionen

$\sin(cx)$	$-\frac{1}{c} \cos(cx)$
$x \sin(cx)$	$\frac{\sin(cx)}{x^2} - \frac{x \cos(cx)}{c}$
$\frac{\sin(cx)}{x}$	$cx - \frac{(cx)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(cx)^5}{5 \cdot 5!} - \dots$
$\frac{1}{\sin(cx)}$	$\frac{1}{c} \ln \left \tan \left(\frac{cx}{2} \right) \right $
$\frac{1}{1 + \sin(cx)}$	$\frac{1}{c} \tan \left(\frac{cx}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$
$\frac{1}{1 - \sin(cx)}$	$\frac{1}{c} \tan \left(\frac{cx}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$
$\cos(cx)$	$\frac{1}{c} \sin(cx)$
$x \cos(cx)$	$\frac{\cos(cx)}{c^2} + \frac{x \sin(cx)}{c}$
$\frac{\cos(cx)}{x}$	$\ln cx - \frac{(cx)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(cx)^4}{4 \cdot 4!} - \dots$
$\frac{1}{\cos(cx)}$	$\frac{1}{c} \ln \left \tan \left(\frac{cx}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right $
$\frac{1}{1 + \cos(cx)}$	$\frac{1}{c} \tan \left(\frac{cx}{2} \right)$
$\frac{1}{1 - \cos(cx)}$	$-\frac{1}{c} \cot \left(\frac{cx}{2} \right)$
$\tan(cx)$	$-\frac{1}{c} \ln \cos(cx) $
$\frac{1}{\tan(cx) + 1}$	$\frac{x}{2} + \frac{1}{2c} \ln \sin(cx) + \cos(cx) $
$\frac{1}{\tan(cx) - 1}$	$-\frac{x}{2} + \frac{1}{2c} \ln \sin(cx) - \cos(cx) $
$\cot(cx)$	$\frac{1}{c} \ln \sin(cx) $

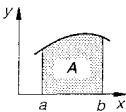
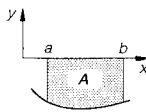
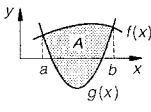
Übersicht A-43 (Fortsetzung)

Hyperbelfunktionen	
$\sinh(cx)$	$\frac{1}{c} \cosh(cx)$
$x \sinh(cx)$	$\frac{1}{c} x \cosh(cx) - \frac{1}{c^2} \sinh(cx)$
$\sinh^2(cx)$	$\frac{1}{4c} \sinh(2cx) - \frac{x}{2}$
$\cosh(cx)$	$\frac{1}{c} \sinh(cx)$
$x \cosh(cx)$	$\frac{1}{c} x \sinh(cx) - \frac{1}{c^2} \cosh(cx)$
$\cosh^2(cx)$	$\frac{1}{4c} \sinh(2cx) + \frac{x}{2}$
$\tanh(cx)$	$\frac{1}{c} \ln \cosh(cx) $
$\coth(cx)$	$\frac{1}{c} \ln \sinh(cx) $
Arcusfunktionen	
$\arcsin\left(\frac{x}{c}\right)$	$x \arcsin\left(\frac{x}{c}\right) + \sqrt{c^2 - x^2}$
$\arccos\left(\frac{x}{c}\right)$	$x \arccos\left(\frac{x}{c}\right) - \sqrt{c^2 - x^2}$
$\arctan\left(\frac{x}{c}\right)$	$x \arctan\left(\frac{x}{c}\right) - \frac{c}{2} \ln(c^2 + x^2)$
$\operatorname{arccot}\left(\frac{x}{c}\right)$	$x \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{c}\right) + \frac{c}{2} \ln(c^2 + x^2)$
Areafunktionen	
$\operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{c}\right)$	$x \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{c}\right) - \sqrt{x^2 + c^2}$
$\operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{c}\right)$	$x \operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{c}\right) - \sqrt{x^2 - c^2}$
$\operatorname{artanh}\left(\frac{x}{c}\right)$	$x \operatorname{artanh}\left(\frac{x}{c}\right) + \frac{c}{2} \ln c^2 - x^2 \quad (x < c)$
$\operatorname{arcoth}\left(\frac{x}{c}\right)$	$x \operatorname{arcoth}\left(\frac{x}{c}\right) + \frac{c}{2} \ln x^2 - c^2 \quad (x > c)$

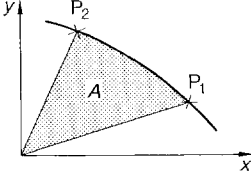
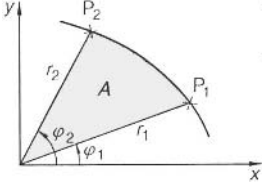
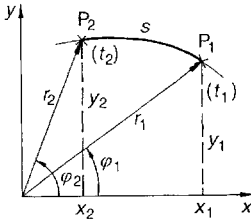
Übersicht A-43 (Fortsetzung)

Exponentialfunktionen	
e^{cx}	$\frac{1}{c} e^{cx}$
$x e^{cx}$	$\frac{e^{cx}}{c^2} (cx - 1)$
$\frac{e^{cx}}{x}$	$\ln x + \frac{cx}{1 \cdot 1!} + \frac{(cx)^2}{2 \cdot 2!} + \dots$
$e^{cx} \sin(bx)$	$\frac{e^{cx}}{c^2 + b^2} (c \sin(bx) - b \cos(bx))$
$e^{cx} \cos(bx)$	$\frac{e^{cx}}{c^2 + b^2} (c \cos(bx) + b \sin(bx))$
Logarithmusfunktionen	
$\ln x$	$x \ln x - x$
$(\ln x)^2$	$x (\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x$
$\frac{1}{\ln x}$	$\ln \ln x + \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(\ln x)^3}{3 \cdot 3!} + \dots$
$\frac{1}{x \ln x}$	$\ln \ln x $
$\sin(\ln x)$	$\frac{x}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$
$\cos(\ln x)$	$\frac{x}{2} [\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$

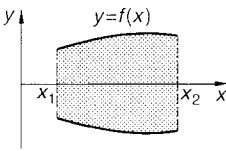
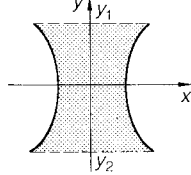
Übersicht A-44. Anwendungen der Integralrechnung in der Geometrie.

Flächenberechnung		
allgemein		
Funktion positiv	Funktion negativ	Flächen zwischen zwei Kurven
 $A = \int_a^b f(x) dx$	 $A = - \int_a^b f(x) dx$	 $A = \int_a^b f(x) - g(x) dx$
Beispiel $A = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 0 + 1 = 1$		

Übersicht A-44 (Fortsetzung)

Flächenberechnung	
allgemein	Beispiel
<p>Parameterdarstellung</p>  <p> $x = \varphi(t); \quad y = \psi(t)$ $A = \int_{y_1}^{y_2} x \, dy = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) \psi'(t) \, dt$ $A = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (xy' - yx') \, dt$ </p> <p>Für geschlossene Randlinie</p> $A = \frac{1}{2} \oint (xy' - yx') \, dt$ <p>(Leibnizsche Sektorenformel)</p>	<p> $x = \varphi(t) = 1 + t^2; \quad t_1 = 0,5, \quad t_2 = 2$ $y = \psi(t) = 3t; \quad \psi'(t) = 3$ $A = \int_{0,5}^2 (1 + t^2); 3 \, dt = 3 \int_{0,5}^2 (1 + t^2)$ $A = 3 \left[t + \frac{1}{3} t^3 \right]_{0,5}^2 = 12,375$ </p>
<p>Polarkoordinaten</p>  <p> $r_1 = f(\varphi_1); \quad r_2 = f(\varphi_2)$ $A = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \, d\varphi$ </p>	<p> $r = 1 + 2 \sin \varphi; \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \pi/2$ $A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + 2 \sin \varphi)^2 \, d\varphi$ $= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + 4 \sin \varphi + 4 \sin^2 \varphi) \, d\varphi$ $A = \frac{1}{2} \left[\varphi - 4 \cos \varphi + 2 \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \right]_0^{\pi/2}$ $A = \frac{3}{4} \pi + 2$ </p>
Bogenlängen (Rektifikation)	
 <p>für $y = f(x)$</p> $s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} \, dx$ $s = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2} \, dy$ <p>Parameterform: $x = \varphi(t); \quad y = \psi(t)$</p> $s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2} \, dt$ <p>Polarkoordinaten: $r = f(\varphi)$</p> $s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2} \, d\varphi = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2} \, dr$	<p>Zykloide von $t_1 = 0$ bis $t_2 = \pi$</p> <p> $x = \varphi(t) = r(t - \sin t); \quad \dot{\varphi} = r(1 - \cos t)$ $y = \psi(t) = r(1 - \cos t); \quad \dot{\psi} = r \sin t$ $s = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2(1 - \cos t)^2 + r^2 \sin^2 t} \, dt$ $s = r \sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos t} \, dt$ Benutze $\cos t = 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{t}{2} \right)$ $s = 2r \int_0^{\pi} \sin \left(\frac{t}{2} \right) \, dt = \left[-4r \cos \left(\frac{t}{2} \right) \right]_0^{\pi}$ $s = 4r$ </p>

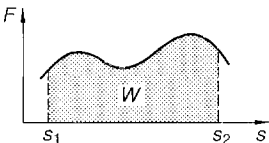
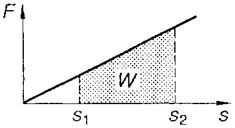
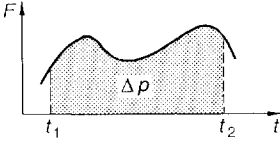
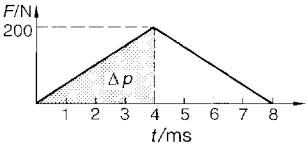
Übersicht A-44 (Fortsetzung)

Mantelflächen von Rotationskörpern (Komplanation)		
um x-Achse	um y-Achse	$y = 3x + 5 \quad x_1 = 0, x_2 = 3$
Kurve $y = f(x)$	$x = g(y)$	$y' = 3$
		$M_x = 2\pi \int_0^3 (3x + 5) \sqrt{1 + 3^2} dx$ $M_x = 2\pi \sqrt{10} \int_0^3 (3x + 5) dx$ $M_x = 2\pi \sqrt{10} \left[\frac{3}{2} x^2 + 5x \right]_0^3 = 367,6$
$M_x = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} dx$	$M_y = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$	
Parameterform $x = \varphi(t); y = \psi(t)$		$r = \sin \varphi \quad \varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi$
$M_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \psi \cdot \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2} dt$	$M_y = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \varphi \cdot \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2} dt$	$\frac{dr}{d\varphi} = \cos \varphi$ $M_x = 2\pi \int_0^\pi r \sin \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} d\varphi$ $= 1$
Polarkoordinaten $r = f(\varphi)$		
$M_x = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r \sin \varphi \cdot \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi$	$M_y = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r \cos \varphi \cdot \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi$	$M_x = 2\pi \int_0^\pi r \sin \varphi d\varphi = 2\pi \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi$ $= \pi [\varphi - \sin \varphi \cos \varphi]_0^\pi = \pi^2$
Volumen von Rotationskörpern (Kubatur)		
um x-Achse	um y-Achse	$y = 3x + 5; \quad x_1 = 0, x_2 = 3$
Kurve $y = f(x)$	$x = g(y)$	um y-Achse
$V_x = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$	$V_y = \pi \int_{y_1}^{y_2} (g(y))^2 dy$ $V_y = \pi \int_{x_1}^{x_2} x^2 y' dx$	$x = \frac{1}{3}(y - 5); \quad y' = 3$ $V_y = \frac{\pi}{9} \int_0^3 (y - 5)^2 \cdot 3 dx = \frac{\pi}{3} \int_0^3 (3x)^2 dx$ $V_y = 3\pi \int_0^3 x^2 dx = \pi [x^3]_0^3 = 27\pi$

Übersicht A-44 (Fortsetzung)

Parameterform $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$		
$V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} \psi^2 \dot{\varphi} dt$	$V_y = \pi \int_{t_1}^{t_2} \varphi^2 \dot{\psi} dt$	$x = \varphi(t) = \frac{1}{t}; \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 2$ $\dot{\varphi} = -\frac{1}{t^2}; \quad y = \psi(t) = 1 + t$ $V_x = \pi \int_1^2 (1+t)^2 \cdot \frac{1}{t^2} dt = \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{t^2} + \frac{2}{t} + 1 \right) dt$ $V_x = \pi \left[-\frac{2}{t^3} - \frac{1}{t^2} + t \right]_1^2 = 5,5\pi$
Polarkoordinaten $r = f(\varphi)$		
x-Achse: $V_x = \pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \sin^2 \varphi \left \frac{dr}{d\varphi} \cos \varphi - r \sin \varphi \right d\varphi$ y-Achse: $V_y = \pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \cos^2 \varphi \left \frac{dr}{d\varphi} \sin \varphi + r \cos \varphi \right d\varphi$		$r = \text{const} = R, \quad 0 \leq \varphi < \pi$ $V_x = \pi R^2 \int_0^\pi \sin^3 \varphi R d\varphi = \pi R^3 \int_0^\pi \sin^3 \varphi d\varphi = \frac{4\pi}{3} R^3$ wobei $\int_0^\pi \sin^3 t dt = \int_0^\pi \sin t (1 - \cos^2 t) dt$ $= -\cos \varphi + \frac{1}{3} \cos^3 \varphi + \frac{2}{3}$

Übersicht A-45. Anwendung der Integralrechnung in der Physik.

allgemein	Beispiel
Arbeit	
$W = \int F(s) ds$ 	Federkraft $F = cs$ $W = \int_{s_1}^{s_2} cs ds$ $W = \frac{1}{2} c(s_2^2 - s_1^2)$ 
Impuls	
$\Delta p = \int F(t) dt$ 	Kraftverlauf eines Schlägers auf einen Golfball  $\Delta p = \int_0^{4 \text{ ms}} F(t) dt = \frac{1}{2} \cdot 200 \text{ N} \cdot 4 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 0,4 \text{ Ns}$

Übersicht A-45 (Fortsetzung)

statische Momente, Schwerpunkte

homogenes, ebenes Kurvenstück, $y = f(x)$ Gesamtlänge (\cong Gesamtmasse, da $q \equiv \text{const}$):

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Schwerpunkt $\zeta = (x_s, y_s)$ ist gegeben durch

$$x_s = \frac{1}{L} \int_a^b x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx =: \frac{1}{L} \cdot M_y$$

$$y_s = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx =: \frac{1}{L} M_x$$

M_x und M_y heißen *statische Momente* der Kurve; aus $M_x = L \cdot y_s$, $M_y = L \cdot x_s$ ergibt sich ihre Interpretation als gemittelte Drehmomente.

Ist allgemeiner das Kurvenstück in Parameterform $(x, y) = (\varphi(t), \psi(t))$, $t_1 \leq t \leq t_2$, gegeben, so ist

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t)} dt,$$

$$x_s = \frac{1}{L} \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t)} dt,$$

$$y_s = \frac{1}{L} \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t)} dt.$$

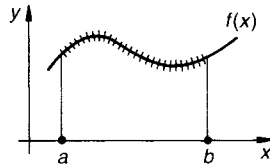
Der Spezialfall Polarkoordinaten:

$x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ und $r = r(\varphi)$, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ ist enthalten, und man hat in dieser allgemeinen Parameterform

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2(\varphi) + \dot{r}^2(\varphi)} d\varphi$$

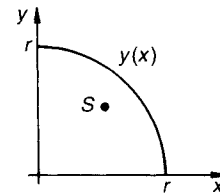
$$x_s = \frac{1}{L} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\varphi) \cos \varphi \sqrt{r^2(\varphi) + \dot{r}^2(\varphi)} d\varphi$$

$$y_s = \frac{1}{L} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\varphi) \sin \varphi \sqrt{r^2(\varphi) + \dot{r}^2(\varphi)} d\varphi$$



$$y(x) = \sqrt{r^2 + x^2}, \quad 0 \leq x \leq r,$$

(Graphenform)



$$L = \int_0^r \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx$$

$$= r \int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = \left[r \cdot \arcsin \frac{x}{r} \right]_0^r = \frac{\pi}{2} r$$

$$M_y = r \int_0^r \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = [-r \sqrt{r^2 - x^2}]_0^r = r^2$$

$$M_x = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \int_0^r r dx = r^2$$

$$x_s = \frac{r^2}{\frac{\pi}{2} r} = \frac{2r}{\pi} = y_s \quad (\text{also etwa } 0,63 r)$$

Übersicht A-45 (Fortsetzung)

homogenes, ebenes Flächenstück

Sei $y = f(x) \geq 0$ und F sei die Fläche unterhalb des Graphen gemäß Skizze. Dann sind

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad (\text{Flächeninhalt})$$

$$M_y = \int_a^b x f(x) dx, \quad M = \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx$$

(statische Momente)

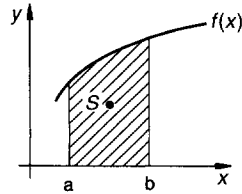
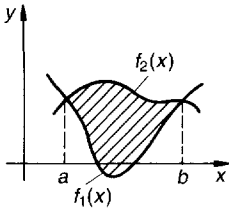
$$x_s = \frac{M_y}{A} \quad \text{und} \quad y_s = \frac{M_x}{A} \quad (\text{Koordinaten des Flächenschwerpunktes})$$

Ist F von zwei Funktionsgraphen begrenzt (gemäß Skizze), so sind

$$A = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$$

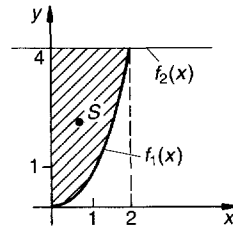
$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x)) dx$$

$$M_y = \int_a^b x (f_2(x) - f_1(x)) dx$$



$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = 4,$$

$$F = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4 \}$$



$$A = \int_0^2 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 = \frac{16}{3}$$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^2 (16 - x^4) dx = \left[8x - \frac{1}{10} x^5 \right]_0^2 = 12,8$$

$$M_y = \int_0^2 x (4 - x^2) dx = \left[2x^2 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^2 = 4$$

$$x_s = \frac{4}{\frac{16}{3}} = \frac{3}{4}, \quad y_s = \frac{12,8}{\frac{16}{3}} = \frac{12}{5}$$

Trägheitsmomente

allgemeine physikalische Definition

$$I = \int_{\text{Vol}} r^2 dm \quad dm = d(\rho V) = \rho dV \quad \text{für } \rho = \text{const}$$

$dV = \text{Volumenelement}$
 $r = \text{Abstand von } dm \text{ zur Drehachse}$

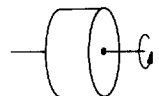
Das Trägheitsmoment eines Massenpunktes m bezüglich der Rotation um einen Punkt, Abstand r beträgt

$$I = m \cdot r^2$$

Drehpunkt

Hieraus erhält man durch Aufsummieren die wichtige Formel

$$I_{\text{Scheibe}} = \frac{1}{2} MR^2 \quad (\text{Trägheitsmoment einer Scheibe, Masse } M, \text{ Radius } R \text{ bzg. Rotation um Scheibenachse})$$



Übersicht A-45 (Fortsetzung)

Trägheitsmoment eines Kurvenbogens

Bei Rotation des „Drahtes“ $\{(x, f(x)) \mid a \leq x \leq b\}$ um die x -Achse bzw. y -Achse

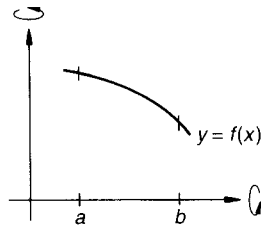
$$I_x = \int_a^b y^2(x) ds(x) = \int_a^b y^2(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

$$I_y = \int_a^b x^2 ds(x) = \int_a^b x^2 \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

In Parameterform $(x, y) = (\varphi(t), \psi(t))$ ergibt sich

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} \psi^2(t) \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t)} dt$$

$$I_y = \int_{t_1}^{t_2} \varphi^2(t) \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t)} dt$$



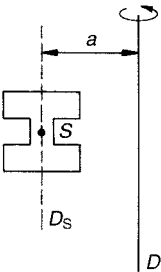
Trägheitsmoment einer Fläche

äquatoriales Trägheitsmoment der Fläche A

allgemein

$$I_x = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A x^2 dA$$

(dA Flächenelement)



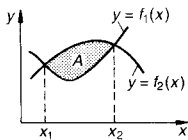
Satz von Steiner

$$I_D = I_{D_S} + A a^2$$

I_{D_S} := Trägheitsmoment bezüglich der durch den Schwerpunkt S parallel verschobenen Drehachse (D_S)

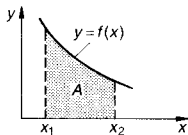
A = Flächeninhalt

a = Abstand Schwerpunkt-Drehachse (D)



$$I_x = \frac{1}{3} \int_{x_1}^{x_2} (f_2^3(x) - f_1^3(x)) dx$$

$$I_y = \int_{x_1}^{x_2} x^2 (f_2(x) - f_1(x)) dx$$



$$I_x = \frac{1}{3} \int_{x_1}^{x_2} (f(x))^3 dx$$

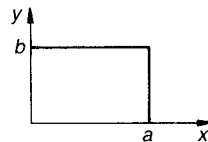
$$I_y = \int_{x_1}^{x_2} x^2 f(x) dx$$

polares Trägheitsmoment (Ursprung)

$$I_p = \int_A r^2 dA = I_x + I_y$$

zentrifugales Trägheitsmoment

$$I_{xy} = \int_A xy dA$$



$f(x) = b$

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^b y^2 a dy = a \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^b = \frac{ab^3}{3}$$

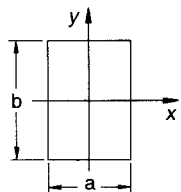
$$I_y = \int_A x^2 dA = \int_0^a x^2 b dx = b \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{a^3 b}{3}$$

$$I_p = I_x + I_y = \frac{ab^3 + a^3 b}{3}$$

Bezug auf den Schwerpunkt

$$I_x = \frac{1}{12} ab^3$$

$$I_y = \frac{1}{12} a^3 b$$

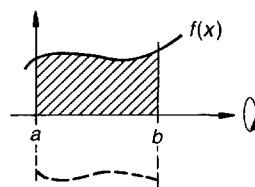


Übersicht A-45 (Fortsetzung)

Trägheitsmoment eines Rotationskörpers

Der Rotationskörper K entstehe durch Rotation der Fläche $\{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ um die x -Achse. Dann ist das Trägheitsmoment von K gleich

$$I_x = \frac{\pi}{2} \int_a^b (f(x))^4 dx$$



Übersicht A-46. Kurvenintegrale.

Sei C eine parametrisierte Kurve $\{(x(t), y(t)), a \leq t \leq b\}$, gegeben seien ferner zwei auf C stetige Funktionen $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ (Vektorfeld). Dann heißt das Integral

$$\int_C P dx + Q dy$$

Linien- oder Kurvenintegral (längs C), und es wird wie folgt berechnet:

$$\int_C P dx + Q dy = \int_a^b (P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)) dt.$$

Dabei ist das Integral unabhängig bezüglich der speziellen Wahl der Parametrisierung von C – im allgemeinen ist das Integral aber abhängig vom Verlauf von C . Das heißt: Ist \tilde{C} eine andere Kurve mit gleichen Endpunkten A und B , so ist im allgemeinen

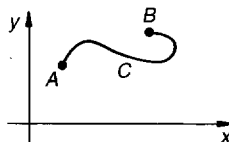
$$\int_C P dx + Q dy \neq \int_{\tilde{C}} P dx + Q dy \quad (\text{Wegabhängigkeit})$$

Ist $A = B$, so spricht man von geschlossenen Integralen. Ein Kurvenintegral ist offenbar wegunabhängig, wenn alle entsprechenden Integrale des „Vektorfeldes“ $(P(x, y), Q(x, y))$ längs geschlossener Wege verschwinden. Es gilt folgendes Fundamentalkriterium (Satz von Poincaré):

Satz (Exaktheit und Wegunabhängigkeit)

Seien $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ differenzierbare Funktionen in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, welches keine Löcher haben darf! Dann sind äquivalent:

- (1) $\int_C P dx + Q dy$ hängt nur von den Endpunkten A, B der Kurve $C \subset \Omega$ ab
- (2) $\oint_C P dx + Q dy = 0$ für alle geschlossenen Kurven C in Ω
- (3) $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$ (Exaktheitsbedingung)



Übersicht A-46 (Fortsetzung)

(4) Es gibt eine sogenannte Potentialfunktion $f(x, y)$ des Vektorfeldes P, Q , das heißt: Es gibt eine Funktion

$$f \text{ auf } \Omega \text{ mit } P(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ und } Q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

Beispiel: $P(x, y) = 2xy^2 + xy$, $Q(x, y) = 2xy$, $C = \{(x, y) \mid x = t, y = t^2, 0 \leq t \leq 1\}$

Endpunkte von C sind $(0, 0)$ und $(1, 1)$.

Dann ist mit $dx = dt$, $dy = 2t dt = 2x dx$

$$\begin{aligned} \int_C P dx + Q dy &= \int_0^1 2xx^4 + xx dx + 2xx^2 2x dx \\ &= \int_0^1 (2x^5 + x^3 + 4x^4) dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{4}{5} = \frac{83}{60} \end{aligned}$$

Ist jetzt \tilde{C} parallel zu den Achsen – auch A mit B verbindend –,

$\tilde{C} = \{(x, 0) \mid 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(1, y) \mid 0 \leq y \leq 1\}$, so ist $\int_C P dx + Q dy$

$$= \int_0^1 0 dx + \int_0^1 2 \cdot 1 \cdot y dy = 1.$$

Beide Werte sind verschieden – die Exaktheitsbedingung ist schließlich verletzt:

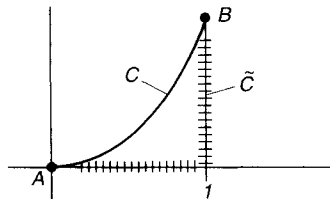
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4xy + x \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y.$$

Das Kurvenintegral einer skalaren Funktion $f(x, y)$, welche auf einer Kurve $C \subset \mathbb{R}^2$ stetig ist, $C = \{(x(t), y(t)) \mid t \in [a, b]\}$ lautet

$$\int_C f ds := \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt.$$

Dies ist ein Spezialfall des Kurvenintegrals zuvor, nämlich

$$P(x(t), y(t)) = \frac{f(x(t), y(t)) \dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}, \quad Q(x(t), y(t)) = \frac{f(x(t), y(t)) \dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}$$



Übersicht A-47. Mehrfachintegrale

Doppelintegrale

Sei $R = [a, b] \times [c, d]$ ein Rechteck in \mathbb{R}^2 und f stetig auf R . Dann ist

$$\int_R f dy dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \underbrace{\left(\int_c^d f(x, y) dy \right)}_{\text{Funktion von } x} dx,$$

das Integral wird also iteriert berechnet. Ist nun ein Gebiet A (krumme Begrenzungen) gegeben, so führt ein Ausschöpfungsprozeß mittels Rechtecke und anschließender Grenzwertbildung zum Integral

$$\int_A f(x, y) dx dy$$

Bedeutung: 1) $f \equiv 1 \Rightarrow \int_A dy dx = |A| \equiv \text{Flächeninhalt von } A$

2) $f > 0 \Rightarrow \int_A f(x, y) dy dx \equiv \text{Inhalt des säulenartigen}$

Körpers $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$

Übersicht A-47 (Fortsetzung)

Doppelintegrale

Ist die Fläche A in der Form

$$A = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

durch zwei Begrenzungsfunktionen $g_1(x)$, $g_2(x)$ gegeben (Skizze), so gilt:

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

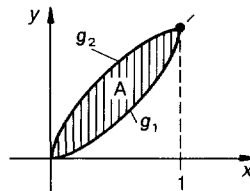
Beispiel: $f(x, y) = x^2 + 2xy$

$$g_1(x) = x^2$$

$$g_2(x) = \sqrt{x}$$

$$A = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

und A soll der durch $g_1(x)$ und $g_2(x)$ begrenzte Bereich sein, also



$$\begin{aligned} \int_A f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + 2xy) dy dx \\ &= \int_0^1 [x^2 y + xy^2]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 (x^2 \sqrt{x} + x \cdot x - x^4 - x x^4) dx \\ &= \int_0^1 (x^{\frac{5}{2}} + x^2 - x^4 - x^5) dx = \left[\frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{6} x^6 \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{7} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{53}{210} \end{aligned}$$

Die Substitutionsregel (Koordinaten-Transformation) lautet ($x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$):

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_{\tilde{A}} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J(u, v)| du dv$$

wobei $J(u, v)$ die Determinante der sogenannten Jacobischen Matrix ist,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \equiv \text{Jakobische Matrix der Koordinaten-Transformation}$$

und \tilde{A} ist das durch (u, v) beschriebene Gebiet A , d. h. $(u, v) \in \tilde{A} \Leftrightarrow (x(u, v), y(u, v)) \in A$. Für Polarkoordinaten $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ ist die Jakobi-Determinante gerade gleich r , also

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_{\tilde{A}} \tilde{f}(r, \varphi) r dr d\varphi$$

mit $\tilde{f}(r, \varphi) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$.

Anwendungen: Sei A eine Fläche in \mathbb{R}^2 (begrenzt durch $x = a$, $x = b$, $y = g_1(x)$, $y = g_2(x)$)

$$I_x = \int_A y^2 dx dy \quad \text{Axiales Flächenträgheitsmoment}$$

$$I_y = \int_A x^2 dx dy \quad \text{Axiales Flächenträgheitsmoment}$$

$$I_p = \int_A \underbrace{(x^2 + y^2)}_{r^2} dx dy \quad \text{Polares Flächenträgheitsmoment}$$

Übersicht A-47 (Fortsetzung)

Dreifach-Integrale, Volumen-Integrale

Es sei: $V \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge und $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion dreier Variablen x, y, z . Dann ist das Volumen-Integral

$$\int_V f(x, y, z) dV = \int_V f(x, y, z) dx dy dz$$

erklärbar als (additive) Zusammensetzung von Integralen über Würfel (welche als Grenzwert die Menge V ausschöpfen). Ist W der Würfel $a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2, a_3 \leq z \leq b_3$, so ist

$$\int_W f dV = \int_{a_3}^{b_3} \underbrace{\left(\int_{a_2}^{b_2} \underbrace{\left(\int_{a_1}^{b_1} f(x, y, z) dx \right)}_{\text{Funktion von } y, z} dy \right)}_{\text{Funktion von } z} dz$$

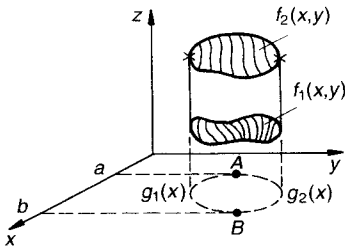
Beispiel: $f(x, y, z) = x^2 - 2yz + \frac{1}{z+2}, \quad W = [0, 1]^3$

$$\begin{aligned} \int_W f dV &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(x^2 - 2yz + \frac{1}{z+2} \right) dx \right) dy \right) dz = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left[\frac{1}{3} x^3 - 2xyz + \frac{x}{z+2} \right]_0^1 dy \right) dz \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{3} - 2yz + \frac{1}{z+2} \right) dy \right) dz = \int_0^1 \left[\frac{1}{3} y - zy^2 + \frac{y}{z+2} \right]_0^1 dz \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} - z + \frac{1}{z+2} \right) dz = \left[\frac{1}{3} z - \frac{1}{2} z^2 + \log |z+2| \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \log \frac{3}{2} = \log \frac{3}{2} - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Der häufig auftretende Fall, daß über einen „Säulenkörper“ integriert wird, sei an einem Beispiel durchgeführt.

Beispiel: Es sei V definiert durch die Bedingungen $a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)$. Dann ist

$$\int_V f dV = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$



Übersicht A-47 (Fortsetzung)

Dreifachintegrale

und für $a = 0$, $b = 2$, $g_1(x) = \frac{1}{2}x$, $g_2(x) = \sqrt{x}$, $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 1 + x^2 - y^2$,
 $f(x, y, z) = 1$ ist

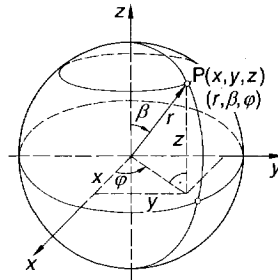
$$\begin{aligned}\int_V f dV &= \int_0^2 \left(\int_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} \left(\int_0^{1+x^2-y^2} 1 dz \right) dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} (1 + x^2 + y^2) dy \right) dx \\&= \int_0^2 \left[y + yx^2 + \frac{1}{3}y^3 \right]_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^2 \left(x^2 + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{24}x^3 \right) dx \\&= \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{7}x^2 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{96}x^4 \right]_0^2 \\&= \sqrt{2} \left(\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{2}{7} \cdot 8 + \frac{2}{15} \cdot 4 \right) - 1 - 2 - \frac{1}{6} = \frac{436}{105} \cdot \sqrt{2} - \frac{19}{6}\end{aligned}$$

Bedeutung: Wird die Funktion $f(x, y, z) \equiv 1$ über einen Bereich $V \subset \mathbb{R}^3$ integriert, so folgt

$$\int_V 1 dV = \int_V dx dy dz = \text{Vol}(V) \text{ (Volumen)}.$$

Transformationsformel: Bei Einführung neuer Koordinaten muß die Determinante der Jacobi-Matrix berechnet und miteinbezogen werden, analog zum 2-dimensionalen Fall. Im Fall der häufig vorkommenden Kugelkoordinaten ist

$$\begin{aligned}x &= r \sin \beta \cos \varphi \\y &= r \sin \beta \sin \varphi \\z &= r \cos \beta\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}x &= r \sin \beta \cos \varphi \\y &= r \sin \beta \sin \varphi \\z &= r \cos \beta\end{aligned}$$

$$\cos \beta = \frac{z}{r};$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \beta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \beta \cos \varphi & r \cos \beta \cos \varphi & -r \sin \beta \sin \varphi \\ \sin \beta \sin \varphi & r \cos \beta \sin \varphi & r \sin \beta \cos \varphi \\ \cos \beta & -r \sin \beta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det J = r^2 \sin \beta$$

A.15 Summen, Folgen und Reihen

Übersicht A-48. Summen, Folgen und Reihen.

Summen

Unter Summen versteht man gewöhnlich die Addition endlich vieler Zahlen

$$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n;$$

unter Reihen dagegen die Addition unendlich vieler Summanden – letzteres wird über eine Grenzwertbetrachtung geführt.

Summen oder Reihen heißen alternierend, falls die Summanden abwechselnd verschiedene Vorzeichen haben.

Beispiele für Summen:

$$(1) \quad a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (a+(n-1)d) = \sum_{k=0}^{n-1} (a+kd) = n \cdot a + \frac{n}{2}(n-1)d$$

(diese Summe heißt arithmetische Summe; die Differenz aufeinanderfolgender Glieder ist konstant (d))

$$(2) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1) \quad (\text{ein Spezialfall von (1)})$$

$$(3) \quad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n = \frac{1}{3}n(n-1)(n+1)$$

$$(4) \quad 1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$$

$$(5) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$(6) \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

(7) Die geometrische Summe ist dadurch gekennzeichnet, daß der Quotient aufeinanderfolgender Glieder konstant ist. Das heißt:

$$a_1 = a_0 \cdot q, a_2 = a_1 \cdot q = a_0 \cdot q^2, \dots, a_n = a_0 \cdot q^n$$

$$\sum_{k=0}^n a_k = a_0 \sum_{k=0}^n q^k = a_0 (1 + q + q^2 + \dots + q^n) = a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Die geometrische Summe – ebenso wie die geometrische Reihe – hat eine außerordentliche, anwendungsbezogene Bedeutung:

Prozentuale Zuwächse, progressive Vorgänge werden durch Zahlenfolgen

$$a, aq, aq^2, \dots$$

beschrieben, wie z. B. die Zinsrechnung im Finanzwesen:

Vorgang 1: Ein Kapital (K_0) wird n Jahre mit Zinseszins verzinst.

$$\text{Zinssatz } i = \frac{p}{100} \quad (p \text{ heißt Zinsfuß})$$

$$\text{Auf-, Abzinsfaktor } q_+ = 1 + i \quad \text{bzw.} \quad q_- = 1 - i$$

K_n bezeichnet das Kapital am Ende der n -ten Zinsperiode (i. d. R. ein Jahr)

$$K_n = K_0 q_+^n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Übersicht A-48 (Fortsetzung)

Vorgang 2: Es werden während der Zinsperioden regelmäßige Einzahlungen konstanten Betrages (E) getätigt, welche mit $p\%$

- innerhalb der Zinsperiode linear
- desweiteren mit Zinseszins

verzinst werden. (z. B. monatliche Einzahlungen von 100 DM auf ein Sparbuch, Jahreszins 5%). Nach Ablauf von n Jahren beträgt das angesparte Kapital K_n (bei vorschüssigem Einzahlungsmodus)

$$K_n = m \cdot E \left(1 + \frac{m+1}{2m} \cdot \frac{p}{100} \right) \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Folgen

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (mit $a_i \in \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}) heißt konvergent, wenn es eine Zahl $a \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ gibt mit folgender Eigenschaft:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein N , so daß für $n \geq N$ gilt

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Man sagt dann: $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

Eine nicht konvergente Folge heißt divergent.

Regeln: 1) $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b \Rightarrow a_n + b_n \rightarrow a + b$

2) $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b \Rightarrow a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$

3) $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b \left\{ \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b} \right.$
und $b \neq 0$

4) $a_n \rightarrow a \Leftrightarrow |a_n - a| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

5) Sei $0 \leq b_n \leq a_n$.

Ist dann $a_n \rightarrow 0$, so gilt auch $b_n \rightarrow 0$.

Eine Funktion $f(x)$ heißt stetig in x_0 , falls gilt:

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0)$$

Der Ausdruck $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ bedeutet:

Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \rightarrow a$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$.

Beispiele: $\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$ (Eulersche Zahl)

$x^n \rightarrow 0 \Leftrightarrow |x| < 1$

$(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist divergent

$((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist divergent

Wichtiger Satz (Bolzano-Weierstraß)

Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge (in $\mathbb{R}(\mathbb{C})$), welche beschränkt ist – d.h. es gibt eine Konstante $K > 0$ mit $|a_n| \leq K$ für alle n – so gibt es eine unendliche Teilauswahl der a_n („Teilfolge“), welche konvergent ist.

Übersicht A-48 (Fortsetzung)

Reihen

Gegeben ist eine Folge von Summanden a_1, a_2, \dots . Man setzt

$$S_n := \sum_{k=1}^n a_k \quad (n\text{-te „Partialsumme“})$$

Dann: Die Reihe der a_k heißt *konvergent* \Leftrightarrow die Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent

$$\text{und } \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

Falls S_n nicht konvergent: Reihe divergent

Beispiele: konvergente Reihen

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

$$\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$$

$$\frac{1}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

$$2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots$$

$$\frac{1}{e} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \dots \text{ konvergent } \Leftrightarrow |q| < 1 \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

divergente Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \quad (= \infty)$$

(harmonische Reihe)

Wichtige Konvergenz-Tests:

$$\textcircled{1} \quad \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| < \infty \Rightarrow a_n \rightarrow 0 \quad (\text{aber nicht „}\Leftarrow\text{“})$$

$$\textcircled{2} \quad a_n \rightarrow 0 \quad \text{mit} \quad 0 < a_{n+1} < a_n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ konvergent} \quad (\text{Leibniz})$$

$$\textcircled{3} \quad \text{Gilt} \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1 \quad \text{für alle } n \geq n_0, \text{ so ist } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent (Quotientenkriterium)}$$

Übersicht A-49. Reihenentwicklung von Funktionen.

Potenzreihen

Satz von Taylor: Ist $f(x)$ im Intervall $a < x < b$ $(n+1)$ -mal differenzierbar, ist $x_0 \in]a, b[$, so ist

$$\left\| f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n \right\| \quad \text{Taylor-Formel}$$

wobei $R_n = R_n(x_0, h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \delta h)$ mit einem gewissen $0 \leq \delta \leq 1$ das sogenannte Lagrange-Restglied ist.

Falls nun $f(x)$ beliebig oft differenzierbar ist, falls ferner $R_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (was leider nicht immer gilt), so gewinnt man aus der Taylor-Formel die Taylor-Reihe/McLaurin'sche Reihe/analytische Entwicklung der Funktion f (um x_0). Im folgenden einige Spezialfälle.

Binomische Reihen

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!}$$

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 \pm \binom{n}{3} x^3 + \dots \quad |x| \leq 1$$

$$(1 \pm x)^{\frac{1}{2}} = 1 \pm \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2 \pm \frac{1}{16} x^3 - \frac{5}{128} x^4 \pm \frac{7}{256} x^5 - \frac{21}{1024} x^6 \pm \dots \quad |x| \leq 1$$

Exponentialfunktionen

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \quad |x| < \infty$$

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{x^2 \ln^2 a}{2!} + \dots \quad |x| < \infty$$

$a > 0$

Logarithmusfunktionen

$$\ln x = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots \quad 0 < x \leq 2$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad -1 < x \leq 1$$

$$\ln(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots\right) \quad -1 < x < 1$$

$$\ln \frac{(1+x)}{(1-x)} = 2 \operatorname{ar} \tanh x = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right) \quad |x| < 1$$

$$\ln \frac{(x+1)}{(x-1)} = 2 \operatorname{ar} \coth x = 2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \dots \right) \quad |x| > 1$$

Übersicht A-49 (Fortsetzung)

trigonometrische Funktionen

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad |x| < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad |x| < \infty$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 - \dots \quad 0 < |x| < \pi$$

zyklometrische Funktionen

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots \quad |x| < 1$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots \quad |x| < 1$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad |x| < 1$$

$$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \dots \quad |x| < 1$$

Hyperbelfunktionen

$$\sinh x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \dots \quad |x| < \infty$$

$$\cosh x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \dots \quad |x| < \infty$$

$$\tanh x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \dots \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \dots \quad 0 < |x| < \pi$$

Areafunktionen

$$\operatorname{ar} \sinh x = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots \quad |x| < 1$$

$$\operatorname{ar} \cosh x = \pm \left\{ \ln(2x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x^2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{4x^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{6x^6} \right\} \quad x > 1$$

$$\operatorname{ar} \tanh x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \quad |x| < 1$$

$$\operatorname{ar} \coth x = \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x^5} + \dots \quad |x| > 1$$

Übersicht A-49 (Fortsetzung)

Näherungen (ε sehr klein)

$$(1 \pm \varepsilon)^n \approx 1 \pm n\varepsilon \quad |\varepsilon| \ll 1$$

$$(a \pm \varepsilon)^n \approx a^n \approx a^n \left(1 \pm n \frac{\varepsilon}{a}\right)$$

$$\sqrt{1 \pm \varepsilon} \approx 1 \pm \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$\sqrt{a \pm \varepsilon} \approx \sqrt{a} \left(1 \pm \frac{\varepsilon}{2a}\right)$$

$$\frac{1}{1 \pm \varepsilon} \approx 1 \mp \varepsilon$$

$$\frac{1}{a \pm \varepsilon} \approx \frac{1}{a} \left(1 \mp \frac{\varepsilon}{a}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm \varepsilon}} \approx 1 \mp \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$\frac{1}{\sqrt{a \pm \varepsilon}} \approx \frac{1}{\sqrt{a}} \left(1 \mp \frac{\varepsilon}{2a}\right)$$

$$\sqrt[p]{1 \pm \varepsilon} \approx 1 \pm \frac{1}{p}\varepsilon$$

$$\frac{1}{\sqrt[p]{1 \pm \varepsilon}} \approx 1 \mp \frac{1}{p}\varepsilon$$

$$e^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon; \quad a^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon \ln a$$

$$\ln(1 + \varepsilon) \approx \varepsilon$$

$$\ln\left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right) \approx 2\varepsilon; \quad \ln(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 1}) \approx \varepsilon$$

$$\sin \varepsilon \approx \varepsilon; \quad \cos \varepsilon \approx 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2$$

$$\tan \varepsilon \approx \varepsilon; \quad \cot \varepsilon \approx \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\arcsin \varepsilon \approx \varepsilon; \quad \arctan \varepsilon \approx \varepsilon$$

$$\sinh \varepsilon \approx \varepsilon; \quad \cosh \varepsilon \approx 1 + \frac{\varepsilon^2}{2}$$

$$\tanh \varepsilon \approx \varepsilon; \quad \coth \varepsilon \approx \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\operatorname{ar sinh} \varepsilon \approx \varepsilon; \quad \operatorname{ar tanh} \varepsilon \approx \varepsilon$$

$$\text{allgemein: } f(\varepsilon) \approx f(0) + \varepsilon f'(0)$$

Diese Entwicklungen können für Näherungen verwendet werden, sowie die Taylorentwicklung selbst:

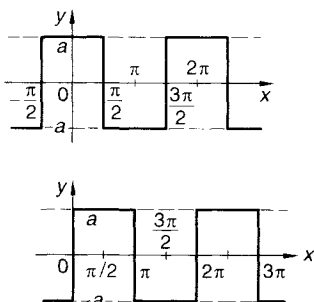
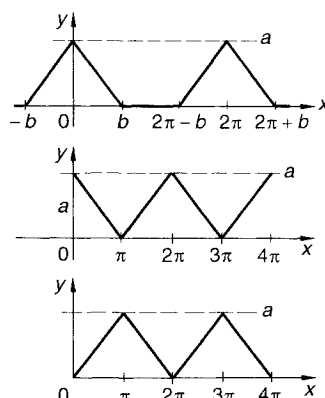
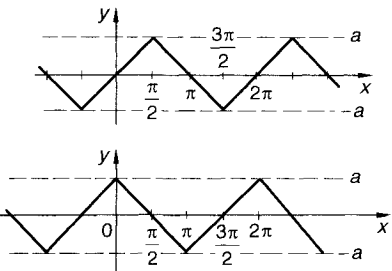
$$f(h) = f(0) + h \cdot f'(0) + R_2 \quad \text{mit } R_2 \approx h^2$$

A.16 Fourier-Reihen

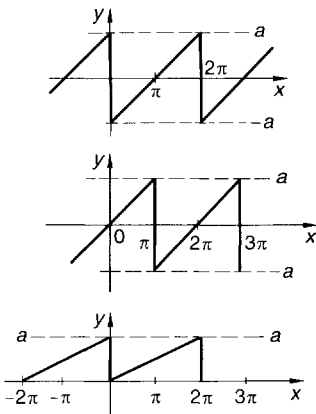
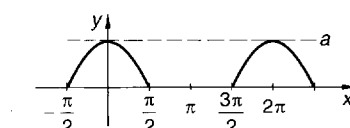
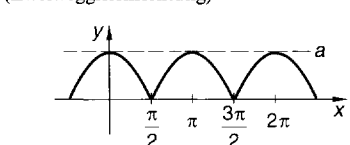
Übersicht A-50. Fourier-Reihen.

Kurvenform	Fourier-Reihe
<p>Rechteckimpulse</p>	$f(x) = \frac{4a}{\pi} \left\{ \frac{\cos b}{1} \sin x + \frac{\cos 3b}{3} \sin(3x) + \frac{\cos 5b}{5} \sin(5x) + \dots \right\}$ $f(x) = \frac{2a}{\pi} \left\{ \frac{b}{2} + \frac{\sin b}{1} \cos x + \frac{\cos(2b)}{2} \cos(2x) + \frac{\sin(3b)}{3} \cos(3x) + \dots \right\}$

Übersicht A-50 (Fortsetzung)

Kurvenform	Fourier-Reihe
<p>Rechteckkurve</p> 	$f(x) = \frac{4a}{\pi} \left\{ \cos x - \frac{\cos(3x)}{3} + \frac{\cos(5x)}{5} - + \dots \right\}$ $f(x) = \frac{4a}{\pi} \left\{ \sin x - \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots \right\}$
<p>Dreieckimpuls</p> 	$f(x) = \frac{ab}{2\pi} + \frac{2a}{\pi^2} \left\{ \frac{(1 - \cos b)}{1^2} \cos x + \frac{1 - \cos(2b)}{2^2} \cos(2x) + \frac{1 - \cos(3b)}{3^2} \cos(3x) + \dots \right\}$ $f(x) = \frac{a}{2} \left\{ 1 + \frac{8}{\pi^2} \left(\cos x + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \dots \right) \right\}$ $f(x) = \frac{a}{2} \left\{ 1 - \frac{8}{\pi^2} \left(\cos x + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \dots \right) \right\}$
<p>Dreieckskurve</p> 	$f(x) = \frac{8a}{\pi^2} \left\{ \frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin(3x)}{3^2} + \frac{\sin(5x)}{5^2} - + \dots \right\}$ $f(x) = \frac{8a}{\pi^2} \left\{ \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \dots \right\}$

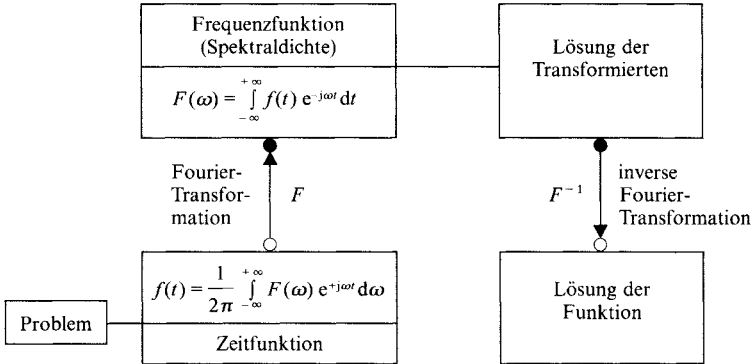
Übersicht A-50 (Fortsetzung)

Kurvenform	Fourier-Reihe
<p>Sägezahnkurve</p> 	$f(x) = -\frac{2a}{\pi} \left\{ \sin x + \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} + \dots \right\}$ $f(x) = \frac{2a}{\pi} \left\{ \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \dots \right\}$ $f(x) = \frac{a}{2} \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} + \dots \right) \right\}$
<p>gleichgerichteter Wechselstrom (Einweggleichrichtung)</p> 	$f(x) = \frac{a}{\pi} \left\{ 1 + \frac{\pi}{2} \cos x + \frac{2}{1 \cdot 3} \cos(2x) - \frac{2}{3 \cdot 5} \cos(4x) + \frac{2}{5 \cdot 7} \cos(6x) - \dots \right\}$
<p>gleichgerichteter Wechselstrom (Zweiweggleichrichtung)</p> 	$f(x) = \frac{2a}{\pi} \left\{ 1 + \frac{2}{1 \cdot 3} \cos(2x) - \frac{2}{3 \cdot 5} \cos(4x) + \frac{2}{5 \cdot 7} \cos(6x) - \dots \right\}$

A.17 Fourier-Transformation

Übersicht A-51. Fourier-Transformation.

Lösungsansatz

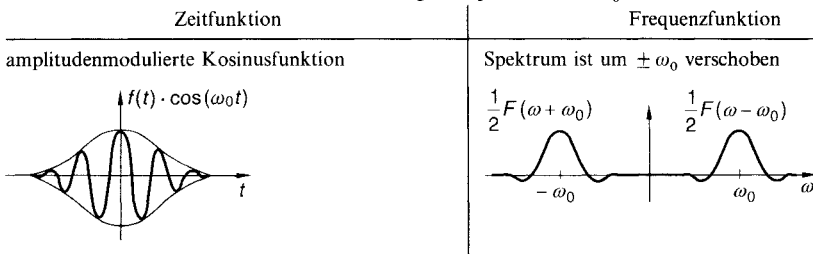


Zeitfunktion: zeitlicher Verlauf des Signals

Frequenzfunktion: Frequenzen, Amplituden und Phasen

Eigenschaft der Verschiebung

Verschiebung des Spektrums um ω_0



Eigenschaft der Ähnlichkeit

reziprokes Verhalten der Breite der Zeitfunktion Δt und der Breite der Frequenzfunktion $\Delta \omega$.

$$\Delta t \cdot \Delta \omega = 1$$

Physik: $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h$ Unschärferelation

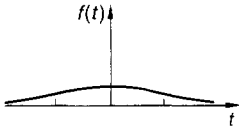
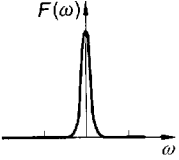
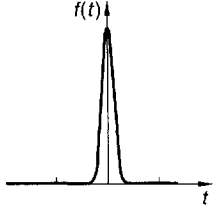
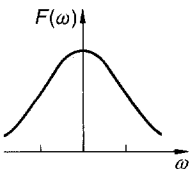
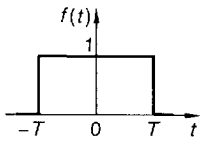
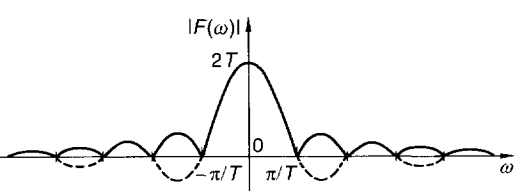
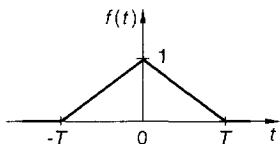
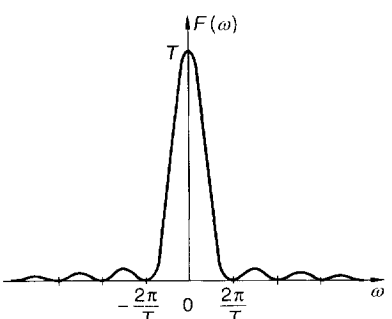
Δx Ortsschärfe; Δp_x Impulsschärfe in x -Richtung;

h Plancksches Wirkungsquantum; $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Nachrichtentechnik: $T \cdot 2B = 1$ Shannonsches Abtasttheorem

T Abtastintervall; B Bandbreite

Übersicht A-51 (Fortsetzung)

Eigenschaft der Ähnlichkeit	
Zeitfunktion	Frequenzfunktion
breite Zeitfunktion 	schmale Frequenzfunktion 
schmale Zeitfunktion 	breite Frequenzfunktion 
Fourier-Transformation	
Zeitfunktion	Frequenzfunktion
Rechteckimpuls $f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin(t) + \frac{1}{3} \sin(3t) + \frac{1}{5} \sin(5t) + \dots \right)$ 	$F(\omega) = \frac{2 \sin(\omega T)}{\omega}$ 
Dreieckimpuls $f(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} \cos(t) + \frac{1}{3^2} \cos(3t) + \frac{1}{5^2} \cos(5t) + \dots \right)$ 	$F(\omega) = \frac{4 \sin^2(\omega T/2)}{T \omega^2}$ 

Übersicht A-51 (Fortsetzung)

Fourier-Transformation	
Zeitfunktion	Frequenzfunktion
<p>Impuls einer \cos^2-Funktion</p> $f(t) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2T} \cdot t\right)$	$F(\omega) = \frac{\sin(\omega T)}{\omega T} \cdot \frac{T}{1 - \left(\frac{\omega T}{\pi}\right)^2}$
<p>Impuls einer Gauß-Funktion</p> $f(t) = e^{-t^2/2T^2}$	$F(\omega) = \sqrt{2\pi} \cdot T \cdot e^{-\frac{1}{2}(\omega T)^2}$
<p>Exponentialimpuls</p> $f(t) = e^{-t/T}$	$F(\omega) = \frac{T}{1 + j\omega T}$
<p>Einheitsimpuls (Dirac-Impuls)</p> $f(t) = \delta(t)$	$F(\omega) = 1$

A.18 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Differentialgleichungen sind Gleichungen, bei welchen als Lösungen Funktionen gesucht sind. Handelt es sich bei diesen gesuchten Funktionen um solche einer einzigen Variablen, so spricht man von gewöhnlichen Differentialgleichungen – ansonsten von „partiellen Differentialgleichungen“. Die allgemeine (oder implizite) Form einer gewöhnlichen Differentialgleichung lautet

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

und man nennt die höchste in der Gleichung auftretende Ableitungsordnung der zu suchenden Funktion $y(x)$, die – in $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ eingesetzt – der Gleichung genügt, die Ordnung der Differentialgleichung. Kann die Gleichung $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ explizit nach $y^{(n)}$ aufgelöst werden, so liegt mit

$$y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$$

die allgemeine, explizite Form einer Differentialgleichung n -ter Ordnung vor.

$$\text{z. B.: } x \cdot e^{yy''} = 1 \Leftrightarrow y'' = \frac{-1}{y} \ln x$$

Bei mehreren, gekoppelten Gleichungen für mehrere (ebensoviele) gesuchte Funktionen spricht man von Differentialgleichungssystemen; Differentialgleichungen höherer Ordnung können in der Regel in Systeme 1. Ordnung überführt werden.

In Physik und Technik sind insbesondere die beiden (expliziten) Grundtypen wichtig:

$$y' = f(x, y) \quad (\text{Differentialgleichung 1. Ordnung})$$

$$y'' = f(x, y, y') \quad (\text{Differentialgleichung 2. Ordnung})$$

A.18.1 Differentialgleichung $y' = f(x, y)$

Es sei $f: I \times M \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion; I und M seien Intervalle in \mathbb{R} . Gesucht ist eine Funktion $y: \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$, welche differenzierbar ist und für die die Wohldefiniertheitsbedingung $\tilde{I} \subset I$ und $y(\tilde{I}) \subset M$ gilt, so daß

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{für alle } x \in \tilde{I}$$

identisch erfüllt ist. Solche Differentialgleichungen haben i. a. viele Lösungen, nämlich

- a) eine Funktionsschar $y_\lambda(x)$,
(die „allgemeine Lösung“)
abhängig von einem reellen Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$
- b) sogenannte „singuläre Lösungen“,
das sind solche, die in der allgemeinen Lösung nicht vorkommen

Beispiel:

Für die Differentialgleichung

$$y' = x(y - 2)^2$$

hat man die Lösungen

$$y_\lambda(x) = \frac{2}{\lambda - x^2} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

und

$$y = \text{const} = 2$$

Zentrale Bedeutung für die gesamte Theorie und Praxis der Differentialgleichungen hat der Existenz- und Eindeigkeitssatz.

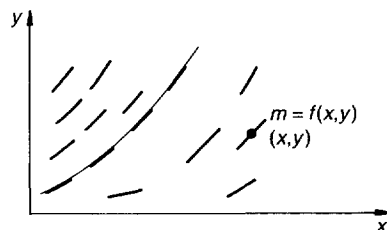
Theorem (Existenz- und Eindeigkeitssatz)

Es sei $f: I \times M$ stetig und sei $x_0 \in I$. Dann hat für jedes $y_0 \in M$ das sogenannte Anfangswertproblem (AWP)

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

mindestens eine Lösung. Ist die Funktion f sogar noch differenzierbar auf $I \times M$ (allgemeiner: lokal gleichmäßig lipschitzstetig bzgl. y), so hat das Anfangswertproblem genau eine Lösung. (Die Vorgabe von y_0 kann also als Parameter λ der allgemeinen Lösung (lokal um x_0) dienen).



Eine *geometrische* Vorstellung der Lösungsschar der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ bekommt man durch Zeichnen des Richtungsfeldes: Ist nämlich $y(x)$ eine Lösung, so ist $y'(x)$ einerseits die Steigung an diese Kurve in x und andererseits gleich dem Wert $f(x, y(x))$. Durch Zeichnen vieler kleiner Steigungsgeraden erhält man das Richtungsfeld und durch glattes Verbinden gelangt man zu den Lösungskurven.

A.18.2 Lineare Differentialgleichung

1. Ordnung

Sie lautet:

$$y' + g(x)y = h(x)$$

mit stetigen Funktionen g und h auf einem Intervall I . Die Gleichung heißt homogen $\Leftrightarrow h(x) = 0$, sonst inhomogen. Es gibt mehrere Lösungsmöglichkeiten:

allgemein	Beispiel
<p>Methode 1 (Lösung nach Formel):</p> <p>$y(x)$ löst die gegebene Differentialgleichung \Leftrightarrow</p> $y(x) = \left[k + \int_{x_0}^x \left[h(t) e^{\int_{x_0}^t g(s) ds} \right] dt \right] e^{-\int_{x_0}^x g(s) ds}$ <p>Hierbei ist $k \in \mathbb{R}$ beliebig, $x_0 \in I$ beliebig. Offenbar gilt dann auch $y(x_0) = k$</p>	<p>$y' + 2y = 3x^2 + 1$</p> $y(x) = \left[k + \int_0^x ((3t^2 + 1) e^{2t}) dt \right] e^{-2x}$ $= k e^{-2x} + \left\{ 3 e^{2x} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \right\} e^{-2}$ $= k e^{-2x} + \frac{3}{2} x^2 - \frac{3}{2} x + \frac{5}{4} \quad (k \in \mathbb{R})$
<p>Methode 2 (Variation der Konstanten):</p> <p>Dies ist eine spezielle Form eines Ansatzverfahrens, welches in 2 Schritten verläuft:</p> <p>1. Lösung der homogenen Gleichung:</p> <p>Ist $G(x) = \int_{x_0}^x g(s) ds$ irgendeine Stammfunktion von $g(x)$, so ist die Gesamtheit aller Lösungen von $y' + g(x)y = 0$ durch</p> $y(x) = k e^{-G(x)}, \quad k \in \mathbb{R}$ <p>gegeben.</p> <p>2. „Variation der Konstanten“:</p> <p>Der spezielle Ansatz $y(x) = k(x) e^{-G(x)}$ führt auf die Bedingung $k'(x) e^{-G(x)} = h(x)$, also</p> $k(x) = \int_{x_0}^x [h(t) e^{G(t)}] dt \text{ in Übereinstimmung mit der angegebenen Formel.}$	<p>$y' + 2y = 3x^2 + 1$</p> $G(x) = \int_{x_0}^x 2 ds = 2x$ $\Rightarrow y(x) = k e^{-2x}, \quad k \in \mathbb{R}$ <p>Ansatz:</p> $y(x) = k(x) e^{-2x}$ $k(x) = \int_{x_0}^x [(3t^2 + 1) e^{2t}] dt$ $= \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{3}{2} x + \frac{5}{4} \right) e^{2x} + C$ $\Rightarrow y(x) = C \cdot e^{-2x} + \frac{3}{2} x^2 - \frac{3}{2} x + \frac{5}{4}, \quad C \in \mathbb{R}$

allgemein	Beispiel
<p>Methode 3 (Spezielle Ansatzmethode)</p> <p>Ist die Inhomogenität $h(x)$ von einem bestimmten Funktionstyp (z. B. ein Polynom) und ist der Zuwachsfaktor $g(x)$ ähnlichen Typs, so sind auch oftmals Lösungsansätze erfolgreich, bei der eine Lösung $y(x)$ ebenfalls von diesem Typ ist, dargestellt durch unbekannte Parameter, welche durch Einsetzen in die Differentialgleichung bestimmt werden. Hat man auf diese Weise eine Lösung y_{sp} der inhomogenen Differentialgleichung gefunden, so lautet die allgemeine Lösung</p> $y(x) = y_0(x) + y_{sp}(x) \quad \text{mit} \quad y'_0 + g(x)y_0 = 0.$	$y' + 2y = 3x^2 + 1$ <p>$y_0(x) := k e^{-2x}$ ist die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung. Für eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung macht man den Ansatz</p> $y(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ $y' + 2y = 2\alpha x + \beta + 2\alpha x^2 + 2\beta x + 2\gamma = 3x^2 + 1$ <p>Koeffizientenvergleich ergibt:</p> $\alpha = \frac{3}{2}, \quad \beta = -\frac{3}{2}, \quad \gamma = \frac{5}{4}$ $\Rightarrow y(x) = k e^{-2x} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}, \quad k \in \mathbb{R}$

A.18.3 Separierbare Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung ist von separierter Form, falls

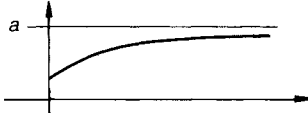
$$y' = h(x)g(y),$$

so daß man auch schreibt: $\frac{dy}{g(y)} = h(x) dx$

(die Variablen x und y erscheinen auf getrennten Seiten der Gleichung).

Eine Differentialgleichung heißt separierbar, falls man sie durch Umformungen auf separierte Form bringen kann.

allgemein	Beispiel
<p>Lösung der separierten Differentialgleichung</p> $y' = h(x)g(y).$ <p>Zunächst Achtung: Jede Nullstelle von $g(y)$ liefert eine konstante, singuläre Lösung:</p> $g(y_0) = 0 \Rightarrow y(x) = y_0 \quad \text{ist eine Lösung.}$ <p>Allgemeine Lösungen lassen sich nur in Intervallen I angeben, in denen $g(y)$ nullstellenfrei ist.</p> <p>Vorgehensweise:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Integriere $\frac{1}{g(y)}$ bzgl. y, also $G(y) := \int \frac{1}{g(t)} dt$ 2. Integriere $h(x)$ bzgl. x, also $H(x) := \int h(t) dt$ 	$y' = k(a-y)^n$ <p>(chemische Reaktionsgleichung n-ter Ordnung)</p> <p>Singuläre Lösung: $y \equiv a$</p> <p>Allgemeine Lösung:</p> $\frac{y'}{(a-y)^n} = k$ $\Leftrightarrow \frac{1}{1-n} (a-y)^{1-n} = kx + c$ $\Leftrightarrow y(x) = a - ((1-n)kx + c)^{\frac{1}{1-n}}, \quad C \in \mathbb{R}$ <p>$y' = ky(a-y)$ (logistische Differentialgleichung)</p>

allgemein	Beispiel
<p>3. Die implizite Darstellung der allgemeinen Lösung lautet</p> $G(y) = H(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$ <p>Umstellen nach y (sofern möglich) liefert die explizite Lösung $y(x)$.</p>	<p>Singuläre Lösungen $y \equiv 0$ oder $y \equiv a$ Allgemeine Lösung: $\frac{y'}{y(a-y)} = k$ $\Leftrightarrow \frac{1}{a} \left\{ \frac{1}{y} + \frac{1}{a-y} \right\} y' = k$ $\Leftrightarrow \ln y - \ln(a-y) = akx + c$ $\Leftrightarrow \frac{y}{a-y} = k e^{akx}, \quad k > 0$ $\Leftrightarrow y(x) = a - \frac{a}{1 + k e^{akx}}$</p>  <p>logistische Gleichung für $k > 0$</p>

Besonders wichtige Beispiele für separierte Differentialgleichungen liefern die sogenannten „homogenen“ Differentialgleichungen (nicht zu verwechseln mit den „homogenen linearen“ Differentialgleichungen). Historisch bedingt, heißt eine Differentialgleichung der Form

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

homogen. Geometrisch bedeutet dies, daß das Richtungsfeld auf allen Halbstrahlen $y = \alpha x$ konstant ist.

allgemein	Beispiel
<p>Die Differentialgleichung ist separierbar:</p> <p>Man setzt $u = \frac{y}{x}$, also</p> $y(x) = xu(x) \Rightarrow y'(x) = u(x) + xu'(x)$ $\Rightarrow u'(x) = (y'(x) - u(x))/x = \frac{f(u) - u}{x}$ <p>Dies ist eine separierte Differentialgleichung für u. Ist $u(x)$ bekannt, so erhält man die Lösung $y(x)$ der ursprünglichen Differentialgleichung aus dem Transformationsansatz,</p> $y(x) = x \cdot u(x).$	<p>$xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$, also</p> $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2};$ <p>mit $u = \frac{y}{x}$ erhalten wir eine Differentialgleichung für u, nämlich</p> $u' = \frac{u + \sqrt{1 + u^2} - u}{x} = \frac{1}{x} \sqrt{1 + u^2}$ $\Leftrightarrow \frac{u'}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow \operatorname{arsinh} u = \ln x + c$ $\Rightarrow 2u = 2 \sinh(\ln x + c)$ $= e^{(\ln x + c)} - e^{-(\ln x + c)}$ $= k x - \frac{1}{k x } \quad (k > 0)$ $\Rightarrow y = \frac{1}{2} k x^2 - \frac{1}{2k} \quad (k \in \mathbb{R})$

A.18.4 Exakte Differentialgleichungen

Symbolisch kann die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ auch so geschrieben werden:

$$dy - f(x, y) dx = 0,$$

so daß man mit einer zunächst willkürlichen Aufspaltung $f(x, y) = -\frac{g(x, y)}{h(x, y)}$ auf die Form

$$g(x, y) dx + h(x, y) dy = 0$$

kommt. Angenommen, es gäbe eine Funktion $V(x, y)$ („Potential“) mit

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x, y) = g(x, y)$$

und

$$\frac{\partial V}{\partial y}(x, y) = h(x, y),$$

dann wird durch die Gleichung $V(x, y) = \text{const}$ eine implizit gegebene Abhängigkeit zwischen x und y erzwungen, lokal ist $y = y(x)$, und man hat

$$\frac{d}{dx} V(x, y(x)) = 0 = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dx}.$$

Das bedeutet: Die Gleichung $y(x, y) dx + h(x, y) dy = 0$ ist erfüllt. Die Theorie ist in folgendem Theorem zusammengefaßt, welches sagt, wann eine solche Potentialfunktion existiert und wie man sie berechnet.

Theorem (Exakte Differentialgleichungen)

Gegeben ist eine Differentialgleichung in der Form $g(x, y) dx + h(x, y) dy = 0$, wobei g und h stetige Funktionen sind auf einem 2-dimensionalen Bereich, welcher keine Löcher hat („einfach zusammenhängendes Gebiet“). Dann sind äquivalent

- (a) Die Differentialgleichung ist exakt – d. h. per definitionem: Es gibt eine Potentialfunktion $V(x, y)$ mit

$$\frac{\partial V}{\partial x} = g \quad \text{und} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = h$$

- (b) Die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x, y)$$

ist überall erfüllt.

- (c) Das Kurvenintegral $\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} g dx + h dy$ ist wegunabhängig.

Folgerung: Ist eine Differentialgleichung in der Form $g(x, y) dx + h(x, y) dy = 0$ gegeben, so prüft man mittels Integrabilitätsbedingung (b), ob die Gleichung exakt ist. Ist dies der Fall, so läßt sich die Potentialfunktion $V(x, y)$ als Kurvenintegral finden,

$$\begin{aligned} V(x, y) &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} g dx + h dy \\ &= \int_a^b g(x(t), y(t)) x'(t) dt \\ &\quad + h(x(t), y(t)) y'(t) dt, \end{aligned}$$

wobei $[a, b] \ni t \rightarrow (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ eine Parametrisierung eines Weges von (x_0, y_0) nach (x, y) ist. Eine für viele Fälle praktische Methode besteht in folgender achsenparalleler Integration:

Setze

$$\begin{aligned} V(x, y) &= \int_{x_0}^x g(t, y) dt + C(y) \\ V(x, y) &= \int_{y_0}^y h(x, t) dt + D(x) \end{aligned}$$

und bestimme C und D durch Vergleich.

Beispiel:

$$2x dx + 4y dy = 0$$

Die Integrabilitätsbedingung (b) ist erfüllt. Dann ist

$$V(x, y) = \int 2t dt + C(y) = x^2 + C(y)$$

$$V(x, y) = \int 4t dt + D(x) = 2y^2 + D(x);$$

also ist $D(x) = x^2 + C$ und $C(y) = 2y^2 - C$, man hat

$$V(x, y) = x^2 + 2y^2 + C,$$

und die Gleichung

$$x^2 + 2y^2 = \text{const} =: r^2$$

liefert Ellipsen als Lösungskurven der Differentialgleichung.

Methode des „integrierenden Faktors“:

Die Differentialgleichung

$$g(x, y) dx + h(x, y) dy = 0$$

ist gleichwertig zu derjenigen, wenn man sie mit einer beliebigen Funktion $\mu(x, y)$ multipliziert ($\mu \neq 0$)

$$\underbrace{\mu(x, y) g(x, y)}_{\tilde{g}(x, y)} dx + \underbrace{\mu(x, y) h(x, y)}_{\tilde{h}(x, y)} dy = 0$$

Ist nun die Integrabilitätsbedingung (b) für die Differentialgleichung $g(x, y) dx + h(x, y) dy = 0$ verletzt, so versucht man durch geschickte Wahl eines sogenannten integrierenden Faktors $\mu(x, y)$, daß die neue Differentialgleichung $\mu(x, y) g(x, y) dx + \mu(x, y) h(x, y) dy = 0$ diese Bedingung erfüllt.

A.18.5 Lineare Differentialgleichung

2. Ordnung

Grundlegend für alle Schwingungsprobleme der Mechanik wie auch der Elektrotechnik ist die Differentialgleichung

$$y'' + ay' + by = h(x)$$

mit konstanten Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$ und einer – bis auf eventuelle Sprungstellen – stetigen Inhomogenität $h(x)$. Aufgrund der Linearität der Gleichung ist die Vorgehensweise so:

- (I) Man ermittelt die Gesamtheit aller Lösungen y_0 der homogenen Differentialgleichung,

$$y'' + ay' + by = 0;$$

dies ist eine von 2 reellen Parametern abhängende Funktionsschar.

- (II) Man versucht irgendwie, eine (einzige) Lösung y_{sp} der inhomogenen Gleichung

zu ermitteln. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet dann

$$y(x) = y_{sp}(x) + y_0(x),$$

wobei y_0 die Gesamtheit der Lösungen der homogenen Gleichung durchläuft.

Methode zu I:

Universelle Methode liefert der Ansatz $y_0(x) = e^{\lambda x}$ mit unbekanntem $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$\begin{aligned} y_0''(x) + ay_0'(x) + by_0(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 + a\lambda + b &= 0 \end{aligned}$$

mit den beiden Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.

Aus dem Lösungscharakter dieser quadratischen Gleichung ergeben sich 3 Fälle:

- ① $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

Dann sind alle Lösungen der homogenen Differentialgleichung von der Form

$$\begin{aligned} y_0(x) &= c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \\ \text{mit } c_1, c_2 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- ② $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1 = \lambda_2$:

Dann sind alle Lösungen der homogenen Differentialgleichung von der Form

$$\begin{aligned} y_0(x) &= e^{\lambda_1 x} (c_1 + c_2 x) \\ \text{mit } c_1, c_2 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- ③ λ_1 und λ_2 sind komplex (dann ist automatisch $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$):

Dann sind die Lösungen der homogenen Differentialgleichung von der Form

$$\begin{aligned} y_0(x) &= e^{\alpha x} \{c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x\} \\ \text{mit } c_1, c_2 &\in \mathbb{R} \\ \text{und } \lambda_1 &= \alpha + i\omega, \lambda_2 = \alpha - i\omega. \end{aligned}$$

Methoden zu II:

- 1) Geeignete Ansätze vom Typ der Inhomogenität $h(x)$

- 2) Grundlösungsverfahren, Faltungsintegral: Man wählt die Parameter c_1, c_2 so, daß die Lösung y_0 der homogenen Gleichung zusätzlich die Bedingungen

$$y_0(x_0) = 0, \quad y_0'(x_0) = 1$$

erfüllt (wobei x_0 fixiert ist). Dann ist

$$y_{sp}(x) = \int_{x_0}^x h(t) y_0(x_0 + x - t) dt$$

eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

3) Variation der Konstanten (der Lösungsschar der homogenen Differentialgleichung).

Beispiel:

$$y'' + 2y' + 2y = x^2 + x - 1$$

Mit $e^{\lambda x}$ löst man die homogene Gleichung,

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 2\lambda + 2 &= 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm i \\ \Rightarrow y_0(x) &= e^{-x} \{c_1 \cos x + c_2 \sin x\}; \end{aligned}$$

die inhomogene Gleichung löst man durch Ansatz:

$$y(x) = ax^2 + bx + c$$

mit unbekannten $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 2a + 2\{2ax + b\} + 2\{ax^2 + bx + c\} \\ = x^2 + x - 1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2ax^2 + x\{4a + 2b\} + 2a + 2b + 2c = x^2 + x - 1$$

$$\Leftrightarrow 2a = 1, \quad 4a + 2b = 1$$

$$\text{und } 2a + 2b + 2c = -1$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y(x) &= e^{-x} \{c_1 \cos x + c_2 \sin x\} \\ &+ \frac{1}{2}(x^2 - x - 1) \end{aligned}$$

A.18.6 Differentialgleichungen 2. Ordnung und Energie-Satz

Fehlt in der Differentialgleichung $y'' + ay' + by = 0$ der „Reibungsterm“ ay' (d.h. ist $a = 0$), so liegt ein Sonderfall der allgemeinen Form einer expliziten Differentialgleichung 2. Ordnung vor:

$$y'' = f(y)$$

Diese Gleichung kann man sofort einmal integrieren – mittels beidseitiger Multiplikation mit y' erhält man

$$y'' y' = y' f(y).$$

Ist nun $F(y) = \int f(y) dy$, so ist

$$\frac{d}{dx} (y')^2 = 2y' y'' \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx} F(y) = f(y) \cdot y',$$

also

$$y'' = f(y) \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{2} (y')^2 - F(y) = \text{const}},$$

was gewöhnlich als Energiesatz bezeichnet wird.

A.18.7 Spezielle Differentialgleichungen höherer Ordnung

Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten,

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y &= h(x), \\ \left(y^{(k)} = \frac{d^k}{dx^k} y \right) \end{aligned}$$

mit $a_k \in \mathbb{R}$ und gegebener Inhomogenität $h(x)$ werden so behandelt:

Erstens bestimmt man die Gesamtheit V_0 aller Lösungen der homogenen Gleichung ($h(x) = 0$). Diese Gesamtheit ist ein reell n -dimensionaler Raum und man erhält ihn so: Mit dem Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ mit unbekanntem $\lambda \in \mathbb{C}$ erhält man die Gleichwertigkeit von Differentialgleichung und polynomialer Gleichung, nämlich

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_0 y &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + a_0 \lambda &= 0 \end{aligned}$$

(charakteristische Gleichung)

In \mathbb{C} besitzt diese charakteristische Gleichung mit Vielfachheiten genau n Lösungen. Weil die Koeffizienten a_k reell sind, ist mit jeder Wurzel $\lambda \in \mathbb{C}$ auch $\bar{\lambda}$ eine Lösung der charakteristischen Gleichung gleicher Vielfachheit, so daß

sich folgende allgemeine Vorgehensweise ergibt:

- Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die reellen (paarweise verschiedenen) Nullstellen mit Vielfachheiten n_1, \dots, n_r ,
- Es seien $\alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \alpha_s \pm i\beta_s$ die (konjugiert) komplexen Nullstellen mit Vielfachheiten m_1, \dots, m_s

Dann ist der Lösungsraum V_0 gegeben durch $y \in V_0 \Leftrightarrow y(x)$ hat folgende Darstellung

$$y(x) = e^{\lambda_1 x} P_1(x) + \dots + e^{\lambda_r x} P_r(x) \\ + e^{\alpha_1 x} \{Q_1(x) \cos \beta_1 x + R_1(x) \sin \beta_1 x\} \\ + \dots + e^{\alpha_s x} \{Q_s(x) \cos \beta_s x + R_s(x) \sin \beta_s x\}$$

Hierbei ist P_k ein beliebiges Polynom vom Grad $< n_k$ ($k = 1, \dots, r$), Q_k und R_k sind beliebige Polynome vom Grad $< m_k$ ($k = 1, \dots, s$).

Zweitens sucht man irgendeine Lösung y_{sp} der inhomogenen Differentialgleichung, wobei geeignete Ansätze für y_{sp} vorteilhaft sind. Rechnerische Methoden liefern die Laplace-Transformation sowie die Variation aller Konstanten, welche bei der Lösung der homogenen Gleichung auftreten. Die allgemeine Lösung ergibt sich dann aus Gründen der Linearität der Differentialgleichung zu

allgemein	Beispiel
$y(x) = y_{sp}(x) + y_0(x)$ mit $y_0(x) \in V_0$	$y^{(4)} + 2y^{(2)} + 8y' + 5y = 5x^2 + 26x + 5$ Lösung der homogenen Gleichung mit e^{2x} , und die charakteristische Gleichung lautet $P(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 8\lambda + 5 = 0$, es gilt: $P(\lambda) = [(\lambda - 2)^2 + 1][\lambda + 1]^2$ mit den Nullstellen $\lambda_1 = -1$ (Vielfachheit 2) und $\lambda_2 = 2 \pm i$ (Vielfachheit 1) $y_0(x) = e^{-x} \{a_1 + b_1 x\} + e^{2x} \{a_2 \cos x + b_2 \sin x\}$ ist die allgemeine Darstellung der reellen Lösungen der homogenen Gleichung mit den 4 freien Parametern $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$. Für die inhomogene Gleichung macht man einen Polynomansatz gleichen Grades wie die vorliegende Inhomogenität: $y_{sp}(x) = ax^2 + bx + c$ $\Rightarrow y^{(4)} = 0, \quad y^{(2)} = 2a, \quad y' = 2ax + b, \quad \text{also}$ $2 \cdot 2a + 8(2ax + b) + 5(ax^2 + bx + c)$ $= 5x^2 + 26x + 5$ $\Leftrightarrow 5ax^2 + x\{16a + 5b\} + \{4a + 8b + 5c\}$ $= 5x^2 + 26x + 5$ $\Leftrightarrow 5a = 5, \quad 5b + 16a = 26, \quad 4a + 8b + 5c = 5$ $\Leftrightarrow a = 1, \quad b = 2, \quad c = -3$

A.19 Elemente der Wahrscheinlichkeitstheorie

A.19.1 Kombinatorik

Die Kombinatorik befaßt sich mit Anzahlproblemen endlicher Mengen (das sind Mengen mit endlich vielen Elementen). Eine typische Fragestellung lautet etwa: Auf wie viele Weisen kann man bei einer Menge mit n Elementen Teilmengen mit k Elementen entnehmen (wobei noch gewisse Bedingungen – wie die Reihenfolge der Elemente u. ä. – eine Rolle spielen können). Diese Anzahlprobleme lassen sich strukturieren in die Prozesse:

Permutationen, Kombinationen
(mit und ohne Wiederholungen) und
Variationen
(mit und ohne Wiederholungen).

Bezeichnungen:

Ist M eine Menge mit n Elementen, $M = \{a_1, \dots, a_n\}$, so schreibt man $|M| = n$ (manchmal auch $\#M = n$). Für $n \in \mathbb{N}$ ist $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$, $0! = 1$ und für $0 \leq k \leq n$ ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (\text{Binomialkoeffizient})$$

Grundregeln für Anzahlen bei endlichen Mengen:

- (1) $M_1 \cap M_2 = \emptyset \Rightarrow |M_1 \cup M_2| = |M_1| + |M_2|$
- (2) $|M_1 \times M_2| = |M_1| |M_2|$;
allgemein
 $|M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_k| = |M_1| |M_2| \cdots |M_k|$
- (3) $|P(M)| = 2^{|M|}$
 $(P(M) = \{N/N \text{ ist Teilmenge von } M\})$
- (4) $|M_1| = |M_2| \Leftrightarrow$ es gibt eine umkehrbar eindeutige (bijektive) Abbildung
 $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$

Permutation:

Sei $|M| = n$. Unter einer Permutation von M versteht man

- (a) eine bijektive Abbildung $\varphi: M \rightarrow M$
- (b) eine bijektive Abbildung
 $\varphi: \{1, \dots, n\} \rightarrow M$
- (c) ein – hinsichtlich der Aufreihung – modifiziertes Anordnen (Aufschreiben) aller Elemente von M
Beispiel: Alle Permutationen der 3elementigen Menge $M = \{a, b, c\}$ sind:
 $(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)$. Eine Permutation von M ist eine Anordnung der Elemente von M .

Satz (Permutationen)

$|M| = n \Rightarrow$ Es gibt $n!$ Permutationen von M

Ist $M = \{a_1, \dots, a_n\}$, also $|M| = n$, so kann man auf folgende 4 unterschiedliche Weisen sogenannte „ k -Proben“ von Elementen von M bilden, das heißt „ k -Plätze mit Elementen aus M belegen“; hierbei sei $k \in \mathbb{N}$

- I Es kommt auf die Reihenfolge an; Wiederholungen sind erlaubt
- II Es kommt auf die Reihenfolge an; Wiederholungen sind nicht erlaubt
- III Die Reihenfolge spielt keine Rolle; Wiederholungen sind erlaubt
- IV Die Reihenfolge spielt keine Rolle; Wiederholungen sind nicht erlaubt

I und II nennt man Variationen mit/ohne Wiederholung von n Elementen zur k -ten Klasse.

III und IV nennt man Kombinationen mit/ohne Wiederholung von n Elementen zur k -ten Klasse.

„Wiederholung“ bedeutet, daß in einem k -Tupel ein Element von M mehrmals auftreten kann.

Beispiel:

Sei $|M| = 4$, $M = \{a, b, c, d\}$ und $k = 2$

- zu I: $(a, a), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a),$
 $(a, d), (d, a), (b, b), (b, c), (c, b),$
 $(b, d), (d, b), (c, c), (c, d), (d, c)$
 und (d, d)
 (das sind $16 = 4^2$ Möglichkeiten)
- zu II: $(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (a, d),$
 $(d, a), (b, c), (c, b), (b, d), (d, b), (c, d)$
 und (d, c)
 $\left(\text{das sind } 12 = \frac{4!}{2!} = 4 \cdot 3 \text{ Möglich-} \right.$
 $\left. \text{keiten} \right)$
- zu III: $(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c),$
 $(b, d), (c, c), (c, d)$ und (d, d)
 $\left(\text{das sind } 10 = \binom{4+2-1}{2} \text{ Möglich-} \right.$
 $\left. \text{keiten} \right)$
- zu IV: $(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (d, b)$
 und (c, d)
 $\left(\text{das sind } 6 = \binom{4}{2} \text{ Möglichkeiten} \right)$

Satz (Grundformeln der Kombinatorik)

Es bezeichne $a_{n,k}(x)$ die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer n -elementigen Menge k -Proben zu entnehmen (mit x entweder Typ I, II, III oder IV)

$$a_{n,k}(\text{I}) = n^k$$

(geordnet, mit Wiederholung)

$$a_{n,k}(\text{II}) = \binom{n}{k} k! = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$$

(geordnet, ohne Wiederholung)

$$a_{n,k}(\text{III}) = \binom{n+k-1}{k}$$

(ungeordnet, mit Wiederholung)

$$a_{n,k}(\text{IV}) = \binom{n}{k}$$

(ungeordnet, ohne Wiederholung)

A.19.2 Wahrscheinlichkeiten

Das zugrundeliegende Konzept kann am besten im Falle eines endlichen „Ereignisraumes E “ entwickelt werden:

Es sei $E = \{w_1, \dots, w_n\}$ eine endliche Menge mit n Elementen. Jedes Element w_k stellt – als Teilmenge $\{w_k\} \subset E$ – ein sogenanntes Elementarereignis dar. Der Raum aller Ereignisse aus E ist nichts anderes als $P(E) = \{A \mid A \text{ ist Teilmenge von } E\}$, und ein Wahrscheinlichkeitsmaß p auf E ist eine Funktion

$$p: P(E) \rightarrow [0, 1]$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (1) $p(E) = 1$ (E heißt „sicheres Ereignis“)
- (2) $p(\emptyset) = 0$ (die leere Menge \emptyset ist das „unmögliche Ereignis“)
- (3) $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ für $A \cap B = \emptyset$ ($A \subset E$ mit $0 < p(A) < 1$ heißt „zufälliges Ereignis“)

Aus diesen definierenden Eigenschaften leiten sich folgende Rechenregeln ab:

- (1) $p(E \setminus A) = 1 - p(A)$
 $(E \setminus A = \{w \in E \mid w \notin A\})$
- (2) $p(B) \leq p(A)$ für $B \subseteq A$
- (3) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- (4) Ist $A = \{w_i \mid i \in I \subset \{1, \dots, n\}\}$,
 so ist $p(A) = \sum_{i \in I} p(w_i)$

Eine Menge E mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß p heißt Wahrscheinlichkeitsraum (E, p) . Wichtiger Spezialfall:

Gleichverteilung:

$$p(\{w_k\}) = \frac{1}{n} \quad k = 1, \dots, n$$

(alle Elementarereignisse, $\{w_k\}$, sind „gleichwahrscheinlich“, Laplace'scher W -Raum)

Ist (E, p) ein Wahrscheinlichkeitsraum, so ist die „bedingte“ Wahrscheinlichkeit $p(B|A)$

($B \subset E$, $A \subset E$) diejenige Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses B unter der Voraussetzung, daß das Ereignis A schon eingetreten ist; es gilt definitionsgemäß

$$p(B|A) = \begin{cases} p(B \cap A)/p(A) & (\text{für } p(A) \neq 0) \\ 0 & (\text{für } p(A) = 0) \end{cases}$$

Zwei Ereignisse A und B heißen stochastisch unabhängig, wenn

$$p(A|B) = p(A) \quad \text{und} \quad p(B|A) = p(B)$$

gilt. Folgender Satz liefert die grundlegendsten Formeln:

Theorem (Bedingte Wahrscheinlichkeit)

- ① Ist $p(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k+1}) \neq 0$, so ist

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k+1}) = p(A_1) \cdot p(A_2|A_1) \cdot p(A_3|A_1 \cap A_2) \dots p(A_{k+1}|A_1 \cap \dots \cap A_k)$$
- ② Sind $p(A) \neq 0$ und $p(B) \neq 0$, so gilt:
 A und B unabhängig
 $\Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$
- ③ Sind $B_1, \dots, B_k \in E$ mit
 - (a) $p(B_i) \neq 0 \quad (i = 1, \dots, k)$
 - (b) $B_i \cap B_j = \emptyset \quad (i, j \in \{1, \dots, k\}, i \neq j)$
 - (c) $E = B_1 \cup \dots \cup B_k$

so heißt $\{B_1, \dots, B_k\}$ ein (für (E, p)) vollständiges Ereignissystem.

Satz über die vollständige Wahrscheinlichkeit:

Es sei $\{B_1, \dots, B_k\}$ ein vollständiges Ereignissystem für den W -Raum (E, p) . Dann gilt für $A \subset E$:

$$p(A) = \sum_{j=1}^k p(A|B_j) p(B_j)$$

④ *Formel von Bayes*

Es sei $\{B_1, \dots, B_k\}$ ein vollständiges Ereignissystem für den W -Raum (E, p) . Dann gilt für $A \subset E$:

$$p(B_j|A) = \frac{p(A|B_j) p(B_j)}{\sum_{i=1}^k p(A|B_i) p(B_i)}$$

A.19.3 Verteilungsfunktionen

Es sei $p: P(M) \rightarrow [0, 1]$ eine Wahrscheinlichkeitsfunktion (additive auf disjunkten Teilmengen, $p(M) = 1$, $p(\emptyset) = 0$); dann läßt sich die Wahrscheinlichkeit folgendermaßen für eine „Zufallsvariable X “ definieren:

Sei M eine Menge und

$$X: M \rightarrow \mathbb{R}$$

eine (meßbare) Funktion. Dann ist

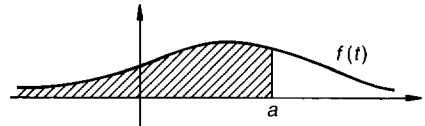
$$F(a) := p(X \leq a), \quad F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

die Wahrscheinlichkeitsverteilung (bezüglich des Maßes p) der Zufallsvariablen X . Berechnung: $F(a)$ ist die p -Wahrscheinlichkeit, daß die Größe X Werte zwischen $-\infty$ und a annimmt. In der Regel wird nun das Maß p durch eine „Dichtefunktion“ f dargestellt,

– das heißt: Es gibt eine (o. E.) stetige Funktion $f(x)$, $f \geq 0$, mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1 \quad \text{mit}$$

$$F(a) = \underbrace{\int_{-\infty}^a f(t) dt}_{\text{Inhalt der Fläche gemäß Skizze}}$$



Mit Hilfe der Dichtefunktion lassen sich Quantile, Erwartungswerte, Standardabweichungen u. a. wie folgt beschreiben:

$$-\int_a^{\infty} f(t) dt = p(X \geq a) = a\text{-Quantil}$$

– Ist $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so ist mit X auch $\varphi(X)$ eine meßbare Funktion auf M und

$$E(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) f(t) dt$$

heißt Erwartungswert von $\varphi(X)$ – also

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt = \mu$$

ist *Erwartungswert* der Zufallsvariablen X .

$$(t - \mu)^2 f(t) dt = \sigma^2$$

heißt *Varianz* = (Standardabweichung)² von X .

Normalverteilung: Die Funktion

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

ist die Dichte der sogenannten Normalverteilung mit den Parametern (μ, σ) – und die Zufallsvariable X mit

$$p(X < a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^a e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

ist dann normal (μ, σ) -verteilt. Die Parameter μ und σ^2 sind hierbei Erwartungswert und Varianz von X .

B Fehlerrechnung

Tabelle B-1. Wichtige Normen.

Norm	Bezeichnung
DIN 1319	Grundbegriffe der Meßtechnik
DIN 55 302	Statistische Auswerteverfahren
DIN 55 350	Qualitätssicherung und Statistik

B.1 Meßgenauigkeit

In der Regel weisen die Wiederholungsmessungen einer physikalischen Größe G Abweichungen auf, die kennzeichnend für die Meßgenauigkeit sind. Dabei ist zwischen den *systematischen*, für das Meßverfahren charakteristischen Abweichungen und den *zufälligen* oder *statistischen*, vom Experimentator abhängigen Abweichungen zu unterscheiden.

Zur grafischen Analyse der Meßwertschwankungen dient das *Histogramm* (Bild B-1). In dieses wird balkenförmig über dem Meßwert x_j die *relative Häufigkeit* h_j des Meßwerts aufgetragen:

$$h_j = \frac{N_j}{N}; \quad (B-1)$$

h_j relative Häufigkeit des Meßwertes x_j ,
 N Gesamtanzahl der Messungen der Größe x ,
 N_j Anzahl der Messungen mit dem Meßwert x_j .

Bei statistischen Meßabweichungen ist die Häufigkeitsverteilung symmetrisch zu einem *häufigsten Wert*, dem *Erwartungswert* μ . Starke Asymmetrien im Histogramm sind im allgemeinen ein Hinweis auf systematische Abweichungen.

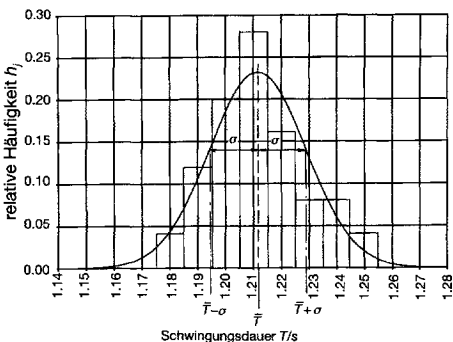


Bild B-1. Histogramm der Verteilungsdichte $h_j(T)$ bei einer Schwingungsdauermessung sowie die Normalverteilungskurve nach Gl. (B-2) für $\mu = \bar{T}$ und $\sigma^2 = s_T^2$ mit $\bar{T} = 1,2116$ s und $s_T = 0,0172$ s.

B.2 Analyse statistischer Meßwertverteilungen

Bei statistischen Abweichungen der Meßwerte geht die Häufigkeitsverteilung $h(x_j)$ in eine *glockenförmige Normalverteilung* der Meßwerte über, wenn die Anzahl der Wiederholungsmessungen stark erhöht wird. Im Grenzfall $N \rightarrow \infty$ liegen die Werte des Histogramms auf der von C. F. GAUSS aufgestellten Verteilungsfunktion $h(x)$:

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}; \quad (B-2)$$

$h(x)$ Wahrscheinlichkeitsdichte für die Messung des Meßwertes x ,
 σ^2 Varianz der Normalverteilung,
 μ Erwartungswert der Normalverteilung bzw. Meßgröße x mit der höchsten Meßwahrscheinlichkeit.

Die Funktion $h(x)$ ist zum Erwartungswert μ symmetrisch und durch den Faktor $1/\sqrt{2\pi\sigma^2}$

auf die Wahrscheinlichkeit 1 so normiert, daß gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx = 1. \tag{B-3}$$

Die Varianz σ^2 ist ein Maß für die Breite der Verteilungsfunktion $h(x)$: 68,3% der Meßwerte liegen im Bereich $x = \mu \pm \sigma$ und 95,4% im Bereich $x = \mu \pm 2\sigma$. Die Varianz σ^2 läßt sich aus der Halbwertsbreite $b_{1/2}$, d.h. der Breite der Glockenkurve in halber Höhe des Maximums $h(\mu)$ der Normalverteilung, bestimmen:

$$\sigma^2 = \frac{b_{1/2}^2}{8 \ln 2} = 0,18 b_{1/2}^2. \tag{B-4}$$

Bei einer endlichen Anzahl N von Messungen der m diskreten Meßwerte $x_1, x_2, \dots x_m$ lassen sich für den Erwartungswert μ und die Varianz σ^2 aus der Häufigkeitsverteilung $h(x_i)$ nach der Theorie der Beobachtungsfehler von GAUSS Schätzwerte berechnen.

Demnach ist der beste Schätzwert für μ der arithmetische Mittelwert \bar{x} nach Gl. (B-5) in Tabelle B-2. Für \bar{x} ist die Fehlersumme FS [$FS = \sum (x_i - \bar{x})^2$ mit $i = 1 \dots N$] minimal und läßt sich nach Gl. (B-6) berechnen. Mit der auf die Anzahl der Wiederholungsmessungen $N - 1$ normierten minimalen Fehler-summe FS_{\min} errechnet sich nach Gl. (B-7) die Standardabweichung s , deren Quadrat der beste Schätzwert für σ^2 ist.

Eine Erhöhung der Anzahl N der Messungen vermindert nicht die Standardabweichung s , welche die Breite der Häufigkeitsverteilung bestimmt und damit die Genauigkeit des verwendeten Meßverfahrens beschreibt. Dagegen erhöhen Wiederholungsmessungen die Genauigkeit, so daß der berechnete arithmetische Mittelwert \bar{x} mit dem Erwartungswert μ der Meßgröße übereinstimmt. Gl. (B-9) in Tabelle B-2 für die Standardabweichung $\Delta \bar{x}$ des arithmetischen Mittelwerts ist das Maß für die nach N Messungen bestehenden Abweichung des Schätzwerts \bar{x} zum wahren Wert μ .

Bei einer geringen Anzahl von Wiederholungsmessungen ist das arithmetische Mittel \bar{x}

Tabelle B-2. Beziehungen zur Berechnung der Kennwerte der Fehlerrechnung.

Kennwerte der Fehlerrechnung		Beziehungen
\bar{x}	arithmetischer Mittelwert; Schätzwert für den Erwartungswert	$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \tag{B-5}$
FS_{\min}	minimale Fehlersumme einer Anzahl von N Meßwerten	$FS_{\min} = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$ $= \sum_{i=1}^N x_i^2 - N \bar{x}^2 \tag{B-6}$
s	Standardabweichung des Meßwerts bzw. Meßverfahrens; Schätzwert für die Varianz	$s = \sqrt{\frac{FS_{\min}}{N - 1}} \tag{B-7}$
s_{rel}	relative Standardabweichung des Meßwerts bzw. Meßverfahrens	$s_{\text{rel}} = \frac{s}{\bar{x}} \tag{B-8}$
$\Delta \bar{x}$	Standardabweichung des arithmetische Mittelwerts	$\Delta \bar{x} = \frac{s}{\sqrt{N}} \tag{B-9}$
$\Delta \bar{x}_{\text{rel}}$	relative Standardabweichung des arithmetischen Mittelwerts	$\Delta \bar{x}_{\text{rel}} = \frac{\Delta \bar{x}}{\bar{x}} \tag{B-10}$
u_z	Zufallskomponente der Meßunsicherheit mit t_p -Faktor der Student-Verteilung	$u_z = \Delta \bar{x} t_p \tag{B-11}$

als Schätzwert für μ sehr ungenau. Charakteristischer für die Genauigkeit der Bestimmung des Erwartungswerts μ ist in diesem Fall der Vertrauensbereich $\bar{x} - u$ bis $\bar{x} + u$ um den arithmetischen Mittelwert, in dem der Erwartungswert μ der Meßgröße mit einer vorzugebenden Wahrscheinlichkeit, der *statistischen Sicherheit* P , liegt. Die Grenzen des Vertrauensbereichs um den arithmetischen Mittelwert werden durch die *Meßunsicherheit* $u = u_z + u_s$ angegeben, welche sich aus dem Anteil der *statistischen Meßunsicherheit* u_z und der *systematischen Meßunsicherheit* u_s zusammensetzt.

Die systematische Meßunsicherheit u_s muß geschätzt werden. Die statistische Meßunsicherheit u_z wird nach Gl. (B-11) in Tabelle B-2 mit Hilfe der Standardabweichung $\Delta\bar{x}$ des arithmetischen Mittelwerts berechnet und mit dem t_P -Faktor der *Student-Verteilung* nach Tabelle B-3 gewichtet. Je nach gewählter statistischer Sicherheit P ist dieser unterschiedlich. In der physikalischen Meßtechnik rechnet man mit der statistischen Sicherheit $P = 68,3\%$. In der Industrie ist ein Wert $P = 95,4\%$ üblich.

Das Ergebnis von N Messungen der Meßgröße x mit einem Meßverfahren, dessen Meßgenauigkeit durch die Standardabweichung s und den Vertrauensbereich u_z mit der statistischen Sicherheit P gekennzeichnet ist, wird in folgender Form angegeben:

$$x_P = \bar{x} \pm u_z = \bar{x} \pm t_P \frac{s}{\sqrt{N}}; \quad (\text{B-12})$$

- x_P Ergebnis der Meßwertanalyse der Meßwerte x ,
 \bar{x} wahrscheinlichster Wert für die Meßgröße x ,
 u_z Grenzwert des Vertrauensbereichs mit der statistischen Sicherheit P ,
 t_P Student-Faktor nach Tabelle B-3,
 s Standardabweichung nach Gl. (B-7),
 N Gesamtanzahl der Messungen der Meßgröße x .

Tabelle B-3. Zahlenwerte nach DIN 1319 und Anpassungspolynom des t-Faktors der Vertrauensgrenzen für verschiedene statistische Sicherheiten.

Anzahl der Wiederholungsmessungen $n_w = N - k$	statistische Sicherheit P	
	68,3 % $t_{0,68}$	95,4 % $t_{0,95}$
1	1,84	12,71
2	1,32	4,30
3	1,20	3,18
4	1,15	2,78
5	1,11	2,57
7	1,08	2,37
10	1,06	2,25
20	1,03	2,09
50	1,01	2,01
100	1,00	1,98
> 100	1,00	1,96
Anpassungspolynom	$t_{0,68} = 1$	$t_{0,95} = 1,96$
	+ 0,584	+ 3,012
	+ $\frac{n_w}{0,032}$	+ $\frac{n_w}{1,273}$
	- $\frac{n_w^2}{0,288}$	- $\frac{n_w^2}{8,992}$
	+ $\frac{n_w^3}{n_w^3}$	+ $\frac{n_w^3}{n_w^3}$

B.3 Fehlerfortpflanzung

Tabelle B-4. Beziehungen für die Kennwerte der Fehlerrechnung indirekt gemessener physikalischer Größen.

Kennwerte der Fehlerfortpflanzung der Fehlerrechnung		Beziehungen
\bar{f}	wahrscheinlichster Wert der indirekt gemessenen physikalischen Größe f	$\bar{f} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots)$ (B-13)
s_f	Standardabweichung der Größe f bzw. des indirekten Meßverfahrens für f	$s_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 s_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 s_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 s_z^2 + \dots}$ (B-14)
Δf	absoluter Größtfehler der Größe f bzw. des Meßverfahrens für f	$\Delta f = \left \frac{\partial f}{\partial x}\right \Delta \bar{x} + \left \frac{\partial f}{\partial y}\right \Delta \bar{y} + \left \frac{\partial f}{\partial z}\right \Delta \bar{z} + \dots$ (B-15)
Δf_{rel}	relativer Größtfehler der Größe f bzw. des Meßverfahrens für f	$\Delta f_{\text{rel}} = \frac{\Delta f}{f}$ (B-16)
$\Delta f_{\text{rel, PP}}$	relativer Größtfehler eines Potenzprodukts $f = x^k y^m z^n$	$\Delta f_{\text{rel, PP}} = \left k \frac{\Delta \bar{x}}{\bar{x}}\right + \left m \frac{\Delta \bar{y}}{\bar{y}}\right + \left n \frac{\Delta \bar{z}}{\bar{z}}\right $ (B-17)
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots$	arithmetische Mittelwerte der Teilmeßgrößen x, y, z, \dots	
s_x, s_y, s_z, \dots	Standardabweichungen der Teilmeßgrößen x, y, z, \dots	
$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \dots$	partielle Ableitungen der Funktion $f(x, y, z, \dots)$ nach den Teilgrößen x, y, z, \dots an der Stelle $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots$	

B.4 Regression – Kurvenanpassung

Die Regressionsmethode läßt sich dazu verwenden, Theorien von Naturvorgängen meßtechnisch zu überprüfen und die Parameter a_1, a_2, a_3, \dots solcher Theorien zu bestimmen. Dazu werden für die in $i = 1, 2, \dots, N$ Meßreihen verschieden eingestellten Meßvariablen $x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, \dots$ (auch Beobachtungen genannt), die durch das experimentelle Vorgehen festgelegt werden, die Meßwerte f_i der Größe f gemessen, mit den aus der Theorie ermittelten Werten $f(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, \dots; a_1, a_2, a_3, \dots)$ verglichen und die Theorieparameter a_1, a_2, a_3, \dots so gewählt, daß die theoretischen Werte der physikalischen Größe f im Rahmen der Meßgenauigkeit mit den Meßwerten möglichst gut übereinstimmen.

Ist die Anzahl N der Meßreihen gerade so groß wie die Anzahl der zu bestimmenden

Theorieparameter, dann lassen diese sich aus den N Bestimmungsgleichungen ausrechnen. Mit der Methode der Fehlerfortpflanzung können dann die Standardabweichungen der Theorieparameter aus den Meßfehlern der Meßvariablen x_i und der Meßwerte f_i bestimmt werden. Dieses Vorgehen hat aber das Risiko, daß schon bei einer Fehlmessung der Meßvariablen oder Meßwerte die ermittelten Regressionsparameter vollkommen falsch sind.

In der Meßpraxis führt man daher in der Regel weit mehr Meßreihen aus, als Theorieparameter zu bestimmen sind. Dadurch entstehen unterschiedliche Wertesätze für die Theorieparameter, welche die Meßungenauigkeit der Meßvariablen und Meßwerte widerspiegeln. Wird davon ausgegangen, daß die

Meßfehler zufällig und voneinander unabhängig sind, dann sollte sich ein Wertesatz für die Theorieparameter ergeben, der bei der Analyse der Meßreihen gehäuft auftritt, der also mit größter Wahrscheinlichkeit bei einer weiteren Meßreihe zu erwarten ist. Ziel der Ausgleichsrechnung oder Regression ist es, aus der Ausgleichung der Differenzen zwischen gemessener und theoretischer Größe f diesen wahrscheinlichsten Satz für die Theorieparameter a als Regressionsparameter zu bestimmen.

Nach der *Theorie der Beobachtungsfehler* von GAUSS sind die Theorieparameter a_1, a_2, \dots am wahrscheinlichsten und damit die zu bestimmenden Regressionsparameter, für die bei N Meßreihen die Fehlersumme FS , d.h. die Summe der Quadrate der Abweichungen zwischen dem Meßwert f_i und dem theoretischem Wert $f(x_{1i}, x_{2i}, \dots; a_1, a_2, \dots)$, ein Minimum ist:

$$FS = \sum_{i=1}^N g_i [f_i - f(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, \dots; a_1, a_2, a_3, \dots)]^2 \rightarrow \text{Minimum.} \quad (\text{B-18})$$

Durch die Gewichte g_i können die Beiträge einzelner Meßreihen i zur Fehlersumme unterschiedlich gewichtet werden.

Die Forderung dieser *Regressionsmethode der kleinsten Quadrate* führt auf ein System von *Normalgleichungen* für die Regressionsparameter a_1, a_2, \dots :

$$-2 \sum_{i=1}^N g_i [f_i - f(x_{1i}, x_{2i}, \dots; a_1, a_2, \dots)] \cdot \frac{\partial f}{\partial a_1} = 0, \quad (\text{B-19a})$$

$$-2 \sum_{i=1}^N g_i [f_i - f(x_{1i}, x_{2i}, \dots; a_1, a_2, \dots)] \cdot \frac{\partial f}{\partial a_2} = 0; \quad (\text{B-19b})$$

g_i	Gewicht der Messung i ,
f_i	Meßwert der Messung i ,
x_{1i}, x_{2i}, \dots	Werte der Meßvariablen x_1, x_2, \dots bei der Messung i ,
a_1, a_2, \dots	anzupassende Regressionsparameter.

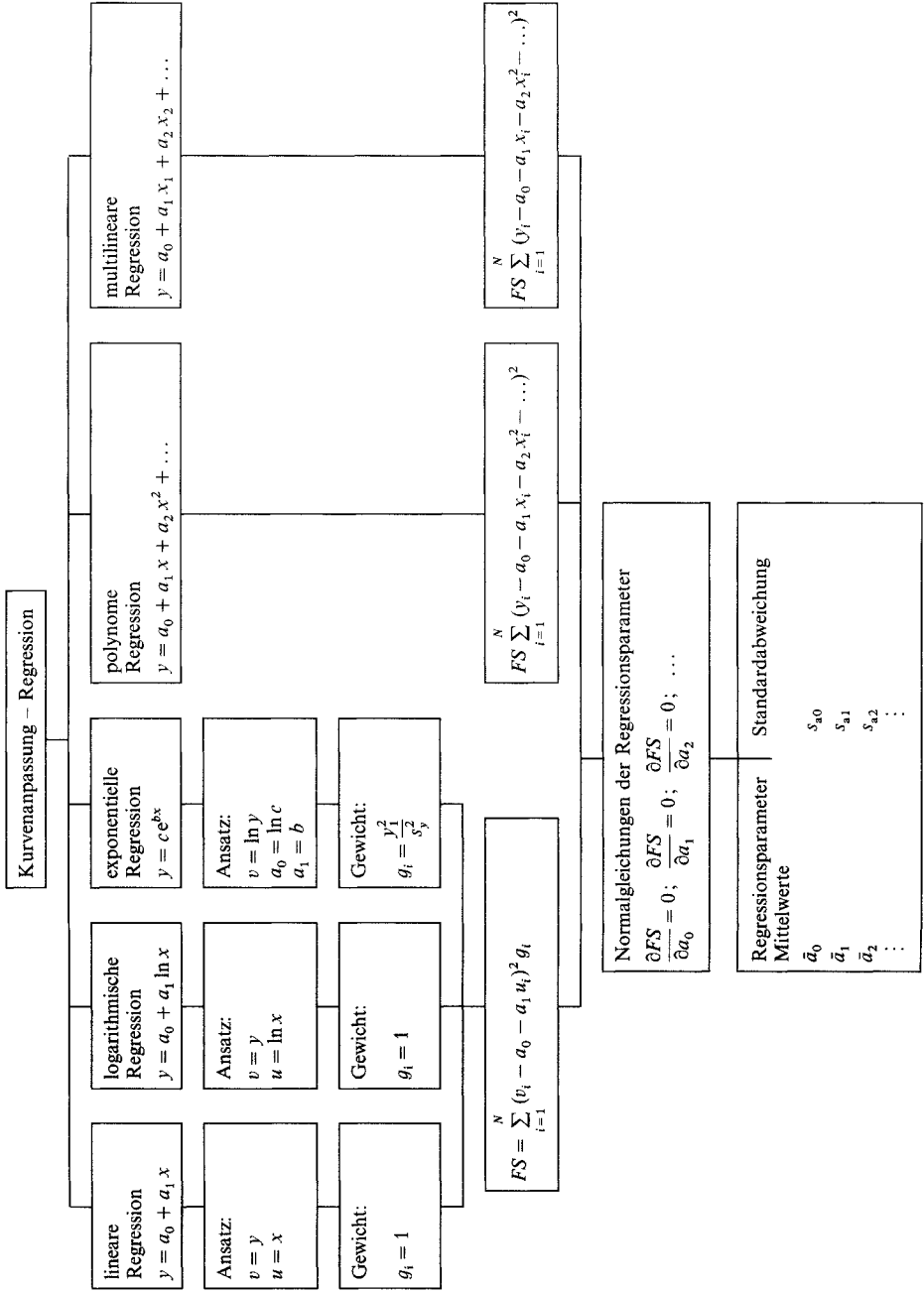
Für Linearkombinationen der Regressionsparameter a_1, a_2, \dots ist das Normalgleichungssystem linear und geschlossen lösbar; im anderen Fall müssen in der Fachliteratur behandelte Reihenentwicklungen angewendet werden. Manchmal kann durch eine Koordinatentransformation $v = v(f)$ ein lineares Normalgleichungssystem für die Regressionsparameter erreicht werden; dadurch entsteht jedoch in der Regel eine andere Gewichtung der Meßreihen. Ist die Standardabweichung s_f für alle Meßwerte f_i gleich und kann der Meßfehler der Meßvariablen x_{1i}, x_{2i}, \dots vernachlässigt werden, dann ergeben sich die Gewichte g_i aus

$$g_i = \frac{1}{\left(\frac{\partial v(f_i)}{\partial f_i}\right)^2 s_f^2}. \quad (\text{B-20})$$

Übersicht B-1 vermittelt einen Überblick über die Regression verschiedener Funktionen mit linearen Normalgleichungen. Die Mittelwerte der M Regressionsparameter $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_M$ folgen direkt aus der Lösung des Normalgleichungssystems; die Standardabweichungen s_{a1}, s_{a2}, \dots folgen aus dem Wert des Minimums der Fehlersumme FS_{\min} , der Anzahl der Wiederholungsmessungen $n_w = N - M$ und den Gewichten g_i der Meßreihen.

Spezialfälle der Regression mit zwei Regressionsparametern a_0 und a_1 sind die lineare Regression (Geradenanpassung) und die logarithmische und exponentielle Regression, die sich beide durch eine Koordinatentransformation $v = v(y)$ und $u = u(x)$ in eine Geradendarstellung $v = a_0 + a_1 u$ bringen lassen, wobei sich zum Teil die Gewichte g_i ändern (Übersicht B-1). Die Regressionsparameter Achsenabschnitt a_0 und Steigung a_1 der Regressionsgeraden lassen sich entweder grafisch durch eine Ausgleichsgerade oder rech-

Übersicht B-1. Funktionen mit einem linearen Normalgleichungssystem für die Parameter der Kurvenanpassung.



Übersicht B-2. Kurvenanpassung durch lineare, logarithmische und exponentielle Regression.

Einlesen

Anzahl Meßpunkte N Meßwerte x_i y_i

Regressionsfall

logarithmische	lineare	exponentielle
$v_i = y_i$	$v_i = y_i$	$v_i = \ln y_i$
$u_i = \ln x_i$	$u_i = x_i$	$u_i = x_i$
$g_i = 1$	$g_i = 1$	$g_i = y_i^2$

$$A = \sum_{i=1}^N g_i \quad D = \sum_{i=1}^N g_i v_i$$

$$B = \sum_{i=1}^N g_i u_i \quad E = \sum_{i=1}^N g_i u_i v_i$$

$$C = \sum_{i=1}^N g_i u_i^2 \quad F = \sum_{i=1}^N g_i v_i^2$$

$$a_0 = \frac{CD - BE}{AC - B^2} \quad s_{a0} = \left(\frac{(F - 2a_0D - 2a_1E + 2a_1a_0B + a_0^2A + a_1^2C)C}{(N-2)(AC - B^2)} \right)^{1/2}$$

$$a_1 = \frac{AE - BD}{AC - B^2} \quad s_{a1} = \left(\frac{(F - 2a_0D - 2a_1E + 2a_1a_0B + a_0^2A + a_1^2C)A}{(N-2)(AC - B^2)} \right)^{1/2}$$

Ausgabefall

logarithmische Regression	lineare Regression	exponentielle Regression
Ansatz: $y = c_0 + c_1 \ln x$	Ansatz: $y = c_0 + c_1 x$	Ansatz: $y = c_0 e^{c_1 x}$
Anpassung:	Anpassung:	Anpassung:
$c_0 = a_0 \quad s_{c0}$	$c_0 = a_0 \quad s_{c0} = s_{a0}$	$c_0 = e^{a_0} \quad s_{c0} = s_{a0} e^{a_0}$
$c_1 = a_1 \quad s_{c1} = s_{a1}$	$c_1 = a_1 \quad s_{c1} = s_{a1}$	$c_1 = a_1 \quad s_{c1} = s_{a1}$

nerisch aus den Normalgleichungen der Fehler-
summe FS ermitteln:

$$FS = \sum_{i=1}^N g_i [v_i - a_0 - a_1 u_i]^2; \quad (\text{B-21})$$

- g_i Gewicht der Messung i nach Gl. (B-20),
 v_i Meßwert i des Ordinatenwerts der Regressionsgeraden,
 u_i Meßwert i des Abszissenwerts der Regressionsgeraden,
 a_0 Regressionsparameter Achsenabschnitt,
 a_1 Regressionsparameter Steigung der Regressionsgeraden.

In der Übersicht B-2 sind die Algorithmen zur Berechnung der Mittelwerte der Regressionsparameter mit den zugehörigen Standardabweichungen zusammengestellt.

Mit Hilfe von Computern lassen sich die umfangreichen Regressionsrechnungen wesentlich einfacher und mit weniger Rechenfehlern ausführen. Dazu eignet sich jedoch die Fehlerrechnung in Matrizenschreibweise wesentlich besser. In der Übersicht B-3 ist die Vorgehensweise für die Programmierung der *polynomialen Regression* zusammengestellt. Die Mittelwerte $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_M$ der M Regressionsparameter ergeben sich als Elemente des

*Übersicht B-3. Matrizenmethode der polylinearen Regression.***Bezeichnungen**

f_i	Meßwerte ($i = 1 \dots N$)
	$f_1 = a_1 x_{11} + a_2 x_{21} + \dots + a_M x_{M1}$
	$f_2 = a_1 x_{12} + a_2 x_{22} + \dots + a_M x_{M2}$
	\vdots
	\vdots
	$f_N = a_1 x_{1N} + a_2 x_{2N} + \dots + a_M x_{MN}$
	(B-22)
a_j	Regressionsparameter ($j = 1 \dots M$)
x_{ji}	Meßvariable/Beobachtungen ($j = 1 \dots M; i = 1 \dots N$)
g_i	Gewichte der Meßwerte f_i ($i = 1 \dots N$) (alle Gewichte gleich: $g_i = 1$)

Sonderfälle

$x_{1i} = 1$	multilineare Regression
$x_{ji} = x_i^{j-1}$	polynome Regression
$x_{ji} = x_i^{j-1}$	lineare Regression mit $M = 2$

Beispiel:

Bestimmung der Abhängigkeit der Nußelt-Zahl Nu von der Prandtl-Zahl Pr und der Reynolds-Zahl Re bei der Wärmeübertragung an einem geraden Wärmeübertragerrohr entsprechend dem theoretischen Ansatz:

$$Nu = k Pr^m Re^n.$$

k, m, n sind Wärmeübertrager-Kennwerte, die aus Messungen von Nu bei definierten Werten für Pr und Re bestimmt werden sollen.

Durch Logarithmieren kann die Bestimmungsgleichung zu einem Problem der multilinearen Regression gemacht werden:

$$\ln Nu = \ln k + m \ln Pr + n \ln Re$$

mit $v_i = \ln f_i = \ln Nu_i$, $x_{1i} = 1$, $x_{2i} = \ln Pr_i$, $x_{3i} = \ln Re_i$ und den Regressionsparametern $a_1 = \ln k$, $a_2 = m$ sowie $a_3 = n$.

Gewichte:

Durch die Transformation verändern sich die Gewichte g_i der Messungen. Wegen $v(f_i) = \ln f_i$ gilt $\partial v / \partial f_i = f_i^{-1} = Nu_i^{-1}$. Nach Gl. (B-20) sind demnach $g_i = (Nu_i / s_{Nu})^2$.

Um bei der EDV-Anwendung Rundungsproblemen entgegenzuwirken, wird der konstante Faktor $s_{Nu} = 100$ gesetzt; dadurch liegen die Gewichte g_i in der rechentechnisch günstigen Größenordnung von ungefähr eins.

Wertetabelle: 5 Messungen entsprechend Gl. (B-22)

i	Nu	Nu^2	f_i $\ln Nu$	x_{1i} Pr	x_{2i} $\ln Pr$	Re	x_{3i} $\ln Re$
1	101	10 201	4,615	1	7,00	1,946	16 000
2	113	12 769	4,727	1	3,57	1,273	26 000
3	137	18 769	4,920	1	4,33	1,466	30 000
4	154	23 716	5,037	1	2,56	0,940	45 000
5	200	40 000	5,298	1	3,00	1,099	58 000

*Übersicht B-3 (Fortsetzung)***Aufstellen der Regressionsmatrizen**

A Koeffizienten- oder Modellmatrix
der Beobachtungen (N, M -Rechenmatrix)

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1M} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2M} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \dots & x_{3M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & x_{N3} & \dots & x_{NM} \end{bmatrix}$$

f Meßwert-Vektor ($1, N$ -Matrix)

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}$$

q Gewichtsmatrix der Meßwerte
(N, N -Diagonalmatrix)

$$q = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & g_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & g_N \end{bmatrix}$$

für $g_i = 1$: $q = E$

E Einheitsmatrix

Aufstellen der Regressionsmatrizen

A Koeffizienten- oder Modellmatrix
der Beobachtungen (5, 3-Rechenmatrix)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1.946 & 9.680 \\ 1 & 1.273 & 10.166 \\ 1 & 1.466 & 10.309 \\ 1 & 0.940 & 10.714 \\ 1 & 1.099 & 10.968 \end{bmatrix}$$

f Meßwert-Vektor (5,1-Matrix)

$$f = \begin{bmatrix} 4.615 \\ 4.727 \\ 4.920 \\ 5.037 \\ 5.298 \end{bmatrix}$$

g Gewichtsmatrix der Meßwerte
(5,5-Diagonalmatrix)

$$g = \begin{bmatrix} 1.0201 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2769 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.8769 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.3716 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.0000 \end{bmatrix}$$

Übersicht B-3 (Fortsetzung)

Matrizenoperationen

A^T transponierte Koeffizienten- oder Modellmatrix (Spiegelung von A an Hauptdiagonale zur (M, N) -Matrix)

$$A^T = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} & \cdots & x_{N1} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & \cdots & x_{N2} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & \cdots & x_{N3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1M} & x_{2M} & x_{3M} & \cdots & x_{NM} \end{bmatrix}$$

N Normalgleichungsmatrix (symmetrische M, M -Matrix)

$$N = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & \cdots & n_{1M} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & \cdots & n_{2M} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & \cdots & n_{3M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{M1} & n_{M2} & n_{M3} & \cdots & n_{MM} \end{bmatrix} = A^T q A \quad (\text{B-23})$$

Q inverse Normalgleichungsmatrix (symmetrische M, M -Matrix) (Berechnung der Matrixelemente q über $NQ = E$ Einheitsvektor mit Computeroutine)

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & \cdots & q_{1M} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & \cdots & q_{2M} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & \cdots & q_{3M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{M1} & q_{M2} & q_{M3} & \cdots & q_{MM} \end{bmatrix} = N^{-1} = (A^T q A)^{-1} \quad (\text{B-24})$$

c Absolutgliedvektor

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_M \end{bmatrix} = A^T q f$$

Spur Q Spurvektor der inversen Normalgleichungsmatrix Q

$$\text{Spur } Q = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{22} \\ q_{33} \\ \vdots \\ q_{MM} \end{bmatrix}$$

Matrizenoperationen

A^T transponierte Koeffizienten- oder Modellmatrix (Spiegelung von A an Hauptdiagonale zur $(3, 5)$ -Matrix)

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1.946 & 1.273 & 1.466 & 0.940 & 1.099 \\ 9.680 & 10.166 & 10.309 & 10.714 & 10.968 \end{bmatrix}$$

N Normalgleichungsmatrix (symmetrische $3, 3$ -Matrix)

$$N = \begin{bmatrix} 10.5455 & 12.9874 & 111.486 \\ 12.9874 & 16.8927 & 136.206 \\ 111.486 & 136.207 & 1180.44 \end{bmatrix}$$

Q inverse Normalgleichungsmatrix (symmetrische $3, 3$ -Matrix) (Berechnung der Matrixelemente q über $NQ = E$ Einheitsvektor z. B. mit Computeroutine)

$$Q = \begin{bmatrix} 302.830801 & -31.7898600 & -24.9325887 \\ -31.7898600 & 4.18716644 & 2.51923616 \\ -24.9325887 & 2.51923616 & 2.06490758 \end{bmatrix}$$

c Absolutgliedvektor ($3, 1$ -Matrix)

$$c = \begin{bmatrix} 53.116 \\ 64.901 \\ 562.55 \end{bmatrix}$$

Spur Q Spurvektor der inversen Normalgleichungsmatrix Q ($5, 1$ -Matrix)

$$\text{Spur } Q = \begin{bmatrix} 302.830801 \\ 4.18716644 \\ 2.06490758 \end{bmatrix}$$

Übersicht B-3 (Fortsetzung)

Regressionsergebnis

- a) Mittelwerte der angepaßten
Regressionsparameter a_1, \dots, a_M

a Regressionsparameter der Mittelwerte

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{c} = (\mathbf{A}^T \mathbf{q} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{q} \mathbf{f}) \quad (\text{B-25})$$

- b) Standardabweichung der Regressionsparameter
 s_{a1}, \dots, s_{aM}

v Vektor der Abweichungen
 $v_i = f_i - f(x_{1i}, \dots, x_{Mi}; a_1, \dots, a_M)$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} = \mathbf{f} - \mathbf{A} \mathbf{a} \quad (\text{B-26})$$

\mathbf{v}^T transponierter Vektor der Abweichungen

$$\mathbf{v}^T = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ \dots \ v_N]$$

FS_{\min} Wert der Fehlersumme im Minimum
(Skalar)

$$FS_{\min} = \mathbf{v}^T \mathbf{q} \mathbf{v} \quad (\text{B-27})$$

s_a^2 Vektor der quadratischen
Standardabweichungen

$$\mathbf{s}_a^2 = \begin{bmatrix} s_{a1}^2 \\ s_{a2}^2 \\ s_{a3}^2 \\ \vdots \\ s_{aM}^2 \end{bmatrix} = \frac{FS_{\min}}{N - M} \text{Spur } \mathbf{Q} \quad (\text{B-28})$$

Regressionsergebnis

- a) Mittelwerte der angepaßten
Regressionsparameter a_1, a_2, a_3

a Regressionsparameter der Mittelwerte
(3,1-Matrix)

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -3.9307585 \\ 0.4050047 \\ 0.8010658 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} k &= e^{a_1} = 0.01963 \\ m &= a_2 = 0.40500 \\ n &= a_3 = 0.80107 \end{aligned}$$

- b) Standardabweichung der Regressionsparameter
 s_{a1}, s_{a2}, s_{a3}

v Vektor der Abweichungen (5,1-Matrix)
 $v_i = f_i - f(x_{1i}, \dots, x_{5i}; a_1, \dots, a_5)$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0.0033027 \\ -0.0014471 \\ -0.0011654 \\ 0.0044354 \\ -0.0024310 \end{bmatrix}$$

\mathbf{v}^T transponierter Vektor der Abweichungen
(1,5-Matrix)

$$\mathbf{v}^T = [0.0033027 \ -0.0014471 \ -0.0011654 \ 0.0044354 \ -0.0024310]$$

FS_{\min} Wert der Fehlersumme im Minimum
(Skalar)

$$FS_{\min} = 0.00050655$$

s_a^2 Vektor der quadratischen
Standardabweichungen (3,1-Matrix)

Es gilt: $N - M = 5 - 3 = 2$

$$\delta a_1 = k^{-1} \delta k$$

$$\mathbf{s}_a^2 = \begin{bmatrix} 0.07670006 \\ 0.00106051 \\ 0.00052299 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} s_k &= k \sqrt{s_{a1}^2} = 0.00544 \\ s_m &= \sqrt{s_{a2}^2} = 0.0326 \\ s_n &= \sqrt{s_{a3}^2} = 0.0229 \end{aligned}$$

Regressionsparametervektors \mathbf{a} von Gl. (B-25), deren Standardabweichungen s_{a1} , s_{a2} , ... s_{aM} als Quadratwurzeln aus den Elementen des Vektors s_a^2 von Gl. (B-28).

Die polynomielle Regression enthält als Spezialfälle die multilineare und polynome Regression sowie die lineare Regression der Geradenanpassung.

Die Vertrauensgrenzen u_z , welche die statistische Meßgenauigkeit begrenzen, ergeben sich je nach geforderter statistischer Sicherheit P aus dem Faktor $t(n_w)$ von Tabelle B-3; $n_w = N - K > 0$ ist dabei die Anzahl der Wiederholungsmessungen, die sich aus der Anzahl N der Meßreihen und der Anzahl M der Regressionsparameter ergibt. Das Ergebnis der Kurvenanpassung liefert als ermittelte wahrscheinlichste Regressionsparameter einschließlich Vertrauensgrenzen:

$$a_p = \bar{a} \pm t_p(n_w) \frac{s_a}{\sqrt{N}}; \quad (\text{B-29})$$

- \bar{a} Mittelwert des Regressionsparameters,
 $t_p(n_w)$ t -Faktor nach Tabelle B-3 bei n_w Wiederholungsmessungen und der statistischen Sicherheit P ,
 s_a Standardabweichung des Regressionsparameters a ,
 N Anzahl der Meßreihen der Regressionsanalyse.

B.5 Ausgleichsgeradenkonstruktion

Die zeichnerische Darstellung der Meßpunkte in einem Diagramm eignet sich besonders gut für die Analyse, ob die theoretische Kurve im Rahmen der Meßgenauigkeit mit den Meßwerten übereinstimmt. Wird ein linearer Zusammenhang $f = a_1 + a_2 x$ zwischen der Meßvariablen x und dem Meßwert f erwartet, so kann im Meßdiagramm die *Ausgleichsgerade* auch grafisch durch die Meßwerte gezogen und a_1 aus dem Achsenabschnitt sowie a_2 aus der Steigung bestimmt werden (Bild B-2).

Als Maß für den Meßfehler der Ausgleichsgeradenkonstruktion werden die Standardab-

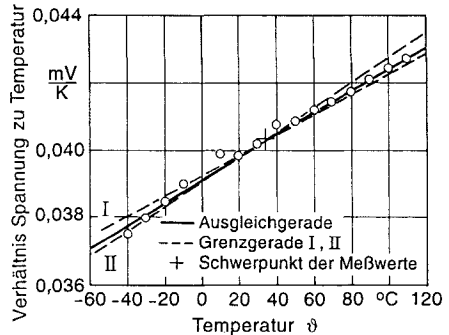


Bild B-2. Grafische Kurvenanpassung für das Thermoelement Cu-CuNi an die Eichkurve nach DIN 43 710.

weichungen Δa_1 und Δa_2 der Geradenparameter genommen, welche sich aus den beiden *Grenzgeraden* I und II an die Meßwerte abschätzen lassen. Diese müssen durch die in den Gl. (B-30) und (B-31) in Tabelle B-5 angegebenen Koordinaten (f_s, x_s) des *Schwerpunkts der Meßwerte* gezogen werden. Aus den der Zeichnung entnommenen Werten a_1^I, a_1^{II} sowie a_2^I und a_2^{II} der Grenzgeraden werden mit Hilfe der Gl. (B-32) die Standardabweichung Δa_1 des Achsenabschnitts und mit Gl. (B-33) Δa_2 der Geradensteigung errechnet. Dabei ist Δf_s die geschätzte Standardabweichung der Ordinate f_s des Schwerpunkts der Meßwerte.

B.6 Korrelationsanalyse

Die *Methode der Ausgleichsgeraden* wird in der Meßwertanalyse benutzt, um zu untersuchen, ob zwischen den N Meßwerten x_i und y_i ein linearer Zusammenhang besteht. Dazu werden die Meßwerte y_i über den Meßvariablen x_i in einem Diagramm aufgetragen und durch eine Ausgleichsgerade analysiert. Liegen die Merkmale y_i mehr oder weniger auf einer Regressionsgeraden, so ist von einer Korrelation der Merkmale x_i und y_i auszugehen. Die Regressionsgerade geht durch den Schwerpunkt S der Merkmale x_i und y_i nach den Gl. (B-34) und (B-35); die Steigung ergibt sich rechnerisch aus der Gl. (B-36) der Tabelle B-6.

Tabelle B-5. Schwerpunkt und Standardabweichung der Ausgleichsgeradenkonstruktion.

Kennwerte der Konstruktion der Grenzgeraden		Beziehungen	
f_s, x_s	Koordinaten des Schwerpunkts S der N Meßwerte	$f_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i$	(B-30)
		$x_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$	(B-31)
Δa_1	Standardabweichung des Achsenabschnitts der Ausgleichsgerade aus den Grenzgeraden I und II	$\Delta a_1 = \pm \left(\left \frac{a_1^I - a_2^{II}}{2} \right + \Delta f_s \right)$	(B-32)
Δa_1	Standardabweichung des Steigungsparameters der Ausgleichsgerade aus den Grenzgeraden I und II	$\Delta a_2 = \pm \left \frac{a_2^I - a_2^{II}}{2} \right $	(B-33)

Tabelle B-6. Kennwerte der Korrelationsanalyse.

Kennwerte und Betrag des Korrelationskoeffizienten		Beziehungen	
\bar{x}	Mittelwert der Merkmale x_i	$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$	(B-34)
\bar{y}	Mittelwert der Merkmale y_i	$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$	(B-35)
m_r	Steigung der Regressionsgeraden	$m_r = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i y_i - N \bar{x} \bar{y})}{\sum_{i=1}^N (x_i^2 - N \bar{x}^2)}$	(B-36)
r	Korrelationskoeffizient	$r = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}}$	(B-37)
		$r = \left m_r \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i^2 - N \bar{x}^2)}{\sum_{i=1}^N (y_i^2 - N \bar{y}^2)}} \right $	(B-38)

Quantitativ ist der *Korrelationskoeffizient* r ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, daß zwischen den Merkmalen x_i und y_i eine Abhängigkeit besteht, sie also eventuell korreliert sind. Mit Hilfe von Gl. (B-37) oder Gl. (B-38) der Tabelle B-6 läßt sich der Korrelationskoeffizient r der Merkmale x_i und y_i be-

rechnen. Liegt der Korrelationskoeffizient nahe bei $r = 1$ (also $0,8 < r \leq 1$), dann besteht mit großer bis bestimmter Wahrscheinlichkeit eine Korrelation zwischen den Merkmalen. Ein linearer Zusammenhang ist unwahrscheinlich bis ausgeschlossen, wenn der Korrelationskoeffizient $0 \leq r < 0,5$ beträgt.

C Physikalische Größen und Konstanten

C.1 Physikalische Basisgrößen und Definitionen

Eine *physikalische Größe* kennzeichnet Eigenschaften und beschreibt Zustände sowie Zustandsänderungen von Objekten der Umwelt. Eine physikalische Größe *G* besteht immer aus einer *quantitativen Aussage* (ausgedrückt durch den *Zahlenwert*) und einer *qualitativen Aussage* (ausgedrückt durch die *Einheit*). Für die physikalischen Größen dürfen nur noch die *SI-Einheiten* (Système International d'Unités) verwendet werden. Durch *Vorsätze* oder *Präfixe* können dezimale Vielfache oder Teile der Maßeinheiten angegeben werden (Tabelle C-1).

Die Einheiten aller physikalischen Größen können auf *sieben Basisgrößen* zurückgeführt werden (Tabelle C-2).

Tabelle C-1. Bezeichnung der dezimalen Vielfachen und Teile von Einheiten.

Zehnerpotenz	Vorsilbe	Kurzzeichen	Beispiel
10^{24}	Yotta	Y	$\text{Y}\Omega$
10^{21}	Zetta	Z	Z s^{-1}
10^{18}	Exa	E	Em, EJ
10^{15}	Peta	P	Pm, PJ
10^{12}	Tera	T	Tm, TJ
10^9	Giga	G	Gm, GJ
10^6	Mega	M	Mm, MJ
10^3	Kilo	k	km, kJ
10^2	Hekto	h	hPa, hJ
10^1	Deka	da	dam, daJ
10^{-1}	Dezi	d	dm, dJ
10^{-2}	Zenti	c	cm, cJ
10^{-3}	Milli	m	mm, mJ
10^{-6}	Mikro	μ	μm , μJ
10^{-9}	Nano	n	nm, nJ
10^{-12}	Piko	p	pm, pJ
10^{-15}	Femto	f	fm, fJ
10^{-18}	Atto	a	am, aJ
10^{-21}	Zepto	z	zm
10^{-24}	Yocto	y	ym

C.2 Umrechnungen gebräuchlicher Größen

In Tabelle C-3 sind die wichtigsten physikalischen Größen und ihre Einheiten zusammengestellt. Die weiteren Tabellen zeigen die Umrechnungen der Längen- (Tabelle C-4), der Flächen- (Tabelle C-5) und der Volumeneinheiten (Tabelle C-6) sowie der Kraft (Tabelle C-7), des Drucks (Tabelle C-8), der Energie (Tabelle C-9), der Leistung (Tabelle C-10), der Zeit (Tabelle C-11) und der Geschwindigkeit (Tabelle C-12).

C.3 Naturkonstanten

In den physikalischen Gesetzen befinden sich universelle Naturkonstanten. Die wichtigsten sind in Tabelle C-13 zusammengestellt.

Tabelle C-2. Basisgrößen, Basiseinheiten und Definitionen im SI-Maßsystem.

Basisgröße	Basiseinheit	Symbol	Definition	relative Unsicherheit
Zeit	Sekunde	s	1 Sekunde ist das 9 192 631 770fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustands von Atomen des Nuklids ^{133}Cs entsprechenden Strahlung.	10^{-14}
Länge	Meter	m	1 Meter ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während der Dauer von $1/299\,892\,458$ Sekunden durchläuft.	10^{-14}
Masse	Kilogramm	kg	1 Kilogramm ist die Masse des internationalen Kilogrammprototyps.	10^{-9}
elektrische Stromstärke	Ampere	A	1 Ampere ist die Stärke eines zeitlich unveränderlichen Stroms, der, durch zwei im Vakuum parallel im Abstand von 1 Meter voneinander angeordnete, geradlinige, unendlich lange Leiter von vernachlässigbar kleinem kreisförmigem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je 1 Meter Leiterlänge die Kraft $2 \cdot 10^{-7}$ Newton hervorruft.	10^{-6}
Temperatur	Kelvin	K	1 Kelvin ist der 273,16te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes des Wassers.	10^{-6}
Lichtstärke	Candela	cd	1 Candela ist die Lichtstärke in einer bestimmten Richtung einer Strahlungsquelle, die monochromatische Strahlung der Frequenz 540 THz aussendet und deren Strahlstärke in dieser Richtung $1/683$ W/sr beträgt.	$5 \cdot 10^{-3}$
Stoffmenge	Mol	mol	1 Mol ist die Stoffmenge eines Systems, das aus ebensoviel Einzelteilchen besteht, wie Atome in 12/1000 Kilogramm des Kohlenstoffnuklids ^{12}C enthalten sind. Bei Benutzung des Mol müssen die Einzelteilchen des Systems spezifiziert sein und können Atome, Moleküle, Ionen, Elektronen sowie andere Teilchen oder Gruppen solcher Teilchen genau angegebener Zusammensetzung sein.	10^{-6}

Tabelle C-3. Wichtigste physikalische Größen und ihre Einheiten.

Größe und Formelzeichen	gesetzliche Einheiten			Beziehung	
	SI	weitere	Name		
1. Länge, Fläche, Volumen					
Länge l	m		Meter		
		sm	Seemeile	1 sm = 1852 m	
Fläche A	m ²		Quadratmeter		
		a	Ar	1 a = 100 m ²	
		ha	Hektar	1 ha = 100 a = 10 ⁴ m ²	
Volumen V	m ³		Kubikmeter		
		l	Liter	1 l = 1 dm ³	
2. Winkel					
(ebener) Winkel	α, β usw.	rad		Radian	1 rad = $\frac{1 \text{ m Bogen}}{1 \text{ m Radius}}$
			°	Grad	1 rad = $180^\circ/\pi$ = 57,296° ≈ 57,3°
			'	Minute	1° = 0,017453 rad
			"	Sekunde	1° = 60' = 3600"
			gon	Gon	1 gon = (π/200) rad
Raumwinkel	Ω	sr		Steradian	1 sr = $\frac{1 \text{ m}^2 \text{ Kugeloberfläche}}{1 \text{ m}^2 \text{ Kugelradius}}$
3. Masse					
Masse m	kg		Kilogramm		
		g	Gramm		
		t	Tonne	1 t = 1 Mg = 10 ³ kg	
		Kt	metr. Karat	1 Kt = 0,2 g	
Dichte ϱ	kg/m ³			1 kg/dm ³ = 1 kg/l = 1 g/cm ³ = 1000 kg/m ³	
		$\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$			
		$\frac{\text{kg/l}}{\text{g/cm}^3}$			
Trägheitsmoment (Massenträgheitsmoment, Massenmoment 2. Grades)	J	kg · m ²		$J = m \cdot i^2$ i = Trägheitsradius	

Tabelle C-3 (Fortsetzung)

Größe und Formelzeichen	gesetzliche Einheiten			Beziehung
	SI	weitere	Name	

4. Zeitgrößen				
Zeit, Zeitdauer, Zeitspanne t	s		Sekunde	
		min	Minute	1 min = 60 s
		h	Stunde	1 h = 60 min
		d	Tag	1 d = 24 h
		a	Jahr	1 a = 365 d = 8760 h
Frequenz f	Hz		Hertz	1 Hz = 1/s
Drehzahl (Umdrehungs- frequenz) n	s^{-1}			1 s^{-1} = 1/s
		min^{-1} 1/min		1 min^{-1} = 1/min = (1/60) s^{-1}
Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$	s^{-1}			
Geschwindigkeit v	m/s	km/h		1 km/h = (1/3,6) m/s
		kn	Knoten	1 kn = 1,852 km/h
Beschleunigung a	m/s^2			
Winkel- geschwindigkeit ω	rad/s			
Winkel- beschleunigung α	rad/s^2			

5. Kraft, Energie, Leistung				
Kraft F	N		Newton	1 N = 1 kg · m/s ²
Gewichtskraft G	N			
Druck, allg. p	Pa		Pascal	1 Pa = 1 N/m ²
absoluter Druck p_{abs}		bar	Bar	1 bar = 10 ⁵ Pa = 10 N/cm ²
Atmosphären- druck p_{amb}				1 μbar = 0,1 Pa 1 mbar = 1 hPa
Überdruck $p_e = p_{\text{abs}} - p_{\text{amb}}$	Überdruck usw. wird nicht mehr beim Einheitenzeichen angegeben, sondern beim Formelzeichen. Unterdruck wird als negativer Überdruck angegeben. Beispiele: bisher jetzt 3 atü, $p_e = 2,94 \text{ bar} \approx 3 \text{ bar}$ 10 ata, $p_{\text{abs}} = 9,81 \text{ bar} \approx 10 \text{ bar}$ 0,4 atu, $p_e = -0,39 \text{ bar} \approx -0,4 \text{ bar}$			

Tabelle C-3 (Fortsetzung)

Größe und Formelzeichen	gesetzliche Einheiten			Beziehung
	SI	weitere	Name	
mechanische Spannung σ, τ	N/m ²			1 N/m ² = 1 Pa
		N/mm ²		1 N/mm ² = 1 MPa
Härte	Als Einheit bei Brinell- und Vickershärte wird nicht mehr kp/mm ² angegeben. Statt dessen wird hinter den bisherigen Zahlenwert das Kurzzeichen der betr. Härte (gegebenenfalls mit Angabe der Prüfkraft usw.) als Einheit geschrieben.			
Energie, Arbeit E, W	J		Joule [dschul]	1 J = 1 N · m = 1 W · s = 1 kg · m ² /s ²
Wärme, Wärmemenge Q	W · s		Wattsekunde	
		kW · h	Kilowattstunde	1 kW · h = 3,6 MJ
		eV	Elektronenvolt	1 eV = 1,60219 · 10 ⁻¹⁹ J
Drehmoment M	N · m		Newtonmeter	
Leistung P Wärmestrom \dot{Q}, Φ	W		Watt	1 W = 1 J/s = 1 N · m/s

6. Viskosimetrische Größen

dynamische Viskosität η	Pa · s		Pascalsekunde	1 Pa · s = 1 N · s/m ² = 1 kg/(s · m)
kinematische Viskosität ν	m ² /s			1 m ² /s = 1 Pa · s/(kg/m ³)

7. Temperatur und Wärme

Temperatur	T	K		Kelvin	$t = (T - 273,15 \text{ K}) \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{K}}$
	t, ϑ		$^{\circ}\text{C}$	Grad Celsius	
Temperaturdifferenz	ΔT	K		Kelvin	1 K = 1 $^{\circ}\text{C}$
	$\Delta t, \Delta \vartheta$		$^{\circ}\text{C}$	Grad Celsius	
Temperaturdifferenzen bei zusammengesetzten Einheiten in K angeben, z. B. kJ/(m · h · K); Schreibweise bei Toleranzangaben für Celsiustemperaturen z. B. $t = (40 \pm 2)^{\circ}\text{C}$ oder $t = 40^{\circ}\text{C} \pm 2^{\circ}\text{C}$ oder $t = 40^{\circ}\text{C} \pm 2 \text{ K}$.					

Wärmemenge und Wärmestrom siehe unter 5.

spezifische Wärmekapazität (spez. Wärme) c	$\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$			
molare Wärmekapazität C_m	$\frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$			
Wärmeleitfähigkeit λ	$\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$	$\frac{\text{kJ}}{\text{m} \cdot \text{h} \cdot \text{K}}$		1 W/(m · K) = 3,6 kJ/(M · h · K)

Tabelle C-3 (Fortsetzung)

Größe und Formelzeichen	gesetzliche Einheiten			Beziehung	
	SI	weitere	Name		
8. Elektrische Größen					
elektrische Stromstärke	I	A		Ampere	
elektrische Spannung	U	V		Volt	$1\text{ V} = 1\text{ W/A}$
elektrischer Leitwert	G	S		Siemens	$1\text{ S} = 1\text{ A/V} = 1/\Omega$
elektrischer Widerstand	R	Ω		Ohm	$1\ \Omega = 1/\text{S} = 1\text{ V/A}$
Elektrizitätsmenge	Q	C		Coulomb	$1\text{ C} = 1\text{ A} \cdot \text{s}$
			A · h	Amperestunde	$1\text{ A} \cdot \text{h} = 3600\text{ C}$
elektrische Kapazität	C	F		Farad	$1\text{ F} = 1\text{ C/V}$
elektrische Flußdichte, Verschiebung	D	C/m^2			
elektrische Feldstärke	E	V/m			$1\text{ V/m} = 1\text{ N/C}$
9. Magnetische Größen					
magnetischer Fluß	Φ	Wb		Weber	$1\text{ Wb} = 1\text{ V} \cdot \text{s}$
magnetische Flußdichte, Induktion	B	T		Tesla	$1\text{ T} = 1\text{ Wb/m}^2$
Induktivität	L	H		Henry	$1\text{ H} = 1\text{ Wb/A}$
magnetische Feldstärke	H	A/m			
10. Lichttechnische Größen					
Lichtstärke	I	cd		Candela	
Leuchtdichte	L	cd/m^2			
Lichtstrom	Φ	lm		Lumen	$1\text{ lm} = 1\text{ cd} \cdot \text{sr}$ (sr = Steradian)
Beleuchtungsstärke	E	lx		Lux	$1\text{ lx} = 1\text{ lm/m}^2$

Tabelle C-3 (Fortsetzung)

Größe und Formelzeichen	gesetzliche Einheiten			Beziehung
	SI	weitere	Name	
11. Atomphysikalische u. a. Größen				
Energie W		eV	Elektronenvolt	1 eV = $1,60219 \cdot 10^{-19}$ J 1 MeV = 10^6 eV
Aktivität einer radioaktiven Substanz A	Bq		Becquerel	1 Bq = 1 s^{-1}
Energiedosis D	Gy		Gray	1 Gy = 1 J/kg
Energiedosisrate \dot{D}	W/kg			
Ionendosis J	C/kg	R	Röntgen	1 R = $2,580 \cdot 10^{-4}$ C/kg
Ionendosisrate \dot{J}	A/kg			1 A/kg = 1 C/(kg s)
Äquivalentdosis H	Sv	rem	Sievert	1 Sv = 1 J/kg 1 rem = 0,01 J/kg
Äquivalentdosisrate \dot{H}	Sv/s			1 Sv/s = 1 W/kg
Stoffmenge n	mol		Mol	

Tabelle C-4. Umrechnung der Längeneinheiten.

Einheit	pm	nm	µm	mm	cm	dm	m	km
1 nm =	10^3	1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-12}
1 µm =	10^6	10^3	1	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-9}
1 mm =	10^9	10^6	10^3	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}
1 cm =	10^{10}	10^7	10^4	10	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-5}
1 dm =	10^{11}	10^8	10^5	10^2	10	1	10^{-1}	10^{-4}
1 m =	10^{12}	10^9	10^6	10^3	10^2	10	1	10^{-3}
1 km =	10^{15}	10^{12}	10^9	10^6	10^5	10^4	10^3	1
Einheit	in	ft	yd	mile	n mile	mm	m	km
1 in =	1	0,08333	0,02778	–	–	25,4	0,0254	–
1 ft =	12	1	0,33333	–	–	304,8	0,3048	–
1 yd =	36	3	1	–	–	914,4	0,9144	–
1 mile =	63 360	5280	1760	1	0,86898	–	1609,34	1,609
1 n mile =	72 913	6076,1	2025,4	1,1508	1	–	1852	1,852
1 mm =	0,03937	$3,281 \cdot 10^{-3}$	$1,094 \cdot 10^{-3}$	–	–	1	0,001	10^{-6}
1 m =	39,3701	3,2808	1,0936	–	–	1000	1	0,001
1 km =	39 370	3280,8	1093,6	0,62137	0,53996	10^6	1000	1

in = inch, ft = foot, y = yard, mile = statute mile, n mile = nautical mile

Weitere anglo-amerikanische Einheiten:

1 µin (microinch) = 0,0254 µm
1 mil (milliinch) = 0,0254 mm
1 link = 201,17 mm
1 rod = 1 pole = 1 perch = 5,5 yd = 5,0292 m
1 chain = 22 yd = 20,1168 m
1 furlong = 220 yd = 201,168 m
1 fathom = 2 yd = 1,8288 m

Astronomische Einheiten:

1 Lj (Lichtjahr) = $9,46053 \cdot 10^{15}$ m
(von elektromagnetischen Wellen in 1 Jahr
zurückgelegte Strecke)
1 AE (astronomische Einheit) = $1,496 \cdot 10^{11}$ m
(mittlere Entfernung Erde – Sonne)
1 pc (Parsec, Parallaxensekunde) = 206 265 AE
= $3,0857 \cdot 10^{16}$ m
(Entfernung, von der aus die AE unter
einem Winkel von 1 Sekunde erscheint)

Tabelle C-5. Umrechnung der Flächeneinheiten.

Einheit	in ²	ft ²	yd ²	mile ²	cm ²	dm ²	m ²	a	ha	km ²
1 in ²	= 1	–	–	–	6,4516	0,06452	–	–	–	–
1 ft ²	= 144	1	0,1111	–	929	9,29	0,0929	–	–	–
1 yd ²	= 1296	9	1	–	8361	83,61	0,8361	–	–	–
1 mile ²	= –	–	–	1	–	–	–	–	259	2,59
1 cm ²	= 0,155	–	–	–	1	0,01	–	–	–	–
1 dm ²	= 15,5	0,1076	0,01196	–	100	1	0,01	–	–	–
1 m ²	= 1550	10,76	1,196	–	10 000	100	1	0,01	–	–
1 a	= –	1076	119,6	–	–	10 000	100	1	0,01	–
1 ha	= –	–	–	–	–	–	10 000	100	1	0,01
1 km ²	= –	–	–	0,3861	–	–	–	10 000	100	1

in² = square inch (sq in), yd² = square yard (sq yd), ft² = square foot (sq ft), mile² = square mile (sq mile)

Weitere anglo-amerikanische Einheiten:

- 1 mil² (square mil) = 10^{-6} in² = 0,0006452 mm²
 1 cir mil (circular mil) = $\frac{\pi}{4}$ mil² = 0,0005067 mm²
 (Kreisfläche mit Durchmesser 1 mil)
 1 cir in (circular inch) = $\frac{\pi}{4}$ in² = 5,067 cm²
 (Kreisfläche mit Durchmesser 1 in)
 1 line² (square line) = 0,01 in² = 6,452 mm²
 1 rod² (square rod) = 1 pole² (square pole) = 1 perch²
 (square perch) = 25,29 m²
 1 chain² (square chain) = 16 rod² = 404,684 m²
 1 rood = 40 rod² = 1011,71 m²
 1 acre = 4840 yd² = 4046,86 m² = 40,4686 a
 1 section (US) = 1 mile² = 2,59 km²
 1 township (US) = 36 mile² = 93,24 km²

Papierformate: (DIN 476)

- Maße in mm
A0 841 × 1189
A1 594 × 841
A2 420 × 594
A3 297 × 420
A4 210 × 297
A5 148 × 210
A6 105 × 148
A7 74 × 105
A8 52 × 74
A9 37 × 52
A10 26 × 37

Tabelle C-6. Umrechnung der Volumeneinheiten.

Einheit	in ³	ft ³	yd ³	gal (GB)	gal (US)	cm ³	dm ³ (l)	m ³
1 in ³	= 1	–	–	–	–	16,3871	0,01639	–
1 ft ³	= 1728	1	0,03704	6,229	7,481	–	28,3168	0,02832
1 yd ³	= 46656	27	1	168,18	201,97	–	764,555	0,76456
1 gal (GB)	= 277,42	0,16054	–	1	1,20095	4546,09	4,54609	–
1 gal (US)	= 231	0,13368	–	0,83267	1	3785,41	3,78541	–
1 cm ³	= 0,06102	–	–	–	–	1	0,001	–
1 dm ³ (l)	= 61,0236	0,03531	0,00131	0,21997	0,26417	1000	1	0,001
1 m ³	= 61023,6	35,315	1,30795	219,969	264,172	10 ⁶	1000	1

in³ = cubic inch (cu in), yd³ = cubic yard (cu yd), ft³ = cubic foot (cu ft), gal = gallon

Weitere Volumeneinheiten

Schiffsvolumen

1 RT (Registerton) = 100 ft³
= 2,832 m³; BRT (Brutto-RT)
= gesamter Schiffsinnenraum,
Netto-Registerton = Laderaum eines Schiffes.
BRZ = (Bruttoraumzahl) = gesamter
Schiffsraum (Außenhaut) in m³.
1 ocean ton = 40 ft³ = 1,1327 m³.

Großbritannien (GB)

1 min (minim) = 0,059194 cm³
1 fluid drachm = 60 min = 3,5516 cm³
1 fl oz (fluid ounce) = 8 fl drachm = 0,028413 l
1 gill = 5 fl oz = 0,14207 l
1 pt (pint) = 4 gills = 0,56826 l
1 qt (quart) = 2 pt = 1,13652 l
1 gal (gallon) = 4 qt = 4,5461 l
1 bbl (barrel) = 36 gal = 163,6 l

für Trockengüter:

1 pk (peck) = 2 gal = 9,0922 l
1 bu (bushel) = 8 gal = 36,369 l
1 qr (quarter) = 8 bu = 290,95 l

Vereinigte Staaten (US)

1 min (minim) = 0,061612 cm³
1 fluid dram = 60 min = 3,6967 cm³
1 fl oz (fluid ounce) = 8 fl dram
= 0,029574 l
1 gill = 4 fl oz = 0,11829 l
1 liq pt (liquid pint) = 4 gills = 0,47318 l
1 liq quart = 2 liq pt = 0,94635 l
1 gal (Gallon) = 231 in³ = 4 liq quarts
= 3,7854 l
1 liq bbl (liquid barrel) = 119,24 l
1 barrel petroleum = 42 gal = 158,99 l

für Trockengüter:

1 dry pint = 0,55061 dm³
1 dry quart = 2 dry pints = 1,1012 dm³
1 peck = 8 dry quarts = 8,8098 dm³
1 bushel = 4 pecks = 35,239 dm³
1 dry bbl (dry barrel) = 7056 in³
= 115,63 dm³

Tabelle C-7. Umrechnung der Krafteinheiten.

Einheit	N	lbf
1 N (Newton)	= 1	0,224809
1 lbf (pound-force)	= 4,44822	1

Tabelle C-8. Umrechnung der Druckeinheiten.

Einheit	Pa	μbar	hPa	bar	N/mm ²	at	lbf/in ²	lbf/ft ²	tonf/in ²
1 Pa = 1 N/m ² =	1	10	0,01	10 ⁻⁵	10 ⁻⁶	—	—	—	—
1 μbar =	0,1	1	0,001	10 ⁻⁶	10 ⁻⁷	—	—	—	—
1 hPa = 1 mbar =	100	1000	1	0,001	0,0001	—	0,0145	2,0886	—
1 bar =	10 ⁵	10 ⁶	1000	1	0,1	1,0197	14,5037	2088,6	—
1 N/mm ² =	10 ⁶	10 ⁷	10 000	10	1	10,197	145,037	20 886	0,06475
Anglo-amerikanische Einheiten									
1 lbf/in ² =	6894,76	68 948	68,948	0,0689	0,00689	0,07031	1	144	—
1 lbf/ft ² =	47,8803	478,8	0,4788	—	—	—	—	1	—
1 tonf/in ² =	—	—	—	154,443	15,4443	157,488	2240	—	1

lbf/in² = pound-force per square inch (psi), lbf/ft² = pound-force per square foot (psf), tonf/in² = ton-force (UK) per square inch, 1 pdl/ft² (poundal per square foot) = 1,48816 Pa, 1 barye = 1 μbar ; 1 pz (pièce) = 1 sn/m² (sthène/m²) = 10³ Pa.

Tabelle C-9. Umrechnung der Energieeinheiten.

Einheit	J	kW · h	ft · lbf	Btu
1 J =	1	277,8 · 10 ⁻⁹	0,73756	947,8 · 10 ⁻⁶
1 kW · h =	3,6 · 10 ⁶	1	2,6552 · 10 ⁶	3412,13
Anglo-amerikanische Einheiten				
1 ft · lbf =	1,35582	376,6 · 10 ⁻⁹	1	1,285 · 10 ⁻³
1 Btu =	1055,06	293,1 · 10 ⁻⁶	778,17	1

ft lbf = foot pound-force, Btu = British thermal unit

1 in ozf (inch ounce-force) = 0,007062 J

1 in lbf (inch pound-force) = 0,112985 J

1 ft pdl (foot poundal) = 0,04214 J

1 hph (horsepower hour) = 2,685 · 10⁶ J = 0,7457 kW · h

1 thermie (franz.) = 1000 frigories (franz.) = 4,1868 MJ

1 kg SKE (Steinkohleneinheiten) = 29,3076 MJ = 8,141 kWh

1 t SKE (Steinkohleneinheiten) = 29,3076 GJ = 8,141 MWh

1 kcal = 4,1868 kJ

Tabelle C-10. Umrechnung der Leistungseinheiten.

Einheit	W	kW	hp	Btu/s
1 W =	1	0,001	1,341 · 10 ⁻³	947,8 · 10 ⁻⁶
1 kW =	1000	1	1,34102	947,8 · 10 ⁻³
Anglo-amerikanische Einheiten				
1 hp =	745,70	0,74570	1	0,70678
1 Btu/s =	1055,06	1,05506	1,4149	1

hp = horsepower

1 ft · lbf/s = 1,35582 W

1 ch (cheval vapeur) (franz.) = 0,7355 kW

1 poncelet (franz.) = 0,981 kW

menschliche Dauerleistung \approx 0,1 kW

Tabelle C-11. Umrechnung der Zeiteinheiten.

Einheit	s	min	h	d
1 s (Sekunde) =	1	0,01667	$0,2778 \cdot 10^{-3}$	$11,574 \cdot 10^{-6}$
1 min (Minute) =	60	1	0,01667	$0,6944 \cdot 10^{-3}$
1 h (Stunde) =	3600	60	1	0,041667
1 d (Tag) =	86 400	1440	24	1

1 bürgerliches Jahr = 365 (bzw. 366) Tage = 8760 (8784) Stunden (für Zinsberechnungen im Bankwesen)
1 Jahr = 360 Tage)
1 Sonnenjahr = 365,2422 mittlere Sonnentage = 365 d, 5 h, 48 min, 46 s
1 Sternennjahr = 365,2564 mittlere Sonnentage

Tabelle C-12. Umrechnung der Geschwindigkeitseinheiten.

1 km/h = 0,27778 m/s	1 m/s = 3,6 km/h
1 mile/h = 1,60934 km/h	1 km/h = 0,62137 mile/h
1 kn (Knoten) = 1,852 km/h	1 km/h = 0,53996 kn
1 ft/min = 0,3048 m/min	1 m/min = 3,28084 ft/min
$x \text{ km/h} \hat{=} \frac{60}{x} \text{ min/km} = \frac{3600}{x} \text{ s/km}$	$x \text{ mile/h} \hat{=} \frac{37,2824}{x} \text{ min/km} = \frac{2236,9}{x} \text{ s/km}$
$x \text{ s/km} = \frac{3600}{x} \text{ km/h}$	

Tabelle C-13. Wichtige Naturkonstanten

Bezeichnung	Symbol	Wert	relative Unsicherheit
Vakuum-Lichtgeschwindigkeit	c	$2,99792458 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	0
Gravitationskonstante	G	$6,6742 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$
Avogadro-Konstante	N_A	$6,0221415 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	$1,7 \cdot 10^{-7}$
Elementarladung	e	$1,60217653 \cdot 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$	$8,5 \cdot 10^{-8}$
Ruhemasse des Elektrons	m_{0e}	$9,1093826 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	$1,7 \cdot 10^{-7}$
Ruhemasse des Protons	m_{0p}	$1,67262171 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	$1,7 \cdot 10^{-7}$
Plancksches Wirkungsquantum	h	$6,6260693 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	$1,7 \cdot 10^{-7}$
Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante	α	$7,297352568 \cdot 10^{-3}$	$3,3 \cdot 10^{-9}$
elektrische Feldkonstante	ϵ_0	$8,854187817 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}$	0
magnetische Feldkonstante	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}}$	0
Faraday-Konstante	F	$9,648533383 \cdot 10^4 \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{mol}}$	$8,6 \cdot 10^{-8}$
universelle Gaskonstante	R_m	$8,314472 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$	$1,7 \cdot 10^{-6}$
Boltzmann-Konstante	k	$1,3806505 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$	$1,8 \cdot 10^{-6}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	σ	$5,670400 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$	$7 \cdot 10^{-6}$

D Kinematik

In der Kinematik wird die Bewegung materieller Körper und Systeme untersucht, ohne die verursachenden Kräfte zu betrachten. In diesem Abschnitt wird lediglich die *Kinematik des Punktes* behandelt. Auf die Besonderheiten der *Kinematik starrer Körper* wird im Abschnitt E.7 eingegangen.

D.1 Eindimensionale Kinematik

Bei geführter Bewegung längs einer vorgegebenen Bahn, z. B. Gerade, Kreis, Achterbahn, hat ein Punkt nur einen *Freiheitsgrad*. Zur Beschreibung des Ortes des Punktes genügt eine Koordinate.

D.1.1 Geschwindigkeit

Der Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit eines Punktes und dem längs der Bahn vom Anfangspunkt A aus gemessenen Weg geht aus der Übersicht D-1 hervor. Bei Kreisbewegungen ist es sinnvoll, die Lage eines Punktes durch einen Winkel zu beschreiben und anstatt der *Bahngeschwindigkeit* die *Winkelgeschwindigkeit* zu benutzen.

D.1.2 Beschleunigung

Eine beschleunigte Bewegung liegt vor, wenn die Geschwindigkeit nicht konstant ist (Übersicht D-2).

D.1.3 Kinematische Diagramme

In einer Darstellung der Beträge des Weges (Winkels), der Geschwindigkeit (Winkelgeschwindigkeit) und der Beschleunigung (Winkelbeschleunigung) über der Zeit (Bild D-1) gilt:

- Die Geschwindigkeit ist die Steigung der Kurve im Weg-Zeit-Diagramm,

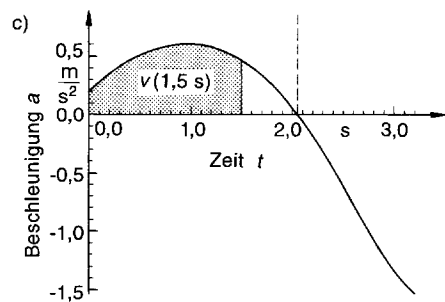
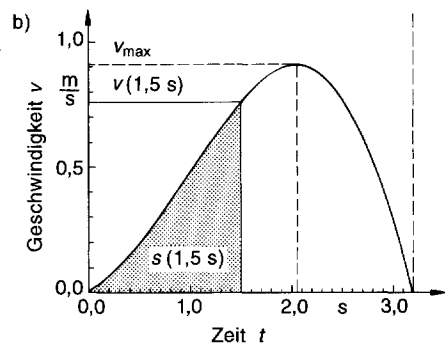
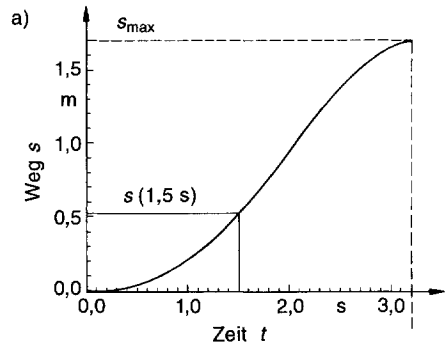


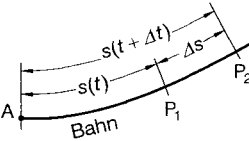
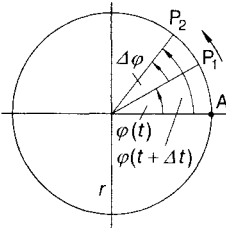
Bild D-1. Kinematische Diagramme.

a) Weg-Zeit-Diagramm,

b) Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm,

c) Beschleunigung-Zeit-Diagramm.

Übersicht D-1. Geschwindigkeiten.

Bahngeschwindigkeit	Winkelgeschwindigkeit
	
<p>mittlere Geschwindigkeit</p> $v_m = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{(t + \Delta t) - t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (D-1)$ <p>Momentangeschwindigkeit</p> $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad (D-3)$ <p>$[v] = 1 \text{ m/s}$</p> <p>Weg</p> $s(t_1) = s_0 + \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt \quad (D-5)$	<p>mittlere Winkelgeschwindigkeit</p> $\omega_m = \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{(t + \Delta t) - t} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \quad (D-2)$ <p>momentane Winkelgeschwindigkeit</p> $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad (D-4)$ <p>$[\omega] = 1 \text{ rad/s} = 1 \text{ s}^{-1}$</p> <p>Winkel</p> $\varphi(t_1) = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t_1} \omega(t) dt \quad (D-6)$
<p>Verknüpfungen für Kreisbewegung</p>	
$\varphi = s/r \quad (D-7)$	$\omega = 2\pi n = 2\pi/T \quad (D-8)$
$\omega = v/r \quad (D-9)$	
<p>$s(t_1)$ Weg zur Zeit t_1</p> <p>s_0 Weg $s(t_0)$ zur Zeit t_0</p> <p>n Drehzahl, -frequenz</p>	<p>$\varphi(t_1)$ Winkel zur Zeit t_1</p> <p>φ_0 Winkel $\varphi(t_0)$ zur Zeit t_0</p> <p>T Periodendauer</p>

Übersicht D-2. Beschleunigungen.

Bahnbeschleunigung	Winkelbeschleunigung
mittlere Beschleunigung $a_m = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{(t + \Delta t) - t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (D-10)$	mittlere Winkelbeschleunigung $\alpha_m = \frac{\omega(t + \Delta t) - \omega(t)}{(t + \Delta t) - t} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \quad (D-11)$
Momentanbeschleunigung $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s} \quad (D-12)$ $[a] = 1 \text{ m/s}^2$	momentane Winkelbeschleunigung $\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} \quad (D-13)$ $[\alpha] = 1 \text{ rad/s}^2 = 1 \text{ s}^{-2}$
Geschwindigkeit $v(t_1) = v_0 + \int_{t_0}^{t_1} a(t) dt \quad (D-14)$	Winkelgeschwindigkeit $\omega(t_1) = \omega_0 + \int_{t_0}^{t_1} \alpha(t) dt \quad (D-15)$
Verknüpfung für Kreisbewegung $\alpha = a/r \quad (D-16)$	
Δv Geschwindigkeitsänderung Δt Zeitspanne $v(t_1)$ Geschwindigkeit zur Zeit t_1 v_0 Geschwindigkeit $v(t_0)$ zur Zeit t_0	$\Delta \omega$ Änderung der Winkelgeschwindigkeit $\omega(t_1)$ Winkelgeschwindigkeit zur Zeit t_1 ω_0 Winkelgeschwindigkeit $\omega(t_0)$ zur Zeit t_0

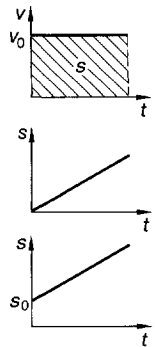
- die Beschleunigung ist die Steigung der Kurve im Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm,
- der Wegzuwachs ist die Fläche unter der Kurve im Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm,
- der Geschwindigkeitszuwachs ist die Fläche unter der Kurve im Beschleunigung-Zeit-Diagramm.

D.1.4 Spezialfälle

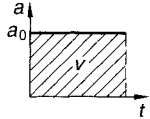
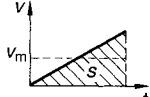
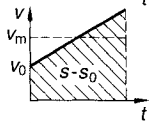
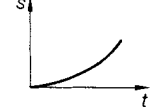

Die kinematischen Beziehungen für die Spezialfälle *gleichmäßige Geschwindigkeit* sowie *gleichmäßige Beschleunigung* sind mit den zugehörigen Diagrammen in der Übersicht D-3 zusammengestellt.

Übersicht D-3. Spezielle Bewegungsformen.

gleichmäßige Geschwindigkeit $v = v_0$		
Beschleunigung	$a = 0$	
Geschwindigkeit	$v = v_0$	(D-17)
Weg		
Anfangsbedingung: $s(0) = 0$	$s = v_0 t$	(D-18)
	$s(0) = s_0$ $s = v_0 t + s_0$	(D-19)



Übersicht D-3 (Fortsetzung)

gleichmäßige Beschleunigung $a = a_0$			
Beschleunigung	$a = a_0$		
Geschwindigkeit			
Anfangsbedingung:	$v(0) = 0$	$v = a_0 t = \sqrt{2a_0 s}$	(D-20)
	$s(0) = 0$	$v_m = a_0 t/2 = s/t$	
	$v(0) = v_0$	$v = a_0 t + v_0 = \sqrt{v_0^2 + 2a_0(s-s_0)}$	(D-21)
	$s(0) = s_0$	$v_m = v_0 + a_0 t/2 = (s-s_0)/t$	
Weg			
Anfangsbedingung:	$v(0) = 0$	$s = \frac{1}{2} a_0 t^2$	(D-22)
	$s(0) = 0$		
	$v(0) = v_0$	$s = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + s_0$	(D-23)
	$s(0) = s_0$		

D.2 Dreidimensionale Kinematik**D.2.1 Ortsvektor und Bahnkurve**

Bei einer allgemeinen Bewegung hat ein Punkt drei Freiheitsgrade. Zur eindeutigen Lagebeschreibung sind drei Koordinaten erforderlich. Dies sind die Komponenten des Ortsvektors \mathbf{r} , der in kartesischen Koordinaten lautet:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}. \quad (\text{D-24})$$

D.2.2 Geschwindigkeitsvektor

Der Vektor \mathbf{v} der Geschwindigkeit ergibt sich durch Differentiation des Ortsvektors $\mathbf{r}(t)$ nach der Zeit.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}. \quad (\text{D-25})$$

Der Vektor \mathbf{v} der Geschwindigkeit liegt stets tangential zur Bahnkurve.

Ist \mathbf{e}_{tan} der Einheitsvektor in Richtung der Tangente an die Bahnkurve, dann gilt

$$\mathbf{v} = v \cdot \mathbf{e}_{\text{tan}} \quad (\text{D-26})$$

$v = |\mathbf{v}| = ds/dt$ ist der Betrag der Geschwindigkeit.

D.2.3 Beschleunigungsvektor

Der Vektor \mathbf{a} der Beschleunigung ist als Ableitung des Geschwindigkeitsvektors \mathbf{v} nach der Zeit t definiert:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}. \quad (\text{D-27})$$

Im allgemeinen steht der Beschleunigungsvektor \mathbf{a} schief zur Bahnkurve und kann in zwei Komponenten zerlegt werden (Bild D-2):

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{tan}} + \mathbf{a}_{\text{norm}} \quad \text{mit} \quad (\text{D-28})$$

$$\mathbf{a}_{\text{tan}} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_{\text{tan}} \quad \text{und} \quad \mathbf{a}_{\text{norm}} = \frac{v^2}{R} \mathbf{e}_{\text{norm}};$$

\mathbf{a}_{tan}	Tangentiale Komponente der Beschleunigung,
\mathbf{a}_{norm}	Normalkomponente der Beschleunigung,
$\mathbf{e}_{\text{tan}}, \mathbf{e}_{\text{norm}}$	Einheitsvektoren tangential und normal zur Bahnkurve,
v	Momentangeschwindigkeit,
R	Krümmungsradius der Bahnkurve.

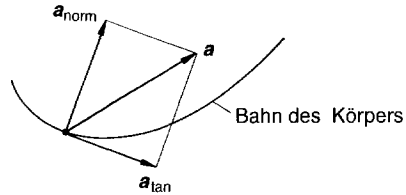


Bild D-2. Tangential- und Normalkomponente des Beschleunigungsvektors.

D.2.4 Kreisbewegungen

Bei Kreisbewegungen weist die Normalbeschleunigung stets zum Kreismittelpunkt und wird als *Zentripetalbeschleunigung* a_{zp} bezeichnet:

$$a_{zp} = v^2/r = r \omega^2 = \omega v;$$

(D-29)

- v Bahngeschwindigkeit,
- ω Winkelgeschwindigkeit,
- r Kreisradius.

Die Übersicht D-4 enthält die vektorielle Beschreibung der Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung.

D.2.5 Wurfbewegungen

Beim Wurf im Schwerfeld der Erde (Übersicht D-5) gilt unter Vernachlässigung des Luftwiderstands für die Beschleunigung

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix};$$

(D-33)

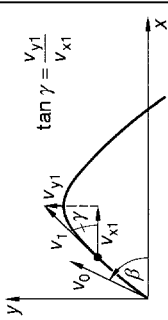
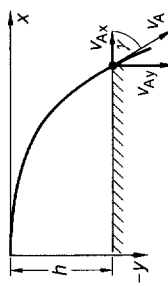
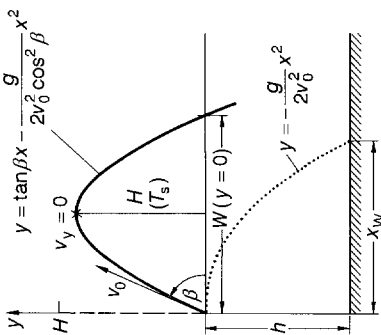
$g = 9,81 \text{ m/s}^2$ Erdbeschleunigung.

Durch zweimalige Integration in x - und y -Richtung ergeben sich der Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} und der Ortsvektor \mathbf{r} sowie die Bahnkurve.

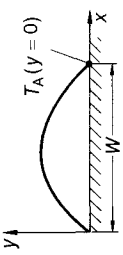
Übersicht D-4. Vektoren der Kreisbewegung.

perspektivische Darstellung		ebene Darstellung	
Verknüpfungen			
$v = \omega \times r$	(D-30)	$a_{zp} = \omega \times v = -\omega^2 r$	(D-31)
$a_{tan} = \alpha \times r$	(D-32)		
v	Geschwindigkeit		
ω	Winkelgeschwindigkeit		
r	Ortsvektor		
a_{zp}	Zentripetalbeschleunigung		
a_{tan}	Tangentialbeschleunigung		

Übersicht D-5. Wurfbewegungen.

Wurfarten		senkrechter Wurf $\beta = 90^\circ$	waagerechter Wurf $\beta = 0^\circ$	Grafik
Berechnungen				
Grundgleichungen 1. Geschwindigkeiten	schiefes Wurf β beliebig	(1) $v_x = v_0 \cos \beta$ (2) $v_y = v_0 \sin \beta - g t$  $\tan \gamma = \frac{v_{y1}}{v_{x1}}$ $ v_1 = \sqrt{v_{x1}^2 + v_{y1}^2}$	$v_x = v_0$ $v_y = -g t$  $\tan \gamma = \frac{v_{Ay}}{v_{Ax}}$ $ v_A = \sqrt{v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2}$	 $y = \tan \beta x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \beta} x^2$ $y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2$
	2. Wege	(3) $x = v_0 t \cos \beta$ (4) $y = v_0 t \sin \beta - \frac{g}{2} t^2$ $y = \tan \beta x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \beta} x^2$	$x = 0$ $y = v_0 t - \frac{g}{2} t^2$	$x = v_0 t$ $y = -\frac{g}{2} t^2$ $y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2$ (a)
Bahnsgleichung				

Übersicht D-5 (Fortsetzung)

Wurfarten		schiefcr Wurf β beliebig	senkrechter Wurf $\beta = 90^\circ$	waagerechter Wurf $\beta = 0^\circ$	
Berechnungen					
Spezialfälle: Steigzeit T_S $(v_y = 0)$		(2) $= 0$ $T_S = \frac{v_0}{g} \sin \beta$ (5)	$T_S = \frac{v_0}{g}$	$T_S = 0$	g Erdbeschleunigung ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$) h Höhe beim waagerechten Wurf H Wurfhöhe (schiefer und senkrechter Wurf) v_0 Anfangsgeschwindigkeit v_x Geschwindigkeit in x -Richtung v_y Geschwindigkeit in y -Richtung T_A Auftreffzeit T_S Steigzeit W Wurfweite (schiefer Wurf) x_W Wurfweite (waagerechter Wurf) β Abwurfwinkel
	Wurfhöhe $(v_y = 0)$	(4) mit (5) $H = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \beta$	$H = \frac{v_0^2}{2g}$	$h = 0$	
Auftreffzeit T_A $(v_y = 0)$		(4) $= 0$ und $t_1 = 0$ $T_A = \frac{2v_0^2}{g} \sin \beta = 2 T_S$	$T_A = \frac{2v_0^2}{g} = 2 T_S$	$T_S = 0$	Achtung! Bei allen Gleichungen liegt der Koordinatenursprung im Abwurfpunkt.
	Wurfweite W	 aus (3): $W = v_0 T_A \cos \beta$ $W = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\beta$ W_{\max} für $\beta = 45^\circ$	$W = 0$	aus (a): $-y = h = \frac{g}{2v_0^2} x_W^2$ $x_W = W = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$	

E Dynamik

Die Dynamik untersucht die Ursachen für die Bewegung eines Körpers. Dieser hat eine *Masse* und eine geometrische Ausdehnung, d. h. ein *Volumen*. Bei der Modellvorstellung des materiellen Punktes ist die Masse des Körpers in einem Punkt ohne räumliche Ausdehnung vereinigt, der nicht rotieren und sich verformen kann und somit eine mathematisch einfachere Beschreibung seiner Reaktionen auf Einwirkungen von außen erlaubt. Wie materielle Punkte lassen sich Körper behandeln, deren Volumen klein ist im Vergleich zu den Dimensionen (Abmessungen, Abstände), in denen er sich bewegt. Aus materiellen Punkten bauen sich im allgemeinen *Systeme materieller Punkte* auf; sind die Abstände der materiellen Punkte in Systemen konstant, dann werden diese Körper als *starre Körper* bezeichnet.

E.1 Grundgesetze der klassischen Mechanik

E.1.1 Die Newtonschen Axiome

Die von I. NEWTON im Jahre 1687 veröffentlichten Grundprinzipien der Dynamik sind

in Tabelle E-1 zusammengestellt. Als *Grundgesetze der klassischen Mechanik* beschreiben sie die dynamischen Vorgänge exakt; sie versagen, wenn die Geschwindigkeiten nicht mehr erheblich kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sind (Relativitätstheorie) oder bei Wechselwirkungen in der mikroskopischen Welt (Quantentheorie).

Dichte ϱ

Die Masse m und das Volumen V der Körper sind über eine materialspezifische Größe, die *Dichte* ϱ , definiert:

$$\varrho = \frac{m}{V}$$

(E-1)

Die Dichte fester, flüssiger oder gasförmiger Körper (Tabelle E-2) ist mehr oder minder stark temperatur- und druckabhängig. Bei Gasen ist die Dichte im Vergleich zu Festkörpern und Flüssigkeiten etwa tausendmal kleiner und ändert sich besonders stark mit der Temperatur und dem Gasdruck.

Die mittlere Dichte ϱ_m von Körpern mit einem Gesamtvolumen V , das sich aus unterschiedlichen Materialien zusammensetzt, wie z. B.

Tabelle E-1. Die Newtonschen Axiome.

Newtonsche Axiome	Formulierung	Beziehung
1. Axiom Trägheitsgesetz	Jeder Körper behält seine Geschwindigkeit nach Betrag und Richtung so lange bei, wie er nicht durch äußere Kräfte gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern.	allgemein: $\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$
2. Axiom Aktionsgesetz Grundgesetz der Mechanik	Die zeitliche Änderung der Bewegungsgröße des Schwerpunktes, des Impulses $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, ist gleich der resultierenden Kraft \mathbf{F} . Um eine konstante Masse zu beschleunigen, ist eine Kraft \mathbf{F} erforderlich, die gleich dem Produkt aus Masse m und Beschleunigung \mathbf{a} des Schwerpunktes ist.	speziell: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$
3. Axiom Wechselwirkungsgesetz actio = reactio	Wirkt ein Körper 1 auf einen Körper 2 mit der Kraft \mathbf{F}_{12} , so wirkt der Körper 2 auf den Körper 1 mit der Kraft \mathbf{F}_{21} ; beide Kräfte haben den gleichen Betrag, aber entgegengesetzte Richtungen.	$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$

Tabelle E-2. Dichten von Materialien in kg/m^3 bei Normaldruck.

Festkörper		Flüssigkeiten		Gase (0 °C)	
Platin	21 400	Quecksilber	13 546	Xenon	5,90
Gold	19 290	Schwefelsäure	1 834	Chlor	3,21
Blei	11 340	Glycerin	1 260	CO ₂	1,98
Kupfer	8 930	Schweres Wasser D ₂ O	1 105	Sauerstoff	1,43
Messing	≈ 8 500	Wasser H ₂ O	0 °C 999,84	Stickstoff	1,25
Stahl	≈ 7 800		4 °C 999,97	Luft	0 °C 1,29
Eisen	≈ 7 500		20 °C 998,21		-100 °C 2,04
Marmor	≈ 2 700		60 °C 983,21		+100 °C 0,95
Glas	≈ 2 500		100 °C 958,35		+1000 °C 0,28
Normalbeton	≈ 2 400	Petroleum	20 °C 810	Ammoniak	0,77
PVC-Kunststoff	1 400	Alkohol (100 %) 20 °C	790	Methan	0,72
Eis	920	Kfz-Benzin	780	Helium	0,18
Fichtenholz	≈ 700	Leichtbenzin	700	Wasserstoff	0,09

bei Lochsteinen oder Verbundwerkstoffen, errechnet sich folgendermaßen:

$$\varrho_m = \frac{\varrho_1 V_1 + \varrho_2 V_2 + \dots}{V}; \quad (\text{E-2})$$

$\varrho_1, \varrho_2, \dots$ Dichte der Körperanteile,
 V_1, V_2, \dots Teilvolumina der Körperanteile,
 V Gesamtvolumen des Körpers
 $(V = V_1 + V_2 + \dots)$.

Kraft

Das zweite Newtonsche Axiom definiert die Kraft F als Ursache einer Bewegungsänderung und stellt den Zusammenhang zwischen der Bewegungsgröße eines Körpers, also dessen Impuls, und der Einwirkung von Kräften als Ursache der Bewegungsänderung her:

$$F = \frac{d}{dt} p = \frac{d}{dt} (m v) = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt}; \quad (\text{E-3})$$

F Kraft auf den Körper,
 p Impuls des Körpers ($p = m v$),
 v Momentangeschwindigkeit des Körpers,
 m Masse des Körpers.

Bleiben die Massen bei den dynamischen Vorgängen konstant ($dm/dt = 0$), dann folgt aus dem zweiten Newtonschen Axiom das Newtonsche Grundgesetz der Mechanik:

$$F = m \frac{dv}{dt} = m a; \quad (\text{E-4})$$

a Beschleunigung des Körpers.

Die Kraft F ist eine vektorielle Größe, deren Richtung parallel zur Beschleunigung a und deren Betrag $F = m a$ ist. Die Einheit für die Kraft ist $[F] = 1 \text{ N (Newton)} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$.

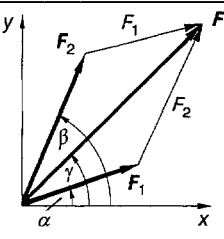
Für die Addition von Kräften und die Zerlegung einer Kraft in verschiedene Krafrichtungen gelten die Regeln der Vektorrechnung (Tabelle E-3).

Kräftegleichgewicht

Das dritte Newtonsche Axiom beschreibt die Wechselwirkungen zwischen Körpern über Kräfte und sagt aus, daß es eine einzelne isolierte Kraft nicht gibt. Wird eine Systemgrenze vorgegeben, dann kann zwischen äußeren Kräften, die von einem Körper außerhalb der Systemgrenzen herrühren, und inneren Kräften, die nur innerhalb des Systems wirken, unterschieden und die Beschreibung dynamischer Vorgänge wesentlich vereinfacht werden (Abschnitt E.4.1).

Ist die nach dem Newtonschen Aktionsprinzip resultierende Kraft auf den Körper null, dann ist auch nach Gl. (E-4) die Beschleunigung des Körpers $a = 0$ und er verharrt in seinem Bewegungszustand; war er also vorher in Ruhe, dann bleibt er in Ruhe. Dies ist

Tabelle E-3. Kräfteparallelogramm und Kraftzerlegung.

$F = F_1 + F_2$	Kräfteparallelogramm	Kräfte	Richtungswinkel
Kräfte- addition; gegeben F_1, F_2, α, β		$F_x = F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta$ $F_y = F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta$ $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cos(\beta - \alpha)}$	$\gamma = \arctan \frac{F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta}{F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta}$
Kräfte- zerlegung; gegeben F, γ, α, β oder F, γ, F_1, F_2		$F_1 = F \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin(\beta - \alpha)}$ $F_2 = F \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)}$	$\alpha = \gamma - \arccos \frac{F^2 + F_1^2 - F_2^2}{2FF_1}$ $\beta = \gamma + \arccos \frac{F^2 + F_2^2 - F_1^2}{2FF_2}$

die Bedingung des statischen Kräftegleichgewichts:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots = 0. \quad (\text{E-5})$$

E.1.2 Wechselwirkungskräfte der Mechanik

Schwer- oder Gewichtskraft F_G

Auf der Erdoberfläche fallen im freien Fall alle Körper konstanter Masse mit der konstanten Fallbeschleunigung g , wenn andere Wechselwirkungen, z. B. die Luftreibung, vernachlässigbar sind. Die Ursache dieser gleichmäßig beschleunigten Fallbewegung ist die Schwer- oder Gewichtskraft F_G auf die Masse m des Körpers:

$$F_G = mg; \quad (\text{E-6})$$

g Fallbeschleunigung auf der Erdoberfläche (in Paris: $g = 9,81 \text{ m/s}^2$).

Die Schwerkraft ist, wie die Fallbeschleunigung, zum Erdmittelpunkt hin gerichtet. Ursache der Schwerkraft ist die Gravitationskraft zwischen der Erd- und der Körpermasse (Abschnitt F).

Hangabtriebskraft F_H

Die Schwerkraft führt, wie Bild E-1 zeigt, bei Körpern auf einer schiefen Ebene zu einer

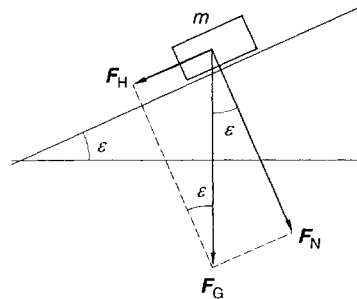


Bild E-1. Kräfte auf schiefer Ebene mit Neigungswinkel ϵ .

hangabwärts, parallel zur schiefen Ebene gerichteten gleichmäßig beschleunigenden Kraft, der Hangabtriebskraft F_H , mit dem Betrag

$$F_H = mg \sin \epsilon; \quad (\text{E-7})$$

ϵ Neigungswinkel der schiefen Ebene.

Senkrecht zur schiefen Ebene entsteht durch die Gewichtskraft die Normalkraft F_N mit dem Betrag

$$F_N = mg \cos \epsilon. \quad (\text{E-8})$$

Zentripetalkraft F_{zp}

Nach dem Newtonschen Grundgesetz ist die Kraft, die einen Körper bei der gleichförmigen

Kreisbewegung (Abschnitt D.2.4) auf der Kreisbahn hält, die *Zentripetalkraft* \mathbf{F}_{zp} :

$$\mathbf{F}_{zp} = m \mathbf{a}_{zp} = -m \omega^2 \mathbf{r}; \quad (\text{E-9})$$

- m Masse des Körpers,
 \mathbf{a}_{zp} Zentripetalbeschleunigung nach Gl. (D-29),
 ω Winkelgeschwindigkeit des Körpers auf der Kreisbahn,
 \mathbf{r} Radiusvektor (Ortsvektor) der Kreisbahn.

Die Zentripetalkraft ist antiparallel zum Radiusvektor \mathbf{r} , d.h. zum Mittelpunkt der Kreisbahn hin gerichtet.

Elastische oder Federkraft \mathbf{F}_{el}

Kräfte verursachen nicht nur beschleunigte Bewegungen (dynamische Kraftwirkung), sondern ändern auch die geometrische Form von Körpern (Deformationswirkung). Umgekehrt üben daher deformierte Körper Kräfte aus, die *elastischen oder Federkräfte* \mathbf{F}_{el} . Nach dem dritten Newtonschen Axiom sind die elastischen Kräfte \mathbf{F}_{el} entgegengesetzt gleich der von außen wirkenden deformierenden Kraft \mathbf{F}_a .

Alle Festkörper zeigen innerhalb maximaler Deformationsgrenzen ein *elastisches Verhalten* (Abschnitt G). Nach dem *Hookeschen Gesetz*

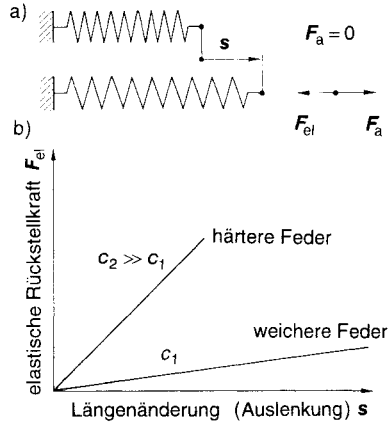


Bild E-2. Elastische Deformation. a) äußere Kraft \mathbf{F}_a und elastische Rückstellkraft \mathbf{F}_{el} ; b) Federkonstante c .

ist die Längenänderung s (Bild E-2) der elastischen Deformation ein Maß für die *elastische Kraft* \mathbf{F}_{el} :

$$\mathbf{F}_{el} = -c s; \quad (\text{E-10})$$

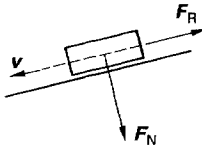

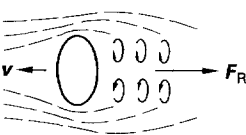
- s Längenänderung des elastischen Körpers ($s \uparrow \mathbf{F}_{el}$),
 c Richtgröße oder Federkonstante.

Tabelle E-4 zeigt die *resultierende Federkonstante* c_{res} für gekoppelte Federn.

Tabelle E-4. Resultierende Federkonstante.

Federkopplung	Resultierende Federkonstante
Parallelkopplung 	$c_{res} = c_1 + c_2 + c_3 + \dots \quad (\text{E-11})$
Serienkopplung 	$c_{res} = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \dots} \quad (\text{E-12})$
Zwischenkopplung 	$c_{res} = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}} + \frac{1}{\frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4}} \quad (\text{E-13})$

Tabelle E-5. Reibungskräfte.

	äußere Reibung Festkörperreibung (Newtonsche Reibung)	innere Reibung Flüssigkeitsreibung (Stokessche Reibung)	turbulente Reibung Luftreibung (Coulombsche Reibung)
Reibungskraft			
Ansatz	$F_R = \mu F_N$ (E-14)	$F_R = b v$ (E-15)	$F_R = d v^2$ (E-16)
Proportionalitätsfaktor	μ : Reibungszahl μ ist unabhängig von der Kontaktfläche zwischen Körper und Unterlage; hängt ab von der Kontaktgeometrie und den Materialien von Körper und Unterlage.	b : Zähigkeitskoeffizient b hängt von der Form des Körpers und der Viskosität η der Flüssigkeit ab. Es wird laminare Strömung vorausgesetzt.	d Luftreibungskoeffizient d hängt von der Anströmfläche und der Oberflächenbeschaffenheit des Körpers sowie von der Dichte und Art des strömenden Mediums ab.
Spezialfälle	μ_R Rollreibung μ_G Gleitreibung μ_H Haftreibung	$b = 6 \pi \eta r$ laminare Umströmung einer Kugel vom Radius r in einem Medium mit der Zähigkeit η	$d = \frac{1}{2} c_w \varrho A$ Körper mit Anströmfläche A und dem Widerstandsbeiwert c_w im Medium der Dichte ϱ

Reibungskraft F_R

Durch Reibung an der Unterlage (*Festkörperreibung*), an der Grenzschicht zur umgebenden Flüssigkeit (*Flüssigkeitsreibung*) oder dem umgebenden Gas (*Luftreibung*) wird die Bewegung von Körpern verlangsamt. Die Ursache der Bewegungsänderung ist die *Reibungskraft* F_R ; sie ist der Richtung der Momentangeschwindigkeit v des Körpers stets entgegengerichtet: $F_R \uparrow \downarrow v$. Der Betrag von F_R setzt sich je nach Situation in unterschiedlicher Weise aus den drei Grenzfällen in Tabelle E-5 zusammen.

Die Festkörperreibung hängt von der Oberflächenbeschaffenheit der beiden reibenden Körper ab. Die *Haft- und Gleitreibungszahlen* unterscheiden sich stark (Tabelle E-6). Bei niedrigen Geschwindigkeiten ist auch die Rollreibung noch näherungsweise proportional zur Normalkraft des Rades auf die Unterlage. In diesem Fall läßt sich die *Rollreibungszahl* μ_R definieren; sie ist abhängig vom

Tabelle E-6. Haft-, Gleit- und Rollreibungszahlen.

Stoffpaar	μ_H	μ_G	μ_R
Stahl auf Stahl	0,15	0,12	0,002
Stahl auf Holz	0,5 bis 0,6	0,2 bis 0,5	
Stahl auf Eis	0,027	0,014	
Holz auf Holz	0,65	0,2 bis 0,4	
Holz auf Leder	0,47	0,27	
Gummi auf Asphalt	0,9	0,85	0,02 bis 0,05
Gummi auf Beton	0,65	0,5	
Gummi auf Eis	0,2	0,15	

Radius R der aufeinander abrollenden Körper. Beispielsweise gilt für das Abrollen von Kugeln auf einer ebenen Unterlage $\mu_R = f/R$, wobei der Faktor f vom Material und von der Oberflächenbeschaffenheit abhängt. So gilt für Stahlkugeln auf einer ebenen Kunststoffunterlage $f = 0,0013$ cm. In Tabelle E-6 sind die Werte von μ_R für Eisenbahn- und Autoräder angegeben.

Nur Bewegungen mit Festkörperreibung verlaufen gleichmäßig beschleunigt oder verzögert; bei den anderen Reibungsarten sind die Bewegungsgesetze kompliziert.

E.2 Dynamik in bewegten Bezugssystemen

E.2.1 Geradlinig bewegtes Bezugssystem

Für den Fall geradlinig gleichmäßig gegeneinander beschleunigter Bezugssysteme sind im Bild E-3 die Vektoren für die Beschreibung der Bahnkurve eines Punktes P aufgezeichnet und die Transformationsgleichungen für die Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren angegeben, welche sich zwischen dem

ruhenden System $S(x, y, z)$ und dem sich gegenüber S mit der Beschleunigung a_s bewegenden Bezugssystem $S'(x', y', z')$ ergeben. Dabei ist die für Geschwindigkeiten klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit zulässige Transformationsbedingung einer absoluten Zeit, also einer von den Koordinatensystemen unabhängigen Zeitkoordinate $t = t'$, angewandt worden (*Galilei-Transformation*); der Fall hoher Relativgeschwindigkeiten wird in Abschnitt U (Relativitätstheorie) beschrieben.

Trägheitskraft F_i

Wird in jedem der beiden Bezugssysteme S und S' die gemessene Beschleunigung auf die Wirkung einer beschleunigenden Kraft zurückgeführt, so ergibt sich im ruhenden System S die Kraft $F = m a$, und in S' die Kraft $F' = m a' = m a - m a_s$. Die Differenz ist die nur im bewegten Bezugssystem als Scheinkraft auftretende Trägheitskraft F_i :

$$F_i = -m a_s; \quad (E-17)$$

a_s Beschleunigung des bewegten Koordinatensystems S' in bezug auf das ruhende System S : $a_s \uparrow F_i$.

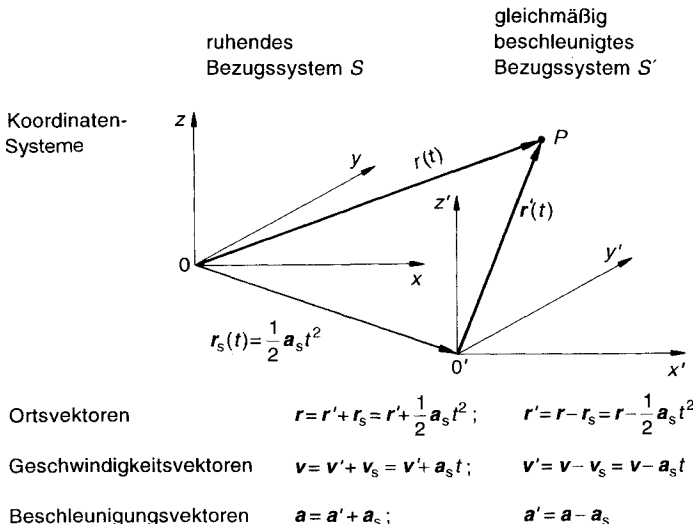


Bild E-3. Galilei-Transformation in gleichmäßig gegeneinander beschleunigten Bezugssystemen.

Die Trägheitskraft wirkt im beschleunigten Bezugssystem auf alle Massen. Durch Messung der Trägheitskraft auf einen Körper im beschleunigten Bezugssystem S' läßt sich somit a_s bestimmen.

Prinzip von D'ALEMBERT

Nach dem Prinzip von D'ALEMBERT (1717 bis 1783) ist in einem, geradlinig gleichmäßig beschleunigten Bezugssystem die Trägheitskraft F_i zu der resultierenden Kraft F_{res} aus den Wechselwirkungskräften vektoriell zu addieren. Demnach ist in bewegten Bezugssystemen S' ein Körper im Gleichgewicht ($a' = 0$), wenn das *dynamische Kräftegleichgewicht* erfüllt ist:

$$F_{res} + F_i = \sum_{i=1}^N F_i - m a_s = 0; \quad (E-18)$$

a_s Beschleunigung des bewegten Bezugssystems,

F_i Wechselwirkungskräfte auf den Körper mit der Masse m im bewegten Bezugssystem.

E.2.2 Gleichförmig rotierende Bezugssysteme

In rotierenden Bezugssystemen treten wegen der beschleunigten Bewegung ebenfalls Scheinkräfte auf, die nur der mitbewegte Beobachter wahrnimmt. Zum einen verspürt der bewegte Beobachter eine Kraft, die ihn von der Drehachse wegtreibt, die *Zentrifugalkraft*; zum anderen eine weitere, bei allen nicht mit der Drehachse von S' übereinstimmenden Geschwindigkeitsrichtungen im bewegten System S' wirkende abtreibende Kraft, die *Coriolis-Kraft*.

Es besteht der Zusammenhang:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}; \quad (E-19)$$

\mathbf{v} Geschwindigkeit im ruhenden Koordinatensystem S ,

\mathbf{v}' Geschwindigkeit im bewegten Koordinatensystem S' ,

$\boldsymbol{\omega}$ Winkelgeschwindigkeit des um die z -Achse rotierenden Koordinatensystems S' .

Für die Beschleunigung $\mathbf{a}' = d'\mathbf{v}'/dt$ im rotierenden Bezugssystem S' ergibt sich aus Gl. (E-19) folgende Verknüpfung:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}); \quad (E-20)$$

$\mathbf{a}' = d'\mathbf{v}'/dt$ Beschleunigung im rotierenden Bezugssystem,

$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ Beschleunigung im ruhenden Bezugssystem.

Ist \mathbf{R} die Komponente des Ortsvektors \mathbf{r} , die senkrecht zur Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ steht, dann geht Gl. (E-20) über in

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' - 2\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega} - \omega^2 \mathbf{R}; \quad (E-21)$$

Coriolis-Beschleunigung Zentripetal-Beschleunigung

\mathbf{a}' Beschleunigung im rotierenden Koordinatensystem,

\mathbf{a} Beschleunigung im ruhenden Koordinatensystem,

$\boldsymbol{\omega}$ Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Koordinatensystems,

\mathbf{v}' Bahngeschwindigkeit im rotierenden Koordinatensystem,

\mathbf{R} Abstand des Körpers von der Drehachse.

Im rotierenden Bezugssystem wirken also zwei weitere Beschleunigungen, die vom Standpunkt des ruhenden Beobachters aus für bewegte Bezugssysteme Scheinkräfte sind.

Zentrifugalkraft F_{zf}

Im gleichförmig rotierenden Bezugssystem tritt eine Trägheitskraft auf, die *Zentrifugalkraft* F_{zf} . Sie ist senkrecht zur Drehachsenrichtung und entgegengesetzt der Zentripetalkraft F_{zp} radial nach außen gerichtet.

$$F_{zf} = + m \omega^2 r; \quad (E-22)$$

m Masse des Körpers,

\mathbf{r} Ortsvektor des Körpers auf der Kreisbahn,

$\boldsymbol{\omega}$ Winkelgeschwindigkeit der Drehbewegung.

Die Beträge von Zentrifugal- und Zentripetalkraft sind gleich, die Richtungen jedoch entgegengesetzt: $F_{zf} \uparrow \downarrow F_{zp}$.

Coriolis-Kraft F_C

Verläuft in einem rotierenden Bezugssystem der vom mitbewegten Beobachter gemessene Geschwindigkeitsvektor nicht parallel zur Drehachse, dann erfährt der bewegte Körper der Masse m eine weitere Trägheitskraft, die *Coriolis-Kraft* F_C :

$$F_C = + 2m(\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}); \quad (\text{E-23})$$

- m Masse des Körpers,
- \mathbf{v}' Bahngeschwindigkeit des Körpers im bewegten System S' ,
- $\boldsymbol{\omega}$ Winkelgeschwindigkeit des bewegten Bezugssystems um die Drehachse.

Die Coriolis-Kraft hat den Betrag $F_C = 2m v' \omega \sin(\mathbf{v}', \boldsymbol{\omega})$ und ist senkrecht zur Drehachsenrichtung $\boldsymbol{\omega}$ und senkrecht zur Geschwindigkeit \mathbf{v}' gerichtet.

E.3 Arbeit, Leistung und Energie

E.3.1 Arbeit W

Wirkt eine Kraft \mathbf{F} auf einen Körper und verschiebt ihn dabei um ein Wegelement Δs , so ist durch die Wirkung dieser Kraft der Zustand des Körpers verändert worden; die Kraft hat an dem Körper *Arbeit* verrichtet. Die *mechanische Arbeit* dW auf dem Weg ds ist durch das Skalarprodukt zwischen der Kraft \mathbf{F} und dem Wegelement ds definiert (Bild E-4):

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = |\mathbf{F}| |d\mathbf{s}| \cos(\mathbf{F}, d\mathbf{s}); \quad (\text{E-24})$$

Ist der Weg von s_1 nach s_2 gekrümmt oder die Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ nicht konstant, dann ergibt sich die Arbeit aus der Integration der Einzelbeiträge dW auf dem Wegelement ds :

$$W_{12} = \int_{s_1}^{s_2} dW = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (\text{E-25})$$

W_{12} mechanische Arbeit für die Verschiebung des Körpers vom Wegpunkt s_1 nach dem Wegpunkt s_2 ,

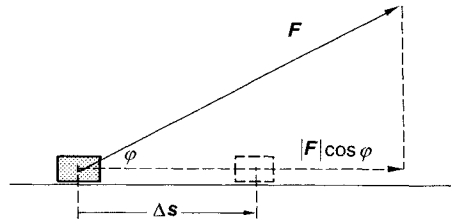


Bild E-4. Zur Definition der Arbeit.

Eine Kraft \mathbf{F} , die senkrecht auf das Wegelement ds wirkt, verrichtet keine Arbeit, dW ist null.

In Tabelle E-7 ist die Arbeit W_{12} zusammengestellt, welche gegen die im erdnahen Gravitationsfeld näherungsweise konstante Schwerkraft \mathbf{F}_G und die von ihr verursachte Hangabtriebskraft \mathbf{F}_H sowie die auf dem Verschiebungsweg konstante Festkörper-Reibungskraft \mathbf{F}_R aufzuwenden ist. Mit aufgenommen ist die *Beschleunigungsarbeit* gegen die Trägheitskraft \mathbf{F}_i der beschleunigten Masse, welche nur von der Differenz der Quadrate der Geschwindigkeiten zu Beschleunigungsbeginn und Beschleunigungsende abhängt.

Die Verformungsarbeit beim Dehnen und Stauchen von elastischen Körpern und die Hubarbeit gegen die Gravitationskraft werden gegen ortsabhängige Kräfte verrichtet; Tabelle E-8 enthält die für diese Fälle sich ergebenden Arbeiten W_{12} .

E.3.2 Leistung P

Die Leistung P ist das Maß dafür, in welcher Zeitspanne Δt die Arbeit ΔW verrichtet wird:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t}. \quad (\text{E-32})$$

Die Einheit der Leistung ist $[P] = 1 \text{ N} \cdot \text{m/s} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ W (Watt)}$.

Tabelle E-7. Arbeit gegen ortsunabhängige Kräfte.

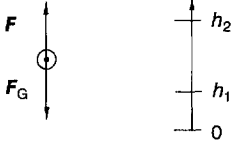
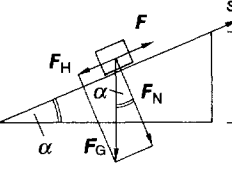
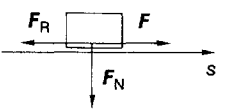
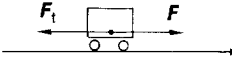
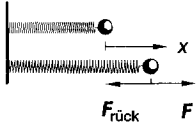
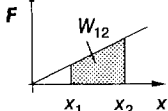
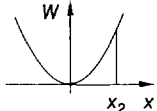
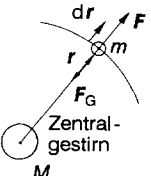
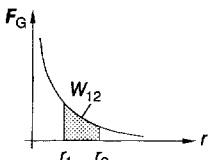
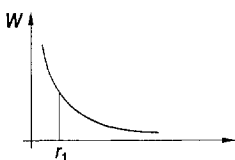
	Geometrie	erforderliche konstante Kraft	Weg	verrichtete Arbeit
Hubarbeit gegen Gewichtskraft F_G		$F = mg$	$s = h_2 - h_1 = h$	$W_{12} = mgh$ nur abhängig von der Höhendifferenz (E-26)
Arbeit auf reibungsfreier schiefer Ebene gegen Hangabtriebskraft F_H		$F = mg \sin \alpha$	$s = \frac{h}{\sin \alpha}$	$W_{12} = mgh$ nur abhängig von der Höhendifferenz (E-27)
Festkörperreibungsarbeit gegen Reibungskraft F_R		$F = \mu F_N = \mu mg$	$s = s_2 - s_1$	$W_{12} = \mu mgs$ Reibungszahl μ auf Weg konstant (E-28)
Beschleunigungsarbeit ohne Reibung gegen Trägheitskraft F_t		$F = ma$	$s = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a}$	$W_{12} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$ nur abhängig von Anfangs- und Endgeschwindigkeit (E-29)

Tabelle E-8. Arbeit gegen ortsabhängige Kräfte.

	System	Kraftgesetz	Arbeit
Verformungsarbeit	Feder-Masse-System 	$F_{\text{rück}} = -cx$ 	$W_{12} = \frac{1}{2}c(x_2^2 - x_1^2)$ (E-30) normiert: $W = 0$ für $x_1 = 0$ 
Hubarbeit gegen die Gravitationskraft	Zentralgestirn und Satellit 	$F_G = -\gamma_G \frac{mM}{r^2} \frac{r}{r}$ 	$W_{12} = \gamma_G Mm \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$ (E-31) normiert: $W = 0$ für $r_2 \rightarrow \infty$ 

Die *Momentanleistung* P zu einem Zeitpunkt t ergibt sich aus Gl. (E-32) für ein unendlich kurzes Zeitintervall dt :

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\mathbf{F} d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}; \quad (\text{E-33})$$

dW Arbeit im Zeitintervall dt ,
 \mathbf{F} momentan wirkende Kraft, mit der Arbeit verrichtet wird,
 \mathbf{s} Ortsvektor des Körpers,
 \mathbf{v} Momentangeschwindigkeit des Körpers.

Die *mittlere Leistung* P_m im Zeitraum t_g ergibt sich wie folgt:

$$P_m = \frac{W_g}{t_g}, \quad (\text{E-34})$$

t_g Zeitraum für die mittlere Leistungsbestimmung,
 W_g gesamte, in der Zeit t_g verrichtete Arbeit.

Aus der in der Zeitspanne t_g in meßbare Reibungsarbeit bzw. Reibungswärme umgewandelten Arbeit lassen sich Leistungen von Antrieben bestimmen.

Wirkungsgrad

Der *mechanische Wirkungsgrad* η eines Antriebs oder eines mechanischen Wandlers ist

$$\eta = \frac{W_{ab}}{W_{zu}} = \frac{\int_{t_0}^{t_1} P_{eff} dt}{\int_{t_0}^{t_1} P_N dt}; \quad (\text{E-35})$$

W_{zu} zugeführte Arbeit im Zeitraum
 $\Delta t = t_1 - t_0$,
 W_{ab} abgeführte Nutzarbeit im Zeitraum
 $\Delta t' = t'_1 - t'_0$,
 P_N momentan zugeführte Nennleistung,
 P_{eff} effektive momentane Leistungsabgabe.

Der Wirkungsgrad ist dimensionslos, der Wertebereich $0 \leq \eta \leq 1$.

Stimmen bei Leistungswandlern die Zeitintervalle der *zugeführten Nennleistung* P_N und der

abgegebenen *effektiven Leistung* P_{eff} überein, dann ergibt sich als *Wirkungsgrad* η :

$$\eta = \frac{P_{eff}}{P_N} = 1 - \frac{P_v}{P_N}; \quad (\text{E-36})$$

P_v Leistungsverluste durch Reibung oder andere Verlustmechanismen wie beispielsweise Abstrahlung von Wärme
 $(P_v = P_N - P_{eff})$,
 P_N momentane zugeführte Nennleistung.

Werden mehrere Antriebe und Wandler hintereinandergeschaltet, dann ist der *Gesamtwirkungsgrad* η_{ges} der Anlage:

$$\eta_{ges} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \dots \quad (\text{E-37})$$

E.3.3 Energie E

Körper und Systeme aus materiellen Punkten unterscheiden sich in ihrem physikalischen Zustand dadurch, in welchem Maße ihnen mechanische Arbeit zugeführt oder entnommen wurde. Das Maß hierfür ist die Körpereigenschaft *Energie E*. Die Änderung der Energie durch Zufuhr oder Abfuhr von Arbeit W wird durch den *Energiesatz der Mechanik* beschrieben:

$$\Delta E = E_{nachher} - E_{vorher} = W. \quad (\text{E-38})$$

Ein Körper besitzt demnach die mechanische Energie:

$$E_{mech} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} m v^2 + \left(\frac{1}{2} c s^2 + m g h \right); \quad (\text{E-39})$$

m Masse des Körpers,
 c Federkonstante oder Richtgröße des Körpers,
 v Momentangeschwindigkeit des Körpers,
 s Weg der elastischen Verformung,
 h Höhe der Lage des Körpers.

Die Energieanteile des Körpers hängen davon ab, wo das Bezugsniveau $h = 0$ und der verformungsfreie Ausgangszustand $s = 0$ liegen

und auf welches Bezugssystem die Geschwindigkeit v bezogen ist.

Die Reibungsarbeit kann im Gegensatz zu den anderen mechanischen Arbeitsformen nicht vollständig in die anderen Arbeitsarten übergeführt werden; die Reibungsarbeit verändert den Wärmezustand des Körpers. Die mechanische Energie eines Körpers umfaßt nur Energieanteile, die vollständig ineinander umwandelbar sind.

Energieerhaltungssatz

In einem abgeschlossenen System, also einem System aus Körpern, in das weder ein Massenstrom fließt noch Arbeit zu- oder abgeführt wird, gehorchen alle Naturerscheinungen einem fundamentalen Gesetz, dem *Satz von der Erhaltung der Energie*:

In einem abgeschlossenen System bleibt der Energieinhalt konstant. Energie kann weder vernichtet werden noch aus nichts entstehen; sie kann sich in verschiedene Formen umwandeln oder zwischen Teilen des Systems ausgetauscht werden.

Nach allen Erfahrungen mit Energieumwandlungsprozessen gibt es kein *perpetuum mobile erster Art*. Es ist also unmöglich, eine Maschine zu bauen, die dauernd Arbeit verrichtet, ohne daß ihr von außerhalb des Maschinensystems ein Energiebetrag zugeführt wird.

Ist ein mechanisches System abgeschlossen, wird also keine äußere Arbeit verrichtet ($W = 0$), und sind die Verluste durch Reibungsarbeit vernachlässigbar, dann gilt für die kinetische und potentielle Energie des Systems materieller Punkte bzw. Körper der *Energieerhaltungssatz der Mechanik*:

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = (\text{räumlich und zeitlich}) \\ \text{konstant.} \quad (\text{E-40})$$

Sind die Voraussetzungen des Energieerhaltungssatzes der Mechanik erfüllt, dann ergibt sich für zwei Zeitpunkte t und t' die folgende Gleichung, ohne daß der zeitliche Verlauf der

einzelnen Geschwindigkeiten und Koordinaten dazwischen bekannt sein muß:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} m_1 (v_1^2 - v_1'^2) + \frac{1}{2} m_2 (v_2^2 - v_2'^2) + \dots \\ & + \frac{1}{2} c_1 (s_1^2 - s_1'^2) + \frac{1}{2} c_2 (s_2^2 - s_2'^2) + \dots \\ & + m_1 g (h_1 - h_1') + m_2 g (h_2 - h_2') + \dots = 0 \end{aligned} \quad (\text{E-41})$$

E.4 Impuls und Stoßprozesse

Nach dem zweiten Newtonschen Axiom haben Körper eine *Bewegungsgröße* als Körper-eigenschaft, den *Impuls* p ; dieser ist definiert als

$$p = m v; \quad (\text{E-42})$$

m Masse des bewegten Körpers,
 v Momentangeschwindigkeit des Körpers.

Der Impuls hat die Einheit $[p] = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = 1 \text{ N} \cdot \text{s}$. Nach dem Newtonschen Grundgesetz der Mechanik ändert sich nach Gl. (E-3) der Impuls p unter dem Einfluß einer Kraft F gemäß $F = dp/dt$.

Die Wirkung einer Kraft F im Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$ wird als *Kraftstoß* bezeichnet; durch ihn ändert sich der Impuls eines Körpers um Δp :

$$\Delta p = p(t_1) - p(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt. \quad (\text{E-43})$$

Im allgemeinen hängt die wirkende Kraft von der Zeit ab, wie Bild E-5a zum Ausdruck bringt. Ist die Kraft während der Kontaktzeit Δt des Kraftstoßes konstant, wie im Bild E-5b, dann vereinfacht sich Gl. (E-43) zu

$$\Delta p = F_0 \Delta t = F(t_2 - t_1). \quad (\text{E-44})$$

E.4.1 Systeme materieller Punkte

Der *Gesamtimpuls* $p = \sum_{k=1}^N p_k$ von Systemen aus mehreren materiellen Punkten der Masse

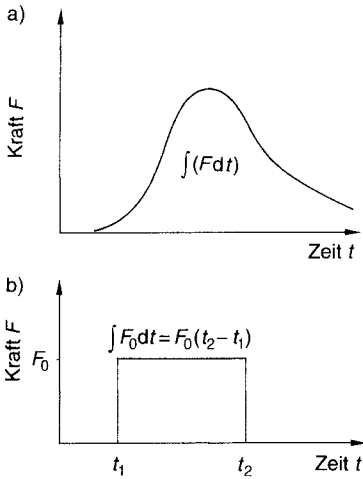


Bild E-5. Kraftstöße mit a) zeitabhängigem Kraftverlauf und b) zeitlich konstanter Kraft.

m_k und mit dem Einzelimpuls p_k , wie beispielsweise die N Kügelchen einer abgeschossenen Schrotladung oder die N beteiligten Körper bei Stoßprozessen, gehorcht einem mit dem zweiten Newtonschen Axiom vergleichbaren *Impulssatz für ein System materieller Punkte*:

$$\mathbf{F}_a = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_{ak} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N \mathbf{p}_k = \frac{d\mathbf{p}}{dt}; \quad (\text{E-45})$$

\mathbf{F}_{ak} äußere Kraft auf den materiellen Punkt k ,

\mathbf{p}_k Impuls des materiellen Punktes k ,

\mathbf{p} Gesamtimpuls des Systems,

N Gesamtanzahl der materiellen Punkte des Systems.

In den Bewegungsgleichungen nach Gl. (E-3) für die N materiellen Punkte unter den *inneren Wechselwirkungskräften* $\mathbf{F}_{i,jk}$ und den *äußeren Kräften* \mathbf{F}_{ak} im Bild E-6 kompensieren sich nämlich nach dem dritten Newtonschen Axiom gerade die inneren Kräfte:

$$\sum_{k,j=1 \atop (k \neq j)}^N \mathbf{F}_{i,jk} = 0.$$

Als Wechselwirkungskraft auf das System materieller Punkte bleibt also nur die Summe der

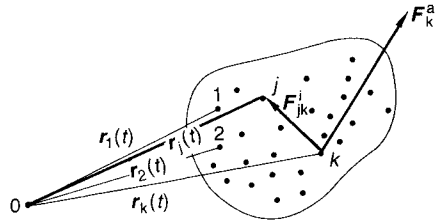


Bild E-6. Kräfte auf Punkt k in einem System materieller Punkte.

äußeren Kräfte \mathbf{F}_a auf die einzelnen Massen m_k übrig.

Der Impulssatz für ein System materieller Punkte stimmt formal mit dem Newtonschen Grundgesetz Gl. (E-4) für einen einzelnen Massenpunkt überein, wenn der *Massenmittelpunkt* oder *Schwerpunkt* S eingeführt wird, dessen Ortsvektor \mathbf{r}_S folgendermaßen definiert ist:

$$\mathbf{r}_S(t) = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \mathbf{r}_k(t)}{m}; \quad (\text{E-46})$$

m Gesamtmasse des Systems materieller

Punkte $\left(m = \sum_{k=1}^N m_k \right)$

m_k Masse des k -ten materiellen Punktes,
 $\mathbf{r}_k(t)$ momentaner Ortsvektor des materiellen Punktes.

Weisen Systeme von Massenpunkten mit gleichen Massen eine Symmetrieachse auf, dann liegt der Schwerpunkt S auf dieser Achse.

Die *Schwerpunktsgeschwindigkeit* $\mathbf{v}_S(t)$ ergibt sich aus der Differentiation von Gl. (E-46):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_S(t) &= \frac{d\mathbf{r}_S(t)}{dt} = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \frac{d}{dt} \mathbf{r}_k(t)}{m} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^N \mathbf{p}_k(t)}{m} = \frac{\mathbf{p}}{m}; \end{aligned} \quad (\text{E-47})$$

\mathbf{p} Gesamtimpuls der N materiellen Punkte,
 m Gesamtmasse der N materiellen Punkte.

Mit der *Schwerpunktsbeschleunigung* $a_s = dv_s/dt$ und dem Impulssatz von Gl. (E-45) folgt für ein System materieller Punkte der *Schwerpunktssatz*:

Der Schwerpunkt S eines Systems materieller Punkte bewegt sich so, als sei im Schwerpunkt die Gesamtmasse m des Körpers vereinigt, und als würden alle äußeren Kräfte im Schwerpunkt angreifen.

Mit dem Schwerpunktssatz lautet das Newtonsche Grundgesetz für die Bewegung von Systemen materieller Punkte unter der Wirkung äußerer Kräfte F_a :

$$F_a = m a_s; \quad (E-48)$$

- F_a Summe der äußeren Kräfte auf das System,
 m Gesamtmasse der materiellen Punkte,
 a_s Beschleunigung des Schwerpunkts S des Systems materieller Punkte.

Sind die Abstände der materiellen Punkte in den Systemen konstant, dann handelt es sich um *starre Körper*; auch für diese gelten der beschriebene Impuls- und Schwerpunktssatz nach Gl. (E-45) und Gl. (E-48). Wegen ihrer großen Bedeutung in der Praxis wird die Dynamik der starren Körper im Abschnitt E.7 beschrieben.

Wirkt auf ein System materieller Punkte oder starrer Körper keine resultierende äußere Kraft, ist also $F_a = 0$ und damit $dp/dt = 0$, dann ist der Gesamtimpuls p konstant. Für die Einzelimpulse des Systems gilt der *Impulserhaltungssatz*:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_N = p \\ = (\text{zeitlich}) \text{ konstant.} \quad (E-49)$$

Bei einem Stoßprozeß erlaubt der Impulserhaltungssatz auch ohne die genaue zeitliche Beschreibung des Stoßvorgangs die Berech-

nung der Impulsänderungen $p_k - p'_k$ der beteiligten Körper:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots + m_N v_N \\ = m_1 v'_1 + m_1 v'_2 + \dots + m_N v'_N; \quad (E-50)$$

- m_1, m_2, \dots, m_N Massen der am Stoß beteiligten Körper,
 v_1, v_2, \dots, v_N Geschwindigkeiten der Körper vor dem Stoß,
 v'_1, v'_2, \dots, v'_N Geschwindigkeiten der Körper nach dem Stoß.

Gl. (E-50) gilt auch eingeschränkt auf die Zeitpunkte kurz vor und kurz nach dem Stoß, wenn äußere Kräfte wirken.

E.4.2 Stoßprozesse

Bei einem Stoßprozeß berühren sich die Stoßpartner kurzzeitig mit kleinen Stoßzeiten und ändern ihre jeweiligen Bewegungszustände. Bei Stoßvorgängen wird prinzipiell zwischen Stößen ohne Energieverlust in der Stoßzeit, den *elastischen Stößen*, und jenen mit Energieumwandlungen, den *inelastischen Stößen*, unterschieden.

Dazu kommt noch die Unterscheidung der Stoßarten nach der Stoßgeometrie, wie diese in Tabelle E-9 klassifiziert sind.


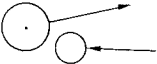


Die Geschwindigkeitsvektoren v_1 und v_2 zweier Stoßpartner vor dem Stoß spannen die *Stoßebene* auf. Bis auf den exzentrischen Stoß verlaufen die Bahnen der Stoßpartner auch nach dem Stoß in der Stoßebene. Im x, y -Koordinatensystem der Stoßebene gelten dann der *Impulserhaltungssatz* nach Gl. (E-49):

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x}, \quad (E-51)$$

$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 v'_{1y} + m_2 v'_{2y}, \quad (E-52)$$

Nach dem *Energiesatz der Mechanik* von Gl. (E-38) ist für den Energieaustausch anzusetzen:

Tabelle E-9. Klassifikation der Stoßprozesse.

Stoßart	Bild	Charakteristika
gerade		Die Geschwindigkeitsvektoren liegen auf einer Geraden.
schief		Die Geschwindigkeitsvektoren liegen in einer Ebene und schließen einen Winkel ein.
zentral		Die Schwerpunkte der Stoßpartner liegen auf der Normalen zur Berührungsebene durch den Berührungspunkt (Stoßnormale).
exzentrisch		Die Schwerpunkte liegen nicht auf der Stoßnormalen. Es tritt Rotation auf.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} m_1 (v_{1x}^2 + v_{1y}^2) + \frac{1}{2} m_2 (v_{2x}^2 + v_{2y}^2) \\ &= \frac{1}{2} m_1 (v'_{1x}^2 + v'_{1y}^2) + \frac{1}{2} m_2 (v'_{2x}^2 + v'_{2y}^2) + \Delta W; \end{aligned} \quad (\text{E-53})$$

ΔW	Energieverlust beim Stoß durch inelastische Verformungsarbeit und dissipative Reibungsvorgänge,
m_1, m_2	Massen der am Stoß beteiligten Körper,
v_{1x}, v_{2x}	Geschwindigkeitskomponenten der Körper in x -Richtung <i>vor</i> dem Stoß,
v_{1y}, v_{2y}	Geschwindigkeitskomponenten der Körper in y -Richtung <i>vor</i> dem Stoß,
v'_{1x}, v'_{2x}	Geschwindigkeitskomponenten der Körper in x -Richtung <i>nach</i> dem Stoß,
v'_{1y}, v'_{2y}	Geschwindigkeitskomponenten der Körper in y -Richtung <i>nach</i> dem Stoß.

Zur Beschreibung der inelastischen Stöße genügen die Gln. (E-51) bis (E-53) nicht; dazu sind zusätzlich im Fall des zentralen Stoßes noch eine weitere Randbedingung und beim schiefen Stoß sogar zwei weitere Angaben bezüglich der Energieumwandlung oder der Geschwindigkeiten nach dem Stoß notwendig.

In Tabelle E-10 sind die Stoßverläufe und die Stoßgleichungen der Stöße zusammengestellt, für die einfache Beziehungen aus den Gln. (E-51) bis (E-53) folgen.

Bei den geraden, zentralen Stößen bewegen sich die Stoßpartner nach dem Stoß auf derselben Stoßlinie wie vor dem Stoß. Wird daher die x -Achse in diese Stoßlinie gelegt, dann sind die y -Komponenten in Gl. (E-52) null.

Ohne spezielle, problemabhängige Angaben zum Energieübertrag während des Stoßzeitpunkts lassen sich die Stoßgleichungen schiefer Stöße nicht angeben. In die Tabelle E-10 aufgenommen ist der schiefe, zentrale, elastische Stoß. Ohne Verformungsarbeit wirken keine Reibungskräfte, welche eine Kraft senkrecht zur Stoßgeraden des schiefen Stoßes, also der x -Richtung, übertragen können. Damit ist die Impulsänderung der x -Komponenten der Stoßpartner nach dem Impulssatz Gl. (E-45) null, und es gilt $p'_{1x} = p_{1x}$ und $p'_{2x} = p_{2x}$.

E.4.3 Raketengleichung

Bei einer Rakete ist bei der Bewegungsänderung die Masse des Körpers nicht konstant,

Tabelle E-10. Stoßgleichungen zentraler, gerader und schiefer Stöße.


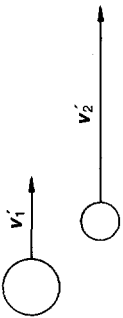

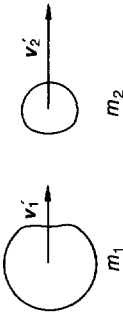
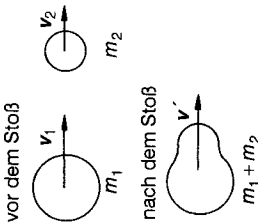
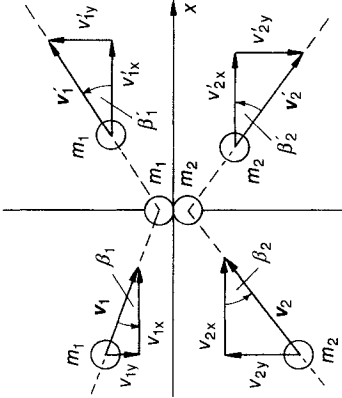
Stoßart	Stoßverlauf	Randbedingung	Stoßgleichungen	Anmerkungen
gerade zentral elastisch	<p>vor dem Stoß</p>  <p>nach dem Stoß</p> 	$v_1 \parallel v_2$ $\Delta W = 0$	$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$ $v_2' = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}$	<p>Spezialfälle sind der Stoß gleichgroßer Massen ($m_1 = m_2$), bei dem $v_1' = v_2$ und $v_2' = v_1$ wird und die Stoßpartner die Geschwindigkeit, den Impuls und die kinetische Energie nur austauschen, sowie der Stoß gegen eine feste Wand ($m_2 \gg m_1$), bei dem die stoßende Masse mit $v_1' = -v_1$ direkt reflektiert wird.</p>
gerade zentral inelastisch	<p>vor dem Stoß</p>  <p>nach dem Stoß</p> 	$v_1 \parallel v_2$ ΔW gegeben	$v_1' = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_2(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \sqrt{1 - 2 \frac{m_1 + m_2}{m_1m_2(v_1 - v_2)^2} \Delta W}$ $v_2' = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \sqrt{1 - 2 \frac{m_1 + m_2}{m_1m_2(v_1 - v_2)^2} \Delta W}$	<p>Sind der relative Stoßenergieverlust ξ bzw. der relative Stoßenergieübertrag $\eta = 1 - \xi$ bekannt, so errechnet sich der Energieverlust daraus zu $\Delta W' = \frac{1}{2} \xi (m_1v_1^2 + m_2v_2^2)$.</p>

Tabelle E-10 (Fortsetzung)

Stoßart	Stoßverlauf	Randbedingung	Stoßgleichungen	Anmerkungen
gerade zentral unelastisch	 <p>vor dem Stoß</p> <p>nach dem Stoß</p> <p>$m_1 + m_2$</p>	$\mathbf{v}_1 \parallel \mathbf{v}_2$ $\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}'_2$ Stoß mit Kopplung	$\mathbf{v}' = \mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}'_2 = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (\text{E-58})$ $\Delta W_{\text{unelast}} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 \quad (\text{E-59})$	Stößt ein Körper der Masse m_1 einen ruhenden Körper ($\mathbf{v}_2 = 0$) gleicher Masse ($m_2 = m_1$) unelastisch, so geht nach Gl. (E-57) genau die Hälfte der kinetischen Energie als Verformungs- und Reibungsarbeit verloren.
schief zentral elastisch		$m_1 \mathbf{v}'_{1x} = m_1 \mathbf{v}_{1x}$ $m_2 \mathbf{v}'_{2x} = m_2 \mathbf{v}_{2x}$ $\Delta W = 0$	$\mathbf{v}'_{1x} = \mathbf{v}_{1x}; \quad \mathbf{v}'_{1y} = \frac{(m_1 - m_2) \mathbf{v}_{1y} + 2 m_2 \mathbf{v}_{2y}}{m_1 + m_2} \quad (\text{E-60})$ $\mathbf{v}'_{2x} = \mathbf{v}_{2x}; \quad \mathbf{v}'_{2y} = \frac{2 m_1 \mathbf{v}_{1y} + (m_2 - m_1) \mathbf{v}_{2y}}{m_1 + m_2} \quad (\text{E-61})$	Sind die Massen der Stoßpartner gleich ($m_1 = m_2$), und ist der gestoßene Körper vor dem Stoß in Ruhe ($\mathbf{v}_2 = 0$), dann folgt im elastischen Fall ($\Delta W = 0$) aus Gl. (E-51) $\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1$. Nach dem schiefen, zentralen, elastischen Stoß stehen also die Geschwindigkeitsrichtungen senkrecht aufeinander: $\angle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \beta'_1 + \beta'_2 = 90^\circ$. Erfolgt der schiefe Stoß eines Körpers gegen eine Wand ($m_2 \gg m_1$), dann folgt aus Gl. (E-58) die Beziehung $\mathbf{v}'_{1y} = -\mathbf{v}_{1y}$ und damit $\beta'_1 = \tan(\mathbf{v}'_{1y}/\mathbf{v}'_{1x}) = \beta_1$. Die Bahn eines elastisch gegen eine Wand geworfenen Körpers gehorcht also dem Reflexionsgesetz: Der Ausfallswinkel ist gleich dem Einfallswinkel.

der Raketenimpuls also $\mathbf{p} = m(t) \mathbf{v}(t)$; durch den Massenausstoß heißer Gase gemäß Bild E-7 wird die Schubkraft der Rakete erzeugt. Der Impulssatz nach Gl. (E-45) für die Raketenbewegung lautet

$$\mathbf{F}_a = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{v}_{\text{rel}} \frac{dm}{dt} = m \mathbf{a} - \mathbf{F}_{\text{schub}}; \quad (\text{E-62})$$

\mathbf{F}_a	äußere Gesamtkraft, z. B. Gravitation, Reibung,
$\mathbf{F}_{\text{schub}}$	Schubkraft ($\mathbf{F}_{\text{schub}} = \mathbf{v}_{\text{rel}} dm/dt$),
$\mathbf{v}(t)$	Momentangeschwindigkeit der Rakete,
\mathbf{v}_T	Absolutgeschwindigkeit der Treibgase,
\mathbf{v}_{rel}	Strahlgeschwindigkeit der Treibgase bezüglich der Rakete [$\mathbf{v}_{\text{rel}} = \mathbf{v}_T - (\mathbf{v} + d\mathbf{v})$].

Die Schubkraft ist dabei der Relativgeschwindigkeit \mathbf{v}_{rel} der ausströmenden Gase entgegengesetzt.

Die in der Tabelle E-11 zusammengestellten Bewegungsgleichungen der Rakete ergeben sich, wenn Gl. (E-62) unter den folgenden Randbedingungen integriert wird:

- Der Treibstoff wird im Zeitintervall $0 \leq t \leq t_B$ bis zur Brennschlußzeit t_B ausgestoßen;

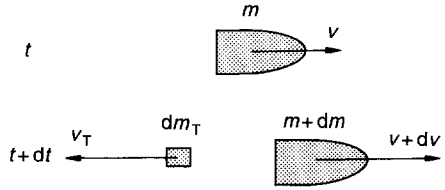


Bild E-7. Massen und Geschwindigkeiten von Rakete und Treibstoff zur Zeit t und $t + dt$.

- die Strahlgeschwindigkeit \mathbf{v}_{rel} ist während der Brennzeit konstant;
- der Massenstrom dm/dt ist konstant und ergibt sich aus der Differenz der Anfangsmasse m_0 der mit Treibstoff beladenen Rakete und der Masse m_{leer} der bis zur Brennschlußzeit t_B ausgebrannten Rakete zu $dm/dt = -\dot{\Phi}_m = -(m_0 - m_{\text{leer}})/t_B$;
- die Zeitabhängigkeit der Raketenmasse ist linear entsprechend $m(t) = m_0 - \dot{\Phi}_m t$;
- der Luftwiderstand ist vernachlässigbar;
- die Erdbeschleunigung $g(h)$ wird näherungsweise als konstant angenommen und damit die Schwerkraft auf die Rakete mit $\mathbf{F}_G(t) = m(t) \mathbf{g}_0$ angesetzt.

Mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t_B)$ nach Gl. (E-65) erreicht die Rakete nach Brennschluß in der Höhe $h(t_B)$ noch eine zusätzliche Steighöhe von $h_{\text{zusätzlich}} = v^2(t_B)/(2g_0)$.

Tabelle E-11. Raketengleichungen nach K. ZIOLKOWSKIJ.

Bahnparameter	zum Zeitpunkt t nach Zündung mit Anfangsgeschwindigkeit v_0	bei Brennschluß t_B nach Start von Erdoberfläche $v_0 = 0$
Raketen-Beschleunigung	$a(t) = \frac{\dot{\Phi}_m}{m_0 - \dot{\Phi}_m t} v_{\text{rel}} - g_0 \quad (\text{E-63})$	$a(t_B) = 0$
Raketen-Geschwindigkeit	$v(t) = v_{\text{rel}} \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \dot{\Phi}_m t}\right) - g_0 t + v_0 \quad (\text{E-64})$	$v(t_B) = v_{\text{rel}} \ln\left(\frac{m_0}{m_{\text{leer}}}\right) - g_0 t_B \quad (\text{E-65})$
Raketen-Steighöhe	$h(t) = \frac{v_{\text{rel}}(m_0 - \dot{\Phi}_m t)}{\dot{\Phi}_m} \times \left[\frac{m_0}{m_0 - \dot{\Phi}_m t} - 1 - \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \dot{\Phi}_m t}\right) \right] - \frac{1}{2} g_0 t^2 + v_0 t$	$h(t_B) = \frac{v_{\text{rel}} m_{\text{leer}}}{\dot{\Phi}_m} \times \left[\frac{m_0}{m_{\text{leer}}} - 1 - \ln\left(\frac{m_0}{m_{\text{leer}}}\right) \right] - \frac{1}{2} g_0 t_B^2 \quad (\text{E-67})$

E.5 Drehbewegungen

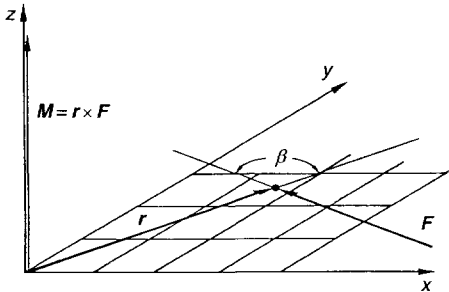
Drehbewegungen von Systemen (insbesondere starrer Körper) werden durch Gleichungen beschrieben, die strukturell gleich gebaut sind wie jene der Translation (Tabelle E-12), wenn die folgenden charakteristischen Größen der Rotation definiert werden.

E.5.1 Drehmoment

Um einen Körper in Rotation um eine vorgegebene Drehachse zu versetzen, muß ein Drehmoment auf ihn ausgeübt werden. Das *Drehmoment* M definiert die Wirkung einer Kraft bezüglich eines Punktes; es ist als Vektorprodukt definiert:

Tabelle E-12. Analogie Translation und Rotation.

Translation		Rotation	
Größe, Formelzeichen	Einheit	Größe, Formelzeichen	Einheit
Weg s, ds	m	Winkel $\varphi, d\varphi$	rad = 1
Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$	m/s	Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$	rad/s = 1/s
Beschleunigung $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$	m/s ²	Winkelbeschleunigung $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$	rad/s ² = 1/s ²
Masse m	kg	Massenträgheitsmoment $J = \sum_i \Delta m_i r_i^2$	kg · m ²
Kraft $F = m a = \frac{dp}{dt}$	kg · m/s ² = N	Drehmoment $M = J \alpha = \frac{dL}{dt}$	N · m
Impuls $p = m v$	kg · m/s = N · s	Drehimpuls $L = J \omega$	kg · m ² /s = N · m · s
Kraftkonstante $c = \left \frac{F}{s} \right $	N/m	Winkelrichtgröße $c^* = \left \frac{M}{\varphi} \right $	N · m/rad = N · m
Arbeit $dW = F ds$	N · m = J = W · s	Arbeit $dW = M d\varphi$	N · m = J = W · s
Spannarbeit $W = \frac{1}{2} c s^2$	J = N · m	Spannarbeit $W = \frac{1}{2} c^* \varphi^2$	N · m · rad ² = J
kinetische Energie $E_{\text{kin}}^{\text{trans}} = \frac{1}{2} m v^2$	J = N · m	kinetische Energie $E_{\text{kin}}^{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2$	J = N · m
Leistung $P = \frac{dW}{dt} = F v$	W = J/s	Leistung $P = \frac{dW}{dt} = M \omega$	W = J/s

Bild E-8. Zur Definition des Drehmoments M .

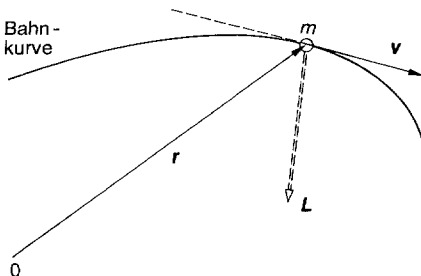
$$M = r \times F; \quad (E-68)$$

F Kraftvektor,
 r Ortsvektor zum Angriffspunkt der Kraft,
 M Drehmoment der Kraft F bezüglich des Koordinatennullpunkts.

Das Drehmoment hat die Einheit $[M] = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$ und den Betrag $M = r F \sin(\angle(r, F)) = r F \sin \beta$; der Drehmomentvektor steht senkrecht auf der Ebene, die von r und F aufgespannt wird (Bild E-8).

E.5.2 Drehimpuls

Ein materieller Punkt m führt am Ort r auf einer Bahnkurve (Bild E-9), mit der Momentangeschwindigkeit v eine Drehbewegung aus, wenn sein Impuls p eine Komponente senkrecht zum Ortsvektor r hat, das Vektorprodukt $r \times p$ also nicht verschwindet. Diese für die Drehbewegung charakteristische Bewegungsgröße wird als *Drehimpuls* L definiert:

Bild E-9. Zur Definition des Drehimpulses L .

$$L = r \times p; \quad (E-69)$$

r Ortsvektor des Körpers,
 p Impuls des Körpers auf der Bahnkurve ($p = m v$).

Der Drehimpuls hat die Einheit $[L] = 1 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$. L steht senkrecht auf den Richtungen des Ortsvektors r und der Momentangeschwindigkeit v . Bei Bewegung in einer Ebene zeigt der Drehimpuls L in Richtung der Drehachse der Drehbewegung und ist

$$L = J \omega; \quad (E-70)$$

ω Winkelgeschwindigkeit der Drehbewegung des Körpers,
 J Massenträgheitsmoment.

Durch Einsetzen von $v = \omega \times r$ aus Übersicht D-4 in Gl. (E-69) läßt sich für die Drehbewegung eines materiellen Punkts dessen *Massenträgheitsmoment* J herleiten:

$$J = m r^2 \quad (E-71)$$

m Masse des materiellen Punkts,
 r Abstand des materiellen Punkts von der Drehachse.

Für starre Körper, bei denen alle materiellen Punkte mit derselben Winkelgeschwindigkeit ω rotieren, läßt sich ebenfalls über $J = \sum m_k r_k^2$ ein Massenträgheitsmoment definieren, wie Gl. (E-97) zeigt, für Systeme materieller Punkte dagegen ist dies nicht sinnvoll.

Unter Berücksichtigung der verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten ω_k der Systemteile ist der *Gesamtdrehimpuls* L eines Systems materieller Punkte (Bild E-10)

$$L = \sum_{k=1}^N m_k r_k^2 \omega_k = \sum_{k=1}^N J_k \omega_k; \quad (E-72)$$

m_k Masse des k -ten von N materiellen Punkten,
 r_k Abstand des k -ten materiellen Punkts von der Drehachse,
 ω_k Winkelgeschwindigkeit des k -ten materiellen Punkts,
 J_k Massenträgheitsmoment des k -ten materiellen Punkts.

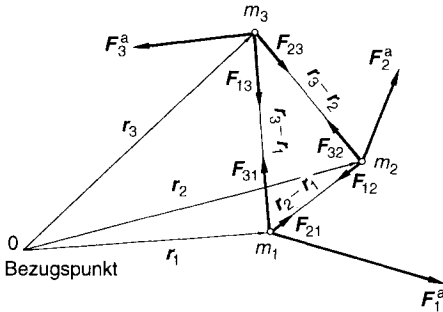


Bild E-10. System aus drei materiellen Punkten.

Die zeitliche Differentiation der Gl. (E-69) liefert den *Drehimpulssatz der Rotation*:

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist gleich dem Drehmoment der äußeren Kräfte auf den Körper.

$$\frac{dL}{dt} = M; \quad (\text{E-73})$$

L Drehimpuls des Körpers oder Gesamtdrehimpuls des Systems materieller Punkte mit Einzeldrehimpulsen L_k

$$\left(L = \sum_{k=1}^N L_k \right),$$

M Gesamtdrehmoment der äußeren Kräfte auf den Körper oder das System materieller Punkte

$$\left(M = \sum_{k=1}^N M_{a,k} \right).$$

Der Drehimpulssatz der Rotation für ein System materieller Punkte (Bild E-10) entspricht Gl. (E-73) völlig; in diesem Fall ist der *Gesamtdrehimpuls L* der Drehimpulse L_k der einzelnen materiellen Punkte und das *Gesamtdrehmoment M* der am System angreifenden äußeren Drehmomente $M_{a,k}$ einzusetzen. Die Drehmomente der inneren Kräfte $F_{i,jk}$ kompensieren sich wegen des dritten Newtonschen Axioms.

Zentralkräfte, z. B. die Gravitationskraft (Abschnitt F), die entgegengesetzt zum Radiusvektor r ($F \uparrow \downarrow r$) des materiellen Punkts gerichtet sind, üben auf diesen wegen $r \times F = 0$

kein Drehmoment aus; der Bahndrehimpuls L der Körper ist konstant.

Die Integration von Gl. (E-73) ergibt die als *Drehmomentenstoß* bezeichnete Drehimpulsänderung ΔL :

$$\Delta L = L(t_2) - L(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} M dt. \quad (\text{E-74})$$

Bei einem konstanten äußeren Drehmoment M_0 ist der Drehmomentenstoß, also die Drehimpulsänderung, $\Delta L = M_0 \Delta t$.

Drehimpulserhaltungssatz

Wirken auf ein System von materiellen Punkten oder starren Körpern keine äußeren Drehmomente oder kompensieren sich die Drehmomente äußerer Kräfte, so daß das Gesamtdrehmoment $M = 0$ ist, dann ist nach dem Drehimpulssatz und der Gl. (E-73) die Drehimpulsänderung $dL/dt = 0$ und somit der Gesamtdrehimpuls L konstant. Für das System aus N starren Körpern folgt dann für zwei beliebige Zeitpunkte t_1 und t_2 aus Gl. (E-72) der *Drehimpulserhaltungssatz*

$$\begin{aligned} J_1 \omega_1(t_1) + J_2 \omega_2(t_1) + \dots + J_N \omega_N(t_1) \\ = J_1 \omega_1(t_2) + J_2 \omega_2(t_2) + \dots + J_N \omega_N(t_2); \end{aligned} \quad (\text{E-75})$$

$J_1, J_2 \dots J_N$ Massenträgheitsmoment der N Körper,

$\omega_1, \omega_2 \dots \omega_N$ Winkelgeschwindigkeiten der N Körper.

E.5.3 Dynamisches Grundgesetz der Rotation

Mit der Gl. (E-70) läßt sich Gl. (E-73) umschreiben in eine der Newtonschen Grundgleichung vergleichbare Differentialgleichung für die Drehbewegung:

$$M = J \alpha + \omega \frac{dJ}{dt}; \quad (\text{E-76})$$

α Winkelbeschleunigung der Drehbewegung
 $\alpha = d\omega/dt = d^2\varphi/dt^2$,

ω Winkelgeschwindigkeit ($\omega = d\varphi/dt$),

φ Drehwinkel,

M Gesamtdrehmoment der äußeren Kräfte,

J Massenträgheitsmoment.

Ist das Massenträgheitsmoment von Körpern konstant, wie beispielsweise bei einem starren Körper oder einem Massenpunkt auf einer Kreisbahn, dann geht Gl. (E-76) über in das *dynamische Grundgesetz der Rotation* für den Drehwinkel φ der Rotationsbewegung:

$$M = J\alpha = J \frac{d\omega}{dt} = J \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (\text{E-77})$$

E.5.4 Arbeit, Leistung und Energie bei der Drehbewegung

Arbeit

Ein Drehmoment $M(\varphi)$, das einen Körper um eine Drehachse in eine Drehbewegung versetzt, verrichtet die *Arbeit* W_{rot} der *Rotationsbewegung*:

$$W_{\text{rot}} = \int_{s_0}^{s_1} \mathbf{F}(s) \, ds = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M(\varphi) \, d\varphi; \quad (\text{E-78})$$

$M(\varphi)$ Drehmoment auf den Körper mit Drehbewegung $[M(\varphi) = r \times \mathbf{F}(\varphi)]$,

$d\varphi$ Drehwinkeländerung,

ds Wegelement auf der Bahnkurve im Abstand r von der Drehachse ($ds = d\varphi \times r$).

Für ein konstantes Drehmoment M_0 parallel zur Winkeländerung $d\varphi$ gilt $W_{\text{rot}} = M_0(\varphi_1 - \varphi_0)$.

Zur Torsion von Körpern im elastischen Bereich oder bei Torsionsfedern ist ein Drehmoment aufzuwenden, das proportional zum Drehwinkel φ ansteigt: $M = c^* \varphi$. Analog zum Hookeschen Gesetz wird die Proportionalitätskonstante c^* mit der Einheit $[c^*] = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$ als *Richtmoment* oder *Drehfederkonstante* bezeichnet. Aus der Integration der Gl. (E-78) für das Drehmoment der Torsion ergibt sich als *Torsionsarbeit* W_{Torsion} :

$$W_{\text{Torsion}} = \frac{1}{2} c^* (\varphi_1^2 - \varphi_0^2); \quad (\text{E-79})$$

φ Drehwinkel der Torsion,

c^* Richtmoment der elastischen Torsion oder der Torsionsfeder.

Die *Beschleunigungsarbeit* W_{rot} , welche gegen das Drehmoment der Trägheitskraft zur Erhöhung der Winkelgeschwindigkeit ω eines Körpers zu verrichten ist, ergibt sich für Körper mit einem konstanten Massenträgheitsmoment J , wenn in Gl. (E-78) die Gl. (E-77) des dynamischen Grundgesetzes der Rotation und $d\varphi = \omega dt$ eingesetzt wird, zu

$$W_{\text{rot}} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} J\alpha \, d\varphi = \frac{1}{2} J (\omega_1^2 - \omega_0^2); \quad (\text{E-80})$$

φ_0, φ_1 Ausgangs- und Enddrehwinkel der Drehbeschleunigung,

J Massenträgheitsmoment des rotierenden Körpers,

ω_0, ω_1 momentane Winkelgeschwindigkeit des Körpers zu den Zeitpunkten t_0 und t_1 bei den Drehwinkeln φ_0 und φ_1 .

Leistung

Aus Gl. (E-78) folgt die *momentane Leistung* P der Kraft, welche das Drehmoment und die Drehbewegung bewirkt:

$$P_{\text{rot}} = \frac{dW}{dt} = M\omega; \quad (\text{E-81})$$

M wirkendes momentanes Gesamtdrehmoment auf den Körper,

ω momentane Winkelgeschwindigkeit des Körpers,

W Dreharbeit.

Energie

Die Zufuhr oder Entnahme von Torsionsarbeit W_{Torsion} ändert die *potentielle Energie* $E_{\text{pot, rot}}$ der Torsionskörper:

$$E_{\text{pot, rot}} = \frac{1}{2} c^* \varphi^2; \quad (\text{E-82})$$

c^* Richtmoment des elastisch verdrehten Körpers,

φ Drehwinkel der elastischen Torsion.

Die Beschleunigungsarbeit W_{rot} , welche die Geschwindigkeit der rotierenden Körper verändert, erhöht als Rotationsanteil die kinetische Energie der Körper, welche um eine

Drehachse rotieren. Ein rotierender Körper besitzt demnach die *kinetische Rotationsenergie* $E_{\text{kin, rot}}$:

$$E_{\text{kin, rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2; \quad (\text{E-83})$$

- J Massenträgheitsmoment des rotierenden Körpers,
 ω Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Körpers.

Im allgemeinen Bewegungsfall müssen im Energiesatz der Mechanik nach Gl. (E-38) die rotatorischen Energieanteile zu E_{kin} und E_{pot} dazu genommen werden. Für reine Rotationsbewegungen ohne Arbeitszufuhr oder -abfuhr durch äußere Drehmomente, wie beispielsweise bei freien Drehschwingungen von Torsionskörpern, läßt sich ein *Energieerhaltungssatz der Rotation* formulieren:

$$\frac{1}{2} J \omega^2 + \frac{1}{2} c^* \varphi^2 = \frac{1}{2} J \omega'^2 + \frac{1}{2} c^* \varphi'^2 = \text{konstant}; \quad (\text{E-84})$$

- c^* Richtmoment der Torsionsfeder,
 J Massenträgheitsmoment des Torsionskörpers,
 φ Drehwinkel der Torsionsfeder zum Zeitpunkt t ,
 φ' Drehwinkel der Torsionsfeder zum Zeitpunkt t' ,
 ω Winkelgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t bei φ ,
 ω' Winkelgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t' bei φ' .

E.6 Erhaltungssätze der Mechanik

Mit den Erhaltungssätzen für die mechanischen Größen Energie, Impuls und Drehimpuls lassen sich viele Probleme auf elegante Art und Weise lösen. In Tabelle E-13 sind die Erhaltungssätze und die Voraussetzungen für ihre Anwendbarkeit dargestellt.

Tabelle E-13. Erhaltungssätze der Mechanik.

Energieerhaltungssatz

In einem abgeschlossenen System, in dem nur konservative Kräfte wirksam sind, bleibt die Gesamtenergie konstant:

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{const.},$$

$$dE_{\text{kin}} = -dE_{\text{pot}}.$$

Ein abgeschlossenes System nimmt weder von der Umgebung Arbeit auf, noch gibt es Arbeit nach außen ab.

Impulserhaltungssatz

Haben die auf ein System einwirkenden äußeren Kräfte keine Resultierende, dann bleibt der Gesamtimpuls des Systems konstant:

$$\mathbf{p} = \sum \mathbf{p}_k = \text{const.}, \text{ oder}$$

$$d\mathbf{p} = 0, \text{ falls } \mathbf{F}_{\text{res, a}} = \sum \mathbf{F}_{k, a} = 0.$$

Ist die Resultierende der äußeren Kräfte null, dann ist die Geschwindigkeit des Schwerpunkts konstant:

$$\mathbf{v}_s = \text{const.}, \text{ falls } \mathbf{F}_{\text{res, a}} = 0.$$

Drehimpulserhaltungssatz

Ist die Vektorsumme aller an einem System angreifenden äußeren Drehmomente null, dann bleibt der Gesamtdrehimpuls konstant:

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{L}_k = \text{const.}, \text{ oder}$$

$$d\mathbf{L} = 0, \text{ falls } \mathbf{M}_{\text{res, a}} = 0.$$

In einem Zentralkraftsystem bleibt die Flächengeschwindigkeit konstant (Flächensatz, 2. Keplersches Gesetz).

E.7 Mechanik starrer Körper

Der starre Körper ist ein makroskopisches System von Massenpunkten, die starr miteinander verbunden sind. Unabhängig von der Beanspruchung durch äußere Kräfte behält der starre Körper seine Form bei.

E.7.1 Freiheitsgrade und Kinematik

Ein starrer Körper benötigt zur vollständigen Beschreibung seiner Lage im Raum sechs Koordinaten; er hat sechs *Freiheitsgrade*, die

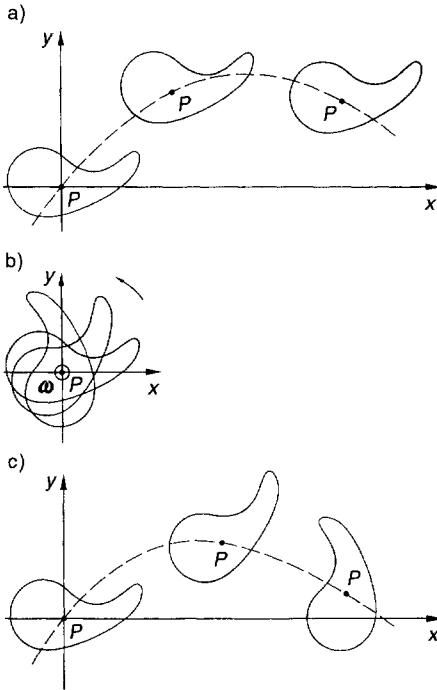


Bild E-11. Bewegung eines starren Körpers.

a) Translation, b) Rotation,
c) zusammengesetzte Bewegung

in je drei Freiheitsgrade der *Translation* und der *Rotation* zerlegt werden können (Bild E-11).

E.7.2 Statik

Aus der Voraussetzung der Formstabilität starrer Körper folgt, daß Kräfte, die am starren Körper angreifen, längs ihrer *Wirkungslinie* beliebig verschoben werden können:

Kräfte am starren Körper sind linienflüchtig.

Bild E-12 zeigt die zeichnerische Konstruktion der resultierenden Kraft, wenn an einem starren Körper zwei Kräfte, die in einer Ebene verlaufen, an verschiedenen Punkten angreifen.

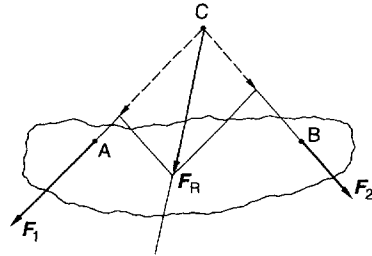


Bild E-12. Konstruktion der Resultierenden.

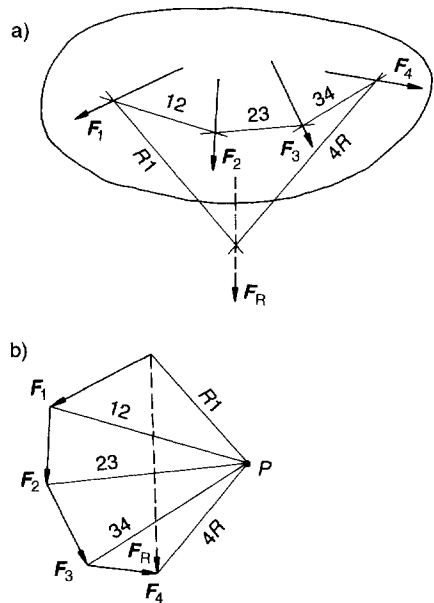


Bild E-13. Kraft- und Seileck.

a) Lageplan, Seileck, b) Kräfteplan, Krafteck

Die Reduktion einer ebenen Kräftegruppe mit mehreren Kräften kann grafisch mit Hilfe des *Seileckverfahrens* durchgeführt werden (Bild E-13). Betrag und Richtung der resultierenden Kraft F_R werden grafisch im *Kräfteplan* ermittelt. Die *Polstrahlen* R_1 , 12 , 23 , 34 und $4R$ zu einem beliebig wählbaren Pol P werden parallel verschoben in den *Lageplan*. Durch den Schnittpunkt der Geraden R_1 und $4R$ ist die Lage der Resultierenden F_R festgelegt.

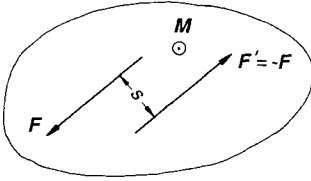


Bild E-14. Kräftepaar.

Kräftepaar

Zwei gleich große antiparallele Kräfte $F = -F'$, die nicht auf einer Wirkungslinie liegen, werden als *Kräftepaar* bezeichnet (Bild E-14). Ihre Resultierende ist null ($F + F' = 0$); sie können daher keine Translationsbeschleunigung hervorrufen. Ein Kräftepaar übt auf den Körper ein Drehmoment aus vom Betrag

$$M = F s; \quad (\text{E-85})$$

M Drehmoment,

F Betrag einer Kraft,

s Abstand der beiden Kräfte.

Der Vektor M steht senkrecht auf der von F und F' aufgespannten Ebene (Drehsinn nach Rechtsschraubenregel, Bild E-14). Als *freier* Vektor ist M beliebig parallel verschiebbar. Durch ein Kräftepaar erfährt ein starrer Körper eine Winkelbeschleunigung.

Gleichgewichtsbedingungen der Statik

Ein starrer Körper ist im statischen Gleichgewicht, wenn die Vektorsummen aller an ihm angreifenden äußeren Kräfte und Drehmomente null sind:

$$\sum F_a = 0, \quad (\text{E-86})$$

$$\sum M_a = 0. \quad (\text{E-87})$$

Bei der ebenen Kräftegruppe sind die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt, wenn Kraft- und Seileck geschlossen sind. Greifen nur drei Kräfte am starren Körper an, dann müssen die Wirkungslinien aller drei Kräfte durch einen Punkt gehen, und das Krafteck muß geschlossen sein.

Freimachen eines Körpers

Der Körper wird als losgelöst von der Umgebung betrachtet. Anstelle der mechanischen Verbindungs- oder Berührungsstellen werden die Kräfte eingesetzt, die von der Umgebung auf den Körper ausgeübt werden. Auf den freigemachten Körper werden die Gleichgewichtsbedingungen der Statik angewandt. Die Kraftrichtungen der Wechselwirkungskräfte hängen von der Art der Kontaktstellen zur Umgebung ab.

Schwerpunkt, potentielle Energie, Standsicherheit

Ein Körper ist in jeder beliebigen Lage im statischen Gleichgewicht, wenn er im *Schwerpunkt* oder *Massenmittelpunkt* unterstützt wird (Tabelle E-14).

Tabelle E-14. Schwerpunktskoordinaten.

N diskrete Punktmassen	$r_s = \frac{\sum_{k=1}^N m_k r_k}{m} \quad (\text{E-88})$
homogene Dichte	$r_s = \frac{1}{V} \iiint_{\text{Vol}} r \, dV \quad (\text{E-89})$

r_s Ortsvektor des Schwerpunkts

r_k Ortsvektor des Punktes k

m_k Masse des Punktes k

m Gesamtmasse

Die potentielle Energie eines starren Körpers im Schwerfeld der Erde ist

$$E_{\text{pot}} = \sum_{k=1}^N m_k g z_k = m g z_s; \quad (\text{E-90})$$

E_{pot} potentielle Energie,

m_k Masse des Massenpunkts k ,

g Erdbeschleunigung,

z_k Höhenkoordinate des Punktes k ,

m Gesamtmasse des Körpers,

z_s Höhenkoordinate des Schwerpunkts.

Abhängig davon, ob bei einer Auslenkung des Körpers aus seiner Ruhelage die Höhenkoordinate z_s des Schwerpunkts steigt, fällt oder konstant bleibt, unterscheidet man die Gleichgewichtsfälle *stabil*, *labil* und *indifferent*.

E.7.3 Dynamik

Kinetische Energie

Eine beliebige Bewegung eines starren Körpers ist darstellbar als Überlagerung der Translationsbewegung des Schwerpunkts S und der Rotation aller Teile um S . Entsprechend läßt sich die kinetische Energie als Summe von *Translations-* und *Rotationsenergie* berechnen (Tabelle E-15).

Drehimpuls

Der Drehimpuls eines starren Körpers setzt sich aus einem *Bahndrehimpuls* und einem *Eigendrehimpuls* zusammen (Tabelle E-16):

Tabelle E-15. Kinetische Energie des starren Körpers.

Gesamtenergie	$E_{\text{kin}}^{\text{ges}} = E_{\text{kin}}^{\text{trans}} + E_{\text{kin}}^{\text{rot}}$ (E-91)
Translationsenergie	$E_{\text{kin}}^{\text{trans}} = \frac{1}{2} m v_s^2$ (E-92)
Rotationsenergie	$E_{\text{kin}}^{\text{rot}} = \frac{1}{2} \left(\sum_k m_k r_{\text{sk}}^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} J_s \omega^2$ (E-93)
m	Masse des Körpers
v_s	Geschwindigkeit des Schwerpunkts
m_k	Masse des Massenpunkts k
r_{sk}	Abstand des Massenpunkts k von der Drehachse durch den Schwerpunkt
ω	Winkelgeschwindigkeit der Rotation
J_s	Massenträgheitsmoment bezüglich der Drehachse durch den Schwerpunkt

Tabelle E-16. Drehimpuls des starren Körpers.

Gesamtdrehimpuls	$\mathbf{L}_{\text{ges}} = \mathbf{L}_s + \mathbf{L}$ (E-94)
Bahndrehimpuls	$\mathbf{L}_s = m \mathbf{r}_s \times \mathbf{v}_s$ (E-95)
Eigendrehimpuls bezüglich einer Achse durch den Schwerpunkt	$\mathbf{L} = \sum_k m_k \mathbf{r}_{\text{sk}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\text{sk}})$ $= J_s \boldsymbol{\omega}$ (E-96)
m	Masse des Körpers
\mathbf{r}_s	Ortsvektor des Schwerpunkts
\mathbf{v}_s	Geschwindigkeit des Schwerpunkts
m_k	Masse des Massenpunkts k
\mathbf{r}_{sk}	Ortsvektor vom Schwerpunkt zum Massenpunkt k in einem körperfesten Koordinatensystem
$\boldsymbol{\omega}$	Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Körpers
J_s	Massenträgheitsmoment (Trägheitstensor)

Massenträgheitsmoment

Das Massenträgheitsmoment eines Körpers berechnet sich als Summe aller Punktmassen, multipliziert mit dem Quadrat ihres Abstands von einer Bezugsachse (Tabellen E-17 und E-18).

Tabelle E-17. Massenträgheitsmoment.

diskrete Massenverteilung	$J_p = \sum_k m_k r_{\text{pk}}^2$ (E-97)
kontinuierliche Massenverteilung	$J_p = \int_{\text{Vol}} r^2 dm$ $= \int_{\text{Vol}} \varrho(r) r^2 dV$ (E-98)
homogene Dichte	$J_p = \varrho \int_{\text{Vol}} r^2 dV$ (E-99)
Trägheitsradius	$i = \sqrt{J_p/m}$ (E-100)
Steinerscher Satz	$J_p = J_s + m r_{\text{sp}}^2$ (E-101)
J_p	Massenträgheitsmoment bezüglich einer Achse durch P
m_k	Masse des Massenpunkts k
r_{pk}	Abstand des Massenpunkts k von der Bezugsachse durch P
r	Abstand des Volumelements dV von der Bezugsachse
ϱ	Dichte
m	Masse des Körpers
J_s	Massenträgheitsmoment bezüglich Schwerpunktsachse
r_{sp}	Abstand von zwei parallelen Achsen durch S bzw. P

Trägheitstensor

Bei der Rotation eines beliebig geformten Körpers um eine in beliebiger Richtung durch den Schwerpunkt gehende Achse ist im allgemeinen die Richtung des Drehimpulses \mathbf{L} nicht parallel zum Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$. Gleichung (E-96) zur Berechnung des Drehimpulses ist nur richtig, wenn \mathbf{J} als Tensor definiert wird:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}$$

mit den Trägheitsmomenten

$$J_{xx} = \int_{\text{Vol}} (y^2 + z^2) \rho \, dV$$

$$J_{yy} = \int_{\text{Vol}} (z^2 + x^2) \rho \, dV$$

$$J_{zz} = \int_{\text{Vol}} (x^2 + y^2) \rho \, dV$$

und den Deviations- oder Zentrifugalmomenten

$$J_{xy} = J_{yx} = - \int_{\text{Vol}} xy \rho \, dV$$

$$J_{yz} = J_{zy} = - \int_{\text{Vol}} yz \rho \, dV$$

$$J_{zx} = J_{xz} = - \int_{\text{Vol}} zx \rho \, dV$$

Für den Vektor \mathbf{L} des Drehimpulses gilt dann nach den Regeln der Matrizenmultiplikation:

$$\mathbf{L} = \mathbf{J} \circ \boldsymbol{\omega}.$$

Ein Körper kann nur dann ohne dynamische Lagerkräfte um eine Achse rotieren, wenn bezüglich dieser Achse die Deviationsmomente verschwinden. Eine solche Achse wird als *freie Achse* oder *Hauptträgheitsachse* bezeichnet. Jeder Körper hat drei senkrecht aufeinander stehende Hauptträgheitsachsen. Die zugehörigen Massenträgheitsmomente J_I , J_{II} und J_{III} heißen *Hauptträgheitsmomente*. Das kleinste und das größte Massenträgheitsmoment eines Körpers (jeweils bezüglich Schwerpunktsachsen) bilden zwei der Hauptträgheitsmomente.

Trägheitsellipsoid

Bestimmt man die Massenträgheitsmomente eines Körpers um verschiedene Schwerpunktsachsen und trägt in Polarkoordinaten jeweils in Achsenrichtung die Länge $R = \text{const}/\sqrt{J}$ ab, so liegen alle Endpunkte auf einem Ellipsoid (*Poinsot-Konstruktion*). Die Hauptachsen des Ellipsoids werden durch die Hauptträgheitsachsen gebildet. Aus dem Trägheitsellipsoid kann das Massenträgheitsmoment bezüglich willkürlicher Schwerpunktsachsen grafisch oder analytisch bestimmt werden. Bei rotationssymmetrischen Körpern ist das Trägheitsellipsoid ein Rotationsellipsoid, bei hochsymmetrischen Körpern wie

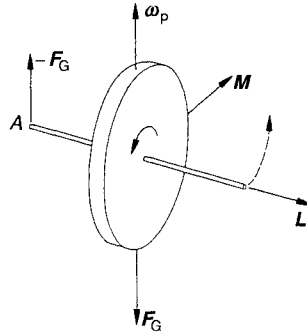


Bild E-15. Präzession eines einseitig aufgehängten Kreisels. \mathbf{M} Drehmoment aus Gewichtskraft \mathbf{F}_G und Stützkraft $-\mathbf{F}_G$ im Punkt A.

Kugel, Würfel, Tetraeder usw. bekommt es Kugelform. Diese Körper besitzen keine Deviationsmomente.

Kreisel

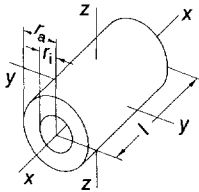
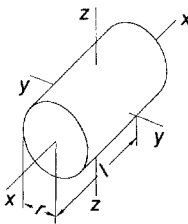
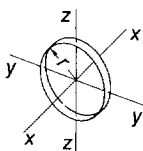
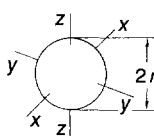
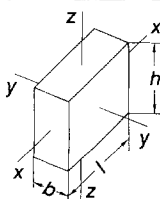
Ein schnell rotierender starrer Körper wird als Kreisel bezeichnet. Ein konstantes Drehmoment \mathbf{M} , das senkrecht zur Kreiselachse steht, verursacht eine *Präzession*, wobei der Vektor \mathbf{L} versucht, sich auf dem kürzesten Weg parallel zu \mathbf{M} einzustellen (Bild E-15, Tabelle E-19).

Tabelle E-19. Kreiselpräzession.

Ursache	Auswirkung	Zusammenhang
Drehmoment	Präzession	$\omega_p = \frac{M}{L} = \frac{M}{J\omega}$ (E-105) $\omega_p = \frac{L \times M}{L^2}$
Zwangs-drehung	Drehmoment	$M = L \times \omega_p$ (E-106)

ω_p	Winkelgeschwindigkeit der Präzession
\mathbf{M}	Drehmomente senkrecht zur Kreiselachse
\mathbf{L}	Drehimpuls
\mathbf{J}	Massenträgheitsmoment des Kreisels
$\boldsymbol{\omega}$	Winkelgeschwindigkeit des Kreisels
\mathbf{M}	vom Kreisel auf die Umgebung ausgeübtes Moment
ω_p	Winkelgeschwindigkeit der Zwangsdrehung

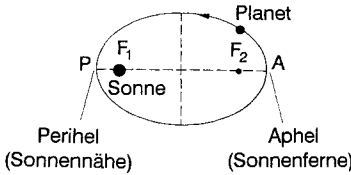
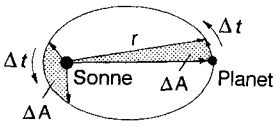
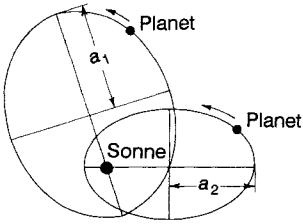
Tabelle E-18. Massenträgheitsmomente ausgewählter Körper.

	Hohlzylinder	$J_x = \frac{1}{2} m (r_a^2 + r_i^2)$ $J_y = J_z = \frac{1}{4} m (r_a^2 + r_i^2 + \frac{1}{3} l^2)$
	dünnwandiger Hohlzylinder	$J_x = m r^2$ $J_y = J_z = \frac{1}{4} m (2 r^2 + \frac{1}{3} l^2)$
	Vollzylinder	$J_x = \frac{1}{2} m r^2$ $J_y = J_z = \frac{1}{4} m r^2 + \frac{1}{12} m l^2$
	dünne Scheibe ($l \ll r$)	$J_x = \frac{1}{2} m r^2$ $J_y = J_z = \frac{1}{4} m r^2$
	dünner Stab ($l \gg r$) unabhängig von der Form des Querschnitts	$J_x = \frac{1}{2} m r^2$ $J_y = J_z = \frac{1}{12} m l^2$
	dünner Ring	$J_x = m r^2$ $J_y = J_z = \frac{1}{2} m r^2$
	Kugel, massiv	$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} m r^2$
	dünne Kugelschale	$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{3} m r^2$
	Quader	$J_x = \frac{1}{12} m (b^2 + h^2)$ $J_y = \frac{1}{12} m (l^2 + h^2)$ $J_z = \frac{1}{12} m (l^2 + b^2)$

F Gravitation

Die *Gravitation* bezeichnet die gegenseitige Anziehung von Körpern $i = 1, 2, 3 \dots$ mit den jeweiligen Massen m_i (*Massenanziehung*). Die physikalische Beschreibung dieser Kraftwirkung zwischen einer Masse und anderen Massen wurde von ISAAC NEWTON aus den in Tabelle F-1 dargestellten, von JOHANNES KEPLER empirisch aus astronomischen Beobachtungen abgeleiteten Gesetzmäßigkeiten der Planetenbewegung aufgestellt.

Tabelle F-1. Die Keplerschen Gesetze.

<p>1. Keplersches Gesetz (Astronomia nova 1609)</p>	<p>Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren gemeinsamen Brennpunkt die Sonne steht.</p> 
<p>2. Keplersches Gesetz (Astronomia nova 1609)</p>	<p>Der von der Sonne zum Planeten gezogene Radiusvektor r überstreicht in gleichen Zeiten Δt gleiche Flächen ΔA:</p> $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \text{konstant.}$ 
<p>3. Keplersches Gesetz (Harmonices mundi 1619)</p>	<p>Die Quadrate der Umlaufzeiten T_1, T_2 zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen a_1 und a_2:</p> $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$ 

F.1 Newtonsches Gravitationsgesetz

Zwischen zwei Körpern mit den Massen m_1 und m_2 wirkt eine *anziehende* Kraft, die *Gravitationskraft* F_G ; sie ist dem Abstandsvektor r_{12} der Massenschwerpunkte S_1 und S_2 der beiden Körper entgegengerichtet (Bild F-1), und hat den Betrag

$$|F_G| = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}; \quad (\text{F-1})$$

F_G Gravitationskraft,
 m_1, m_2 Massen der Körper 1 und 2,
 r_{12} Abstandsvektor der Körper 1 und 2,
 G Gravitationskonstante

Die *Gravitationskonstante* G hat als Proportionalitätskonstante des Gravitationsgesetzes den experimentell mit der Gravitationsdrehwaage bestimmten Wert

$$G = (6,6742 \pm 0,0007) \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}.$$

F.2 Gravitationsfeldstärke

Die Massenanziehungskräfte F_{i0} verschiedener Körper $i = 1, 2, \dots$ summieren sich am Ort r_0 eines Körpers mit der Masse m_0 *vektoriell*. Nach dem Gravitationsgesetz ergibt sich für die resultierende Kraft F_{G0} auf den Probekörper mit der Masse m_0 :

$$\begin{aligned} F_{G0} = & -m_0 G \frac{m_1}{r_{10}^2} \frac{r_{10}}{|r_{10}|} \\ & -m_0 G \frac{m_2}{r_{20}^2} \frac{r_{20}}{|r_{20}|} - \dots; \end{aligned} \quad (\text{F-2})$$

F_{G0} resultierende Kraft auf den Körper mit der Masse m_0 ,
 m_1, m_2 Massen der Körper, welche auf m_0 eine Massenanziehung ausüben,
 r_{10}, r_{20} Abstandsvektoren von den Körpern 1 bzw. 2 zum Körper der Masse m_0 ,
 G Gravitationskonstante.

Das Minuszeichen berücksichtigt, daß die Gravitationskräfte F_G und die Abstandsvektoren r *antiparallel* gerichtet sind.

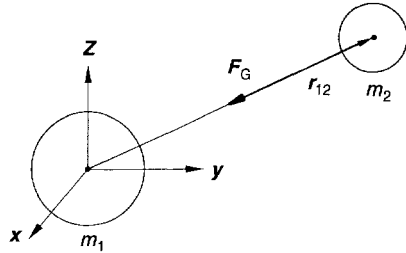


Bild F-1. Massenanziehung, Gravitation.

Die *Gravitationsfeldstärke* $g(r)$ am Ort $r = r_0$ faßt die Wirkung der Massenanziehungen der umgebenden Körper $i = 1 \dots N$ ortsbezogen, aber unabhängig von der Masse m_0 des Probekörpers zusammen:

$$g(r) = \frac{F_{G0}}{m_0} = -G \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{r_{i0}^2} \frac{r_{i0}}{|r_{i0}|}; \quad (\text{F-3})$$

m_i Masse des i -ten Körpers, welche auf den Probekörper mit der Masse m_0 eine Massenanziehung ausübt,
 r_{i0} Abstandsvektor vom i -ten Körper zum Probekörper mit m_0 ,
 G Gravitationskonstante.

Durch Messung der Gravitationskraft $F(r)$ am Ort r auf eine Probemasse m_0 läßt sich die Gravitationsfeldstärke $g(r)$ experimentell bestimmen.

Fallen Körper nur unter dem Einfluß der Gravitationskraft bzw. sind andere Kräfte wie Coriolis- oder Reibungskräfte vernachlässigbar, dann ist die Fallbeschleunigung gleich der Gravitationsfeldstärke g . Auf der Erdoberfläche beträgt die Gravitationsfeldstärke der Erdmasse

$$g_E = G \frac{m_E}{r_E^2}; \quad (\text{F-4})$$

m_E Erdmasse ($m_E = 5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$),
 r_E Erdradius ($r_E = 6370 \text{ km}$).

Wegen der Geoidform der Erde ist die Gravitationsfeldstärke bzw. die Fallbeschleunigung abhängig von der geografischen Breite φ ; es gilt $g_E(\varphi) = (9,832 - 0,052 \cos^2 \varphi) \text{ m/s}^2$. Der Normwert der Fallbeschleunigung $g_{E, \text{Norm}} =$

$9,80665 \text{ m/s}^2$ gilt für Meereshöhe in etwa 45° geografischer Breite. In der Technik wird im allgemeinen mit einer *mittleren Fallbeschleunigung* $g_{E,m} = 9,81 \text{ m/s}^2$ gerechnet.

F.3 Gravitations- oder Hubarbeit

Wird ein Körper der Masse m_2 von einem Körper der Masse m_1 wegtransportiert oder angehoben, so ist gegen (deshalb Minuszeichen) die Gravitationskraft F_G zwischen den beiden Körpern *Gravitations- oder Hubarbeit* W_{12} zu verrichten. Da nur Kraftkomponenten in Wegrichtung dr zur Hubarbeit beitragen, ergibt sich

$$W_{12} = - \int_{r_1}^{r_2} F_G \cdot dr = + \int_{r_1}^{r_2} G \frac{m_1 m_2}{r_{12}} dr_{12}; \quad (\text{F-5})$$

- r_1 Ortsvektor des Körpers mit der Masse m_2 in der Ausgangslage,
 r_2 Ortsvektor des Körpers mit der Masse m_2 in der Endlage,
 r_{12} Abstand der beiden Körper mit den Massen m_1 und m_2 ,
 m_1, m_2 Massen der Körper 1 und 2,
 G Gravitationskonstante.

Unabhängig vom Weg, auf dem der Körper mit der Masse m_2 gegen den Körper mit der Masse m_1 angehoben wird, ergibt sich als *Gravitations- oder Hubarbeit* W_{12} :

$$W_{12} = G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right); \quad (\text{F-6})$$

- r_1 Abstand der beiden Körper in der Ausgangslage,
 r_2 Abstand der beiden Körper in der Endlage nach der Hubarbeit,
 m_1, m_2 Massen der Körper 1 und 2,
 G Gravitationskonstante.

F.4 Potentielle Energie der Gravitation

Die Gravitationsarbeit wird als potentielle Energie E_{pot} des Körpers mit der Masse m_2 , bezogen auf den Körper m_1 , gespeichert. Die

potentielle Energie der Gravitation ist so normiert, daß für einen unendlich großen Abstand der beiden Körper $E_{\text{pot}} = 0$ ist. Wird von dieser Ausgangslage der Körper mit der Masse m_2 auf den Körper mit der Masse m_1 zu bewegt, dann wird Arbeit frei, und es vermindert sich mit dem Massenschwerpunktsabstand die *potentielle Energie* E_{pot} des Körpers mit der Masse m_2 auf:

$$E_{\text{pot}} = -G \frac{m_1 m_2}{r}; \quad (\text{F-7})$$

- m_1, m_2 Massen der Körper 1 und 2,
 r Abstand des Massenschwerpunkts des Körpers 2 von demjenigen des Körpers 1,
 G Gravitationskonstante.

F.5 Gravitationspotential

Die potentielle Energie eines Körpers mit der Masse m_0 , der von mehreren Körpern 1 ... N angezogen wird, setzt sich additiv aus den potentiellen Energien zusammen, die er bezüglich der umgebenden Körper im Abstand r_1 bis r_N zu ihm hat. Das *Gravitationspotential* $\varphi_G(r)$ faßt, bezogen auf den Ort r des Probekörpers und dessen Probemasse m_0 , die Beiträge der umgebenden Körper zusammen:

$$\varphi_G = - \sum_{k=1}^N G \frac{m_k}{r_k}; \quad (\text{F-8})$$

- m_k k -ter Körper mit der Masse m_k ,
 r_k Abstand des k -ten Körpers zum Probekörper mit der Masse m_0 ,
 G Gravitationskonstante.

Äquipotentialflächen sind Flächen im Raum, auf denen das Gravitationspotential einer räumlichen Massenverteilung konstant ist.

Ist der Gravitationspotentialverlauf φ_G im Raum bekannt, so ergibt sich die potentielle Energie E_{pot} zu:

$$E_{\text{pot}}(r) = m_0 \varphi_G(r); \quad (\text{F-9})$$

- m_0 Masse eines Körpers am Ort r ,
 $\varphi_G(r)$ Gravitationspotential der räumlichen Massenverteilung am Ort r .

Aus dem Gradienten des Gravitationspotentials berechnet sich die Gravitationskraft $F_G(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_G(\mathbf{r}) &= -m_0 \left(\frac{\partial \varphi_G}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_G}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_G}{\partial z} \right) \\ &= -m_0 \text{grad } \varphi_G(\mathbf{r}); \end{aligned} \quad (\text{F-10})$$

m_0 Masse eines Probekörpers am Ort \mathbf{r} ,
 $\text{grad } \varphi_G(\mathbf{r})$ Gradient des Gravitationspotentials $\varphi_G(\mathbf{r})$ am Ort \mathbf{r} .

F.6 Planetenbewegung

Die Bahnkurve der Planeten mit der Masse m im Gravitationsfeld einer großen Sonnenmasse M mit der Gravitationskraft als Zentralkraft ist eben und daher am besten in *Polarkoordinaten* zu beschreiben. Die Bahngleichung läßt sich aus folgenden Erhaltungssätzen der Mechanik herleiten:

Energiesatz:

$$\frac{1}{2} m v^2 - G \frac{mM}{r} = \frac{1}{2} m v_0^2 - G \frac{mM}{r_0}$$

Drehimpulssatz:

$$\begin{aligned} |\mathbf{L}| &= m \left| \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \right| = m r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{konstant} \\ &= m 2C. \end{aligned}$$

$dA = (1/2) r(r d\varphi)$ ist die Fläche, die der Ortsvektor \mathbf{r} der Bahnkurve bei einer Drehung um $d\varphi$ überstreicht. $C = dA/dt = 1/2 r^2 (d\varphi/dt) = (1/2) r^2 \omega = (1/2) r v$ entspricht also gerade der *Flächengeschwindigkeit* $\Delta A/\Delta t$ in Tabelle F-1. Der Drehimpulserhaltungssatz bestätigt somit das 2. Keplersche Gesetz.

Mit den Beziehungen $v^2 = (dr/dt)^2 + r^2(d\varphi/dt)^2$ und $dr/dt = (dr/d\varphi)(d\varphi/dt)$ lassen sich die obigen Gleichungen integrieren; als Bahnkurve ergibt sich die *Polargleichung der Kegelschnitte*, in Übereinstimmung mit dem 1. Keplerschen Gesetz:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \quad (\text{F-11})$$

$r(\varphi)$ Betrag des Planeten-Radiusvektors,
 φ Polwinkel des Planetenorts,
 p Kegelschnitt-Parameter,
 ε numerische Exzentrizität.

Die Parameter der Bahngleichung der Planetenbewegung sind

$$p = \frac{4C^2}{GM} \quad (\text{F-12})$$

$$\varepsilon = \frac{2C}{GM} \sqrt{v_0^2 - \frac{2\gamma_G M}{r_0} + \frac{\gamma_G^2 M^2}{4C^2}}; \quad (\text{F-13})$$

p Kegelschnitt-Parameter,
 C Flächengeschwindigkeit $C = L/(2m)$ der Bewegung des Planeten mit der Masse m und dem Drehimpuls \mathbf{L} ,
 M Masse des Zentralkörpers der Planetenbahn (Sonnenmasse),
 v_0 Geschwindigkeit des Planeten am Ort r_0 , z. B. im Bahnscheitel,
 ε numerische Exzentrizität der Bahnkurve,
 G Gravitationskonstante.

Das Verhältnis der kinetischen Energie $E_{\text{kin}} = 1/2 m v_0^2$ eines Planeten, Satelliten oder ballistischen (antriebslosen) Flugkörpers der Masse m und der Bahngeschwindigkeit v_0 in der Entfernung r_0 von der Zentralmasse M zur potentiellen Energie der Gravitation $E_{\text{pot}} = GmM/r_0$ an diesem Bahnpunkt bestimmt die Bahnkurve (Tabelle F-2). Körper mit einer Geschwindigkeit kleiner als die *1. kosmische Geschwindigkeit* v_{k1} fallen wieder auf den Zentralkörper, beispielsweise die Erde oder Sonne, zurück; genaugenommen sind damit alle Wurfbahnen auf der Erde elliptische Bahnkurven und nicht Wurfparabeln, wie in der Näherung einer konstanten Gravitationskraft hergeleitet wird. Für Bahngeschwindigkeiten zwischen den beiden kosmischen Geschwindigkeiten v_{k1} und v_{k2} sind die Umlaufbahnen elliptisch, eingeschlossen der Spezialfall der Kreisbahn. Ab der *2. kosmischen Geschwindigkeit* ist die Bahngeschwindigkeit ausreichend, um das Gravitationsfeld einer Zentralmasse auf einer

Tabelle F-2. Bahnkurven um Zentralkörper

Bahnkurven	numerische Exzentrizität	Energiebilanz	Bahngeschwindigkeit
Kreis	$\varepsilon = 0$	$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} G \frac{m M}{r_0}$	$v_0 = \sqrt{G \frac{M}{r_0}} = v_{k1}$ (F-14) 1. kosmische Geschwindigkeit
Ellipse	$\varepsilon < 1$	$\frac{1}{2} m v_0^2 < G \frac{m M}{r_0}$	$v_0 < \sqrt{2 G \frac{M}{r_0}}$
Parabel	$\varepsilon = 1$	$\frac{1}{2} m v_0^2 = G \frac{m M}{r_0}$	$v_0 = \sqrt{2 G \frac{M}{r_0}} = v_{k2}$ (F-15) 2. kosmische Geschwindigkeit
Hyperbel	$\varepsilon > 1$	$\frac{1}{2} m v_0^2 > G \frac{m M}{r_0}$	$v_0 > \sqrt{2 G \frac{M}{r_0}}$

Tabelle F-3. Planetendaten des Sonnensystems.

Sonnenmasse $m_s = 1,989 \cdot 10^{30}$ kg
Sonnenradius $r_s = 6,96 \cdot 10^5$ km
mittlere Sonnendichte $\varrho_s = 1410$ kg/m³

Planet	große Bahnhalbachse a in m	Umlaufzeit T in s	numerische Exzentrizität der Ellipsenbahn ε	Radius Erdradius Erdradius $r_E = 6,371 \cdot 10^6$ m	Masse Erdmasse Erdmasse $m_E = 5,972 \cdot 10^{24}$ m	mittlere Dichte ϱ in kg m ⁻³	Fallbeschleunigung $g_{\text{Äquator}}$ in m/s ⁻²	Rotationsdauer in s	Anzahl der Monde
Merkur	$5,79 \cdot 10^{10}$	$7,60 \cdot 10^6$	0,206	0,383	0,055	$5,4 \cdot 10^3$	3,7	$5,07 \cdot 10^6$	0
Venus	$1,08 \cdot 10^{11}$	$1,94 \cdot 10^7$	0,00677	0,950	0,815	$5,2 \cdot 10^3$	8	$2,10 \cdot 10^7$	0
Erde	$1,50 \cdot 10^{11}$	$3,16 \cdot 10^7$	0,0167	1,00	1,00	$5,5 \cdot 10^3$	9,78	$8,62 \cdot 10^4$	1
Mars	$2,28 \cdot 10^{11}$	$5,93 \cdot 10^7$	0,0934	0,532	0,107	$3,9 \cdot 10^3$	3	$8,86 \cdot 10^4$	2
Jupiter	$7,78 \cdot 10^{11}$	$3,74 \cdot 10^8$	0,0484	10,97	317,8	$1,3 \cdot 10^3$	23	$3,57 \cdot 10^4$	17
Saturn	$1,43 \cdot 10^{12}$	$9,29 \cdot 10^8$	0,0542	9,14	95,2	$0,69 \cdot 10^3$	8	$3,84 \cdot 10^4$	18
Uranus	$2,87 \cdot 10^{12}$	$2,64 \cdot 10^9$	0,0472	3,98	14,5	$1,3 \cdot 10^3$	8	$6,21 \cdot 10^4$	20
Neptun	$4,50 \cdot 10^{12}$	$5,17 \cdot 10^9$	0,00859	3,87	17,1	$1,6 \cdot 10^3$	11	$5,80 \cdot 10^4$	8
Pluto	$5,91 \cdot 10^{12}$	$7,83 \cdot 10^9$	0,249	0,188	0,00245	$2,0 \cdot 10^3$	0,68	$5,52 \cdot 10^5$	1

parabel- oder hyperbelförmigen Bahnkurve zu verlassen.

Für Ellipsenbahnen mit der großen Halbachse a gilt $p = a(1 - \varepsilon^2)$ bzw. $1 - \varepsilon^2 = p/a$. Demnach beträgt unter Berücksichtigung der Gl. (F-12) der Flächeninhalt A der Bahnellipse $A = \pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2} = \pi a^2 \sqrt{2C/\sqrt{GM}a}$. Dieser ist andererseits aber nach dem Flächensatz über $A = CT$ mit der Umlaufdauer T auf der

Ellipsenbahn verknüpft. Die Gleichsetzung ergibt das 3. Keplersche Gesetz für Planetenbahnen:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = k_z ;$$

(F-16)

T Umlaufdauer auf der Ellipsenbahn,
 a große Halbachse der Ellipsenbahn,

Tabelle F-4. Satellitendaten bei Erdgravitation.

physikalische Größe	Beziehung
Gravitationsfeldstärke, Erdbeschleunigung g	
auf der Erdoberfläche	$g_0 = G \frac{M_E}{r_E^2} = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (\text{F-18})$
in der Höhe h	$g(h) = g_0 \left(1 + \frac{h}{r_E}\right)^{-2} \quad (\text{F-19})$
Umlaufdauer T eines Erdsatelliten auf einer Kreisbahn in der Höhe h	$T(h) = 2\pi \sqrt{\frac{r_E}{g_0} \left(1 + \frac{h}{r_E}\right)^3}$ $= 5060 \text{ s} (1 + h/r_E)^{3/2} \quad (\text{F-20})$
Bahnradius r eines Erdsatelliten mit der Umlaufdauer T	$r = \left(\frac{r_E^2 g_0}{4\pi^2} T^2\right)^{1/3}$ $= 2,16 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}^{2/3}} T^{2/3} \quad (\text{F-21})$
Bahngeschwindigkeit v eines Erdsatelliten in der Höhe h	$v(h) = \sqrt{r_E g_0 \frac{1}{1 + h/r_E}}$ $= 7,91 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} (1 + h/r_E)^{-1/2} \quad (\text{F-22})$
mit der Umlaufdauer T	$v(T) = \left(\frac{2\pi r_E^2 g_0}{T}\right)^{1/3}$ $= 1,36 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}^{2/3}} \cdot T^{-1/3} \quad (\text{F-23})$
Höhe eines Erd-Synchrone-Satelliten über der Erdoberfläche	$h_s = \left(\frac{g_0 r_E^2 T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - r_E$ $= 35\,800 \text{ km} \quad (\text{F-24})$
1. kosmische Geschwindigkeit v_{k1} (Erdoberfläche)	$v_{k1} = \sqrt{r_E g_0} = 7,91 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\text{F-25})$
2. kosmische Geschwindigkeit v_{k2} (Erdoberfläche)	$v_{k2} = v_{k1} \sqrt{2} = 11,2 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\text{F-26})$

p Ellipsenparameter,
 M Masse des Zentralkörpers der Ellipsenbahn (Sonnenmasse),
 k_z Zentralkörperkonstante ($k_{z, \text{Erde}} = 1,01 \cdot 10^{13} \text{ m}^3/\text{s}^2$; $k_{z, \text{Sonne}} = 3,36 \cdot 10^{18} \text{ m}^3/\text{s}^2$),
 G Gravitationskonstante.

Durch Einsetzen von Gl. (F-12) und Gl. (F-13) in die Ellipsenbeziehung $p = a(1 - \varepsilon^2)$ läßt sich die Gesamtenergie E_{ges} der Planetenbewegung auf der Ellipsenbahn berechnen:

$$E_{\text{ges}} = \frac{1}{2} m v_0^2 - G \frac{mM}{r_0} = -G \frac{mM}{2a}; \quad (\text{F-17})$$

m Masse des Planeten bzw. Satelliten,
 M Masse des Zentralkörpers (Sonnenmasse),
 a große Halbachse der Ellipsenbahn,

v_0 Bahngeschwindigkeit des Planeten oder Satelliten am Bahnort r_0 , z. B. im Ellipsenscheitel,
 G Gravitationskonstante.

Auf Ellipsenbahnen, zu denen auch die Kreisbahn zählt, ist die Gesamtenergie nur von der großen Halbachse a der Bahnkurve, der Zentralmasse m und der Masse m des Umlaufkörpers abhängig.

Eine Übersicht über die Daten der Planeten des Sonnensystems gibt die Tabelle F-3.

F.7 Schwereigenschaften der Erde

Mit der Erdmasse $m_E = 5,972 \cdot 10^{24}$ kg als Zentralmasse und dem Erdradius $r_E = 6,371 \cdot 10^6$ m ergeben sich die speziellen Beziehungen der Tabelle F-4 für die Gravitationswirkungen der Erde. Zum Teil sind diese auf die Höhe h der Körper über der Erdoberfläche umgerechnet.

Daten der Erde, des Mondes und der Mondbahn sind in Tabelle F-5 zusammengestellt.

Tabelle F-5. Daten der Erde und des Erdmonds.

Parameter	Erde	Erdmond
Masse	$m_E = 5,972 \cdot 10^{24}$ kg	$m_M = 0,0549 m_E$ $= 7,352 \cdot 10^{22}$ kg
Radius im Mittel	$r_{E,m} = 6371$ km	$r_M = 0,273 r_E = 1738$ km
Äquatorradius	$r_{E,\ddot{A}} = 6378,160$ km	
Polradius	$r_{E,p} = 6356,775$ km	
mittlere Dichte	$\varrho_E = 5514$ kg/m ³	$\varrho_M = 0,61 \varrho_E = 3342$ kg/m ³
Fallbeschleunigung auf der Oberfläche	$g_E = 9,80665$ m/s ²	$g_M = 0,166 g_E = 1,63$ m/s ²
Rotationsdauer	$T_{R,E} = 23$ h, 56 min, 3,95 s $= 8,616395 \cdot 10^4$ s	$T_{R,M} = 2,36 \cdot 10^6$ s = $T_{U,M}$ (gebundene Rotation)
große Bahnhalbachse (Kreisbahnradius)	$a_E = 1,496 \cdot 10^8$ km	$a_M = 3,844 \cdot 10^5$ km
Ellipsenparameter	$p_E = 1,496 \cdot 10^8$ km	$p_M = 3,832 \cdot 10^5$ km
numerische Exzentrizität der Ellipsenbahn	$\varepsilon_E = 0,017$	$\varepsilon_M = 0,0549$
Umlaufdauer (siderische Umlaufzeit)	$T_{U,E} = 365$ d, 5 h, 48 min, 46 s $= 3,1556926 \cdot 10^7$ s	$T_{U,M} = 27$ d, 7 h, 43 min $= 2,360580 \cdot 10^6$ s

G Festigkeitslehre

Unter dem Einfluß von *Kräften* und *Momenten* treten *Form-* oder *Gestaltänderungen* auf, die beim praktischen Einsatz von Werkstoffen und geometrisch geformten Werkstücken von Bedeutung sind. Bei den *elastischen*

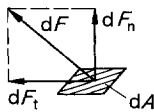
Formänderungen gehen die Verformungen nach Ende der Belastung wieder vollständig zurück; bei den *plastischen* Formänderungen nicht.

Tabelle G-1. Wichtigste DIN-Normen.

Norm	Nummer	Bezeichnung
DIN EN	10 002	Metallische Werkstoffe; Zugversuch
DIN	50 103	Prüfung metallischer Werkstoffe; Härteprüfung nach Rockwell
DIN	50 111	Prüfung metallischer Werkstoffe; Technologischer Biegeversuch
DIN	50 115	Prüfung metallischer Werkstoffe; Kerbschlagbiegeversuch
DIN	50 125	Prüfung metallischer Werkstoffe; Zugproben
DIN	50 133	Prüfung metallischer Werkstoffe; Härteprüfung nach Vickers
DIN	50 145	Prüfung metallischer Werkstoffe; Zugversuch
DIN	50 351	Prüfung metallischer Werkstoffe; Härteprüfung nach Brinell
DIN ISO	409	Metallische Werkstoffe; Härteprüfung Tabellen zur Bestimmung der Vickershärte
DIN ISO	410	Metallische Werkstoffe; Härteprüfung Tabellen zur Bestimmung der Brinellhärte
DIN ISO	3878	Hartmetalle; Vickers-Härteprüfung

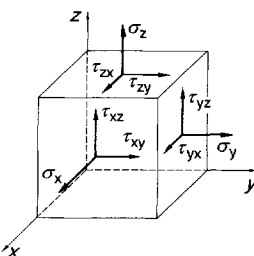
G.1 Spannung und Spannungszustand

Übersicht G-1. Spannung und Spannungszustand für isotrope Materialien.



$$\text{Spannung } S = \frac{dF}{dA} \tag{G-1}$$

$$\text{Spannungstensor} \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$



Normalspannungen σ

$$\sigma = \frac{dF_n}{dA} \tag{G-2}$$

(drei Normalspannungen: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$)

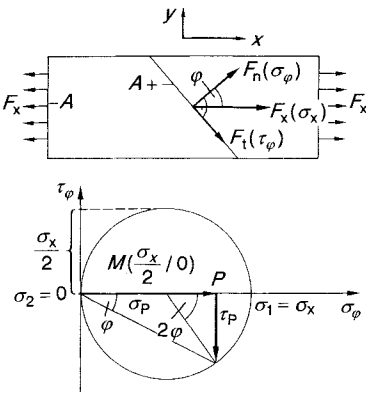
Schubspannungen τ

$$\tau = \frac{dF_t}{dA} \tag{G-3}$$

(sechs Schubspannungen: $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$)

Übersicht G-1 (Fortsetzung)

Einachsiger Spannungszustand



Beanspruchung nur mit Zugkraft F_x

$$\sigma_x = \frac{dF}{dA}; \quad \sigma_y = \sigma_z = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Für Fläche A^+ unter Winkel φ gilt:

$$\sigma_\varphi = \frac{F_N}{A^+} = \frac{F}{A} \cos^2 \varphi = \sigma_x \cos^2 \varphi$$

oder

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma_x}{2} [1 + \cos(2\varphi)] \tag{G-4}$$

$$\tau_\varphi = \frac{F_t}{A^+} = \frac{F}{A} \sin \varphi \cos \varphi$$
$$\tau_\varphi = -\frac{\sigma_x}{2} \sin(2\varphi) \tag{G-5}$$

Mohrscher Spannungskreis:

$$\left(\sigma_\varphi - \frac{\sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_\varphi^2 = \left(\frac{\sigma_x}{2} \right)^2 \tag{G-6}$$

Mittelpunkt $M\left(\frac{\sigma_x}{2} / 0\right)$; Radius $r = \frac{\sigma_x}{2}$

dA	Flächenelement	F_t	Tangentialkraft
A^+	Fläche unter Winkel φ	$\sigma_{x,y,z}$	Normalspannungen in x -, y -, z -Richtung
dF	Kraftelement	$\tau_{i,k}$	Schubspannungen in i -, k -Richtung
F_n	Normalkraft		

G.2 Verformungsarten

Tabelle G-2. Verformungsarten.

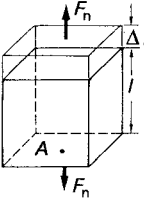
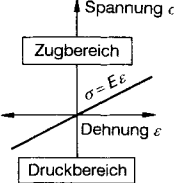
Verformungsart	Kenngröße	Gesetzmäßigkeit	Zusammenhang
 <p>Dehnung ε $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ (Form- änderung und Volumen- änderung)</p>	Elastizitätsmodul E allgemein: $E_{\sigma,\varepsilon} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \tag{G-7}$ Hookesches Gesetz: $E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \tag{G-8}$	$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta l}{l} \tag{G-9}$ $\sigma = E \varepsilon \tag{G-10}$ (Hookesches Gesetz) $\Delta l = \frac{\sigma l}{E} \tag{G-11}$	 <p>Spannung σ Zugbereich $\sigma = E \varepsilon$ Dehnung ε Druckbereich</p>

Tabelle G-2 (Fortsetzung)

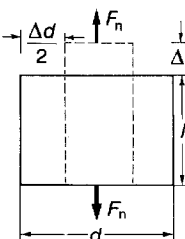
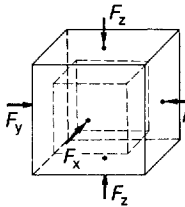
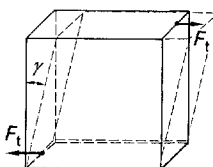
Verformungsart	Kenngröße	Gesetzmäßigkeit	Zusammenhang
 <p>Quer- dehnung ε_q $\varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d}$ (Form- änderung und Volumen- änderung)</p>	Querdehnungszahl μ (Poisson-Zahl) $\mu = -\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon} \quad (\text{G-12})$	$\varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d} = -\mu \frac{\Delta l}{l} \quad (\text{G-13})$ $\varepsilon_q = -\mu \varepsilon \quad (\text{G-14})$ $\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon(1-2\mu) \quad (\text{G-15})$ $0 < \mu < 0,5$	-
 <p>allseitige Kompression (nur Volumen- änderung)</p>	Kompressionsmodul K Kompressibilität κ	$\frac{\Delta V}{V} = 3\varepsilon(1-2\mu) \quad (\text{G-16})$ $K = -\frac{\Delta p V}{\Delta V} \quad (\text{G-17})$ $\frac{1}{K} = \kappa \quad (\text{G-18})$ $\Delta V = -\frac{1}{K} V \Delta p$ $= -\kappa V \Delta p \quad (\text{G-19})$	$K = \frac{E}{3(1-2\mu)} \quad (\text{G-20})$
 <p>Scherung (nur Form- änderung)</p>	Schubmodul (Torsionsmodul) G allgemein: $G_{t,t} = \frac{d\tau}{d\gamma} \quad (\text{G-21})$ speziell: $G = \frac{\tau}{\gamma} \quad (\text{G-22})$	$\tau = \frac{F_t}{A} = G\gamma \quad (\text{G-23})$	$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (\text{G-24})$ $\frac{E}{3} < G < \frac{E}{2} \quad (\text{G-25})$
A Fläche $d, \Delta l$ Dicke, Dickenunterschied E Elastizitätsmodul F Kraft G Schubmodul K Kompressionsmodul l_0 Ausgangslänge $l, \Delta l$ Länge nach Dehnung, Längenunterschied	Δp Druckunterschied $V, \Delta V$ Volumen, Volumenänderung ε Dehnung ε_q Querdehnung σ Spannung μ Querdehnungszahl, Poisson-Zahl γ Scherwinkel τ Schubspannung		

Tabelle G-3. Elastische Kenngrößen einiger Werkstoffe.

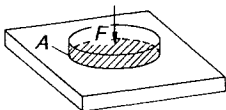
Werkstoff	Elastizitätsmodul E GN/m ²	Querdehnungszahl μ	Kompressionsmodul K GN/m ²	Schubmodul G GN/m ²	Bruchdehnung R_m	Zug- bzw. Druckfestigkeit σ_B GN/m ²
Eis	9,9	0,33	10	3,7		
Blei	17	0,44	44	5,5 bis 7,5		0,014
Al (rein)	72	0,34	75	27	0,5	0,013
Glas	76	0,17	38	33		0,09
Gold	81	0,42	180	28	0,5	0,14
Messing	100	0,38	125	36	0,05	0,55
(kaltverf.)						
Kupfer	126	0,35	140	47	0,02	0,45
(kaltverf.)						
V2A-Stahl	195	0,28	170	80	0,45	0,7

Tabelle G-4. Räumliche Spannungszustände.

	Normalspannung σ	Dehnung ε	Schubspannung τ	Schiebung γ
x-Komponente	$\sigma_x = \frac{E}{1+\mu} \left(\varepsilon_x + \frac{\mu \varepsilon}{1-2\mu} \right)$	$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)]$	$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$	$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$
y-Komponente	$\sigma_y = \frac{E}{1+\mu} \left(\varepsilon_y + \frac{\mu \varepsilon}{1-2\mu} \right)$	$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu (\sigma_z + \sigma_x)]$	$\tau_{xz} = G \gamma_{xz}$	$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}$
z-Komponente	$\sigma_z = \frac{E}{1+\mu} \left(\varepsilon_z + \frac{\mu \varepsilon}{1-2\mu} \right)$	$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y)]$	$\tau_{yz} = G \gamma_{yz}$	$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$

G.3 Zugversuch nach DIN 50145

Zur Bestimmung von Zug und Druck wird häufig die *Flächenpressung* $p = F/A$ angegeben. Sie ist bestimmt durch die Druckbeanspruchung in der Berührungsfläche (Bild G-1).



$$p = \frac{F}{A}$$

Bild G-1. Flächenpressung p .

Im Zugversuch nach DIN 50145 wird der *Spannungs-Dehnungs-Verlauf* verschiedener Werkstoffe untersucht. Üblicherweise wird die 0,2%-Dehngrenze $R_{p0,2}$ ermittelt. Beim *nicht stetigen Übergang* wird eine *obere Streckgrenze* R_{eH} und eine *untere Streckgrenze* R_{eL} unterschieden. Eine weitere wichtige Werkstoffkenngröße ist die *Bruchdehnung* ε_B bei der das Material bricht (Bild G-2).

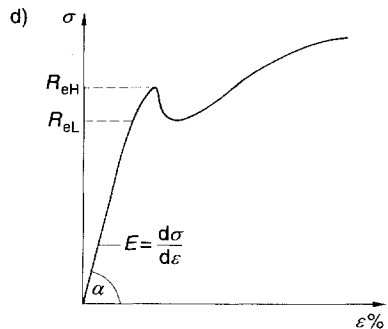
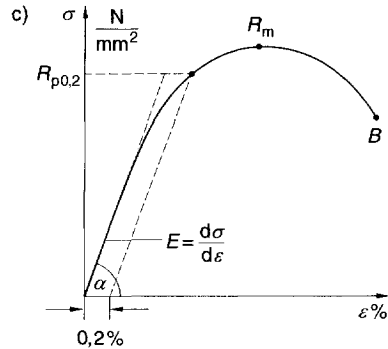
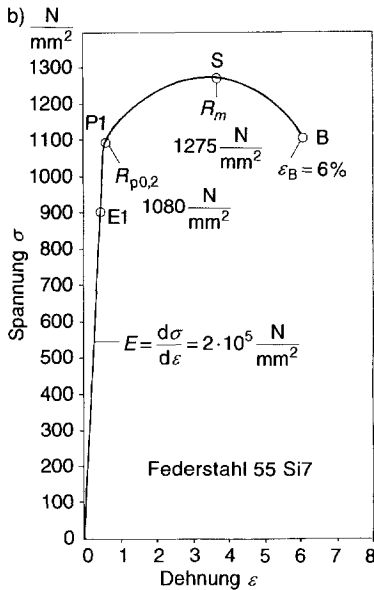
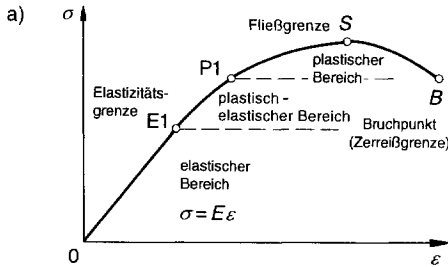


Bild G-2. Zugversuch und Spannungs-Dehnungs-Verläufe.

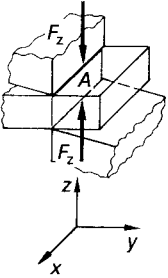
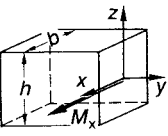
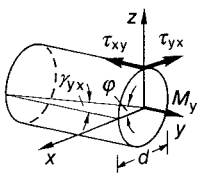
- a) Spannungs-Dehnungsdiagramm
 b) Spannungs-Dehnungsdiagramm für Federstahl
 c) stetiger Übergang elastisch – plastisch
 d) unstetiger Übergang elastisch – plastisch

G.4 Elementare Belastungsfälle

Tabelle G-5. Elementare Belastungsfälle.

Skizze	Bemerkung	Normalspannung σ	Schubspannung τ	Dehnung ϵ	Schiebung γ	Beispiele
Zug bzw. Druck						
Zug: F_y positiv Druck: F_y negativ 	Kraft F_y greift im Flächenschwerpunkt δ des Querschnitts A an.	$\sigma_y = \frac{F_y}{A}$ $\sigma_x = \sigma_z = 0$	0	$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}$ $\epsilon_x = \epsilon_z = -\mu \frac{\sigma_y}{E}$	0	Seile, Ketten, Zugstäbe, Stützen, Kolbenstangen, Druckspindeln

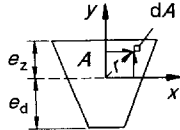
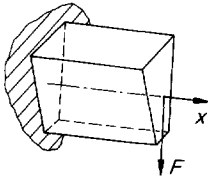
Tabelle G-5 (Fortsetzung)

Skizze	Bemerkung	Normal- spannung σ	Schub- spannung τ	Dehnung ε	Schiebung γ	Beispiele
Scherung						
	Meist tritt Scherung in Verbindung mit Biegung auf.	0	$\tau_{yz} = -\frac{F_z}{A}$ $\tau_{zy} = \frac{F_z}{A}$ sonst $\tau = 0$	0	$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$ sonst $\gamma = 0$	Scherglieder, Nieten
Biegung						
 $J_x = \frac{bh^3}{12}$	reines Biegemoment $M_b = M_x$	$\sigma_{y(z)} = -\frac{M_x}{J_x} z$ sonst $\sigma = 0$	0	$\varepsilon_{y(z)} = \frac{\sigma_{y(z)}}{E}$ $\varepsilon_{x(z)} = \varepsilon_{z(z)}$ $= -\mu \frac{\sigma_{y(z)}}{E}$	0	Kragbalken, Achsen
Torsion						
 $J_y = \frac{\pi d^4}{32}$	reines Torsionsmoment $M_t = M_y$	0	$\tau_{xy} = -\frac{M_y}{J_y} z$ $\tau_{yx} = \frac{M_y}{J_y} z$ sonst $\tau = 0$	0	$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$ sonst $\gamma = 0$	Torsionsstäbe
A	Querschnittsfläche	E	Elastizitätsmodul ($E = \sigma/\varepsilon$)	τ	Schubspannung	
F	Kraft	G	Schubmodul ($G = \gamma/\tau$)	ε	Dehnung	
b	Breite	J	Flächenträgheitsmoment	γ	Scherung	
h	Höhe	M	Drehmoment	μ	Querdehnungszahl	
d	Durchmesser	σ	Normalspannung			

G.4.1 Biegung

Wird ein Bauteil um die x -Achse auf Biegung beansprucht, dann wächst das Biegemoment M_b vom Lastangriffspunkt ($M_b = 0$) bis zum höchsten Wert an der Einspannstelle.

Übersicht G-2. Belastungsfälle bei Biegung.



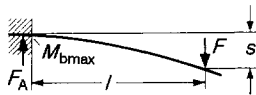
Maximale Biegespannung
(Randspannung)

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b}$$

Biegemoment M_b

$$M_b = \int \sigma(y) dA y \quad (G-27)$$

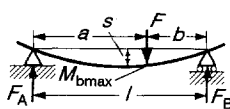
$$M_b = \sigma_z \frac{\int dA y^2}{e_z} = \sigma_d \frac{\int dA y^2}{e_d} = \sigma_z \frac{J_x}{e_z} = \sigma_d \frac{J_x}{e_d} = \sigma_z W_{xz} - \sigma_d W_{xd} \quad (G-28)$$



$$F_A = F$$

$$M_{b \max} = l F$$

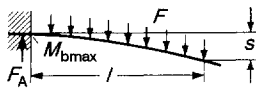
$$s = \frac{l^3}{3} \cdot \frac{F}{E J_a}$$



$$F_A = \frac{b}{l} F; \quad F_B = \frac{a}{l} F$$

$$M_{b \max} = \frac{a b}{l} F$$

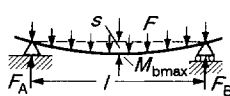
$$s = \frac{a^2 b^2}{3 l} \cdot \frac{F}{E J_a}$$



$$F_A = F$$

$$M_{b \max} = \frac{l}{2} F$$

$$s = \frac{l^3}{8} \cdot \frac{F}{E J_a}$$



$$F_A = F_B = \frac{F}{2}$$

$$M_{b \max} = \frac{l}{8} F$$

$$s \approx \frac{l^3}{77} \cdot \frac{F}{E J_a}$$

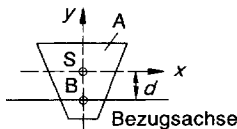
Flächenträgheitsmoment J

axiale Flächenträgheitsmomente J_a

$$J_x = \int dA y^2; \quad J_y = \int dA x^2 \quad (G-29)$$

polare Flächenträgheitsmomente J_p

$$J_p = \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA = J_y + J_x \quad (G-30)$$



Steinerscher Satz bei paralleler Achse
nicht durch den Schwerpunkt S:

$$J_B = J_x + A d^2 \quad (G-31)$$

Widerstandsmoment W_b

$$W_{xz} = \frac{J_x}{e_z}; \quad W_{xd} = \frac{J_x}{e_d} \quad (G-32)$$

Übersicht G-2 (Fortsetzung)

A, dA	Fläche, Flächenelement	x, y	Koordinatenachsen
a, b	Abstand von den Aufhängepunkten	s	maximale Durchbiegung
e_z, e_d	Abstand der äußersten Faser auf der Zug- bzw. Druckseite	l	Länge
F	Kraft	d	Abstand vom Schwerpunkt
E	Elastizitätsmodul	r	Radius
J	Flächenträgheitsmoment	$\sigma_{z, d}$	Zug- bzw. Druckspannung
W_b	Widerstandsmoment		

Tabelle G-6. Widerstandsmomente und Flächenträgheitsmomente einiger Geometrien.

NL = „Neutrale Faser“

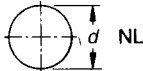
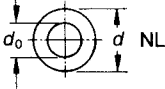
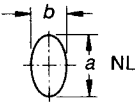
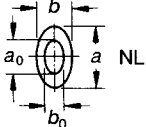
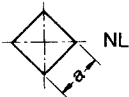
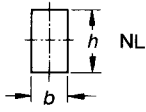
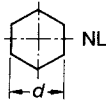
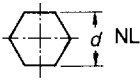
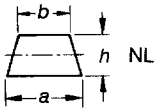
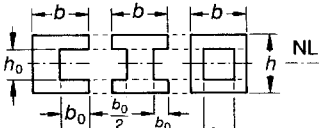
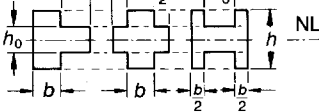
	Widerstandsmoment W_b bei Biegung W_t bei Torsion	Flächenträgheitsmoment J_a axial, bezogen auf NL J_p polar, bezogen auf den Schwerpunkt
	$W_b = 0,098 d^3$ $W_t = 0,196 d^3$	$J_a = 0,049 d^4$ $J_p = 0,098 d^4$
	$W_b = 0,098 (d^4 - d_0^4)/d$ $W_t = 0,196 (d^4 - d_0^4)/d$	$J_a = 0,049 (d^4 - d_0^4)$ $J_p = 0,098 (d^4 - d_0^4)$
	$W_b = 0,098 a^2 b$ $W_t = 0,196 a b^2$	$J_a = 0,049 d^3 b$ $J_p = 0,196 \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}$
	$W_b = 0,098 (a^3 b - a_0^3 b_0)/a$ $W_t = 0,196 (a b^3 - a_0 b_0^3)/b$	$J_a = 0,049 (a^3 b - a_0^3 b_0)$ $J_p = 0,196 \frac{n^3 (b^4 - b_0^4)}{n^2 + 1}$
	$W_b = 0,118 a^3$ $W_t = 0,208 a^3$	$J_a = 0,083 a^4$ $J_p = 0,140 a^4$
	$W_b = 0,167 b h^2$ $W_t = x b^3 h$	$J_a = 0,083 b h^3$ $J_p = \eta b^3 h$
	$W_b = 0,104 d^3$ $W_t = 0,188 d^3$	$J_a = 0,060 d^4$ $J_p = 0,115 d^4$

Tabelle G-6 (Fortsetzung)

	Widerstandsmoment W_b bei Biegung W_t bei Torsion	Flächenträgheitsmoment J_a axial, bezogen auf NL J_p polar, bezogen auf den Schwerpunkt
	$W_b = 0,120 d^2$ $W_t = 0,188 d^2$	$J_a = 0,060 d^4$ $J_p = 0,115 d^4$
	$W_b = \frac{h^2 (a^2 + 4ab + b^2)}{12(2a + b)}$	$J_a = \frac{h^3 (a^2 + 4ab + b^2)}{36(a + b)}$
	$W_b = \frac{b h^3 - b_0 h_0^3}{6 h}$	$J_a = \frac{b h^3 - b_0 h_0^3}{12}$
	$W_b = \frac{b h^3 + b_0 h_0^3}{6 h}$	$J_a = \frac{b h^3 + b_0 h_0^3}{12}$

G.4.2 Knickung

Um ein seitliches Ausknicken eines gedrückten Stabes zu vermeiden, muß die Druckspannung $\sigma = F/A$ stets kleiner sein als die *zulässige Knickspannung* $\sigma_{k, zul}$. Die zulässige Knickspannung $\sigma_{k, zul}$ wird aus der Knickspannung σ_k berechnet, unter Berücksichtigung eines Sicherheitsfaktors S (je nach Angriffspunkt der Kraft zwischen 3 und 6). Für die Berechnungen wird der *Schlankheitsgrad* λ eingeführt, der mit der *freien Knicklänge* l_k zusammenhängt.

Übersicht G-3. Knickung und Knickfälle.

Knickung

$$\sigma_{k, zul} = \frac{\sigma_k}{S}$$

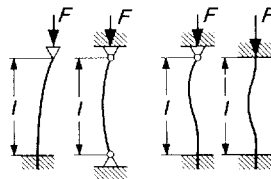
$$\lambda = l_k \sqrt{J_a / A}$$

für schlanke Stäbe gilt

$$\sigma_k = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2} \approx 10 \frac{E J_a}{l_k^2 A}$$

Übersicht G-3 (Fortsetzung)

Knickfälle



Fall 1	Fall 2	Fall 3	Fall 4
$l_k = 2l$	$= l$	$= 0,707l$	$= 0,5l$

A	Querschnittsfläche
E	Elastizitätsmodul
J_a	axiales Flächenträgheitsmoment
l_k	Knicklänge
S	Sicherheitsfaktor
λ	Schlankheitsgrad
σ_k	Knickspannung
$\sigma_{k, zul}$	zulässige Knickspannung

Tabelle G-7. Näherungsformeln für die Knickspannungen σ_k .

Werkstoff	schlanke Stäbe (λ groß)	nicht schlanke Stäbe (λ kleiner)
	$\sigma_k \approx 10 \frac{E J_a}{l_k^2 A}$	σ_k in N/mm ²
Stahl St 37	$\lambda \geq 100$	$\sigma_k = 284 - 0,8 \lambda$
Stahl St 52	$\lambda \geq \sqrt{E/R_e}$	$\sigma_k = 578 - 3,74 \lambda$
Grauguß GG 25	$\lambda \geq 80$	$\sigma_k = 760 - 12 \lambda + 0,05 \lambda^2$
Nadelholz	$\lambda \geq 100$	$\sigma_k = 29 - 0,19 \lambda$

G.4.3 Torsion

Übersicht G-4. Torsionsbeanspruchung.

Drehwinkel

$$\varphi = \frac{I M}{G J_p} = \frac{l W_t \tau}{G J_p} \quad (G-39)$$

zylindrischer Stab

$$\varphi = \frac{2 I M}{\pi G r^4} = c^* M \quad (G-40)$$

Torsionsspannung τ

$$\tau = \frac{M_t}{W_t}$$

Winkelrichtgröße c^*

$$c^* = \frac{\pi G r^4}{2 I} \quad (G-41)$$

c^*	Winkelrichtgröße
G	Schubmodul
J_p	polares Flächenträgheitsmoment
M	Drehmoment
l	Länge des Körpers
r	Radius des Zylinders
W_t	Widerstandsmoment bei Torsion
φ	Drehwinkel
τ	Torsionsspannung

G.5 Bruchmechanik

Für glatte Stäbe gelten je nach Beanspruchungsfall verschiedene Nennspannungen σ_n . Kerben (z.B. Rillen und Bohrungen) und Querschnittsänderungen (z.B. Absätze und Kröpfungen) erzeugen höhere Spannungen σ_{\max} , die mittels Formzahlen α_k berücksichtigt werden.

Um ein Versagen des Werkstoffes durch Verformung oder Bruch zu verhindern, dürfen die Grenzspannungen σ_{gr} bzw. τ_{gr} in der Praxis nicht erreicht werden. Dazu wird ein Sicherheitsfaktor S eingeführt, mit dem die zulässige Spannung σ_{zul} bzw. τ_{zul} berechnet wird ($\sigma_{zul} = \sigma_{gr}/S$ bzw. $\tau_{zul} = \tau_{gr}/S$). Es gilt für zähe Werkstoffe $S = 1,2$ bis 4 und für spröde Werkstoffe $S = 2$ bis 10.

Übersicht G-5. Formzahlen α_k verschiedener Geometrien und Kerbformen.

Nennspannungen σ_n

$$\text{Zug: } \sigma_n = F/A$$

$$\text{Biegung: } \sigma_n = M_b/W_b$$

$$\text{Torsion: } \tau_n = M_t/W_t$$

} (G-40)

maximale Spannung σ_{\max}

$$\sigma_{\max} = \alpha_k \sigma_n \quad (G-41)$$

A Querschnittsfläche

F Kraft

M_b, M_t Drehmoment der Biegung bzw. Torsion

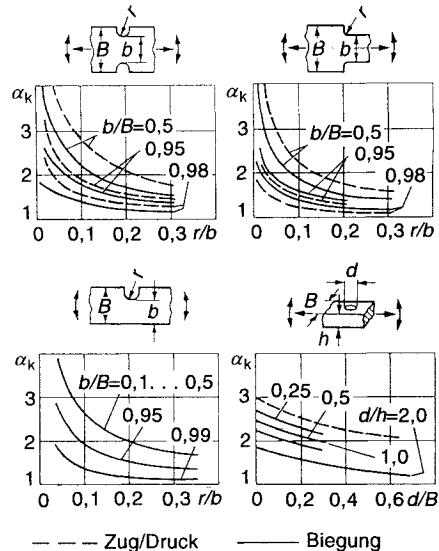
W_b, W_t Widerstandsmoment der Biegung bzw. Torsion

σ_n, τ_n Nennspannung

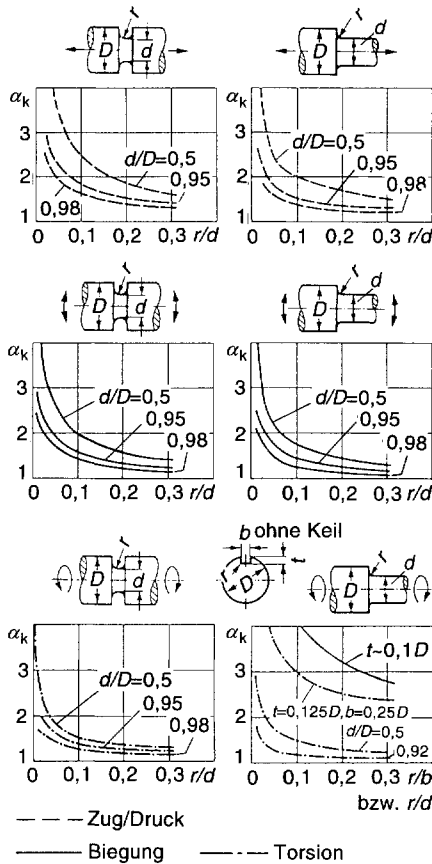
σ_{\max} Maximalspannung

α_k Formzahl

Formzahlen α_k für Flachstäbe



Übersicht G-5 (Fortsetzung)

Formzahlen α_k für Rundstäbe

G.6 Schwingende Beanspruchung

Wenn die Beanspruchung zwischen zwei Spannungen, dem oberen Spannungswert σ_o und dem unteren σ_u , schwankt, dann treten *geringere* Grenzspannungen σ_{gr} auf. Die *größte* um eine gegebene Mittelspannung schwingende Spannung, bei der gerade noch kein Bruch oder keine Verformung auftritt, wird *Dauer-schwingfestigkeit* σ_D genannt. Schwankt die Spannung zwischen zwei entgegengesetzt gleich großen Grenzwerten (Mittelspannung $\sigma_m = 0$), dann spricht man von *Wechselfestigkeit* σ_W . Zwischen der Wechselfestigkeit σ_W und der statischen Bruchfestigkeit σ_B bestehen folgende Zusammenhänge:

Stahl (Zug-Druck)	$\sigma_W = (0,30 \text{ bis } 0,45) \sigma_B$,
Stahl (Biegung)	$\sigma_W = (0,40 \text{ bis } 0,45) \sigma_B$,
Nichteisenmetalle (Zug-Druck)	$\sigma_W = (0,20 \text{ bis } 0,40) \sigma_B$,
Nichteisenmetalle (Zug-Druck)	$\sigma_W = 0,30 \text{ bis } 0,50 \sigma_B$.

G.7 Zeitstandverhalten

Werden Werkstoffe über *lange Zeit* erhöhten Temperaturen oder hohen Spannungen ausgesetzt, dann kann *Kriechen* oder *Relaxation* einsetzen. Dabei ist *Kriechen* eine *gleichbleibende Verformung* bei gleicher Belastung und gleicher Spannung. Bei der *Relaxation* lassen die *Spannungen* bei der konstanten Verformung nach.

Tabelle G-8. Relaxation verschiedener Werkstoffe.

Werkstoff	Bauteil	σ_B N/mm ²	Anfangs- spannung N/mm ²	Temperatur °C	Zeit h	Relaxation %
ZAl4Cu1	Gewinde	280	150	20	500	30
MgAl8Zn1	Druck- probe	157	60	150	500	63
AlSi12(Cu)		207	60	150	500	3,3
Cq35	Schraube	800	540	160	500	11
40CrMoV47	Zugstab	850	372	300	1000	12

G.8 Energie

Übersicht G-6. Elastische und plastische Energie sowie mechanische Hysterese.

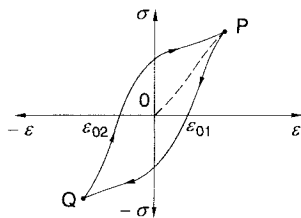
Elastische Energie

Verformungsenergie für die Längen- bzw. Volumenänderung von Körpern

$$W = \int \sigma A \, d\varepsilon = V \int \sigma \, d\varepsilon \quad (\text{G-42})$$

Plastische Verformungsenergie

mechanische Hysterese
eines Spannungs-Dehnungs-
Zyklus



Arbeit, die im Körper verbleibt:

$$\begin{aligned} W &= V \left(\int_P^Q \sigma \, d\varepsilon + \int_Q^P \sigma \, d\varepsilon \right) \\ &= V \int \sigma \, d\varepsilon \end{aligned} \quad (\text{G-43})$$

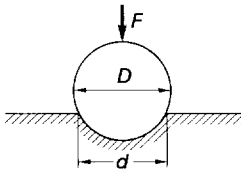
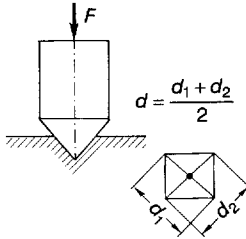
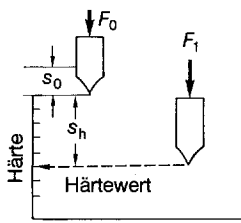
Verlustdichte $w = W/V$ entspricht der Fläche der Hystereseurve

$$w = \frac{W}{V} = \int \sigma \, d\varepsilon \quad (\text{G-44})$$

A	Querschnittsfläche
l	Länge des Körpers
V	Volumen
W	Arbeit
w	Verlustdichte
σ	Spannung
ε	Dehnung

G.9 Härte

Tabelle G-9. Härteprüfverfahren.

Bezeichnung	Brinell-Verfahren DIN 50 351	Vickers-Verfahren DIN 50 137	Rockwell-Verfahren DIN 50 103	
Meßprinzip	 <p>D Durchmesser der Prüfkugel d Durchmesser des Kugeleindrucks</p>	 <p>$d = \frac{d_1 + d_2}{2}$</p>	 <p>Härte</p> <p>Härtewert</p>	
Berechnung	$HB = 0,102 \frac{F}{A}$ $= \frac{0,102 \cdot 2F}{\pi D (D - \sqrt{D^2 - d^2})}$	$HV = 0,102 \frac{F}{A}$ $= 0,189 \frac{F}{d^2}$	Rockwell-B (HRB)	Rockwell-C (HRC)
			$F_0 = 98 \text{ N}$ $2 \mu\text{m je Härteeinheit}$ $F_1 = 883 \text{ N}$ Prüfkörper: Stahlkugel $(D = \frac{1}{16}'' \approx 1,5875 \text{ mm})$	$F_0 = 98 \text{ N}$ $2 \mu\text{m je Härteeinheit}$ $F_1 = 1373 \text{ N}$ Prüfkörper: Diamantkegel Kegelwinkel 120° Bezugshärtewert 100
Angabe der Prüfbedingung	280 HB 2,3/160/20 $D = 2,3 \text{ mm},$ $F = \frac{160 \text{ N}}{0,102} = 1568 \text{ N},$ $t = 20 \text{ s}$	700 HV 50/30 $F = \frac{50 \text{ N}}{0,102} = 490 \text{ N},$ $t = 30 \text{ s}$	—	
Bemerkung	vergleichbare Härtewerte für $0,2 D < d < 0,7 D$	$HB \approx 0,95 HV$ für $F > 49 \text{ N}$ und Belastungsgrad (Brinell) $0,102 \frac{F}{D^2}$ von 30 bis 4070 HV	automatische Härtemessung	
Anwendungsgebiete	weiche Werkstoffe (max. 450 HB)	weiche Werkstoffe ($1,96 < F < 49 \text{ N}$), z. B. Blei 3 HV harte Werkstoffe ($49 < F < 980 \text{ N}$), z. B. Hartmetall 1500 HV)	mittelharte Werkstoffe (zwischen 35 HRB und 100 HRB)	gehärtete und angelassene Stähle (zwischen 20 HRC und 70 HRC)

H Hydro- und Aeromechanik

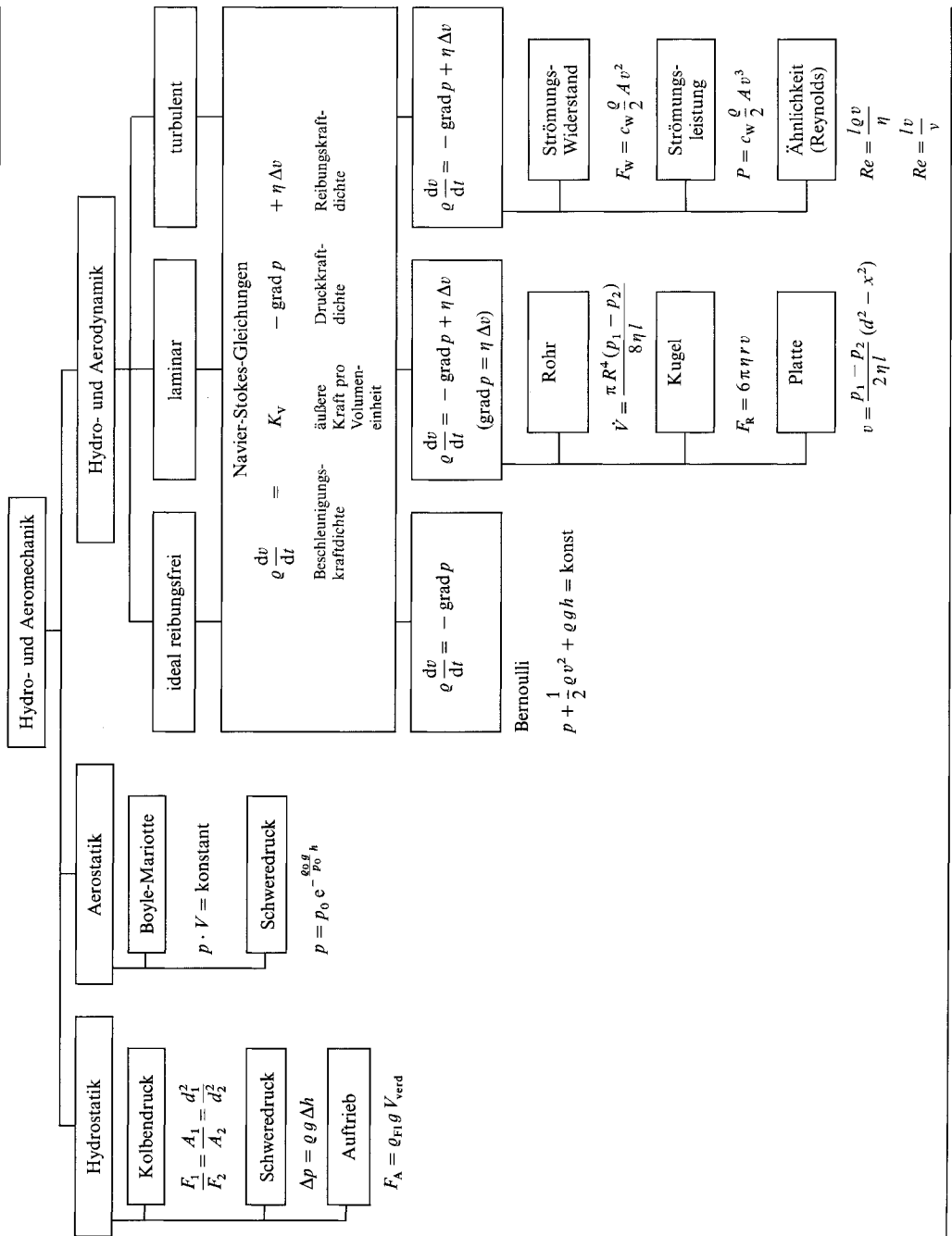
Die Hydro- und Aeromechanik beschreibt Zustände und Bewegungen von *Flüssigkeiten* und *Gasen*. *Flüssigkeiten* sind kaum zusammen-drückbar (*inkompressibel*), aber ihre Moleküle lassen sich leicht gegeneinander bewegen (*unbestimmte Gestalt*). *Gase* haben dagegen weder eine bestimmte Gestalt, noch ein bestimmtes Volumen (*kompressibel*). Sind die Flüssigkeiten oder Gase in Ruhe, so gelten die Gesetze der *Hydro- und Aerostatik*. Bewegen sich Flüssigkeiten oder Gase, gelten die Gleichungen der *Hydro- und Aerodynamik*.

In der *Hydrostatik* sind der *Kolbendruck*, der *Schweredruck* und der *Auftrieb* von Bedeutung, in der *Aerostatik* der Zusammenhang zwischen Druck und Volumen (*Boyle-Mariottesches Gesetz*) sowie die Abhängigkeit des Drucks von der Höhe (*Barometrische Höhenformel*).

In der *Hydro- und Aerodynamik* unterscheidet man *ideal-reibungsfreie, laminare und turbulente Strömungen*. Ihnen liegen die Newtonschen Gesetze der Flüssigkeitsbewegungen zugrunde, die in den *Navier-Stokes-Gleichungen* zusammengefaßt sind. Bei den ideal-reibungsfreien Flüssigkeiten und Gasen gilt die *Bernoullische Gleichung*, bei den *laminaren Strömungen* sind die Strömungsverhältnisse für Rohre, Kugeln und Platten von Bedeutung. Bei den *turbulenten Strömungen* treten Wirbel auf, die zum *Strömungswiderstand* führen und eine *Strömungsleistung* erfordern. Der Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung wird durch die *Reynolds-Zahl* bestimmt, die aus *Ähnlichkeitsgesetzen* berechnet wird.

Übersicht H-2. Übersicht über die wichtigsten DIN-Normen.

DIN 1952	Drosselgeräte
DIN 4320	Wasserturbinen; Benennungen nach der Wirkungsweise und nach der Bauweise
DIN 24 255	Pumpen
DIN 24 312	Fluidtechnik; Druck; Werte; Begriffe
DIN/IEC 607	Thermodynamische Methode zur Messung des Wirkungsgrades von hydraulischen Turbinen, Speicherpumpen und Pump-Turbinen
DIN/ISO 3019	Fluidtechnik – Hydraulik; Hydropumpen und -motoren
DIN/ISO 4391	Fluidtechnik – Hydraulik; Pumpen, Motoren und Kompakt-getriebe



H.1 Ruhende Flüssigkeiten

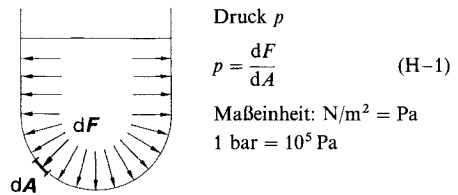
Flüssigkeiten haben keine Gestalt, sondern nehmen die des Gefäßes an. Unter dem Einfluß einer Kraft stehen die *Oberflächen* der Flüssigkeiten immer *senkrecht* zur wirkenden Kraft. Deshalb gilt:

Unter dem Einfluß der Schwerkraft ist der Flüssigkeitsspiegel, *unabhängig* von der *Gefäßform*, stets waagrecht und bei *verbundenen* Gefäßen *gleich hoch*.

H.1.1 Druck, Kompressibilität, Volumenausdehnung

An jeder Stelle der Flüssigkeit wirkt ein Druck p .

Übersicht H-3. Druck, Kompressibilität und Volumenausdehnungskoeffizient.



Kompressibilität κ

Verhältnis der relativen Volumenänderung $\Delta V/V$ zur erforderlichen Druckänderung Δp

$$\kappa = - \frac{\Delta V}{V \cdot \Delta p} = \frac{\Delta \varrho}{\varrho \cdot \Delta p} \quad (\text{H-2})$$

$$\Delta V = -\kappa \Delta p V$$

$$dV = -\kappa dp V \quad (\text{H-3})$$

Volumenausdehnungskoeffizient γ

Relative Volumenänderung $\Delta V/V$ ist proportional zur Temperaturänderung $\Delta \vartheta$

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \gamma \Delta \vartheta \quad (\text{H-4})$$

(wegen $\varrho_0 = m/V_0$ und $\Delta V = V_0(1 + \gamma \Delta \vartheta)$)

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{\varrho_0}{1 + \gamma \Delta \vartheta} \quad (\text{H-5})$$

Flüssigkeiten: γ klein

ideale Gase: $\gamma = 1/T_n = 1/273,15 \text{ K}^{-1} = 0,00366 \text{ K}^{-1}$

Tabelle H-1. Kompressibilität κ einiger Flüssigkeiten bei einer Temperatur von 20°C .

Flüssigkeit	Kompressibilität κ $1/(10^6 \text{ Pa})$
Aceton	1,28
Benzol	0,87
Brom	0,67
Chloroform	1,16
Essigsäure	0,83
Ethanol	1,18
Glyzerin	0,21
Methanol	1,21
Nitrobenzol	0,45
Olivöl	0,63
Paraffin	0,85
Pentan	1,45
Petroleum	0,83
Quecksilber	0,039
Rizinusöl	0,48
Schwefelsäure	2,85
Terpentinöl	0,83
Tetrachlorkohlenstoff	1,15
Toluol	0,91
Wasser	0,47
Xylol	0,87

dA	Flächenelement
dF	Kraftelement
m	Masse
$\Delta V/V$	relative Volumenänderung
Δp	Druckänderung
V_0	Volumen bei 0°C
T_n	Normal-Temperatur ($T_n = 273,15 \text{ K}$)
γ	Volumenausdehnungskoeffizient
$\Delta \vartheta$	Temperaturdifferenz
$\Delta \varrho/\varrho$	relative Dichteänderung
κ	Kompressibilität

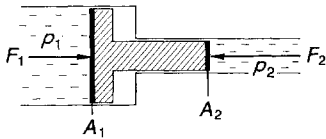
H.1.2 Kolbendruck, Schweredruck und Seitendruck

In Gefäßen eingeschlossene Flüssigkeiten haben überall den gleichen Druck, wenn der Schweredruck vernachlässigbar ist. Bei *unterschiedlichen Kolbenflächen* A werden deshalb *verschiedene Kräfte* F wirksam. Angewandt

wird dieser Zusammenhang bei *hydraulischen Pressen*, wie beispielsweise Hebebühnen, Wagenhebern, Druckwandlern und hydraulischen Bremsen.

Übersicht H-4. Kolbendruck, Schweredruck und Seitendruck.

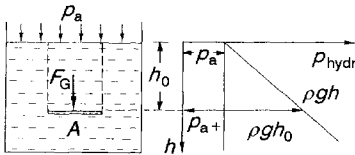
Kolbendruck



$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad (\text{H-6.1})$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2} \quad (\text{H-6.2})$$

Schweredruck p_s



Entspricht der Gewichtskraft einer Flüssigkeitssäule F_G bezogen auf die Fläche A

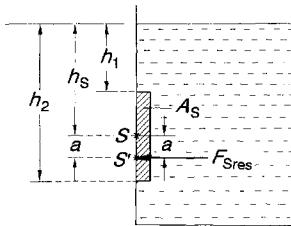
$$p_s = \rho g h \quad (\text{H-7.1})$$

Druck ist unabhängig von der Gefäßform: nur die Füllhöhe ist entscheidend (hydrostatisches Paradoxon)

Hydrostatischer Druck $p_{\text{hydr}} = \text{statischer Druck } p_a + \text{Schweredruck } p_s$

$$p_{\text{hydr}} = p_a + \rho g h \quad (\text{H-7.2})$$

Seitendruck



Seitenkraft F_s

$$F_s = \int_{h_1}^{h_2} \rho g h dA = \rho g \int_{h_1}^{h_2} h dA = \rho g h_s A_s \quad (\text{H-8.1})$$

$$F_s = \frac{\rho g J}{a}; \quad J = \int_{h_1}^{h_2} h^2 dA \quad (\text{H-8.2})$$

$$a = \frac{J}{h_s A_s} = \frac{J}{M_s}$$

A	Fläche
A_s	Seitenfläche
dA	Flächenelement
a	Druckmittelpunktsabstand
F	Kraft
F_s	Seitenkraft
g	Erdbeschleunigung ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$)

h	Höhe
h_s	Höhe bis zum Flächenschwerpunkt S
J	Flächenträgheitsmoment
M_s	statisches Moment ($M_s = h_s A_s$)
ρ	Dichte

H.1.3 Auftrieb

Der Schweredruck von Flüssigkeiten und Gasen ist dafür verantwortlich, daß alle in Flüssigkeiten oder Gasen eingetauchte Körper *leichter* sind als außerhalb dieser Medien. Die *Kraft*, die den *scheinbaren* Gewichtsverlust ermöglicht, wird *Auftriebskraft* F_A genannt. Sie errechnet sich aus der Differenz aus den unterschiedlichen Druckkräften auf der Unterseite (F_2) und der Oberseite (F_1) des Körpers.

$$F_A = F_2 - F_1 = A(p_2 - p_1) = A \varrho_{fl} g (h_2 - h_1). \quad (H-9)$$

Da $A(h_2 - h_1)$ das Volumen des Körpers bzw. das durch den eingetauchten Körper *verdrängte Flüssigkeitsvolumen* V_{verd} ist, gilt:

$$F_A = \varrho_{fl} g V_{verd} = m_{verd} g = F_{G, verd}; \quad (H-10)$$

ϱ_{fl}	Dichte der Flüssigkeit,
g	Erdbeschleunigung ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$),
V_{verd}	Verdrängtes Flüssigkeitsvolumen,
m_{verd}	Masse der verdrängten Flüssigkeit,
$F_{G, verd}$	Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit.

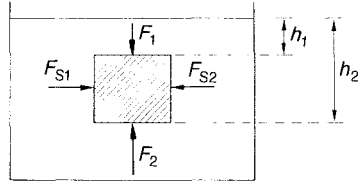


Bild H-1. Kräfte auf einen eingetauchten Körper.

Die Auftriebskraft F_A ist demnach die Gewichtskraft des verdrängten Flüssigkeits- bzw. Gasvolumens.

Je nach dem Gewicht F_G des eingetauchten Körpers sind drei Fälle zu unterscheiden:

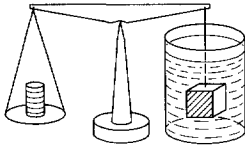
- $F_G < F_A$: Der Körper *schwimmt*.
 $F_G = F_A$: Der Körper *schwebt*.
 $F_G > F_A$: Der Körper *sinkt*.

Beim Schwimmen können Stabilitätsprobleme auftreten, weil die Auftriebskraft F_A im Schwerpunkt S_{fl} der verdrängten Flüssigkeitsmenge angreift, und die Gewichtskraft F_G im Schwerpunkt S_K des Körpers.

H.1.4 Bestimmung der Dichte

Übersicht H-5. Bestimmung der Dichte fester Körper und der Dichte von Flüssigkeiten.

Hydrostatische Waage



Ermitteln der Auftriebskraft F_A aus dem Gewichtsunterschied zwischen dem Körper in Luft $F_{G,L}$ und in der Flüssigkeit $F_{G,E}$

$$F_{G,L} - F_{G,E} = F_A = \varrho_{fl} V g = \varrho_{fl} \frac{m}{\varrho_K} g = \frac{\varrho_{fl}}{\varrho_K} F_{G,L} \quad (H-11)$$

Dichte fester Körper ϱ_K

$$\varrho_K = \varrho_{fl} \frac{F_{G,L}}{F_{G,L} - F_{G,E}} = \frac{\varrho_{fl}}{1 - (F_{G,E}/F_{G,L})} \quad (H-12)$$

Dichte von Flüssigkeiten ϱ_{fl}

$$\varrho_{fl} = \varrho_K (1 - F_{G,E}/F_{G,L}) \quad (H-13)$$

Eintauchen in Flüssigkeiten unterschiedlicher Dichte ϱ_{fl1} und ϱ_{fl2}

$$\varrho_{fl1} = \varrho_{fl2} \frac{F_{G,L} - F_{G,E1}}{F_{G,L} - F_{G,E2}} \quad (H-14)$$

F_A	Auftriebskraft
$F_{G,L}$	Gewicht des Körpers in Luft
$F_{G,E}$	Gewicht des Körpers in Flüssigkeit eingetaucht
m	Masse des Körpers
g	Erdbeschleunigung ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$)
V	Volumen des Körpers
ϱ_{fl}	Dichte der Flüssigkeit
ϱ_K	Dichte des Körpers

H.1.5 Grenzflächeneffekte

Kohäsion und Adhäsion

Anziehende Kräfte, die zwischen *gleichartigen Atomen* oder *Molekülen* eines Stoffes wirken, werden *Kohäsionskräfte* (Zusammenhangskräfte) genannt. Die auch als *van-der-Waalsche Kräfte* bezeichneten zwischenmolekularen Kräfte haben elektrischen Ursprung. Während bei Festkörpern und Flüssigkeiten starke Kohäsionskräfte auftreten, sind sie bei Gasen relativ klein und nur bei tiefen Temperaturen (nahe der Kondensationstemperatur)

feststellbar; sie verursachen Abweichungen vom idealen Gasverhalten.

Anziehungskräfte, die zwischen den Molekülen zweier verschiedener Stoffe wirken, werden *Adhäsionskräfte* genannt. Sie können zwischen festen Körpern, zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten sowie zwischen Flüssigkeiten und Gasen wirken.

Oberflächenspannung

Im Inneren einer Flüssigkeit heben sich die Kohäsionskräfte auf. An der Oberfläche dagegen fehlen die nach außen gerichteten Kräfte.

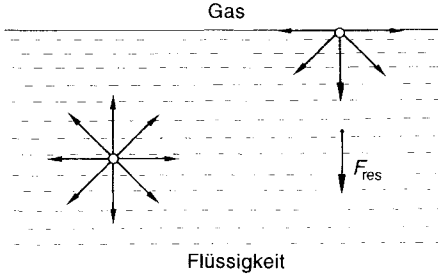


Bild H-2. Oberflächenspannung.

Deshalb entsteht eine ins Innere der Flüssigkeit gerichtete resultierende Kraft F_{res} .

Um ein Molekül an die Oberfläche zu bringen, muß deshalb gegen diese Kraft Arbeit verrichtet werden, weshalb die Moleküle an der Oberfläche eine *Oberflächenenergie* (potentielle Energie) aufweisen. Wird die Arbeit dW zur Oberflächenvergrößerung auf die Oberflächenänderung dA bezogen, dann ergibt sich die *Oberflächenspannung* σ :

$$\sigma = dW/dA; \quad (\text{H-15})$$

Weil in der Physik das Gesetz der *Minimierung der potentiellen Energie* gilt, sind Flüssigkeitsoberflächen stets *Minimalflächen*. Zur Messung der Oberflächenspannung σ wird die *Drahtbügelmethode* nach Bild H-3 herangezogen.

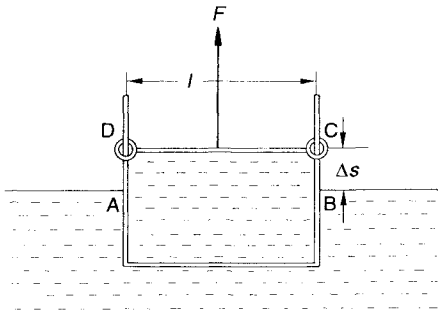


Bild H-3. Drahtbügelmethode zum Messen der Oberflächenspannung.

Es gilt:

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A} = \frac{F \Delta s}{2l \Delta s} = \frac{F}{2l}; \quad (\text{H-16})$$

- F Zugkraft am Bügel,
 $2l$ gesamte Randlänge der Flüssigkeitshaut (Vorder- und Rückseite),
 Δs Abstand zwischen Flüssigkeitsoberfläche im Bügel und in der Umgebung.

Aus Gl. (H-16) läßt sich der Druck p in einer Flüssigkeitskugel mit dem Radius r ermitteln:

$$p = \frac{2\sigma}{r}. \quad (\text{H-17})$$

Der Druck ist um so größer, je kleiner der Radius der Kugel ist.

Kapillarität

Bei der Berührung von Flüssigkeitstropfen mit einer festen Unterlage kommt es, je nach Überwiegen der Adhäsions- über die Kohäsionskräfte, zu einer Benetzung oder nicht.

Von besonderer Bedeutung ist die *Kapillarwirkung* in engen Röhren. Es gilt für die kapillare Steighöhe h_{steig} :

$$h_{\text{steig}} = \frac{2\sigma_{12} \cos \alpha}{\varrho g r}; \quad (\text{H-18})$$

- σ_{12} Oberflächenspannung zwischen gasförmiger und flüssiger Phase,
 α Winkel zwischen fester Phase und Flüssigkeitsoberfläche,
 ϱ Dichte der Flüssigkeit,
 g Erdbeschleunigung ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$),
 r Radius des Rohres.

Wie Gl. (H-18) zeigt, hängt die Steighöhe h_{steig} neben Materialkonstanten nur vom Radius r ab: Je kleiner der Radius, desto höher die Steighöhe: $h_{\text{steig}} \sim 1/r$.

Tabelle H-2. Kapillarität und Benetzung.

Benetzungsform	Benetzung	keine Benetzung
Ursache	Adhäsionskräfte > Kohäsionskräfte	Adhäsionskräfte < Kohäsionskräfte
Wirkung	Ausbreitung der Flüssigkeit auf der Oberfläche des festen Körpers	Flüssigkeit zieht sich tropfenförmig zusammen
Skizze		
Gleichung	$\sigma_{12} \cos \alpha = \sigma_{13} - \sigma_{23}$	
Randwinkel	$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$
Kapillarität	<p>Kapillaraszension</p>	<p>Kapillardepression</p>

H.2 Ruhende Gase

Bei Gasen sind die Kohäsionskräfte vernachlässigbar klein. Deshalb sind sie *unbestimmt* in Gestalt und Volumen.

H.2.1 Druck und Volumen

Sind Temperatur T und Stoffmenge v konstant, dann gilt das *Boyle-Mariottesche Gesetz*, nach dem das Produkt von Druck p und Volumen V konstant ist:

$$p V = \text{konstant oder } \frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}; \quad (\text{H-19})$$

p_1, p_2 Anfangs- bzw. Enddruck des Gases,
 V_1, V_2 Anfangs- bzw. Endvolumen des Gases.

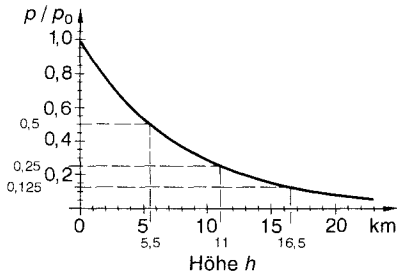
Der Gasdruck wird häufig als *Überdruck* $p_{\bar{u}}$ (Differenz zwischen Innendruck p und äußerem Luftdruck $p_L = 10^5 \text{ Pa}$) angegeben:

$$p_{\bar{u}} = p - p_L. \quad (\text{H-20})$$

Ist der Luftdruck p_L größer als der Gasdruck, dann existiert ein *Unterdruck*.

H.2.2 Schweredruck

Der Schweredruck p (Druck der über der Bezugsebene stehenden Gassäule) eines Gases fällt mit *zunehmender Höhe* h (bei gleicher Temperatur) *exponentiell* (*barometrische Höhenformel*).

*Übersicht H-6. Barometrische und internationale Höhenformel.***Barometrische Höhenformel**

$$p = p_0 e^{-\frac{\varrho_0 T_0 g h}{p_0 T}} \quad (\text{H-21})$$

- p Luftdruck in Höhe h
 p_0 Luftdruck an der Erdoberfläche
 ϱ_0 Dichte der Luft an der Erdoberfläche
 ($\varrho_0 = 1,293 \text{ kg/m}^3$)
 g Erdbeschleunigung ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$)
 h Höhe über der Erdoberfläche
 T, T_0 Temperatur, $T_0 = 273,15 \text{ K}$

Alle 8 m verringert sich an der Erdoberfläche der Luftdruck um 100 Pa. In 5,4 km Höhe ist der Luftdruck halb so groß wie an der Erdoberfläche.

Für $p_0 = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ und $\vartheta = 0^\circ\text{C}$ gilt:

$$p = p_0 e^{-h/7,99 \text{ km}} \quad (\text{H-22})$$

oder

$$h = 18,4 \text{ km} \lg \left(\frac{p_0}{p} \right)$$

Internationale Höhenformel

Berücksichtigt die Temperaturabnahme mit steigender Höhe. Gilt bis zur Tropopause (11 km).

$$p = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} \left(1 - \frac{6,5}{288 \text{ km}} \cdot h \right)^{5,255} \quad (\text{H-23})$$

p_n Normdruck (entspricht dem Jahresmitteldruck auf Meereshöhe)

$p_n = 101\,325 \text{ Pa}$ (1013,25 hPa)

Der tatsächliche Luftdruck ist von der Temperatur, dem Ort und dem Wetter abhängig.

Dichteverlauf

$$\varrho = 1,2255 \text{ kg/m}^3 \left(1 - \frac{6,5}{288} \cdot h \right)^{4,255} \quad (\text{H-24})$$

H.3 Strömende Flüssigkeiten und Gase

In der *Strömungsmechanik* wird der Transport von Massen (Flüssigkeiten oder Gasen) beschrieben, der wegen der *Schwerkraft* oder aufgrund von *Druckdifferenzen* unter Berücksichtigung der *Reibungskräfte* zustandekommt. Nach dem Newtonschen Gesetz treten Beschleunigungen (Summe der Kräfte dividiert durch die Masse) auf, wenn die Summe dieser drei Kräfte nicht null wird. Wird die Bewegungsgleichung auf *Kraftdichten* (Kraft pro Volumen) umgerechnet, dann ergibt sich als Bewegungsgleichung die *Navier-Stokesche Gleichung* für inkompressible Medien (Übersicht H-1):

$$\rho \frac{dv}{dt} = \underbrace{K_v}_{\substack{\text{Kraft-} \\ \text{dichte} \\ \text{äußere} \\ \text{Kraft} \\ \text{pro} \\ \text{Volumen}}} - \underbrace{\text{grad } p}_{\substack{\text{Druckkraft-} \\ \text{dichte}}} + \underbrace{\eta \Delta v}_{\substack{\text{Reibungskraft-} \\ \text{dichte}}}; \quad (\text{H-25})$$

ρ Dichte der Flüssigkeit (des Gases),
 dv/dt Beschleunigung des Teilchens am Ort des Teilvolumens,
 K_v äußere Kraft pro Volumeneinheit,
 $\text{grad } p$ Gradient des Druckes,
 η dynamische Viskosität,
 Δ Laplace-Operator

$$\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right).$$

Wie Übersicht H-1 zeigt, können die Strömungen in *reibungsfreie*, *laminare* und *turbulente* eingeteilt werden, für die entsprechende Teile der Navier-Stokes-Gleichungen gelten.

H.3.1 Ideale (reibungsfreie) Strömungen

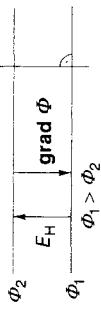
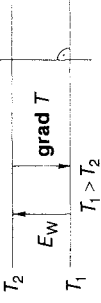
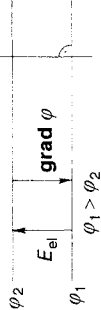
Die Strömung idealer Flüssigkeiten und Gase ist *reibungsfrei*. Hierbei gilt der in Übersicht H-1 dargestellte Teil der Navier-Stokes-Gleichung.

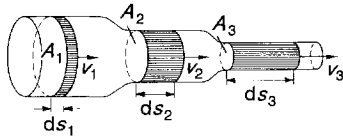
Für die idealen Strömungen gelten zwei Gleichungen:

1. *Massen-Erhaltungssatz*
(*Kontinuitätsgleichung*)
2. *Energie-Erhaltungssatz*
(*Bernoulli-Gleichung*)

Für diesen Fall lassen sich analoge Gesetzmäßigkeiten auch auf die Wärmelehre (Transport von Wärme) und die Elektrizitätslehre (Transport von Ladungen) übertragen. Dabei können mit Hilfe der *Potentialtheorie* und mit *komplexen Funktionen* strömungstechnische Probleme gelöst werden.

Tabelle H-3. Analogie der Felder in der Hydrodynamik, der Wärmelehre und der Elektrizitätslehre.

Gebiet	Hydrodynamik	Wärmelehre	Elektrizitätslehre
Voraussetzungen	Strömung ist inkompressibel und reibungsfrei.	Die Wärmeleitfähigkeit des Materials ist isotrop und konstant. Wärmequelle und -senke liegen außerhalb des betrachteten Raumes.	Die elektrische Leitfähigkeit des Materials ist isotrop und konstant. Spannungsquelle und -senke liegen außerhalb des betrachteten Raumes.
Transportgröße ϕ	Masse ϕ_H kg	Wärme ϕ_W J	Ladung ϕ_{el} C
Transportflußdichte Transportgröße ϕ $j = \frac{\text{Transportgröße}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}}$	$j_H = \frac{\text{Masse}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}} = \varrho_H v$ in $\frac{\text{kg}}{\text{s} \cdot \text{m}^2}$	$j_W = \frac{\text{Wärmemenge}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}} = q$ in $\frac{\text{J}}{\text{s} \cdot \text{m}^2} = \frac{W}{\text{m}^2}$	$j_{el} = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}} = \frac{A \cdot s}{s \cdot \text{m}^2} = \frac{A}{\text{m}^2}$
Ursache:	Gradient des Geschwindigkeitspotentials	Temperaturgradient	Potentialgradient (Spannung)
Transportfeldstärke E	$v = E_H = -\text{grad } \phi$ in $\frac{\text{Pa}}{\text{m}}$ 	$E_W = -\text{grad } T$ in $\frac{\text{K}}{\text{m}}$ 	$E_{el} = -\text{grad } \varphi$ in $\frac{V}{\text{m}}$ 
Kontinuitätsgleichung	$\text{div } E_H = \frac{\partial E_H}{\partial x} + \frac{\partial E_H}{\partial y} + \frac{\partial E_H}{\partial z} = 0$	$\text{div } E_W = \frac{\partial E_W}{\partial x} + \frac{\partial E_W}{\partial y} + \frac{\partial E_W}{\partial z} = 0$	$\text{div } E_{el} = \frac{\partial E_{el}}{\partial x} + \frac{\partial E_{el}}{\partial y} + \frac{\partial E_{el}}{\partial z} = 0$
Zusammenhang zwischen Feldstärke und Transportflußdichte	$j_H = \varrho_H E_H = \varrho_H v$ (ϱ_H : Dichte)	$j_W = \frac{1}{\varrho_T} E_W = \lambda E_W$ (ϱ_T : spez. Wärmedurchlaßwiderstand, λ : Wärmeleitfähigkeit)	$j_{el} = \frac{1}{\varrho} E_{el} = \kappa E_{el}$ (ϱ : spez. elektrischer Widerstand, κ : elektrische Leitfähigkeit)
Laplace-Gleichung $\Delta \phi = 0$	$\Delta \phi = \text{div } E_H = -\text{div grad } \phi = 0$ $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$	$\Delta \phi = \text{div } E_W = -\text{div grad } T = 0$ $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$	$\Delta \phi = \text{div } E_{el} = -\text{div grad } U = 0$ $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$

Übersicht H-7. Massen- und Energie-Erhaltungssatz.**Massen-Erhaltungssatz (Kontinuitätsgleichung)**

$$\text{Massenstrom } \frac{dm}{dt} = \dot{m} = \text{konstant}$$

Für inkompressible Flüssigkeiten gilt (da ρ konstant):

$$\text{Volumenstrom } \frac{dV}{dt} = \dot{V} = \text{konstant}$$

(kleine Flächen, hohe Durchflußgeschwindigkeiten und umgekehrt)

$$\frac{dm}{dt} = \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 = \rho v A = \text{konstant} \quad (\text{H-26.1})$$

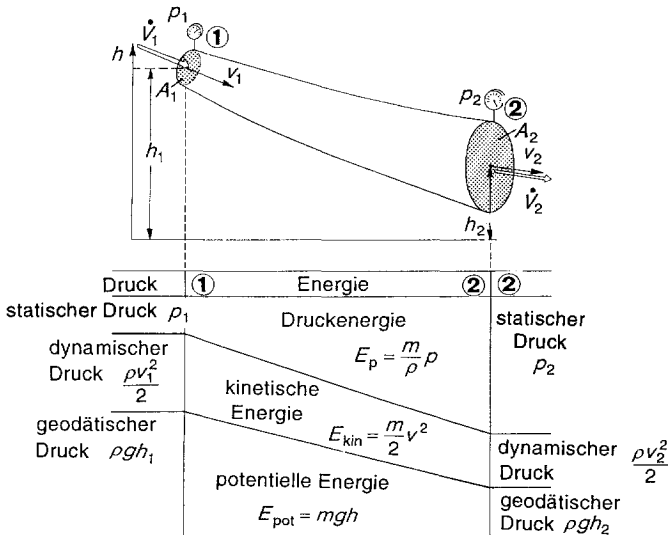
$$\frac{dV}{dt} = (\frac{dm}{dt})/\rho = A v = \text{konstant} \quad (\text{H-26.2})$$

Energie-Erhaltungssatz (Bernoulli-Gleichung)

$$\frac{m}{\rho} p + \frac{1}{2} m v^2 + m g h = \text{konstant} \quad (\text{H-27})$$

Druckenergie + kinetische Energie + potentielle Energie = konst.

Auf den Druck p umgerechnet, ergibt sich die Bernoulli-Gleichung



Übersicht H-7 (Fortsetzung)

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 = \text{konstant} \quad (\text{H-28})$$

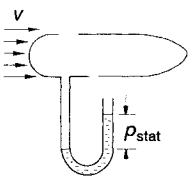
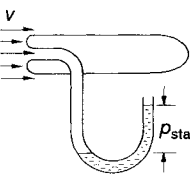
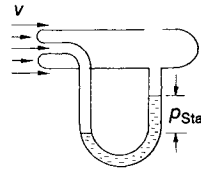
oder

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{konstant}$$

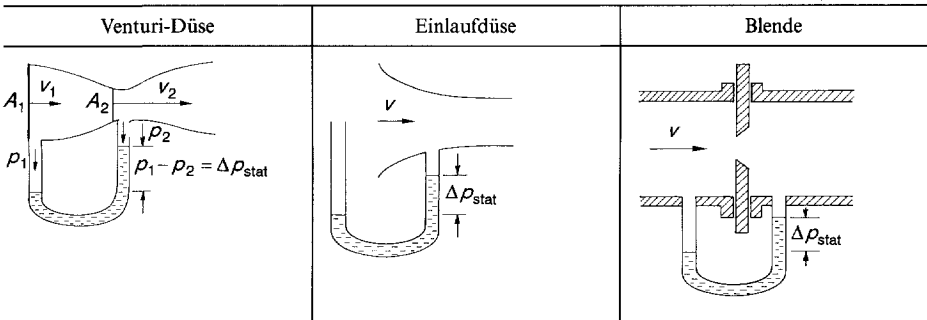
statischer Druck + dynamischer Druck + Schweredruck = konstant
(Staudruck) (geodätischer Druck)

A	Durchflußfläche des strömenden Mediums	p	Druck
dm/dt	Massenstrom	h	Höhe
dV/dt	Volumenstrom	m	Masse
v	Geschwindigkeit der Strömung	ρ	Dichte des strömenden Mediums
g	Erdbeschleunigung ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$)		

Tabelle H-4. Druckmessung in Strömungen.

Bezeichnung	Drucksonde	Pitot-Rohr	Prandtl'sches Staurohr
Skizze			
Meßgröße	statischer Druck	statischer Druck und Staudruck	Staudruck, Strömungsgeschwindigkeit
Berechnungs-Formel	$p = p_{\text{stat}}$	$p_{\text{ges}} = p_{\text{stat}} + \frac{\rho v^2}{2}$	$p_{\text{dyn}} = \frac{\rho v^2}{2}$ $v = \sqrt{\frac{2 p_{\text{dyn}}}{\rho}}$

Übersicht H-8. Volumenstrommessung durch Drosselgeräte nach DIN 1952.



Berücksichtigung der Reibungsarbeit W_R und des Kompressionsverlustes W_K am Drosselgerät:

$$p_1 + \frac{1}{2} \varrho_1 v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \varrho_2 v_2^2 + \frac{W_R}{\Delta V} + \frac{W_K}{\Delta V} \quad (\text{H-29})$$

Die Verlustanteile werden auf die kinetische Energie der Strömung bezogen und als *Expansionszahl* ε (Kompressionsverlust) oder als *Durchflußzahl* α (Reibungsverlust) berücksichtigt:

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{W_K / \Delta V}{\frac{1}{2} \varrho_2 v_2^2}} \quad (\text{H-30})$$

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{W_R / \Delta V}{\frac{1}{2} \varrho_2 v_2^2}} \quad (\text{H-31})$$

Strömungsgeschwindigkeit v_2 an der Drosselstelle:

$$v_2 = \alpha \varepsilon \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\varrho_2 \left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \cdot \frac{A_2^2}{A_1^2} \alpha^2 \varepsilon^2 \right)}} \quad (\text{H-32})$$

Volumenstrom $dV/dt = A_2 v_2$:

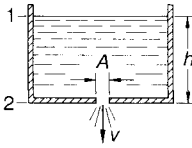
$$dV/dt = \alpha \varepsilon A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\varrho_2 \left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \cdot \frac{A_2^2}{A_1^2} \alpha^2 \varepsilon^2 \right)}} \quad (\text{H-33})$$

Das Korrekturfaktorprodukt $\alpha \varepsilon$ ist von der Bauweise des Drosselgerätes abhängig (für Normdrosseln in DIN 1952 tabelliert). Für Venturi-Rohre, die häufig zur Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeiten eingesetzt werden, ist $\alpha \varepsilon = 1$.

A_1, A_2	Fläche der Eintrittsstelle, Austrittsstelle (Drosselstelle)	ΔV	Volumenelement
v_1, v_2	Geschwindigkeit an der Eintrittsstelle, Drosselstelle	W_R, W_K	Reibungsarbeit, Kompressionsverlust
p_1, p_2	Druck an der Eintrittsstelle, Drosselstelle	ϱ_1, ϱ_2	Dichte an der Eingangsstelle, Drosselstelle
		α	Durchflußzahl (Reibungsverlust)
		ε	Expansionszahl (Kompressionsverlust)

Übersicht H-9. Ausfließen von Flüssigkeiten.

kleine Bodenöffnung

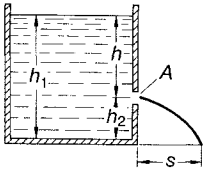


$$v = \mu \sqrt{2gh}$$

$$\frac{dV}{dt} = \mu A \sqrt{2gh} \quad (\text{H-34})$$

$\mu = \varphi \alpha$ Ausflußzahl
 φ Geschwindigkeitsziffer
 (Wasser: $\varphi = 0,97$)
 α Kontraktionszahl
 (Ausflußform; scharfkantig: $\alpha \approx 0,61$)

kleine Seitenöffnung

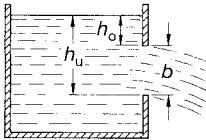


$$v = \mu \sqrt{2gh}$$

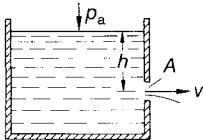
$$\frac{dV}{dt} = \mu A \sqrt{2gh} \quad (\text{H-35})$$

$$s = 2\mu \sqrt{hh_2}$$

große Seitenöffnung

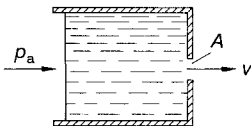


$$\frac{dV}{dt} = \mu \frac{2}{3} b \sqrt{2g} (h_u^{3/2} - h_o^{3/2}) \quad (\text{H-36})$$

Druck p_a auf Flüssigkeitsspiegel

$$v = \mu \sqrt{2 \left(gh + \frac{p_a}{\rho} \right)}$$

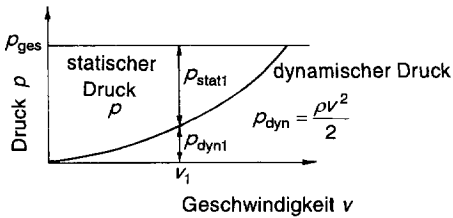
$$\frac{dV}{dt} = \mu A \sqrt{2 \left(gh + \frac{p_a}{\rho} \right)} \quad (\text{H-37})$$

Druck p_a an der Ausflußstelle

$$v = \mu \sqrt{\frac{2p_a}{\rho}}$$

$$\frac{dV}{dt} = \mu A \sqrt{\frac{2p_a}{\rho}} \quad (\text{H-38})$$

Übersicht H-10. Saugeffekte durch Erhöhen der Strömungsgeschwindigkeit.

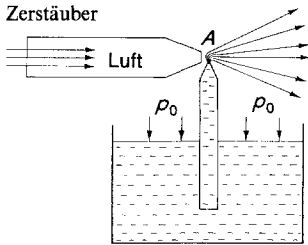


Mit zunehmender Strömungsgeschwindigkeit nimmt der Betriebsdruck p ab. Es entstehen Saugeffekte.

Effekt $p + \frac{\rho}{2} v^2 = \text{konst.}$

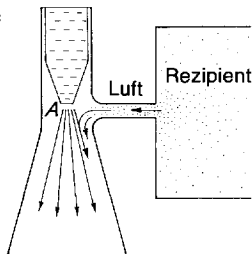
Beschreibung

Zerstäuber



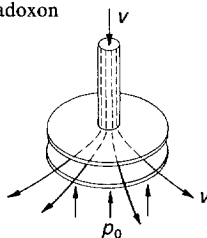
Punkt A: Strömungsgeschwindigkeit v nimmt zu; dadurch wird der Betriebsdruck p kleiner. Der Luftdruck p_0 läßt die Flüssigkeit im Steigrohr steigen, so daß sie zerstäubt.

Wasserstrahlpumpe



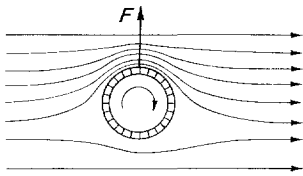
Punkt A: Höhere Strömungsgeschwindigkeit v ; dadurch nimmt Umgebungsdruck p ab, Luft wird angesaugt und ein Rezipient leergepumpt.

Aerodynamisches Paradoxon



Platten: Hohe Strömungsgeschwindigkeit zwischen den Platten; dadurch nimmt der statische Druck p ab; der Luftdruck p_0 drückt die Platten aneinander.

Magnus-Effekt



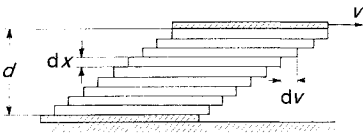
Oberfläche: Durch Rotation des Zylinders nimmt die Strömungsgeschwindigkeit v an der Oberseite zu; dadurch nimmt der statische Druck p ab, so daß eine Querkraft F (Magnuskraft) entsteht.

H.3.2 Strömungen realer Flüssigkeiten und Gase

H.3.2.1 Laminare Strömung

Laminare Strömungen sind, wie Übersicht H-1 an Hand der Navier-Stokesschen Gleichung zeigt, Strömungen mit *innerer Reibung*. Dabei gleiten die einzelnen Flüssigkeitsschichten (Lamine) mit *verschiedenen Geschwindigkeiten* übereinander, ohne sich zu vermischen. Es entsteht ein Geschwindigkeitsgefälle dv/dx .

Übersicht H-11. Laminare Strömung.



Reibungskraft $F_R = \eta A \frac{dv}{dx}$ (H-39)

Schubspannung $\tau = \frac{F_R}{A} = \eta \frac{dv}{dx}$ (H-40)

Temperaturabhängigkeit der dynamischen Viskosität η

Flüssigkeiten $\eta = B e^{b/T}$ (H-41.1)

Gase $\eta = \eta_0 \sqrt{T/T_0}$ (H-41.2)

(nicht druckabhängig, wenn mittlere freie Weglänge der Moleküle wesentlich kleiner als Gefäßdimensionen)

Fluidität $\varphi = \frac{1}{\eta}$ (H-42)

kinematische Viskosität $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ (H-43)

A	Berührungsfläche
B, b	empirisch ermittelte Konstanten
F_R	Reibungskraft
T, T_0	Temperatur, Bezugstemperatur
dv/dx	Geschwindigkeitsgefälle
η, η_0	dyn. Viskosität, dyn. Viskosität bei T_0
ρ	Dichte

Tabelle H-5. Dynamische Viskosität η und kinematische Viskosität ν einiger Flüssigkeiten (bei 20 °C) und Gase (bei 0 °C).

Flüssigkeit	dynamische Viskosität η $10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$	kinematische Viskosität ν mm^2/s
Aceton	0,33	0,41
Ameisensäure	1,80	1,45
Benzol	0,65	0,74
Chloroform	0,58	0,37
Essigsäure	1,23	1,17
Ethanol	1,21	1,50
Glycerin	1485	1175
Methanol	0,59	0,75
Nitrobenzol	2,0	1,68
Olivöl	81	88
Pentan	0,23	0,37
Quecksilber	1,56	0,12
Rizinusöl	985	1932
Schwefelsäure	30	15
Terpentinöl	1,47	1,72
Tetrachlorkohlenstoff	0,98	0,62
Toluol	0,59	0,68
Wasser	1	1
Xylol	0,59	0,70
Gas	dynamische Viskosität η $10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}$	kinematische Viskosität ν mm^2/s
Chlorwasserstoff	13,0	8,1
Ethan	8,7	6,4
Ethylen	9,3	7,5
Helium	18,9	104,5
Kohlendioxid	13,8	7,0
Kohlenmonoxid	16,7	13,5
Krypton	23,5	6,3
Luft	17,4	13,5
Methan	10,1	14,3
Neon	30,1	33,3
Propan	7,7	3,8
Sauerstoff	19,5	13,5
Schwefeldioxid	11,7	4,0
Schwefelwasserstoff	11,7	7,5
Stickoxid	18,1	13,3
Stickstoff	16,4	13,3
Wasserstoff	8,4	94,1
Xenon	21,2	3,6

Bernoulli-Gleichung bei Reibung

Die Reibungskraft F_R verursacht in einer Strömungsröhre (Übersicht H-7) einen Druckverlust p_v und vermindert dadurch die Druckdifferenz $p_1 - p_2$. Es gilt:

$$\varrho g h_1 + \frac{1}{2} \varrho v_1^2 + p_1 = \varrho g h_2 + \frac{1}{2} \varrho v_2^2 + p_2 + p_v; \quad (\text{H-44})$$

- ϱ Dichte des Mediums,
- g Erdbeschleunigung ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$),
- h_1 Höhe an der Stelle 1,
- h_2 Höhe an der Stelle 2,
- v_1 Geschwindigkeit an der Stelle 1,
- v_2 Geschwindigkeit an der Stelle 2,
- p_1 Druck an der Stelle 1,
- p_2 Druck an der Stelle 2,
- p_v Druckverlust infolge der Reibung.

In der Praxis wird der Druckverlust oft als *Verlusthöhe* h_v angegeben. Sie entspricht der-

jenigen Höhe, um die der Zufluß angehoben werden muß, um am Ausfluß denselben Druck wie im reibungsfreien Fall zu erreichen. Es gilt:

$$p_v = \varrho g h_v. \quad (\text{H-45})$$

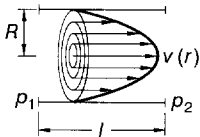
Für die Verlusthöhe h_v in geraden Rohrleitungen mit konstantem Querschnitt gilt:

$$h_v = \lambda \frac{l v^2}{2 d g}; \quad (\text{H-46})$$

- λ Rohrreibungszahl (dimensionslos),
- l Länge der Rohrleitung,
- v Strömungsgeschwindigkeit,
- d Durchmesser des Rohres,
- g Erdbeschleunigung ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$).

Übersicht H-12. Laminare Strömungen in einem Rohr (Hagen-Poiseuillesches Gesetz), um eine Kugel (Stokessches Reibungsgesetz) und zwischen Platten.

Rohr



$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4 \eta l} (R^2 - r^2)$$

Strömungsgeschwindigkeit

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi R^4 (p_1 - p_2)}{8 \eta l}$$

Volumenstrom

$$\frac{dm}{dt} = \varrho \frac{\pi R^4 (p_1 - p_2)}{8 \eta l}$$

Massenstrom

$$F_R = 8 \pi \eta l v_m$$

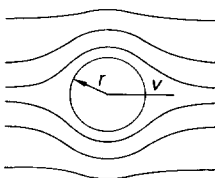
Reibungskraft

$$v_m = \frac{dV/dt}{\pi R^2} = v(0)/2$$

mittlere Geschwindigkeit

R Rohrradius

Kugel



$$v = \frac{2 g r^2 (\varrho_K - \varrho_{F1})}{9 \eta}$$

Sinkgeschwindigkeit einer fallenden Kugel

$$F_R = 6 \pi \eta r v$$

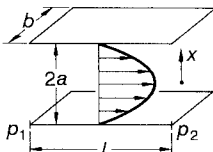
Reibungskraft

$$\eta = \frac{2 g r^2 (\varrho_K - \varrho_{F1})}{9 v}$$

Viskosität aus Kugelfallgeschwindigkeit

(ϱ_K Dichte des Körpers, ϱ_{F1} Dichte der Flüssigkeit)

Übersicht H-12 (Fortsetzung)

Platte	$v(x) = \frac{p_1 - p_2}{2\eta l} (a^2 - x^2)$	Strömungsgeschwindigkeit (Profil)
	$\frac{dV}{dt} = \frac{2b(p_1 - p_2)a^3}{3\eta l}$	Volumenstrom
	$\frac{dm}{dt} = \rho \frac{2b(p_1 - p_2)a^3}{3\eta l}$	Massenstrom
	$F_R = \frac{6\eta l b v_m}{a}$	Reibungskraft
	$v_m = \frac{dV/dt}{2ab}$	mittlere Geschwindigkeit

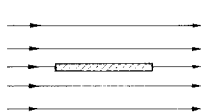
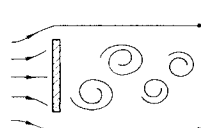
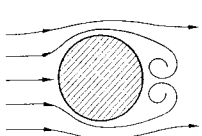
H.3.2.2 Turbulente Strömung

Bei der *turbulenten* Strömung entstehen *Wirbel* und damit eine *Widerstandskraft* F_W . Sie setzt sich aus zwei Anteilen zusammen, der *Reibungskraft* F_R an der Körperoberfläche und der *Kraft der Druckdifferenz* vor und hinter dem umströmten Körper.

Grenzschicht

Bei der Umströmung von Körpern bildet sich eine *Grenzschicht* der Dicke D aus, innerhalb der die Strömungsgeschwindigkeit von $v = 0$ m/s auf den vollen Wert ansteigt. Es wird zunächst eine laminare und später eine turbulente Grenzschicht gebildet.

Übersicht H-13. Strömungswiderstand und Strömungsleistung.

reiner Reibungswiderstand	reiner Druckwiderstand	Reibungs- und Druckwiderstand
		
längs überströmte Platte	quer angeströmte Platte	überströmte Kugel

Widerstandskraft $F_W = c_w \frac{\rho}{2} A v^2$ (H-47)

Strömungsleistung $P = c_w \frac{\rho}{2} A v^3$ (H-48)

- A gegen die Strömung stehender Querschnitt (Schattenfläche)
 F_W Widerstandskraft
 P Strömungsleistung
 c_w Widerstandsbeiwert (dimensionlos)
 v Relativgeschwindigkeit zwischen Körper und Medium
 ρ Dichte des strömenden Mediums

Tabelle H-6. Widerstandsbeiwert einiger Körper.


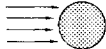
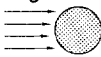


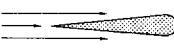

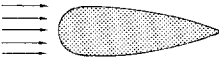
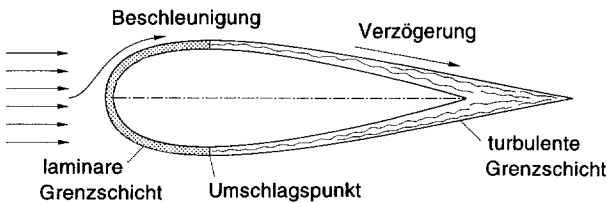
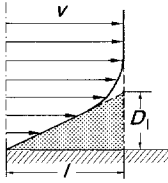
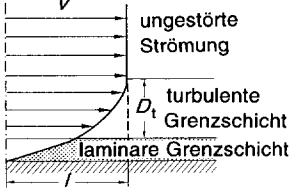
Körper	Widerstandsbeiwert c_w
Platte 	1,1 bis 1,3
langer Zylinder 	$Re > 5 \cdot 10^5$ $c_w = 0,35$ $5 \cdot 10^2 < Re \leq 5 \cdot 10^5$ $c_w = 1,2$
Kugel 	$Re > 10^6$ $c_w = 0,18$ $10^3 < Re < 10^5$ $c_w = 0,45$
Halbkugel (vorn) 	mit Boden 0,4 ohne Boden 0,34

Tabelle H-6 (Fortsetzung)

Körper	Widerstandsbeiwert c_w
Halbkugel (hinten) 	mit Boden 1,2 ohne Boden 1,3
Kegel mit Halbkugel 	0,16 bis 0,2
Halbkugel mit Kegel 	0,07 bis 0,09
Stromlinienkörper 	0,055

Übersicht H-14. Laminare und turbulente Grenzschichten.



	laminare Grenzschicht	turbulente Grenzschicht
Geschwindigkeitsverteilung		
Grenzschicht D	$D_l = 5 \sqrt{\nu \frac{l}{v}}$	$D_t = 0,37 \sqrt[5]{\nu \frac{l^4}{v}}$ ν kinematische Viskosität

Ähnlichkeitsgesetze

Um Strömungsvorgänge im Labor studieren zu können, werden sie in *ähnlichen Modellen* abgebildet. Dabei unterscheidet man zwischen *geometrischer* und *hydromechanischer* Ähnlichkeit.

Reynolds-Zahl Re

Wirken äußere Druck- und Reibungskräfte, so ist für die hydromechanische Ähnlichkeit die *Reynolds-Zahl* Re maßgebend. Die Variable L ist eine *charakteristische Länge*. Sie wird durch den Versuchsaufbau bestimmt, mit dem die Reynolds-Zahl gemessen wird (z. B. ein Rohr- oder Kugeldurchmesser oder die Länge einer Platte).

$$Re = \frac{L \varrho v}{\eta} = \frac{L v}{\nu}; \qquad (H-49)$$

- ϱ Dichte des strömenden Mediums,
- v Relativgeschwindigkeit zwischen Körper und Medium,
- η dynamische Viskosität,
- ν kinematische Viskosität.

Reynolds-Zahlen, oberhalb derer die Strömung turbulent wird, werden *kritische Reynolds-Zahlen* genannt.

Tabelle H-7. Kritische Reynolds-Zahl Re_{krit} sowie Rohrreibungszahl λ bzw. Widerstandsbeiwert c_w (bei $Re < Re_{krit}$) für verschiedene Strömungsgeometrien.

	Re_{krit}	$\lambda; c_w$
kreisrundes Rohr	2320	$\lambda = \frac{64}{Re}$
Kugel	$1,7 \cdot 10^5$ bis $4 \cdot 10^5$	$c_w = \frac{12}{Re}$
Platte	$3,2 \cdot 10^5$ bis 10^6	$c_w = \frac{1,328}{\sqrt{Re}}$

In der Praxis ist man auf empirische Messungen angewiesen, die laminare und turbulente Bereiche beschreiben.

Tabelle H-8. Rohrreibungszahl λ und Widerstandsbeiwert c_w für Rohre mit dem Durchmesser D und Platten mit der Länge l in Abhängigkeit von der Rauigkeit k und der Reynolds-Zahl.

	laminare Grenzschicht	turbulente Grenzschicht		
		hydraulisch glatt	hydraulisch rau	Übergangsgebiet
Rohre	$\lambda = \frac{64}{Re}$	Blasius $\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}}$ ($2320 < Re < 10^5$) Prandtl/Karman $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg \left(\frac{Re \sqrt{\lambda}}{2,3 l} \right)$ $c_w \approx \frac{0,309}{\lg (Re/7)^2}$	Nikuradse $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg \left(\frac{D}{k} \right) + 1,14$	Colebrook $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(\frac{2,5 l}{Re \sqrt{\lambda}} + 0,27 \frac{k}{D} \right)$
Platten	$c_w = \frac{1,328}{\sqrt{Re}}$	$c_w = \frac{0,0745}{\sqrt[5]{Re}}$	Voraussetzung: $Re \frac{k}{l} \geq 100$ $c_w = \frac{0,418}{\left(2 + \lg \left(\frac{l}{k} \right) \right)^{2,53}}$	c_w aus empirischen Tabellenwerken

Froude-Zahl Fr

Sie beschreibt die Ähnlichkeit von Strömungen, wenn vor allem die *Schwerkraft* F_G von Bedeutung ist (z. B. beim Fördern von Sand oder Bewegen von Schiffen in Gewässern). Ihre Gleichung lautet:

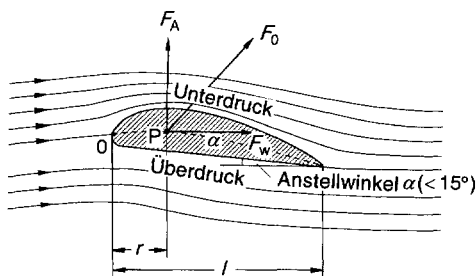
$$Fr = \frac{v}{\sqrt{Lg}}; \quad (H-50)$$

v Relativgeschwindigkeit zwischen Körper und Medium,

L charakteristische Länge des Körpers (z. B. Rohrdurchmesser, Kugeldurchmesser, Plattenlänge),
 g Erdbeschleunigung ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$).

Auftrieb bei umströmten Körpern

Treten bei der Umströmung von Körpern an der Oberseite höhere Geschwindigkeiten als an der Unterseite auf, dann entsteht an der Oberseite ein Gebiet des Unterdrucks und auf der Unterseite ein Gebiet des Überdrucks, und daraus eine *Auftriebskraft* F_A . Zusammen mit der Widerstandskraft F_W entsteht eine resultierende Kraft F_0 . Sie greift am *Druckpunkt* P an.

Übersicht H-15. Dynamischer Auftrieb an umströmten Körpern.

$$\text{Auftriebskraft} \quad F_A = c_A \frac{\rho}{2} A v^2 \quad (H-51)$$

$$\text{Widerstandskraft} \quad F_W = c_W \frac{\rho}{2} A v^2 \quad (H-52)$$

$$\begin{aligned} \text{Drehmoment} \quad M &= \frac{1}{2} \rho A v^2 r (c_A \cos \alpha + c_W \sin \alpha) \\ &= \frac{1}{2} c_M \rho A v^2 l \end{aligned} \quad (H-53)$$

$$\text{Gleitzahl} \quad \varepsilon = \frac{F_W}{F_A} = \frac{c_W}{c_A}$$

c_A, c_W	Auftriebsbeiwert, Widerstandsbeiwert
c_M	Momentanbeiwert ($c_M l = r (c_A \cos \alpha + c_W \sin \alpha)$)
A	Flügelfläche
F_A, F_W	Auftriebskraft, Widerstandskraft
M	Drehmoment
l	Flügelspannweite
r	Abstand zum Schwerpunkt
α	Anstellwinkel
ε	Gleitzahl
ρ	Dichte

Bernoulli-Gleichung für kompressible Medien

Gase zeigen bei hohen Strömungsgeschwindigkeiten ($v > 0,3c$; c : Schallgeschwindigkeit) nicht vernachlässigbare Dichteänderungen.

Pumpen

Pumpen sind Arbeitsmaschinen zum Fördern flüssiger Medien von einem niedrigen Energieniveau h_e zu einem höheren h_a . *Pumpenkennlinien* zeigen die Förderhöhe H_A in Abhängigkeit vom Förderstrom Q ($Q = A \cdot v$). Die Kennlinie zeigt einen *statischen Anteil*, der vom Förderstrom unabhängig ist und einen *dynamischen Anteil*, der eine Funktion des Förderstroms Q ist.

Übersicht H-16. Bernoulli-Gleichung für kompressible Medien.

Allgemeine Bernoulli-Gleichung

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = \text{konstant} \quad (\text{H-54})$$

Adiabatische Strömungen idealer Gase:

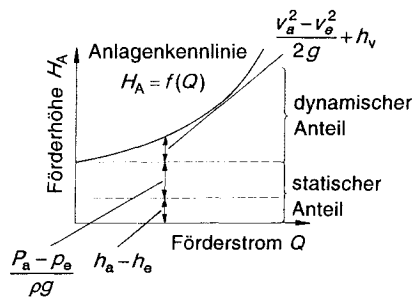
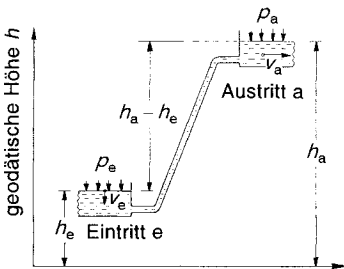
$$p/\rho^\kappa = \text{konstant}$$

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho} = \text{konstant} \quad (\text{H-55})$$

Ideale Gase: $\kappa = c_p/(c_p - R_i)$

$$\frac{v^2}{2} + c_p T = \text{konstant} \quad (\text{H-56})$$

c_p, c_v	spezifische Wärmekapazität bei konstantem
	Druck, Volumen
p	Druck
R_i	individuelle Gaskonstante
T	Temperatur
v	Geschwindigkeit
κ	Isentropenexponent ($\kappa = c_p/c_v$)

Übersicht H-17. Pumpe und Pumpenkennlinie.

$$\text{Förderhöhe } H_A = (h_a - h_e) + \frac{p_a - p_e}{\rho g} + \frac{v_a^2 - v_e^2}{2g} + h_v \quad (\text{H-57})$$

$$H_A = (h_a - h_e) + \frac{p_a - p_e}{\rho g} + \frac{Q^2/A_a^2 - Q^2/A_e^2}{2g} + h_v$$

h_a, h_e, h_v	Austrittshöhe, Eintrittshöhe, Verlusthöhe
A_a, A_e	Austrittsfläche, Eintrittsfläche
g	Erdbeschleunigung ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$)
p_a, p_e	Austrittsdruck, Eintrittsdruck
Q	Förderstrom ($Q = A \cdot v$)
v_a, v_e	Austrittsgeschwindigkeit, Eintrittsgeschwindigkeit
H_A	Förderhöhe
ρ	Dichte des zu fördernden Mediums

H.4 Molekularbewegungen

Während die Atome in Festkörpern um einen festen Punkt im Kristallgitter schwingen, bewegen sich die Moleküle in Flüssigkeiten um eine veränderliche augenblickliche Lage. Bei Gasen fehlt die Kohäsionskraft weitgehend, weshalb sich dort die Moleküle mit relativ hohen Geschwindigkeiten bewegen können. Die regellose Bewegung in Flüssigkeiten und Gasen wird *Brownsche Molekularbewegung* genannt.

H.4.1 Diffusion

Unter Diffusion versteht man die Mischung zweier Stoffe (meist von Flüssigkeiten und Gasen) ohne Einwirkung von äußeren Kräften. Der Massenstrom dm/dt folgt dabei dem *Konzentrationsgefälle*, das durch den Dichteunterschied $d\rho/dx$ beschrieben wird (*Ficksches Gesetz*):

$$\frac{dm}{dt} = -D A \frac{d\rho}{dx}; \quad (\text{H-58})$$

D Diffusionskoeffizient
(Einheit: z. B. m^2/s),
 $d\rho/dx$ Dichtegefälle in x -Richtung,
 A senkrecht durchströmte Fläche.

Osmose

Unter Osmose versteht man eine Diffusion in *nur einer Richtung*. Häufig findet sie bei Flüssigkeiten statt, die durch eine *semipermeable Scheidewand* getrennt sind. In diesem Fall können nur die Moleküle einer Sorte durchdiffundieren, weil die Poren so groß sind, daß

semipermeable Membran

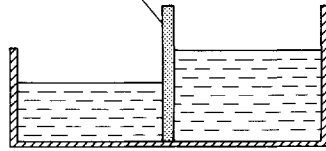


Bild H-4. Osmotischer Druck.

nur die Moleküle der *einen Sorte* durchgehen. Dadurch entsteht in dem einen Raum ein Überdruck, der *osmotische Druck*. Die Osmose ist dann beendet, wenn der osmotische Druck p_{osm} so groß ist, daß ebenso viele Moleküle wieder durch die semipermeable Wand zurückgedrückt werden, wie hineindiffundieren.

Der osmotische Druck p_{osm} gehorcht dem Gasgesetz (Abschn. O):

$$p_{\text{osm}} = \frac{\nu R_m T}{V}; \quad (\text{H-59})$$

ν Stoffmenge,
 R_m molare Gaskonstante
($R_m = 8,314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$),
 T absolute Temperatur,
 V Gesamtvolumen der Lösung.

H.4.2 Lösungen

Wenn Teile eines Stoffes gleichmäßig in einem andern verteilt sind, spricht man von *dispersen Lösungen*. Je nach Aggregatzustand des gelösten Stoffes in der Lösung sind andere Bezeichnungen üblich.

Tabelle H-9. Bezeichnungen von Lösungen.

gelöster Stoff \ Lösung	fest	flüssig	gasförmig
fest	festes Sol (Glas)	feste Emulsion, Gel	poröser Körper
flüssig	Suspension dispers (Gleichverteilung) molekular-dispers (Teilchen in Molekülgröße) kolloid-dispers (sehr kleine Stoffteile: 10^{-4} mm bis 10^{-8} mm)	Emulsion	Schaum
gasförmig	Rauch, Aerosol	Aerosol, Nebel	

J Schwingungen und Wellen

Übersicht J-1. Wichtige Normen.

DIN 1311 Blatt 1	Schwingungslehre Kinematische Begriffe
DIN 1311 Blatt 2	Schwingungslehre Einfache Schwinger
DIN 1311 Blatt 3	Schwingungslehre Schwingungssysteme mit endlich vielen Freiheitsgraden
DIN 1311 Blatt 4	Schwingungslehre Schwingende Kontinua, Wellen

elektromagnetischen Systemen betrifft dies die elektrische und die magnetische Feldenergie. Die *Periodizität* des Energieaustausches wird beschrieben durch die *Schwingungsdauer* T für einen Energieaustauschzyklus bzw. durch die *Frequenz* f , die die Anzahl der Zyklen je Zeiteinheit angibt:

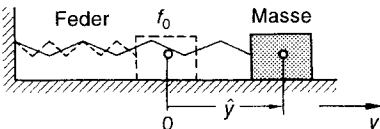
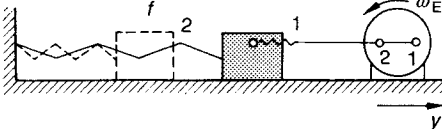
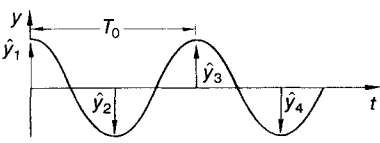
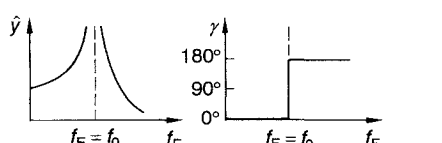
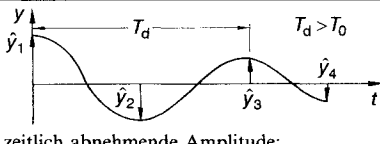
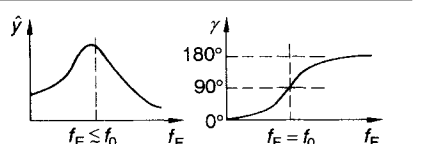
$$f = 1/T. \quad (J-1)$$

Bei Schwingungen und Wellen finden *periodische Zustandsänderungen* statt. In mechanischen Systemen (im festen, flüssigen und gasförmigen Zustand) werden die potentielle und kinetische Energie periodisch bewegt, und in

J.1 Schwingungen

Bei *freien* Schwingungen wird ein Schwinger *einmalig* aus seiner Ruhelage entfernt und sich selbst überlassen. Er schwingt im *ungedämpften*

Tabelle J-1. Einteilung der harmonischen Schwingungen.

	freie Schwingung	erzwungene Schwingung
	 <p>einmalige Auslenkung</p>	 <p>periodische Erregung von außen</p>
unge- dämpft	 <p>zeitlich konstante Amplitude: $\hat{y}_1 = \hat{y}_2 = \hat{y}_3 = \hat{y}_4$</p>	
ge- dämpft	 <p>zeitlich abnehmende Amplitude: $\hat{y}_1 > \hat{y}_2 > \hat{y}_3 > \hat{y}_4$</p>	

ten Fall mit einer konstanten Eigenfrequenz f_0 , und seine Auslenkung $y(t)$ schwankt zwischen zwei konstanten Maximalwerten (Amplituden \hat{y}). Bei gedämpften freien Schwingungen nimmt die Amplitude im zeitlichen Verlauf ab. Ferner ist die Frequenz der gedämpften Schwingung f_d kleiner als die Eigenfrequenz f_0 der ungedämpften freien Schwingung.

Wird einem schwingungsfähigen System (Oszillator) durch einen Erreger eine Erregerfrequenz f_E aufgezwungen, so werden erzwungene Schwingungen stattfinden. Ist die Erregerfrequenz f_E gleich der Eigenfrequenz f_0 des Oszillators, dann tritt Resonanz ein. Im ungedämpften Fall wächst die Amplitude auf einen unendlich großen Wert an (Resonanzkatastro-

phe); im gedämpften Fall erreicht die Amplitude einen endlichen Maximalwert.

J.1.1 Freie ungedämpfte Schwingung

J.1.1.1 Grundlagen

Die wichtigste Eigenschaft aller Schwingungen ist die Periodizität, d.h., bestimmte Zustände kehren in konstanten Zeitabständen wieder.

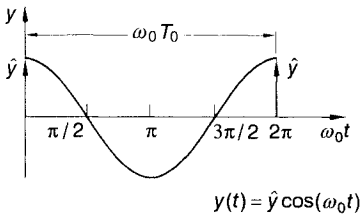
Dies wird mathematisch durch die harmonischen Funktionen Sinus bzw. Kosinus beschrieben.

Tabelle J-2. Charakteristische Kenngrößen ungedämpfter Schwingungen.

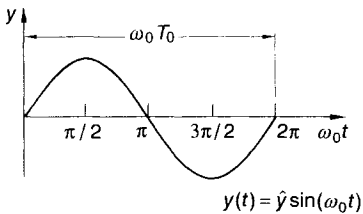
Kenngröße	Bedeutung
Periodizität	
Periodendauer T	Zeitspanne zwischen zwei aufeinanderfolgenden, gleichen Schwingungszuständen (z. B. zeitlicher Abstand zwischen zwei Maxima oder Minima)
Frequenz f	Anzahl der Schwingungen je Zeit $f = \frac{1}{T} \quad 1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$
Kreisfrequenz ω	$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad \text{s}^{-1}$
Auslenkungen	
Augenblickswert $y(t)$	momentane Auslenkung zur Zeit t
Amplitude \hat{y}	maximaler Wert der Auslenkung (für $\sin(\omega t + \varphi_0)$ oder $\cos(\omega t + \varphi_0) = 1$)
Phasenwinkel	
Nullphasenwinkel φ_0 (Anfangsphase)	Anfangslage des schwingenden Systems zur Zeit $t = 0$. Er folgt aus $y(t) = \hat{y} \cos(\omega t + \varphi_0)$: $\varphi_0 = \arccos \frac{y(0)}{\hat{y}}$ $\varphi_0 > 0$: voreilend $\varphi_0 < 0$: nacheilend
allgemeiner Phasenwinkel φ	$\varphi = \omega t + \varphi_0$ Summe der Phasenlage eines Punktes zur Zeit $t(\omega t)$ und des Nullphasenwinkels φ_0
Phase	
Phase	augenblicklicher Zustand einer Schwingung (bestimmt durch zwei Schwingungsgrößen, z. B. Weg und Zeit)

Übersicht J-2. Mathematische Beschreibung harmonischer Schwingungen.

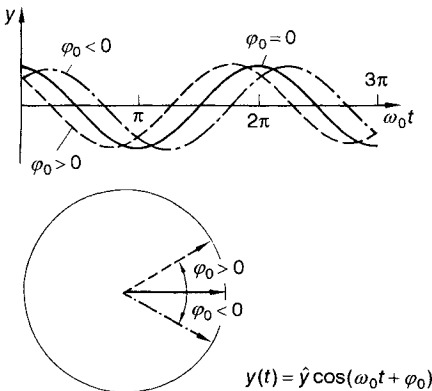
Cosinus-Schwingung



Sinus-Schwingung



Phasenverschobene Schwingung



$y(t)$	Auslenkung,
\hat{y}	Amplitude,
ω_0	Kreisfrequenz,
t	Zeit,
φ_0	Nullphasenwinkel.

J.1.1.2 Allgemeine Beschreibung durch eine Differentialgleichung

Differentialgleichungen der harmonischen Schwingung werden mit dem in der Übersicht J-3 zusammengestellten Ansatz gelöst. Dabei ergeben sich auch die Verläufe des *Weg-Zeit-Gesetzes*, des *Geschwindigkeits-Zeit-Gesetzes* und des *Beschleunigungs-Zeit-Gesetzes* mit ihren maximalen Werten für die Auslenkung, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung.

J.1.1.3 Schwingungssysteme

Für das *mathematische Pendel* (punktförmige Masse an einem unelastischen Faden aufgehängt) gelten die Angaben nur für *kleine Winkel* β . Tabelle J-4 zeigt den Korrekturfaktor der Schwingungsdauer T_0 für größere Auslenkungen.

Mit dem *Torsionspendel* können *Massenträgheitsmomente* J_A um den Drehpunkt *A* experimentell ermittelt werden.

J.1.1.4 Gesamtenergie

Für Schwingungen gilt zu *jedem Zeitpunkt* der *Energieerhaltungssatz*. Die Gesamtenergie E_{ges} ist *proportional* zum Quadrat der Schwingungsamplitude \hat{y}^2 bzw. der Maximalgeschwindigkeit \hat{v}^2 .

Übersicht J-3. Ansatz zur Lösung der Differentialgleichung; zeitlicher Verlauf von Auslenkung, Geschwindigkeit und Beschleunigung.

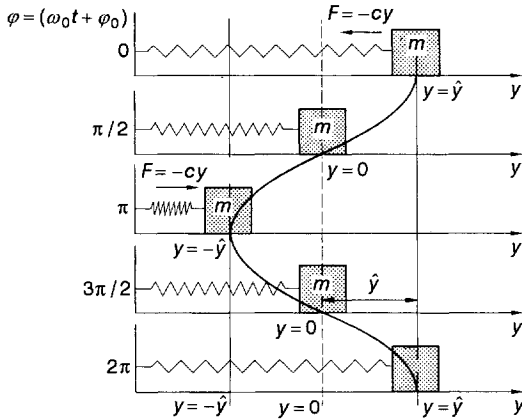
Gleichungen

Weg-Zeit-Gleichung: $y(t) = \hat{y} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

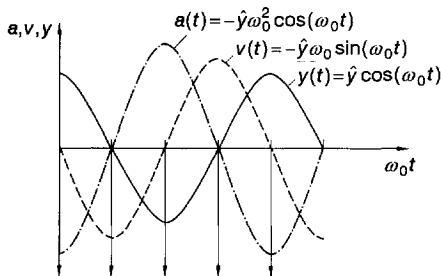
Geschwindigkeit-Zeit-Gleichung: $v(t) = -\hat{y} \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$

Beschleunigungs-Zeit-Gleichung: $a(t) = -\hat{y} \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

Schwingungsverlauf



Periodische Funktionen der Auslenkung y , der Geschwindigkeit v und der Beschleunigung a



Winkel	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π		
Größe	$y(t)$	\hat{y}	0	$-\hat{y}$	0	\hat{y}	$y(t) = \hat{y} \cos(\omega_0 t)$ $y_{\max} = \hat{y}$
	$v(t)$	0	$-v_{\max}$	0	v_{\max}	0	$v(t) = -\hat{y} \omega_0 \sin(\omega_0 t)$ $v_{\max} = \hat{y} \omega_0$
	$a(t)$	$-a_{\max}$	0	a_{\max}	0	$-a_{\max}$	$a(t) = -\hat{y} \omega_0^2 \cos(\omega_0 t)$ $a_{\max} = \hat{y} \omega_0^2$

$y(t)$	Auslenkung,	a_{\max}	maximale Beschleunigung,
\hat{y}	Amplitude,	ω_0	Kreisfrequenz,
v	Geschwindigkeit,	φ_0	Nullphasenwinkel,
v_{\max}	maximale Geschwindigkeit,	t	Zeit.
a	Beschleunigung,		

Tabelle J-3. Schwingungssysteme, ihre Differentialgleichungen und Lösungen.

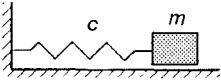
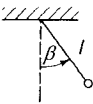
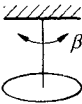
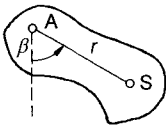
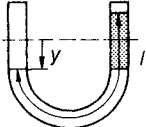
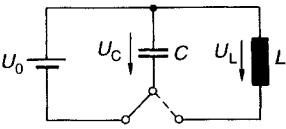
Schwingungssystem	Kraft-Momentenansatz Differentialgleichung	$\omega_0 = 2\pi f_0$ $= \frac{2\pi}{T_0}$	f_0	T_0
Feder-Masse-System 	$F = ma$ $-cy = m\ddot{y}$ $\ddot{y} + \frac{c}{m}y = 0$	$\sqrt{\frac{c}{m}}$	$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m}}$	$2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}$
mathematisches Pendel 	$F = ma$ $-m g \beta = m l \ddot{\beta}$ $\ddot{\beta} + \frac{g}{l} \beta = 0$	$\sqrt{\frac{g}{l}}$	$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$	$2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$
Torsionspendel 	$M = J_A \alpha$ $-c^* \beta = J_A \ddot{\beta}$ $\ddot{\beta} + \frac{c^*}{J_A} \beta = 0$	$\sqrt{\frac{c^*}{J_A}}$	$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c^*}{J_A}}$	$2\pi \sqrt{\frac{J_A}{c^*}}$
physikalisches Pendel 	$M = J_A \alpha$ $m g r \beta = J_A \ddot{\beta}$ $\ddot{\beta} + \frac{m g r}{J_A} \beta = 0$	$\sqrt{\frac{m g r}{J_A}}$	$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m g r}{J_A}}$	$2\pi \sqrt{\frac{J_A}{m g r}}$
Flüssigkeitspendel 	$F = ma$ $-2A g y = m_{\text{ges}} \ddot{y}$ $\ddot{y} + \frac{2A g}{m_{\text{ges}}} y = 0$ $\ddot{y} + \frac{2g}{l} y = 0$	$\sqrt{\frac{2A g}{m_{\text{ges}}}}$ $\sqrt{\frac{2g}{l}}$	$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2A g}{m_{\text{ges}}}}$ $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g}{l}}$	$2\pi \sqrt{\frac{m_{\text{ges}}}{2A g}}$ $2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}$
elektromagnetischer Schwingkreis 	$u_C - u_L = 0$ $u_L = -L \frac{d^2 q}{dt^2}$ $u_C = \frac{1}{C} q$ $\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$	$\sqrt{\frac{1}{LC}}$	$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}}$	$2\pi \sqrt{LC}$

Tabelle J-3 (Fortsetzung)

A	Querschnitt,	q	Ladung,
a	Beschleunigung,	L	Induktivität,
c	Federkonstante,	F	Kraft,
C	Kapazität,	M	Drehmoment,
c^*	Winkelrichtgröße,	J_A	Massenträgheitsmoment um die Drehachse A ,
g	Erdbeschleunigung,	y	Auslenkung,
l	Pendellänge, Länge des Wassers,	α	Winkelbeschleunigung,
r	Abstand vom Aufhängepunkt zum Schwerpunkt,	β	Winkel,
m	Masse,	ϱ	Dichte,
u_L	Spannung an der Spule,	$\ddot{y} = \frac{d^2 y}{dt^2}; \quad \ddot{\beta} = \frac{d^2 \beta}{dt^2}; \quad \ddot{q} = \frac{d^2 q}{dt^2}$	
u_C	Spannung am Kondensator,		

Tabelle J-4. Korrekturfaktoren für T_0 für größere Winkel des mathematischen und physikalischen Pendels.

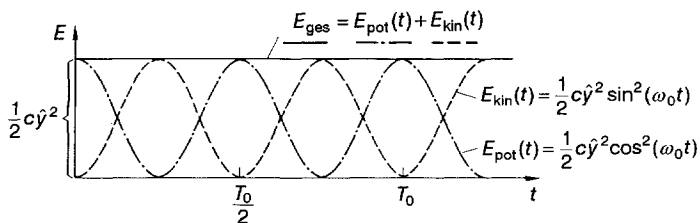
Winkel	Korrekturfaktor
1°	1,00002
5°	1,00048
10°	1,00191
30°	1,01741
45°	1,03997

Übersicht J-4. Energieverlauf und Energieerhaltungssatz für den ungedämpften Einmassenschwinger.

Energie-Erhaltungssatz

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{pot}}(t) + E_{\text{kin}}(t) = \text{const}$$

$$E_{\text{ges}} = \frac{1}{2} c \hat{y}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \hat{y}^2 = \frac{1}{2} m \hat{v}^2 \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$



c	Federkonstante,	\hat{v}	maximale Geschwindigkeit,
E_{ges}	Gesamtenergie,	\hat{y}	Amplitude,
E_{kin}	kinetische Energie,	t	Zeit,
E_{pot}	potentielle Energie,	ω_0	Kreisfrequenz.
m	Masse,		

Übersicht J-5. Gedämpfte Schwingung.

Geschwindigkeitsproportionale Reibung

$$F_R = -b v$$

Differentialgleichung

$$\ddot{y} + \frac{b}{m} \dot{y} + \frac{c}{m} y = 0$$

$$\ddot{y} + 2D\omega_0 \dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

$$\text{Abklingkoeffizient} \quad \delta = \frac{b}{2m} = \frac{\ln(\hat{y}_i/\hat{y}_{i+1})}{T_d} = \frac{\Lambda}{T_d}$$

$$\text{Dämpfungsgrad} \quad D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{b}{2m\omega_0} = \frac{b}{2\sqrt{mc}}$$

$$\text{Verlustfaktor} \quad d = 2D = \frac{b}{m\omega_0} = \frac{b}{\sqrt{mc}}$$

$$\text{Güte} \quad Q = \frac{1}{d} = \frac{1}{2D} = \frac{m\omega_0}{b} = \frac{\sqrt{mc}}{b}$$

Übersicht J-5 (Fortsetzung)

$$\text{Amplitudenverhältnis} \quad \frac{\hat{y}_i}{\hat{y}_{i+1}} = e^{\delta T_d} = k$$

$$n\text{-te Amplitude} \quad \frac{\hat{y}_i}{\hat{y}_{i+n}} = k^n$$

$$\text{logarithmisches Dekrement} \quad \Lambda = \ln\left(\frac{\hat{y}_i}{\hat{y}_{i+1}}\right) \\ = \ln(k) = \delta T_d$$

b	Dämpfungskoeffizient,
c	Federkonstante,
m	Masse,
k	Amplitudenverhältnis,
\hat{y}_i	Amplitude i ,
\hat{y}_{i+1}	Amplitude $i + 1$,
v	Geschwindigkeit,
T_d	Schwingungsdauer der gedämpften Schwingung,
Λ	logarithmisches Dekrement,
ω_0	Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung.

J.1.2 Freie gedämpfte Schwingung

Reibungskräfte F_R bringen eine freie Schwingung im Laufe der Zeit zur Ruhe (Tabelle J-1). Je nach Ansatz für die Reibungskraft F_R entstehen unterschiedliche Differentialgleichungen.

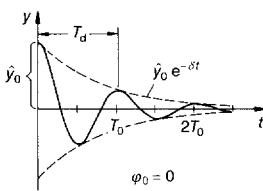
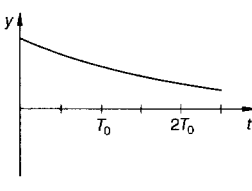
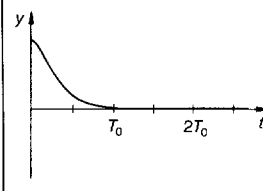
Im folgenden wird die *geschwindigkeitsproportionale Reibung* untersucht, bei der die Reibungskraft F_R proportional zur Geschwindigkeit zunimmt (*Newtonsches Reibungsgesetz*).

Tabelle J-6 zeigt die drei möglichen Fälle: den Schwingfall, den Kriechfall und den aperiodischen Grenzfall.

Tabelle J-5. Unterschiedliche Reibungskräfte und Differentialgleichungen für das Feder-Masse-System.

Reibungskraft	geschwindigkeits-unabhängige Reibungskraft $F_R = \mu F_N$	geschwindigkeits-abhängige viskose Reibungskraft $F_R = b v$	geschwindigkeits-abhängige Luftreibungskraft $F_R = k v^2$
Differentialgleichung des Feder-Masse-Systems	$m\ddot{y} \pm \mu F_N + c y = 0$ Substitution: $y_0 = \frac{\mu F_N}{c}$ $s = y \pm y_0$ $\ddot{s} = \ddot{y}$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $\ddot{s} + \frac{c}{m} s = 0$ </div>	$m\ddot{y} + b\dot{y} + c y = 0$ <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $\ddot{y} + \frac{b}{m} \dot{y} + \frac{c}{m} y = 0$ </div>	$m\ddot{y} + k \dot{y}^2 + c y = 0$ <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $\ddot{y} + \frac{k}{m} \dot{y}^2 + \frac{c}{m} y = 0$ </div>

Tabelle J-6. Lösungen für die drei Fälle der gedämpften Schwingung.

	Schwingfall	Kriechfall	aperiodischer Grenzfall
Lösung	$D < 1$ $\omega_0 > \delta$	$D > 1$ $\omega_0 < \delta$	$D = 1$ $\omega_0 = \delta$
Bedingung	$y(t) = \hat{y}_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_d t + \varphi_0)$ $\omega_d = \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$ $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$ $\omega_d < \omega_0$	$y(t) = \hat{y}_1 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}$ $+ \hat{y}_2 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}$ $y(t) = \hat{y}_1 e^{-\omega_0(D - \sqrt{D^2 - 1})t}$ $+ \hat{y}_2 e^{-\omega_0(D + \sqrt{D^2 - 1})t}$ $\omega_d \text{ imaginär}$	$y(t) = (\hat{y}_1 + \hat{y}_2 \delta t) e^{-\delta t}$ $y(t) = (\hat{y}_1 + \hat{y}_2 \delta t) e^{-\omega_0 D t}$ $\omega_d = 0$
Graph der Funktion			

- b Dämpfungskoeffizient,
 c Federkonstante,
 D Dämpfungsgrad ($D = \delta/\omega_0$),
 T_d Schwingungsdauer der gedämpften Schwingung,
 T_0 Schwingungsdauer der ungedämpften Schwingung,
 $y(t)$ Auslenkung,
 \hat{y} Amplitude,
 δ Abklingkoeffizient ($\delta = \omega_0 D$),
 ω_0 Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung,
 ω_d Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung,
 t Zeit.

Schwingfall für $\omega_0 > \delta$ ($D < 1$)

Wie die Lösung nach Tabelle J-6 und der Kurvenverlauf zeigen, ist die Kreisfrequenz ω_d der gedämpften Schwingung *kleiner* als die der ungedämpften ω_0 ($\omega_d < \omega_0$). Entsprechend gilt: $T_d > T_0$. Wie die Lösungsgleichung nach Tabelle J-6 ferner zeigt, nehmen die Amplituden entsprechend der Exponentialfunktion $e^{-\delta t}$ ab. Das bedeutet, daß die *Amplitudenverhältnisse gleich* sind (Amplitudenverhältnis

k). Zur Bestimmung des Abklingkoeffizienten δ wird dieses logarithmiert und das *logarithmische Dekrement* A gebildet (Übersicht J-5).

Kriechfall für $\omega_0 < \delta$ ($D > 1$)

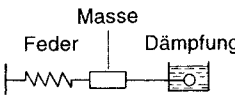
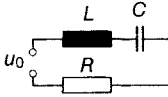
Wie Tabelle J-6 zeigt, tritt *keine Schwingung* auf; die Amplitude nimmt monoton ab. Die Anfangsbedingungen für $y(0)$ und $\dot{y}(0)$ bestimmen die beiden Integrationskonstanten \hat{y}_1 und \hat{y}_2 .

Aperiodischer Grenzfall für $\omega_0 = \delta$ ($D = 1$)

In diesem Fall tritt gerade *eben keine Schwingung* mehr auf. Der aperiodische Grenzfall spielt für viele Meßgeräte eine wichtige Rolle, wenn Schwingungen vermieden und die Meßwerte möglichst schnell angezeigt werden soll-

len. Die Lösung ist in Tabelle J-6 zu erkennen. Die beiden Integrationskonstanten werden aus den Anfangsbedingungen $y(0)$ und $\dot{y}(0)$ ermittelt.

Mechanische und elektromagnetische gedämpfte Schwingungen**Übersicht J-6. Vergleich mechanischer und elektromagnetischer gedämpfter Schwingungen.**

mechanisch	elektromagnetisch
 $\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dy}{dt} + \frac{c}{m} y = 0$ <p> Masse m Dämpfungskonstante b Federkonstante c Auslenkung y Geschwindigkeit v Federkraft $F = c y$ </p> <p> potentielle Energie $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} c y^2$ kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$ </p>	 $\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$ <p> Induktivität der Spule L Widerstand R Kehrwert der Kapazität $\frac{1}{C}$ Ladung q Strom i Kondensatorspannung $u_c = \frac{1}{C} q$ </p> <p> elektrische Energie $E_{\text{el}} = \frac{1}{2C} q^2$ magnetische Energie $E_{\text{magn}} = \frac{1}{2} L i^2$ </p>
ungedämpfte Kreisfrequenz ω_0	
$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$
Dämpfungsfrequenz ω_d	
$\omega_d = \sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$	$\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$
Abklingkoeffizient δ	
$\delta = \frac{b}{2m}$	$\delta = \frac{R}{2L}$
Dämpfungsgrad D	
$D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{1}{mc}}$	$D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{1}{L}}$
Güte Q	
$Q = \frac{1}{2D} = \frac{\sqrt{mc}}{b}$	$Q = \frac{1}{2D} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

J.1.3 Erzwungene Schwingung

Bei einer *erzwungenen Schwingung* wird einem mechanischen (oder elektrischen) System (dem *Resonator*) von einem *äußeren Erreger* eine *periodische Kraft* (oder Spannung) aufgezogen. Nach der Einschwingdauer

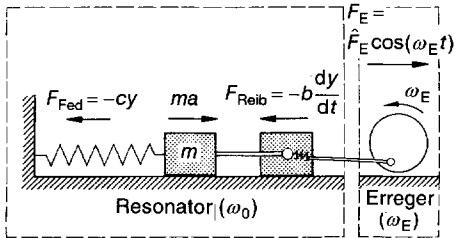
schwingt das System mit der Frequenz des Erregers ω_E .

J.1.3.1 Erzwungene mechanische Schwingung

Übersicht J-7 zeigt als *Resonator* ein schwingungsfähiges Feder-Masse-System, auf das ein

Übersicht J-7. Erzwungene Schwingung.

Erzwungene Schwingung

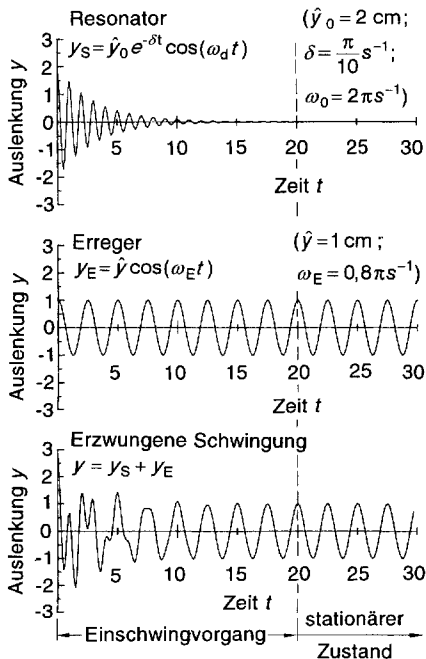


Differentialgleichung

$$\ddot{y} + \frac{b}{m} \dot{y} + \frac{c}{m} y = \frac{\hat{F}_E}{m} \cos(\omega_E t)$$

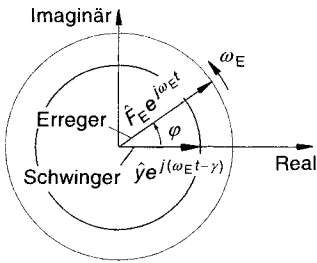
$$\ddot{y} + 2D\omega_0 \dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{\hat{F}_E}{m} \cos(\omega_E t)$$

Schwingungsverhalten des Systems

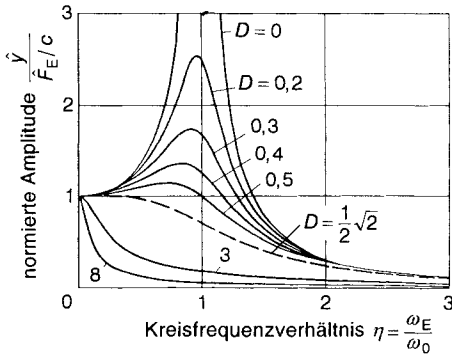


Übersicht J-7 (Fortsetzung)

Kraft als komplexer Zeiger



Amplituden-Resonanzfunktion



$$\hat{y} = \frac{\hat{F}_E}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2D\omega_0\omega_E)^2}}$$

$$\hat{y} = \frac{\hat{F}_E}{c \sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

$$(\eta = \omega_E / \omega_0)$$

Resonanzamplitude

$$\hat{y}_{\text{Res}} = \frac{\hat{F}_E}{c 2D \sqrt{1 - D^2}} = \frac{\hat{y}_{\text{stat}}}{2D \sqrt{1 - D^2}}$$

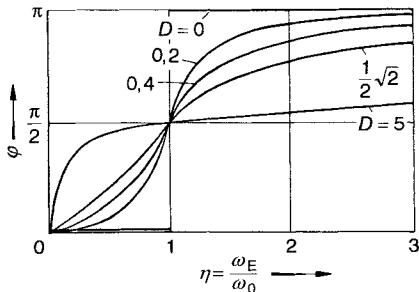
Resonanzfrequenz

$$\eta_R = \frac{\omega_R}{\omega_0} = \sqrt{1 - 2D^2}$$

Güte des Schwingkreises

$$Q = \frac{1}{2D} = \frac{\hat{y}_{\text{res}}}{\hat{y}_{\text{stat}}}$$

Phasen-Resonanzfunktion



$$\tan \varphi = \frac{2D\omega_E\omega_0}{(\omega_0^2 - \omega_E^2)} = \frac{2D\eta}{(1 - \eta^2)}$$

$$\eta = \arctan \frac{2D\eta}{1 - \eta^2} \quad \eta < 1$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{2D}{\eta^2 - 1} \quad \eta > 1$$

Übersicht J-7 (Fortsetzung)

b	Dämpfungskoeffizient ($b = 2m\delta$),
c	Federkonstante,
D	Dämpfungsgrad ($D = \delta/\omega_0$),
$F_{\text{Fed}}, F_{\text{R}}, F_{\text{E}}$	Federkraft, Reibungskraft, erregende Kraft,
j	imaginäre Einheit ($j = \sqrt{-1}$),
y	Auslenkung des Schwingers,
\hat{y}_{res}	Amplitude im Resonanzfall,
\hat{y}_{stat}	Amplitude bei quasistatischer Anregung
t	Zeit,
Q	Güte,
δ	Abklingkoeffizient $\left(\delta = D\omega_0 = \frac{b}{2m}\right)$,
$\omega_0, \omega_{\text{E}}$	Kreisfrequenz des ungedämpften Systems, des Erregers,
γ	Phasenverschiebung zwischen schwingendem System und Erreger,
η	Frequenzverhältnis ($\eta = \omega_{\text{E}}/\omega_0$; normierte Frequenz).

Erreger mit der Kreisfrequenz ω_{E} periodisch einwirkt. Dabei wirken drei Kräfte:

- Federkraft $F_{\text{Fed}} = -cy$,
- Reibungskraft $F_{\text{R}} = -b \frac{dy}{dt}$
- Erregende Kraft $F_{\text{E}} = \hat{F}_{\text{E}} \cos(\omega_{\text{E}} t)$.

Wie Übersicht J-7 zeigt, findet eine Überlagerung der Schwingungen des gedämpften Systems (mit der Kreisfrequenz ω_{d}) mit den Schwingungen des erregenden Systems (Kreisfrequenz der erregenden Schwingung ω_{E}) statt. Nach der *Einschwingdauer* schwingt das *gesamte System* mit der Kreisfrequenz der erregenden Schwingung ω_{E} . Die erregende Kraft F_{E} ist ein komplexer Zeiger $\hat{F}_{\text{E}} e^{j(\omega_{\text{E}} t)}$, der mit der erregenden Kreisfrequenz ω_{E} schwingt. Die Auslenkung des Schwingers $\hat{y} e^{j(\omega_{\text{E}} t - \gamma)}$ rotiert als Zeiger mit derselben Frequenz ω_{E} , jedoch um die Phasenverschiebung γ verzögert. Die Phasenverschiebung hängt von der Kreisfrequenz des Erregers ω_{E} , der Eigenfrequenz des Resonators ω_0 und der Dämpfung D ab.

Folgende Fälle treten auf:

Quasistatische Anregung ($\eta \ll 1$)

Als Amplitude ergibt sich: $y_{\text{stat}} = \hat{F}_{\text{E}}/c$ (statische Auslenkung aufgrund der Federkraft). Zwischen Erreger und Resonator ist die Phasenverschiebung gleich null, weil die erregende Kraft sich so langsam ändert, daß der Schwin- gen folgen kann.

Resonanzfall ohne Dämpfung ($\eta = 1$; $D = 0$)

Es tritt ein Phasensprung von 0 auf π auf. Die Amplitude wird *unendlich* groß (Übersicht J-7). Es kommt zur *Resonanzkatastrophe*. Sie kann verhindert werden durch:

- Vermeidung periodischer Kraftwirkungen,
- Einbau geeigneter Dämpfungsglieder,
- großen Unterschied zwischen der Eigenfrequenz des schwingungsfähigen Systems ω_0 und der Erregerfrequenz ω_{E} .

Resonanzfall mit Dämpfung ($\eta < 1$; $D > 0$)

Mit steigendem Dämpfungsgrad nehmen die Amplituden bis zur *Grenzdämpfung* $D_{\text{Gr}} = 1/\sqrt{2}$ ab. Wird die Grenzdämpfung überschritten, dann tritt keine Resonanzüberhöhung mehr ein. Die *Güte* Q eines Schwingkreises wird näherungsweise durch das Verhältnis der Amplitude Resonanzfall \hat{y}_{Res} und der Amplitude im statischen Fall \hat{y}_{stat} bestimmt ($Q = 1/(2D) = \hat{y}_{\text{Res}}/\hat{y}_{\text{stat}}$). Wichtige Anwendungsgebiete sind die (*mechanischen*) *Frequenzfilter* in der Nachrichtentechnik.

Hochfrequente Anregung ($\eta \gg 1$)

Der Erreger und der Resonator schwingen annähernd gegenphasig (für $\eta \rightarrow \infty$ ist $\gamma = \pi$), und zwar um so genauer, je geringer die Dämpfung D ist. Unabhängig vom Dämpfungsgrad D geht die Amplitude der erzwungenen Schwingung gegen null ($\hat{y} \approx 0$). In der Praxis wird damit die *Übertragung von Eigenschwingungen* vermieden.

Tabelle J-7. Amplituden- und Phasenverlauf einer erzwungenen Schwingung für verschiedene Dämpfungsgrade und unterschiedliche Kreisfrequenzen.

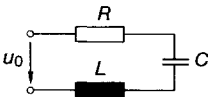
Dämpfung D	ohne Dämpfung $D = 0$	geringe Dämpfung $D \leq 0,1$	überkritische Dämpfung $D \geq \frac{1}{2}\sqrt{2}$
Kreisfrequenz- verhältnis η			
quasistatische Anregung $\eta \approx 0$ ($\omega_E \ll \omega_0$)	Amplitude $\hat{y} = \frac{\hat{F}_E}{c}$		
	bis $\eta \approx 1$ zunehmend		mit $\eta > 0$ abnehmend
	Phasenverschiebung $\gamma = 0$		
Resonanz $\eta \approx 1$ ($\omega_E \approx \omega_0$)	Amplitude $\hat{y} \rightarrow \infty$	Amplitude $\hat{y} \rightarrow \text{Maximum}$	Amplitude $\hat{y} < \frac{\hat{F}_E}{c}$
	Phasenverschiebung $\gamma = \frac{\pi}{2}$		
hochfrequente Anregung $\eta \gg 1$ ($\omega_E \gg \omega_0$)	Amplitude $\hat{y} \rightarrow 0$		
	Phasenverschiebung $\gamma = \pi$	Phasenverschiebung $\gamma \rightarrow \pi$ (abhängig von D)	

J.1.3.2 Erzwungene elektrische Schwingung

Der elektrische Reihenschwingkreis wird mit einer Wechselspannung $u_0 = \hat{u}_0 \cos(\omega_E t)$ der Kreisfrequenz ω_E angeregt (Übersicht J-8). Es ist für die Bauteile zu beachten: Bei Schwingkreisen mit hoher Güte Q liegt im Resonanzfall an Kondensator und Spule das Q -fache der Generatorspannung an.

Übersicht J-8. Erzwungene elektrische Schwingung.

Elektromagnetischer Schwingkreis



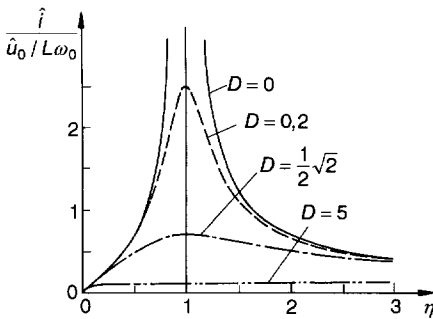
Differentialgleichung

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = -\frac{\hat{u}_0 \omega_E}{L} \sin(\omega_E t)$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2D\omega_0 \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = -\frac{\hat{u}_0 \omega_E}{L} \sin(\omega_E t)$$

Übersicht J-8 (Fortsetzung)

Stromamplitude



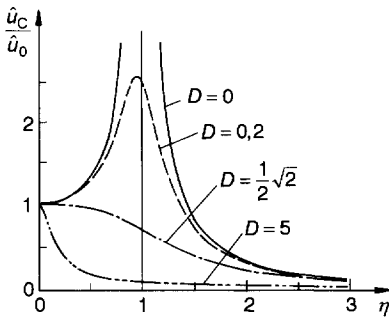
$$\hat{i} = \frac{\hat{u}_0}{\sqrt{R^2 + (\omega_E L - 1/(\omega_E C))^2}}$$

$$\hat{i} = \frac{\hat{u}_0 \eta}{\omega_0 L \sqrt{(2D\eta)^2 + (\eta^2 - 1)^2}}$$

$$\hat{i}_{\text{Res}} = \frac{\hat{u}_0}{R} = \frac{\hat{u}_0 \eta}{\omega_0 L \sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

Spannungsverlauf

Spannung am Widerstand: $u_R = iR = \hat{u}_R \cos(\omega_E t - \gamma)$; $\hat{u}_R = \hat{i}R$
(wie Stromamplitude) $u_{R, \text{Res}} = \hat{u}_0$



Spannung am Kondensator

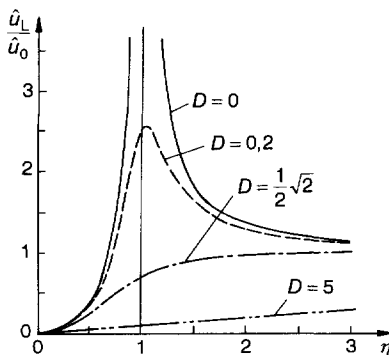
$$\hat{u}_C = \frac{\hat{u}_0}{\sqrt{(2D\eta)^2 + (\eta^2 - 1)^2}} = \frac{\hat{u}_0}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

$$\hat{u}_{C, \text{Res}} = \frac{\hat{u}_0}{2D\sqrt{1 - D^2}}$$

$$D = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$\frac{\hat{u}_{C, \text{Res}}}{\hat{u}_0} = \frac{1}{2D\sqrt{(1 - D^2)}} \approx \frac{1}{2D} = Q$$

Spannung an der Spule



$$\hat{u}_L = \frac{\hat{u}_0 \eta^2}{\sqrt{(2D\eta)^2 + (\eta^2 - 1)^2}} = \frac{\hat{u}_0 \eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

$$\hat{u}_{L, \text{Res}} = \frac{\hat{u}_0}{2D\sqrt{(1 - D^2)}}$$

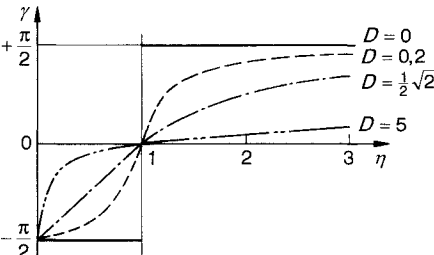
$$D = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Übersicht J-8 (Fortsetzung)

Phasenwinkel γ zwischen Erregerspannung und Strom

$u_0(t) = \hat{u}_0 \cos \omega_E t$

$i(t) = \hat{i} \cos (\omega_E t - \gamma)$



$\tan \gamma = \frac{\omega_E^2 - \omega_0^2}{\omega_E \cdot R/L}$

$\tan \gamma = \frac{\eta^2 - 1}{2 D \eta}$

C	Kapazität,
D	Dämpfungsgrad,
L	Induktivität,
i	elektrischer Strom,
R	ohmscher Widerstand,
$\hat{u}_R, \hat{u}_C, \hat{u}_L$	Amplitude der Spannung am Widerstand, am Kondensator, an der Spule,
\hat{u}_0	Amplitude der äußeren Wechselspannung,
γ	Phasenwinkel zwischen erregender Spannung und Strom im Schwingkreis,
ω_E	Kreisfrequenz der erregenden Spannung,
ω_0	Eigen-Kreisfrequenz des Schwingkreises,
η	Verhältnis der Kreisfrequenzen ($\eta = \omega_E/\omega_0$).

J.1.4 Überlagerung von Schwingungen

Schwingungen überlagern sich innerhalb des elastischen Bereichs ungestört (*Superpositionsprinzip*). Tabelle J-8 zeigt die verschiedenen Möglichkeiten, wenn sich die Frequenzen ändern und die Bewegungsrichtungen parallel verlaufen oder aufeinander senkrecht stehen.

Tabelle J-8. Resultierende Schwingung bei Schwingungsüberlagerung.

Frequenzart	Bewegungsrichtungen parallel	Bewegungsrichtungen senkrecht
gleiche Frequenzen	Schwingung gleicher Frequenz, verschiedener Amplitude und/oder Phase	verschiedene Ellipsen, je nach Amplitude und Phasenlage
unterschiedliche Frequenzen	Schwebungen Fourier-Synthese	ganzzahlige Frequenzverhältnisse Lissajous-Figuren

J.1.4.1 Überlagerung in gleicher Raumrichtung und mit gleicher Frequenz

Übersicht J-9. Überlagerung von Schwingungen.

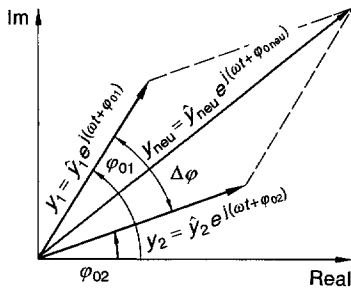
Ausgangsschwingungen

$$y_1(t) = \hat{y}_1 \cos(\omega t + \varphi_{01}); y_2(t) = \hat{y}_2 \cos(\omega t + \varphi_{02})$$

Neue Schwingung

$$y_{\text{neu}} = y_1(t) + y_2(t) = \hat{y}_{\text{neu}} \cos(\omega t + \varphi_{\text{neu}})$$

Phasenverschiebung $\Delta\varphi = \varphi_{01} - \varphi_{02}$



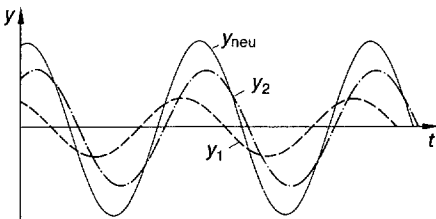
Zeiger-Darstellung

Neue Amplitude

$$\hat{y}_{\text{neu}} = \sqrt{\hat{y}_1^2 + 2\hat{y}_1\hat{y}_2 \cos(\varphi_{01} - \varphi_{02}) + \hat{y}_2^2}$$

$$\tan \varphi_{\text{neu}} = \frac{\hat{y}_1 \sin \varphi_{01} + \hat{y}_2 \sin \varphi_{02}}{\hat{y}_1 \cos \varphi_{01} + \hat{y}_2 \cos \varphi_{02}}$$

beliebige Überlagerung

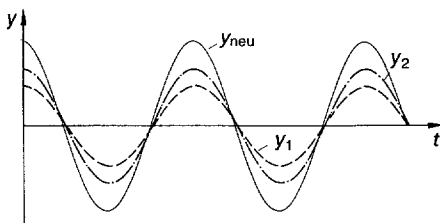


Für $\hat{y}_1 = \hat{y}_2 = \hat{y}$

$$\hat{y}_{\text{neu}} = 2\hat{y} \cos\left(\frac{\varphi_{01} - \varphi_{02}}{2}\right)$$

$$\varphi_{\text{neu}} = \frac{\varphi_{01} + \varphi_{02}}{2}$$

maximale Verstärkung

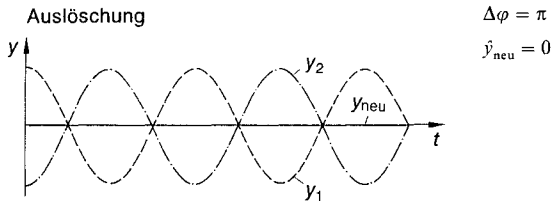


$\Delta\varphi = 0$

$$\hat{y}_{\text{neu}} = \sqrt{\hat{y}_1^2 + 2\hat{y}_1\hat{y}_2 + \hat{y}_2^2}$$

Für $\hat{y}_1 = \hat{y}_2 = \hat{y}$

$$\hat{y}_{\text{neu}} = 2\hat{y}$$

Übersicht J-9 (Fortsetzung)

y_1, y_2	Schwingung 1, Schwingung 2,
\hat{y}_{neu}	Amplitude der neuen Schwingung,
$\varphi_{01}, \varphi_{02}$	Phasenverschiebung Schwingung 1, Schwingung 2,
φ_{neu}	Phasenverschiebung der neuen Schwingung,
ω	Kreisfrequenz.

**J.1.4.2 Überlagerung in gleicher Raumrichtung
und mit geringen Frequenzunterschieden
(Schwebung)**

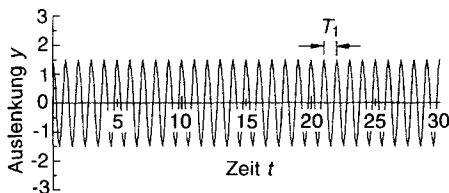
Übersicht J-10. Schwebungen.

Für gleiche Phase ($\varphi_{01} = \varphi_{02}$) und gleiche Amplitude ($\hat{y}_1 = \hat{y}_2$) gilt:

$$y_{\text{neu}}(t) = y_1(t) + y_2(t) = \hat{y} \cos(\omega_1 t) + \hat{y} \cos(\omega_2 t)$$

$$y_{\text{neu}}(t) = 2\hat{y} \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$$

Für geringe Frequenzunterschiede: Schwebung

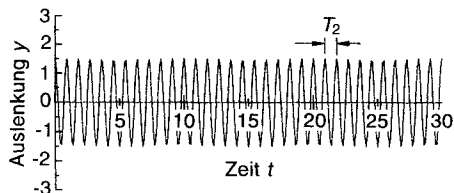


Schwebungsdauer

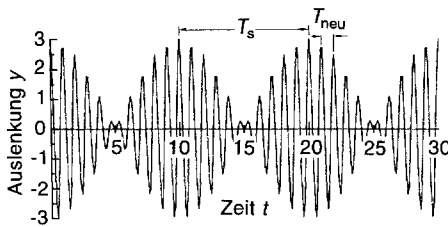
$$T_s = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1}$$

Schwebungsfrequenz

$$f_s = f_1 - f_2$$



Übersicht J-10 (Fortsetzung)

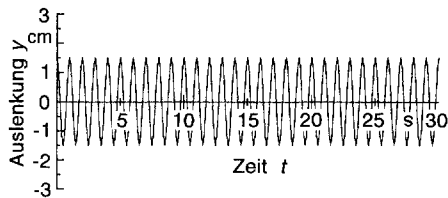


Neue Schwingung:

$$T_{\text{neu}} = \frac{2T_1 T_2}{T_2 - T_1}$$

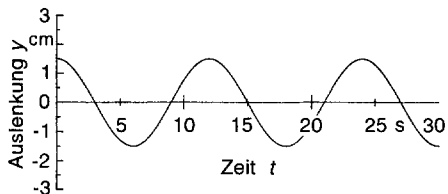
$$f_{\text{neu}} = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

f_1, f_2, f_{neu}	Frequenz 1. Schwingung, 2. Schwingung, neue Schwingung,
T_1, T_2, T_{neu}	Schwingungsdauer 1. Schwingung, 2. Schwingung, neue Schwingung,
ω_1, ω_2	Kreisfrequenz 1. Schwingung, 2. Schwingung,
y_1, y_2, y_{neu}	Auslenkung 1. Schwingung, 2. Schwingung, neue Schwingung,
T_s	Schwebungsdauer,
f_s	Schwebungsfrequenz.



J.1.4.3 Überlagerung in gleicher Raumrichtung und mit großen Frequenzunterschieden

Wie Bild J-1 zeigt, schwingt die schnellere Schwingung um die periodische Achse der langsameren Schwingung.



J.1.4.4 Überlagerung in gleicher Raumrichtung mit ganzzahligen Frequenzverhältnissen (Fourier-Analyse)

Ein periodisch wiederkehrendes Muster kann in eine Reihe von elementaren Sinus- und Kosinus-Schwingungen zerlegt werden (*Fourier-Analyse*). Die *Fourier-Koeffizienten* a_k (für die Kosinusfunktion) und b_k (für die Sinusfunktion) geben an, wie stark die einzelnen Anteile vertreten sind. Übersicht J-11 zeigt dies für Kreisfrequenzen mit ω , 3ω und 5ω . Durch Überlagerung bestimmter Sinus- und Kosinusfunktionen (*Fourier-Synthese*) können auch beliebige Kurvenformen erzeugt werden (Abschnitt A, Übersicht A-50).

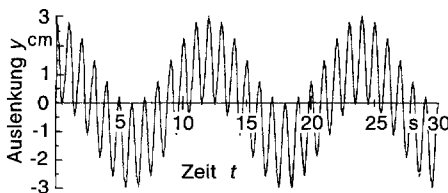
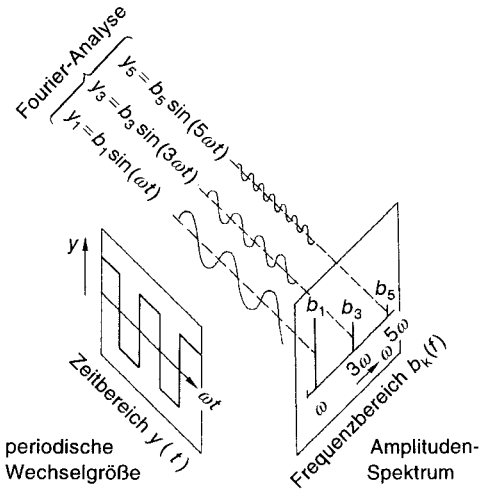


Bild J-1. Schwingungsüberlagerung bei großen Frequenzunterschieden.

Übersicht J-11. Fourier-Analyse.



Periodische Wechselgröße

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t)) + \sum_{k=1}^{\infty} (b_k \sin(k\omega t))$$

Fourier-Koeffizienten

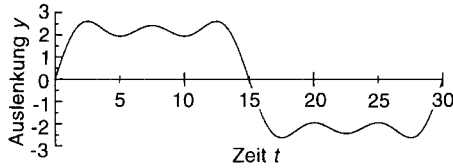
$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) dt,$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos(k\omega t) dt,$$

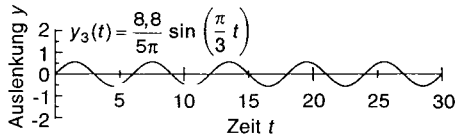
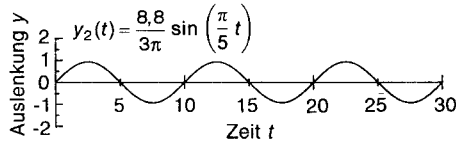
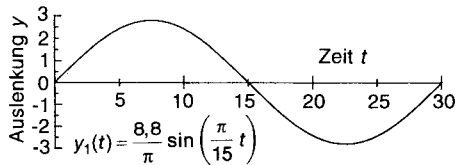
$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin(k\omega t) dt \quad (\text{für } k = 1, 2, 3, \dots)$$

Fourier-Zerlegung am Beispiel

a) Ausgangsschwingung

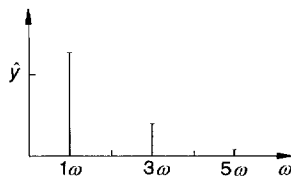


b) Zerlegung in Einzelschwingungen



Übersicht J-11 (Fortsetzung)

c) Frequenzanteile



a_k	Fourier-Koeffizienten für die Cosinusfunktionen,
b_k	Fourier-Koeffizienten für die Sinusfunktionen,
$k - 1$	Anzahl der Oberschwingungen,
$y(t)$	periodische Wechselgröße,
t	Zeit,
ω	Kreisfrequenz der Schwingung.

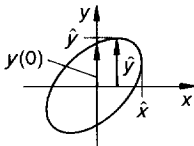
J.1.4.5 Überlagerung von Schwingungen mit ganzzahligen Frequenzverhältnissen, die senkrecht aufeinander stehen (Lissajous-Figuren)

Schwingungen mit gleicher Kreisfrequenz

Schwingungen mit ungleicher Frequenz

Für ganzzahlige Frequenzverhältnisse ergeben sich geschlossene Kurven. Aus der Anzahl k der senkrechten Maxima und der Anzahl l der waagrechten Maxima können die Frequenzverhältnisse festgestellt werden.

Übersicht J-12. Senkrechte Überlagerung gleichfrequenter Schwingungen.



Ausgangsschwingungen

$$x(t) = \hat{x} \sin(\omega t)$$

$$y(t) = \hat{y} \sin(\omega t + \varphi)$$

Daraus wird Ellipsen-Gleichung

$$\frac{y^2}{\hat{y}^2} + \frac{x^2}{\hat{x}^2} - \frac{2yx}{\hat{y}\hat{x}} \cos \varphi = \sin^2 \varphi$$

Berechnung der Phasenverschiebung

$$\sin \varphi = \frac{y(0)}{\hat{y}} = \frac{x(0)}{\hat{x}}$$

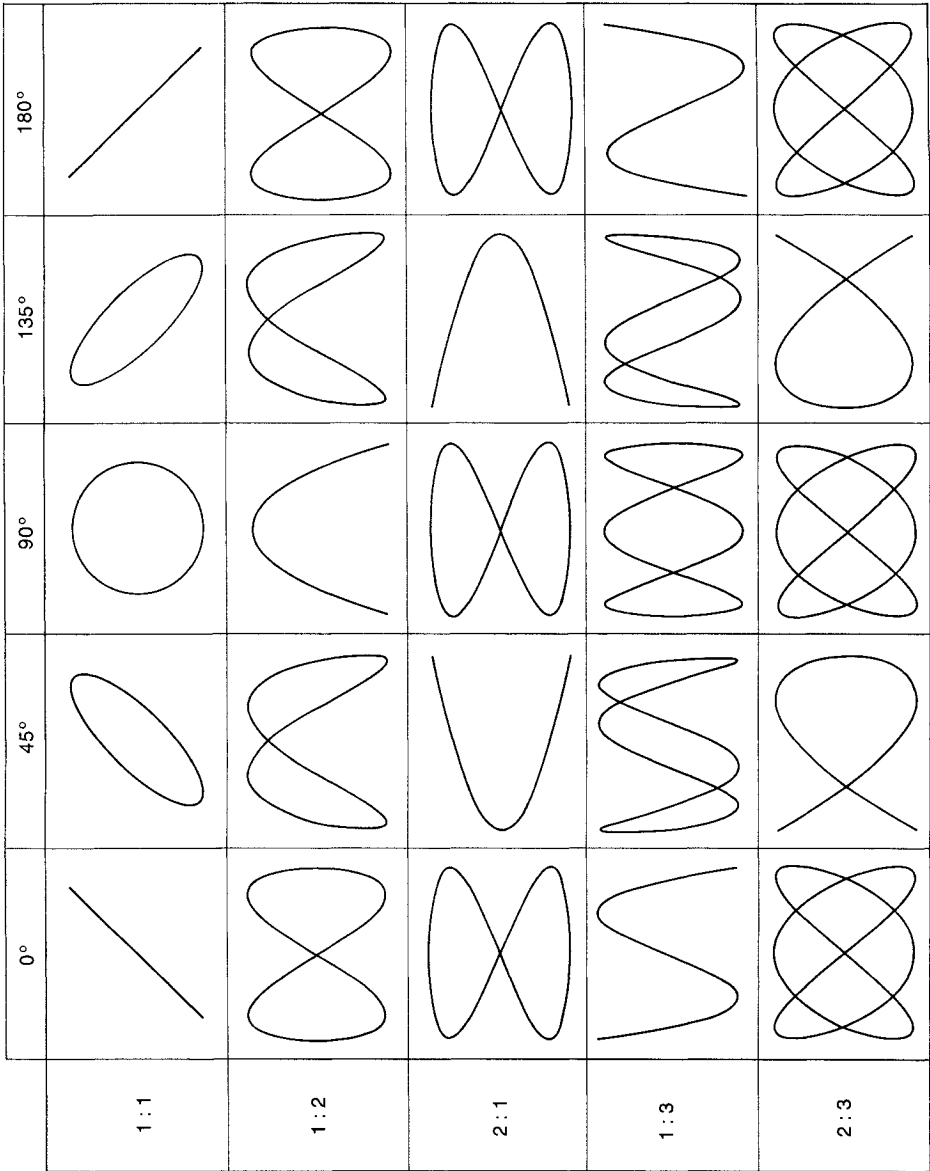


Bild J-2. Lissajous-Figuren.

J.1.5 Gekoppelte Schwingungen

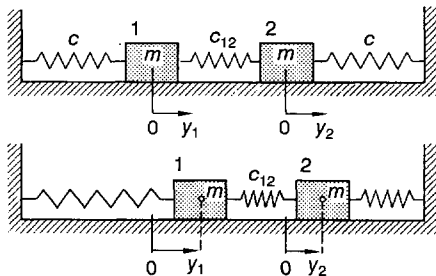
Zwei Schwinger, die miteinander elastisch, über Reibung oder aufgrund der Trägheit gekoppelt sind, tauschen über diese Kopplung Energie aus. Die Geschwindigkeit des Energieaustausches ist vom Kopplungsgrad k abhängig. Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf gekoppelte Pendel gleicher Masse m , gleicher Federkonstante c und gleicher Eigenfrequenz ω_0 .

Die beiden *Schwingungszustände*, in denen *keine Energie* übertragen wird, werden *Fundamentalschwingungen* genannt. Sie entstehen bei einer *gegenphasigen* und einer *gleichphasigen* Schwingung.

Im allgemeinen Fall sind n Schwinger miteinander gekoppelt; sie besitzen n *Fundamentalschwingungen*. Solche Systeme sind in der Molekül- und Festkörperphysik von Bedeutung.

Übersicht J-13. Elastisch gekoppelte Feder-Masse-Schwinger.

Gekoppelte Pendel



Gleichphasige Schwingung

Koppelglied nicht wirksam

$$f_1 = f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m}}$$

Gegenphasige Schwingung

Kopplungsfeder bleibt in der Mitte in Ruhe

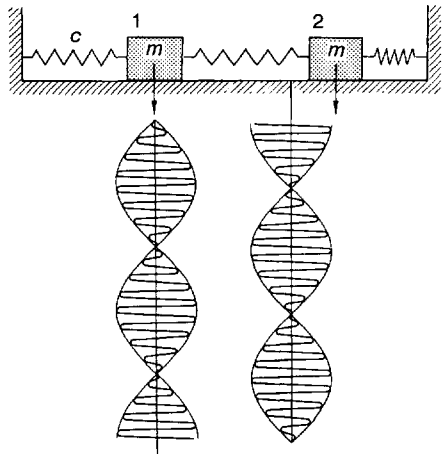
$$c_{\text{ges}} = c + 2c_{12}$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c + 2c_{12}}{m}}$$

Übersicht J-13 (Fortsetzung)

Allgemeiner Fall

$$f_s = f_2 - f_1$$



Kopplungsgrad

$$k = \frac{c_{12}}{c + c_{12}} = \frac{T_1^2 - T_2^2}{T_1^2 + T_2^2} = \frac{f_2^2 - f_1^2}{f_1^2 + f_2^2}$$

c	Federkonstante der einzelnen Feder,
c_{12}	Federkonstante der Kopplungsfeder,
f_0	Frequenz der ungedämpften harmonischen Schwingung,
f_1	Eigenfrequenz bei gleichphasiger Schwingung,
f_2	Eigenfrequenz bei gegenphasiger Schwingung,
f_s	Schwebungsfrequenz,
k	Kopplungsgrad,
T_1, T_2	1., 2. Schwingungsdauer.

J.1.6 Orts- und zeitabhängige Schwinger

In Tabelle J-9 sind die Differentialgleichungen für die orts- und zeitabhängigen Schwingungen zusammengestellt.

Bei den *parametrischen Schwingungen* hängen die Systemparameter (z. B. die Eigenfrequenz) von der Zeit ab. Dem Schwinger kann *zusätzliche* Energie zugeführt werden, wenn dem Schwingungssystem während des Schwingens eine parametrische Erregung mit der doppelten Eigenfrequenz zugeführt wird (z. B. Pendel mit periodisch bewegtem Aufhängepunkt).

Tabelle J-9. Orts- und zeitabhängige Schwingungen.

<div>zeit- abhängig</div> <div>orts- abhängig</div>	sklero- (nicht parametrisch)	rheo- (parametrisch)
linear	$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 y = 0$	$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2(t) y = 0$
nichtlinear	$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2(y) y = 0$	$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2(y, t) y = 0$

J.2 Wellen

Eine Welle ist ein sich räumlich ausbreitender Erregungszustand, bei dem Energie weitergeleitet wird. Zur Ausbreitung *elastischer* Wellen ist es erforderlich, daß schwingungsfähige Systeme gekoppelt sind. *Elektromagnetische* Wellen brauchen kein Übertragungsmedium, sie breiten sich auch im Vakuum aus (zur Einteilung der elektromagnetischen Wellen in verschiedene Spektralgebiete s. Tabelle L-1). Die Merkmale der fundamentalen Wellentypen sind in Tabelle J-10 zusammengestellt (weitere Details zur Polarisation s. Tabelle L-14).

Die Begriffsbestimmungen zur Beschreibung schwingender Kontinua und Wellen sind in DIN 1311, Blatt 4 definiert.

J.2.1 Harmonische Wellen

Bei harmonischen Wellen ist die räumliche und zeitliche Abhängigkeit der schwingenden

Größe durch harmonische Funktionen gegeben (Tabelle J-11, Bild J-3).

J.2.2 Energietransport

In einem Medium, in dem eine Welle läuft, ist Energie gespeichert. Die wichtigsten Gleichungen zum Energietransport bringt Tabelle J-12.

Wellenamplitude

Während bei der ebenen Welle die Energiedichte w und damit die Amplitude in Ausbreitungsrichtung konstant bleibt (abgesehen von Absorptionsverlusten im Übertragungsmedium), muß sich bei anderen Wellenformen die Energie auf immer größere Flächen verteilen, wodurch die Amplitude abnimmt (Tabelle J-13).

Wellenwiderstand

Der *Wellenwiderstand* charakterisiert die Übertragungseigenschaften eines Mediums.

Tabelle J-10. Wellentypen.

Wellentyp	Merkmale	Beispiele
Transversal- oder Querwellen	Schwingungsrichtung steht senkrecht auf Ausbreitungsrichtung. Bei räumlich und zeitlich definierter Schwingungsrichtung ist die Welle <i>polarisiert</i> .	Elastische Wellen in Festkörpern (Torsions- und Biegewellen). Elektromagnetische Wellen. Oberflächenwellen an Grenzflächen (z. B.: Wasser – Luft: Wasserwellen).
Longitudinal- oder Längswellen	Schwingungsrichtung ist parallel zur Ausbreitungsrichtung.	Elastische Wellen in Gasen, Flüssigkeiten und Festkörpern (Schallwellen).

Tabelle J-11. Harmonische Wellen.

Größe	Funktion
In x -Richtung laufende Welle	$y(x, t) = \hat{y} \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right]$ $y(x, t) = \hat{y} \cos (\omega t - kx + \varphi_0)$
Gegen die x -Richtung laufende Welle	$y(x, t) = \hat{y} \cos (\omega t + kx + \varphi_0)$
Phasengeschwindigkeit	$c = \lambda/T = \lambda f = \omega/k$
Wellenzahl	$k = 2\pi/\lambda$
Schnelle	$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -\hat{y} \omega \sin (\omega t - kx + \varphi_0) = -\hat{v} \sin (\omega t - kx + \varphi_0)$
y Auslenkung (Elongation), x Ort, t Zeit, \hat{y} Amplitude, T Periodendauer,	f Frequenz, λ Wellenlänge, φ_0 Nullphasenwinkel, ω Kreisfrequenz, \hat{v} Schnelleamplitude.

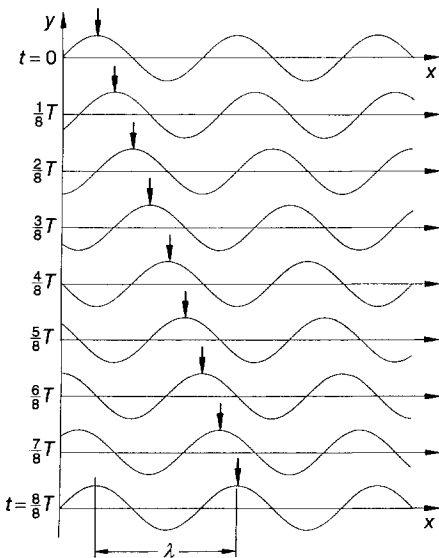


Bild J-3. Momentenbilder einer laufenden Transversalwelle. Der Pfeil markiert einen Wellenberg.

Bei elektromagnetischen Wellen werden Spannung (elektrische Feldstärke) und Strom (magnetische Feldstärke) in Analogie zum Ohmschen Gesetz durch den Wellenwiderstand Z verknüpft. Tabelle J-14 gibt eine Übersicht.

Bei Schallwellen werden *Schallwechseldruck* (Abschnitt K.1.5) und Schallschnelle verknüpft:

$$Z = \frac{\hat{p}}{\hat{v}} = \rho c; \quad (\text{J-2})$$

\hat{p} Amplitude des Schallwechseldrucks,
 \hat{v} Amplitude der Schallschnelle,
 ρ Dichte des Übertragungsmediums,
 c Schallgeschwindigkeit.

Reflexion und Transmission

Wenn an der Grenzfläche zweier Medien oder Leitungen der Wellenwiderstand eine Änderung erfährt, dann wird ein Teil der Welle reflektiert. Reflexions- und Transmissionsgrad der Intensität bei senkrechtem Einfall zeigt Übersicht J-14, den Reflexions- und Transmissionsfaktor der Amplitude Tabelle J-15.

Tabelle J-12. Energietransport.

	Elastische Wellen	Elektromagnetische Wellen
Energiedichte	$w = \frac{dE}{dV} = \frac{1}{2} \varrho \hat{y}^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \varrho \hat{v}^2$	$w = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 \hat{E}^2 = \frac{1}{2} \mu_r \mu_0 \hat{H}^2$
Intensität oder Energiestromdichte	$I = w c = \frac{1}{2} \varrho \hat{v}^2 c$	$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_r \epsilon_0}{\mu_r \mu_0}} \hat{E}^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}} \hat{H}^2$
w Energiedichte (Energie pro Volumen, J/m ³), I Intensität (Leistung pro Fläche, W/m ²), ϱ Dichte des Übertragungsmediums, \hat{y} Schwingungsamplitude, ω Kreisfrequenz, \hat{v} Schnelleamplitude, c Phasengeschwindigkeit, ϵ_r relative Permittivität,	ϵ_0 elektrische Feldkonstante, ($\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ As/Vm), μ_r relative Permeabilität, μ_0 magnetische Feldkonstante ($\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am), \hat{E} Amplitude der elektrischen Feldstärke, \hat{H} Amplitude der magnetischen Feldstärke.	

Tabelle J-13. Energiedichte und Amplitude verschiedener Wellen.

Wellenfläche	Energiedichte	Amplitude
eben	$w = \text{konst.}$	$\hat{y} = \text{konst.}$
Zylinder	$w \sim \frac{1}{r}$	$\hat{y} \sim \frac{1}{\sqrt{r}}$
Kugel	$w \sim \frac{1}{r^2}$	$\hat{y} \sim \frac{1}{r}$
r Abstand von der Quelle.		

Übersicht J-14. Reflexion und Transmission von Wellen: Intensitäten.

Energieerhaltung	$I_e = I_r + I_t$
Reflexionsgrad	$\varrho = \frac{I_r}{I_e} = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2$
Transmissionsgrad	$\tau = 1 - \varrho = \frac{I_t}{I_e} = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$
I_e einfallende Intensität, I_r reflektierte Intensität, I_t transmittierte Intensität, Z_1 Wellenwiderstand im Medium 1, Z_2 Wellenwiderstand im Medium 2.	

Tabelle J-14. Wellenwiderstand elektromagnetischer Wellen im freien Raum und auf Leitungen.

	Leitungen	freier Raum
Definition	$\underline{Z}_L = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$	$Z_F = \frac{E}{H}$
verlustbehaftet	$\underline{Z}_L = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$	$Z_F = \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0 - j\kappa/\omega}}$
verlustlos	$Z_{L0} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$	$Z_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376,7 \Omega$

Z	Wellenwiderstand (reell),	} Beläge (Tabelle J-17)
\underline{Z}	Wellenwiderstand (komplex, frequenzabhängig),	
\underline{U}	komplexe Spannung,	
\underline{I}	komplexer Strom,	
$R' = R/l$	Widerstand pro Länge,	
$G' = G/l$	Ableitung (Querleitwert) pro Länge,	
$L' = L/l$	Induktivität pro Länge,	
$C' = C/l$	Kapazität pro Länge,	
\underline{E}	komplexe elektrische Feldstärke,	
\underline{H}	komplexe magnetische Feldstärke,	
μ_r	relative Permeabilität,	
μ_0	magnetische Feldkonstante,	
ϵ_r	relative Permittivität,	
ϵ_0	elektrische Feldkonstante,	
κ	elektrische Leitfähigkeit,	
ω	Kreisfrequenz.	

Tabelle J-15. Reflexion und Transmission von Wellen: Amplituden.

Elastische Wellen	Elektromagnetische Wellen	
	elektrische Feldstärke	magnetische Feldstärke
$r = \frac{\hat{y}_r}{\hat{y}_e} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$	$r_e = \frac{\hat{E}_r}{\hat{E}_e} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$	$r_m = \frac{\hat{H}_r}{\hat{H}_e} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}$
$t = \frac{\hat{y}_t}{\hat{y}_e} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$	$t_e = \frac{\hat{E}_t}{\hat{E}_e} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$	$t_m = \frac{\hat{H}_t}{\hat{H}_e} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{2n_2}{n_1 + n_2}$
r	Reflexionsfaktor,	
t	Transmissionsfaktor,	
$\hat{y}_e, \hat{E}_e, \hat{H}_e$	Amplituden der einfallenden Wellen,	
$\hat{y}_r, \hat{E}_r, \hat{H}_r$	Amplituden der reflektierten Wellen,	
$\hat{y}_t, \hat{E}_t, \hat{H}_t$	Amplituden der transmittierten Wellen,	
Z_1, Z_2	Wellenzahl im Medium 1 bzw. 2,	
n_1, n_2	Brechungsindex im Medium 1 bzw. 2 (Abschnitt L.1.3).	

J.2.3 Phasengeschwindigkeit

Die Phasengeschwindigkeit c ist die Geschwindigkeit, mit der sich ein Zustand konstanter Phase ($\omega t - kx + \varphi_0 = \text{const}$) ausbreitet. Sie tritt als Konstante in der *Wellengleichung* auf, die für die Ausbreitung von Wellen charakteristisch ist:

Tabelle J-16. Phasengeschwindigkeiten verschiedener Wellentypen.

Wellentyp	Phasengeschwindigkeit
Longitudinalwellen in Gasen	$c = \sqrt{\frac{\kappa p}{\varrho}}$
Longitudinalwellen in Flüssigkeiten	$c = \sqrt{\frac{K}{\varrho}}$
Longitudinalwellen in Stäben	$c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}$
Torsionswellen in Rundstäben	$c = \sqrt{\frac{G}{\varrho}}$
Transversalwellen auf Saiten	$c = \sqrt{\frac{F}{A \varrho}}$
Elektromagnetische Wellen im Vakuum	$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$
Elektromagnetische Wellen in Materie	$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0}}$
Elektromagnetische Wellen auf Leitungen	$c = \frac{1}{\sqrt{C' L'}}$

κ Isentropenexponent,
 p Druck,
 ϱ Dichte,
 K Kompressionsmodul,
 E Elastizitätsmodul,
 G Schubmodul,
 F Spannkraft,
 A Saitenquerschnitt,
 ϵ_0 elektrische Feldkonstante ($\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$),
 μ_0 magnetische Feldkonstante ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$),
 ϵ_r relative Permittivität,
 μ_r relative Permeabilität,
 C' längenbezogene Kapazität,
 L' längenbezogene Induktivität.

$$\Delta y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0; \quad (\text{J-3})$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{Laplace-Operator.}$$

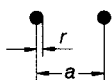
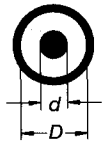
Für eindimensionale Wellen gilt:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (\text{J-4})$$

In Tabelle J-16 sind Formeln für die Phasengeschwindigkeit verschiedener Wellen zusammengestellt.

Die *Beläge* C' und L' von Leitungen hängen von der Leitergeometrie ab. Tabelle J-17 zeigt zwei Beispiele.

Tabelle J-17. Beläge für lange Leitungen.

Leitungstyp	Kapazität pro Länge	Induktivität pro Länge
Doppelleitung 	$C' = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 \pi}{\ln(a/r)}$	$L' = \frac{\mu_r \mu_0}{\pi} \ln(a/r)$
Koaxialleitung 	$C' = \frac{2\epsilon_r \epsilon_0 \pi}{\ln(D/d)}$	$L' = \frac{\mu_r \mu_0}{2\pi} \ln(D/d)$

J.2.4 Gruppengeschwindigkeit

Als Gruppengeschwindigkeit wird die Geschwindigkeit bezeichnet, mit der die Einhüllende eines Wellenpaketes (Bild J-4) läuft und somit auch die Energie bzw. Information. Die Gruppengeschwindigkeit ist in Medien mit *Dispersion* nicht identisch mit der Phasengeschwindigkeit. Bild J-5 zeigt ein Beispiel.

Für die Gruppengeschwindigkeit gilt:

$$c_{\text{gr}} = \frac{d\omega}{dk} = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}; \quad (\text{J-5})$$

c_{gr} Gruppengeschwindigkeit,
 ω Kreisfrequenz,
 k Wellenzahl,
 c Phasengeschwindigkeit,
 λ Wellenlänge.

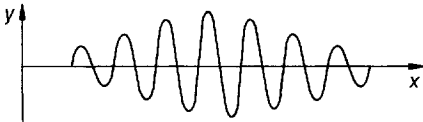


Bild J-4. Wellenpaket endlicher Länge.

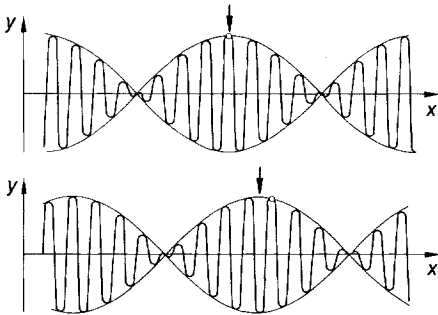


Bild J-5. Zustände einer Wellengruppe an zwei verschiedenen Zeitpunkten. Der Pfeil kennzeichnet das Maximum der Gruppe, der kleine Kreis einen Zustand konstanter Phase.

Tabelle J-18. Dispersionsarten.

$\frac{dc}{d\lambda}$	Ausbreitungsgeschwindigkeit	Bezeichnung
> 0	$c_{\text{gr}} < c$	normale Dispersion
$= 0$	$c_{\text{gr}} = c$	keine Dispersion
< 0	$c_{\text{gr}} > c$	anomale Dispersion

Je nach Übertragungsmedium können die in Tabelle J-18 dargestellten Fälle unterschieden werden.

Zur Dispersion in der Optik und Definition des *Gruppenindex* s. Abschnitt L.1.3.1.

J.2.5 Doppler-Effekt

Schallwellen

Sind eine Schallquelle und/oder ein Beobachter in Bewegung (relativ zum Übertragungsmedium Luft), dann weicht die Frequenz f_{B} , die der Beobachter wahrnimmt, von der Frequenz f_{Q} der Quelle ab. Je nach Bewegungszustand sind verschiedene Fälle unterscheidbar, die in Tabelle J-19 zusammengestellt sind.

Tabelle J-19. Doppler-Effekt. Die verschiedenen Bewegungsmöglichkeiten von Quelle und Beobachter sind durch Pfeile angedeutet.

Quelle	Beobachter	beobachtete Frequenz
•	←•	$f_{\text{B}} = f_{\text{Q}} \left(1 + \frac{v_{\text{B}}}{c} \right)$
•	•→	$f_{\text{B}} = f_{\text{Q}} \left(1 - \frac{v_{\text{B}}}{c} \right)$
•→	•	$f_{\text{B}} = \frac{f_{\text{Q}}}{1 - \frac{v_{\text{Q}}}{c}}$
←•	•	$f_{\text{B}} = \frac{f_{\text{Q}}}{1 + \frac{v_{\text{Q}}}{c}}$
•→	←•	$f_{\text{B}} = f_{\text{Q}} \frac{c + v_{\text{B}}}{c - v_{\text{Q}}}$
←•	•→	$f_{\text{B}} = f_{\text{Q}} \frac{c - v_{\text{B}}}{c + v_{\text{Q}}}$
←•	←•	$f_{\text{B}} = f_{\text{Q}} \frac{c + v_{\text{B}}}{c + v_{\text{Q}}}$
•→	•→	$f_{\text{B}} = f_{\text{Q}} \frac{c - v_{\text{B}}}{c - v_{\text{Q}}}$

f_{B} Frequenz beim Beobachter,
 f_{Q} Frequenz der Quelle,
 v_{B} Betrag der Beobachtersgeschwindigkeit relativ zur Luft,
 v_{Q} Betrag der Quellengeschwindigkeit relativ zur Luft,
 c Schallgeschwindigkeit.

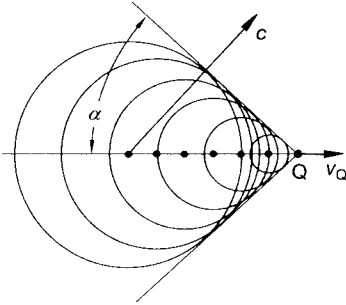


Bild J-6. Machscher Kegel beim Überschallflug.

Bewegt sich die Quelle mit Überschallgeschwindigkeit, dann bilden alle von der Quelle ausgesandten Kugelwellen einen Kegel. Bild J-6 zeigt ein Momentbild dieses *Machschen Kegels*. An der Spitze des Kegels befindet sich die Quelle Q , die sich mit $v_Q > c$ bewegt. Der halbe Öffnungswinkel des Kegels ist der Machsche Winkel. Er beträgt

$$\sin \alpha = \frac{c}{v_Q} = \frac{1}{Ma}; \quad (\text{J-6})$$

α Machscher Winkel,
 c Schallgeschwindigkeit,
 v_Q Geschwindigkeit der Quelle,
 Ma Mach-Zahl.

Elektromagnetische Wellen

Für die Frequenzverschiebung von elektromagnetischen Wellen ist lediglich die Relativgeschwindigkeit zwischen Quelle (Sender) und Beobachter (Empfänger) maßgebend:

$$f_B = f_Q \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = f_Q \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad \text{bei Annäherung} \quad (\text{J-7})$$

$$f_B = f_Q \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} = f_Q \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad \text{bei Entfernung;}$$

f_B Frequenz beim Beobachter,
 f_Q Frequenz der Quelle,
 c Lichtgeschwindigkeit,
 v Relativgeschwindigkeit zwischen Quelle und Beobachter,
 $\beta = \frac{v}{c}$ bezogene Relativgeschwindigkeit.

J.2.6 Interferenz

Bei der Überlagerung von Wellen treten Interferenzerscheinungen auf. Im allgemeinen ist das *Prinzip der ungestörten Superposition* gültig.

Wellen mit gleicher Frequenz und Wellenlänge
 Gegeben seien zwei Wellen mit gleicher Amplitude, die in dieselbe Richtung laufen:

$$\begin{aligned} y_1 &= \hat{y} \cos(\omega t - kx) \quad \text{und} \\ y_2 &= \hat{y} \cos(\omega t - kx + \varphi) \\ &= \hat{y} \cos\left(\omega t - kx + 2\pi \frac{\Delta}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

Die zweite Welle weist gegenüber der ersten einen *Gangunterschied* Δ auf, der mit der Phasenverschiebung φ verknüpft ist:

$$\Delta = \frac{\varphi}{2\pi} \lambda. \quad (\text{J-8})$$

Die Überlagerung ergibt:

$$\begin{aligned} y(x, t) &= 2\hat{y} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\omega t - kx + \frac{\varphi}{2}\right) \\ &= 2\hat{y} \cos\left(\pi \frac{\Delta}{\lambda}\right) \cdot \cos\left(\omega t - kx + \pi \frac{\Delta}{\lambda}\right). \end{aligned} \quad (\text{J-9})$$

Die Summenwelle ist wieder eine Welle mit gleicher Frequenz und Wellenlänge, deren Amplitude je nach Gangunterschied Werte zwischen 0 und $2\hat{y}$ annehmen kann (Tabelle J-20).

Tabelle J-20. Konstruktive und destruktive Interferenz (Ordnungszahl $m = 0, 1, 2, \dots$).

Bedingung für	konstruktive Interferenz	destruktive Interferenz
Gangunterschied	$\Delta = m \lambda$	$\Delta = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$
Phasenverschiebung	$\varphi = m 2\pi$	$\varphi = (2m + 1) \pi$

Stehende Wellen

Gegeben seien zwei Wellen mit gleicher Frequenz, Wellenlänge und Amplitude, die sich entgegen laufen:

$$y_1 = \hat{y} \cos(\omega t - kx) \quad \text{und}$$

$$y_2 = \hat{y} \cos(\omega t + kx + \varphi) \\ = \hat{y} \cos\left(\omega t + kx + 2\pi \frac{\Delta}{\lambda}\right).$$

Bei der Überlagerung entsteht eine *stehende Welle*:

$$y(x, t) = 2\hat{y} \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(kx + \frac{\varphi}{2}\right) \\ = 2\hat{y} \cos\left(\omega t + \pi \frac{\Delta}{\lambda}\right) \cdot \cos\left(kx + \pi \frac{\Delta}{\lambda}\right). \quad (\text{J-10})$$

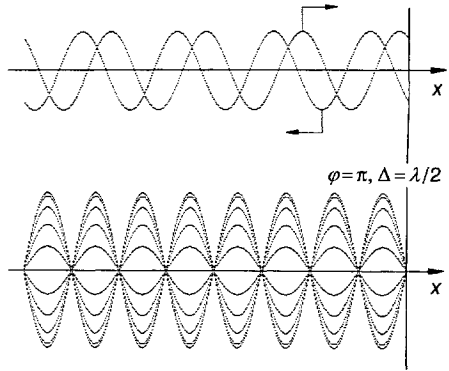
Bild J-7 zeigt Momentbilder von stehenden Wellen. Jeweils im Abstand von $\lambda/2$ entstehen ortsfeste *Schwingungsknoten* und *-bäuche*. Bei einer Reflexion an einem dichteren Medium (größerer Wellenwiderstand Z) tritt an der Grenzfläche ein Phasensprung ($\varphi = \pi$, $\Delta = \lambda/2$) auf, und es entsteht ein Schwingungsknoten (Bild J-7a, Tabelle J-15). Bei einer Reflexion an einem dünneren Medium tritt kein Phasensprung auf, es entsteht ein Schwingungsbauch (Bild J-7b, Tabelle J-15).

Stehende Wellen können auch als *Eigen-schwingungen* eines Kontinuums mit charakteristischen *Eigenfrequenzen* aufgefaßt werden. Beispielsweise sind die möglichen Eigenfrequenzen einer schwingenden Saite

$$f_n = (n + 1)f_0, \\ \text{mit } f_0 = c/2l, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (\text{J-11})$$

- f_0 Frequenz der Grundschiwingung,
- f_n Frequenz der n -ten Oberschwingung,
- c Phasengeschwindigkeit,
- l Saitenlänge.

a) Reflexion am dichten Medium



b) Reflexion am dünnen Medium

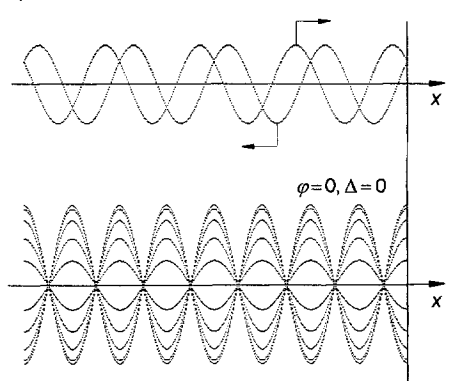


Bild J-7. Ausbildung einer stehenden Welle durch Reflexion am a) dichteren, b) dünneren Medium.

K Akustik

Übersicht K-1. Normen und Richtlinien.

DIN 1320	Akustik, Grundbegriffe
DIN 4109	Schallschutz im Hochbau
DIN 18005	Schallschutz im Städtebau
DIN 18041	Hörsamkeit in Räumen
DIN 45 630	Grundlagen der Schallmessung
DIN 45 633	Präzisionsschallpegelmesser
DIN 45 635	Geräuschmessung an Maschinen
DIN 45 641	Beurteilungspegel zeitlich schwankender Schallvorgänge
DIN 45 642	Messung von Verkehrsgläuschen
DIN 52 210	Bauakustische Prüfungen; Luft- und Trittschalldämmung
DIN 52 212	Bauakustische Prüfungen; Schallabsorptionsgrad
DIN 52 216	Bauakustische Prüfungen; Nachhallzeit in Zuhörerräumen
DIN 51 221	Körperschallmessungen bei haustechnischen Anlagen
VDI 2058	Beurteilung von Arbeitslärm
VDI 2569	Schallschutz und akustische Gestaltung im Büro
VDI 2571	Schallabstrahlung von Industriebauten
VDI 2714	Schallausbreitung im Freien
RLS-90	Richtlinien für den Lärmschutz an Straßen
TALärm	Technische Anleitung zum Schutz gegen Lärm

Die Akustik beschäftigt sich mit der Ausbreitung von longitudinalen Kompressions- und Dilatationswellen in Gasen, Flüssigkeiten und Festkörpern. Von besonderer Bedeutung sind dabei die *Schallausbreitung* in Luft, der *Schalldurchgang* durch Bauteile und die *Schallempfindung* des Menschen (Hörsamkeit und akustische Behaglichkeit).

K.1 Schallausbreitung

Schall ist die Ausbreitung lokaler Druckschwankungen in Medien. In der Akustik sind dabei die Dichteänderungen in den Ausbreitungsmedien und die Geschwindigkeiten der Molekülbewegungen nicht so hoch, daß nicht-lineare Wechselwirkungen auftreten, wie sie

bei Stoßwellenexperimenten beobachtet werden. Die folgenden Beziehungen der Akustik gelten für den Fall, daß sich die Schalldrücke verschiedener Schallquellen am Ort des Schallfeldes additiv überlagern (*Superpositionsprinzip*) und das zeitliche Produkt der verschiedenen Schallwechselamplituden verschwindet (*nichtkohärente Schallquellen*).

K.1.1 Schallfrequenz

Die Frequenz f der periodischen Erregung von Druckstörungen (z.B. durch eine Lautsprechermembran) bestimmt die Frequenz der lokalen Druckschwankung und damit die Schallfrequenz f . Entsprechend der Schallfrequenzempfindlichkeit des menschlichen Ohres werden verschiedene Schallbereiche definiert (Tabelle K-1).

K.1.2 Schallgeschwindigkeit

Die Schallgeschwindigkeit c ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit) der Druckstörungen in einem kompressiblen Medium.

Für die Schallgeschwindigkeit c in *Flüssigkeiten* und *Gasen* gilt:

$$c = \sqrt{\frac{K}{\varrho}}; \quad (\text{K-1})$$

c Schallgeschwindigkeit,
 K Kompressionsmodul,
 ϱ Dichte.

In *Gasen* ergibt sich bei *isentroper Schallausbreitung* die Schallgeschwindigkeit zu:

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\varrho}} = \sqrt{\frac{c_p}{c_v} \cdot \frac{p}{\varrho}}; \quad (\text{K-2})$$

κ Isentropenexponent ($\kappa = c_p/c_v$),
 c_p isobare spezifische Wärmekapazität,
 c_v isochore spezifische Wärmekapazität,
 ϱ Dichte des Gases,
 p Gasdruck.

Tabelle K-1. Schallbereiche.

Schallbereich	Infraschall	Hörbereich	Ultraschall	Hyperschall
Frequenzbereich	0 Hz bis 15 Hz	16 Hz bis 20 kHz	20 kHz bis 10 GHz	10 GHz bis 10 THz
Schallgeber	mechanische Rüttler (Shaker)	mechanisch: Pfeifen, Sirenen, Musikinstrumente; elektroakustisch: elektrodynamische und elektromagnetische Lautsprecher	mechanisch: Pfeifen, Sirenen, Pneumatik; elektroakustisch: elektrostriktive, piezoelektrische, elektrostatische Lautsprecher	Josephson-Kontakte, piezoelektrisch gekoppelte Mikrowellen-Resonatoren
Schallaufnehmer	piezoelektrische Aufnehmer, Dehnungsmeßstreifen	Kondensatormikrofon, elektrodynamische, piezoelektrische, piezoresistive Mikrofone	Kondensatormikrofon, piezoelektrische Mikrofone	Josephson-Kontakte, piezoelektrisch gekoppelte Mikrowellen-Resonatoren
Anwendungspraxis	Lagerschwingungen, Körperschall, Bauwerksschwingungsanalyse, Erdbebenwellen	Phonotechnik, Schall- und Lärmschutz, Raumakustik, Schwingungsisolierung	Reinigung, Entgasen, Dispergieren, Emulgieren, Polymerisationssteuerung, Ultraschallbearbeitung (Bohren, Schneiden), Werkstoffprüfung, Ultraschall-diagnostik, Modellakustik	Grundlagenphysik, Photonen-spektroskopie, Molekularkinetik

Tabelle K-2. Dichte, Schallgeschwindigkeit und Schallkennimpedanz einiger Stoffe beim Normdruck $p_n = 1013 \text{ hPa}$.

	Dichte ρ $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	Schallgeschwindigkeit c $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	Schallkennimpedanz Z_0 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}$
Luft -20°C trocken	1,396	319	445
Luft 0°C trocken	1,293	331	427
Luft 20°C trocken	1,21	344	416
Luft 100°C trocken	0,947	387	366
Wasserstoff 0°C	0,090	1260	113
Wasserdampf 130°C	0,54	450	243
Wasser 0°C	1000	1400	$1,40 \cdot 10^6$
20°C	998	1480	$1,48 \cdot 10^6$
Glyzerin	1260	1950	$2,46 \cdot 10^6$
Eis	920	3200	$2,94 \cdot 10^6$
Holz	600	4500	$2,70 \cdot 10^6$
Glas	2500	5300	$13,0 \cdot 10^6$
Beton	2100	4000	$8,4 \cdot 10^6$
Stahl	7700	5050	$39 \cdot 10^6$

Die Schallgeschwindigkeit in *idealen Gasen* ist:

$$c = \sqrt{\kappa R_i T} = \sqrt{\frac{c_p}{c_v} \cdot R_i T}; \quad (\text{K-3})$$

- R_i individuelle Gaskonstante ($R_i = R_m/M$),
 R_m universelle molare Gaskonstante
 ($R_m = 8,314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$),
 M Molmasse des Gases,
 T absolute Gastemperatur.

Eine Näherung für die Schallgeschwindigkeit in *Luft* im meteorologischen Temperaturbereich von -20°C bis $+50^\circ\text{C}$ ist:

$$c_L = 331,5 \text{ m/s} \sqrt{1 + \frac{\vartheta}{273,15^\circ\text{C}}} \quad (\text{K-4})$$

$$\approx (331,5 + 0,6 \vartheta/^\circ\text{C}) \text{ m/s};$$

ϑ Lufttemperatur.

Für die Schallgeschwindigkeit in *dünnen, stabförmigen Festkörpern* gilt:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}; \quad (\text{K-5})$$

- E Elastizitätsmodul,
 ϱ Dichte.

K.1.3 Schallwellenlänge

Die Schallwellenlänge λ ist der räumliche Abstand zweier benachbarter Stellen mit gleicher Druckphase (z.B. Druckmaximum, Druckminimum). Zwischen der Schallwellenlänge und der Schallfrequenz gilt die allgemeine Wellenbeziehung:

$$c = f \lambda; \quad (\text{K-6})$$

- c Schallgeschwindigkeit,
 f Schallfrequenz,
 λ Schallwellenlänge.

K.1.4 Schallwiderstand (Schallkennimpedanz)

Der Schallwiderstand Z ist ein Maß für die Geschwindigkeit, mit der die Moleküle eines Mediums auf eine Druckstörung reagieren; für ebene Wellen gilt:

$$Z = \frac{\hat{p}}{\hat{v}} = \varrho c; \quad (\text{K-7})$$

- Z Schallwiderstand,
 \hat{p} Schalldruckamplitude,
 \hat{v} Schallschnelleamplitude,
 ϱ Dichte,
 c Schallgeschwindigkeit im Medium.

Schallkennimpedanzen einiger Stoffe sind in Tabelle K-2 aufgeführt. Sie hängen über die Dichte ϱ und die Schallgeschwindigkeit c vom statischen Druck p_s und der Temperatur T des Mediums ab.

K.1.5 Schalldruck

Der Schalldruck p ist die Druckänderung in einem homogenen kompressiblen Medium durch Kompression oder Dilatation der Moleküle. Auf die Begrenzungsflächenbereiche des Wellenträgers übt der Schalldruck eine Normalkraft aus. Es gilt:

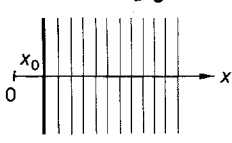
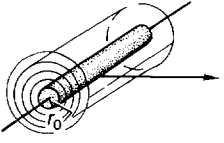
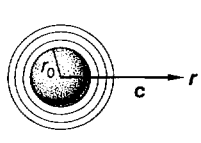
$$p = \frac{F_n}{A}; \quad (\text{K-8})$$

- F_n Normalkraft auf die Begrenzungsfläche,
 A Flächenelement der Begrenzungsfläche.

Die *Wellengleichung* der Schalldruckausbreitung an einem Ort r zum Zeitpunkt t unter der Annahme kleiner Dichtegradienten- und Schnelleänderungen für ein Medium mit der Schallgeschwindigkeit c ist:

$$\frac{\partial^2 p(r, t)}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) p(r, t). \quad (\text{K-9})$$

Tabelle K-3. Schallquellengeometrie.

	ebene Schallquelle	linienförmige Schallquelle	punktförmige, kugelförmige Schallquelle
Geometrie			
Schallwechseldruck- amplitude	$\hat{p} = \hat{p}_0$	$\hat{p} = \hat{p}(r_0) \sqrt{\frac{r_0}{r}}$	$\hat{p} = \hat{p}(r_0) \cdot \frac{r_0}{r}$
spezifische Schalleistung	P_A in $\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$	P_l in $\frac{\text{W}}{\text{m}}$	P in W
Schallintensität	$I = P_A$	$I = \frac{P_l}{2\pi r}$	$I = \frac{P}{4\pi r^2}$
Schallpegeldifferenz	$L_1 - L_2 = 0$	$L_1 - L_2 = 10 \lg \frac{r_2^2}{r_1^2}$	$L_1 - L_2 = 20 \lg \frac{r_2}{r_1}$
Schallpegeldifferenz für $r_2 = 2r_1$	$\Delta L = 0$	$\Delta L = 3 \text{ dB}$	$\Delta L = 6 \text{ dB}$

Die *eindimensionale* Lösung der Wellengleichung bei *sinusförmiger Erregung* mit der Erregerfrequenz f ist:

$$p(x, t) = p_s + \hat{p} \cos \{2\pi f(t - x/c)\}; \quad (\text{K-10})$$

$p(x, t)$ Schallwechseldruck,
 p_s statischer Gasdruck,
 \hat{p} Schalldruckamplitude,
 f Schallfrequenz des Erregers
 (z. B. Lautsprecher),
 c Schallgeschwindigkeit.

Lösungen für linienförmige und kugelförmige Schallwellen enthält Tabelle K-3.

Der *Effektivwert* p_{eff} des Schallwechseldrucks ist der Meßwert des Schallwechseldrucks einer Schallaufnehmers, integriert über die Meßgeräte-Integrationszeit τ :

$$p_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{\tau} \int_0^\tau p^2(r, t) dt}. \quad (\text{K-11})$$

Daraus ergibt sich der *Effektivwert* des Schalldrucks *harmonischer Schallwellen* bei sinusförmiger Erregung:

$$p_{\text{eff}} = \frac{\hat{p}}{\sqrt{2}}; \quad (\text{K-12})$$

\hat{p} Schalldruckamplitude.

K.1.6 Schallschnelle

Die Schallschnelle v ist die Auslenkungsgeschwindigkeit der Moleküle unter der Wirkung der Kompressions- und Dilatationskräfte der Druckstörung ∂p .

Zwischen der Schallschnelle v und dem Schalldruck p gilt das *hydrodynamische Grundgesetz*:

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p(x, t)}{\partial x}; \quad (\text{K-13})$$

ϱ Dichte des Mediums.

Die Schallschnelle v ist mit dem Schallwechsel-
druck p über den *Schallwiderstand* (Schall-
kennimpedanz) Z verknüpft:

$$v(x, t) = \frac{1}{Z} p(x, t) = \frac{1}{\rho c} p(x, t); \quad (\text{K-14})$$

- ρ Dichte des Ausbreitungsmediums,
 c Schallgeschwindigkeit im Ausbreitungs-
medium.

Die Schallschnelle einer *ebenen, eindimensio-
nalen, harmonischen Schallwelle* mit *sinusför-
miger* Schallerregung ist:

$$v(x, t) = \frac{1}{\rho c} \hat{p} \cos \left\{ 2\pi f \left(t - \frac{x}{c} \right) \right\}; \quad (\text{K-15})$$

- ρ Dichte des Schallmediums,
 c Schallgeschwindigkeit im Medium,
 \hat{p} Schalldruckamplitude,
 f Schallfrequenz.

Der *Effektivwert* v_{eff} der Schallschnelle und
der über die Integrationszeit τ gemittelte Wert
der Schallschnelle einer ebenen harmonischen
Schallwelle sind:

$$v_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{\tau} \int_0^\tau v^2(r, t) dt} = \frac{\hat{v}}{\sqrt{2}}. \quad (\text{K-16})$$

K.1.7 Energiedichte

Für die Energiedichte w einer harmonischen
Schallwelle gilt:

$$w = dE/dV = \frac{1}{2} \rho (2\pi f \hat{y})^2 = \frac{1}{2} \rho \hat{v}^2 \\ = \frac{1}{2} \frac{\hat{p}^2}{\rho c^2}; \quad (\text{K-17})$$

- w Energiedichte der Schallwelle,
 \hat{y} Elongationsamplitude,
 \hat{p} Schalldruckamplitude,
 \hat{v} Schnelleamplitude,
 f Schallfrequenz,
 c Schallgeschwindigkeit.

K.1.8 Schallintensität

Die Schallintensität I einer harmonischen
Schallwelle beträgt:

$$I = \frac{1}{A} dE/dt = w c \\ = \frac{1}{2} \hat{v} \hat{p} = v_{\text{eff}} p_{\text{eff}} = \frac{p_{\text{eff}}^2}{Z}; \quad (\text{K-18})$$

- I Schallintensität,
 \hat{v} Schnelleamplitude,
 \hat{p} Schalldruckamplitude,
 Z Schallwiderstand,
 w Energiedichte,
 c Schallgeschwindigkeit.

K.1.9 Schalleistung

Die Schalleistung P einer Schallquelle ist,
wenn auf ein Flächenelement dA die Schall-
intensität I einfällt,

$$P = \int_A I dA; \quad (\text{K-19})$$

- P Schalleistung,
 I Schallintensität,
 dA Flächenelement senkrecht zum Schall-
einfall.

K.1.10 Dämpfungskoeffizient der Schallabsorption

Durch innere Reibung und unvollständige
isentropische Kompression (*Dissipation*) sowie
über die Anregung innerer Molekülfreiheits-
grade (*Relaxation*) auf der Strecke zwischen
den Orten r_0 und r wird Schallenergie absor-
biert, die Schalldruckamplitude gedämpft und
ein Schallintensitätsabfall von $I(r_0)$ auf $I(r)$
verursacht, für den gilt:

$$I(r) = I(r_0) e^{-\alpha(r-r_0)}; \quad (\text{K-20})$$

- I Schallintensität,
 r, r_0 Ortsvektoren,
 α Dämpfungskoeffizient der Schallab-
sorption.

K.2 Schallwandler

Die Schalldrücke überspannen in der Technik einen Wertebereich von mehr als sechs Zehnerpotenzen. Schallempfänger oder *Mikrofone* und Schallgeber oder *Lautsprecher* müssen also in diesem großen Wertebereich den Schallwechseldruck oder die damit verknüpfte

Schallschnelle über ein mechanisches Schwingungssystem (*Membran*) in eine elektrische Spannung bzw. Strom umwandeln. Die gebräuchlichen elektroakustischen Wandlerprinzipien zeigt Tabelle K-4.

Tabelle K-4. Elektroakustische Wandler.

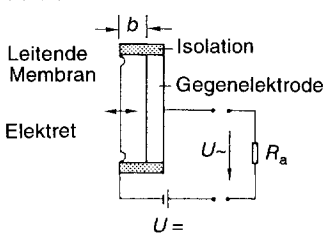
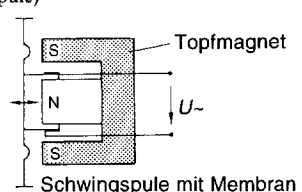
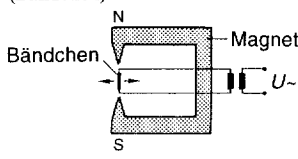
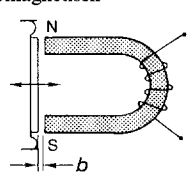
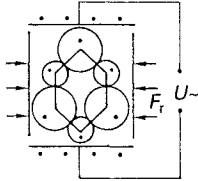
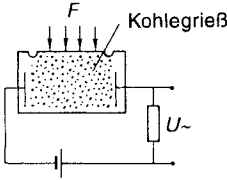
Elektroakustische Wandler	technische Ausführungen	Anwendungsbereich
elektrostatisch 	Kondensatormikrofon (mit äußerer Polarisationsspannung an der Mikrofonkapsel) Elektretmikrofon (permanente elektrische Polarisierung an der Mikrofonmembran) Speziallautsprecher	Schallpegelmesser Studiomikrofon Ansteckmikrofon Tieftonmikrofon Handmikrofon Umhängemikrofon extrem breitbandige Kopfhörer
elektrodynamisch (Schwingspule) 	Tauchspulenmikrofon Lautsprecher	Studiorichtmikrofon Handmikrofon Umhängemikrofon Normalschallquellen Beschallungsanlagen Kopfhörer
elektrodynamisch (Bändchen) 	Bändchenmikrofon	Studiomikrofon für höchste Lautstärkepegel Vokalmikrofon Blechbläsermikrofon
elektromagnetisch 	Lautsprecher	Telefonhörer Hörgeräte

Tabelle K-4 (Fortsetzung)

Elektroakustische Wandler	technische Ausführungen	Anwendungsbereich
piezoelektrisch 	Kristallmikrofon Keramikmikrofon Piezopolymer-Mikrofon	Körperschallmikrofon Wasserschallmikrofon Beschleunigungsaufnehmer
piezoresistiv 	Kohlemikrofon	Fernsehapparat

K.2.1 Schallpegel

Um handliche Zahlenwerte für den großen Wertebereich der Schalldruckamplituden zu erhalten, werden diese in einem relativen logarithmischen Maßstab angegeben, dem *Schallpegel*. Entsprechend den verschiedenen physikalischen Größen der Schallwelle ergeben sich über die Beziehungen zwischen den Größen unterschiedliche Schallpegel, die jeweils auf eigene Norm-Bezugsgrößen bezogen sind (Tabelle K-5).

K.2.2 Gesamtschallpegel

Der Gesamtschallpegel L_{ges} von n Schallquellen mit den Schallintensitätspegeln $L_{1,i}$ ergibt sich aus der energetischen *Addition der Schallintensitäten* zu:

$$L_{\text{ges}} = 10 \lg \left(\sum_{i=1}^n 10^{0,1 L_{1,i}} \right) \text{ dB.} \quad (\text{K-21})$$

Tabelle K-5. Schallpegel.

Schallpegel	Definition	Bezugsgröße	Beziehungen
Schalldruckpegel	$L_p = 20 \lg \frac{p_{\text{eff}}}{p_{\text{eff},0}} \text{ dB}$	$p_{\text{eff},0} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$	$p_{\text{eff}} = Z v_{\text{eff}}$ $I = \frac{p_{\text{eff}}^2}{Z}$ $P = A \frac{p_{\text{eff}}^2}{Z}$
Schallschnellepegel	$L_v = 20 \lg \frac{v_{\text{eff}}}{v_{\text{eff},0}} \text{ dB}$	$v_{\text{eff},0} = 5 \cdot 10^{-8} \frac{\text{m}}{\text{s}}$	
Schallintensitätspegel	$L_I = 10 \lg \frac{I}{I_0} \text{ dB}$	$I_0 = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$	
Schallleistungspegel	$L_P = 10 \lg \frac{P}{P_0} \text{ dB}$	$P_0 = 10^{-12} \text{ W}$	

In der Praxis führt man die Pegeladdition sukzessive für jeweils zwei Pegel mit Hilfe der Schallpegel-Additionstabelle K-6 aus; zum größeren Pegel L_1 wird der Pegelzuschlag L_2 addiert, der entsprechend der Pegeldifferenz $\Delta L = L_1 - L_2$ der Tabelle K-6 entnommen wird.

K.2.3 Schallfrequenzspektrum, Bandfilter

Zur Bestimmung der Frequenzabhängigkeit des Schallpegels, des Schallfrequenzspektrums, wird das Spannungssignal des elektroakustischen Schallwandlers durch elektrische

Tabelle K-6. Schallpegel-Additionstabelle (ΔL Pegeldifferenz, L_z Pegelzuschlag).

ΔL dB	L_z dB	ΔL dB	L_z dB	ΔL dB	L_z dB
0,0	3,0	4,0	1,5	8,0	0,6
0,5	2,8	4,5	1,3	9,0	0,5
1,0	2,5	5,0	1,2	10,0	0,4
1,5	2,3	5,5	1,1	12,0	0,3
2,0	2,1	6,0	1,0	14,0	0,2
2,5	1,9	6,5	0,9	16,0	0,1
3,0	1,8	7,0	0,8	≥ 20	0,0
3,5	1,6	7,5	0,7		

Tabelle K-7. Terz und Oktavfilter (f_u, f_o untere bzw. obere Frequenzgrenze, Δ_A^ Schallpegelabschwächung bei A-Bewertung).*

Oktave				Terz			
f_u Hz	f_o Hz	f_m Hz	Δ_A^* dB	f_u Hz	f_o Hz	f_m Hz	Δ_A^* dB
11	22	16	-56,7	14,1	17,8	16	-56,7
				17,8	22,4	20	-50,5
				22,4	28,2	25	-44,7
22	44	31,5	-39,2	28,2	35,5	31,5	-39,4
				35,5	44,7	40	-34,6
				44,7	56,2	50	-30,2
44	88	63	-26,2	56,2	70,7	63	-26,2
				70,7	89,1	80	-22,5
				89,1	112	100	-19,1
88	177	125	-16,1	112	141	125	-16,1
				141	178	160	-13,4
				178	224	200	-10,9
177	355	250	- 8,6	224	282	250	- 8,6
				282	355	315	- 6,6
				355	447	400	- 4,8
355	710	500	- 3,2	447	562	500	- 3,2
				562	708	630	- 1,9
				708	891	800	- 0,8
710	1 420	1 000	0	891	1 122	1 000	0
				1 122	1 413	1 250	+ 0,6
				1 413	1 778	1 600	+ 1,0
1 420	2 840	2 000	+ 1,2	1 778	2 239	2 000	+ 1,2
				2 239	2 818	2 500	+ 1,3
				2 818	3 548	3 150	+ 1,2
2 840	5 680	4 000	+ 1,0	3 548	4 467	4 000	+ 1,0
				4 467	5 623	5 000	+ 0,5
				5 623	7 079	6 300	- 0,1
5 680	11 360	8 000	- 1,1	7 079	8 913	8 000	- 1,1
				8 913	11 220	10 000	- 2,5
				11 220	14 130	12 500	- 4,3
11 360	22 720	16 000	- 6,6	14 130	17 780	16 000	- 6,6
				17 780	22 390	20 000	- 9,3

Filter nur in einem Frequenzintervall zwischen der oberen f_o und der unteren Grenzfrequenz f_u um die Bandmittenfrequenz f_m des Filters verstärkt.

$$f_m = \sqrt{f_o \cdot f_u}. \quad (\text{K-22})$$

Tabelle K-7 enthält die obere und die untere Grenzfrequenz sowie die Bandmittenfrequenzen des Terzfilter $f_o/f_u = 2^{1/3}$ und des Oktavfilters $f_o/f_u = 2$.

K.3 Schallwelle an Grenzflächen

An der Grenzfläche zweier Medien mit unterschiedlicher Schallkennimpedanz Z wird die einfallende Schallwelle (p_e, I_e) zum Teil reflektiert (p_r, I_r), zum Teil dringt sie als transmittierte Schallwelle (p_t, I_t) in das Medium II ein, (Bild K-1). Die folgenden Beziehungen basieren auf der Voraussetzung, daß für die Schallenergie an der Grenzfläche der Energieerhaltungssatz gültig ist und die Schallenergieumwandlungen in den Medien stattfinden.

K.3.1 Schallreflexionsgrad

Durch den Bezug der reflektierten Schallintensität I_r auf die einfallende I_e ergibt sich eine dimensionslose Größe, der Schallreflexionsgrad ϱ_s mit dem Wertebereich zwischen 0 und 100%:

$$\varrho_s = \frac{I_r}{I_e}. \quad (\text{K-23})$$

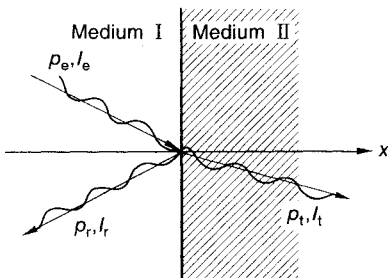


Bild K-1. Schall an einer Grenzfläche.

Für den Schallreflexionsgrad einer Grenzfläche zwischen einem Medium I mit der Schallkennimpedanz Z_1 und einem Medium II mit der Schallkennimpedanz Z_2 gilt bei senkrechtem Einfall:

$$\varrho_s = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2. \quad (\text{K-24})$$

K.3.2 Schalltransmissionsgrad

Durch den Bezug der transmittierten Schallintensität I_t auf die einfallende Intensität I_e ergibt sich der Schalltransmissionsgrad τ_s :

$$\tau_s = \frac{I_t}{I_e} = \frac{4 Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}; \quad (\text{K-25})$$

Z_1, Z_2 Schallkennimpedanzen der Medien I und II.

An der Grenzfläche gilt wegen des Energieerhaltungssatzes der folgende Zusammenhang zwischen dem Reflexions- und Transmissionsgrad, wenn die Schallabsorption vernachlässigbar ist:

$$\varrho_s + \tau_s = 1. \quad (\text{K-26})$$

K.3.3 Schallabsorptionsgrad

Durch Bezug der Schallintensität I_a , die im Medium II absorbiert und in Wärme umgewandelt wird, auf die einfallende Schallintensität I_e ergibt sich der Schallabsorptionsgrad α_s :

$$\alpha_s = \frac{I_a}{I_e}. \quad (\text{K-27})$$

Wird die gesamte transmittierte Strahlungsleistung im Medium II absorbiert, so ergibt sich mit Gl. (K-26):

$$\alpha_s = \tau_s = 1 - \varrho_s; \quad (\text{K-28})$$

α_s Schallabsorptionsgrad,
 τ_s Schalltransmissionsgrad,
 ϱ_s Schallreflexionsgrad.

Mit Gl. (K-24) folgt damit für den Schallabsorptionsgrad durch ein Medium II, das die transmittierte Schallwelle *vollständig* absorbiert:

$$\alpha_s = 1 - \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2; \quad (\text{K-29})$$

α_s Schallabsorptionsgrad,

Z_1 Schallkennimpedanz des Mediums I,

Z_2 Schallkennimpedanz des Mediums II.

Der Schallabsorptionsgrad von Schallabsorbern ist abhängig von der Schallfrequenz; in der Praxis absorbieren alle Schallabsorber-Konstruktionen nur in einem mehr oder minder breiten Schallfrequenzbereich die Schallenergie, weil sie als *Resonanzabsorber* nach dem Prinzip der erzwungenen Schwingung eines Masse-Feder-Systems aufgebaut sind, und daher nur im Bereich der Resonanzfrequenz große Schallenergien aufnehmen und absorbieren. Einen Überblick über die *Bauprinzipien* von Schallabsorbern gibt Tabelle K-8.

Tabelle K-8. Schallabsorber.

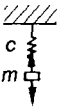
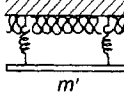
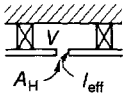
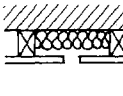
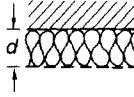
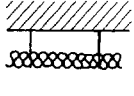
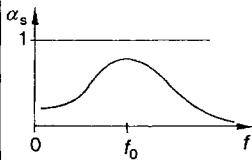
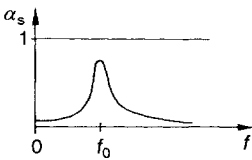
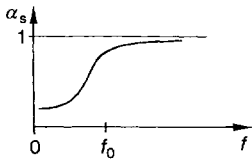
	Plattenschwinger	Helmholtz-Resonator	poröser Schallabsorber
Prinzip des Masse-Feder-Systems	 <p>ohne Zusatzdämpfung</p>  <p>mit Zusatzdämpfung</p>	 <p>ohne Zusatzdämpfung</p>  <p>mit Zusatzdämpfung</p>	 <p>selbsttragendes Dämpfungsmaterial</p>  <p>abgehängtes Dämpfungsmaterial</p>
Richtgröße der „Feder“ schwingende „Masse“	Befestigung + Luftschicht d Flächenmasse m'	Hohlraumvolumen V Halsvolumen $A_H l_{\text{eff}} \varrho_L$	Luftschicht d + Abhängung Abdeckung (vernachlässigbar)
Dissipation der Schallenergie	innere Reibung in Platte und Luftschicht, äußere Reibung an Befestigung, viskose Strömungsverluste in Zusatzdämpfungsmaterial	nicht adiabatische Kompression des Hohlraumvolumens, Reibungsverluste im Resonatorhals, viskose Strömungsverluste in Zusatzdämpfungsmaterial	viskose Strömungsverluste durch äußere Reibung an Dämpfungsmaterial, Energieverlust durch innere Reibung bei Faserdeformation
Resonatorcharakteristik	schmalbandiger Resonanzabsorber 	besonders schmalbandiger Resonanzabsorber 	breitbandiger Absorber 

Tabelle K-8 (Fortsetzung)

	Plattenschwinger	Helmholtz-Resonator	poröser Schallabsorber
charakteristische Absorberfrequenz	$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa p_0}{dm'}}$	$f_0 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{A_H}{V l_{\text{eff}}}}$	$f_0 \approx \frac{c}{4d}$
Einsatzbereiche	Tiefenschlucker in Raumakustik, Luftschalldämmung (leichte Vorsatzschale)	selektive Schallabsorption (Maschinenlärm, Raumakustik), Schalldämmung von Fugen (Tür, Fenster)	Schallpegelminderung, Änderung der Nachhallzeit

K.4 Schalldurchgang durch Trennwände

Die Schalltransmission durch Trennwände läßt sich berechnen, wenn

- das Resonanzverhalten nur durch die Masenträgheit der Trennwand bestimmt ist,
- der Einfluß der Elastizität und anderer nichtlinearer oder frequenzabhängiger Effekte sowie
- die Schallenergieverluste in der Trennwand vernachlässigbar sind und
- die Grenzfläche der Trennwand biegeweich ist.

Die Schallschnelle und der Schalldruck der auf der Wandrückseite abgestrahlten Schallwelle sind unter diesen Annahmen genauso groß wie bei der in die Trennwand eindringenden Schallwelle (Bild K-2).

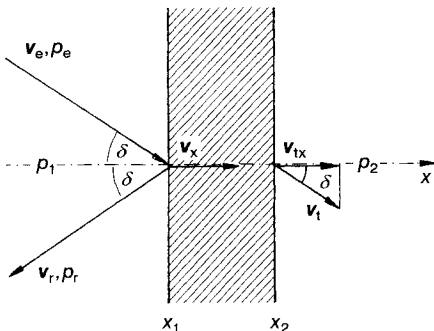


Bild K-2. Schalldurchgang durch eine dünne Wand.

K.4.1 Schalltransmissionsgrad

Die *Winkelabhängigkeit* des Schalltransmissionsgrades $\tau_s(\delta)$ ist:

$$\tau_s(\delta) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\pi m' f \cos \delta}{Z} \right)^2}; \quad (\text{K-30})$$

- f Schallfrequenz,
 m' flächenbezogene Masse der Trennwand ($m' = \rho s$),
 δ Einfallswinkel der Schallwelle,
 s Dicke der Trennwand,
 Z Schallkennimpedanz der Luft ($Z = 410 \text{ kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$).

Wenn durch Vielfachreflexion die Schalleinstrahlung gleichmäßig über alle Einfallswinkel verteilt, also diffus ist, gilt $(\cos^2 \delta)_{\text{mittel}} = 0,5$. Für *senkrechten* Einfall $\delta = 0$ und mit der Näherung $(\pi m' f / Z) \gg 1$ ergibt sich dann für Schallschutz-Trennwände der *räumlich gemittelte* Schalltransmissionsgrad aus:

$$\tau_{s, \text{mittel}} = 2 \left(\frac{Z}{\pi m' f} \right)^2. \quad (\text{K-31})$$

K.4.2 Schalldämmmaß einer Trennwand

Der Schallschutz einer Trennwand wird durch das *logarithmische* Schalldämmmaß R definiert, das durch den Schalltransmissionsgrad $\tau_{s, \text{mittel}}$

nach Gl. (K-31) im diffusen Schallfeld bestimmt wird:

$$R = 10 \lg \left(\frac{1}{\tau_{S, \text{mittel}}} \right) \text{ dB.} \quad (\text{K-32})$$

Das *Massengesetz* für das Schalldämmmaß einer *biegeweichen* Trennwand im diffusen Schallfeld beträgt demnach:

$$R = 20 \lg \left(\frac{\pi f m'}{Z} \right) \text{ dB} - 3 \text{ dB;} \quad (\text{K-33})$$

f Schallfrequenz,
 m' flächenbezogene Masse,
 Z Schallkennimpedanz der Luft
 $(Z = 410 \text{ kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})).$

K.4.3 Spuranpassungs-Schallwellenlänge

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Biege-
 wellen auf Platten ist *frequenzabhängig* (*anomale Dispersion*):

$$c_B = \left\{ \frac{4 \pi^2 f^2 B}{m'} \right\}^{1/4}; \quad (\text{K-34})$$

c_B Biegewellen-Ausbreitungsgeschwindigkeit,
 f Schallfrequenz,
 B Biegesteifigkeit ($B = E s^3/[12(1 - \mu^2)]$),
 s Dicke der Platte,
 E Elastizitätsmodul der Platte,
 μ Querkontraktionszahl der Platte,
 m' flächenbezogene Masse.

Biegewellen werden von einer auftreffenden Schallwelle der Wellenlänge λ_L resonant erregt, wenn die Wellenlängenkomponente der Schallwelle parallel zur Plattenebene $\lambda_s = \lambda_L/\sin \delta$ (Bild K-3) mit der Wellenlänge $\lambda_B = c_B/f$ der Biegewelle übereinstimmt (*Spuranpassung*). Daraus ergibt sich die Spuranpassungs-Schallwellenlänge zu:

$$\lambda_s = \frac{c_B}{f} = \left\{ \frac{4 \pi^2 B}{f^2 m'} \right\}^{1/4} \quad (\text{K-35})$$

f Schallfrequenz,
 B Biegesteifigkeit der Trennwand,
 m' flächenbezogene Masse der Trennwand,
 c_B Biegewellen-Ausbreitungsgeschwindigkeit nach Gl. (K-34).

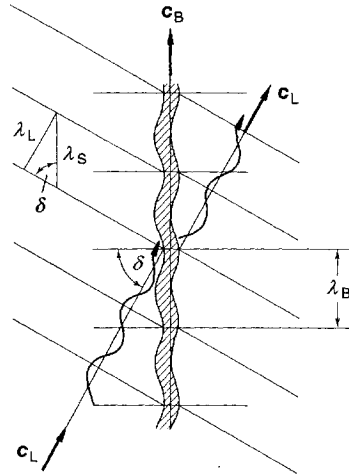


Bild K-3. Biegewellen durch Spuranpassung.

K.4.4 Spuranpassungsfrequenz

Bei einem Einfallswinkel δ tritt bei der Schallfrequenz $f_s = c_L/\lambda_L = c_L/(\lambda_s \sin \delta)$ Spuranpassung auf; die Spuranpassungsfrequenz f_s hat also den Wertebereich:

$$f_s = \frac{c_L^2}{2 \pi \sin^2 \delta} \sqrt{\frac{m'}{B}}; \quad (\text{K-36})$$

c_L Schallgeschwindigkeit,
 B Biegesteifigkeit der Trennwand,
 m' flächenbezogene Masse der Trennwand,
 δ Einfallswinkel der Schallwelle.

Demnach ist die *untere Grenzfrequenz* $f_{s,g}$ der *Spuranpassung*, wenn $\delta = 90^\circ$ gilt. Im diffusen Schallfeld setzt bei Schallfrequenzen $f > f_{s,g}$ die erhöhte, durch den Spuranpassungseffekt verursachte Schalltransmission ein, und das Schalldämmmaß weicht vom theoretischen Massengesetz (Bild K-4) ab:

$$f_{s,g} = \frac{c_L^2}{2 \pi} \sqrt{\frac{m'}{B}}; \quad (\text{K-37})$$

c_L Schallgeschwindigkeit,
 B Biegesteifigkeit der Trennwand,
 m' flächenbezogene Masse der Trennwand.

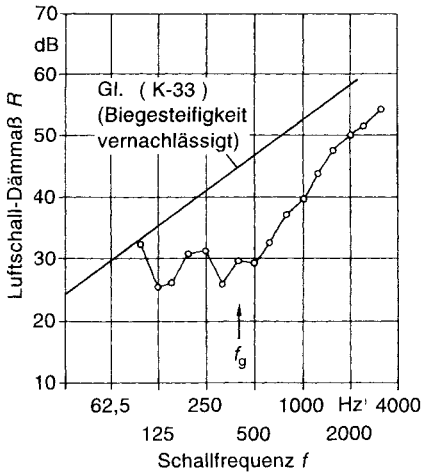


Bild K-4. Luftschall-Dämmmaß R einer 70 mm dicken Gipsplattenwand, beidseitig verspachtelt.

- Meßkurve nach DIN 52120;
 ——— Massengesetz nach Gl. (K-33)
 mit $m' = 80 \text{ kg/m}^2$, $E = 6 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$,
 $Z = 2,6 \cdot 10^6 \text{ kg/(m}^2 \cdot \text{s)}$;
 f_g Grenzfrequenz nach Gl. (K-37).

Die Grenzfrequenz $f_{g, \text{hom}}$ der Spuranpassung homogener Platten ist:

$$f_{g, \text{hom}} = \frac{c_L^2}{2\pi s} \sqrt{\frac{12(1-\mu^2)\varrho}{E}}; \quad (\text{K-38})$$

- c_L Schallgeschwindigkeit in Luft,
 s Dicke der Platte,
 E Elastizitätsmodul der Platte,
 ϱ Dichte der Platte,
 μ Querkontraktionszahl des Plattenmaterials.

Bei Luftschallanregung $c_L = 340 \text{ m/s}$ und unter Vernachlässigung von μ gilt für homogene Platten folgende Zahlenwertgleichung für die Spuranpassungs-Grenzfrequenz:

$$f_{g, \text{hom, Luft}} = 6,4 \cdot 10^4 (\text{m/s})^2 \frac{1}{s} \sqrt{\frac{\varrho}{E}}; \quad (\text{K-39})$$

- s Dicke der Trennwand,
 E Elastizitätsmodul des Trennwandmaterials,
 ϱ Dichte des Trennwandmaterials.

K.5 Physiologische Akustik

Das menschliche Ohr löst erst dann im Bewußtsein eine Schallempfindung aus, wenn die Frequenz der Schallwelle im Bereich $f = 16 \text{ Hz}$ bis 20 kHz und der Effektivwert des Schalldrucks über ca. $p_{\text{eff}} = 20 \mu\text{Pa}$ liegt, wobei die obere Grenzfrequenz des Hörbereichs mit zunehmenden Alter erheblich sinkt. Bei Schalldrücken oberhalb $p_{\text{eff}} = 20 \text{ Pa}$ oder Schallpegeln höher als $L = 120 \text{ dB}$ empfindet der Mensch nur noch Schmerz (akustische Schmerzgrenze).

K.5.1 Lautstärke

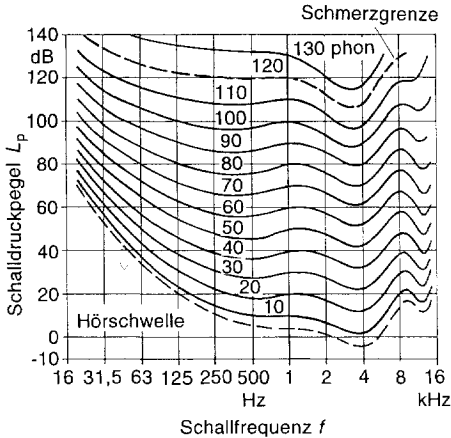
Gleiche Schallpegel unterschiedlicher Schallfrequenz bewirken eine unterschiedliche Schallempfindung. Die Lautstärke L_s ist der Maßstab für das Lautheitsempfinden des Gehörorgans; sie wird in *phon* gemessen. Die Lautstärke L_s ist so definiert, daß bei der Schallfrequenz $f = 1 \text{ kHz}$ der Zahlenwert in *Phon* gleich dem Zahlenwert des Schalldruckpegels ist:

$$L_s(1000 \text{ Hz}) = 20 \lg \frac{p_{\text{eff}}(1000 \text{ Hz})}{20 \mu\text{Pa}} \text{ phon}; \quad (\text{K-40})$$

$p_{\text{eff}}(1000 \text{ Hz})$ effektiver Schalldruck bei 1000 Hz.

Die Lautstärke $L_s(f)$ bei einer Schallfrequenz f wird durch einen Hörvergleich bestimmt. Der Lautstärkepegel wird subjektiv mit dem Standardschall verglichen, dem Schalldruckpegel $L_p^*(1000 \text{ Hz})$ einer akustisch gleich laut empfundenen 1000-Hz-Vergleichsschallquelle. Der Zahlenwert des Schalldruckpegels in dB ist dann der phon-Wert für die Lautstärke $L_s(f)$.

Im Bild K-5 ist dargestellt, welcher Schalldruckpegel $L_p(f)$ bei einer Schallfrequenz f die gleiche Schallempfindung auslöst wie der Schalldruckpegel $L_p(1000 \text{ Hz})$ des ebenen 1-kHz-Vergleichsschalls. Die Kurven gleicher Lautstärke L_s sind in 10-Phon-Stufen dargestellt. Die Wahrnehmungsauflösung des

Bild K-5. Kurven gleicher Lautstärke L_S .

menschlichen Ohres liegt bei etwa $\Delta L_S = 1$ phon, die Hörschwelle bei einem Wert von $L_S = 4$ phon, die Schmerzgrenze bei $L_S = 120$ phon.

K.5.2 Lautheit

Die *Lautheit* S ist ein Maßstab für die Schallempfindung des menschlichen Ohres, der proportional zur Stärke der Schallempfindung ansteigt. Die Zahlenwerte der Lautheit werden durch den Zusatz *sone* gekennzeichnet.

$$S = 2^{0,1 (L_S - 40 \text{ phon})} \text{ sone}; \quad (\text{K-41})$$

L_S Lautstärke in phon.

Der Lautheit $S = 1$ sone entspricht also definitionsgemäß die Lautstärke $L_S = 40$ phon.

K.5.3 A-bewerteter Schallpegel

Der A-bewertete Schallpegel L_A ist eine meßtechnische Näherung für die Lautstärkeempfindung des menschlichen Ohres, welche die komplizierte Phon-Messung vermeidet. Die Bewertungskurve A bildet die Frequenzabhängigkeit der Lautstärkeempfindlichkeit des menschlichen Ohres im Bereich unterhalb

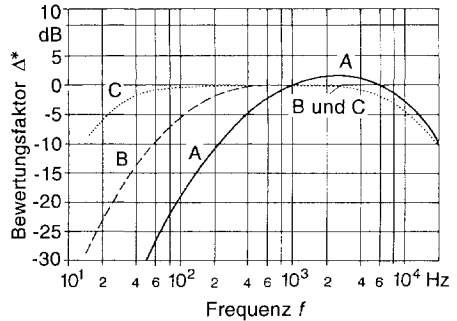


Bild K-6. Bewertungskurven A, B, C nach DIN 45633.

90 phon nach; die Lärmempfindung über 100 phon wird mit der C-Kurve genähert. Mit Hilfe der Bewertungskurven der gemessenen Schallpegel L_p ist auch eine, der menschlichen Schallempfindung vergleichbare Messung von Schall mit einem Schallfrequenzspektrum möglich.

Die bewerteten Schallpegel L_A bzw. L_C werden berechnet, indem zu den terz- oder oktavweise gemessenen Schallpegeln L_i ein frequenzabhängiger Bewertungsfaktor Δ_A^* addiert wird. Die Bewertungskurven zeigt Bild K-6, die Zahlenwerte der A-Bewertungsfaktoren Δ_A^* sind in Tabelle K-7 aufgeführt.

Der A-bewertete Schallpegel L_A eines Schallfrequenzspektrums berechnet sich wie folgt:

$$L_A = 10 \lg \left\{ \sum_{i=1}^n 10^{0,1 (L_i + \Delta_{A,i}^*)} \right\} \text{ dB (A)}; \quad (\text{K-42})$$

L_i gemessener Schallpegel in Terzen oder Oktaven,

$\Delta_{A,i}^*$ A-Bewertungsfaktor.

K.5.4 Äquivalenter Dauerschallpegel

Der äquivalente Dauerschallpegel $L_{\text{äq}}$ ist das Maß für die Belastung des Gehörs durch die Schallenergie von Geräuschimmissionen in einem Bezugszeitraum t_B , beispielsweise

$t_B = 8 \text{ h}$ für die Gehörbelastung an einem Arbeitstag,

$$L_{\text{äq}} = 10 \lg \left\{ \frac{1}{t_B} \sum_{i=1}^n [t_i \cdot 10^{0,1 L_{A,i}}] \right\} \text{ dB (A);} \quad (\text{K-43})$$

t_i Zeitintervall i des Bezugszeitraums,
 $L_{A,i}$ A-bewerteter Schallpegel im Zeitintervall t_i ,
 t_B Bezugszeitraum ($t_B = t_1 + t_2 + \dots + t_n$).

K.6 Raumakustik

Die *akustische Behaglichkeit* in einem Raum wird zum einen vom *Schalleistungspegel* L_{diffus} des diffusen Schallfeldes und zum anderen von der *Hörsamkeit* im Raum bestimmt. Die Hörsamkeit hängt vom Verhältnis der Schallintensitäten und der Laufzeiten des geradlinig einfallenden Schalls (*Direktschall*) zu denjenigen des gestreuten Schalls (*indirektem Schall*) sowie von der Zeitspanne ab, in der die Schallenergie nach einem Schallpegelsprung abnimmt (*Nachhall*).

K.6.1 Äquivalente Absorptionsfläche

Die äquivalente Absorptionsfläche ist *charakteristisch für die Schallabsorptionseigenschaften eines Raumes*. Sie beeinflusst sowohl den Schalleistungspegel in einem Raum, als auch den Nachhallverlauf und ergibt sich aus

$$A_{\text{äq}} = \sum A_i \bar{\alpha}_i. \quad (\text{K-44})$$

Der mittlere Schallabsorptionsgrad $\bar{\alpha}_i$ ist definiert als:

$$\bar{\alpha}_i = 2 \int_0^{\pi/2} \alpha_i(\delta) \cos \delta \sin \delta \, d\delta; \quad (\text{K-45})$$

$A_{\text{äq}}$ äquivalente Absorptionsfläche,
 A_i Oberfläche i im Raum,
 $\bar{\alpha}_i$ mittlerer Schallabsorptionsgrad der Oberfläche i ,
 $\alpha_i(\delta)$ Schallabsorptionsgrad unter dem Einfallswinkel δ ,
 δ Schalleinfallswinkel.

Die gesamte absorbierte Schalleistung P_{ges} hängt von der Schallintensität I_{diffus} des diffusen Schallfeldes im Raum ab:

$$P_{\text{ges}} = \frac{1}{4} I_{\text{diffus}} A_{\text{äq}}; \quad (\text{K-46})$$

I_{diffus} Schallintensität des diffusen Schallfeldes,
 $A_{\text{äq}}$ äquivalente Absorptionsfläche.

K.6.2 Schalleistungspegel des diffusen Schallfeldes

Der Schalleistungspegel des diffusen Schallfeldes L_{diffus} wird durch den Schalleistungspegel der Schallquelle und die äquivalente Absorptionsfläche bestimmt.

$$L_{\text{diffus}} = L_W - 10 \lg \frac{A_{\text{äq}}}{4 A_0} \text{ dB}; \quad (\text{K-47})$$

L_W Schalleistungspegel,
 $A_{\text{äq}}$ äquivalente Schallabsorptionsfläche,
 A_0 Norm-Bezugsfläche der Luftschallabsorption ($A_0 = 1 \text{ m}^2$).

K.6.3 Nachhallzeit

Wird eine Schallquelle in einem Raum mit dem Raumvolumen V und der äquivalenten Absorptionsfläche $A_{\text{äq}}$ ausgeschaltet, dann nimmt die Schallenergie $E(t)$ vom Ausgangswert $E(0)$ exponentiell ab:

$$E(t) = E(0) e^{-\frac{c A_{\text{äq}}}{4V} t}; \quad (\text{K-48})$$

$A_{\text{äq}}$ äquivalente Absorptionsfläche,
 c Schallgeschwindigkeit,
 V Raumvolumen.

Die Nachhallzeit T^* ist eine für den *Abfall der Schallenergie charakteristische Zeitkonstante* und durch die Zeitspanne definiert, in der der Schallpegel L_{diffus} des diffusen Schallfeldes um $\Delta L = 60 \text{ dB}$ abnimmt:

$$T^* = \frac{24 \ln 10}{c} \frac{V}{A_{\text{äq}}} = 0,163 \frac{\text{s}}{\text{m}} \frac{V}{A_{\text{äq}}}; \quad (\text{K-49})$$

$A_{\text{äq}}$ äquivalente Absorptionsfläche,
 c Schallgeschwindigkeit,
 V Raumvolumen.

Die Zahlenwertgleichung ergibt sich, wenn für Luftschall die mittlere Schallgeschwindigkeit zu $c = 340 \text{ m/s}$ angesetzt wird.

K.6.4 Hallradius

Das Schallfeld punkt- oder kugelförmiger Schallquellen wird in Räumen durch die Vielfach-Schallreflexionen an den Wänden in ein diffuses Schallfeld umgewandelt. Nur im Nahfeld der Schallquelle überwiegt der Direktschall und damit der Schallintensitätsverlauf wie in einem freien Schallfeld, bei dem die Verdopplung des Abstands zur Schallquelle bei einer Kugel-Schallquelle eine Schallintensitätsabnahme von $\Delta L_1 = 6 \text{ dB}$ und bei einer Zylinder-Schallquelle von $\Delta L_1 = 3 \text{ dB}$ bewirkt.

Der Hallradius R_H ist der Abstand von einer Schallquelle im Raum, innerhalb dessen die Schallintensität wie bei der Ausbreitung im freien Schallfeld abnimmt und durch Vergrößerung des Abstands zur Lärmquelle eine Lärminderung möglich ist. Der Hallradius R_H ist:

$$R_H = \frac{1}{4} k_H \sqrt{\frac{A_{\text{äq}}}{\pi}}; \quad (\text{K-50})$$

$A_{\text{äq}}$ äquivalente Absorptionsfläche,
 k_H Hallradiusfaktor.

Der Hallradiusfaktor k_H berücksichtigt den Einfluß der Symmetrie der Schallquelle, der Raumgeometrie und des Aufstellorts des Schallsenders im Raum. Für Rechteckräume sind k_H -Werte in Tabelle K-9 zusammengestellt.

Tabelle K-9. Hallradiusfaktor k_H von Rechteckräumen.

Aufstellungsort Schallquelle	Kugel-Schallquelle	Zylinder-Schallquelle
im Raumzentrum	1	$\sqrt{2}$
Wand-/Deckenmitte	$\sqrt{2}$	2
Wand-/Deckenkante	2	$2\sqrt{2}$
dreidim. Raumecke	$2\sqrt{2}$	–

K.7 Technische Akustik und Bauakustik

Zur akustischen Behaglichkeit von Räumen gehört es, daß die Räume gegen den Schall aus Nachbarräumen geschützt sind. Dabei wird zwischen der Anregung der Trennflächen über Luftschall (*Luftschalldämmung*) und derjenigen über direkte Bauteilanregung (*Trittschalldämmung*) unterschieden.

K.7.1 Luftschall-Dämmmaß

Das Luftschall-Dämmmaß R wird über den mittleren Luftschall-Transmissionsgrad τ_s , das ist das Verhältnis zwischen der Schalleistung P_2 im Empfangsraum und der Schalleistung P_1 im Senderaum, definiert:

$$R = 10 \lg \frac{1}{\tau_s} \text{ dB} = 10 \lg \frac{P_1}{P_2} \text{ dB}. \quad (\text{K-51})$$

Die Schalleistung P_2 und auch der Schallpegel L_2 im Empfangsraum hängen von der Trennfläche zwischen Sende- und Empfangsraum, von der äquivalenten Absorptionsfläche des Empfangsraums sowie vom Schallpegel im Senderaum ab (Bild K-7). Es gilt:

$$R = L_1 - L_2 + 10 \lg \frac{A_T}{A_{\text{äq}}} \text{ dB}; \quad (\text{K-52})$$

$A_{\text{äq}}$ äquivalente Schallabsorptionsfläche des Empfangsraums,
 A_T Trennfläche zwischen Sende- und Empfangsraum,
 L_1 Schallpegel im Senderaum,
 L_2 Schallpegel im Empfangsraum.

Mit Gl. (K-52) kann in der Baupraxis das Schalldämmmaß einer Trennwand oder -decke gemessen werden.

K.7.2 Norm-Trittschallpegel

Begehen, Hüpfen, Stühlerücken u.ä. regen den Fußboden direkt zu Schwingungen an. Dieser *Trittschall* wird über die Decke und

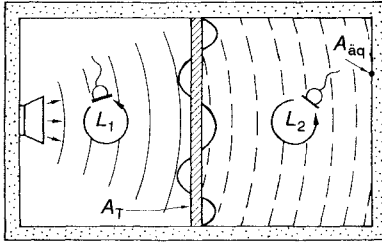


Bild K-7. Luftschallanregung und -abstrahlung einer Trennwand. A schallabstrahlende Oberfläche im Empfangsraum mit der äquivalenten Schallabsorptionsfläche A_{aq} .

mit der Decke verbundene Bauteile in andere, insbesondere in darunterliegende Räume geleitet. Die Trittschallübertragung wird nach DIN 52 210 gemessen, indem ein Norm-Hammerwerk mit einer Schlagfrequenz von 10 Schlägen je Sekunde auf dem Fußboden aufgestellt wird und im Empfangsraum der Trittschallpegel L_{gem} terzweise registriert wird. Ein Korrekturglied berücksichtigt die aus einer Nachhallzeitmessung ermittelte Schallabsorption im Empfangsraum. Bauakustischen Anforderungen nach DIN 4109 unterliegt der

so bestimmte Norm-Trittschallpegel L_n der Decke:

$$L_n = L_{gem} + 10 \lg \frac{A_{aq,E}}{A_0} \text{ dB}; \quad (\text{K-53})$$

- L_{gem} gemessener Trittschallpegel im Empfangsraum,
 $A_{aq,E}$ äquivalente Absorptionsfläche des Empfangsraums,
 A_0 Norm-Bezugsfläche der Trittschallabsorption ($A_0 = 10 \text{ m}^2$).

K.7.3 Körperschall-Isolierungswirkungsgrad

Körperschall ist die Ausbreitung von Schall im Inneren oder auf der Oberfläche von Festkörpern mit Schallfrequenzen im Hörbereich $f > 15 \text{ Hz}$. Maßnahmen zur Körperschall-dämmung führt Tabelle K-10 auf.

Die *elastische Lagerung* eines Schallgebers, also die Erzeugung eines schwingungsfähigen Masse-Feder-Systems aus der Körperschallgebermasse m und der Federkonstante c der Körperschall-Isolierschicht nach Bild K-8, vermindert die Amplitude der Körperschallwelle, wenn die Resonanz- oder Abstimm-

Tabelle K-10. Körperschalldämmung.

Effekt	Maßnahme
Körperschallreflexion	Grenzflächen mit hohen Schallkennimpedanzunterschieden: <ul style="list-style-type: none"> – Luftschichten in mehrschaligen Trennbauteilen – schwere Sperrmassen, Bleischicht – Federelemente – Gummiplatten
geometrische Körperschalldämmung	Verminderung der Körperschalldichte: <ul style="list-style-type: none"> – Vergrößerung der Laufstrecke zwischen Körperschallquelle und Empfangsraum – Verkleinerung der körperschallabstrahlenden Fläche
Körperschall-Dissipation	Vernichtung der Körperschallenergie durch innere Reibung und Stoßstellen-Dämmung: <ul style="list-style-type: none"> – Entdröhnmaterialien wie Sand oder Hochpolymere – Nagelverbindungen, viskoelastische Unterlagen
Abstrahlgrad-Reduktion	Verminderung der Luftschallabstrahlung körperschallangeregter Flächen durch Flächenverminderung und Schallinterferenz-Auslöschung <ul style="list-style-type: none"> – kleinflächige Unterteilung, Lochung, Aussteifung – gegenphasige Anregung benachbarter Abstrahlflächen

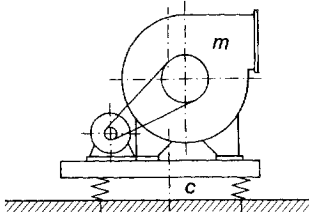


Bild K-8. Körperschalldämmende elastische Maschinenlagerung.

Kreisfrequenz $\omega_0 = \sqrt{c/m}$ weit unterhalb der erregenden Körperschall-Kreisfrequenz ω liegt. Der Körperschall-Isolierwirkungsgrad η ist ein Maß für die Verminderung der Kraftamplitude \hat{F}_L , die, in die Bodenplatte eingeleitet, den Körperschall verursacht, bezogen auf die Amplitude \hat{F}_E der erregenden Kraft des Schallgebers.

Für das in Bild K-9 gezeigte Einmassensystem mit dem viskoelastischen Dämpfungsgrad D ist der Isolierwirkungsgrad

$$\eta = 1 - \frac{\sqrt{1 + 4D^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4D^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (\text{K-54})$$

Bild K-10 zeigt die Resonanzkurven eines Einmassensystems für verschiedene Dämpfungsgrade. Eingezeichnet ist der *dämpfungsfreie Isolierwirkungsgrad*

$$\eta(D=0) = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 2}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1} \quad (\text{K-55})$$

ω Körperschall-Erregerkreisfrequenz,
 ω_0 Resonanz-Kreisfrequenz des Masse-Feder-Systems.

Demnach werden bei der *einfachelastischen* Lagerung von Körperschallerregern Isolierwirkungsgrade über 90% nur erreicht, wenn

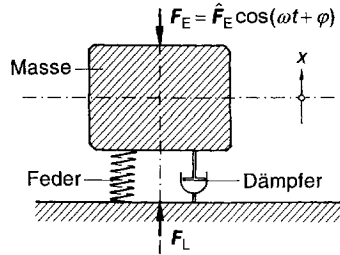


Bild K-9. Viskoelastisches Einmassensystem.

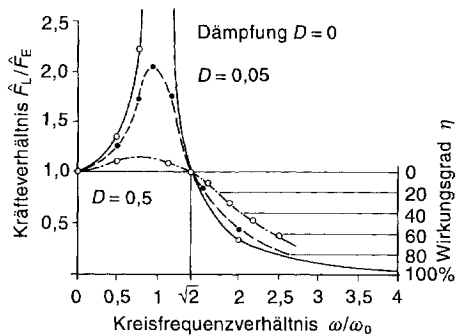


Bild K-10. Resonanzkurve eines Einmassensystems mit Verlauf des Isolierwirkungsgrades η (für $D = 0$).

die Resonanzfrequenz der Lagerung auf weniger als ein Viertel der Erregerfrequenz abgestimmt wird. Eine *doppellelastische* Maschinenaufstellung hat im Vergleich hierzu einen erheblich größeren Isolierungswirkungsgrad; sie ist technisch jedoch wesentlich aufwendiger.

K.7.4 Strömungsgeräusche

Strömungsgeräusche entstehen, wenn in Maschinen und Geräten Strömungsenergie in Schallenergie im Hörfrequenzbereich umgewandelt wird (Tabelle K-11).

Eine ausgeprägte Richtcharakteristik in Ausströmrichtung hat das *Freistrahlgeläusch*; es entsteht durch Wirbelablösung in der Mischzone zwischen dem hochbeschleunigten Freistrah und dem ruhenden Gas, in das der Freistrah einströmt (Bild K-11).

Tabelle K-11. Strömungsgeräuscharten.

Strömungsgeräusch	Frequenzspektrum	Ursache
Strömungsrauschen	breitbandig	Druckschwankungen im abströmseitigen Wirbelfeld eines umströmten Körpers (Zylinder, Ventil usw.) oder im Turbulenzbereich einer Rohrströmung
Freistrahlergeräusch	sehr breitbandig in Ausströmrichtung Richtcharakteristik	Wirbelbildung in der Reibungszone zwischen hochbeschleunigtem Freistrah von Düsenöffnungen und dem ruhenden Gas, in das der Freistrah ausströmt (Bild K-11)
Hiebtöne	schmalbandig	asymmetrische Wirbelablösung umströmter Körper, aufgeprägte Periodizität von Ventilatoren oder Propellern
Kavitationsgeräusch	breitbandig	Druckschwankungen durch die Implosion von Kavitations-Dampfblasen, entstanden an Strömungsengpässen, wo der dynamische Strömungsdruck niedriger als der Sättigungsdampfdruck der Flüssigkeit ist (Bild K-12)

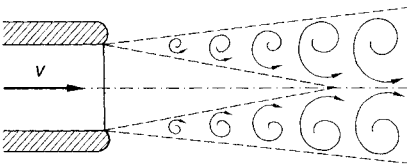


Bild K-11. Wechseldruckerzeugende Wirbel um den turbulenten Freistrah einer Düse.

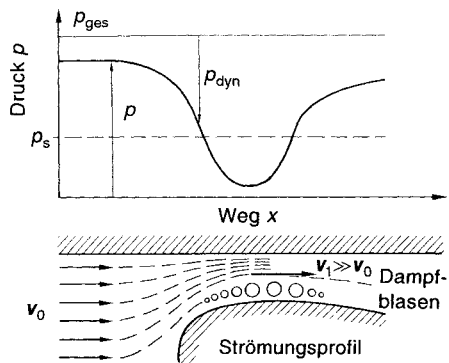


Bild K-12. Entstehung und Implosion von Kavitationsblasen. v Strömungsgeschwindigkeit.

Wird die Strömungsgeschwindigkeit an umströmten Profilen oder Strömungskanten sehr hoch, so daß der statische Druck in der strömenden Flüssigkeit niedriger als der Sättigungsdampfdruck der Flüssigkeit wird, dann tritt in der Strömung *Kavitation* auf

(Bild K-12). An Keimen entstehen Dampfblasen, die wieder schlagartig kondensieren, wenn der Druck nach der Strömungskante wieder ansteigt. Dabei entsteht das prasselnde, breitbandige *Kavitationsgeräusch*.

K.8 Ultraschall

Ultraschall ist Schall mit Schallfrequenzen oberhalb des Hörbereichs von etwa 20 kHz bis 10 GHz. Die Erzeugungsmethoden führt Tabelle K-12 auf, die Eigenschaften und Anwendungen die Tabelle K-13. Zum Nachweis von Ultraschall werden piezoelektrische Mikrofone verwendet. Ultraschall läßt sich

auch visuell mit phosphoreszierenden Leuchtschirmen nachweisen; die Ultraschallanregung bewirkt bei den mit Lichtenergie aufgeladenen Phosphoren eine beschleunigte Lichtaussendung, so daß die Stellen mit Ultraschalleinwirkung auf den Phosphor-Leuchtschirmen schneller dunkel erscheinen.

Tabelle K-12. Ultraschallerzeugung.

Ultraschallerzeugung	Frequenzbereich	physikalischer Effekt
mechanisch	bis 200 kHz	elastische Schwingungen, resonante Turbulenzwirbelabstrahlung an bewegten Löchern (Sirene), stehende Welle in Pfeifen
magneto-restriktiv	bis 50 kHz	resonante Längenänderung eines ferromagnetischen Stabs (Ni, Fe o. a.) im magnetischen Wechselfeld einer Hochfrequenzspule
elektro-restriktiv	bis 10 MHz	resonante Dickenschwingungen einer Quarzkristall- oder Bariumtitanat-Platte bei angelegter hochfrequenter Wechselfeldspannung (inverser piezoelektrischer Effekt)
Mikrowellen-Resonatorankopplung	bis 10 GHz	resonante Ankopplung eines heliumgeköhlten Quarzstabs an Mikrowellen-Koaxialresonatoren

Tabelle K-13. Ultraschalleigenschaften und -anwendungen.

Eigenschaften	Anwendungen
kurze Ultraschall-Wellenlänge in Luft ($\lambda < 1,5 \text{ cm}$); geradlinige, geometrische Schallausbreitung mit vernachlässigbarer Beugung	Bündelung von Ultraschall-Richtstrahlen zur Ortung von Hindernissen (Ultraschall-Echolot-Verfahren); Reflexionen an Grenzschichten mit Änderung der Schallkennimpedanz, wie bei Luftschichten in Festkörper-Rissen, Lunkern in Gußteilen oder Blechaufdopplungen (Ultraschall-Werkstoffprüfung) und wie beim Übergang Muskelgewebe zu Gewebeflüssigkeit (Ultraschall-Diagnostik); Ultraschall-Kommunikation unter Wasser (SONAR-Prinzip)
hohe Ultraschall-Intensität wegen $I \sim \omega^2$ bei hohen Ultraschall-Kreisfrequenzen ($\omega > 100 \text{ kHz}$)	Kavitation an Festkörper-Grenzflächen bewirken Materialabtrag (Ultraschall-Reinigung, Ultraschall-Bohren, Ultraschall-Schneiden); resonante Anregung von Zellen (Ultraschall-Massage), von Gasblasen (Entgasung von Schmelzen) und von Tröpfchen (Emulgieren von Öl in Wasser)

L Optik

Tabelle L-1. Frequenzen f und Wellenlängen λ elektromagnetischer Wellen.

f in Hz	λ in m	Wellenbereich	λ in m	IR- und UV-Wellenart
10^3	10^5	VLF	10^{-3}	
10^4	10^4	LF	8	
10^5	10^3	MF	6	
10^6	10^2	HF	4	
10^7	10^1	VHF	2	Fernes IR
10^8	10^0	UHF	10^{-4}	
10^9	10^{-1}	SHF	8	
10^{10}	10^{-2}	EHF	6	
10^{11}	10^{-3}	Mikro- wellen	4	
10^{12}	10^{-4}		2	
10^{13}	10^{-5}		10^{-5}	Mittleres IR
10^{14}	10^{-6}	Infrarot (IR)	8	
10^{15}	10^{-7}	sichtbares Licht (VIS)	6	
10^{16}	10^{-8}	Ultraviolett (UV)	4	
10^{17}	10^{-9}	Röntgenstrahlung	2	Nahes IR
10^{18}	10^{-10}		10^{-6}	
10^{19}	10^{-11}		8	
10^{20}	10^{-12}	γ -Strahlung	6	
			4	
			10^{-7}	
			8	
			6	
			4	
			2	
			VIS	Nahes UV
				Mittleres UV
				Fernes UV
				Vakuum-UV
				IR-B
				IR-A
				UV-A
				UV-B
				UV-C

In der Optik werden Phänomene untersucht, die mit der Ausbreitung des Lichts in Zusammenhang stehen. Licht ist eine transversale elektromagnetische Welle. Im gesamten Spektrum der elektromagnetischen Wellen ist das *sichtbare* Licht ein schmaler Bereich im Wellenlängenintervall von $\lambda = 380$ nm bis 780 nm, in dem das menschliche Auge empfindlich ist (Tabelle L-1).

L.1 Geometrische Optik

Sind die Dimensionen der Gegenstände groß gegen die Wellenlänge des Lichts, dann ist die Lichtausbreitung mit Hilfe von *Lichtstrahlen* beschreibbar. In der geometrischen Optik wurden Methoden entwickelt, mit denen der Lichtweg in optischen Systemen berechnet werden kann.

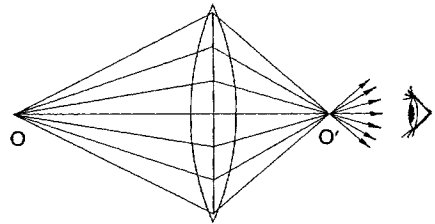
Übersicht L-1. DIN-Normen zur geometrischen Optik einschließlich optischer Instrumente.

DIN 1335	Technische Strahlenoptik in der Fotografie
DIN 1349	Durchgang optischer Strahlung durch Medien
DIN 58 925	Optisches Glas
DIN 58 926	Preßlinge für Optikeinzelteile
DIN 58 927	Optisches Glas; Technische Lieferbedingungen
DIN 58 140	Faseroptik
DIN VDE 0472	Prüfung an Kabeln und isolierten Leitungen
DIN VDE 0888	Lichtwellenleiter für Fernmelde- und Informationsverarbeitungsanlagen
DIN VED 0899	Verwendung von Lichtwellenleitern-Fasern, -Einzeladern, -Bündelfasern und -Kabeln für Fernmelde- und Informationsverarbeitungsanlagen
DIN 58 158	Optik-Prismen

Übersicht L-1 (Fortsetzung)

DIN 58 160	Norm-Optikteile
DIN 58 171	Norm-Optiksysteme
DIN 58 208	Begriffe und Zeichen für Brillengläser
DIN 58 282	Lupen
DIN 58 385	Fernrohre; Arten, Benennung
DIN 58 386	Fernrohre; Optische Kenngrößen
DIN 58 388	Fernrohre; Bestimmung der optischen Kenngrößen
DIN 58 886	Mikroskope; Vergrößerungen
DIN 58 887	Optische Anschlußmaße für Mikroskope
DIN 58 878	Farbkennzeichnung von Mikroskopobjektiven
DIN 58 881	Mikroskope; Okulare, Anschlußmaße
DIN 19 040	Begriffe der Fotografie
DIN 4521	Aufnahme- und Projektionsobjektive
DIN 4522	Aufnahmeobjektive
DIN 108	Diaprojektoren

a) reelle Abbildung



b) virtuelle Abbildung

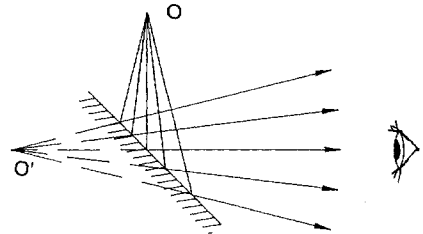


Bild L-1. Optische Abbildung.

L.1.1 Lichtstrahlen und Abbildung

Eine Lichtquelle sendet Strahlen aus, die sich in einem homogenen Medium geradlinig ausbreiten und senkrecht zu den Wellenflächen der elektromagnetischen Welle stehen. Lichtstrahlen, die sich durchkreuzen, beeinflussen sich gegenseitig nicht.

Wird ein von einem *Gegenstandspunkt* O ausgesandtes *homozentrisches* Strahlenbündel durch ein optisches System so verändert, daß sich alle Strahlen wieder in einem *Bildpunkt* O' schneiden, entsteht also wieder ein homozen- trisches Bündel, dann liegt eine *Abbildung* vor (Bild L-1).

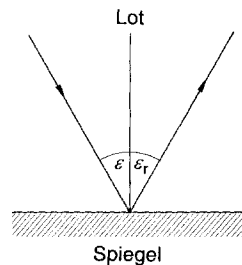


Bild L-2. Reflexion an ebener Fläche.

L.1.2 Reflexion des Lichts**L.1.2.1 Reflexion an ebenen Flächen**

Bei der Reflexion eines Lichtstrahls an einer spiegelnden Fläche (Bild L-2) gilt das *Reflexionsgesetz*:

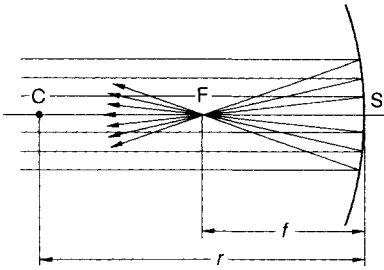
Einfallender Strahl, reflektierter Strahl und Einfallslot liegen in einer Ebene; der Einfallswinkel ε und der Reflexionswinkel ε_r sind gleich.

Abbildung

Nach Bild L-1b scheint für einen Beobachter jeder Lichtstrahl, der von O aus in den Spiegel fällt, von dem Bildpunkt O' herzukommen. Gegenstandspunkt O und Bildpunkt O' liegen völlig symmetrisch zum Spiegel auf einer Normalen zur Spiegelfläche.

Der ebene Spiegel erzeugt virtuelle Bilder; Gegenstand und Bild liegen symmetrisch zum Spiegel.

Übersicht L-2. Brennpunkt des Hohlspiegels.



Brennweite $f = r/2$

- C Mittelpunkt der Kugel,
F Brennpunkt,
S Scheitel,
 r Kugelradius.

L.1.2.2 Reflexion an gekrümmten Flächen

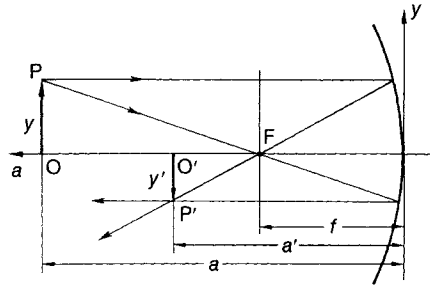
Hohlspiegel

Der Hohl- oder *Konkavspiegel* ist eine innen verspiegelte Kugelkalotte. Parallel zur *optischen Achse* CS einfallende Strahlen, die nahe bei der optischen Achse verlaufen (*paraxiale* Strahlen), treffen sich im *Brennpunkt* (Übersicht L-2). Bei einem *Parabolspiegel* gehen alle achsenparallele Strahlen durch den Brennpunkt, unabhängig vom Abstand, den sie von der Symmetrieachse haben.

Abbildung beim Hohlspiegel

Übersicht L-3 zeigt die Abbildung eines Gegenstandes OP durch einen Hohlspiegel. Die Lage des Bildpunktes P' wird durch den Schnittpunkt zweier ausgezeichnete Strahlen festgelegt.

Übersicht L-3. Abbildung durch einen Hohlspiegel.



Abbildungsgleichung für paraxiale Strahlen $\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}$

Abbildungsmaßstab $\beta' = \frac{y'}{y} = -\frac{a'}{a}$

- a Gegenstandsweite,
 a' Bildweite,
 f Brennweite.

Tabelle L-2 zeigt eine Zusammenstellung der Abbildungsverhältnisse beim Hohlspiegel für verschiedene Gegenstandsweiten a .

Wölbspiegel

Beim sphärischen Wöl- oder *Konvexspiegel* ist die Außenseite einer Kugelkalotte verspiegelt. Die Gleichungen in Übersicht L-3 gelten unverändert auch für den Wölbspiegel, lediglich die Brennweite ist negativ:

$$f = -r/2. \quad (L-1)$$

Tabelle L-2. Abbildungsverhältnisse beim Hohlspiegel.

Gegenstandsweite	Bildweite	Abbildungsmaßstab	Bildart
$a > 2f$	$f < a' < 2f$	$-\beta' < 1$	umgekehrt, reell
$a = 2f$	$a' = 2f$	$-\beta' = 1$	umgekehrt, reell
$2f > a > f$	$a' > 2f$	$-\beta' > 1$	umgekehrt, reell
$a = f$	$a' = \infty$	$\beta' = \infty$	kein Bild im Endlichen
$a < f$	$a' < 0$	$\beta' > 1$	aufrecht, virtuell

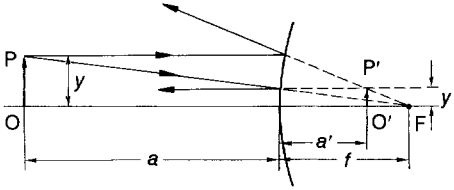


Bild L-3. Bildkonstruktion beim Wölbspiegel.

Bild L-3 zeigt die Bildkonstruktion beim Wölbspiegel. Das Bild ist immer virtuell, aufrecht und verkleinert.

L.1.3 Brechung des Lichts

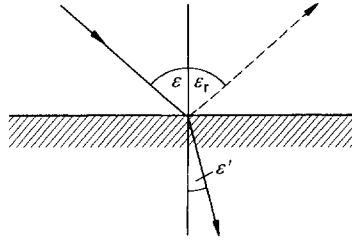
L.1.3.1 Brechungsgesetz

Fällt ein Lichtstrahl auf eine Grenzfläche zwischen zwei verschiedenen Stoffen, so wird ein Teil des Strahls reflektiert, der andere Teil durchquert die Grenzfläche mit geänderter Richtung – er wird *gebrochen* (Übersicht L-4, Tabelle L-3).

Totalreflexion

Ein Strahl, der in einem optisch dichten Medium läuft, wird an der Grenzfläche zu einem optisch dünneren Medium *total* reflektiert, falls der Einfallswinkel größer ist als der *Grenzwinkel der Totalreflexion* (Übersicht L-5).

Übersicht L-4. Lichtbrechung.



Snelliussches Brechungsgesetz $n \sin \varepsilon = n' \sin \varepsilon'$

Brechungsindex $n = c_{\text{Luft}}/c \approx c_0/c$

Abbe-Zahlen als Maß für die Dispersion $v_e = \frac{n_e - 1}{n_F - n_C}$

$$v_d = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C}$$

Gruppenindex $n_{gr} = c_0/c_{gr} = n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}$

c	Lichtgeschwindigkeit im Material,
c_{Luft}	Lichtgeschwindigkeit in Luft,
c_0	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum,
c_{gr}	Gruppengeschwindigkeit im Material,
λ	Wellenlänge

Wellenlängen einiger *Fraunhoferlinien*:

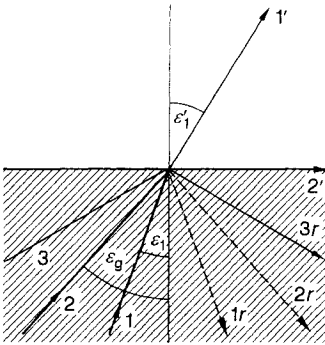
$\lambda_F = 486,1 \text{ nm}$, $\lambda_{F'} = 480,0 \text{ nm}$, $\lambda_e = 546,1 \text{ nm}$,
 $\lambda_d = 587,6 \text{ nm}$, $\lambda_D = 589,3 \text{ nm}$, $\lambda_C = 643,8 \text{ nm}$,
 $\lambda_C = 656,3 \text{ nm}$

Tabelle L-3. Brechzahlen n und Abbezahlen v einiger Stoffe.

Die Werte beziehen sich auf feuchte Normalluft von 20 °C und 1013 hPa.

Stoff	n_e	n_d	n_D	v_e	v_d
Festkörper					
Flußspat CaF_2	1,43496	1,433872	1,433830	94,7	95,4
Quarzglas SiO_2	1,4601	1,4585	1,4584	68,4	67,7
Plexiglas M222			1,491	52	52
Borkronglas BK 7	1,51872	1,51680	1,51673	64,2	64,0
Steinsalz NaCl	1,54740	1,54437	1,544258	42,5	43,2
Polystyrol			1,588	31	31
Flintglas F2	1,62408	1,62004	1,61989	36,1	36,4
Schwerflintglas SF 5,6	1,79180	1,78470	1,78444	25,9	26,1
Diamant C			2,4173		
Flüssigkeiten					
Wasser H_2O	1,334467	1,333041	1,332988	55,8	55,6
Ethylalkohol $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$	1,3635	1,3618	1,3617	56,8	55,8
Benzol C_6H_6	1,50545	1,50155	1,50140	30,1	30,1
Schwefelkohlenstoff CS_2	1,63560	1,62804	1,62774	18,3	18,4

Übersicht L-5. Totalreflexion.



Grenzwinkel der Totalreflexion $\sin \varepsilon_g = n'/n$

Grenzwinkel gegen Luft $\sin \varepsilon_g = 1/n$

n' Brechzahl des optisch dünneren Mediums,
 n Brechzahl des optisch dichteren Mediums.

L.1.3.2 Lichtwellenleiter

Ein Lichtwellenleiter besteht aus einem *Kern*, der von einem *Mantel* mit kleinerem Brechungsindex umgeben ist (Übersicht L-6). Die Führung des Lichts in einem Lichtwellenleiter beruht auf der Totalreflexion.

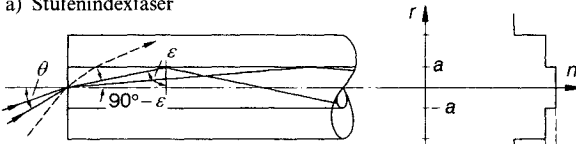
L.1.3.3 Brechung an Prismen

Ein Prisma ist ein meist dreikantiger Glaskörper (Übersicht L-7). Die zur brechenden Kante *K* senkrecht verlaufende Zeichenebene ist der *Hauptschnitt*.

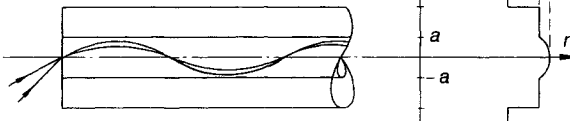
Prismen sind optische Bauelemente mit vielfältigen Anwendungen. Tabelle L-4 zeigt einige Prismenformen. Bei den *Umlenkprismen* bleibt der Ablenkungswinkel beim Pentagonalprisma und beim Bauernfeindschen Prisma konstant. Die *Umlenkprismen* dienen zur Bildumkehr in optischen Systemen. Beim einfachen rechtwinkligen Prisma und beim geradsichtigen Wendeprisma tritt lediglich eine Seitenumkehr ein (z. B. links mit rechts vertauscht). Für eine vollständige Bildumkehr muß auch noch oben und unten vertauscht werden. Beim Porroschen Prismensatz wird dies durch ein zweites Prisma erreicht, dessen Hauptschnitt um 90° gegenüber dem ersten

Übersicht L-6. Lichtwellenleiter.

a) Stufenindexfaser



b) Gradientenfaser



Numerische Apertur

$$A_N = \sin \theta_{\max} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

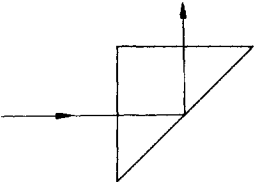
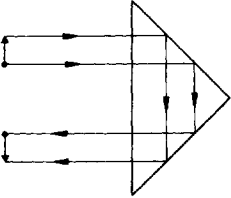
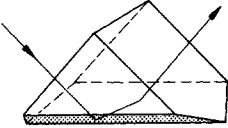
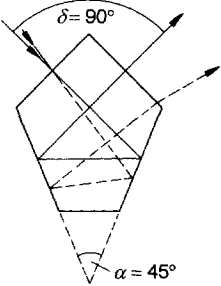
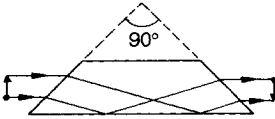
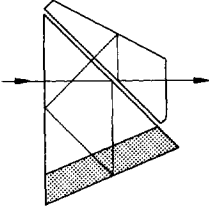
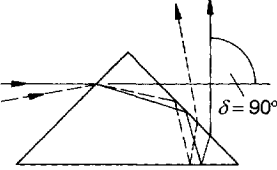
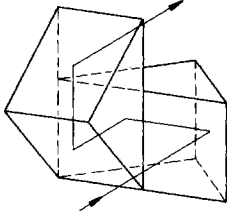
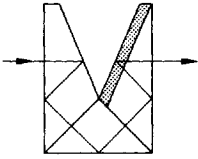
Bedingung für das Auftreten nur einer Mode

$$\frac{a}{\lambda} \leq \frac{2,405}{2\pi A_N}$$

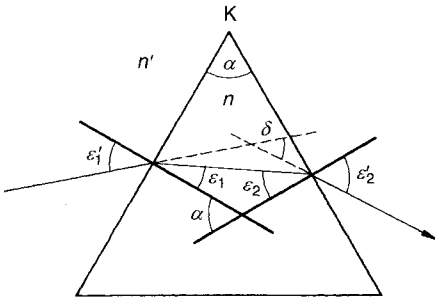
a Kernradius,
 n_1 Brechzahl des Kerns,
 n_2 Brechzahl des Mantels,

λ Wellenlänge,
 θ_{\max} Akzeptanzwinkel.

Tabelle L-4. Prismen und Prismensysteme.

Umlenkprismen	Umkehrprismen	
<p>rechtwinkliges Umlenkprisma</p> 	<p>rechtwinkliges Umkehrprisma</p> 	<p>Dachkantprisma</p> 
<p>Pentagonalprisma für konstante Ablenkung</p> 	<p>geradsichtiges Wendeprisma (Amici)</p> 	<p>Schmidt-Pechan-Prisma</p> 
<p>Bauernfeindsches Prisma für konstante Ablenkung</p> 	<p>Porro-Prismen</p> 	<p>Uppendahl-Prisma</p> 

Übersicht L-7. Strahlenverlauf im Hauptschnitt eines Prismas.



Ablenkungswinkel

$$\delta = \varepsilon_1' - \alpha + \arcsin \left[\sin \alpha \sqrt{\left(\frac{n}{n'}\right)^2 - \sin^2 \varepsilon_1} - \cos \alpha \sin \varepsilon_1' \right]$$

minimaler Ablenkungswinkel bei symmetrischem Durchgang

$$\delta_{\min} = 2 \arcsin \left(\frac{n}{n'} \sin \frac{\alpha}{2} \right) - \alpha$$

Näherung für kleine brechende Winkel

$$\delta_{\min} \approx \alpha \left(\frac{n}{n'} - 1 \right)$$

- n Brechzahl des Prismas,
- n' Brechzahl des umgebenden Mediums (meist Luft, $n' = 1$),
- α brechender Winkel,
- ε_1' Einfallswinkel.

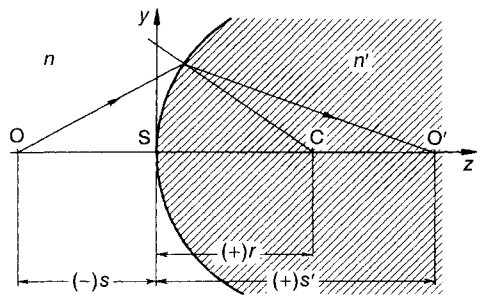
gedreht ist. Diese Art der Bildumkehr wird bei Prismenfeldstechern eingesetzt. Eine vollständige Bildumkehr wird auch beim Dachkantprisma erreicht, dessen Hypothenusenfläche Dachform besitzt. Vollständige Bildumkehr ohne Strahlversatz bieten die Prismensysteme nach Schmidt-Pechan sowie Uppendahl. Beide benutzen je ein Dachkantprisma. Verschiedene Prismenformen und -bezeichnungen sind in DIN 58 158 genormt.

L.1.3.4 Brechung an Kugelflächen

Vorzeichenkonvention

Zwei Medien mit den Brechzahlen n und n' sind nach Übersicht L-8 durch eine Kugel-

Übersicht L-8. Lichtbrechung an einer Kugelfläche.



Schnittweitengleichung (Abbesche Invariante)

$$n \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right) = n' \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'} \right)$$

- n Brechzahl im Gegenstandsraum,
- n' Brechzahl im Bildraum.

fläche voneinander getrennt. Im folgenden werden für alle Strecken und Winkel Vorzeichen verwendet, wie sie in der technischen Optik gebräuchlich und durch DIN 1335 festgelegt sind. Die Achse durch den Kugelmittelpunkt C ist die optische Achse und zugleich die z-Achse des Koordinatensystems. Die positive z-Richtung wird durch die Laufrichtung des Lichts bestimmt und geht im allgemeinen von links nach rechts. Die y-Achse steht senkrecht auf der z-Achse und weist von unten nach oben. Der Durchstoßpunkt der optischen Achse durch die Kugelfläche ist der Scheitel S. Der Radius der Kugel ist positiv, wenn der Mittelpunkt C rechts vom Scheitel liegt und negativ, falls C links von S liegt. Sämtliche Strecken, die vom Bezugspunkt S aus nach links gemessen werden, erhalten ein negatives Vorzeichen. Strecken, die nach rechts gemessen werden sind positiv.


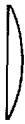
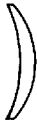


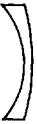
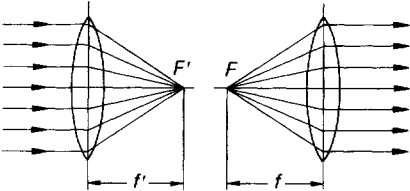
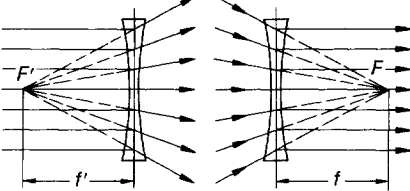
L.1.4 Abbildung durch Linsen

In den meisten optischen Geräten werden Linsen mit kugelförmigen Flächen verwendet.

L.1.4.1 Dünne Linsen

Tabelle L-5 zeigt verschiedene Linsenformen. *Konvexlinsen* (Sammellinsen) sind in der Mitte

Tabelle L-5. Linsenformen.

Linsenform						
Bezeichnung	bi-konvex	plan-konvex	konkav-konvex	bi-konkav	plan-konkav	konvex-konkav
Radien	$r_1 > 0$ $r_2 < 0$	$r_1 = \infty$ $r_2 < 0$	$r_1 < r_2 < 0$	$r_1 < 0$ $r_2 > 0$	$r_1 = \infty$ $r_2 > 0$	$r_2 < r_1 < 0$
Brennweite	$f' > 0$	$f' > 0$	$f' > 0$	$f' < 0$	$f' < 0$	$f' < 0$
Sammellinsen			Zerstreuungslinsen			
						

Übersicht L-9. Linsen- und Abbildungsbeziehungen für dünne Linsen.

bildseitige Brennweite	$\frac{1}{f'} = D' = (n_L - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$
gegenstandseitige Brennweite	$f = -f'$
Abbildungs-gleichung	$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'}$
Abbildungs-maßstab	$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a}$
Newtonsche Abbildungs-gleichung	$z' z = -f'^2$

D'	Brechkraft, $[D'] = 1 \text{ m}^{-1} = 1 \text{ dpt (Dioptrie)}$,
n_L	Brechzahl der Linse,
r_1	Krümmungsradius der linken Fläche,
r_2	Krümmungsradius der rechten Fläche,
a	Gegenstandsweite,
a'	Bildweite,
y	Gegenstandsgröße,
y'	Bildgröße,
z	Abstand Gegenstand – gegenseitiger Brennpunkt,
z'	Abstand Bild – bildseitiger Brennpunkt (Bild L-4).

dicker als am Rand, bei *Konkavlinsen* (Zerstreuungslinsen) ist es umgekehrt. Alle achsen-nahen Strahlen eines parallel zur optischen Achse einfallenden Bündels treffen sich im *bildseitigen Brennpunkt* F' . Die relevanten Gleichungen für dünne Linsen, die beiderseits von Luft umgeben sind, sind in Übersicht L-9 zusammengestellt.

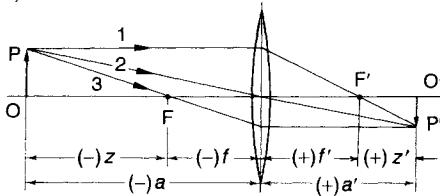
Bildkonstruktion

Bild L-4 erläutert die zeichnerische Konstruktion einer Abbildung mit einer dünnen Linse anhand von drei ausgezeichneten Strahlen: Der achsenparallele Strahl 1 geht hinter der Linse durch den bildseitigen Brennpunkt F' . Der Mittelpunktstrahl 2 wird nicht gebrochen. Der Strahl 3 durch den gegenstandseitigen Brennpunkt F verläßt die Linse achsenparallel. Der Schnittpunkt der drei Strahlen definiert den Bildpunkt. Bei einer Zerstreuungslinse ist das Bild immer aufrecht, verkleinert und virtuell.

L.1.4.2 Dicke Linsen

Der Strahlengang ausgewählter Strahlen durch eine dicke Linse ist in Bild L-5 dargestellt. Die

a) Sammellinse



b) Zerstreuungslinse

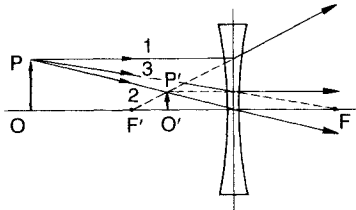


Bild L-4. Bildkonstruktion bei dünnen Linsen.

Übersicht L-10. Linsengleichungen für dicke Linsen.

Brennweite und Brechkraft

$$\frac{1}{f'} = D' = (n_L - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{(n_L - 1)^2}{n_L} \frac{d'}{r_1 r_2}$$

Abstände der Brennpunkte von den Scheiteln

$$s'_{F'} = f' \left(1 - \frac{n_L - 1}{n_L} \frac{d'}{r_1} \right)$$

$$s_F = -f' \left(1 + \frac{n_L - 1}{n_L} \frac{d'}{r_2} \right)$$

Abstände der Hauptebenen von den Scheiteln

$$s'_{H'} = -f' \frac{n_L - 1}{n_L} \frac{d'}{r_1}$$

$$s_H = -f' \frac{n_L - 1}{n_L} \frac{d'}{r_2}$$

D' Brechkraft,

d' Linsendicke,

n_L Brechzahl der Linse,

r_1 Krümmungsradius der linken Fläche,

r_2 Krümmungsradius der rechten Fläche.

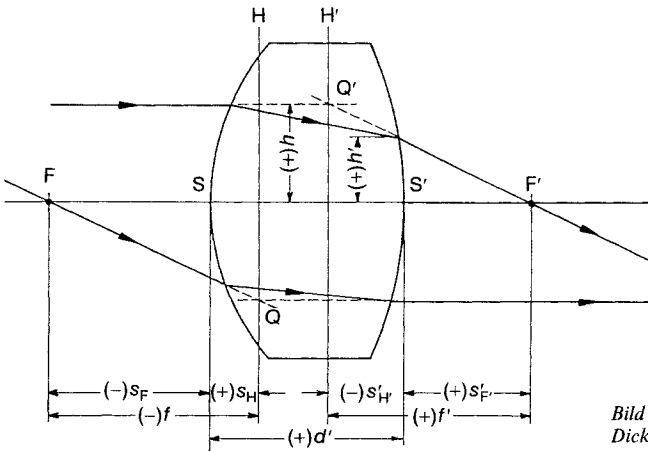


Bild L-5.

Dicke Sammellinse mit Hauptebenen.

ausgezogenen Strahlen innerhalb der Linse können durch die gestrichelten ersetzt werden. So wird beispielsweise der von links kommende Strahl bis zum Schnittpunkt Q' mit der Hauptebene H' durchgezogen und geht von dort durch den Brennpunkt F' . Die charakteristischen Größen sind in Übersicht L-10 zusammengestellt.

Bild L-6 zeigt die Konstruktion der Abbildung eines Gegenstandes durch eine Sammellinse. Werden die Gegenstandsweite a und die Bildweite a' als Abstand vor der jeweils zugeordneten Hauptebene definiert, dann behalten die Abbildungsgleichung und die Gleichung für den Abbildungsmaßstab aus Übersicht L-9 ihre Gültigkeit.

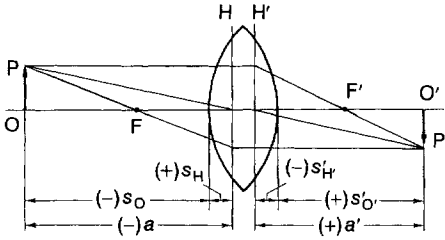


Bild L-6. Bildkonstruktion bei einer dicken Sammellinse.

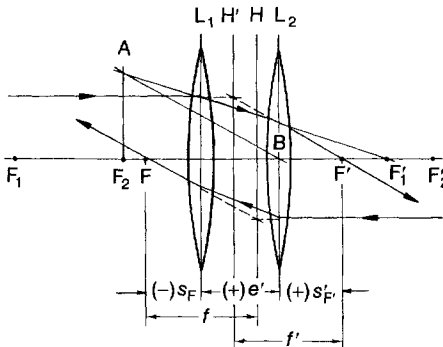


Bild L-7. Lage der Hauptebenen bei einem System von Sammellinsen.

L.1.4.3 Linsensysteme

Systeme aus mehreren Linsen können wie eine dicke Einzellinse beschrieben werden, wenn die Lage der Hauptebenen sowie die Brennweite des Systems bekannt ist (Bild L-7, Übersicht L-11).

L.1.5 Blenden

In jedem optischen System gibt es Blenden, die den Querschnitt der das System durchlaufenden Strahlen begrenzen (Bild L-8). Die als *Eintrittspupille* EP bezeichnete Blende definiert den objektseitigen *Aperturwinkel* σ . Das Bild der Eintrittspupille ist die *Austrittspupille* AP. Lage und Größe der Austrittspupille bestimmt den bildseitigen Aperturwinkel σ' . Durch die Größe der Pupillen und der Aperturwinkel wird die Helligkeit der Abbildung bestimmt.

Übersicht L-11. Linsensysteme.

Abstände der Brennpunkte von den Scheiteln

$$\frac{1}{s_F} = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_1' - e'}$$

$$\frac{1}{s_F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2' - e'}$$

Brennweite

$$f' = -f = \frac{f_1' f_2'}{f_1' + f_2' - e'}$$

Brechkraft

$$D' = D_1' + D_2' - e' D_1' D_2'$$

Brechkraft bei geringem Abstand

$$D' = D_1' + D_2'$$

e' Abstand der Linsen,
 f_1', f_2' Brennweite von Linse L_1 bzw. L_2 .

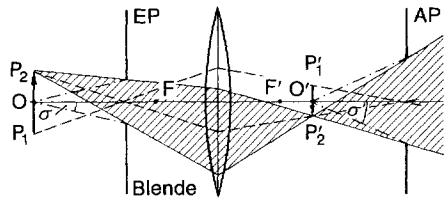


Bild L-8. Strahlbegrenzung durch eine Blende.

L.1.6 Abbildungsfehler

Sind bei einer optischen Abbildung nicht nur paraxiale Strahlen beteiligt, dann treten *Abbildungsfehler* auf, die nur mit großem Aufwand korrigiert werden können (Tabelle L-6).

L.1.7 Optische Instrumente

L.1.7.1 Das menschliche Auge

Bei einem *normalsichtigen Auge* wird ein paralleles Strahlenbündel, das von einem unendlich weit entfernten Gegenstandspunkt kommt, auf einen Punkt der lichtempfindlichen Netzhaut fokussiert. Die Fähigkeit des Auges, durch Veränderung der Krümmung der Augenlinse verschieden weit entfernte Gegenstände auf der Netzhaut scharf abzubilden, wird als *Akkommodation* bezeichnet. Der nächstgelegene Punkt, den man eben

Tabelle L-6. Abbildungsfehler.

Bezeichnung	Ursache und Auswirkung	Beseitigung
sphärische Aberration (Öffnungsfehler)	Ein Objektpunkt auf der optischen Achse wird, falls nur achsennahe Strahlen an der Abbildung beteiligt sind, weiter von einer Sammellinse entfernt abgebildet als bei der ausschließlichen Verwendung achsenferner Strahlen. Daher wird ein Punkt durch weit geöffnete Strahlenbündel nicht als Punkt, sondern als Zerstreuungsscheibchen abgebildet.	Kombinationen mehrerer Linsen verschiedener Brennweite (z. B. Sammellinse und Zerstreuungslinse); Variation der Linsenform. Ein korrigiertes System wird als Aplanat bezeichnet.
Astigmatismus und Bildfeldwölbung	Ausgedehnte ebene Objekte werden nicht in einer Ebene, sondern auf zwei gekrümmten Bildschalen, die sich auf der optischen Achse berühren, abgebildet. Deshalb entsteht bei der Abbildung eines Punktes, der außerhalb der optischen Achse liegt, auch bei der Verwendung schlanker Strahlenbündel kein Bildpunkt, sondern zwei zueinander senkrecht verlaufende Bildstriche auf den beiden Bildschalen in verschiedenen Abständen von der Linse.	Kombination mehrerer Linsen aus geeigneten Gläsern; Veränderung der Blendenlage. Ein korrigiertes System ist ein Anastigmat.
Koma	Strahlenbündel großer Öffnung bilden einen Punkt, der außerhalb der optischen Achse liegt, nicht als Punkt, sondern als ovale Figur mit kometenhaftem Schweif ab.	Abblenden; Fehler ist stark abhängig von der Blendenlage.
Verzeichnung	Bei falscher Blendenlage sind Bild und Objekt nicht geometrisch ähnlich. Liegt die Blende zu weit im Gegenstandsraum, wird ein Quadrat tonnenförmig verzeichnet, liegt sie zu weit im Bildraum, resultiert eine kissenförmige Verzeichnung.	Blende bzw. Pupille sollte in der Linsenebene liegen. Verwirkt im orthoskopischen Objektiv.
chromatische Aberration	Farbfehler, der aufgrund der Dispersion des Linsenmaterials entsteht, wenn zur Abbildung kein monochromatisches Licht verwendet wird. Das Bild wird unscharf und erhält farbige Ränder.	Kombination von Sammellinse aus Kronglas und Zerstreuungslinse aus Flintglas; korrigiertes Objektiv ist ein Achromat.

noch scharf sehen kann, ist der *Nahpunkt*. Er liegt bei Jugendlichen bei etwa 10 cm und nimmt mit dem Alter zu. Der *Fernpunkt* liegt beim normalsichtigen Auge im Unendlichen. Als *Bezugsweite* oder *deutliche Sehweite* gilt der Abstand $a_B = -25$ cm, bei dem der normalsichtige Mensch Gegenstände ohne Anstrengung betrachten kann.

Sehfehler

Bei einem *kurzsichtigen* Auge vereinigen sich die Strahlen schon vor der Netzhaut. Der

Kurzsichtige kann deshalb unendlich weit entfernte Gegenstände nicht scharf sehen; sein Fernpunkt liegt im Endlichen. Zur Korrektur wird eine Brille mit Zerstreuungslinse verwandt. Beim *übersichtigen* (*weitsichtigen*) Auge liegt der Brennpunkt hinter der Netzhaut. Zur Korrektur tragen Übersichtige eine Brille mit Sammellinsen.

L.1.7.2 Vergrößerungsinstrumente

Vergrößerung

Von einem ausgedehnten Gegenstand entsteht auf der Netzhaut des Auges ein umgekehrtes reelles Bild (Bild L-9). Die Größe des Netzhautbildes ist abhängig vom *Sehwinkel* σ , unter dem das Objekt erscheint. Die Aufgabe der optischen Instrumente Lupe, Mikroskop und Fernrohr ist es, diesen Sehwinkel und damit das Netzhautbild zu vergrößern. Als Vergrößerung Γ' eines optischen Instruments wird definiert:

$$\Gamma' = \frac{\tan \sigma'}{\tan \sigma} \approx \frac{\sigma'}{\sigma}; \quad (\text{L-2})$$

σ' Sehwinkel mit Instrument,
 σ Sehwinkel ohne Instrument.

Tabelle L-7 zeigt eine Zusammenstellung der optischen Instrumente, mit denen eine Vergrößerung erzielt wird.

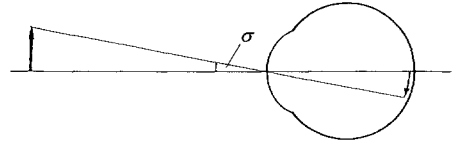


Bild L-9. Definition des Sehwinkels σ .

Lupe

Für die *Normalvergrößerung* der Lupe wird festgelegt, daß der Gegenstand in der Brennebene der Lupe steht und das Auge auf Unendlich entspannt ist. Wird der Abstand zwischen Linse und Objekt verkleinert, entsteht ein vergrößertes virtuelles Bild, das mit dem akkomodierten Auge betrachtet werden kann. Für die *Lupenvergrößerung bei Akkomodation* wird angenommen, daß sich das Auge direkt hinter der Linse befindet und daß das virtuelle Bild in der Bezugssehweite a_B entsteht.

Tabelle L-7. Vergrößerungsinstrumente.

Strahlengang	Vergrößerung
<p>a) Lupe</p>	<p>Normalvergrößerung</p> $\Gamma'_L = -\frac{a_B}{f'}$ <p>Vergrößerung bei Akkomodation:</p> $\Gamma'_{L,A} = \Gamma'_L + 1$
<p>b) Mikroskop</p>	$\Gamma'_M = \beta'_{Ob} \Gamma'_{Ok}$ $\Gamma'_M = \frac{t}{f'_{Ob}} \cdot \frac{a_B}{f'_{Ok}}$

Tabelle L-7 (Fortsetzung)

Strahlengang	Vergrößerung
<p>c) Fernrohr</p>	$\Gamma'_F = -\frac{f'_{Ob}}{f'_{Ok}}$

Mikroskop

Beim Mikroskop entwirft das *Objektiv* Ob vom Gegenstand G ein vergrößertes reelles *Zwischenbild* ZB, das mit Hilfe des *Okulars* betrachtet wird. Die Mikroskopvergrößerung läßt sich als Produkt des Abbildungsmaßstabs β'_{Ob} des Objektivs und der Lupenvergrößerung Γ'_{Ok} des Okulars darstellen. Sie ist abhängig von der *optischen Tubuslänge* t (meist 160 mm). Normwerte für Objektiv- und Okularvergrößerungen sind in DIN 58 886 festgelegt.

Das Objektiv ist die Eintrittspupille EP des Systems. An der Stelle der Austrittspupille AP sollte sich die Pupille des beobachtenden Auges befinden.

Fernrohr

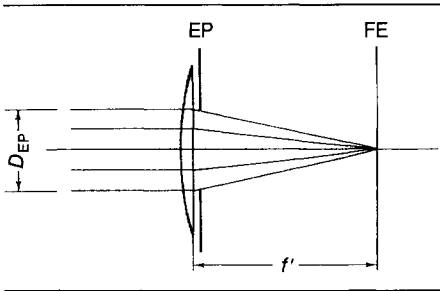
Beim Fernrohr werden zwei Grundtypen unterschieden: Das *Keplersche* oder *astro-*

nomische Fernrohr und das *Galileische* oder *holländische* Fernrohr. Das Verhältnis des Neigungswinkel σ' und σ paralleler Strahlenbündel ergibt die Vergrößerung des Fernrohrs. Sie ist beim holländischen Fernrohr positiv, beim astronomischen negativ. Im *terrestrischen* Fernrohr wird das kopfstehende Bild umgedreht. Dies geschieht beispielsweise dadurch, daß das reelle Zwischenbild mit Hilfe einer Umkehrlinse umgedreht wird. Beim *Prismenfeldstecher* wird zur Bildumkehr der Porrosche Prismensatz (Tabelle L-4) eingesetzt.

L.1.7.3 Fotoapparat

Beim Fotoapparat entwirft das Objektiv ein Bild eines Gegenstandes auf einem lichtempfindlichen Film (Übersicht L-12). Der Lichtstrom wird mit einer Irisblende geregelt, die

Übersicht L-12. Fotoapparat.



Blendenzahl	$k = \frac{f'}{D_{EP}}$
Schärfentiefe vordere und hintere Gegenstands- weite	$a_v = \frac{a f'^2}{f'^2 - u' k (a + f')}$ $a_h = \frac{a f'^2}{f'^2 + u' k (a + f')}$
zulässige Unschärfe	$u' = \frac{\text{Formatdiagonale}}{1000}$

Auszug aus der Hauptreihe der Blendenzahlen (DIN 4522):

1 1,4 2,8 4 5,6 8 11 16 22

a nominelle Gegenstandsweite,
 f' Brennweite des Objektivs,
 D_{EP} Durchmesser der Eintrittspupille.

als Eintrittspupille EP wirkt. Ein Maß für den einfallenden Lichtstrom ist nach DIN 4521 die *relative Öffnung* D_{EP}/f' (Kehrwert der *Blendenzahl* k).

L.2 Fotometrie

Übersicht L-13. DIN-Normen zur Fotometrie.

DIN 5031	Strahlungsphysik im optischen Bereich und Lichttechnik
DIN 5032	Lichtmessung
DIN 5039	Licht, Lampen, Leuchten
DIN 5035	Innenraumbelichtung mit künstlichem Licht
DIN 5033	Farbmessung
DIN 6164	DIN-Farbenkarte

Radiometrische oder *strahlungsphysikalische* Größen beschreiben die Eigenschaften eines Strahlungssenders bzw. -empfängers. Sie werden mit objektiven Meßgeräten bestimmt; ihre Formelbuchstaben erhalten nach DIN 5031 den Index „e“ (energetisch).

Wird der Eindruck einer Strahlung auf das menschliche Auge mit seiner charakteristischen wellenlängenabhängigen Empfindlichkeit beschrieben, dann spricht man von *fotometrischen* oder *lichttechnischen* Größen. Die Formelbuchstaben dieser Größen erhalten den Index „v“ (visuell).

L.2.1 Strahlungsphysikalische Größen

Die in DIN 5031 definierten radiometrischen Größen sind in Tabelle L-8 zusammengestellt. Einige der angegebenen Beziehungen gelten nur für den Fall, daß der Abstand zwischen Sender und Empfänger größer ist als die *fotometrische Grenzentfernung*. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, müssen die Beziehungen differentiell formuliert und dann über Sender- und Empfängerfläche integriert werden.

Nach DIN 5032 gilt für einen kreisförmigen Lambert-Strahler und für einen kosinusgetreu bewertenden Empfänger als fotometrische Grenzentfernung ein Abstand, der 10mal so groß ist wie die größte Ausdehnung von Sender bzw. Empfänger, wenn der Fehler kleiner als 0,25 % sein soll.

Übersicht L-14 enthält die wichtigsten Beziehungen zwischen strahlungsphysikalischen Größen.

Spektrale Größen

Die Abhängigkeit der strahlungsphysikalischen Größen von der Wellenlänge wird durch *spektrale Größen* beschrieben. Für jede in Tabelle L-8 angegebene Größe X_e ist eine spektrale Größe $X_{e,\lambda}$ definiert:

$$X_{e,\lambda} = dX_e/d\lambda. \quad (L-3)$$

Beispiel: $L_{e,\lambda} = dL_e/d\lambda$ ist die spektrale Strahldichte mit der Maßeinheit $W/(m^2 \cdot sr \cdot nm)$.

Spektrale Größen werden experimentell mit Hilfe eines *Spektrometers* bestimmt. Aus dem gemessenen Verlauf der spektralen Größe

Tabelle L-8. Definitionen der strahlungsphysikalischen Größen.

Größe	Symbol	Einheit	Beziehung	Erklärung
Strahlungsenergie bzw. -menge	Q_e	W · s	$Q_e = \int \Phi_e dt$	durch elektromagnetische Strahlung übertragene Energie
Strahlungsleistung bzw. -fluß	Φ_e	W	$\Phi_e = dQ_e/dt$	mit der Strahlung übertragene Leistung

senderseitige Größen

Spezifische Ausstrahlung	M_e	W/m ²	$M_e = \Phi_e/A_1$	auf die Senderfläche bezogene Strahlungsleistung des Senders
Strahlstärke	I_e	W/sr	$I_e = \Phi_e/\Omega$	Quotient aus dem in einer bestimmten Richtung vom Sender ausgehenden Strahlungsfluß und dem durchstrahlten Raumwinkel
Strahldichte	L_e	W/(m ² · sr)	$L_e = \frac{I_e}{A_1 \cos \varepsilon_1}$	Quotient aus Strahlstärke und Projektion der Senderfläche auf eine Ebene senkrecht zur betrachteten Richtung

empfängerseitige Größen

Bestrahlungsstärke	E_e	W/m ²	$E_e = \Phi_e/A_2$	auf einen Empfänger fallende Strahlungsleistung bezogen auf die Empfängerfläche
Bestrahlung	H_e	W · s/m ²	$H_e = \int E_e dt$	Quotient aus auftreffender Strahlungsenergie und Empfängerfläche

Übersicht L-14. Beziehungen zwischen strahlungsphysikalischen Größen.

Fotometrisches Grundgesetz	$\Phi_e = L_e \frac{A_1 \cos \varepsilon_1 A_2 \cos \varepsilon_2}{r^2} \Omega_0$
Fotometrisches Entfernungsgesetz	$E_e = \frac{I_e(\varepsilon_1)}{r^2} \cos \varepsilon_2 \Omega_0$
Strahlstärke beim Lambert-Strahler	$I_e(\varepsilon_1) = I_e(0) \cos \varepsilon_1$
Definition des Raumwinkels (Bild L-10)	$\Omega = \frac{A}{r^2} \Omega_0$

- A_1 Senderfläche,
- A_2 Empfängerfläche,
- E_e Bestrahlungsstärke auf der Empfängerfläche,
- I_e Strahlstärke,
- L_e Strahldichte des Senders,
- r Abstand zwischen Sender und Empfänger,
- ε_1 Winkel zwischen Strahlrichtung und Sendernormale,

Übersicht L-14 (Fortsetzung)

- ε_2 Winkel zwischen Strahlrichtung und Empfängerormale,
- Φ_e Strahlungsleistung, die vom Sender auf den Empfänger trifft (Bild L-11),
- $\Omega_0 = 1$ sr (Steradian).

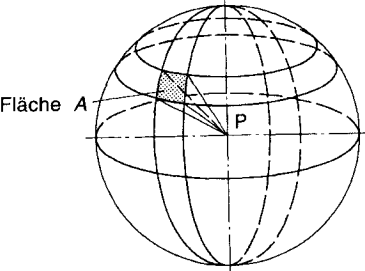


Bild L-10. Zur Definition des Raumwinkels.

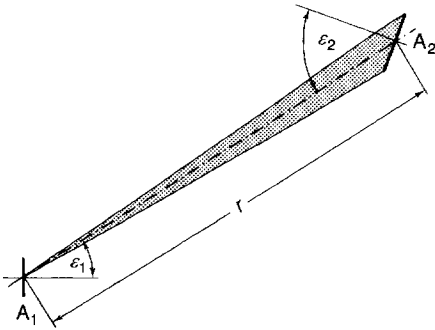


Bild L-11. Strahlenkegel, der vom Sender auf den Empfänger fällt.

$X_{e,\lambda}(\lambda)$ kann die zugeordnete Größe X_e durch Integration über den Wellenlängenbereich, in dem die Strahlung auftritt, berechnet werden:

$$X_e = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} X_{e,\lambda}(\lambda) d\lambda. \quad (\text{L-4})$$

Temperaturstrahler

Jeder Körper sendet elektromagnetische Strahlung aus, deren Intensität und Farbe von der Temperatur des Körpers abhängt. Der spektrale Verlauf der Strahlung ist für den schwar-

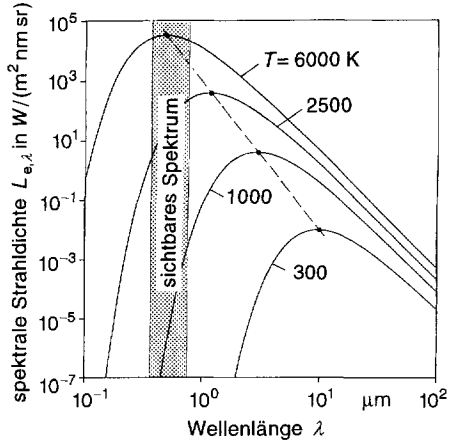


Bild L-12. Spektrale Strahlendichte eines schwarzen Strahlers.

zen Strahler berechenbar (Übersicht L-15, Bild L-12). Der schwarze Strahler besitzt kein Reflexionsvermögen und wird technisch durch den *Hohlraumstrahler* realisiert.

L.2.2 Lichttechnische Größen

Das menschliche Auge ist nicht für alle Lichtwellenlängen gleich empfindlich. Der *Hell-*

Übersicht L-15. Eigenschaften des schwarzen Strahlers.

spektrale Strahlendichte (PLANCK)	$L_{e,\lambda}(\lambda, T) = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{c_2/(\lambda T)} - 1} \frac{1}{\Omega_0}$
Verschiebungsgesetz (WIEN)	$\lambda_{\max} T = \text{konstant} = 2998 \mu\text{m} \cdot \text{K}$
spezifische Ausstrahlung (STEFAN-BOLTZMANN)	$M_e(T) = \sigma T^4$

c	Vakuumlichtgeschwindigkeit,
h	Plancksches Wirkungsquantum,
k	Boltzmann-Konstante,
T	absolute Temperatur,
λ	Wellenlänge,
λ_{\max}	Wellenlänge maximaler spektraler Strahlendichte,
Ω_0	1 sr,
$c_1 = 2 h c^2$	$= 1,191 \cdot 10^{-16} \text{ W} \cdot \text{m}^2$,
$c_2 = h c/k$	$= 1,439 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{m}$,
$\sigma = \frac{2 \pi^5 k^4}{15 h^3 c^2}$	$= 5,670 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$.

Tabelle L-9. Spektraler Hellempfindlichkeitsgrad $V(\lambda)$ für Tagessehen.

Wellenlänge λ nm	$V(\lambda)$	Wellenlänge λ nm	$V(\lambda)$
380	$3,900 \cdot 10^{-5}$	580	0,870 000
390	$1,200 \cdot 10^{-4}$	590	0,757 000
400	$3,960 \cdot 10^{-4}$	600	0,631 000
410	$1,210 \cdot 10^{-3}$	610	0,503 000
420	$4,000 \cdot 10^{-3}$	620	0,381 000
430	$1,160 \cdot 10^{-2}$	630	0,265 000
440	$2,300 \cdot 10^{-2}$	640	0,175 000
450	$3,800 \cdot 10^{-2}$	650	0,107 000
460	$6,000 \cdot 10^{-2}$	660	$6,100 \cdot 10^{-2}$
470	$9,098 \cdot 10^{-2}$	670	$3,200 \cdot 10^{-2}$
480	0,139 020	680	$1,700 \cdot 10^{-2}$
490	0,208 020	690	$8,210 \cdot 10^{-3}$
500	0,323 000	700	$4,102 \cdot 10^{-3}$
510	0,503 000	710	$2,091 \cdot 10^{-3}$
520	0,710 000	720	$1,047 \cdot 10^{-3}$
530	0,862 000	730	$5,200 \cdot 10^{-4}$
540	0,954 000	740	$2,492 \cdot 10^{-4}$
550	0,994 950	750	$1,200 \cdot 10^{-4}$
555	1,000 000	760	$6,000 \cdot 10^{-5}$
560	0,995 000	770	$3,000 \cdot 10^{-5}$
570	0,952 000	780	$1,499 \cdot 10^{-5}$

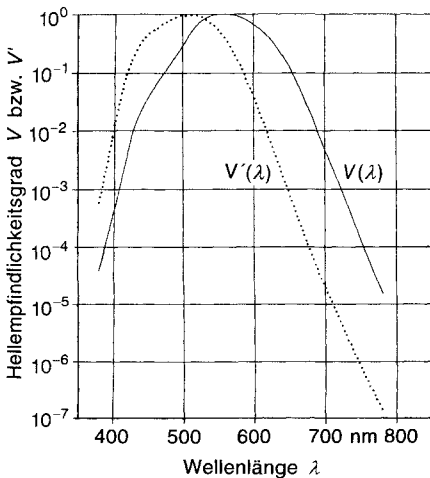


Bild L-13. Hellempfindlichkeitsgrad des Standardbeobachters.
 $V(\lambda)$ Tagessehen (2° -Gesichtsfeld);
 $V'(\lambda)$ Nachtsehen (10° -Gesichtsfeld).

empfindlichkeitsgrad $V(\lambda)$ eines Standardbeobachters wurde von der Commission International d'Eclairage (CIE) aufgenommen und ist in DIN 5031 in Schritten von 1 nm tabelliert (Tabelle L-9, Bild L-13).

Der Lichtstrom Φ_v ist ein Maß für die Helligkeitsempfindung. Für monochromatisches Licht gilt bei Tagessehen:

$$\Phi_v = K_m \Phi_e V(\lambda).$$

(L-5)

Die Konstante K_m wird als Maximalwert des fotometrischen Strahlungsäquivalents bezeichnet. Sie ist eng verknüpft mit der SI-Basiseinheit für die Lichtstärke, der Candela, und beträgt $K_m = 683 \text{ lm/W}$ (Lumen/Watt). Bei Nachtsehen gilt $K'_m = 1699 \text{ lm/W}$.

Ist die Strahlung nicht monochromatisch, sondern spektral breitbandig, dann muß für die Berechnung des Lichtstromes über das sichtbare Spektrum integriert werden:

$$\Phi_v = K_m \int_{380 \text{ nm}}^{780 \text{ nm}} \Phi_{e, \lambda}(\lambda) V(\lambda) d\lambda.$$

(L-6)

Tabelle L-10. Lichttechnische Größen.

Benennung	Zeichen	Maßeinheit
Lichtmenge	Q_v	$\text{lm} \cdot \text{s}$
Lichtstrom	Φ_v	lm
spezifische Lichtausstrahlung	M_v	lm/m^2
Lichtstärke	I_v	$\text{cd} = \text{lm}/\text{sr}$
Leuchtdichte	L_v	cd/m^2
Beleuchtungsstärke	E_v	$\text{lx} = \text{lm}/\text{m}^2$
Belichtung	H_v	$\text{lx} \cdot \text{s}$

Nach dem Muster der Berechnung des Lichtstroms Φ_v aus dem Strahlungsfluß Φ_e kann für jede andere radiometrische Größe X_e , die in Tabelle L-8 definiert ist, die zugeordnete fotometrische Größe berechnet werden (Tabelle L-10).

L.3 Wellenoptik

L.3.1 Interferenz und Beugung

Bei der Überlagerung von Wellen gleicher Wellenlänge kommt es zur Auslöschung (destruktive Interferenz), falls der Gangunterschied Δ der Wellen ein ungeradzahliges Viel-

faches der halben Wellenlänge λ beträgt (Abschnitt J.2.6):

$$\Delta = (2m + 1) \lambda / 2; \quad m = 0, 1, 2 \dots$$

Es kommt zur Verstärkung (konstruktive Interferenz) für

$$\Delta = m \lambda.$$

L.3.1.1 Kohärenz

Interferenz ist nur beobachtbar, wenn die Lichtwellen *kohärent* sind. Dazu muß eine feste Phasenbeziehung zwischen den überlagerten Wellen vorliegen. Der größte Gangunterschied zweier Wellen, bei denen Interferenz beobachtet wird, ist die *Kohärenzlänge* l (mittlere Länge der einzelnen Wellenzüge). Nach FOURIER gilt (Tabelle L-11):

$$l \approx c \tau \approx c / \Delta f; \quad (\text{L-7})$$

c Lichtgeschwindigkeit,

τ Lebensdauer angeregter atomarer Zustände,

Δf spektrale Breite der Strahlung.

Wird Strahlung einer ausgedehnten Lichtquelle für Interferenzversuche verwendet, so muß die *Kohärenzbedingung* erfüllt sein:

$$2b \sin \sigma \ll \lambda; \quad (\text{L-8})$$

b Größe der Strahlungsquelle,

σ halber Öffnungswinkel der Strahlung,

λ Wellenlänge.

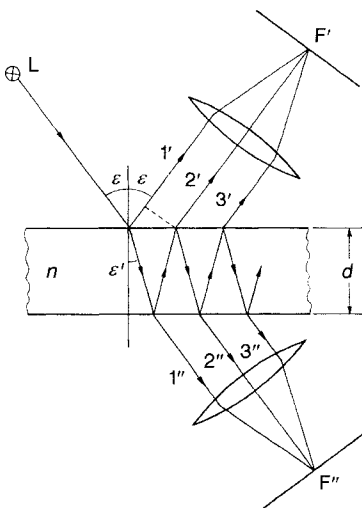
Übersicht L-16. DIN-Normen zur Wellenoptik.

DIN 58 195	Dünne Schichten für die Optik; Begriffe
DIN 58 196	Dünne Schichten für die Optik; Prüfung
DIN 58 197	Mindestanforderungen für reflexionsmindernde Schichten und Spiegelschichten
DIN 58 190	Optische Strahlungsfilter; Einteilung, Begriffe
DIN 58 191	Optische Strahlungsfilter; Neutralfilter, Kantenfilter, Bandpaßfilter
DIN 3140	Maß- und Toleranzangaben für Optikeinzelteile
DIN 58 960	Fotometer für analytische Untersuchungen
DIN 5030	Spektrale Strahlungsmessung
DIN 58 215	Laserschutzfilter und Laserschutzbrillen

Tabelle L-11. Kohärenzeigenschaften verschiedener Lichtquellen.

Lichtquelle	Frequenzbandbreite Δf	Kohärenzlänge l
weißes Licht	$\approx 200 \text{ THz}$	$\approx 1,5 \mu\text{m}$
Spektrallampe, Raumtemperatur	$1,5 \text{ GHz}$	20 cm
Kr-Spektrallampe, auf $T = 77 \text{ K}$ gekühlt	375 MHz	80 cm
Halbleiterlaser GaAlAs	2 MHz	150 m
HeNe-Laser, frequenzstabilisiert	150 kHz	2 km

Übersicht L-17. Interferenzen an planparalleler Platte.



Bedingung für

Helligkeit in F' , $2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \varepsilon} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda$;
 Dunkelheit in F'' $m = 0, 1, 2, \dots$

Dunkelheit in F'' , $2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \varepsilon} = (m + 1) \lambda$;
 Helligkeit in F' $m = 0, 1, 2, \dots$

d Plattendicke,
 n Brechungsindex der Platte,
 ε Einfallswinkel,
 λ Lichtwellenlänge.

L.3.1.2 Interferenzen an dünnen Schichten

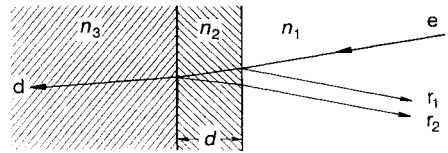
Interferenzen gleicher Neigung

Durch Vielfachreflexionen von Lichtwellen an planparallelen Platten kommt es zu Interferenzerscheinungen (Übersicht L-17).

Farben dünner Blättchen

Dünne Schichten, wie Seifenhäute, Ölfilme, Aufdampfschichten und Oxidschichten, zeigen *Interferenzfarben*. Diese entstehen bei Beleuchtung mit Weißlicht, wenn bestimmte Wellenlängen und damit Farben ausgelöscht werden.

Übersicht L-18. Reflexionsvermindernde Schicht.



Bedingung für
 Reflexminderung

$$d = \frac{\lambda}{4n_2} (2m - 1);$$

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

Spiegelung

$$d = \frac{\lambda}{2n_2} m$$

d Dicke der Vergütungsschicht,
 $n_1 < n_2 < n_3$ Brechungsindizes,
 λ Wellenlänge.

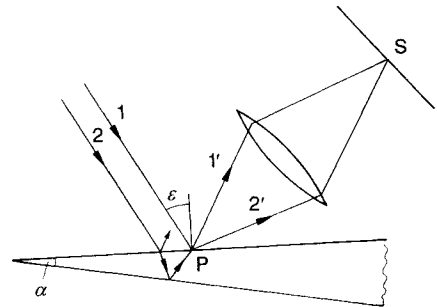


Bild L-14. Interferenzen an einem Keil.

Reflexmindernde Schichten
 und dielektrische Spiegel

Dielektrische Schichten können optische Bauteile entspiegeln oder zu Spiegeln machen (Übersicht L-18).

Interferenzen gleicher Dicke

Fällt Licht nach Bild L-14 auf einen Keil, dann entstehen helle und dunkle Interferenzstreifen (*Fizeau-Streifen*) für verschiedene Dicken. Alle Orte mit gleicher Dicke d liegen auf einem Streifen, der hier parallel zur Keilkante liegt. Entsteht der Keil (Luftkeil) bei-

spielsweise dadurch, daß eine kugelförmige Glasplatte auf einer ebenen Platte aufliegt, dann sind die Interferenzlinien gleicher Dicke Kreise, die als *Newtonsche Ringe* bezeichnet werden.

Oberflächenprüfung

Wird ein Optikeil auf eine exakt ebene Platte gelegt, dann entstehen Fizeau-Streifen, sobald die Oberfläche des Optikeils von der ebenen Form abweicht. Unregelmäßigkeiten im System der Fizeau-Streifen lassen auf Oberflächenfehler (*Paßfehler*) schließen. Da der Abstand zweier Streifen einer Höhendifferenz des Luftkeils von $\lambda/2$ entspricht, können Oberflächenfehler (Rauhigkeiten) im Bereich von Bruchteilen der Lichtwellenlänge vermessen werden. In DIN 3140, Teil 5, sind verschiedene Interferenzmuster, die bei der Oberflächenprüfung auftreten, zusammengestellt.

L.3.1.3 Interferometer

Mit Interferometern können Längen, Winkel, Brechzahlen oder Wellenlängen sehr präzise gemessen werden. Der Grundtyp ist das *Michelson-Interferometer* (Bild L-15). Hier wird das Licht der Lichtquelle L durch den Strahlteiler T in zwei Teilstrahlen zerlegt und nach der Reflexion an den Spiegeln S_1 und S_2 wieder überlagert (Strahlen 1' und 2'). S_2 ist das virtuelle Bild des Spiegels S_1 . Mit dem Fernrohr F beobachtet man Interferenzen gleicher Neigung (Haidingersche Ringe) an der „Platte“ S_1S_2 mit der Dicke d . Wird ein

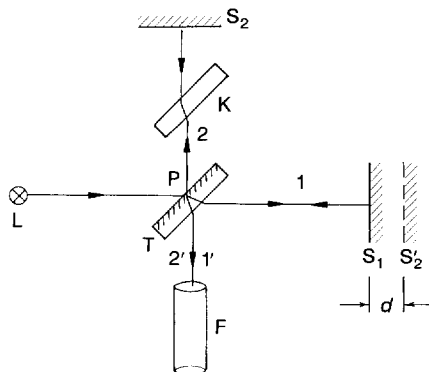


Bild L-15. Michelson-Interferometer.

Spiegel leicht gekippt, entstehen Fizeau-Streifen am Keil. Bei der Verschiebung eines Spiegels um $\lambda/2$ wandert jeweils ein neuer Interferenzstreifen durch das Bild, so daß man Längensverschiebungen auf Bruchteile der Lichtwellenlänge genau messen kann.

Im *Interferenzmikroskop* wird die Oberfläche eines Prüflings mit Fizeau-Streifen überlagert, aus deren Form Unebenheiten im Bereich von Bruchteilen der Lichtwellenlänge bestimmt werden können.

L.3.1.4 Beugung am Spalt

Fällt eine ebene Welle auf einen engen Spalt, dann entstehen auf einer weit entfernten Wand (*Fraunhofersche* Betrachtungsweise) helle und dunkle Streifen, die parallel zum Spalt verlaufen (Übersicht L-19).

Bei der Beugung an einer *Lochblende* entsteht eine rotationssymmetrische Figur. Das helle zentrale *Airysche Beugungsscheibchen* ist von dunklen und hellen Ringen umgeben. Die dunklen Ringe treten auf unter den Winkeln

$$\sin \alpha_m = k_m \frac{\lambda}{d}; \quad (\text{L-9})$$

d Durchmesser der Lochblende,
 $k_1 = 1,22; k_2 = 2,232; k_3 = 3,238$ usw.

Vom gesamten Lichtstrom, der durch die Lochblende geht, trifft 83,8% in das Airy-Scheibchen.

L.3.1.5 Auflösungsvermögen optischer Instrumente

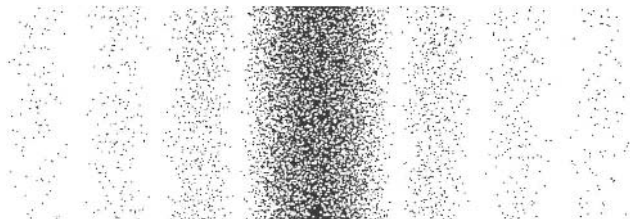
Durch Beugungserscheinungen an Blenden und Linsenfassungen wird das Auflösungsvermögen optischer Instrumente begrenzt. Mit einem Fernrohr werden zwei strahlende Punkte dann getrennt, wenn die beiden Punkte unter dem Winkel δ erscheinen, für den gilt (*Rayleigh-Kriterium*):

$$\delta \geq 1,22 \lambda/d; \quad (\text{L-10})$$

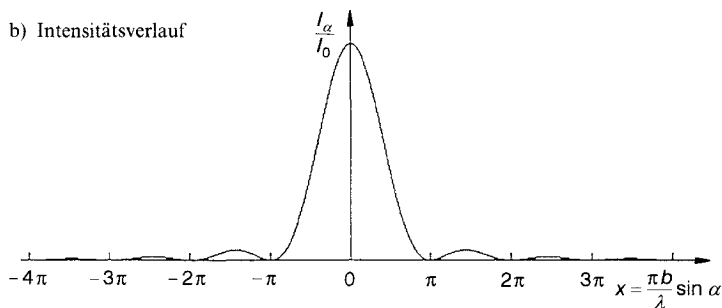
λ Lichtwellenlänge,
 d Objektivdurchmesser.

Übersicht L-19. Beugung am Spalt.

a) Beugungsbild



b) Intensitätsverlauf



Intensität in Richtung α

$$I_{\alpha} = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha\right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha\right)^2}$$

Winkel der Nullstellen

$$\sin \alpha_m = \pm m \frac{\lambda}{b}; \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

b Spaltbreite,

I_0 Intensität in Vorwärtsrichtung ($\alpha = 0$),

m Ordnungszahl,

λ Wellenlänge.

Beim Mikroskop werden zwei Objektpunkte getrennt, falls für ihren Abstand y gilt:

$$y \geq 0,61 \lambda / A_N; \quad (\text{L-11})$$

$A_N = n \sin \sigma$ numerische Apertur des Objektivs,

σ halber Öffnungswinkel.

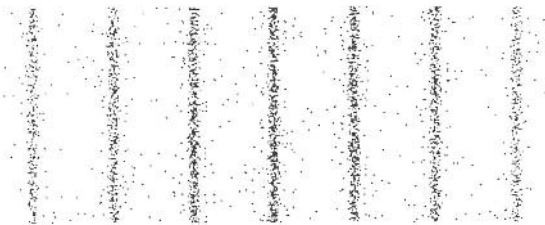
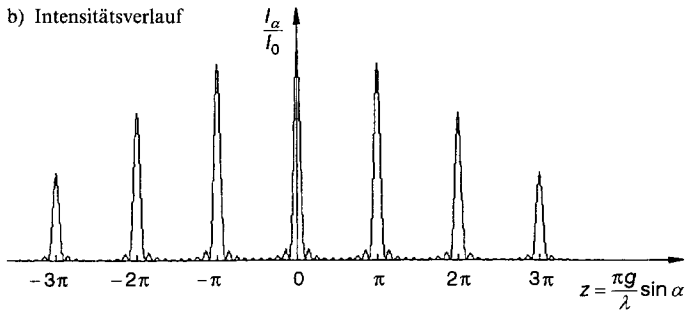
Bei nicht selbstleuchtenden durchstrahlten Objekten ist nach einer Theorie von ABBE $y \geq \lambda / A_N$.

Durch die modernen Rastermikroskope (z. B. Rastertunnelmikroskop) lassen sich die oben angegebenen Grenzen des Auflösungsvermögens überwinden.

L.3.1.6 Beugung am Gitter

Wird ein Gitter mit parallelem Licht beleuchtet, so beobachtet man in großem Abstand helle und dunkle Streifen, die parallel zu den Spalten verlaufen (Übersicht L-20). Die Inten-

Übersicht L-20. Beugung am Gitter (Beugungsbild für $g/b = 6$, $p = 10$).

a) Beugungsbild**b) Intensitätsverlauf**Intensität in Richtung α

$$\frac{I_\alpha}{I_0} = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha\right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha\right)^2} \cdot \frac{\sin^2\left(p \frac{\pi g}{\lambda} \sin \alpha\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi g}{\lambda} \sin \alpha\right)} \quad \text{(Produkt aus Spaltbeugungsfunktion und Interferenzfunktion des Gitters)}$$

Winkel für Intensitätsmaxima

$$\sin \alpha_m = \pm m \frac{\lambda}{g}; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

-
- b Spaltbreite,
 - g Gitterkonstante,
 - I_0 Intensität in Vorwärtsrichtung ($\alpha = 0$),
 - p Zahl der interferierenden Spalte,
 - λ Lichtwellenlänge.
-

sitätsmaxima sind um so schärfer, je größer die Zahl der interferierenden Lichtwellen (Spalte) ist.

L.3.1.7 Spektralapparate

Zur Bestimmung von Spektren wurden verschiedene Spektralapparate entwickelt (Tabelle L-12). Als dispersives Element ent-

weder ein Gitter oder ein Prisma (Übersicht L-21).

L.3.1.8 Röntgenbeugung an Kristallgittern

An den regelmäßig angeordneten dreidimensionalen Kristallgittern werden Röntgenstrahlen gebeugt. Nach Bild L-16 kommt es zu konstruktiver Interferenz an den Netzebenen eines

Tabelle L-12. Spektralapparate.

Benennung	Anwendung
Spektroskop	Beobachtung eines Spektrums mit dem Auge. Häufig als Tascheninstrument in der analytischen Chemie eingesetzt.
Spektrograph	Komplettes Spektrum wird auf Fotoplatte registriert. Vergleich mit Eichspektrum bekannter Spektrallinien liefert die Wellenlänge. Schwärzung ist Maß für die Lichtintensität.
Spektrometer	Wellenlängenbestimmung einzelner Spektrallinien anhand einer geeichten Wellenlängenskala über Winkelmessung.
Monochromator	Ausblenden eines schmalbandigen Wellenlängenbereichs aus einem angebotenen Spektrum.
Spektral-fotometer	Kombination von Monochromator und fotoelektrischem Empfänger (Fotomultiplier) zur Bestimmung spektraler Stoffdaten, z. B. Absorptionsgrad und Transmissionsgrad.

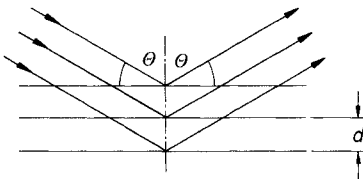


Bild L-16. Reflexion von Röntgenstrahlen an einer Netzebenenschar.

Kristalls (Abschnitt V) wenn die *Braggsche Bedingung* erfüllt ist:

$$2d \sin \theta = m \lambda; \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{L-12})$$

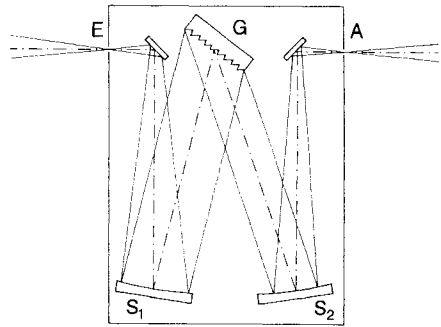
d Netzebenenabstand,

θ Glanzwinkel,

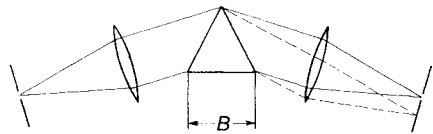
λ Wellenlänge der Röntgenstrahlung.

Übersicht L-21. Spektrometer.

a) Gitterspektrometer



b) Prismenspektrometer



Auflösungsvermögen
eines Gitters

$$\frac{\lambda}{d\lambda} = mp$$

nutzbarer

Wellenlängenbereich

$$\Delta\lambda = \lambda/m$$

Auflösungsvermögen
eines Prismas

$$\frac{\lambda}{d\lambda} = B \frac{dn}{d\lambda}$$

B

durchstrahlte Basisbreite des Gitters,

m

Beugungsordnung,

p

Strichzahl des Gitters,

$d\lambda$

kleinstes trennbares Wellenlängenintervall,

$dn/d\lambda$

Dispersion des Prismenglases,

λ

Wellenlänge.

L.3.1.9 Holografie

Zur Aufnahme eines *Hologramms* wird das Licht eines Lasers in einem Strahlteiler in zwei Teilstrahlen zerlegt (Bild L-17), von denen einer das Objekt O beleuchtet. Die vom Objekt reflektierten Wellen interferieren mit dem zweiten Teilstrahl des Lasers (Referenzstrahl) und bilden auf der Fotoplatte F ein Interferenzmuster, das alle Informationen über die

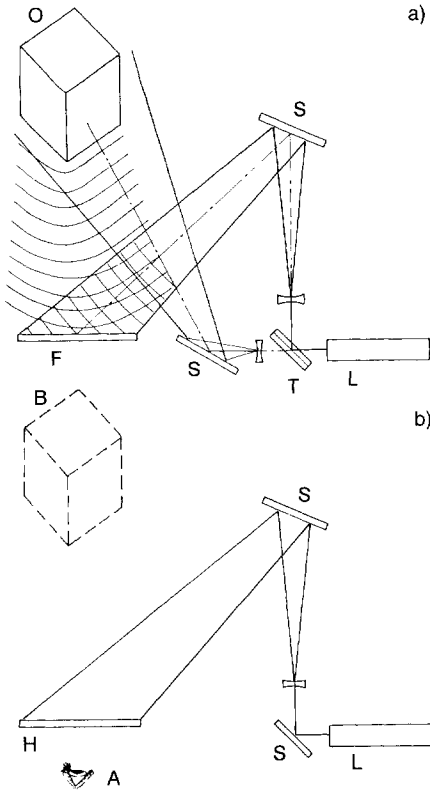


Bild L-17. Holographie-Apparatur für a) Aufnahme, b) Wiedergabe.

A: Auge, B: Bild, F: Fotoplatte, H: Hologramm, L: Laser, O: Objekt, S: Spiegel, T: Strahlteiler

Form des Objekts enthält. Zur Wiedergabe wird das Hologramm nur noch mit der Referenzwelle beleuchtet. Für das Auge A entsteht ein dreidimensionales Bild B an der Stelle, wo vorher das Objekt stand.

Tabelle L-13 gibt einen Überblick über die wichtigsten technischen Anwendungen der Holografie.

L.3.2 Polarisation des Lichts

L.3.2.1 Polarisationsformen

Bei Lichtwellen schwingen der elektrische und der magnetische Feldvektor transversal zur Ausbreitungsrichtung ($E \perp H$). Bei *natürlichem* Licht nehmen die Feldvektoren in einer Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung regellos jede Richtung ein. Wird eine bestimmte Schwingungsrichtung bevorzugt, so ist das Licht *polarisiert*. Tabelle L-14 zeigt die möglichen Fälle.

Linear polarisiertes Licht wird mit Hilfe eines *Polarisators* (Analysator), der nur eine bestimmte Schwingungsrichtung durchläßt, als solches erkannt. Ist die Analysatorrichtung um den Winkel φ gegen die Schwingungsrichtung des Lichts verdreht, dann ist die Intensität I des durchgelassenen Lichts durch das Gesetz von *Malus* gegeben:

$$I = I_0 \cos^2 \varphi; \quad (\text{L-13})$$

I_0 Intensität des auftreffenden Lichts.

Tabelle L-13. Technische Anwendungen der Holografie.

Speicherung von Informationen	holografische Korrelation	Interferenzholografie	Herstellung optischer Bauteile
Archivierung von – dreidimensionalen Bildern, z. B. Werkstücke, Modelle, Kunstwerke, – zweidimensionalen Bildern, wie Ätzmasken für Halbleiterfertigung, digitale optische Datenspeicher	Vergleich eines Werkstückes mit einem holografisch fixierten Muster, automatische Formerkennung, Erkennung von Formfehlern an Werkstücken und Werkzeugen	Zerstörungsfreie Werkstoffprüfung, Vermessen von Bewegungen und Verformungen aufgrund mechanischer oder thermischer Belastung, Schwingungsanalyse	Ersatz von lichtbrechenden optischen Bauteilen, wie Linsen, Spiegel, Prismen, Strahlteiler, durch Hologramme. Holografische Herstellung von Beugungsgittern

Tabelle L-14. *Polarisationsformen des Lichts.*

Polarisationsart	Merkmale
linear polarisiertes Licht	<i>E</i> -Vektor und Ausbreitungsrichtung spannen eine raumfeste Ebene auf (die <i>Schwingungsebene</i>)
zirkular (elliptisch) polarisiertes Licht	Der <i>E</i> -Vektor läuft auf einer Schraubenlinie um die Ausbreitungsachse. In einer Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung läuft der <i>E</i> -Vektor auf einem Kreis (Ellipse).
rechts (links) zirkular bzw. elliptisch	Bei Blickrichtung gegen die Strahlrichtung erfolgt der Umlauf im Uhrzeigersinn (Gegenuhrzeigersinn).

L.3.2.2 Erzeugung von polarisiertem Licht

Reflexion und Brechung

Nach der Reflexion an einer Glasoberfläche schwingt der *E*-Vektor der Lichtwelle vorwiegend senkrecht zur Einfallsebene. Vollständige Polarisation wird erreicht, wenn der reflektierte Strahl senkrecht auf dem gebrochenen steht. Der zugehörige Einfallswinkel α_p wird als *Polarisationswinkel* oder *Brewster-Winkel* bezeichnet:

$$\alpha_p = \arctan n; \quad (\text{L-14})$$

n Brechzahl des Glases.

Doppelbrechung

Natürliches Licht wird in einem doppelbrechenden Kristall in zwei senkrecht zueinander polarisierte Teilstrahlen zerlegt, die sich mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten ausbreiten (ordentlicher n_o und außerordentlicher n_e Brechungsindex). Im allgemeinen haben ordentlicher und außerordentlicher Strahl in einem Kalkspat nicht die gleiche Richtung (*Doppelbrechung*). Wird einer der beiden Strahlen beseitigt, bleibt der andere, und damit linear polarisiertes Licht, übrig.

Dichroismus

Dichroitische Substanzen absorbieren den ordentlichen und den außerordentlichen

Strahl, d.h. die zwei zueinander senkrecht stehenden Schwingungsrichtungen, verschieden stark. Bei genügender Dicke ist das durchgehende Licht praktisch vollständig linear polarisiert. Moderne *Polarisationsfolien* werden aus Kunststoffen gefertigt, die mit dichroitischen Farbstoffen eingefärbt sind und deren Makromoleküle durch mechanisches Recken parallel ausgerichtet sind.

$\lambda/4$ -Platten

Wird ein doppelbrechender Kristall so geschliffen, daß ordentlicher und außerordentlicher Strahl parallel verlaufen, dann besteht nach Durchlaufen des Kristalls zwischen den beiden senkrecht zueinander polarisierten Teilstrahlen der Gangunterschied $\Delta = d(n_o - n_e)$. Falls die Amplituden der elektrischen Feldvektoren gleich sind und der Gangunterschied ein ungeradzahliges Vielfaches von $\lambda/4$ beträgt, entsteht hinter dem Kristall zirkular polarisiertes Licht. Ein $\lambda/4$ -Plättchen hat also die Dicke

$$d = \frac{\lambda}{4(n_o - n_e)} (2k + 1); \quad k = 0, 1, 2 \dots; \quad (\text{L-15})$$

λ Lichtwellenlänge,
 n_o, n_e ordentlicher bzw. außerordentlicher Brechungsindex.

Ist der Gangunterschied $\Delta = \lambda/2$, so entsteht wieder linear polarisiertes Licht, dessen Schwingungsebene aber gegenüber der Ausgangsrichtung um 90° gedreht ist. Bei beliebigem Gangunterschied entsteht elliptisch polarisiertes Licht.

L.3.2.3 Technische Anwendungen der Doppelbrechung

Spannungsdoppelbrechung

Optisch isotrope Gläser und Kunststoffe werden unter mechanischer Spannung doppelbrechend. Bei Betrachtung solcher Bauteile zwischen gekreuzten Polarisationen wird das an sich schwarze Gesichtsfeld durch das entstehende elliptisch polarisierte Licht aufgehell. Punkte gleicher Hauptspannung liegen auf schwarzen Linien, den *Isoklinen*. Bei Verwendung von weißem Licht entstehen farbige

Tabelle L-15. Elektrooptische Effekte.

	Kerr-Effekt (J. KERR, 1875)	Pockels-Effekt (F. C. POCKELS, 1893)
Erklärung	optisch isotropes Material wird im transversalen elektrischen Feld doppelbrechend.	piezoelektrische Kristalle ohne Symmetriezentrum werden im elektrischen Feld doppelbrechend.
Feldabhängigkeit	$ n_o - n_e \sim E^2$	$ n_o - n_e \sim E$
Gangunterschied nach Durchlaufen der Länge l	$\Delta = \lambda l K E^2$; K Kerr-Konstante, z. B. $K = 2,48 \cdot 10^{-12} \text{ mV}^{-2}$ für Nitrobenzol bei $\lambda = 589 \text{ nm}$.	$\Delta = l n_0^3 r_{63} E$ für longitudinale Zelle; r_{63} elektrooptische Konstante, z. B. $r_{63} = 24 \cdot 10^{-12} \text{ mV}^{-1}$, $n_0 = 1,5$ für KD*P
Geometrie	elektrisches Feld senkrecht zur Ausbreitungsrichtung des Lichtes	Feld meist in longitudinaler Richtung, auch transversal möglich
Materialien	Nitrobenzol, Nitrotoluol, Schwefelkohlenstoff, Benzol; in Festkörpern um eine Zehnerpotenz, in Gasen um drei Zehnerpotenzen kleinerer Effekt	ADP (Ammoniumdihydrogenphosphat), KDP (Kaliumdihydrogenphosphat), KD*P (deuteriertes KDP), Lithiumniobat
typische Feldstärke für Gangunterschied $\Delta = \lambda/2$	$E \approx 10^6 \text{ V/m}$	Halbwellenspannung bei longitudinaler Zelle mit KD*P, $U \approx 4 \text{ kV}$
Modulationsfrequenz	modulierbar bis etwa 200 MHz	modulierbar über 1 GHz

Isochromaten, die alle Orte gleicher Hauptspannungsdifferenz $\sigma_1 - \sigma_2$ oder Haupt Schubspannung τ_{\max} verbinden.

Elektrische Lichtschalter

Elektrische Felder können in isotropen Substanzen Doppelbrechung hervorrufen. Ist eine solche Substanz zwischen gekreuzten Polarisatoren angeordnet, dann läßt sich mit Hilfe einer angelegten Spannung der Lichtdurchgang steuern. Im spannungslosen Fall wird kein Licht durchgelassen. Wird eine Spannung angelegt, so daß der Gangunterschied zwischen dem ordentlichen und dem außerordentlichen Strahl $\Delta = \lambda/2$ beträgt, dann wird die Polarisationssebene um 90° gedreht und das Licht vom zweiten Polarisator durchgelassen (Tabelle L-15).

L.3.2.4 Optische Aktivität

In einer *optisch aktiven* Substanz dreht sich die Schwingungsebene von linear polarisiertem Licht. Verschiedene Kristalle und Flüssigkeiten zeigen diesen Effekt, wobei es rechts- und linksdrehende Stoffe gibt. Bei Lösungen mit

inaktiven Lösungsmitteln (z. B. Wasser) ist der Drehwinkel zur Konzentration des gelösten Stoffes proportional.

Flüssigkristallanzeigen

Die Drehung der Polarisationssebene von linear polarisiertem Licht wird auch bei der *Flüssigkristallanzeige* eingesetzt. Bei der Drehzelle nach *Schadt-Helfrich* befindet sich zwischen zwei verdrehten transparenten Elektroden ein nematischer Flüssigkristall (Bild L-18). In der verdrehten nematischen Phase (TN-Zelle: Twisted Nematic) dreht sich der E-Vektor um 90° , so daß Licht von der Zelle durchgelassen wird. Im Fall einer angelegten Spannung richten sich die Moleküle in Längsrichtung aus. Dadurch wird die Schwingungsebene des Lichts nicht mehr gedreht und die Zelle sperrt (Dunkelheit). Je nach Form der Elektroden lassen sich beliebige Symbole darstellen (z. B. Sieben-Segment-Anzeigen).

Faraday-Effekt

Eine Drehung der Polarisationssebene erfolgt auch, wenn eine Substanz in einem longitudi-

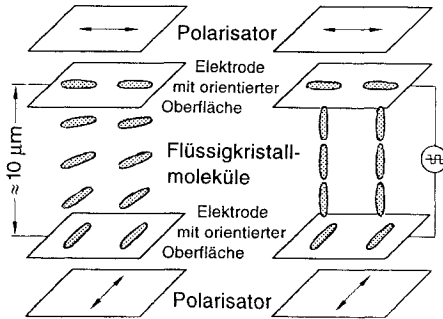


Bild L-18. Flüssigkristallanzeige.

a) spannungslos,

b) mit angelegter Spannung.

nenalen Magnetfeld durchstrahlt wird. Diese *Magnetorotation* wird als *Faraday-Effekt* bezeichnet. Der Drehwinkel α beträgt

$$\alpha = V d H; \quad (\text{L-16})$$

V Verdettsche Konstante
(Materialkonstante),
 d Dicke der Substanz,
 H Magnetfeldstärke.

Modulatoren, die den Faraday-Effekt ausnutzen, lassen eine Modulation des Lichts mit Frequenzen von über 200 MHz zu.

L.4 Quantenoptik

L.4.1 Lichtquanten

Photonenenergie

Eine Lichtquelle transportiert Energie in wohldefinierten Energiepaketen. Von EINSTEIN wurde deshalb in seiner *Lichtquantenhypothese* Licht als ein Strom von *Lichtquanten* oder *Photonen* interpretiert (Übersicht L-22).

Dualismus Welle – Teilchen

Licht hat sowohl Wellen- als auch Teilcheneigenschaften. Die Übersichten L-19 und L-20 zeigen sowohl die statistische Schwärzung einer Fotoplatte durch auftreffende Photonen,

Übersicht L-22. Photonen.

Photonenenergie $E_{\text{ph}} = h f$

$$E_{\text{ph}} = \frac{h c}{\lambda} = \frac{1,24 \mu\text{m} \cdot \text{eV}}{\lambda}$$

Photonenimpuls $p_{\text{ph}} = \frac{h f}{c} = \frac{h}{\lambda}$

h Planck-Konstante
(*Plancksches Wirkungsquantum*),
 $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = 4,136 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$,
 f Frequenz der Welle,
 c Lichtgeschwindigkeit,
 λ Wellenlänge.

als auch die klassische Beugungsfunktion, d.h. die Intensitätsverteilung des gebeugten Lichts an einer Wand. Der Vergleich zeigt:

Die klassische Wellenfunktion ist proportional zur Photonendichte.

L.4.2 Laser

Photonen können mit Atomen auf drei verschiedene Arten in Wechselwirkung treten:

Absorption: Ein Photon der Energie $E_{\text{ph}} = E_2 - E_1$ wird vernichtet und dafür beispielsweise ein Elektron vom Energiezustand E_1 auf den höheren Wert E_2 gehoben.

Spontane Emission: Das Atom kehrt vom angeregten Zustand in den Grundzustand zurück unter Aussendung eines Photons der Energie $E_{\text{ph}} = E_2 - E_1$.

Stimulierte Emission: Nach EINSTEIN wird durch ein bereits vorhandenes Photon der Energie $E_{\text{ph}} = E_2 - E_1$ ein Übergang vom angeregten in das tiefer liegende Niveau induziert, wonach zwei Photonen mit jeweils derselben Energie vorliegen. Die auslösende Lichtwelle wird bei diesem Prozeß phasenrichtig verstärkt; es entsteht eine *kohärente* Welle.

Die Lichtverstärkung durch stimulierte Emission von Strahlung führte zum Namen der Lichtquelle: LASER (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation).

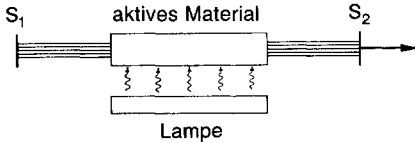


Bild L-19. Aufbau eines optisch gepumpten Lasers.

Laserbedingung

In einem System aus vielen Atomen sind die relativen Besetzungszahlen N_1 und N_2 der Energieniveaus E_1 und E_2 gegeben durch den Boltzmann-Faktor:

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}}; \quad (\text{L-17})$$

k Boltzmann-Konstante,
 T absolute Temperatur.

Es ist also stets $N_2 < N_1$. Um eine kräftige stimulierte Emission zu erhalten, muß aber $N_2 > N_1$ sein (*erste Laserbedingung*). Eine solche *Besetzungsinversion* wird bei den Festkörperlaser durch *optisches Pumpen* mit Hilfe einer Lampe bewirkt (Bild L-19). Bei Gaslasern läuft der Pumpmechanismus über

Stöße in einer Gasentladung. Bei Halbleiterlasern wird in einem p,n-Übergang eine Besetzungsinversion erreicht.

Damit im Lasermedium eine Oszillation einsetzt, bedarf es der *Rückkopplung* (*zweite Laserbedingung*). Die erzeugten Photonen durchlaufen das gepumpte Gebiet mehrmals, wenn das aktive Material in einen optischen Resonator eingebaut wird (Spiegel S_1 und S_2 in Bild L-19). Die hin- und herlaufenden Wellen bilden stehende Wellen im Resonator. Einer der Spiegel ist nicht vollständig verspiegelt, so daß hier die Lichtwelle ausgekoppelt wird.

Q-switching

Laserimpulse hoher Leistung erhält man durch *Q-switching*. Während des Pumpens wird die Resonatorgüte Q künstlich niedrig gehalten, damit der Laser nicht anschwingt und eine hohe Besetzungsinversion entsteht. Wird die Resonatorgüte erhöht, entlädt sich die im Resonator gespeicherte Energie in einem kurzen leistungsstarken Lichtblitz. *Riesenimpulslaser* haben Pulse von etwa 1 ns Dauer bei einer Leistung von etwa 10 GW. Tabelle L-16 zeigt eine Zusammenstellung von Daten der wichtigsten Laser. Von der Viel-

Übersicht L-23. Materiewellenlänge.

Materiewellenlänge (*De-Broglie-Beziehung*)

$$\lambda = h/p$$

beschleunigte Ladungsträger:

klassische Rechnung

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2eUm_0}}$$

relativistische Rechnung

$$\lambda = \frac{\lambda_c}{\left(1 + \frac{eU}{m_0 c^2}\right) \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{eU}{m_0 c^2}\right)^2}}}$$

Grenzfall sehr großer Spannung

$$\lambda = hc/eU$$

e Elementarladung,

c Lichtgeschwindigkeit,

h Planck-Konstante,

m_0 Masse der Ladungsträger,

p Impuls des Teilchens,

U Beschleunigungsspannung,

λ_c Compton-Wellenlänge, $\lambda_c = \frac{h}{m_0 c} = 2,426 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ (für Elektron).

Tabelle L-16. Daten wichtiger LASER.

cw: Dauerstrichbetrieb (continuous wave), p: Pulsbetrieb.

Lasermedium	Wellenlänge	max. Leistung	Anwendungen	
gas- förmig	Helium – Neon	543,5 ... 632,8 ... 3391 nm	cw: 50 mW	Meßtechnik, Justierlaser Holographie
	Krypton	350,7 ... 647,1 ... 869,0 nm	cw: 10 W	Fotolithographie Spektroskopie Pumpen von Farbstoff- lasern
	Argon	457,9 ... 514,5 ... 1092 nm	cw: 100 W	Holographie, Spektroskopie Pumpen von Farbstoff- lasern
	Helium – Cadmium	325,0 ... 441,6 nm	cw: 50 mW	Fotolithographie Spektroskopie
	Kohlendioxid	10,6 µm	cw: 100 kW p: 1 TW	Materialbearbeitung Lidar
	Stickstoff	337,1 nm	p: 5 kW	Spektroskopie, Pumpen von Farbstofflasern
	Excimer	Ar*F: 193 nm Kr*F: 248 nm Xe*F: 350 nm	p: 20 MW	Fotochemie Spektroskopie Medizin
flüssig	Farbstoffe	360 ... 1300 nm	cw: 10 W p: 1 MW	Spektroskopie
fest	Rubin	694,3 nm	cw: 1 W p: 1 GW	Materialbearbeitung Lidar
	Nd-YAG	1,064 µm	cw: 100 W p: 1 GW	Materialbearbeitung Spektroskopie
	Halbleiter	600 nm ... 40 µm	cw: 100 mW p: 10 kW	optische Datenübertragung, optische Datenspeicher, Umweltmeßtechnik

Tabelle L-17. Anwendungen des Lasers.

Optische Meßtechnik	Materialbearbeitung	Nachrichtentechnik	Medizin und Biologie
Interferometrie, Holographie, Spektroskopie, Entfernungsmessung über Laufzeit von Laserpulsen, Laser-Radar, Leitstrahl beim Tunnel-, Straßen- und Brückenbau	Bohren, Schweißen, Schneiden, Aufdampfen; Auswuchten und Ab- gleichen von rotierenden und schwingenden Teilen; Trimmen von Wider- ständen.	optische Nachrichten- übertragung durch modulierte Lichtpulse. Signale von Halbleiter- lasern werden in Glas- fasern geführt. – Optische Datenspeicherung und -wiedergabe, Beispiel: Tonwiedergabe von digitaler Schallplatte, Compact-Disc.	Anheften der Netzhaut bei Ablösung; Durch- bohren verschlossener Blutgefäße; Zerstörung von Krebszellen; Schneiden von Gewebe; Zahnbehandlung.

zahl der Anwendungen des Lasers zeigt Tabelle L-17 eine Auswahl.

L.4.3 Materiewellen

So wie einer Lichtquelle nach EINSTEIN ein Strom von Photonen zugeordnet werden kann, wurde von DE BROGLIE einem Strom materieller Teilchen Welleneigenschaften zugeordnet (Übersicht L-23).

Die Welleneigenschaften materieller Teilchen treten bei Beugungsexperimenten zutage. Sämtliche mit Photonen durchführbaren Beugungsexperimente wurden auch mit Teilchen, wie Elektronen, Protonen und Neutronen, nachgewiesen.

Elektronenmikroskope benutzen zur Abbildung eines Objektes einen Elektronenstrahl.

Sie zeigen ein wesentlich besseres Auflösungsvermögen als Lichtmikroskope, da die Wellenlänge der Elektronen, die das Auflösungsvermögen begrenzt, kleiner gemacht werden kann als die Lichtwellenlänge (Übersicht L-23).

Wellenfunktion

Alle Mikroteilchen besitzen Welleneigenschaften (*Welle-Teilchen-Dualismus*). Materiewellen werden durch eine *Wellenfunktion* $\Psi(x, y, z, t)$ beschrieben, deren Wellenlänge durch die *De-Broglie-Beziehung* (Übersicht L-23) gegeben ist.

Das Quadrat der Wellenfunktion $|\Psi(x, y, z)|^2 dV$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, im Volumenelement dV am Ort (x, y, z) ein Teilchen anzutreffen.

M Elektrizität und Magnetismus

Tabelle M-1. Normen in der Elektrizitätslehre und im Magnetismus.

Norm	Bezeichnung
DIN 1323	Elektrische Spannung, Potential, Zweipolquelle, elektromotorische Kraft
DIN 1324	Elektromagnetisches Feld
DIN 1339	Einheiten magnetischer Größen
DIN 1344	Nachrichtentechnik
DIN 1357	Einheiten elektrischer Größen
DIN 5483	Zeitabhängige Größen
DIN 5487	Fourier-, Laplace- und Z-Transformationen
DIN 5489	Richtungssinn und Vorzeichen in der Elektrotechnik
DIN 40 040	Anwendungsklassen und Zuverlässigkeitsangaben für Bauelemente der Nachrichtentechnik und Elektronik
DIN 40 100	Bildzeichen der Elektrotechnik
DIN 40 108	Elektrische Energietechnik; Stromsysteme
DIN 40 110	Wechselstromgrößen
DIN 40 148	Übertragungssysteme und Zweitore
DIN 40 150	Begriffe zur Ordnung von Funktions- und Baueinheiten
DIN 40 719	Schaltungsunterlagen; Regeln für Stromlaufpläne der Elektrotechnik
DIN 40 900	Graphische Symbole für Schaltungsunterlagen
DIN 41 485	Halbleiterbauelemente; Kurzzeichen zur Verwendung in Datenblättern; Aufbau der Kurzzeichen
DIN 41 791	Halbleiterbauelemente für die Nachrichtentechnik; Angabe in Datenblättern

Für alle Erscheinungen der Elektrizität und des Magnetismus ist die *Ladung* Q maßgebend. Ihre Einheit ist Coulomb (C) oder Ampere mal Sekunde: $1\text{ C} = 1\text{ A} \cdot \text{s}$. Die Eigenschaften gehen aus Tabelle M-2 hervor.

Tabelle M-2. Ladung und ihre Eigenschaften.

Eigenschaft der Ladung	Bemerkungen
quantisiert	nur Vielfache der Elementarladung e ($e = 1,6021773 \cdot 10^{-19}\text{ A} \cdot \text{s}$)
gebunden an Materie	Ladung kommt nicht für sich allein vor, sondern ist immer an Materie gebunden
Ladungserhaltungssatz	In einem abgeschlossenen System bleibt die Nettoladung (Differenz der positiven und negativen Ladungen) konstant
Ladungstransport	Elektronen oder Ionen (elektrisch geladene Atome oder Moleküle) tragen die Ladung

Bauteil	Schaltzeichen
Widerstand	
Widerstand (allgemein)	
veränderbarer Widerstand	
spannungsabhängiger Widerstand (Varistor)	
Heißleiter	
Kaltleiter	
Fotowiderstand	
Potentiometer	
Induktivität	
Induktivität (allgemein)	
Induktivität mit Magnetkern (Drossel)	
Induktivität mit Magnetkern, einstellbar	
Einphasen-Transformator	
Kapazität	
Kondensator (allgemein)	
veränderbare Kapazität	
einstellbare Kapazität	
gepolter Kondensator (z.B. Elektrolytkondensator)	
Diode	
Dioden (allgemein)	
Kapazitätsdiode	
Fotodiode	
Leuchtdiode (LED)	

Diode	
Z-Diode	
Zweirichtungsdiode (Diac)	
Thyristor (allgemein)	
Thyristor, Katode gesteuert	
Zweirichtungsthyristor (Triac)	
Transistor	
bipolar	
npn-Transistor	
pnp-Transistor	
Fototransistor (npn-Typ)	
Sperrschicht-Feldeffekt-Transistor (JFET)	
Sperrschicht-Feldeffekt-Transistor, n-Kanal	
Sperrschicht-Feldeffekt-Transistor, p-Kanal	
Isolierschicht-Feldeffekt-Transistor (IGFET)	
Anreicherungstyp (Enhancement)	
 n-Kanal	 p-Kanal
G: Gate (Tor); S: Source (Quelle); B: Bulk; D: Drain (Senke)	

Bild M-1. Symbole und Bildzeichen nach DIN 40 100.

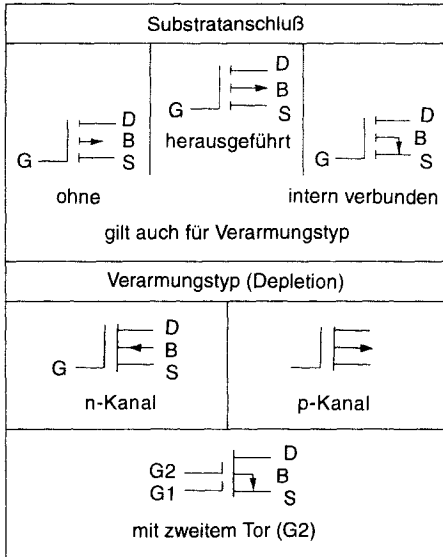


Bild M-1 (Fortsetzung)

M.1 Elektrisches Feld

Ladungen spannen ein elektrisches Feld auf, das durch *elektrische Feldlinien* veranschaulicht wird (Bild M-2).

Die elektrischen Feldlinien beschreiben die Kräfte, die auf eine positive Probeladung im Raum wirken. Je nach Verlauf der Feldlinien gibt es *homogene* (parallele Feldlinien, Bild M-2d) und *inhomogene* Felder. Ein besonders wichtiger Typ eines inhomogenen Feldes ist das *radiale* Feld einer *Punktladung*. Weitere Eigenschaften der Feldlinien sind, wie Bild M-2 zeigt:

- Pfeilrichtung von positiver zu negativer Ladung.
- Auf Leitern stehen die Feldlinien immer senkrecht.
- Bei Leitern verschieben sich die Ladungen auf der Oberfläche, bis das Innere feldfrei ist (Faradayscher Käfig, Bild M-2f).
- Feldlinien schneiden sich nicht.

M.1.1 Elektrische Feldstärke

Die elektrische Feldstärke wird bestimmt durch die Kraft F , die eine Ladung Q im elek-

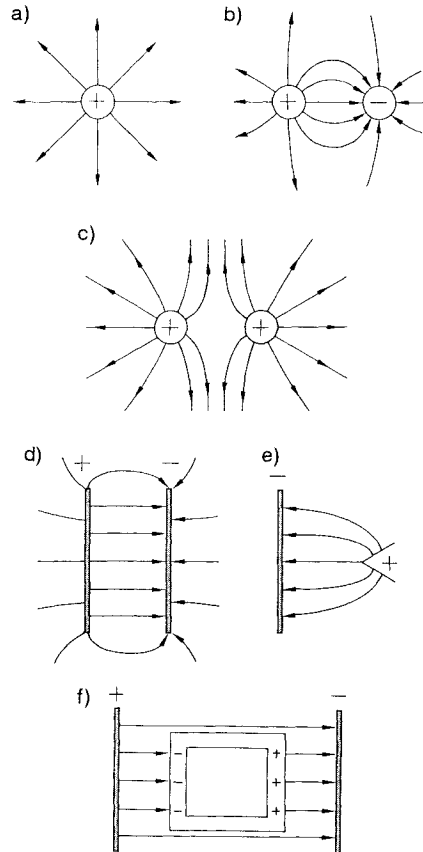


Bild M-2. Elektrisches Feld verschiedener Ladungsgeometrien.

trischen Feld erfährt. Weitere Zusammenhänge gehen aus Übersicht M-1 hervor.

Übersicht M-1 zeigt, daß die elektrische Feldstärke aus der *Ladungsverteilung* errechnet werden kann. Für verschiedene Geometrien stehen die Ergebnisse in Tabelle M-3.

Die *elektrischen Feldlinien* stehen *senkrecht* auf den *Äquipotentiallinien* bzw. *-flächen*. Deshalb können aus den Äquipotentiallinien (Linien gleichen Potentials, bzw. gleicher Spannung) die elektrischen Feldlinien, d.h. die elektrischen Felder, bestimmt werden (Bild M-3).

Übersicht M-1. Elektrische Feldstärke.

elektrische Feldstärke

$$E = \frac{F}{Q}$$

In inhomogenen Feldern ist die elektrische Feldstärke räumlich nicht konstant.

elektrische Feldstärke zwischen den Platten eines Plattenkondensators

$$E = U/d$$

elektrische Feldstärke und elektrische Flußdichte (Verschiebungsdichte D)

$$D = \epsilon E$$

elektrische Feldstärke und Ladungsverteilung

$$\oint E \, dA = (1/\epsilon_0) \sum Q_i$$

elektrische Feldstärke und Potential

$$E = -d\varphi/ds$$

$$E = -\text{grad } \varphi$$

Übersicht M-1 (Fortsetzung) D elektrische Flußdichte (Verschiebungsdichte) d Plattenabstand E elektrische Feldstärke $\oint E \, dA$ Oberflächenintegral über eine geschlossene Fläche $\sum Q_i$ Summe aller Ladungen innerhalb der Fläche ds Wegelement**grad** Gradient (∇)

$$(\text{grad} = (\partial/\partial x)\mathbf{i} + (\partial/\partial y)\mathbf{j} + (\partial/\partial z)\mathbf{k};$$

 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ Einheitsvektoren in x -, y - und z -Richtung) U Spannung ϵ Permittivität

$$(\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r;$$

 ϵ_0 elektrische Feldkonstante

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$$

 ϵ_r Permittivitätszahl φ elektrisches Potential*Tabelle M-3. Feldstärken unterschiedlicher geometrischer Ladungsverteilungen.*



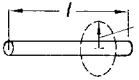
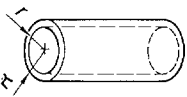
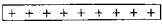
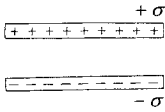
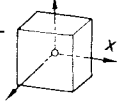
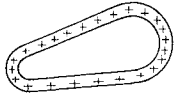
Körper	Geometrie	Ort r	elektrische Feldstärke
Massivkugel	 R : Kugelradius	innen außen	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r$ $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$
Hohlkugel		innen außen	$E = 0$ $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$
Stab	 λ : Ladung je Länge	außen	$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$
Zylinder		innen	$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R^2} r$
dünne Platte	 σ : Flächenladungsdichte	beide Seiten	$E = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma$

Tabelle M-3 (Fortsetzung)

Körper	Geometrie	Ort	elektrische Feldstärke
zwei dünne Platten		zwischen den Platten	$E = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma$
dicke Platte	ρ : Raumladungsdichte 	Abstand x von der Mittellinie	$E = \frac{1}{\epsilon_0} \rho x$
Leiter		Oberfläche	$E = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma$

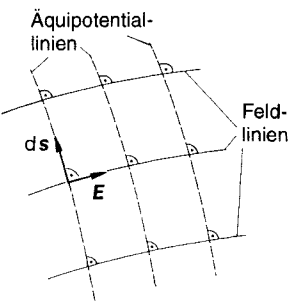


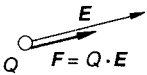
Bild M-3. Äquipotentiallinien und elektrische Feldlinien.

M.1.2 Elektrische Kraft

Übersicht M-2. Vergleich der Kraft im elektrischen und im magnetischen Feld.

Kraft im elektrischen Feld

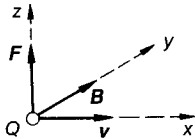
Coulomb-Kraft



immer wirksam
Kraft in Richtung des elektrischen Feldes

Kraft im magnetischen Feld

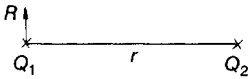
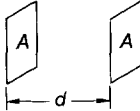
Lorentz-Kraft



nur bei bewegter Ladung wirksam
Kraft senkrecht zur Geschwindigkeit v und zur magnetischen Flußdichte B

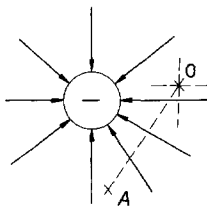
- E elektrische Feldstärke
- F Kraft
- B magnetische Flußdichte
- Q Ladung
- v Geschwindigkeit

Übersicht M-3. Elektrische Kräfte zwischen Punktladungen und Platten.

elektrische Kräfte zwischen Punktladungen (Coulombsches Gesetz)	elektrische Kräfte zwischen Platten
 $F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2};$ <p> Q_1, Q_2 1. bzw. 2. Punktladung, ϵ Permittivität ($\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$) ϵ_0 elektrische Feldkonstante $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$ ϵ_r Permittivitätszahl, werkstoffabhängig, $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,988 \cdot 10^9 \text{ m/F},$ r Abstand der Punktladungen. </p> <p>Hinweise:</p> <ul style="list-style-type: none"> – Gilt auch für Kugeln, wenn Abstand $r \gg$ Kugelradius R. – Bei mehreren Ladungen: Kräfteaddition. 	 $F = \frac{\epsilon A U^2}{2 d^2};$ <p> A Plattenfläche, U Spannung zwischen den Platten, d Plattenabstand oder $F = \frac{\epsilon E^2 A}{d};$ <p> E elektrische Feldstärke oder $F = \frac{E D A}{2} = \frac{Q E}{2};$ <p> D elektrische Flußdichte, Q elektrische Ladung. </p> </p> </p>

M.1.3 Elektrisches Potential

Übersicht M-4. Definition des elektrischen Potentials.



Wird eine Ladung Q im elektrischen Feld E von einem Punkt 0 zu einem Punkt A verschoben, dann ist dazu die Arbeit W_{0A} gegen die elektrische Kraft $F = QE$ erforderlich:

$$W_{0A} = \int_0^A F ds = -Q \int_0^A E ds.$$

Elektrisches Potential ist der Quotient aus der Verschiebungsarbeit W_{0A} und der verschobenen Ladung Q :

$$\varphi_A = \frac{W_{0A}}{Q} = - \int_0^A E ds.$$

Übersicht M-4 (Fortsetzung)

- Bezugspunkt für Potential prinzipiell willkürlich, häufig aber unendlich ferner Punkt (positive Ladung erhält positives Potential) oder die Leiteroberfläche.
- Bei Bewegung der Ladung Q von A nach B ändert sich das Potential von φ_A auf φ_B

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \int_A^B E ds.$$

Die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten ist eine Spannung.

E	elektrische Feldstärke
F	elektrische Kraft
Q	Ladung
ds	Wegelement
U_{AB}	Spannung zwischen den Punkten A und B
W_{0A}	Verschiebungsarbeit von 0 nach A
φ_A, φ_B	Potential am Punkt A bzw. B

M.1.4 Materie im elektrischen Feld

Befindet sich Materie im elektrischen Feld, dann wirkt auf alle Ladungen in dieser Materie eine elektrische Kraft. Im *Leiter* erfolgt eine *Ladungsverschiebung (Influenz)* der positiven und negativen Ladungen, während im *Nichtleiter* die Ladungen nur geringfügig verschoben werden können (*Polarisation*).

Flächenladungsdichte σ und elektrische Flußdichte D

In einem Leiter sind die Ladungen frei verschiebbar. Deshalb ist das *Leitungssinnere* immer *feldfrei*, und die nicht kompensierten Ladungen befinden sich auf der *Oberfläche* des Leiters. Die Flächenladungsdichte gibt an, wieviel Ladung Q je Fläche A vorhanden ist (Einheit C/m²):

$$\sigma = Q/A \quad \text{bzw.} \quad \sigma = dQ/dA; \quad (\text{M-1})$$

Q Ladung auf der Oberfläche eines Leiters,
 A Oberfläche des Leiters.

Die *elektrische Flußdichte (Verschiebungsdichte) D* ist ein Vektor mit dem Betrag der Flächenladungsdichte σ und der Richtung der Flächennormalen (Richtung von der positiven zur negativen Ladung). Der Zusammenhang zwischen elektrischer Feldstärke E und elektrischer Flußdichte D lautet:

$$D = \varepsilon E \quad (\text{M-2})$$

ε Permittivität ($\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$)
(ε_0 elektrische Feldkonstante, ε_r Permittivitätszahl oder relative Permittivität, werkstoffabhängige Größe (Tabelle M-4)),
 E elektrische Feldstärke.

Permittivität ε

$$\varepsilon = D/E \quad (\text{M-3})$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

$$\varepsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2) = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$$

ε_0 elektrische Feldkonstante

ε_r Permittivitätszahl oder relative Permittivität, temperatur-, frequenz- und werkstoffabhängige Größe, (Tabelle M-4).

Tabelle M-4. Permittivitätszahl einiger Werkstoffe.

Werkstoffe	Permittivitätszahl ε_r
Paraffin	2,2
Polypropylen	2,2
Polystyrol	2,5
Polycarbonat	2,8
Polyester	3,3
Kondensatorpapier	4 bis 6
Zellulose	4,5
Al ₂ O ₃	12
Ta ₂ O ₅	27
Wasser	81
Keramik (NDK)	10 bis 200
Keramik (HDK)	10 ³ bis 10 ⁴

Je nachdem, ob die *wahren Ladungen konstant* sind (elektrische Flußdichte D invariant), oder ob die *Spannung konstant* ist (elektrische Feldstärke E invariant), ändert sich die elektrische Feldstärke E oder die elektrische Flußdichte D (Tabelle M-5).

Kristalle haben *anisotrope* Eigenschaften. Hier hat im allgemeinen der E -Vektor eine *andere Richtung* als der D -Vektor. Besonders bemerkbar ist dieser Effekt bei höheren Frequenzen. In solchen Substanzen tritt anstelle einer Zahl ein *Tensor* (M-5).

$$D_{xyz} = \varepsilon_r \varepsilon_0 E_{xyz} \quad (\text{M-4})$$

$$\varepsilon_r = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{M-5})$$

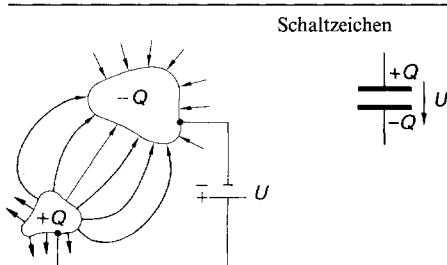
Kondensatoren und Kapazität

Kondensatoren sind Bauelemente, die zur Speicherung von elektrischer Energie und elektrischer Ladung dienen. Sie bestehen aus zwei Körpern mit verschiedenen Ladungen Q , zwischen denen eine Spannung herrscht (Übersicht M-5). Die Geometrie und der Abstand der Leiteroberflächen bestimmen die Ladungstrennarbeit und die Spannung.

Tabelle M-5. Materie im elektrischen Feld.

Wahre Ladungen konstant → elektrische Flußdichte \mathbf{D} invariant	Spannung konstant → elektrische Feldstärke \mathbf{E} invariant
$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$	$\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}$
$\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}$	$\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}$
Permittivitätszahl	Permittivitätszahl
$\epsilon_r = E_0/E$	$\epsilon_r = D/D_0$
elektrische Polarisation \mathbf{P}	elektrische Polarisation \mathbf{P}
$\mathbf{P}/\epsilon_0 = \mathbf{E}_0 - \mathbf{E}$	$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \mathbf{D}_0$
$\mathbf{P} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0 - \epsilon_0 \mathbf{E}$	$\mathbf{P} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \mathbf{E} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}$
$\quad = \underbrace{(\epsilon_r - 1) \epsilon_0}_{\chi_e} \mathbf{E} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}$	
$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E}$	$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E}$
$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 (\mathbf{E} + \mathbf{P}/\epsilon_0)$	$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 (\mathbf{E} + \mathbf{P}/\epsilon_0)$
\mathbf{D}, \mathbf{D}_0 elektrische Flußdichte in Materie bzw. im Vakuum, \mathbf{E}, \mathbf{E}_0 elektrische Feldstärke in Materie bzw. im Vakuum, \mathbf{P} elektrische Polarisation, ϵ_0 elektrische Feldkonstante ($\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$), ϵ_r Permittivitätszahl, χ_e elektrische Suszeptibilität ($\chi_e = \epsilon_r - 1$)	

Übersicht M-5. Kapazität.



$$C = \frac{\oint \mathbf{D} \, d\mathbf{A}}{\int \mathbf{E} \, ds}$$

$$C = Q/U$$

Übersicht M-5 (Fortsetzung)

Die Einheit der Kapazität C ist F ($= \text{A} \cdot \text{s}/\text{V}$).

In der Praxis gebräuchlich:

$$\text{mF} = 10^{-3} \text{ F}, \quad \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$$

$$\text{nF} = 10^{-9} \text{ F}, \quad \text{pF} = 10^{-12} \text{ F}$$

\mathbf{D} elektrische Flußdichte
 $d\mathbf{A}$ Flächenelement
 \mathbf{E} elektrische Feldstärke
 Q Ladung
 ds Wegelement
 U Spannung

Die Kapazität C gibt an, wieviel Ladung Q je Spannungseinheit 1 V gespeichert werden kann.

Tabelle M-6. Kapazitäten verschiedener Leitergeometrien.

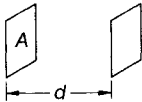


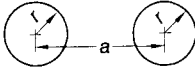
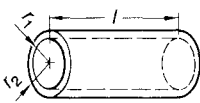
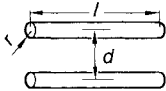
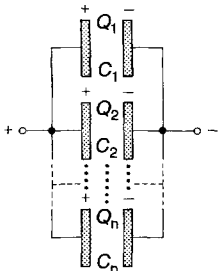
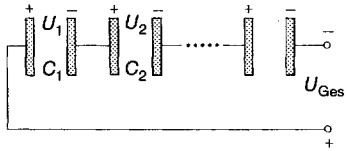
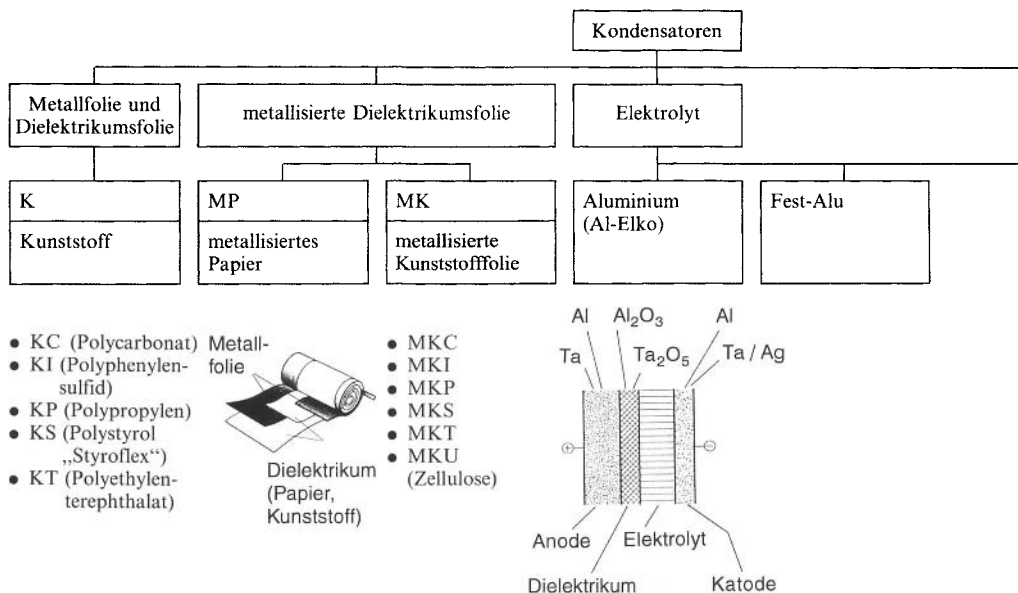
Körper	Geometrie	Kapazität
Platten		$C = \frac{\epsilon A}{d}$
Kugel Gegenelektrode im Unendlichen		$C = 4\pi \epsilon r$
zwei Hohlkugeln		$C = 4\pi \epsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$
zwei gleiche Kugeln		$C = 2\pi \epsilon r \left[1 + \frac{r(a^2 - r^2)}{a(a^2 - ar - r^2)} \right]$
Zylinder		$C = \frac{2\pi \epsilon l}{\ln(r_2/r_1)}$
Doppelleitung		$C = \frac{\pi \epsilon l}{\ln(d/r)}$

Tabelle M-7. Parallel- und Reihenschaltung von Kondensatoren.

Schaltungsart	Parallelschaltung	Reihenschaltung
konstante Größe	Spannung $U = \text{konstant}$	Ladung $Q = \text{konstant}$
Anordnung		
Addition	Gesamtladung $Q_{\text{Ges}} = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$	Gesamtspannung $U_{\text{Ges}} = U_1 + U_2 + \dots + U_n$
Ersatzkapazität	$C_{\text{Ges}} U = C_1 U + C_2 U + \dots + C_n U$ <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin-top: 10px;"> $C_{\text{Ges}} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$ $C_{\text{Ges}} = \sum_{i=1}^n C_i$ </div>	$\frac{Q}{C_{\text{Ges}}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n}$ <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin-top: 10px;"> $\frac{1}{C_{\text{Ges}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$ $C_{\text{Ges}} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \right)^{-1}$ </div>

Übersicht M-6. Kondensatoren als elektronische Bauelemente.



Nennspannung	50 V bis 630 V	200 V bis 5 kV	50 V bis 2 kV	6 V bis 600 V
Kapazitätsbereich	2 pF bis 500 nF	100 pF bis 10 mF	100 pF bis 10 μ F	1 μ F bis 1 F
Verlustfaktor $\tan \delta \cdot 10^{-3}$	10 kHz: 0,1 bis 1	1 kHz: 4 bis 15	10 kHz: 0,25 bis 10	50 Hz: 80
gespeicherte Energie pro Volumen	mittel	mittel	mittel	hoch
Güte	1000	1000	1000	gering
Frequenzbereich	Gleichspannung und Niederfrequenz bis MHz-Bereich			NF und Gleichspannung
Normen	IEC 384-7/11/12/13 CECC 30100 CECC 30900 CECC 31700 CECC 31800 DIN 45910-22/25/26/27		IEC 384-2/6/16 CECC 30400 CECC 30500 CECC 31200 CECC 32200 DIN 45910-11/13/23/28	IEC 384-11 CECC 30300
Anwendungsbereiche	Schwingkreise, Koppel-Filter-Kondensator, Kfz-Elektronik, Schaltnetzteile, Impulsschaltungen	Motorkondensator, Filterkondensator, Stoßkondensator, Funkentstörkondensator		Energiespeicher, Sieben bei niedrigen und hohen Frequenzen

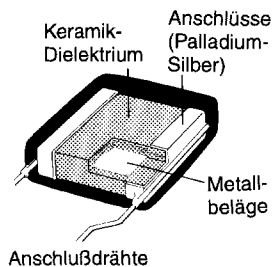
Übersicht M-6 (Fortsetzung)

Kondensatoren

Sinter

Tantal (Ta-Elko)

Keramik



Klasse 1: NDK

niedrige
Dielektrizitäts-
konstante

Klasse 2: HDK

hohe
Dielektrizitäts-
konstante

Klasse 3

höchste
Dielektrizitäts-
konstante

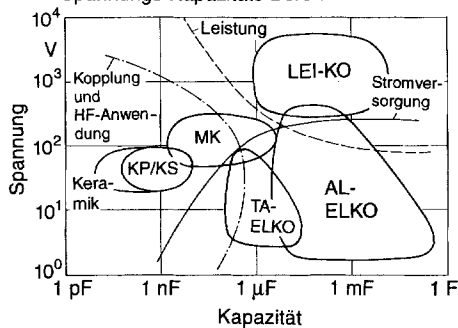
einstellbar

Dreh- Kondensator

Luft-/Keramik Trimmer

integrierter Kondensator

Spannungs-Kapazitäts-Bereiche



6 V bis 125 V

4 V bis 500 V

100 nF bis 1 mF

1 pF bis 1 μ F

120 Hz: 40 bis 350

1 kHz: ≤ 60

hoch

gering
(Klasse 3: mittel)

gering

Klasse 1: hoch bis
sehr hoch
Klasse 2, 3: gering

NF und
Gleichstrom

NF und HF

CECC 30200
CECC 30800

CECC 30600
CECC 30700
CECC 31100
CECC 31400
CECC 31500
CECC 32100

Meß- und
Regeltechnik,
Datentechnik,
Kommunikations-
technik,
Schaltzeteile

Datentechnik,
Kfz-Elektronik,
Kommunikations-
technik, automatisch
bestückbar auf
Leiterplatten

Energie und Energiedichte

Übersicht M-7. Energie und Energiedichte im elektrischen Feld.

Elektrische Energie eines Kondensators

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{QU}{2} = \frac{CU^2}{2}$$

Energie des elektrischen Feldes

$$W = \frac{1}{2} \epsilon A d E^2 = \frac{1}{2} \epsilon E^2 V = \frac{1}{2} D E V$$

Energiedichte

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} D E$$

A	Plattenfläche
C	Kapazität
d	Plattenabstand
D	elektrische Flußdichte (Verschiebungsdichte)
E	elektrische Feldstärke
Q	Ladung
U	Spannung
V	Volumen
W	Arbeit
w	Energiedichte
ϵ	Permittivität ($\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$)
ϵ_0	elektrische Feldkonstante
$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$	
ϵ_r	Permittivitätszahl

M.2 Gleichstromkreis

M.2.1 Stromstärke

Die Stromstärke I (oder der elektrische Strom) ist eine *Basisgröße* und wird in Ampere (A) gemessen:

1 A ist die Stärke eines zeitlich unveränderten Stroms, der durch zwei geradlinige parallele Leiter (durch Vakuum getrennt) im Abstand von 1 m fließt und der zwischen diesen Leitern je 1 m Leiterlänge die Kraft $F = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$ hervorruft.

Der Strom fließt beim Verbraucher vom Plus- zum Minuspol, in Spannungsquellen vom Minus- zum Pluspol.

Übersicht M-8. Stromstärke und Stromdichte.

elektrische Stromstärke I

$$I = \frac{dQ}{dt}; \quad Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt$$

Gleichstrom

$$I = \frac{Q}{t}; \quad Q = I t$$

elektrische Stromdichte j

$$j = \kappa E; \quad j = \frac{I}{A}$$

A	Querschnittsfläche
E	elektrische Feldstärke
I	elektrische Stromstärke
j	elektrische Stromdichte
Q	Ladung
dQ	Ladungselement
t	Zeit
dt	Zeitintervall
κ	elektrische Leitfähigkeit

M.2.2 Elektrische Spannung

Elektrische Spannung entsteht, wenn elektrische Ladungen durch Zuführung von elektrischer Arbeit W getrennt werden. Die elektrische Spannung U ist der Quotient aus der Arbeit W , die zur Verschiebung einer Ladung Q notwendig ist, und dieser Ladung Q . Die Einheit ist Volt (V).

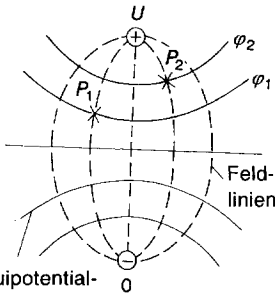
$$U = W/Q. \quad (\text{M-6})$$

Zwischen der elektrischen Spannung und dem Potential besteht folgender Zusammenhang:

Die *Potentialdifferenz* $\Delta\phi$ zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 entspricht der *Spannung* zwischen diesen beiden Punkten (Bild M-4).

$$U_{12} = \phi_1 - \phi_2.$$

In der Technik sind *Spannungspfeile* üblich, die von Plus nach Minus weisen, d.h. von hohem Potential zu niedrigem Potential. Die Spannung zeigt von Plus nach Minus, wenn $\phi_1 > \phi_2$ ist. Bild M-5 zeigt die Vorzeichenregel für Strom und Spannung.



Äquipotential-
linien

Bild M-4. Zusammenhang zwischen elektrischem Potential und Spannung.

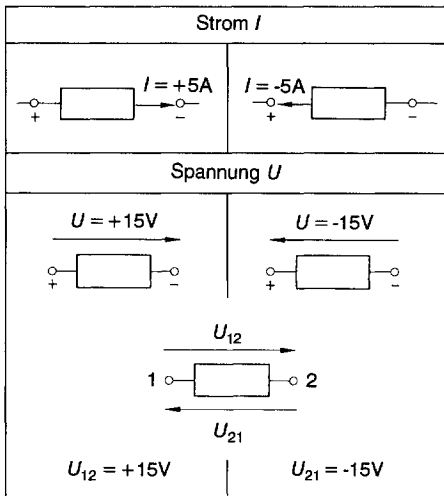


Bild M-5. Vorzeichenregel für Strom und Spannung nach DIN 5489.

M.2.3 Widerstand und Leitwert

Widerstand R

Der elektrische Widerstand ist ein Maß für die Hemmung des Ladungstransports und ist folgendermaßen definiert:

Der elektrische Widerstand R beträgt 1 Ohm, wenn zwischen zwei Punkten eines Leiters bei einer Spannung von 1 V ein Strom von genau 1 A fließt.

Die Einheit ist $1 \text{ V/A} = 1 \Omega$ (Ohm).

Durch den von KLITZING entdeckten Quanten-Hall-Effekt läßt sich das Ohm *unabhängig von*

der Geometrie und den Werkstoffeigenschaften festlegen.

Ein Widerstandsnorm beträgt $25812,8 \Omega$. Dieser Wert errechnet sich folgendermaßen aus Naturkonstanten: $h/e^2 = 25812,8 \Omega$ (h Plancksches Wirkungsquantum: $h = 6,626176 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$; e Elementarladung: $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$).

Leitwert G

Der elektrische Leitwert ist der Kehrwert des elektrischen Widerstandes:

$$G = 1/R. \quad (\text{M-7})$$

Seine Einheit ist S (Siemens), Ω^{-1} oder mho („Ohm rückwärts“, im englischsprachigen Raum verwendet).

Widerstand eines metallischen Leiters

Übersicht M-9. Widerstand, spezifischer Widerstand und elektrische Leitfähigkeit eines metallischen Leiters.

Widerstand R

$R = \varrho l/A$; Einheit Ω

spezifischer elektrischer Widerstand ϱ
(Resistivität)

$\varrho = (RA)/l$; Einheit $(\Omega \cdot \text{mm}^2)/\text{m} = 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$

elektrische Leitfähigkeit κ

$\kappa = 1/\varrho = l/(RA)$

Temperaturabhängigkeit

– Temperaturkoeffizient α

$$\alpha = \Delta R/(R \Delta T) = \Delta \varrho/(\varrho \Delta T)$$

– Temperaturabhängigkeit des Widerstandes bei Metallen

$$R(\vartheta) \approx R_{20} [1 + \alpha(\vartheta - 20^\circ \text{C})]$$

$$\varrho(\vartheta) \approx \varrho_{20} [1 + \alpha(\vartheta - 20^\circ \text{C})]$$

– für hohe Temperaturen

$$R = R_{20} (1 + \alpha \Delta T + \beta \Delta T^2)$$

A Querschnittsfläche des Leiters

l Länge des Leiters

R Widerstand

ΔR Widerstandsänderung

R_{20} Widerstand bei 20°C

ΔT Temperaturdifferenz

α Temperaturkoeffizient

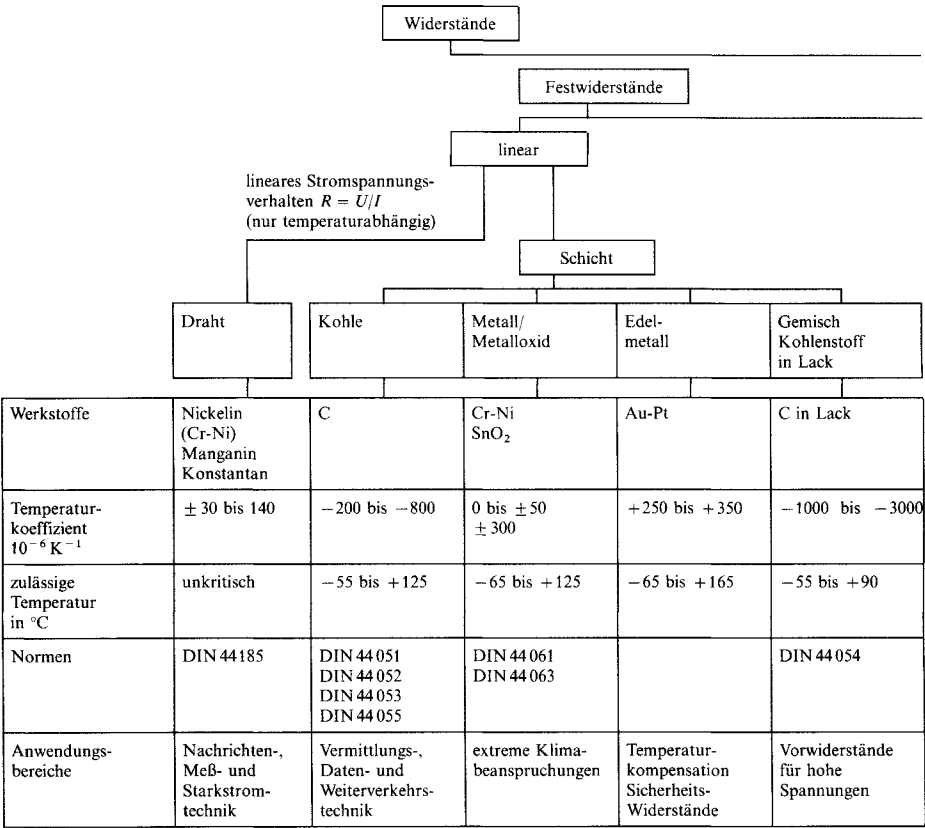
β zweiter Temperaturkoeffizient

ϑ Temperatur in $^\circ \text{C}$

κ elektrische Leitfähigkeit

ϱ spezifischer elektrischer Widerstand

Übersicht M-10. Widerstände als elektronische Bauelemente.



Übersicht M-10 (Fortsetzung)

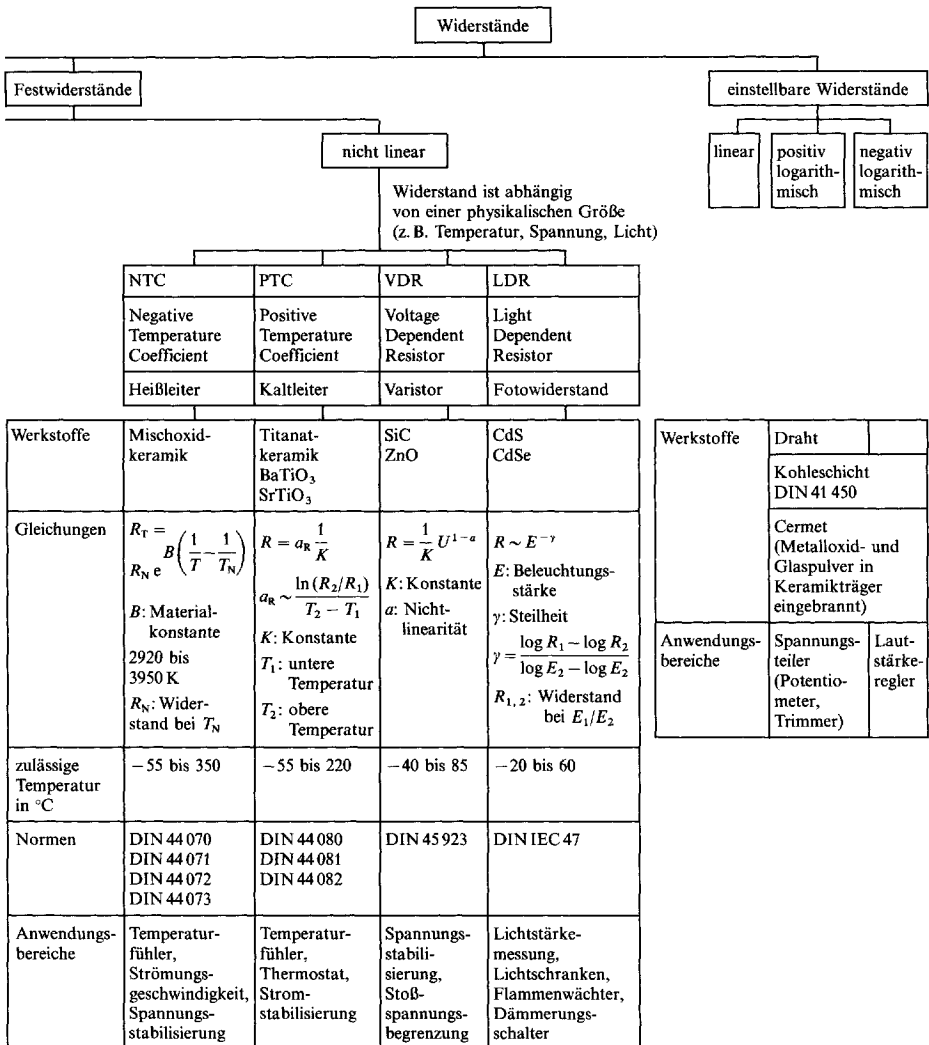


Tabelle M-8. Spezifischer elektrischer Widerstand, elektrische Leitfähigkeit und Temperaturkoeffizient ausgewählter Leiterwerkstoffe (bei 0 °C).

Werkstoff	Spezifischer elektrischer Widerstand ϱ $10^{-2} \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$	Spezifische elektrische Leitfähigkeit κ $\frac{\text{S} \cdot \text{m}}{\text{mm}^2}$	Temperaturkoeffizient α 10^{-4} K^{-1}
Aluminium	2,65	37,7	42,9
AlMgSi	3	32	36
Al-Bronze (Cu ₉₀ Al ₁₀)	13	8	32
Blei	19	5,3	42
Bronze	18	5,6	5
CrAl 205 (Heizleiter- legierung)	137	0,7	0,5
CrAl 305 (Heizleiter- legierung)	144	0,7	0,1
Dynamoblech	13	8	45
Eisen	8,9	11,2	65
Gold	2,04	49	40
Graphit	800	0,13	-2
Grauguß	80	1,2	19
Indium	8,4	11,9	49
Iridium	5,3	18,9	39
Konstantan	50	2	0,1
Kupfer	1,56	64,1	43
Magnesium	4,6	22	38
Manganin	43	2,3	0,1
Messing	7	14,3	13
Monel	42	2,8	2
Neusilber	30	3,3	32
Ni ₆₀ Cr ₁₅ Fe	110	1	1,3
Nickel	6,84	14,6	68
Nickelin	43	2,32	
Palladium	10	10	38
Platin	10	10,2	39,2
Platin- Iridium	32	3,1	
Platin- Rhodium	20	5	
Quecksilber	95	1	1
Silber	1,51	66,2	41
Stahl (0,1 % C; 0,5 % Mn)	13	7	45
Stahl (0,25 % C; 0,3 % Si)	18	5,5	45
Tantal	16	6,2	35
Wismut	120	0,8	45
Wolfram	4,9	20,4	48
Zink	5,5	18,2	42
Zinn	10,4	9,6	46

M.2.4 Elektrische Arbeit, elektrische Leistung und Wirkungsgrad

Um eine Ladung Q von einem Punkt P_1 zu einem Punkt P_2 zu bewegen, zwischen denen eine Spannung U liegt, ist eine *elektrische Arbeit* W erforderlich. Die Leistung P ist die je Zeiteinheit dt erbrachte Arbeit dW . Der elektrische Wirkungsgrad η errechnet sich als Quotient aus abgegebener P_{ab} und zugeführten Leistung P_{zu} (Übersicht M-11).

Übersicht M-11. Elektrische Arbeit, elektrische Leistung und Wirkungsgrad.

elektrische Arbeit W

$$W = Q U$$

– für zeitabhängige Ströme und Spannungen

$$W = \int u(t) i(t) dt = \int P(t) dt$$

– für Gleichstrom

$$W = P t = U I t = I^2 R t = U^2 t / R$$

Einheit: W · s, J oder kWh, 1 kWh = $3,6 \cdot 10^6$ W · s

elektrische Leistung P

$$P(t) = dW/dt$$

– für zeitlich konstanten Strom

$$P = W/t = U I = U^2 / R = I^2 R$$

Einheit: 1 W = 1 J/s

Wirkungsgrad η elektrischer Maschinen

$$\eta = P_{ab}/P_{zu} = W_{ab}/W_{zu}$$

Wirkungsgrad η eines elektrischen Verbrauchers

$$\eta = P_n/(P_n + P_v)$$

I elektrische Stromstärke

R elektrischer Widerstand

t Zeit

P elektrische Leistung

U Spannung

W elektrische Arbeit

P_{ab} abgegebene Leistung

P_{zu} zugeführte Leistung

W_{ab} abgegebene Arbeit

W_{zu} zugeführte Arbeit

P_n Nutzleistung

P_v Leistungsverlust

M.2.5 Ohmsches Gesetz

In einem metallischen Leiter nimmt bei konstanter Temperatur der Strom I proportional zur angelegten Spannung U zu. Die charakteristische Kennlinie des ohmschen Widerstandes ist eine Gerade, deren Steigung der elektrische Leitwert G ist (Übersicht M-12).

Viele elektronische Bauelemente zeigen einen *nichtlinearen* Verlauf der Kennlinie (Bild M-6).

Differentieller Widerstand

Sind die Kennlinien nicht linear, dann hat der Widerstand in jedem Punkt der Kennlinie

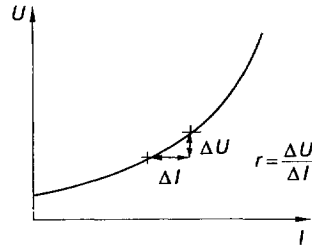


Bild M-7. Differentieller Widerstand.

Übersicht M-12. Ohmsches Gesetz.

$$\begin{aligned} I &= G U = U/R \\ I &= P/U; \quad I = \sqrt{P/R} \\ U &= R I; \quad U = I/G; \quad U = P/I; \\ R &= U/I; \quad R = U^2/P; \quad R = P/I^2 \end{aligned}$$

G elektrischer Leitwert
 I elektrischer Strom
 R Widerstand
 P Leistung
 U Spannung

einen anderen Wert. Es wird dann der *differentielle Widerstand* r angegeben (Bild M-7).

Richtungssinn

Das Ohmsche Gesetz gilt nur, wenn die Spannung U und der Strom I *dieselbe Richtung* aufweisen (sonst müssen Minuszeichen verwendet werden). Die Regeln für die Vorzeichen und Richtungen des elektrischen Stroms I und der elektrischen Spannung U sind Übereinkünfte und in DIN 5489 genormt (Bild M-5). Beim *positiven Strom* ist der *Minuspol* an der *Pfeilspitze*. Bei einer Indizierung wird dringend empfohlen, daß der Pfeil vom *Index 1* auf den *Index 2* zeigt. Doppelpfeile müssen unter allen Umständen vermieden werden, da in solchen Fällen das Vorzeichen der Spannung unbestimmt ist.

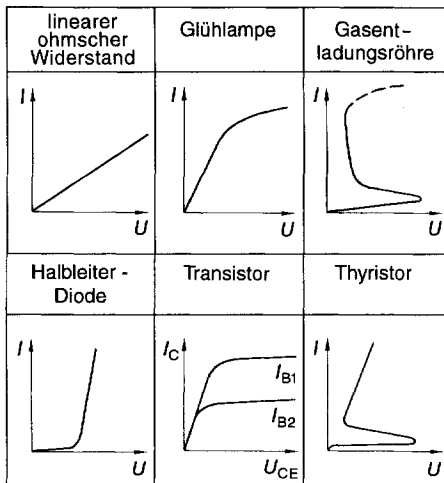


Bild M-6. Kennlinien verschiedener elektronischer Bauelemente.

M.2.6 Elektrische Netze – Kirchhoffsche Regeln

Ein *Netzwerk* ist aus *Knoten* und *Maschen* aufgebaut. Ein *Knoten* ist ein Punkt, an dem sich die *Ströme* I verzweigen, und eine *Masche* beschreibt einen *geschlossenen Umlauf* innerhalb des Netzwerkes (Bild M-8).

Knotenregel (1. Kirchhoffsches Gesetz)

In einem Stromknoten kann keine Ladung entstehen oder verschwinden (*Ladungserhaltungssatz*). Deshalb gilt, wie Bild M-9 zeigt:

Die Summe aller Ströme eines Stromknotens ist null: $\sum I_i = 0$.

Die *zufließenden* Ströme sind *positiv*, die *abfließenden* *negativ* zu nehmen.

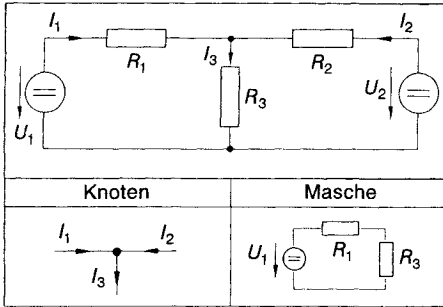


Bild M-8. Elektrisches Netz: Knoten und Maschen.

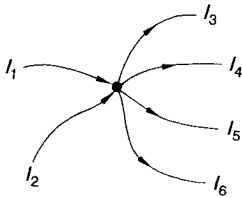
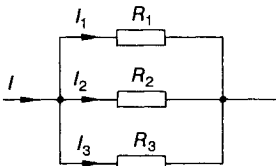
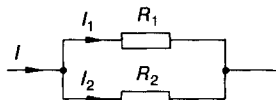


Bild M-9. Ströme im Stromknoten.



$$I : I_1 : I_2 : I_3 = G : G_1 : G_2 : G_3 = \frac{1}{R} : \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} : \frac{1}{R_3}$$



$$I_1 = I \frac{G_1}{G_1 + G_2} \quad I_2 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Bild M-10. Stromverhältnisse bei Parallelschaltung.

Stromverhältnis

In einer Parallelschaltung nach Bild M-10 verhalten sich die Teilströme wie die Teilleitwerte G und umgekehrt wie die Teilwiderstände R :

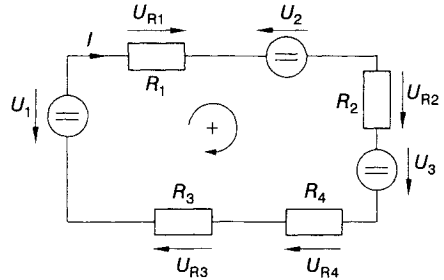
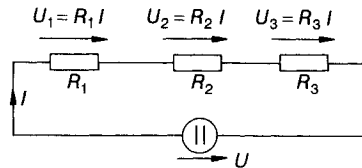
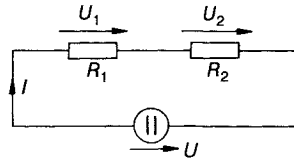


Bild M-11. Beispiel einer Masche.



$$U_1 : U_2 : U_3 = R_1 : R_2 : R_3$$



$$U_1 = U \frac{G_2}{G_1 + G_2} = U \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Bild M-12. Spannungsverhältnisse bei Reihenschaltung.

Maschenregel (2. Kirchhoffsches Gesetz)

Bei einem kompletten Umlauf einer Ladung in einer Masche ist die zugeführte und die abgeführte elektrische Arbeit gleich groß. Deshalb gilt:

$$\text{Die Summe aller Spannungen eines Stromkreises (Masche) ist null: } \sum U_i = 0.$$

Der gewählte Umlaufsinn ist beliebig. Die in Zählrichtung zeigenden Spannungen werden positiv, die gegen die Zählrichtung laufenden werden negativ eingesetzt (Bild M-11).

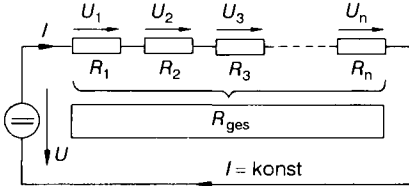
Spannungsverhältnis

In einer Reihenschaltung nach Bild M-12 verhalten sich die Teilspannungen wie die Teilwiderstände R .

Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen

Übersicht M-13. Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen.

a) Reihenschaltung



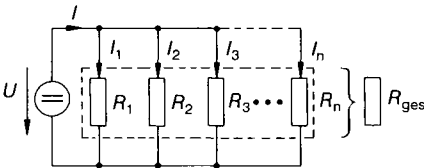
$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i$$

Gesamtwiderstand = Summe Teilwiderstände

$$U_m/U_k = R_m/R_k \quad (m, k = 1, 2, 3 \dots n)$$

Teilspannungen verhalten sich wie die Teilwiderstände

b) Parallelschaltung



$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

$$G_{\text{ges}} = G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n = \sum_{i=1}^n G_i$$

Gesamtleitwert = Summe Teilleitwerte

$$\frac{I_m}{I_k} = \frac{G_m}{G_k} = \frac{R_k}{R_m} \quad (m, k = 1, 2, 3 \dots n)$$

Teilströme verhalten sich wie Teilleitwerte oder umgekehrt wie Teilwiderstände.

Übersicht M-13 (Fortsetzung)

Parallelschaltung von zwei Widerständen

Schaltung	Formeln
	$R_{\text{ges}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ <p>Widerstände gleich groß</p> $R_{\text{ges}} = \frac{R}{2}$

Parallelschaltung von drei Widerständen

Schaltung	Formeln
	$R_{\text{ges}} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$ <p>Widerstände gleich groß</p> $R_{\text{ges}} = \frac{R}{3}$

Dreieck-Stern-Umwandlung

In Widerstandsnetzen ist es häufig sinnvoll, eine *Dreieckschaltung* in eine *Sternschaltung* umzurechnen (oder umgekehrt). Die Widerstände zwischen den Anschlußklemmen 1, 2 und 3 bleiben dabei erhalten (Übersicht M-14).

Grundstromkreis mit Spannungsquelle

Übersicht M-15 zeigt den Grundstromkreis, dargestellt mit einer *realen Spannungsquelle* (Teilbild a) oder mit einer *realen Stromquelle* (Teilbild b).

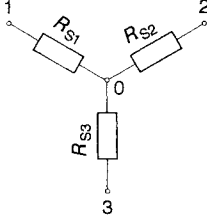
Ein Stromkreis besteht im einfachsten Fall aus einer Spannungsquelle, die den Strom I liefert, der durch den äußeren Widerstand R_a fließt. Wie das Teilbild a) in der Übersicht M-15 zeigt, hat die Spannungsquelle selbst einen *inneren Widerstand* R_i (z. B. der Elektrolyt eines galvanischen Elements). Der Spannungsabfall am Innenwiderstand ist nach dem Ohmschen Gesetz $U_i = R_i I$ von der Stromstärke I abhängig.

Grundstromkreis mit Stromquelle

Der Stromkreis kann auch aus einer Stromquelle bestehen, zu der parallel ein *innerer Leitwert* G_i liegt (Übersicht M-15, Teilbild b).

Übersicht M-14. Stern-Dreieck-Umwandlung.

a) Sternschaltung

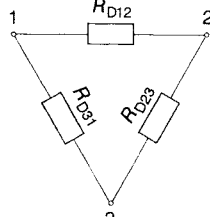


$$R_{S1} = \frac{R_{D12} R_{D31}}{R_{D12} + R_{D23} + R_{D31}}$$

$$R_{S2} = \frac{R_{D12} R_{D23}}{R_{D12} + R_{D23} + R_{D31}}$$

$$R_{S3} = \frac{R_{D23} R_{D31}}{R_{D12} + R_{D23} + R_{D31}}$$

b) Dreieckschaltung



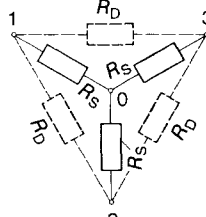
$$R_{D12} = R_{S1} + R_{S2} + \frac{R_{S1} R_{S2}}{R_{S3}}$$

$$R_{D23} = R_{S2} + R_{S3} + \frac{R_{S2} R_{S3}}{R_{S1}}$$

$$R_{D31} = R_{S3} + R_{S1} + \frac{R_{S3} R_{S1}}{R_{S2}}$$

Übersicht M-14 (Fortsetzung)

c) gleiche Widerstände

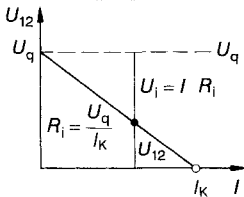
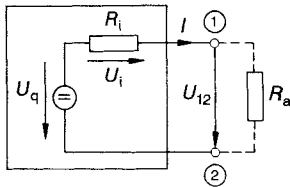


$$R_S = \frac{R_D}{3}$$

$$R_D = 3 R_S$$

Übersicht M-15. Grundstromkreis mit realer Spannungs- bzw. Stromquelle.

reale Spannungsquelle



Strom im Außenkreis

$$I = \frac{U_q}{R_i + R_a}$$

Klemmenspannung

$$U_{12} = I R_a = U_q - I R_i = U_q \frac{R_a}{R_i + R_a}$$

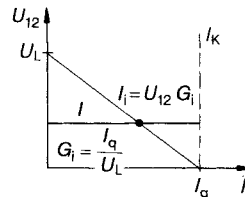
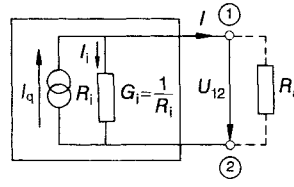
Leerlaufspannung (offene Klemmen)

$$U_L = U_q$$

Kurzschlußstrom ($U_{12} = 0$)

$$I_K = \frac{U_q}{R_i} = \frac{U_L}{R_i}$$

reale Stromquelle



$$I = I_q - I_i = I_q - \frac{U_{12}}{R_i} = I_q - U_{12} G_i$$

$$U_{12} = \frac{I_q}{\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_i}} = \frac{I_q}{G_a + G_i}$$

$$U_L = I_q R_i = I_q / G_i$$

$$I_K = I_q$$

Übersicht M-15 (Fortsetzung)

reale Spannungsquelle	reale Stromquelle
Leistungen $P_e = P_i + P_a$ $P_a = \frac{R_a U_q^2}{(R_i + R_a)^2} = \frac{U_q^2}{R_i} \cdot \frac{v}{(1+v)^2}$	$P_e = P_i + P_a$ $P_a = \frac{G_a I_q^2}{(G_i + G_a)^2} = I_q^2 R_i \cdot \frac{v}{(1+v)^2}$
Leistungsanpassung (maximale Leistungsentnahme) bei $R_a = R_i, v = 1$ $P_{a, \max} = \frac{1}{4} \frac{U_q^2}{R_i}$	$P_{a, \max} = \frac{1}{4} I_q^2 R_i$
I_i, I_q Strom durch Innenwiderstand, Quellenstrom R_a, R_i Außen-, Innenwiderstand G_a, G_i Leitwert außen, innen P_e, P_a, P_i elektrische Leistung, äußere, innere Leistung U_{12}, U_q Klemmenspannung zwischen 1 und 2, Quellenspannung v Widerstandsverhältnis, $v = R_a/R_i$	

Lineare Überlagerung
(Helmholtzsches Superpositionsprinzip)

Es gilt der *Überlagerungssatz*:

Jede Stromstärke I_m in einem Stromzweig m errechnet sich aus der Summe aller durch diesen Zweig fließenden Teilströme I_{m1} bis I_{mn} , die durch die einzelnen Quellenspannungen verursacht werden.

Bild M-13 zeigt die Berechnungen.

Der Strom I_2 soll berechnet werden. Er wird durch die beiden Quellenspannungen U_{01} und U_{02} erzeugt. Deshalb gilt $I_2 = k_1 U_{01} + k_3 U_{03}$. Zur Berechnung von $I_2^* = k_1 U_{01}$ wird die Spannungsquelle U_{03} kurzgeschlossen ($U_{01} = 0$), und zur Berechnung von $I_2^{**} = k_3 U_{03}$ wird die Spannungsquelle U_{01} kurzgeschlossen. Die Summe beider Beiträge ergibt die gesuchte Stromstärke.

Allgemein gilt für die Stromstärke I_m im Zweig m :

$$I_m = k_1 U_{01} + k_2 U_{02} + k_3 U_{03} + \dots + k_n U_{0n};$$

$$I_m = I_{m1} + I_{m2} + I_{m3} + \dots + I_{mn}.$$

M.2.7 Messung von Strom und Spannung

Strommessung

Der Strommesser muß *im Stromkreis* liegen (*Hauptschluß*).

Bei der Meßbereichserweiterung muß der überschüssige Stromanteil durch einen *parallelen Widerstand* (Shunt) R_p am Meßgerät vorbeigeleitet werden (Bild M-14).

Spannungsmessung

Der Spannungsmesser liegt *parallel* zum zu messenden Spannungsabfall (*Nebenschluß*). Sein Innenwiderstand R_i muß möglichst groß sein, damit der Strom möglichst ganz durch den Außenwiderstand fließt.

Bei einer *Meßbereichserweiterung* muß der überschüssige Spannungsanteil an einem *Vorwiderstand* R_v abfallen (Bild M-15).

M.2.8 Ausgewählte Meßverfahren

Spannungsteiler

Mit Hilfe dieser Schaltung ist eine Aufteilung einer Gesamtspannung in kleinere Einzelspannungen möglich. Bild M-16 zeigt den Unter-

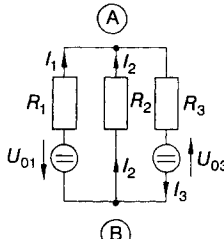
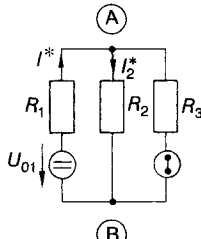
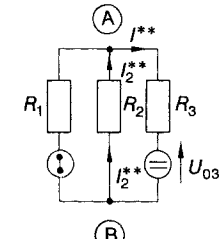
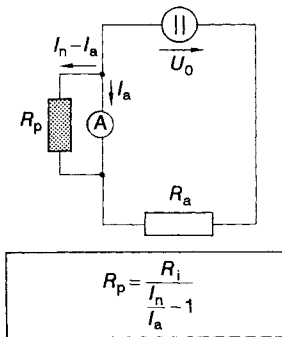
$I_2 = k_1 \cdot U_{01} + k_2 \cdot U_{03}$	Berechnung 1. Teilstrom I_2^* (Kurzschluß $U_{03} = 0$)	Berechnung 2. Teilstrom I_2^{**} (Kurzschluß $U_{01} = 0$)
	 $I^* = \frac{U_{01}}{R_1 + R_2 R_3 / (R_2 + R_3)}$ $I_2^* = \frac{R_3}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3} U_{01}$	 $I^{**} = \frac{U_{03}}{R_3 + R_1 R_2 / (R_1 + R_2)}$ $I_2^{**} = \frac{R_1}{R_3(R_1 + R_2) + R_1 R_2} U_{03}$
$I_2 = I_2^{**} - I_2^* = \frac{U_{03} R_1 - U_{01} R_3}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3}$		

Bild M-13. Berechnung der Teilstrome mit dem Überlagerungssatz.

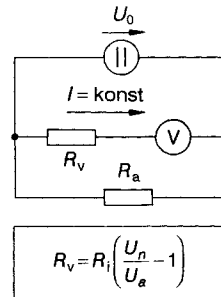


R_i Innenwiderstand

I_n neue maximale Stromstärke

I_a alte maximale Stromstärke

Bild M-14. Meßbereichserweiterung von Strommessern.

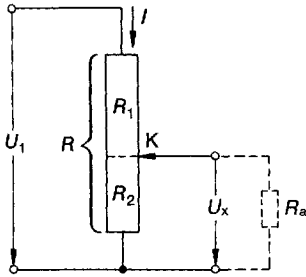


R_i Innenwiderstand

U_n neue maximale Meßspannung

U_a alte maximale Meßspannung

Bild M-15. Meßbereichserweiterung von Spannungsmessern.



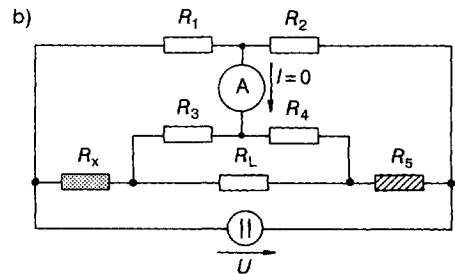
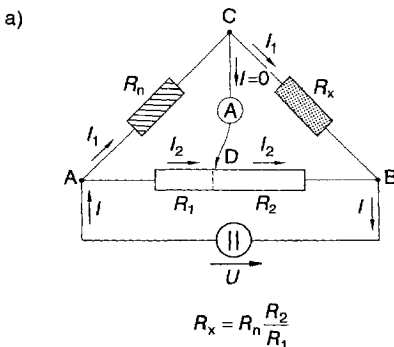
unbelastet	$U_x = U_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2}$
belastet	$U'_x = U_1 \frac{R_2 R_a}{R_1 R_2 + R_a (R_1 + R_2)}$

Bild M-16. Spannungsteiler.

schied zwischen einem *unbelasteten* und einem *belastetem* Spannungsteiler.

Brückenschaltungen

Brückenschaltungen dienen zum Messen von Widerständen. Üblicherweise verwendet man die *Wheatstonesche Brücke* nach Bild M-17a. Bei sehr kleinen Widerständen ($R_x < 0,1 \Omega$) machen sich die Widerstände in den Zuleitungen störend bemerkbar. In diesen Fällen mißt man mit einer *Thomson-Brücke* nach Bild M-17b.



R_5 Normalwiderstand (etwa wie R_x)

R_L Leitungswiderstand

Voraussetzung: $R_1 / R_2 = R_3 / R_4$

$$R_x = \frac{R_1 R_5}{R_2}$$

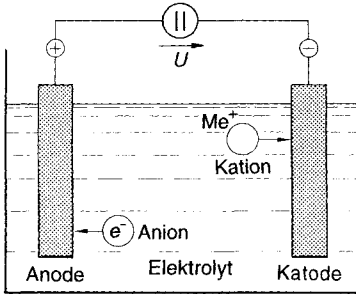
Bild M-17. Wheatstone-Brücke (a) und Thomson-Brücke (b).

M.3 Ladungstransport in Flüssigkeiten

Der elektrische Strom in Flüssigkeiten wird von *geladenen Atomen* oder *Molekülen*, den *Ionen*, getragen. Diese Ladungsträger entstehen dadurch, daß sich Salze, Säuren oder Laugen beim Eintragen in Lösungsmittel in positiv und negativ geladene Moleküle bzw. Atome aufspalten, sie *dissoziieren*.

Die positiven Ionen werden *Kationen* genannt, weil sie zur Katode wandern (negative Elektrode) und die negativen Ionen nennt man *Anionen*, weil sie zur Anode wandern (positive Elektrode). Elektrisch leitende Flüssigkeiten, die aus Kationen und Anionen bestehen, werden *Elektrolyte* genannt. Werden zwei Elektroden (Katode und Anode) in einen Elektrolyten getaucht und an eine Spannungsquelle angeschlossen, dann findet eine *elektrolytische* Stromleitung statt, in der der Elektrolyt zersetzt wird. An der *Katode* (Minuspol) scheidet sich stets Metall oder Wasserstoff ab, an der *Anode* (Pluspol) der Molekülrest (Anionen), wie Bild M-18 zeigt.

Die Elektrolyse spielt in der Technik vor allem beim Aufbringen von Metallüberzügen (*Galvanisieren*) eine wichtige Rolle. Die häufigsten Metallüberzüge bestehen aus Chrom, Nickel, Gold und Silber.



Elektrolyt	Anode (+)	Kathode (-)
CuSO_4	O_2 (aus SO_4)	Cu
ZnCl_2	Cl_2	Zn
NaOH	O_2 (aus OH)	H_2
HCl	Cl_2	H_2
H_2SO_4	O_2 (aus SO_4)	H_2

Bild M-18. Elektrolyse.

Übersicht M-16. Faradaysches Gesetz.

$$m = \nu M = \frac{M}{z N_A e} I t = \frac{M}{z F} I t = \ddot{A} I t = \ddot{A} Q$$

elektrochemisches Äquivalent \ddot{A}

$$\ddot{A} = \frac{M}{z F} = \frac{m}{Q}$$

Faraday-Konstante F

$$F = N_A e = 9,648 \cdot 10^4 \text{ A} \cdot \text{s/mol}$$

 e Elementarladung ($e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$) I elektrischer Strom M Molmasse m abgeschiedene Masse N_A Avogadro-Konstante ($N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$) ν Stoffmenge (Molzahl) Q Ladung t Zeit z Wertigkeit

1. Faradaysches Gesetz

Die Masse m des abgeschiedenen Stoffes ist nur der transportierten Ladungsmenge $Q = It$ proportional. Sie hängt weder von der Geometrie noch von der Konzentration des Elektrolyten ab.

Mit dem 1. Faradayschen Gesetz ist es möglich, aus den abgeschiedenen Massen den Strom oder die Ladung zu messen, oder aus Strom und Ladung die abgeschiedenen Stoffmengen zu bestimmen.

Das elektrochemische Äquivalent \ddot{A} gibt an, wieviel Masse (in kg) eines Stoffes bei einer Stromstärke von 1 A in der Zeit von 1 s abgeschieden wird.

Das Produkt aus Avogadro-Zahl N_A und Elementarladung e wird Faraday-Konstante F genannt ($F = 9,648 \cdot 10^4 \text{ (As)}/\text{mol}$).

2. Faradaysches Gesetz

Die von gleichen Elektrizitätsmengen abgeschiedenen Massen (elektrochemische Äquivalente) verhalten sich wie die Molmassen je Wertigkeit.

Elektrochemische Spannungsreihe

Wird ein Metall in einen Elektrolyten getaucht, dann stellt sich gegen eine Vergleichselektrode eine Spannung ein, die vom Material abhängig ist. Wird das Potential gegen eine Standardwasserstoff-Elektrode gemessen, dann ergibt sich die elektrochemische Spannungsreihe.

Galvanische Elemente

Galvanische Elemente wandeln chemische Energie in elektrische Energie um. Findet keine Rückumwandlung statt, dann spricht man von Primärelementen. Kann die elektrische Energie wieder in chemische rückverwandelt werden (z.B. bei wieder aufladbaren Batterien), dann handelt es sich um Sekundärelemente.

Übersicht M-17. 2. Faradaysches Gesetz.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{M_1}{z_1} : \frac{M_2}{z_2} = \frac{\dot{A}_1}{\dot{A}_2}$$

m_1, m_2 abgeschiedene Massen

M_1, M_2 Molmassen 1 und 2

z_1, z_2 Wertigkeit 1 und 2

\dot{A}_1, \dot{A}_2 elektrochemische Äquivalente 1 und 2

Elektrochemische Daten einiger Elemente

Element	Wertigkeit	Molmasse	Molmasse Wertigkeit	elektrochemisches Äquivalent $10^{-3} \frac{\text{g}}{\text{A} \cdot \text{s}}$	Faraday- Konstante $\frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{mol}}$
		$\frac{\text{g}}{\text{mol}}$	$\frac{\text{g}}{\text{mol}}$		
Wasserstoff	1	1,00797	1,00797	0,01046	96 364
Sauerstoff	2	15,9994	7,9997	0,08291	96 486
Aluminium	3	26,9815	8,9938	0,09321	96 489
Eisen	3	55,847	18,616	0,19303	96 441
Nickel	2	58,71	29,355	0,30415	96 515
Kupfer	2	63,54	31,77	0,32945	96 433
Zink	2	65,37	32,685	0,33875	96 487
Silber	1	107,870	107,870	1,11817	96 470
Zinn	4	118,69	29,673	0,30755	96 482
Platin	4	195,09	48,773	0,50588	96 412

Tabelle M-9. Elektrochemische Spannungsreihe der Metalle.

Metall	Spannung U in V
Li/Li ⁺	-3,02
Cs/Cs ⁺	-2,92
K/K ⁺	-2,92
Ca/Ca ²⁺	-2,84
Na/Na ⁺	-2,71
Mg/Mg ²⁺	-2,38
Al/Al ³⁺	-1,66
Mn/Mn ²⁺	-1,05
Zn/Zn ²⁺	-0,76
Fe/Fe ²⁺	-0,44
Cd/Cd ²⁺	-0,40
Ni/Ni ²⁺	-0,25
Sn/Sn ²⁺	-0,136
Pb/Pb ²⁺	-0,126
H/H ⁺	± 0
Cu/Cu ²⁺	+0,34
Cu/Cu ⁺	+0,52
Hg/Hg ₂ ²⁺	+0,798
Ag/Ag ⁺	+0,80
Hg/Hg ²⁺	+0,854
Pt/Pt ²⁺	+1,2
Au/Au ⁺	+1,42
Au/Au ³⁺	+1,5

Tabelle M-10. Primärelemente.

Bezeichnung	Zink/ Braunstein (Leclanché)	Zink-/ Braunstein (alkalisch)	Zink/Luft (alkalisch)	Zink/Luft (sauer)	Zink/ Silberoxid
positive Elektrode	$\text{MnO}_2 + \text{e}^- + \text{NH}_4^+ \longrightarrow \text{MnOOH} + \text{NH}_3$	$\text{MnO}_2 + \text{e}^- + \text{H}_2\text{O} \longrightarrow \text{MnOOH} + \text{OH}^-$	$\text{O}_2 + 4\text{e}^- + 2\text{H}_2\text{O} \longrightarrow 4\text{OH}^-$	$\text{O}_2 + \text{e}^- + \text{H}^+ \longrightarrow 2\text{OH}^- + \text{NH}_3$	$\text{Ag}_2\text{O} + 2\text{e}^- + \text{H}_2\text{O} \longrightarrow \text{Ag} + 2\text{OH}^-$
negative Elektrode	$\text{Zn} \longrightarrow \text{Zn}^{2+} + 2\text{e}^-$	$\text{Zn} + 2\text{OH}^- \longrightarrow \text{ZnO} + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e}^-$	$\text{Zn} + 2\text{OH}^- \longrightarrow \text{ZnO} + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e}^-$	$\text{Zn} \longrightarrow \text{Zn}^{2+} + 2\text{e}^-$	$\text{Zn} + 2\text{OH}^- \longrightarrow \text{ZnO} + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e}^-$
Zellenreaktion	$\text{Zn} + 2\text{MnO}_2 + 2\text{NH}_4\text{Cl} \longrightarrow 2\text{MnOOH} + \text{Zn}(\text{NH}_3)_2\text{Cl}_2$	$\text{Zn} + 2\text{MnO}_2 + \text{H}_2\text{O} \longrightarrow 2\text{MnOOH} + \text{ZnO}$	$2\text{Zn} + \text{O}_2 + 2\text{H}_2\text{O} \longrightarrow 2\text{Zn}(\text{OH})_2$	$2\text{Zn} + \text{O}_2 + 4\text{NH}_4\text{Cl} \longrightarrow 2\text{H}_2\text{O} + 2\text{Zn}(\text{NH}_3)_2\text{Cl}_2$	$\text{Zn} + \text{Ag}_2\text{O} \longrightarrow \text{ZnO} + 2\text{Ag}$
Energiedichte in Wh/l	120 bis 190	200 bis 300	650 bis 800	200 bis 300	350 bis 650
Energiedichte in Wh/kg	25 bis 70	80 bis 120	300 bis 380	130 bis 170	70 bis 100
Nennspannung in V	1,5	1,5	1,4	1,45	1,55
Strombelastung in mA/cm ²	2	2	2	2	2
Einsatzgebiete	Konsumtechnik: Taschenlampen, Meßgeräte, Spielzeug, Radio, Tonband, Haushalt	Hörgeräte, Nachrichten- geräte (Sender), Rechner, Großbuhren, Meßgeräte	Langzeit- anwendungen, Hörgeräte	Langzeit- anwendungen Fernmeldegeräte, Baustellen- beleuchtung, Weidezaun	Armbanduhren, Hörgeräte

Bezeichnung	Cadmium/ Quecksilber	Zink/ Quecksilber	Lithium/ Braunstein	Lithium Thionylchlorid
positive Elektrode	$\text{HgO} + 2\text{e}^- + \text{H}_2\text{O} \longrightarrow \text{Hg} + 2\text{OH}^-$	$\text{HgO} + 2\text{e}^- + \text{H}_2\text{O} \longrightarrow \text{Hg} + 2\text{OH}^-$	$\text{MnO}_2 + \text{e}^- + \text{Li}^+ \longrightarrow \text{MnO}_2(\text{Li}^+)$	$2\text{SOCl}_2 + 4\text{e}^- \longrightarrow \text{SO}_2 + \text{S} + 4\text{Cl}^-$
negative Elektrode	$\text{Cd} + 2\text{OH}^- \longrightarrow \text{CdO} + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e}^-$	$\text{Zn} + 2\text{OH}^- \longrightarrow \text{ZnO} + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e}^-$	$\text{Li} \longrightarrow \text{Li}^+ + \text{e}^-$	$\text{Li} \longrightarrow \text{Li}^+ + \text{e}^-$
Zellenreaktion	$\text{Cd} + \text{HgO} \longrightarrow \text{Hg} + \text{CdO}$	$\text{Zn} + \text{HgO} \longrightarrow \text{Hg} + \text{ZnO}$	$\text{Li} + \text{MnO}_2 \longrightarrow \text{MnO}_2(\text{Li}^+)$	$4\text{Li} + 2\text{SOCl}_2 \longrightarrow 4\text{LiCl} + \text{SO}_2 + \text{S}$
Energiedichte in Wh/l	250 bis 350	400 bis 520	500 bis 800	700 bis 900
Energiedichte in Wh/kg	50 bis 70	90 bis 120	300 bis 500	500 bis 700
Nennspannung in V	1,03	1,35	1,5 bis 3,8	3,7
Strombelastung in mA/cm ²	2	2	0,5	0,5
Einsatzgebiete	militärische Anwendungen	Fotos, Blitzgeräte, Hörgeräte, Belichtungs- messer, Uhren	Konsumtechnik: Fotos, Blitzgeräte, Computer, Notstrom, Medizintechnik	Herzschrittmacher, Bojenbeleuchtung

Tabelle M-11. Sekundärelemente.

Eigen- schaften		Batterietypen		
		Blei	Nickel/Cadmium	Nickel/Eisen
	positive	PbO ₂	NiOOH	NiOOH
	negative Elektrode	Pb	Cd	Fe
	Elektrolyt	H ₂ SO ₄ + H ₂ O	KOH + H ₂ O	–
	Reaktion	$2\text{PbSO}_4 + \text{H}_2\text{O} \xrightleftharpoons{\text{Laden}} \text{PbO}_2 + 2\text{H}_2\text{SO}_4 + \text{Pb}$	$\text{Cd}(\text{OH})_2 + 2\text{Ni}(\text{OH})_2 \xrightleftharpoons{\text{Laden}} \text{Cd} + 2\text{NiOOH} + \text{H}_2\text{O}$	$\text{Fe}(\text{OH})_2 + 2\text{Ni}(\text{OH})_2 \xrightleftharpoons{\text{Laden}} \text{Fe} + 2\text{NiOOH} + \text{H}_2\text{O}$
	Kapazität in Ah	1 bis 63	10 ⁻² bis 15	bis 100
	Energiedichte in Wh/l	10 bis 100	30 bis 80	30 bis 70
	Energiedichte in Wh/kg	25 bis 35	15 bis 45	10 bis 32
	Zellspannung in V	2	1,20	1,20
	Strombelastung in A	1 bis 20	2 · 10 ⁻³ bis 24	bis 300
	Lade-/Entladezyklen	500 bis 1500	bis 8000	bis 4000
	Normen	DIN 72 310, 72 311 72 331, 72 333 43 534 bis 43 539 40 734, 40 735	DIN 40 751 bis 40 759 40 761 40 764 bis 40 768	DIN 40 752 (2) 40 760 40 764
	Einsatzbereiche	Notstrom Starter Antriebe	Konsumelektronik Hörgeräte Kameras Datensicherung	Schienenfahrzeuge Schiffe

M.4 Ladungstransport im Vakuum und in Gasen

M.4.1 Ladungstransport im Vakuum

Für einen Ladungsträgertransport im Vakuum müssen freie Ladungsträger erzeugt werden. Von großer Wichtigkeit ist die *Elektronenemission*. Elektronen sind im Metallverbund zwar leicht beweglich, doch werden sie an der Oberfläche wegen der Anziehungskräfte der zurückbleibenden Atomrümpfe am Verlassen gehindert. Es ist notwendig, Energie in Höhe der *Austrittsarbeit* W_A zuzuführen.

Thermische Emission

Durch Erwärmen der Glühkatode entsteht eine Stromdichte j , die der *Richardsonschen Gleichung* gehorcht:

$$j = A T^2 e^{-W_A/kT}; \quad (\text{M-9})$$

- A Richardson-Konstante [liegt zwischen 10⁶ A/(m² · K²) für Wolfram und 10² A/(m² · K²) für Metalloxide],
 T Temperatur der Katode,
 W_A Austrittsarbeit des Katodenmaterials,
 k Boltzmann-Konstante
($k = 1,380 \cdot 10^{-23}$ J/K = 8,617 · 10⁻⁵ eV/K).

Hinweis: Die Austrittsarbeit W_A wird meist in eV angegeben. Für die Umrechnung in J gilt:

$$1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J.} \quad (\text{M-10})$$

Photoemission

Treffen Lichtquanten (Abschn. L.4) mit der Energie $E = hf$ auf eine Metalloberfläche, dann lösen sich Elektronen aus dem Metallverbund, wenn die Energie der Photonen größer als die Austrittsarbeit W_A ist. Die kinetische Energie der freigesetzten Elektronen E_{kin} errechnet sich aus

$$E_{\text{kin}} = \frac{m_e v^2}{2} = hf - W_A; \quad (\text{M-11})$$

- m_e Masse des Elektrons
($m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$)
- v Geschwindigkeit des freigesetzten Elektrons,
- h Plancksches Wirkungsquantum
($h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$),
- f Frequenz der auftreffenden Photonen,
- W_A Austrittsarbeit.

Je höher die Lichtfrequenz f , um so höher ist die kinetische Energie der freigesetzten Elektronen.

Je höher die Lichtintensität (Photonenstrom), um so mehr Elektronen werden je Zeiteinheit freigesetzt,

Die *Mindestfrequenz* f_g , bei der die Freisetzung erfolgen kann, ist

$$f_g = W_A/h. \quad (\text{M-12})$$

Daraus errechnet sich die *maximale Wellenlänge* λ_g des Lichts zu

$$\lambda_g = \frac{ch}{W_A} = \frac{1240}{W_A/\text{eV}} \text{ nm}; \quad (\text{M-13})$$

- c Vakuumlichtgeschwindigkeit
($c = 2,9979 \cdot 10^8 \text{ m/s}$),
- h Plancksches Wirkungsquantum
($h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J/s}$).

Sekundärelektronenemission

Wird Materie mit schnellen Elektronen beschossen, so kann die kinetische Energie der Elektronen wiederum die Austrittsarbeit W_A überwinden und nochmals Elektronen freisetzen (*Sekundärelektronen*). Der *Sekundäremissionsfaktor* gibt an, wieviele Sekundärelektronen im Verhältnis zu den Primärelektronen emittiert werden. Er liegt bei reinen Metallen bei 1 und für Halbleiter zwischen 2 und 15. Im *Photo-Multiplier* (Sekundärelektronenvervielfacher, SEV) wird der Effekt zur Messung sehr kleiner Lichtintensitäten angewandt.

Feldemission

Die Kraft des elektrischen Feldes reicht ab einer elektrischen Feldstärke von $E = 10^9 \text{ V/m}$ aus, um Elektronen freizusetzen. Auf diesem Effekt beruht das *Feldelektronenmikroskop*, mit dem atomare Strukturen sichtbar gemacht werden können.

M.4.2 Stromleitung im Vakuum

Kinetische Energie und Geschwindigkeit

Ein elektrisch geladenes Teilchen wird im elektrischen Feld der Feldstärke E wegen der elektrischen Kraft $F_{el} = QE$ in Feldrichtung mit der Beschleunigung a beschleunigt (Übersicht M-18).

Übersicht M-18. Kinetische Energie und Geschwindigkeit geladener Teilchen im elektrischen Feld.

Beschleunigung a

$$a = \frac{Q}{m} E$$

kinetische Energie E_{kin}

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = QU$$

Energien werden in der Atom- und Kernphysik üblicherweise in Elektronenvolt (eV) gemessen. Das ist diejenige Energie, die ein Elektron mit der Elementarladung $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$ beim Durchlaufen der Spannung $U = 1 \text{ V}$ erhält.

$$1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ J} = 6,2415 \cdot 10^{18} \text{ eV}$$

Übersicht M-18 (Fortsetzung)

Geschwindigkeit v

$$v = \sqrt{\frac{2QU}{m}}$$

Für Elektronen ($m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}$ kg;
 $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ A · s) ist

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}} = 5,931 \cdot 10^5 \text{ U/V m/s.}$$

Hinweis:

Für sehr schnelle Teilchen ($v > 10\%$ der Vakuumlichtgeschwindigkeit) muß der *relativistische Massenzuwachs* berücksichtigt werden:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Geschwindigkeit v

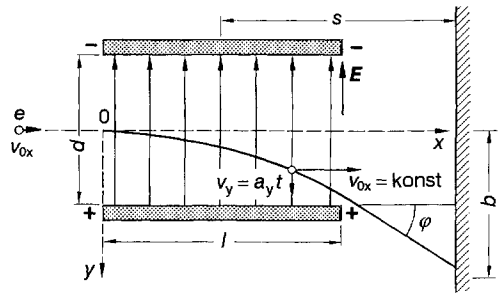
$$v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{QU}{m_0 c^2} + 1\right)^2}}$$

Für Elektronen ist

$$v = 2,998 \cdot 10^8 \sqrt{1 - \frac{1}{(1 + 1,957 \cdot 10^{-6} \text{ U/V})^2}} \text{ m/s.}$$

a	Beschleunigung
c	Vakuumlichtgeschwindigkeit ($c = 2,9979 \cdot 10^8$ m/s)
E	elektrische Feldstärke
E_{kin}	kinetische Energie
e	Elementarladung ($e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ A · s)
m, m_0	Masse, Ruhemasse
m_e	Masse eines Elektrons ($m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}$ kg)
Q	Ladung
U	Spannung
v	Geschwindigkeit

Übersicht M-19. Flugbahn eines Elektrons quer zum elektrischen Feld.

Bahngleichung $y = f(x)$

$$y = \frac{eE}{2m_e v_{0x}^2} x^2 = \frac{U_{\text{kond}}}{4d U_a} x^2$$

Ablenkwinkel φ

$$\tan \varphi = \frac{v_y}{v_{0x}} = \frac{eE}{m_e v_{0x}^2} t = \frac{eEl}{m_e v_{0x}^2} = \frac{l U_{\text{kond}}}{2d U_a}$$

Ablenkung b am Schirm

$$b = \frac{eEl s}{m_e v_{0x}^2} = \frac{e U_{\text{kond}} l s}{m_e d v_{0x}^2} = \frac{l s U_{\text{kond}}}{2d U_a}$$

a_y	Beschleunigung in y-Richtung
b	Ablenkung am Schirm
d	Plattenabstand
e	Elementarladung ($e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ A · s)
E	elektrische Feldstärke
l	Plattenlänge
m_e	Masse eines Elektrons ($m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}$ kg)
s	Abstand Plattenmitte – Schirm
t	Zeit
U_{kond}	Spannung zwischen den Kondensatorplatten
U_a	Anodenspannung (Beschleunigungsspannung)
v_{0x}	Anfangsgeschwindigkeit in x-Richtung
φ	Ablenkwinkel

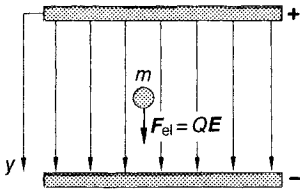
Bewegung eines Elektrons senkrecht zum elektrischen Feld

Die Bewegung entspricht, wie Übersicht M-19 zeigt, einem *waagerechten Wurf*: In x-Richtung bewegt sich das Teilchen mit konstanter Geschwindigkeit v_{0x} , und in y-Richtung ist die Beschleunigung $a = eE/m$ wirksam.

Bewegung eines Ladungsträgers parallel zum elektrischen Feld

Ein geladenes Teilchen wird, wie Übersicht M-20 zeigt, parallel zum elektrischen Feld beschleunigt.

Übersicht M-20. Bewegung eines Ladungsträgers parallel zum elektrischen Feld.



Geschwindigkeit v

$$v = \frac{QE}{m} t = \sqrt{\frac{2QE}{m}} y$$

Weg in y -Richtung

$$y = \frac{QE}{2m} t^2$$

Q	Ladung
E	elektrische Feldstärke
F_{el}	elektrische Kraft ($F_{el} = QE$)
m	Masse des Teilchens
v	Geschwindigkeit
y	y -Koordinate

M.4.3 Stromleitung in Gasen

Gase sind gewöhnlich *Nichtleiter*. Um sie elektrisch leitend zu machen, müssen entweder Ladungsträger eingebracht (*Ladungsträgerinjektion*) oder die Gase *ionisiert* werden.

Unselbständige Gasentladung

Hierbei befinden sich ionisierte Gase zwischen zwei Elektroden der Spannung U . Bild M-19 zeigt den Strom-Spannungs-Verlauf.

Im Bereich I gilt das Ohmsche Gesetz: Die Gasionen stoßen auf dem Weg zur gegenpoligen Elektrode auf den Widerstand anderer Gasatome und *rekombinieren*, falls sie auf entgegengesetzte Ladungen treffen (*Rekombinationsbereich*). Steigt die Spannung weiter, dann fließen die Gasionen so schnell zur entgegengesetzten Elektrode ab, daß keine Rekombinationen stattfinden können. Es stellt sich ein *Sättigungsstrom* ein. Werden die Elektronen so stark beschleunigt, daß ihre kinetische Energie neutrale Gasatome zu ioni-

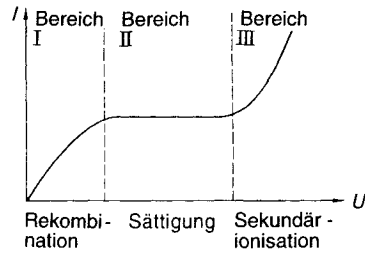


Bild M-19. Strom-Spannungs-Verlauf einer unselbständigen Gasentladung.

sieren vermag, kommt es zur Sekundärionisation. Diese *Sekundärionen* tragen zur weiteren Stromzunahme bei (Bereich III).

Selbständige Gasentladung

Diese Entladung heißt *selbständig*, weil sie ohne ständige Zufuhr von Ionen abläuft. Die kinetische Energie der Ionen ist so hoch, daß diese weitere neutrale Gasatome ionisieren können. Für die Ionisationsenergie gilt

$$W \sim \frac{eE}{p}; \quad (\text{M-14})$$

e elektrische Elementarladung

($e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$),

E elektrische Feldstärke,

p Gasdruck.

Der *Ionisierungskoeffizient* s gibt an, wieviel Ionen je Wegstrecke zusätzlich erzeugt werden und ist eine Funktion von E/p , so daß gilt

$$s = f(E/p). \quad (\text{M-15})$$

Mit der Zunahme des Stroms steigt die Anzahl der Ladungsträger. Deshalb müssen selbständige Gasentladungen mit einem strombegrenzenden Vorwiderstand (*Drossel*) betrieben werden.

Glimmentladung

Wird der Gasdruck stark verringert, dann entstehen *Leuchtbereiche*. In der Nähe der Kathode entsteht das Licht durch die Rekombination der auftreffenden *positiven Ionen*. Hier findet auch der größte Spannungsabfall statt.

Die Glimmentladung spielt in der Lichttechnik eine bedeutende Rolle: Leucht­röhren und Leuchtstoffröhren, Glimmlampen, Elektronenblitzröhren und Quecksilberdampflampen.

Katodenstrahlen

Wird in einer Gasentladungsröhre der Druck auf 10 Pa bis 1 Pa verringert, so ist die Wahrscheinlichkeit für Stoßprozesse gering. Deshalb können die Elektronen aus der Katode das Feld mit hoher und unverminderter Geschwindigkeit durchlaufen (*Katodenstrahlen*). Die Katodenstrahlen können fotografische Schichten *schwärzen* oder bestimmte Stoffe zum *Leuchten* bringen. Ferner werden sie durch magnetische und elektrische Felder abgelenkt. Sie werden zur Bilderzeugung in *Fernsehröhren* eingesetzt.

M.5 Magnetisches Feld

M.5.1 Beschreibung

Stromdurchflossene Leiter und Werkstoffe mit nicht gesättigten Spinmomenten bilden die *Magnete*. Die Richtung der im Raum wirkenden *magnetischen Kräfte* (Unterschied zur elektrischen Kraft, s. Übersicht M-2) lassen sich durch die Kraftwirkung auf einen kleinen Probemagneten bestimmen. Das magnetische Feld ist ein *Vektorfeld*:

Das magnetische Feld rührt von *elektrischen Strömen* her und beschreibt die *Wirkungslinien* der magnetischen Kräfte in Betrag und Richtung.

Bild M-20 zeigt das Magnetfeld eines Stabmagneten und eines geraden, stromdurchflossenen Leiters.

Allen Magneten ist folgendes gemeinsam:

- Ein Magnet besitzt zwei Pole: den Nord- und den Südpol. Es gibt keine magnetischen Monopole.
- Gleichnamige Pole stoßen sich ab, ungleichnamige ziehen sich an.
- Außerhalb des Magneten verlaufen die magnetischen Feldlinien vom Nord- zum Südpol (positive Feldrichtung).

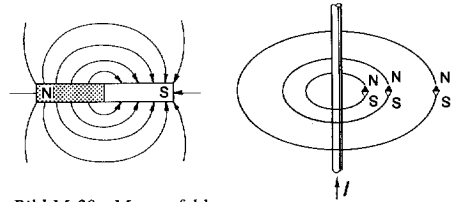


Bild M-20. Magnetfelder.

a) Stabmagnet,

b) gerader, stromdurchflossener Leiter

- Die magnetischen Feldlinien sind (im Gegensatz zu den elektrischen Feldlinien) *in sich geschlossen*, d. h., sie weisen weder eine Quelle noch eine Senke auf (Fortsetzung der Feldlinien im Innern des Magneten).
- Die Tangente an die magnetischen Feldlinien gibt die *Kraftrichtung* an. Die Richtung der Kraft ist eindeutig. Im Gegensatz zu den elektrischen schneiden sich die magnetischen Feldlinien nicht.

Erdmagnetfeld

Der *magnetische Südpol* der Erde liegt in der Nähe des geografischen Nordpols (74° nördlicher Breite und 100° westlicher Länge auf der Halbinsel Boothia im Norden Kanadas). Der *magnetische Nordpol* befindet sich in der Nähe des geografischen Südpols (72° südlicher Breite und 155° östlicher Länge in der Antarktis). Die Magnetpole der Erde sind nicht stabil; sie wandern geringfügig.

Deklination ist die Abweichung des Erdmagnetfeldes von der geografischen Nord-Süd-Richtung (für Deutschland etwa 2° westlich).

Inklination ist die Abweichung von der Horizontalen.

Elektromagnetismus

Ein stromdurchflossener Leiter ist *immer* von einem Magnetfeld umgeben. Ein stromdurchflossener, gerader Leiter weist ein Magnetfeld auf, das aus konzentrischen Kreisen besteht (Bild M-20 b).

M.5.2 Magnetische Feldstärke (magnetische Erregung)

Der elektrische Strom I und das Magnetfeld bilden ein Rechtssystem, das man sich gut mit der *Rechten Hand-Regel* merken kann: Der

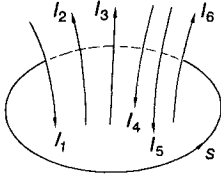


Bild M-21. Durchflutungsgesetz.

Daumen der rechten Hand zeigt in *Stromrichtung*, und die gekrümmten Finger weisen in *Feldrichtung*.

Das *Durchflutungsgesetz* beschreibt den Zusammenhang zwischen der Stromdichte j und der magnetischen Feldstärke (magnetischen Erregung) H :

$$\Theta = \oint \mathbf{H} \, ds = \oint_A \mathbf{j} \, dA = \sum I_i. \quad (\text{M-16})$$

Das Integral der magnetischen Feldstärke längs einer geschlossenen Umlauflinie ist gleich dem gesamten durch diese Fläche hindurchfließenden Strom I , der Durchflutung.

Bild M-21 zeigt die Durchflutung als *Summe aller Ströme* (Vorzeichen beachten), die eine geschlossene Kurve (bzw. eine abgegrenzte Fläche) durchströmen.

Einheit der magnetischen Feldstärke H ist 1 A/m.

Analog zur elektrischen Spannung $\int \mathbf{E} \, ds$ wird $\int \mathbf{H} \, ds$ als *magnetische Spannung* V bezeichnet. Für eine Zylinderspule und eine Ringspule ergibt sich

$$V = Hl = IN; \quad (\text{M-17})$$

H magnetische Feldstärke,
 l Länge der Zylinderspule,
 I Stromstärke,
 N Windungszahl.

Ist die magnetische Feldstärke entlang des Weges *unterschiedlich groß*, dann werden

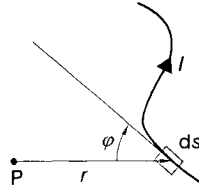


Bild M-22. Zum Biot-Savartschen Gesetz.

die magnetischen Teilspannungen aufsummiert:

$$V = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 + \dots + H_n l_n \\ = \sum H_i l_i = \int \mathbf{H} \, ds. \quad (\text{M-18})$$

Mit dem *Biot-Savartschen Gesetz* können die magnetischen Feldstärken beliebiger Leitergeometrien berechnet werden. Ein kleines Leiterstück ds liefert in einem Punkt P in der Entfernung r einen Beitrag dH zum magnetischen Feld (Bild M-22):

$$dH = \frac{I \, ds}{4\pi r^2} \sin \varphi; \quad (\text{M-19})$$

I elektrische Stromstärke,
 r Abstand vom stromdurchflossenen Leiter,
 φ Winkel zwischen Abstandsvektor zum Raumpunkt P und stromdurchflossenen Leiter.

M.5.3 Magnetische Induktion (Flußdichte)

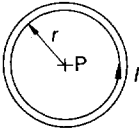
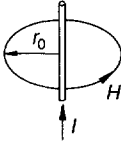
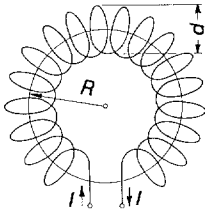
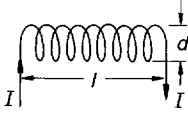

Kraft auf bewegte Ladungsträger im Magnetfeld

Werden Kräfte im Magnetfeld betrachtet, dann wird dazu die magnetische Induktion B benötigt. Sie hängt mit der magnetischen Feldstärke H über die *magnetische Feldkonstante* μ_0 zusammen (gilt nur für Vakuum):

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}; \quad (\text{M-20})$$

μ_0 magnetische Feldkonstante
 $[\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1,257 \cdot 10^{-6} \, \text{V} \cdot \text{s}/(\text{A} \cdot \text{m})]$,
 H magnetische Feldstärke.

Tabelle M-12. Magnetische Feldstärke unterschiedlicher Leiteranordnungen.

Leitergeometrie	Bezugspunkt	Formel
kreisförmiger Leiter 	Mittelpunkt	$H = \frac{I}{2r}$
langer, gerader Leiter 	im Abstand r_0	$H = \frac{I}{2\pi r_0}$
Ringspule (Toroid) 	im Abstand R	$H = \frac{NI}{2\pi R}$
Zylinderspule (Solenoid) 	Achsmittelpunkt im Inneren (Länge l)	$H = \frac{IN}{\sqrt{l^2 + d^2}}$
	Mittelpunkt der Endflächen	$H = \frac{IN}{2\sqrt{l^2 + d^2}}$
	im Inneren (Spule sehr lang; $l \gg d$)	$H = \frac{IN}{l}$
voller zylindrischer Leiter 	Abstand x von der Achse	$H = \frac{Ix}{2\pi r^2}$

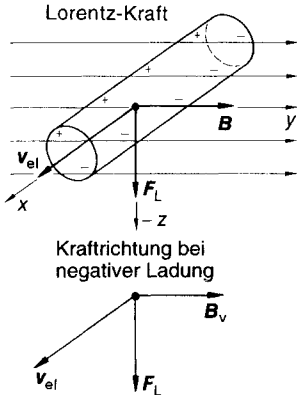


Bild M-23. Lorentz-Kraft.

Bewegt sich eine Ladung Q mit der Geschwindigkeit v durch ein Magnetfeld der magnetischen Induktion B , so wirkt auf die Ladung die **Lorentz-Kraft** F :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}); \\ |\mathbf{F}| &= Q v B \sin(\alpha, \mathbf{B}); \end{aligned} \quad (\text{M-21})$$

Q Ladung,
 v Geschwindigkeit des geladenen Teilchens,
 B magnetische Induktion.

Die Einheit der magnetischen Induktion ist $1 \text{ V} \cdot \text{s/m}^2 = 1 \text{ T}$ (Tesla).

Die Lorentz-Kraft wirkt senkrecht zur Fläche, die v und B aufspannen (Kreuzprodukt). Bei einer negativen Ladung wirkt die Kraft entgegengesetzt.

Da die Lorentz-Kraft – analog zur Zentripetalkraft einer Kreisbewegung in der Mechanik – senkrecht zur Bahngeschwindigkeit v

wirkt, führen die geladenen Teilchen im homogenen Magnetfeld eine **Kreisbewegung** aus. Für den Radius gilt

$$r = \frac{m v}{Q B}; \quad (\text{M-22})$$

m Masse des geladenen Teilchens,
 v Geschwindigkeit des geladenen Teilchens,
 Q Ladung des Teilchens,
 B magnetische Induktion.

Für die **spezifische Ladung** Q/m ergibt sich

$$\frac{Q}{m} = \frac{v}{r B}. \quad (\text{M-23})$$

Die spezifische Ladung eines Elektrons beträgt

$$\frac{-e}{m_{\text{el}}} = -1,76 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}; \quad (\text{M-24})$$

e Elementarladung
 $(e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s})$,
 m_{el} Masse des Elektrons
 $(m_{\text{el}} = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg})$.

Kraft auf stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld

Auf einen stromdurchflossenen geraden Leiter wirkt im Magnetfeld folgende Kraft (Bild M-24):

$$\mathbf{F} = I(\mathbf{l} \times \mathbf{B}), \quad F = I l B \sin(\alpha, \mathbf{B}); \quad (\text{M-25})$$

I Strom,
 l Länge des Drahtes.

a) Kraftwirkung

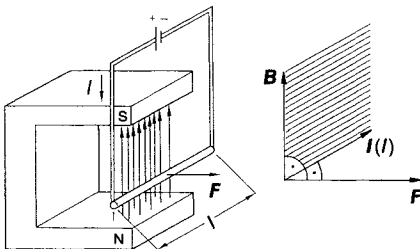
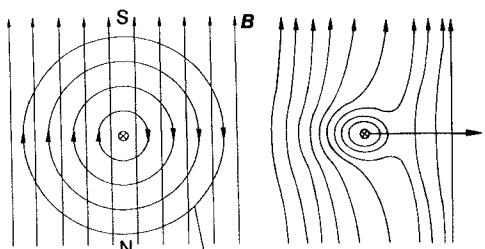


Bild M-24. Kraftwirkung auf stromdurchflossenen Leiter.

b) Überlagerung der Magnetfelder



Magnetfelder des Leiters

Die Richtungen werden durch die *Rechte-Hand-Regel* veranschaulicht: Daumen in Stromrichtung, Zeigefinger in magnetischer Feldrichtung. Dann zeigt Mittelfinger in Kraftrichtung.

Folgende Gleichung erklärt die magnetische Induktion B :

$$B = \frac{F}{Il}. \quad (\text{M-26})$$

Die magnetische Induktion B gibt an, wie groß die Kraft F ist, die auf einen mit dem Strom I durchflossenen Leiter der Länge l wirkt, der senkrecht zu den Feldlinien steht.

Kraft zwischen zwei parallelen, stromdurchflossenen Leitern

Befinden sich zwei stromdurchflossene Leiter im Abstand d voneinander, so spürt der Leiter 1 das Magnetfeld des Leiters 2 (und umgekehrt). Die magnetische Feldstärke des Leiters 2 am Ort des Leiters 1 ist nach Tabelle M-12:

$$H = \frac{I_2}{2\pi d}. \quad (\text{M-27})$$

Daraus läßt sich die magnetische Induktion B wegen $B = \mu_0 H$ herrechnen. Man erhält für die Kraft F_{12} zwischen zwei parallelen, stromdurchflossenen Leitern:

$$F_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d}. \quad (\text{M-28})$$

Die Basiseinheit der elektrischen Stromstärke I , das Ampere, ist mit der Kraftwirkung festgelegt: Auf zwei parallele, stromfließende Leiter im Abstand von 1 m wirkt die Kraft $2 \cdot 10^{-7}$ N pro Meter Leiterlänge, wenn ein Strom von 1 A fließt.

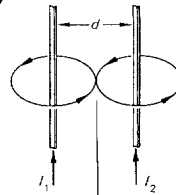
Wie Bild M-25 zeigt, ziehen sich parallele Leiter mit *gleicher Stromrichtung an*, mit entgegengesetzter Stromrichtung stoßen sie sich ab.

Hall-Effekt

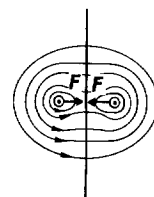
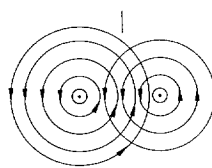
Befindet sich ein stromdurchflossener Leiter in einem Magnetfeld, dessen Feldrichtung

Gleiche Stromrichtung
bewirkt
Anziehung

a)

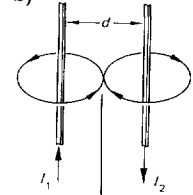


Schwächung
des Feldes



Entgegengesetzte
Stromrichtung bewirkt
Abstoßung

b)



Verstärkung
des Feldes

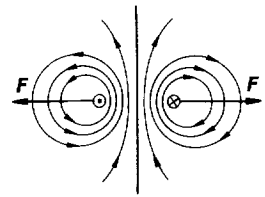
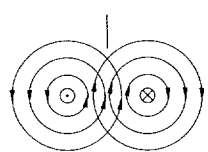


Bild M-25. Kraft zwischen parallelen, stromdurchflossenen Leitern.

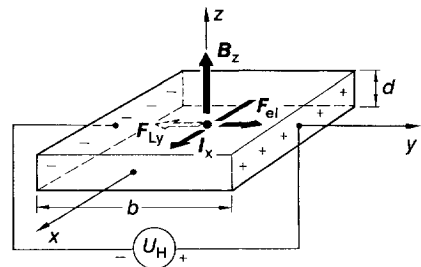


Bild M-26. Hall-Effekt.

senkrecht zur Stromrichtung steht, dann werden die Ladungen senkrecht zur Strom- und Magnetfeldrichtung abgelenkt. Dadurch entsteht in dieser Richtung ein elektrisches Feld und folglich auch eine Spannung, die *Hall-Spannung* U_H genannt wird (Bild M-26):

$$U_H = B_z v_x b = \frac{1}{ne} j_x B_z b = R_H j_x B_z b$$

$$= R_H \frac{I_x B_z}{d}; \quad (\text{M-29})$$

- B_z magnetische Induktion in z-Richtung,
 v_x Geschwindigkeit der Ladungsträger in x-Richtung,
 b Breite der Platte,
 R_H Hall-Koeffizient [$R_H = 1/(ne)$],
 n Elektronendichte (Anzahl der Elektronen je Volumen),
 e Elementarladung ($e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$),
 j_x Stromdichte in x-Richtung,
 I_x Stromstärke,
 d Dicke der Platte.

Die Hall-Spannung ist proportional zur magnetischen Induktion. Deshalb werden *Hall-Sonden* zur Messung von Magnetfeldern verwendet. In *Hall-Generatoren* werden zwei elektrische Größen multipliziert ($I_x B_z$).

Der Hall-Koeffizient R_H ist bestimmt durch

$$R_H = 1/(ne). \quad (\text{M-30})$$

Durch seine Messung können folgende Größen bestimmt werden:

- Vorzeichen der Ladungsträger,
- Ladungsträgerkonzentration n ,
- räumliche Ladungsdichte $Q/V = ne = 1/R_H$,
- Beweglichkeit der Ladungsträger $\mu = \propto R_H$ (\propto elektrische Leitfähigkeit).

Magnetisches Moment

Während das elektrische Feld E als Kraft F je Ladung Q definiert werden kann, wird (wegen des Fehlens von Monopolen, die der Ladung entsprechend würden) die magnetische Induktion B durch ein Drehmoment M beschrieben (Bild M-27a). Die stromdurchflossene Leiterschleife besitzt ein *magnetisches Moment* m , dessen Vektor senkrecht auf der Fläche der Leiterschleife steht.

Das magnetische Moment m kann analog zum elektrischen Feld (elektrisches Dipolmoment) als *magnetisches Dipolmoment* interpretiert werden (Bild M-27b).

Tabelle M-13. Hall-Koeffizient verschiedener Werkstoffe.

Werkstoff		R_H $10^{-11} \text{ m}^3/\text{C}$
Elektronenleitung		
Kupfer	Cu	− 5,5
Gold	Au	− 7,5
Natrium	Na	− 25
Caesium	Cs	− 28
Löcherleitung		
Cadmium	Cd	+ 6
Zinn	Sn	+ 14
Beryllium	Be	+ 24,4
Halbleiter		
Wismut	Bi	− 5 · 10 ⁴
Indium-Arsenid	InAs	− 10 ⁷

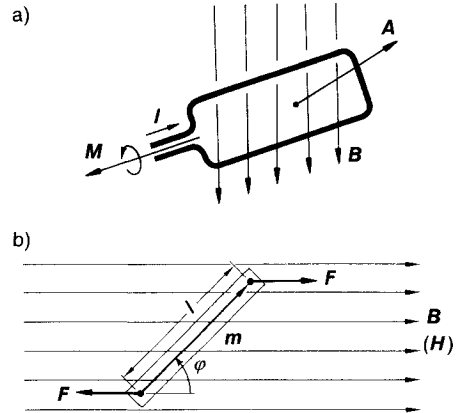


Bild M-27. Drehmoment einer Leiterschleife (a) und magnetisches Moment (b).

$$M = m \times B \quad m = P I$$

$$m = A I$$

A Fläche der Leiterschleife (Richtung senkrecht zur Fläche)

B magnetische Induktion

l fiktiver Abstand zwischen Nord- und Südpol

m magnetisches Moment ($m = A I$)

P magnetische Polstärke ($P = F/H$: Quotient aus Kraft und magnetischer Feldstärke; analog zur elektrischen Ladung $Q = F/E$)

Man unterscheidet das *Ampèresche* magnetische Moment m_A (äußeres Magnetfeld wird durch die magnetische Induktion B bestimmt) und das *Coulombsche* magnetische Moment m_C (äußeres Magnetfeld wird durch die magnetische Feldstärke H bestimmt).

Magnetische Induktion

Die magnetische Induktion B kann auch über den magnetischen Fluß definiert werden; denn beim Ändern des magnetischen Flusses Φ durch eine Leiterschleife entsteht ein Spannungsstoß $\int U(t) dt$:

$$\Delta \Phi = \frac{\int U(t) dt}{N}; \quad (M-31)$$

$\int U(t) dt$ Spannungsstoß,
 N Windungszahl der Schleife.

Einheit des Flusses ist $1 \text{ V} \cdot \text{s} = 1 \text{ Wb}$ (Weber).

Die magnetische Induktion (Flußdichte) B beschreibt den magnetischen Fluß *je Flächeneinheit*:

$$B = \frac{d\Phi}{dA}. \quad (M-32)$$

Die Einheit ist $1 \text{ V} \cdot \text{s/m}^2 = 1 \text{ T}$ (Tesla).

Für den Spannungsstoß ist nur die Flußdichte senkrecht zur Fläche von Bedeutung. Sind die magnetischen Feldlinien im Winkel φ zur Flächennormalen geneigt, dann ergibt sich (Bild M-28).

$$\Phi = \int B dA = B \cos \varphi dA.$$

Streufuß

Bei Luftzwischenräumen im Magneten befindet sich ein Teil des Flusses Φ_s außerhalb der betrachteten Fläche. Er wird *Streufuß* Φ_s genannt. Der Nutzfluß Φ_N ergibt sich als Differenz des Gesamtflusses Φ_{ges} und des Streuflusses Φ_s :

$$\Phi_N = \Phi_{\text{ges}} - \Phi_s. \quad (M-33)$$

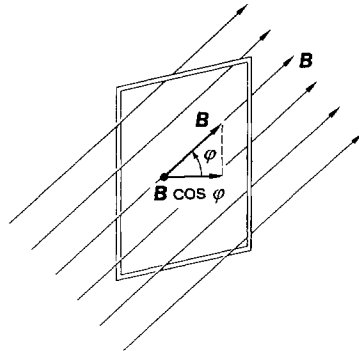


Bild M-28. Beliebige orientierte Schleife im Magnetfeld.

Als *Streufaktor* σ bezeichnet man das Verhältnis von Streufuß Φ_s zum Nutzfluß Φ_N :

$$\sigma = \Phi_s / \Phi_N. \quad (M-34)$$

M.5.4 Materie im Magnetfeld

Wird Materie in ein magnetisches Feld gebracht, so ändert sich die magnetische Induktion von B_0 (magnetische Induktion ohne Materie) auf B (magnetische Induktion mit Materie), während die magnetische Feldstärke H invariant ist, da der eingepreßte Strom konstant ist (Übersicht M-21). Durch die magnetische Polarisation J bzw. die Magnetisierung M ändert sich die magnetische Flußdichte B .

Werkstoffe werden entsprechend ihrem Verhalten im Magnetfeld nach Tabelle M-14 eingeordnet.

Ferromagnetismus

Der Ferromagnetismus ist technisch sehr bedeutend. Die magnetische Wirkung rührt von unaufgefüllten inneren Elektronenschalen her, wie dies vor allem bei Übergangsmetallen zu finden ist (Fe, Ni, Co, Gd, Er). Es existieren ganze Kristallbereiche gleicher Magnetisierung (*Weißsche Bezirke*). Die magnetischen Eigenschaften verschwinden oberhalb der *Curie-Temperatur* (Tabelle M-15).

Wie Bild M-29 zeigt, ist die Permeabilitätszahl μ_r bzw. die magnetische Suszeptibilität χ_m eine

Übersicht M-21. Materie im Magnetfeld.

eingeprägter Strom \rightarrow magnetische Feldstärke H
invariant

$$B_0 = \mu_0 H$$

$$B = \mu_r \mu_0 H = \mu H$$

Permeabilitätszahl

$$\mu_r = \frac{B}{B_0}$$

magnetische Polarisation J (Änderung der
Flußdichte)

$$J = B - B_0 = B - \mu_0 H$$

$$J = (\underbrace{\mu_r - 1}_{\chi_m}) \mu_0 H = \chi_m \mu_0 H$$

Magnetisierung M (scheinbare Änderung der mag-
netischen Feldstärke)

$$M = J/\mu_0 = (\mu_r - 1) H = \chi_m H$$

$$M = B/\mu_0 - H$$

$$B = \mu_0 H + J = \mu_0 (H + J/\mu_0) = \mu_0 (H + M)$$

B	magnetische Induktion in Materie
B_0	magnetische Induktion ohne Materie
H	magnetische Feldstärke
J	magnetische Polarisation
M	Magnetisierung
μ	Permeabilität ($\mu = \mu_0 \mu_r$)
μ_0	magnetische Feldkonstante [$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1,2566 \cdot 10^{-6} \text{ V} \cdot \text{s}/(\text{A} \cdot \text{m})$]
μ_r	Permeabilitätszahl
χ_m	magnetische Suszeptibilität ($\chi_m = \mu_r - 1$)

komplizierte Funktion der magnetischen
Feldstärke H . Typisch ist auch der Hysteres-
verlauf, der die Abhängigkeit der magneti-
schen Induktion B von der magnetischen
Feldstärke H beschreibt.

Bei einem zylindrischen Probekörper wird
durch die entmagnetisierende Wirkung der
Enden die magnetische Feldstärke H im In-
nern geschwächt:

$$H = H_a - NM \quad (\text{M-35})$$

H_a außen anliegende Feldstärke,

N Entmagnetisierungsfaktor
(Tabelle M-17),

M Magnetisierung ($M = \chi_m H = J/\mu_0$).

*Tabelle M-14. Einteilung der magnetischen
Werkstoffe.*

$\mu_r (\chi_m)$	ferromagnetisch $\mu_r \gg 1; \chi_m \gg 0$ (Fe, Ni, Co)
$\mu_r > 1 (\chi_m > 0)$	
\uparrow	paramagnetisch $10^{-6} < \chi_m < 10^{-2}$ (Al, Pt, Ta)
$\mu_r = 1 (\chi_m = 0)$	
\downarrow	diamagnetisch $-10^{-4} < \chi_m < -10^{-9}$ (Cu, Bi, Pb)
$\mu_r < 1 (\chi_m < 0)$	

Werkstoff	magnetische Suszeptibilität χ_m
-----------	---

Ferromagnetika

Mu-Metall (75 Ni-Fe)	bis $9 \cdot 10^4$
Fe (rein)	10^4
Fe-Si	$6 \cdot 10^3$
Ferrite (weich)	$1 \cdot 10^3$
AlNiCo	3
Ferrite (hart)	0,3

Paramagnetika

O ₂ (flüssig)	$3,6 \cdot 10^{-3}$
Pt	$2,5 \cdot 10^{-4}$
Al	$2,4 \cdot 10^{-5}$
O ₂ (gasförmig)	$1,5 \cdot 10^{-6}$

Diamagnetika

N ₂ (gasförmig)	$-6,75 \cdot 10^{-9}$
Bi	$-1,5 \cdot 10^{-4}$
Au	$-2,9 \cdot 10^{-5}$
Cu	$-1 \cdot 10^{-5}$
H ₂ O	$-7 \cdot 10^{-6}$

*Tabelle M-15. Curie-Temperatur einiger ferro-
magnetischer Werkstoffe.*

Werkstoff	ferromagnetische Curie-Temperatur T_C K
Dy	87
Gd	289
Cu ₂ MnAl	603
Ni	631
Fe	1042
Co	1400

Permeabilitätszahl in Abhängigkeit von der magnetischen Feldstärke H

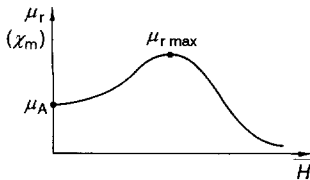
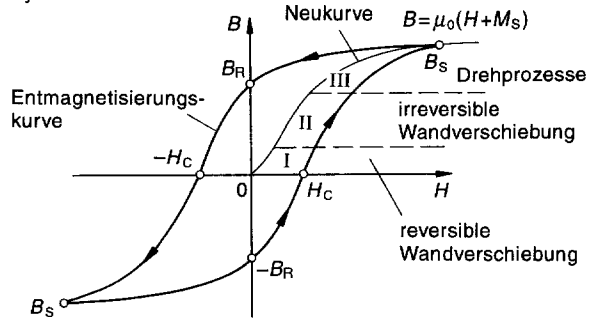


Bild M-29. Hystereseschleife.

Hysteresekurve



Wird bei einer Messung der Hysteresekurve $B(H_a)$ aufgezeichnet, so entsteht eine *gescherte* Kurve. Durch Anwendung von Gl. (M-35) kann sie in die Form $B(H)$ übergeführt werden (*Zurückscheren*).

Hysteresekurve

Die Hysteresekurve kommt folgendermaßen zustande:

- *Neukurve.*
Sie wird bei völlig unmagnetischem Material durchlaufen.
- Bereich I:
Die magnetischen Wandverschiebungen (Vergrößerung von magnetischen Bereichen in Feldrichtung) sind reversibel.
- Bereich II:
Die magnetischen Wandverschiebungen sind nicht mehr reversibel.
- Bereich III:
Hier finden Drehprozesse statt; die magnetischen Bereiche werden vollends in die Richtung des äußeren Feldes gedreht.

– Sättigungsinduktion B_S

Ab einer bestimmten äußeren Feldstärke kann die Magnetisierung nicht weiter gesteigert (Sättigungsmagnetisierung M_S) werden, da alle magnetischen Bereiche bereits in Vorzugsrichtung liegen.

– Entmagnetisierungskurve

Remanenzinduktion B_R

Beim Abschalten des Feldes ($H = 0$) ist das Material nicht wieder völlig unmagnetisch, sondern besitzt eine magnetische Restinduktion, die man als Remanenzinduktion B_R bezeichnet.

Koerzitivfeldstärke H_C

Mit der Gegenfeldstärke H_C gelingt es, das Material wieder unmagnetisch zu machen ($B = 0$).

Berechnung von Dauermagnetsystemen

Ein Dauermagnetsystem nach Bild M-30 besteht aus einem Dauermagneten und zwei weichmagnetischen Polschuhen, die den magnetischen Fluß verlustarm zum Luftspalt leiten. Dort wird die magnetische Energie genutzt. Von Bedeutung ist deshalb der 2. Quadrant der Hysteresekurve.

Die *maximal nutzbare Energie je Volumen* beträgt $(BH)_{\max}$.

Zur Berechnung eines Dauermagnetsystems sind folgende Gleichungen von Bedeutung:

- *Durchflutungsgesetz für $\Theta = 0$ allgemein:*

$$\oint \mathbf{H} \, ds = 0.$$

Magnetkreis (Bild M-30):

$$H_m l_m = -\gamma H_1 l_1; \quad (\text{M-36})$$

H_m, H_1 magnetische Feldstärke im Magneten bzw. im Luftspalt,
 l_m, l_1 Länge des Magneten bzw. des Luftspalts,

γ Spannungsfaktor ($\gamma > 1$). Er berücksichtigt unmagnetische Bereiche, z.B. die unmagnetischen Zwischenräume von Klebeschichten (in der Praxis $\gamma = 1$ bis 1,3).

Tabelle M-16. Technische Daten wichtiger Hartmagnetwerkstoffe.

	ab- schreckungs- gehärteter Stahl	aus- scheidungs- gehärtete Legierungen	kalt- bearbeitete Legierungen	Pulver- magnete	Legierungen mit Ordnungs- struktur	Seltene Erden (SE)
Werkstoffe	36 % Co 64 % Fe	AlNiCo (9Al 15Ni 23Co 4Cu) CuNiCo (35Cu 24Ni 41Co) CoFe (52Co 38Fe 10V) FeMo (68Fe 20Mo 12Co)	CuNiFe (60Cu 20Ni 20Fe) CoV (53Co14V 33Fe)	Ba-Ferrit Sr-Ferrit	CoPt FePt	SECo ₅ (SE: Sm, Ce) NdFeB
B_R in T	0,9	1,3	1	0,38	0,6	0,9; 1,2
$-H_c$ in $\frac{kA}{m}$	20	56	42	132	360	700; 800
$(BH)_{max}$ in $10^6 \frac{kJ}{m^3}$	8	56	28	25	64	160; 280
Bemerkungen	gute Form- barkeit; teuer; kleines $(BH)_{max}$	gute magnetische Stabilität	Anwendung: Drähte zur Tonauf- zeichnung	beliebig formbar; sehr hart	teuer; Spezial- magnete	teuer; Spezial- magnete

– *Erhaltung des magnetischen Flusses*
(Flußgleichung)
allgemein:
 $\oint \mathbf{B} \, d\mathbf{A} = \text{konstant}$
Magnetkreis (Bild M-30):

$B_m A_m = \sigma B_l A_l ;$

(M-37)

B_m, B_l magnetische Induktion im Magneten bzw. im Luftspalt,
 A_m, A_l Querschnittsfläche des Magneten bzw. des Luftspalts,
 σ Streufaktor. Er berücksichtigt die magnetische Induktion, die nicht durch den Luftspalt geht (in der Praxis zwischen 1 und 10; 10 bedeutet, daß nur 10% des magnetischen Flusses des Dauermagneten als Nutzfluß im Luftspalt zur Verfügung steht).

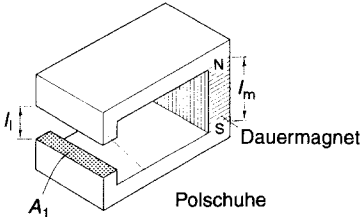


Bild M-30. Dauermagnetsystem.

Bild M-31 zeigt die Entmagnetisierungskurve (2. Quadrant) und den Arbeitspunkt A [maximaler Energiewert: $(BH)_{max}$]. Der Arbeitspunkt A hat die Koordinaten $(-H_m, B_m)$. Die Scherungsgerade ist die Gerade vom Nullpunkt (0) zum Arbeitspunkt A. Sie hat die Steigung s :

$s = \frac{-B_m}{H_m}.$

(M-38)

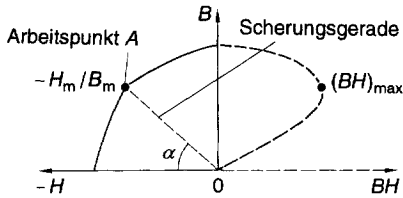


Bild M-31. Scherungsgerade und Arbeitspunkt eines Dauermagneten.

Tabelle M-17. Entmagnetisierungsfaktoren.

Geometrie	Magnetisierung	Entmagnetisierungsfaktor N
dünne Platte	in Plattenebene	0
	senkrecht zur Plattenebene	1
sehr langer Stab	in Längsrichtung	0
	in Querrichtung	1/2
Kugel		1/3

Wird für $-B_m$ die Gleichung zur Flußerhaltung und für H_m das Durchflutungsgesetz eingesetzt, dann ergibt sich für die Gleichung der Scherungsgeraden:

$$-B_m = +s H_m = \mu_0 \frac{\sigma A_1 l_m}{\gamma A_1 l_1} H_m. \quad (\text{M-39})$$

Hieraus ist erkennbar, daß die Scherungsgerade *nur von der Geometrie* des Magneten, nicht aber vom Werkstoff abhängt.

Der Ausdruck

$$N = \frac{\gamma A_m l_1}{\sigma A_1 l_m} \quad (\text{M-40})$$

wird als *Entmagnetisierungsfaktor* bezeichnet. Damit wird die Scherungsgerade

$$B_m = -\frac{\mu_0}{N} H_m.$$

Das Produkt (BH) stellt die gespeicherte magnetische Energie je Volumen dar. Zur Berechnung der im Luftspalt zur Verfügung stehenden *Energie* wird (BH) mit dem Volumen des Luftspaltes multipliziert, und man erhält

$$(B_m H_m) V_m = B_1 H_1 V_1 \gamma \sigma = \mu_0 \gamma \sigma H_1^2 V_1. \quad (\text{M-41})$$

Nach B_1 aufgelöst, ergibt sich

$$B_1 = \sqrt{\frac{\mu_0 V_m}{\gamma \delta V_1}} (BH)_m; \quad (\text{M-42})$$

- B_m, B_1 magnetische Induktion im Magneten bzw. Luftspalt,
 H_m, H_1 magnetische Feldstärke im Magneten bzw. im Luftspalt,
 V_m, V_1 Volumen des Magneten bzw. des Luftspaltes,
 (BH) magnetische Energie je Volumen, magnetische Feldkonstante
 $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ V} \cdot \text{s}/(\text{A} \cdot \text{m})$,
 γ Spannungsfaktor (unmagnetische Bereiche),
 σ Streufaktor (Verlustinduktion im Luftspalt).

Das bedeutet: Die im Luftspalt zur Verfügung stehende magnetische Induktion B_1 ist proportional zum Magnetvolumen V_m und zum $(BH)_m$ -Wert. Um das Magnetvolumen möglichst *klein* zu halten, muß also der $(BH)_{\text{max}}$ -Wert eingestellt werden.

Energie des magnetischen Feldes

Im Magnetfeld ist die Arbeit W_{magn} gespeichert. Diese wird zum Aufbau des Magnetfeldes benötigt und beim Abbau des Feldes wieder frei.

Elektromagnetische Induktion

Das *Induktionsgesetz* zeigt den Zusammenhang zwischen elektrischem und magnetischem Feld. Es besagt, daß jede zeitliche Änderung des magnetischen Flusses $d\Phi/dt$ eine *elektrische Spannung* u_{ind} induziert:

$$u_{\text{ind}} = -N \frac{d\Phi}{dt} = -N \left(\frac{dB}{dt} A_n + \frac{dA_n}{dt} B \right); \quad (\text{M-43})$$

- N Windungszahl,
 $d\Phi$ Änderung des magnetischen Flusses,
 dt Zeitintervall,
 dB Änderung der magnetischen Induktion,
 A_n Fläche senkrecht zu den magnetischen Feldlinien.

Übersicht M-22. Magnetische Energie, Energiedichte und Tragkraft eines Elektromagneten.

magnetische Energie allgemein

$$W_{\text{magn}} = \int_0^t u_{\text{ind}} i \, dt = \frac{1}{2} L I^2$$

magnetische Energie eines inhomogenen Magnetfeldes

$$W_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \int B H \, dV = \frac{1}{2} \mu \int H^2 \, dV$$

Feldenergie einer Spule

$$W_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \mu H^2 A l = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \mu H^2 V$$

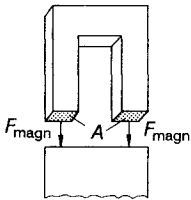
$$= \frac{1}{2} B H V = \frac{1}{2} I N \Phi$$

Energiedichte (Energie je Volumen) w

$$w = \frac{W_{\text{magn}}}{V} = \frac{1}{2} B H$$

Tragkraft eines Magneten F_{magn}

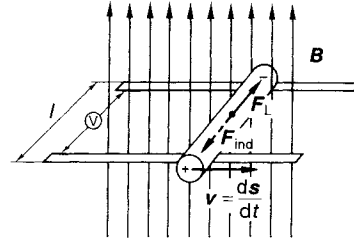
$$F_{\text{magn}} = \frac{\mu H^2 A}{2} = \frac{B H A}{2} = \frac{B^2 A}{2 \mu}$$



A	Fläche, durch die das Magnetfeld dringt
B	magnetische Induktion
H	magnetische Feldstärke
I, i	Stromstärke
L	Selbstinduktivität
F_{magn}	magnetische Kraft
l	Länge der Spule
N	Windungszahl
u_{ind}	induzierte Spannung
V	Volumen des Magnetfeldes
W_{magn}	magnetische Energie
w	Energiedichte
μ	Permeabilität ($\mu = \mu_0 \mu_r$)
μ_0	magnetische Feldkonstante [$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ V} \cdot \text{s}/(\text{A} \cdot \text{m})$]
μ_r	Permeabilitätszahl
Φ	magnetischer Fluß

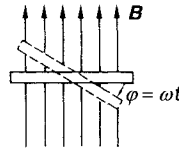
Übersicht M-23. Induktionsgesetz für bewegte Leiter im Magnetfeld und Flächenrotation mit konstanter Drehzahl.

bewegter Leiter im Magnetfeld



$$u_{\text{ind}} = N B l v$$

Flächenrotation mit konstanter Drehzahl



$$u_{\text{ind}} = N B A \omega \sin(\omega t)$$

A	rotierende Fläche
B	magnetische Induktion
l	Länge des Leiters
N	Windungszahl (in den Bildern ist $N = 1$)
u_{ind}	induzierte Spannung
v	Geschwindigkeit des Leiters, senkrecht zum Magnetfeld
ω	Kreisfrequenz

Aus dieser Gleichung geht hervor, daß es gleichgültig ist, ob sich

- das Magnetfeld ändert (dB/dt) bei konstanter Fläche A_n (Transformatorprinzip) oder
- bei gleichbleibender magnetischer Induktion B sich die senkrecht zum Magnetfeld stehende Fläche ändert (dA_n/dt) (Generatorprinzip).

Wirbelströme

Werden leitende Körper in einem Magnetfeld bewegt oder sind sie ruhend wechselnden Magnetfeldern ausgesetzt, dann werden in dem Leiter *Ströme induziert*. Man nennt sie Wirbelströme, weil die *Induktionsstromlinien* wie Wirbel in sich geschlossen sind (Bild M-32).

Wirbelströme erzeugen wiederum Magnetfelder, die das ursprüngliche magnetische Feld

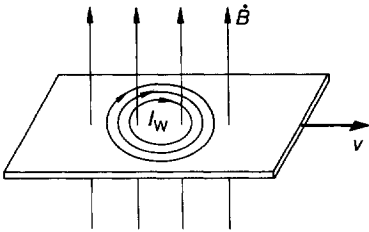


Bild M-32. Prinzip der Wirbelstromentstehung.

schwächen (Gegenfeld nach der Lenzschen Regel).

Der Wirbelstrom I_w kann folgendermaßen abgeschätzt werden:

$$I_w \approx U/(2R); \quad (\text{M-44})$$

U induzierte Spannung,

R Widerstand des im Magnetfeld liegenden Leiters.

Beispiele für technische Anwendungen sind Drehzahlmesser, Wirbelstrombremsen oder Meßgeräte für elektrische Energie (kWh-Zähler).

Skinneffekt

In einem von Wechselstrom durchflossenen geraden Leiter treten Wirbelströme in der Weise auf, daß diese *im Innern entgegen dem Wechselstrom und im äußeren in Stromrichtung* fließen. Bei hohen Frequenzen ($f > 10^7$ Hz) führt nur noch die Außenhaut des Leiters Strom (Skinneffekt: Hauteffekt, Bild M-33). In der Hochfrequenztechnik werden deshalb entweder viele dünne Drähte zu einem Kabel verdrillt, oder es werden Hohlleiter verwendet.

Die Eindringtiefe δ beschreibt die Entfernung von der Leiteroberfläche bis zu der Stelle im Leiterinnern, bei welcher der elektrische Strom auf den e -ten Teil (37%) abgesunken ist. Sie berechnet sich nach

$$\delta = \sqrt{2/(\kappa \mu \omega)}; \quad (\text{M-45})$$

κ elektrische Leitfähigkeit,

μ Permeabilität ($\mu = \mu_0 \mu_r$),

ω Kreisfrequenz.

Selbstinduktion

Bei der Änderung des magnetischen Flusses wird nicht nur in räumlich getrennten Leitern

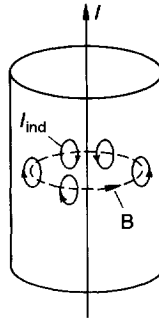


Bild M-33. Skin-Effekt.

Übersicht M-24. Selbstinduktion.

induzierte Spannung u_{ind}

$$u_{\text{ind}} = -N A_n \mu \frac{dH}{dt} = -\frac{N \Phi}{I} \frac{di}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

Induktivität L

$$L = \frac{N \Phi}{I} \quad \text{Einheit } 1 \text{ H} = 1 \text{ V} \cdot \text{s/A}$$

Definition:

Wenn bei der Änderung der Stromstärke I um 1 A innerhalb von 1 s eine Spannung U von 1 V induziert wird, dann beträgt die Induktivität $L = 1$ H.

Reihenschaltung von Induktivitäten

$$L_{\text{R ges}} = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n = \sum_{i=1}^n L_i$$

Parallelschaltung von Induktivitäten

$$\frac{1}{L_{\text{P ges}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{L_i}$$

A_n Fläche senkrecht zum Magnetfeld
 f Spulenformfaktor, beschreibt die Streuverluste ($0 < f < 1$)

I, i Stromstärke
 H magnetische Feldstärke

N Windungszahl

L Induktivität

l Spulenlänge

Φ magnetischer Fluß

μ Permeabilität ($\mu = \mu_0 \mu_r$)

μ_0 magnetische Feldkonstante
[$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ V} \cdot \text{s}/(\text{A} \cdot \text{m})$]

μ_r Permeabilitätszahl

eine Spannung induziert, sondern auch in der magnetfelderzeugenden Spule selbst. Diese Erscheinung nennt man *Selbstinduktion*. Der dann fließende Induktionsstrom ist dem vorhandenen Strom entgegengesetzt gerichtet (Lenzsche Regel; Übersicht M-24, Tabelle M-18).

Tabelle M-18. Induktivitäten verschiedener Leitergeometrien (NF: Niederfrequenz; HF: Hochfrequenz).

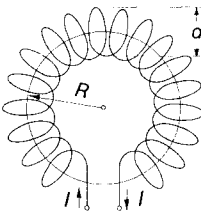
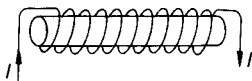
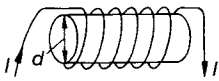
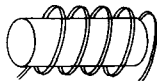

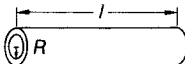
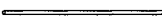
Spulengeometrie	Formel	Bemerkung
<p>Ringspule</p> 	$L = \frac{\mu A_n N^2}{l}$	<p>μ Permeabilität ($\mu = \mu_0 \mu_r$) A_n Spulenfläche N Windungszahl l mittlerer Spulenumfang oder Spulenlänge</p>
<p>sehr lange Zylinderspule</p> 		
<p>kurze Spule, einlagig</p> 	$L = f \frac{\mu A_n N^2}{l}$	<p>f Formfaktor $f \approx \frac{1}{1 + d/2l}$ für $l/d \geq 0,3$ d Spulendurchmesser l Spulenlänge</p>
<p>kurze Spule, mehrlagig</p> 	$L = \frac{21 \mu N^2 R}{4\pi} \left(\frac{R}{l+h} \right)^n$	<p>NF R Spulenradius h Höhe der Wicklung $n = 0,75$, wenn $\left(\frac{R}{l+h} < 1 \right)$, $n = 0,5$, wenn $\left[1 < \left(\frac{R}{l+h} \right) \leq 3 \right]$</p>
<p>einfacher Ring</p> 	$L = \mu R \left[\ln \left(\frac{R}{r} \right) + 0,25 \right]$	<p>NF R Ringradius r Leiterradius</p>
<p>dünnwandiges Rohr</p> 	$L = \mu R \left[\ln \left(\frac{R}{l} \right) + 1,5 \right]$	<p>NF R Rohrradius l Rohrlänge</p>
<p>Einfachleitung</p> 	$L = \frac{\mu l}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{2l}{r} \right) - 0,75 \right]$	<p>NF l Leiterlänge r Leiterradius</p>
	$L = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \left(\frac{2l}{r} \right)$	<p>HF</p>

Tabelle M-18 (Fortsetzung)

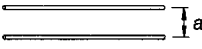
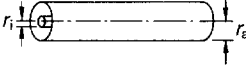
Spulengeometrie	Formel	Bemerkung
Doppelleitung 	$L = \frac{\mu l}{\pi} \left[\ln \left(\frac{a}{r} \right) + 0,25 \right] \quad \text{NF}$ $L = \frac{\mu l}{\pi} \ln \left(\frac{a}{r} \right) \quad \text{HF}$	l Leiterlänge a Leiterabstand r Leiterradius
Koaxialkabel 	$L = \frac{\mu l}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{r_a}{r_i} \right) + 0,25 \right] \quad \text{NF}$ $L = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \left(\frac{r_a}{r_i} \right) \quad \text{HF}$	l Leiterlänge r_a Radius des Außenleiters r_i Radius des Innenleiters

Tabelle M-19. Analogie des elektrischen und des magnetischen Feldes.

elektrisches Feld	Einheit	magnetisches Feld	Einheit
elektrische Urspannung		magnetische Urspannung (Durchflutung)	
U_0	V	$\Theta = N I$	A
elektrische Feldstärke		magnetische Feldstärke	
$E = - \frac{dU}{ds}$	$\frac{V}{m}$	$H = \frac{dI}{dl}$	$\frac{A}{m}$
elektrische Spannung		magnetische Spannung	
$U = - \int \mathbf{E}(s) ds$	V	$\Theta = \int \mathbf{H}(l) dl$	A
elektrische Stromstärke		induzierte Spannung	
$I = \frac{dQ}{dt}$	A	$U = - N \frac{d\Phi}{dt}$	V
elektrische Ladung (Verschiebungsfluß)		magnetischer Fluß	
$Q = \int I(t) dt$	A · s	$\Phi = B A$	V · s
Verschiebungsdichte		magnetische Flußdichte (Induktion)	
$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$	$\frac{A \cdot s}{m^2}$	$\mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{H}$	$\frac{V \cdot s}{m^2}$
elektrische Feldkonstante		magnetische Feldkonstante	
$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$	$\frac{A \cdot s}{V \cdot m}$	$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$	$\frac{V \cdot s}{A \cdot m}$
Dielektrizitätszahl ϵ_r Permittivität (Dielektrizitätskonstante)		Permeabilitätszahl μ_r Permeabilität	
$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$	$\frac{A \cdot s}{V \cdot m}$	$\mu = \mu_0 \mu_r$	$\frac{V \cdot s}{A \cdot m}$

Tabelle M-19 (Fortsetzung)

elektrisches Feld	Einheit	magnetisches Feld	Einheit
elektrischer Widerstand eines homogenen Drahtes $R_{\text{el}} = \frac{1}{\kappa} \frac{l}{A}$	Ω	magnetischer Widerstand eines homogenen Magnetkerns $R_{\text{m}} = \frac{1}{\mu} \frac{l}{A}$	$\frac{\text{A}}{\text{Wb}}$
elektrische Stromstärke $I = \frac{U_0}{R_{\text{el}}} \quad I = -\dot{Q}$ Strom	A	magnetischer Fluß $\Phi = \frac{\Theta}{R_{\text{m}}} \quad U = -\dot{\Phi}$ Spannung	$\text{V} \cdot \text{s}$
elektrischer Spannungsabfall $U = R I$	V	magnetischer Spannungsabfall $\Theta = \Phi R_{\text{m}} = H l$	A
Kapazität $C = \frac{Q}{U}$	F	Induktivität $L = \frac{\Phi}{I}$	H
Kapazität eines Plattenkondensators $C = \varepsilon \frac{A}{d}$	F	Induktivität einer Ringspule $L = \mu \frac{A N^2}{l}$	H
elektrische Kraft $F_{\text{el}} = Q E$	N	magnetische Kraft $F_{\text{m}} = Q v \times B$	N
elektrisches Dipolmoment $p = \frac{M}{E} = Q l$	$\text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}$	magnetisches Dipolmoment $m = \frac{M}{H} = \Phi I$	$\text{V} \cdot \text{s} \cdot \text{m}$
elektrische Energie des Kondensators $W_C = \frac{1}{2} C U^2$	$\text{W} \cdot \text{s} = \text{J}$	magnetische Energie einer Spule $W_L = \frac{1}{2} L I^2$	$\text{W} \cdot \text{s} = \text{J}$
elektrische Energiedichte $w_{\text{el}} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} D E$	$\frac{\text{W} \cdot \text{s}}{\text{m}^3} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$	magnetische Energiedichte $w_{\text{m}} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} B H$	$\frac{\text{W} \cdot \text{s}}{\text{m}^3} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$

Analogie elektrisches und magnetisches Feld

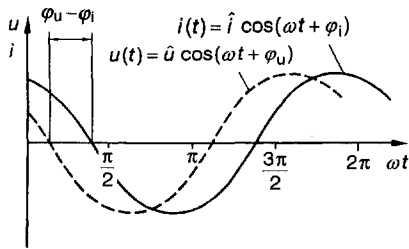
In Tabelle M-19 sind die entsprechenden Größen für das elektrische und das magnetische Feld zusammengestellt.

M.6 Wechselstromkreis**M.6.1 Wechselspannung und Wechselstrom**

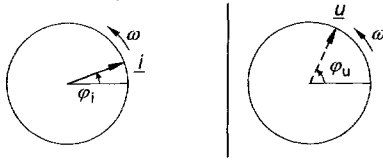
Im Wechselstromkreis findet ein *periodischer Verlauf* der Spannung $u(t)$ und des Stromes $i(t)$ statt. Die folgenden Bezeichnungen orientieren sich an DIN 40 110 (Wechselstromgrößen).

Übersicht M-25. Sinusförmiger Wechselstrom und sinusförmige Wechselspannung.

a) periodischer Verlauf



b) Zeigerdiagramm



$\varphi_u > \varphi_i$: Die Spannung eilt dem Strom voraus.

$\varphi_u < \varphi_i$: Die Spannung eilt dem Strom nach.

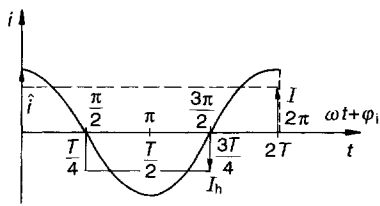
Die Phasenverschiebung hängt von der Induktivität L einer Spule und der Kapazität C eines Kondensators im Stromkreis ab.

c) Gleichungen

$$u(t) = \hat{u} e^{j(\omega t + \varphi_u)} \quad | \quad i(t) = \hat{i} e^{j(\omega t + \varphi_i)}$$

- f Frequenz
- i komplexer Strom
- \hat{i} Amplitude des Stroms
- T Periodendauer ($T = 1/f$)
- t Zeit
- \hat{u} Amplitude der Spannung
- u komplexe Spannung
- j imaginäre Einheit ($j = \sqrt{-1}$)
- φ_i Nullphasenwinkel des Stroms
- φ_u Nullphasenwinkel der Spannung
- ω Kreisfrequenz ($\omega = 2\pi f = 2\pi/T$)

Übersicht M-26. Kenngrößen des Wechselstromkreises.



Übersicht M-26 (Fortsetzung)

Effektivwert

Der *Effektivwert* ist diejenige Gleichstromgröße, die dieselbe Leistung erzeugt wie die Wechselstromgröße. Der Effektivwert ist der zeitlich quadratische Mittelwert der entsprechenden elektrischen Größe.

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$$

Effektivwert für sinusförmigen Verlauf des Stroms

$$I = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \approx 0,707 \hat{i}$$

Spannung

$$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \approx 0,707 \hat{u}$$

Halbschwingungsmittelwert

Der arithmetische Mittelwert über einer ganzen Periode wird *Gleichwert* genannt; er ist bei einem reinen Wechselstrom gleich null. Deshalb wird häufig der größte Wert des arithmetischen Mittelwerts über einer halben Periode der Wechselgröße ermittelt, welcher *Halbschwingungsmittelwert* genannt wird. Er entspricht der Höhe eines Rechtecks, dessen Flächeninhalt gleich dem einer Halbwelle ist. Für sinusförmigen Verlauf gilt

$$I_h = \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \hat{i} \cos \varphi d\varphi = \frac{\hat{i}}{\pi} [\sin \varphi]_{\pi/2}^{3\pi/2} = \frac{2\hat{i}}{\pi} \approx 0,637 \hat{i}$$

Scheitelfaktor (Crestfaktor) k_s

$$k_s = \frac{\text{Scheitelwert der Wechselgröße}}{\text{Effektivwert der Wechselgröße}} = \frac{\hat{i}}{I}$$

für Sinus bzw. Cosinus $k_s = \sqrt{2} \approx 1,414$

für Dreieck $k_s = 1,73$

Formfaktor k_f

$$k_f = \frac{\text{Effektivwert}}{\text{Halbschwingungsmittelwert}} = \frac{I}{I_h} \quad (1 < k_f < \infty)$$

für Sinus bzw. Cosinus $k_f = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,111 \dots$

I Effektivwert des Stroms

\hat{i} Amplitude des Stroms

I_h Halbschwingungsmittelwert des Stroms

k_f Formfaktor

k_s Scheitelfaktor

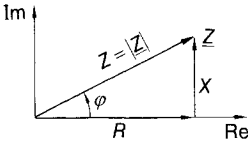
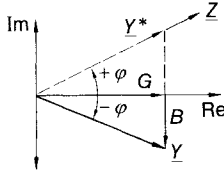
T Periodendauer

U Effektivwert der Spannung

\hat{u} Amplitude der Spannung

φ Phasenwinkel

Tabelle M-20. Komplexe Rechnung mit Effektivwerten im Wechselstromkreis.

	Komplexer Widerstand \underline{Z}	Komplexer Leitwert \underline{Y}
Wechselspannung	$\underline{U} = U e^{j(\omega t + \varphi_u)} = U e^{j\omega t} e^{j\varphi_u}$	
Wechselstrom	$\underline{I} = I e^{j(\omega t + \varphi_i)} = I e^{j\omega t} e^{j\varphi_i}$	
Ohmsches Gesetz	$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$ $\underline{Z} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$	$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}$ $\underline{Y} = \frac{I}{U} e^{j(\varphi_i - \varphi_u)}$
Zeiger-Diagramm	 $\underline{Z} = R + jX = Z e^{j\varphi}$	 $\underline{Y} = G - jB = Y e^{-j\varphi}$ $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$
Scheinanteil	Scheinwiderstand $Z = Z \cos \varphi$ (Impedanz) $Z = \frac{U}{I}$	Scheinleitwert Y (Admittanz) $Y = \frac{1}{Z}$
Wirkanteil	Wirkwiderstand $R = Z \cos \varphi$ (Resistanz)	Wirkleitwert $G = Y \cos \varphi = \frac{R}{Z^2} = \frac{R}{R^2 + X^2}$ (Konduktanz)
Blindanteil	Blindwiderstand $X = Z \sin \varphi$ (Reaktanz) $X = \sqrt{Z^2 - R^2}$	Blindleitwert $B = Y \sin \varphi = \frac{X}{Z^2} = \frac{X}{R^2 + X^2}$ (Suszeptanz) $B = \sqrt{Y^2 - G^2}$
Absolutbetrag	$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$	$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$
Phasenwinkel	$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ $\tan \varphi = \frac{X}{R}$	$\varphi = -(\varphi_u - \varphi_i)$ $\tan \varphi = -\frac{X}{R} = -\frac{B}{G}$

M.6.2 Wechselstromkreis

Zur Beschreibung der Verhältnisse in einem Wechselstromkreis mit sinus- bzw. cosinusförmigen Wechselgrößen wird die komplexe Rechnung herangezogen (s. Abschnitt A, Übersicht A-4).

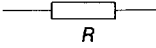
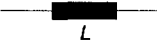
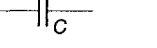
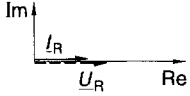
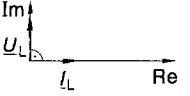
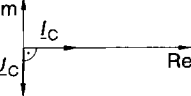
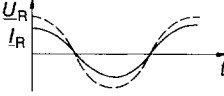
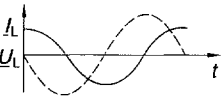
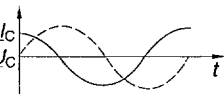
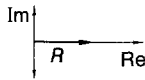
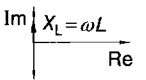
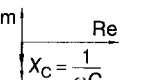

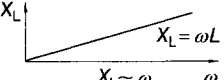
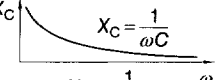
Zeigerdarstellung komplexer Größen und Ohmsches Gesetz

Wechselgrößen gleicher Frequenz werden in der Gaußschen Zahlenebene als *komplexe Zeiger* \underline{Z} dargestellt (Tabelle M-20).

Der Realteil ist der Wirkanteil, der Imaginärteil der Blindanteil der Wechselstromgröße. Beide zusammen ergeben als komplexen Zeiger die *Scheingröße* \underline{Z} .

*Verhalten der Bauelemente
im Wechselstromkreis*

Tabelle M-21. Bauelemente ohmscher Widerstand R , Induktivität L und Kapazität C im Wechselstromkreis.

Bauelement und Symbol	ohmscher Widerstand  R (Wirkwiderstand)	Induktivität (Spule)  L (induktiver Blindwiderstand)	Kapazität (Kondensator)  C (kapazitiver Blindwiderstand)
Ausgangsgröße	$\underline{U}_R = U_R e^{j(\omega t + \varphi)}$	$\underline{I}_L = I_L e^{j(\omega t + \varphi)}$	$\underline{U}_C = U_C e^{j(\omega t + \varphi)}$
Gesetz	Ohmsches Gesetz $\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_R}{R}$ $\underline{I}_R = \frac{U_R}{R} e^{j(\omega t + \varphi)}$	Induktionsgesetz $\underline{U}_L = L \cdot \frac{d\underline{I}_L}{dt}$ $\underline{U}_L = j\omega L \underline{I}_L$	$\underline{I}_C = C \cdot \frac{d\underline{U}_C}{dt}$ $\underline{I}_C = j\omega C \underline{U}_C$
Zeigerdiagramm	 Spannung \underline{U}_R und Strom \underline{I}_R in Phase $(\varphi_u - \varphi_i = 0)$.	 Spannung \underline{U}_L eilt Strom \underline{I}_L um $\pi/2$ voraus $(\varphi_u - \varphi_i = \pi/2)$.	 Strom \underline{I}_C eilt Spannung \underline{U}_C um $\pi/2$ voraus $(\varphi_i - \varphi_u = \pi/2)$.
Zeitlicher Verlauf			
Komplexer Widerstand	$\underline{Z}_R = \frac{\underline{U}_R}{\underline{I}_R} = R$  (reelle Achse)	$\underline{Z}_L = \frac{\underline{U}_L}{\underline{I}_L} = j\omega L = jX_L$  (positive imaginäre Achse)	$\underline{Z}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{I}_C} = \frac{1}{j\omega C} = -jX_C$  (negative imaginäre Achse)
Frequenzabhängigkeit	 keine Frequenzabhängigkeit	 $X_L = \omega L$ $X_L \sim \omega$	 $X_C = \frac{1}{\omega C}$ $X_C \sim \frac{1}{\omega}$

Reihenschaltung der Bauelemente

Tabelle M-22. Reihenschaltung der Bauelemente.

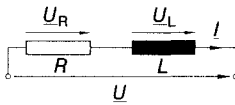
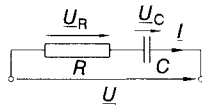
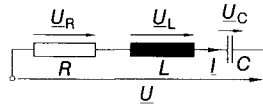
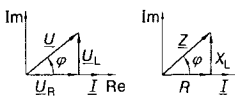
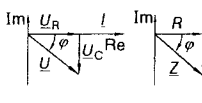
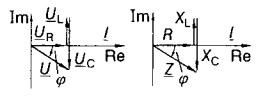
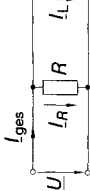

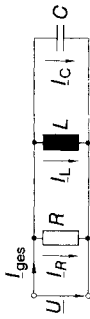
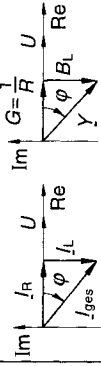
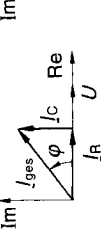
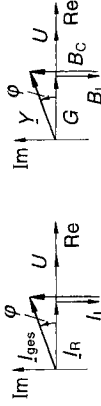
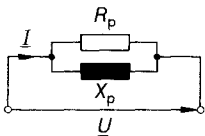
Schaltung			
Zeigerdiagramm			
Maschenregel	$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L$ $\underline{U} = \underline{I}(R + jX_L)$ $\underline{U} = \underline{I}(R + j\omega L)$	$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_C$ $\underline{U} = \underline{I}(R - jX_C)$ $\underline{U} = \underline{I}\left(R - \frac{j}{\omega C}\right)$	$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C$ $\underline{U} = \underline{I}[R + j(X_L - X_C)]$ $\underline{U} = \underline{I}\left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]$
Komplexer Widerstand	$\underline{Z} = Z e^{j\varphi}; \quad \underline{Z} = \sqrt{\text{Real}(\underline{Z})^2 + \text{Im}(\underline{Z})^2}; \quad \tan \varphi = \frac{\text{Im}(\underline{Z})}{\text{Real}(\underline{Z})}$		
Spezieller komplexer Widerstand	$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + jX_L$ $\underline{Z} = R + j\omega L$ $ \underline{Z} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ $\tan \varphi = \frac{\omega L}{R}$	$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R - jX_C$ $\underline{Z} = R - j\frac{1}{\omega C}$ $ \underline{Z} = \sqrt{R^2 + \left(-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$ $\tan \varphi = -\frac{1}{R\omega C}$	$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + j(X_L - X_C)$ $\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ $ \underline{Z} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ $\tan \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$
Resonanz	—	—	$\omega L = \frac{1}{\omega C}$ $\omega_{\text{res}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $f_{\text{res}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

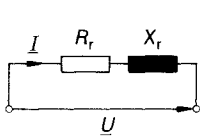
Tabelle M-23. Parallelschaltung der Bauelemente.

Schaltung			
Zeigerdiagramm			
Knotenregel	$I_{\text{ges}} = I_R + I_L$ $I_{\text{ges}} = \frac{U}{R} + \frac{U}{jX_L}$ $I_{\text{ges}} = U(G - jB_L)$	$I_{\text{ges}} = I_R + I_C$ $I_{\text{ges}} = U\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{-jX_C}\right)$ $I_{\text{ges}} = U(G + jB_C)$	$I_{\text{ges}} = I_R + I_L + I_C$ $I_{\text{ges}} = U\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{jX_L} + \frac{1}{-jX_C}\right)$ $I_{\text{ges}} = U[G + j(B_C - B_L)]$
Komplexer Leitwert	$Y = Y e^{j\varphi}; \quad Y = \sqrt{\text{Real}(Y)^2 + \text{Im}(Y)^2}; \quad \tan \varphi = \frac{\text{Im}(Y)}{\text{Real}(Y)}$		
spezieller komplexer Leitwert	$Y = \frac{I}{U} = G - jB_L$ $Y = G - j\frac{1}{\omega L}$ $ Y = \sqrt{G^2 + \left(-\frac{1}{\omega L}\right)^2}$ $\tan \varphi = \frac{-B_L}{G} = -\frac{R}{\omega L}$	$Y = \frac{I}{U} = G + jB_C$ $Y = G + j\omega C$ $ Y = \sqrt{G^2 + (\omega C)^2}$ $\tan \varphi = \frac{B_C}{G} = \omega C R$	$Y = \frac{I}{U} = G + j(B_C - B_L)$ $Y = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$ $ Y = \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$ $\tan \varphi = \frac{B_C - B_L}{G} = R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$
Resonanz	—	—	$\omega L = \frac{1}{\omega C}$ $\omega_{\text{res}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $f_{\text{res}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

Übersicht M-27. Äquivalente Umwandlungen.**a) Parallelschaltung**

$$R_r = \frac{R_p X_p^2}{R_p^2 + X_p^2}$$

$$X_r = \frac{R_p^2 X_p}{R_p^2 + X_p^2}$$

b) Reihenschaltung

$$R_p = \frac{R_r^2 + X_r^2}{R_r}$$

$$X_p = \frac{R_r^2 + X_r^2}{X_r}$$

R_r, R_p ohmscher Widerstand der Reihenschaltung bzw. Parallelschaltung

X_r, X_p Blindwiderstand der Reihenschaltung bzw. Parallelschaltung

Äquivalente Umwandlungen (Parallel- in Reihenschaltung und umgekehrt)

Bei gleicher Frequenz f (bzw. Kreisfrequenz ω) läßt sich jede Reihenschaltung von komplexen Widerständen in eine äquivalente Parallelschaltung verwandeln und umgekehrt (Übersicht M-27).

M.6.3 Arbeit und Leistung**Momentanleistung**

Die Momentanleistung $p(t)$ ist das Produkt aus Spannung $u(t)$ und Strom $i(t)$ zu jeder Zeit:

$$p(t) = u(t) i(t). \quad (\text{M-46})$$

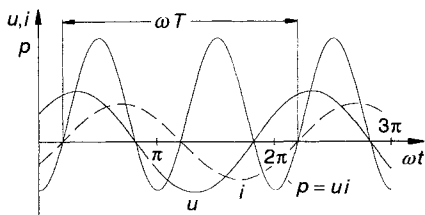


Bild M-34. Strom, Spannung und Momentanleistung.

Mit

$$u(t) = \hat{u} \cos(\omega t + \varphi_u) \\ = U \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_u)$$

und

$$i(t) = \hat{i} \cos(\omega t + \varphi_i) \\ = I \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_i)$$

ergibt sich

$$p(t) = UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i); \quad (\text{M-47})$$

U Effektivwert der Spannung,

I Effektivwert des Stroms,

φ Phasenverschiebung zwischen Wechselspannung und Wechselstrom,

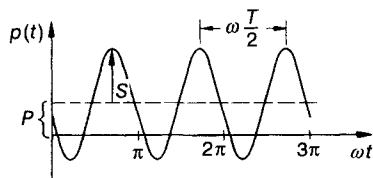
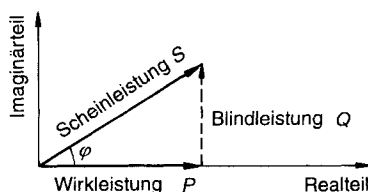
ω Kreisfrequenz des Stroms ($\omega = 2\pi f$),

φ_u Phasenwinkel der Spannung,

φ_i Phasenwinkel des Stroms.

Wie Bild M-34 zeigt, schwingt die Momentanleistung mit der doppelten Frequenz der Wechselspannung.

In der Übersicht M-28a ist zu erkennen, daß der Durchschnittswert, um den die Momentanleistung

Übersicht M-28. Momentanleistung, Wirk-, Blind- und Scheinleistung sowie Wechselstromwiderstände und Wechselstromleitwerte.**a) Momentanleistung****b) Schein-, Wirk- und Blindleistung**

Übersicht M-28 (Fortsetzung)Wirkleistung P

$$P = U I \cos \varphi = S \cos \varphi = Q / \tan \varphi = \sqrt{S^2 - Q^2}$$

Blindleistung Q

$$Q = U I \sin \varphi = S \sin \varphi = P \tan \varphi = \sqrt{S^2 - P^2}$$

Scheinleistung S

$$S = U I = P / \cos \varphi = Q / \sin \varphi = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Leistungsfaktor $\cos \varphi$

$$\cos \varphi = \frac{\text{Wirkleistung}}{\text{Scheinleistung}} = \frac{P}{S}$$

Verlustfaktor $\tan \varphi$

$$\tan \varphi = \frac{\text{Blindleistung}}{\text{Wirkleistung}} = \frac{Q}{P}$$

Blindfaktor $\sin \varphi$

$$\sin \varphi = \frac{\text{Blindleistung}}{\text{Scheinleistung}} = \frac{Q}{S} = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$$

Um den Wechselstrom möglichst vollständig nutzen zu können, sollte der *Verlustfaktor* $\tan \varphi$ möglichst *klein* gehalten werden und der *Leistungsfaktor* $\cos \varphi$ möglichst *groß* werden.

Wechselstromwiderstände und Wechselstromleitwerte

	Widerstand	Leitwert
Wirkanteil	$R = P/I^2$ Resistanz	$G = P/U^2$ Konduktanz
Blindanteil	$X = Q/I^2$ Reaktanz	$B = Q/U^2$ Suszeptanz
Scheinanteil	$Z = U/I$ Impedanz	$Y = I/U$ Admittanz

B	Suszeptanz
I	Effektivwert des elektrischen Stroms
G	Konduktanz
P	Wirkleistung
Q	Blindleistung
R	Widerstand
S	Scheinleistung
U	Effektivwert der elektrischen Spannung
X	Reaktanz
Y	Admittanz
Z	Impedanz
$\cos \varphi$	Leistungsfaktor
$\sin \varphi$	Blindfaktor
$\tan \varphi$	Verlustfaktor

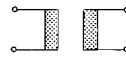
tanleistung mit der doppelten Strom- bzw. Spannungsfrequenz schwingt, der Wirkleistung P entspricht. In Übersicht M-28b ist zu sehen, wie sich daraus die Blindleistung Q und die Scheinleistung S errechnen.

M.6.4 Transformation von Wechselströmen

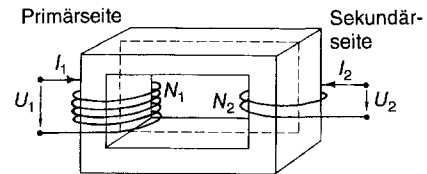
Mit einem Transformator können *Spannungen* transformiert werden. Er besteht aus zwei induktiv gekoppelten Spulen, deren Windungszahlen unterschiedlich sind (Übersicht M-29).

Übersicht M-29. Transformator.

a) Schaltzeichen



b) Aufbau



idealer, unbelasteter Transformator

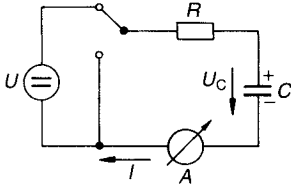
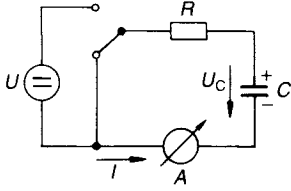
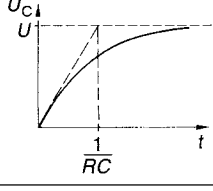
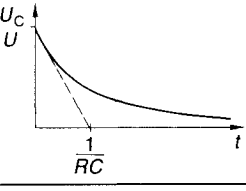
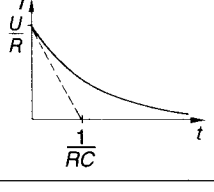
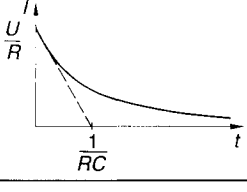
$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} = \ddot{u}$$

belasteter Transformator
(vernachlässigbare Verluste)

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{i_2}{i_1} \frac{N_1}{N_2} = \ddot{u}$$

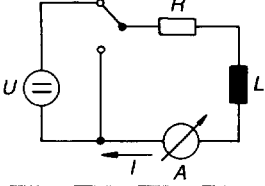
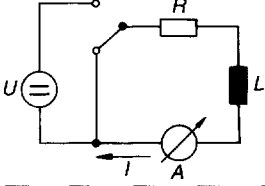
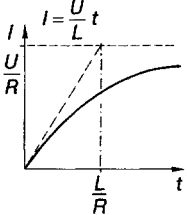
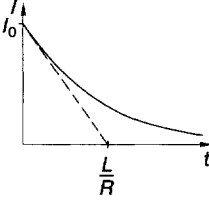
i_1, i_2	Ströme in der Primär- bzw. Sekundärseite
N_1, N_2	Windungszahl der Primär- bzw. Sekundärspule
u_1, u_2	Spannung an der Primär- bzw. Sekundärspule
\ddot{u}	Übertragungsverhältnis (Verhältnis der Windungszahlen)

Tabelle M-24. Ein- und Ausschalten eines Kondensators.

	Ladevorgang	Entladevorgang
Schaltung		
Differentialgleichung	$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC} Q - \frac{U}{R} = 0$	$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC} Q = 0$
Lösungen	$Q_C = CU \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$ $U_C = U \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$ $I = \frac{U}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$	$Q_C = Q_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$ $U_C = U e^{-\frac{1}{RC}t}$ $I = \frac{U}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$
Verlauf der Spannung		
Verlauf der Stromstärke		

M.7.2 Ein- und Ausschalten einer Spule

Tabelle M-25. Ein- und Ausschalten einer Spule.

	Einschaltvorgang	Ausschaltvorgang
Schaltung		
Differentialgleichung	$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I - \frac{U}{L} = 0$	$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = 0$
Lösung	$I = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$	$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$
Verlauf der Stromstärke		

M.8 Elektrische Maschinen

In elektrischen Maschinen wird mechanische Energie in elektrische umgewandelt (*Generatoren*) oder elektrische Energie in mechanische (*Elektromotoren*).

Wechselstromgenerator

Bei einem Generator rotiert eine Leiterschleife mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω (Übersicht M-30).

Bei Wechselstromwiderständen kann eine Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom auftreten.

Der Wechselstromgenerator besteht aus einem *Rotor* oder *Läufer* (rotierendes Teil) und einem *Stator* (stehendes Teil). In Generatoren kleiner Leistung dient als Rotor eine Spule und als Stator ein Magnet (Elektromagnet

oder Dauermagnet). Für Generatoren großer Leistung (*Innenpolmaschine*) wird als Rotor ein Magnet und als Stator eine Spule verwendet. Über die Schleifringe wird dann nur die kleine Leistung des Feldmagneten übertragen.

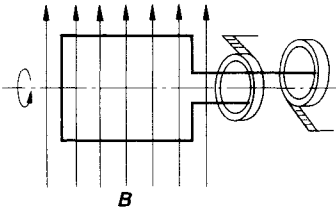
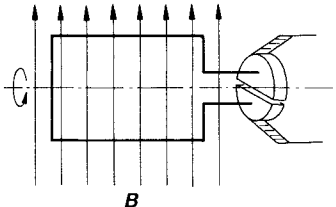
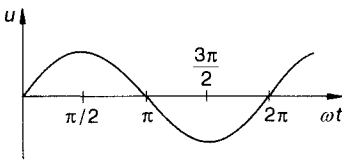
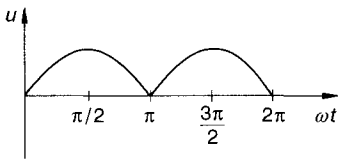
Gleichstromgenerator

Der Gleichstromgenerator besitzt, wie die Übersicht M-30 zeigt, zwei isolierte Halbringe, die bei Richtungsänderung der Spannung diese umpolen. So entsteht eine *pulsierende Wechselspannung*, die durch entsprechende Beschaltungen geglättet werden kann.

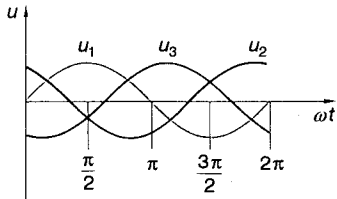
Drehstromgenerator

Drehströme sind drei, um einen Phasenwinkel von 120° verschobene, sinusförmige Wechselspannungen (Bild M-35). Die sechs Spulen-

Übersicht M-30. Wechselstrom- und Gleichstromgenerator.

	Wechselstromgenerator	Gleichstromgenerator
Prinzip		
Spannung		
	$u_{\text{ind}} = N B A \omega \sin(\omega t)$ $u_{\text{ind}} = \hat{u} \sin(\omega t)$ $i(t) = \hat{i} \sin(\omega t)$	Durch zwei isolierte Halbringe wird die Spannung umgepolt. Es entsteht eine pulsierende Wechselspannung.

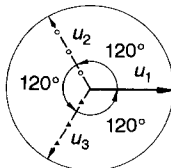
- A* rotierende Fläche
B magnetische Induktion
i elektrischer Strom
 \hat{i} Amplitude des elektrischen Stroms
N Windungszahl
 u_{ind} induzierte Spannung
 \hat{u} Amplitude der Spannung ($\hat{u} = N B A \omega$)
 ω Kreisfrequenz



$$u_1 = u \sin(\omega t)$$

$$u_2 = u \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

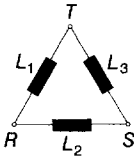
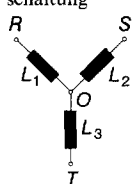
$$u_3 = u \sin\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right)$$



endpunkte können durch eine *Dreieck-* bzw. *Sternschaltung* auf maximal drei begrenzt werden. Tabelle M-26 zeigt die entsprechenden Strangströme bzw. Strangspannungen (bei gleicher Belastung aller drei Stränge). Im öffentlichen Netz ist die Strangspannung 220 V und die Leiterspannung $\sqrt{3} \cdot 220 \text{ V} = 380 \text{ V}$.

Bild M-35. Drehstrom.

Tabelle M-26. Dreieck- und Sternschaltung.

	Leiterstrom	Leiterspannung
Dreieck- schtaltung 	$I_R = I_S = I_T = \sqrt{3} \cdot \text{Strangstrom}$	$U_{RS} = U_{RT} = U_{ST} = \text{Strangspannung}$
Stern- schtaltung 	$I_R = I_S = I_T = \text{Strangstrom}$ (Mittelpunktstrom = null)	$U_{RS} = U_{RT} = U_{ST} = \sqrt{3} \cdot \text{Strangspannung}$ Strangspannung $U_{RO} = U_{SO} = U_{TO}$

M.9 Elektromagnetische Schwingungen

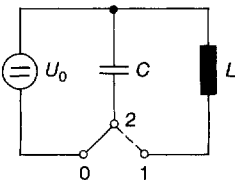
Bei elektromagnetischen Schwingungen werden im Wechselstromkreis zwischen Kondensator und Spule elektrische und magnetische Energie periodisch ausgetauscht. Fehlt im Stromkreis der ohmsche Widerstand, dann werden ungedämpfte Schwingungen ausgeführt (die Scheitelwerte von Strom und Spannung sind immer gleich groß). Bei Anwesenheit eines ohmschen Widerstandes werden gedämpfte Schwingungen ausgeführt (die Scheitelwerte von Strom und Spannung nehmen ab). Die Schwingungen werden ausführlich im Abschnitt J.1 behandelt.

M.9.1 Ungedämpfte elektromagnetische Schwingung

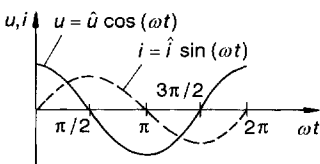
Übersicht M-31 zeigt einen elektromagnetischen Schwingkreis, der eine *ungedämpfte* Schwingung hervorruft, wobei sich Spannung und Strom periodisch ändern.

Übersicht M-31. Elektromagnetischer Schwingkreis.

Schaltung

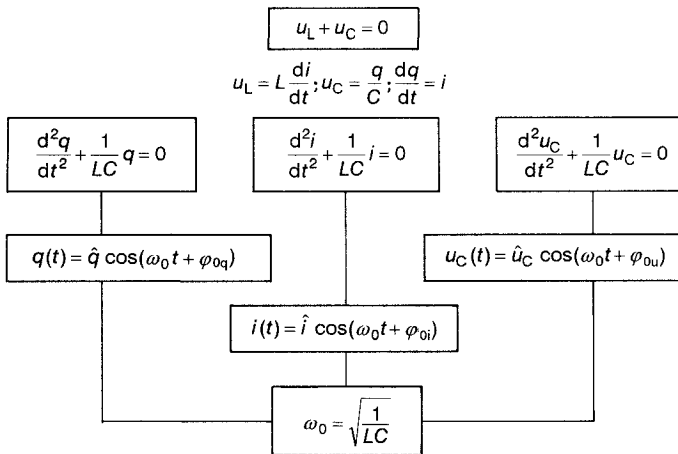


Strom- und Spannungsverlauf



Übersicht M-31 (Fortsetzung)

Differentialgleichung und Lösungen



C	Kapazität
i, \hat{i}	Strom, Amplitude des Stroms
L	Induktivität
q, \hat{q}	Ladung, Amplitude der Ladung
u_C, u_L	Spannung am Kondensator, an der Spule
φ	Phasenwinkel
ω_0	Kreisfrequenz

M.9.2 Gedämpfte elektromagnetische Schwingung

Bei gedämpften Schwingungen ist ein ohmscher Widerstand vorhanden (Abschnitt J.1.2, Übersicht J-6). Auch in diesem Fall müssen nach der Maschenregel die Summe aller Spannungen null ergeben:

$$u_L + u_C + u_R = 0.$$

N Nachrichtentechnik

Die Nachrichtentechnik befaßt sich mit der *Übertragung, Vermittlung und Verarbeitung* von Nachrichten. Wichtige Normen sind in Tabelle N-1 zusammengestellt.

Tabelle N-1. Wichtige Normen der Nachrichtentechnik.

Norm	Bezeichnung
DIN 1324	Elektromagnetisches Feld
DIN 1344	Elektrische Nachrichtentechnik, Formelzeichen
DIN 5483	Zeitabhängige Größen
DIN 5493	Logarithmierte Größenverhältnisse
DIN 40 110	Wechselstromgrößen
DIN 40 146	Begriffe der Nachrichtenübertragung
DIN 40 148	Übertragungssysteme
DIN 44 300	Informationsverarbeitung
DIN 44 301	Informationstheorie
DIN 44 302	Datenübertragung, Datenübermittlung
DIN 44 331	Vermittlungstechnik – Systemtechnik

N.1 Informationstheorie

Die wichtigsten Beziehungen der Informationstheorie sind in Tabelle N-2 (s. S. 339) zusammengestellt. Die verwendete Einheit für I , H , H_0 und R ist das Bit (Einheitensymbol: bit). Der Logarithmus zur Basis 2 ($\lg x = \log_2 x$) hängt mit dem Zehnerlogarithmus $\lg x$ folgendermaßen zusammen:

$$\lg x = \frac{\lg x}{\lg 2} = \frac{\lg x}{0,301} \quad (\text{N-1})$$

N.2 Signale und Systeme

N.2.1 Zeit- und Frequenzbereich

Zeitlich periodische Signale mit der Grundfrequenz f_0 können nach FOURIER als Reihe von harmonischen Schwingungen dargestellt werden. Die Frequenzen der Oberschwingungen sind ganze Vielfache der Grundfrequenz. Bei *nicht periodischen* Vorgängen geht die Fourier-Reihe in das *Fourier-Integral* über und das diskrete Linienspektrum in ein *kontinuierliches Spektrum* (Bild N-1). Weitere Einzelheiten zur Fourier-Analyse bzw. Fourier-Transformation sind in den Abschnitten J.1.4.4 bzw. A.16 und A.17 dargestellt.

Bandbreite

Die Frequenzen, die im Spektrum eines Signals enthalten sind, bestimmen seine Bandbreite B . Sie ist das Frequenzintervall zwischen oberer und unterer Grenzfrequenz:

$$B = f_o - f_u. \quad (\text{N-2})$$

Die obere und untere Grenzfrequenz ist nicht eindeutig festgelegt. In der Praxis wird häufig davon ausgegangen, daß Frequenzanteile, deren Amplituden kleiner sind als 10% der Maximalamplitude, vernachlässigbar sind.

Für das Beispiel des Rechteckpulses im Bild N-1 gilt, wenn als obere Grenzfrequenz der Nulldurchgang der Spektraldichte $f_0 = 1/T_1$ festgelegt wird:

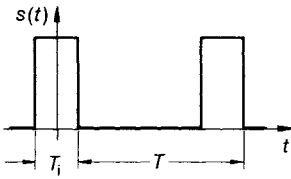
$$B = 1/T_1 \quad \text{bzw.} \quad B T_1 = 1. \quad (\text{N-3})$$

Zeitfunktion $s(t)$ und Spektralfunktion $S(f)$ sind immer folgendermaßen korreliert:

Die Zeitdauer eines Vorgangs und seine spektrale Breite stehen in einem reziproken Verhältnis.

periodische Signale

Zeitfunktion :



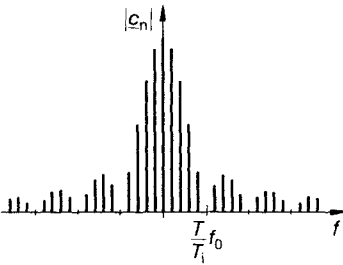
$$s(t) = s(t + T), \quad f_0 = 1/T$$

Fourier-Reihe

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

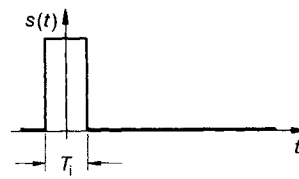
$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Spektrum :



nicht periodische Signale

Zeitfunktion :



Fourier-Integral (-Transformation)

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{S}(f) e^{j2\pi ft} df$$

$$\underline{S}(f) = \int_{-T/2}^{+T/2} s(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Spektraldichte :

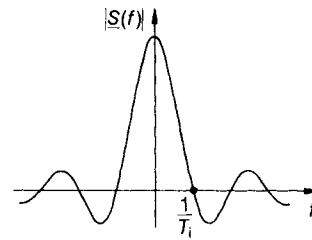


Bild N-1. Korrespondenz zwischen Zeit- und Frequenzbereich.

Bei Netzwerken (Übertragungseinrichtungen) wird meist die *3-dB-Bandbreite* benutzt. Sie gibt den Frequenzbereich an, in dem die *Übertragungsfunktion* $H(f)$

$$H(f) = \frac{U_2(f)}{U_1(f)}; \quad (\text{N-4})$$

 $U_1(f)$ Eingangsspannung, $U_2(f)$ Ausgangsspannung,

um weniger als den Faktor $1/\sqrt{2} = 0,707$ von ihrem Maximalwert abweicht.

Für das *Fernsprechen* wurde von CCITT (Comité Consultatif International Télégra-

phique et Téléphonique) das Frequenzband von $f_u = 300$ Hz bis $f_o = 3,4$ kHz ($B = 3,1$ kHz, Tabelle N-3) festgelegt.

Die in Tabelle N-2 definierte Kanalkapazität C hängt von der Bandbreite B des Kanals, der Signalleistung P_s und der Rauschleistung P_n (Abschnitt N.2.6) ab (Tabelle N-3). Nach SHANNON gilt

$$C = B \lg \left(1 + \frac{P_s}{P_n} \right) \approx \frac{B}{3} 10 \lg \left(1 + \frac{P_s}{P_n} \right). \quad (\text{N-5})$$

Tabelle N-2. Informationstheoretische Begriffe.

Die Beispiele der letzten Spalte beziehen sich auf ein System mit $n = 4$ Zeichen, die mit den Wahrscheinlichkeiten 40%, 30%, 20% und 10% auftreten.

Definitionen	Gleichungen	Beispiel
Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Nachricht x_i (Zeichen, Symbol)	$p(x_i)$	$p(x_1) = 0,4$ $p(x_2) = 0,3$ $p(x_3) = 0,2$ $p(x_4) = 0,1$
Informationsgehalt der Nachricht x_i	$I(x_i) = \lg \left[\frac{1}{p(x_i)} \right] \text{ bit}$	$I(x_1) = 1,32 \text{ bit}$ $I(x_2) = 1,74 \text{ bit}$ $I(x_3) = 2,32 \text{ bit}$ $I(x_4) = 3,32 \text{ bit}$
Entropie: mittlerer Informationsgehalt einer Nachricht aus n Elementen $x_1 \dots x_n$	$H = \sum_{i=1}^n p(x_i) I(x_i) \text{ bit}$	$H = 1,85 \text{ bit}$
Entscheidungsgehalt: maximaler Informationsgehalt einer Menge von n Zeichen	$H_0 = \lg n \text{ bit}$	$H_0 = 2 \text{ bit}$
Redundanz: Differenz zwischen maximal möglichem Informationsgehalt und tatsächlich ausgenutztem	$R = (H_0 - H) \text{ bit}$	$R = 0,15 \text{ bit}$
relative Redundanz	$r = \frac{H_0 - H}{H_0}$	$r = 0,077$
Informationsfluß (T_m ist die mittlere Zeit für die Übertragung eines Nachrichtenelements)	$F = H/T_m \text{ bit/s}$	
Kanalkapazität: maximaler Informationsfluß, der fehlerfrei über einen Kanal übertragen werden kann	$C = F_{\max} = \left[\frac{H}{T_m} \right]_{\max} \text{ bit/s}$	

Tabelle N-3. Kanalkapazitäten.

Kanal	B kHz	S dB	C bit/s
Fernsprechen	3,1	40	$4,1 \cdot 10^4$
UKW-Rundfunk	15	60	$3 \cdot 10^5$
Fernsehen	5000	45	$6,5 \cdot 10^7$

Häufig ist $P_s \gg P_n$, so daß gilt

$$C \approx \frac{B}{3} 10 \lg (P_s/P_n) = \frac{B}{3} S. \quad (\text{N-6})$$

S Störabstand in dB (Übersicht N-5).

N.2.2 Abtasttheorem

Zur Digitalübertragung müssen zeitkontinuierliche Signale durch Abtastung in diskrete Signale umgewandelt werden (Bild N-2). Nach SHANNON wird eine Zeitfunktion $s(t)$, deren Spektrum durch die Bandbreite B begrenzt ist, durch Abtasten eindeutig beschrieben, wenn gilt:

$$T_A \leq \frac{1}{2B}, \quad f_A \geq 2B; \quad (\text{N-7})$$

T_A Abtastintervall,
 f_A Abtastfrequenz.

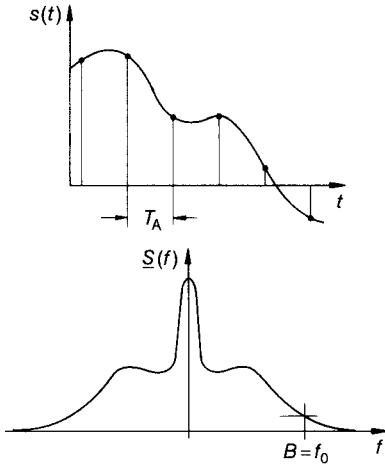


Bild N-2. Abzutastendes Signal $s(t)$ und Spektraldichte $S(f)$.

N.2.3 Modulation

Nach NTG 0101 ist die Modulation die Veränderung von *Signalparametern eines Trägers* in Abhängigkeit von einem *modulierenden Signal* (Basisbandsignal). Nach Übertragung des modulierten Signals wird durch *Demodulation* das Basisbandsignal wieder gewonnen (Bild N-3). Von den in Tabelle N-4 dargestellten Modulationsverfahren sollen im folgenden einige genauer dargestellt werden.

Amplitudenmodulation AM

Bei der AM wird die Amplitude eines Trägers durch das Basisbandsignal moduliert. Nach

den Gleichungen in Übersicht N-1 entsteht symmetrisch zur Trägerfrequenz f_T eine obere und eine untere Seitenbandfrequenz $f_T + f_M$ bzw. $f_T - f_M$ (Bild N-4). Sind in einem Signal Fourier-Koeffizienten im Frequenzbereich von f_1 bis f_2 enthalten, so entsteht ein oberes und ein unteres Seitenband mit Frequenzen von $f_T + f_1$ bis $f_T + f_2$ bzw. $f_T - f_2$ bis $f_T - f_1$.

Mit einer einfachen Gleichrichterschaltung läßt sich das AM-Signal demodulieren.

Einseitenbandmodulation EM

Da bei der AM jedes Seitenband die volle Information des modulierenden Signals trägt, ist eine Übertragung mit nur einem Band (mit und ohne Träger) möglich. In der Regel wird das obere Seitenband übertragen. Die erforderliche Bandbreite ist nur halb so groß wie bei der AM.

Frequenzmodulation FM

Bei der FM wird die Momentanfrequenz $\Omega(t)$ des Trägers durch das zu übertragende Signal moduliert (Bild N-5, Übersicht N-2). Es entstehen symmetrisch zur Trägerfrequenz f_T Seitenbänder im Abstand $\pm n f_M$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), deren Amplituden durch Besselfunktionen $J_n(\eta)$ bestimmt werden. Bei bestimmten Modulationsindizes (z. B. $\eta = 2,405; 3,832$ usw.) sind Nullstellen der Bessel-Funktionen, was zur Folge hat, daß der Träger bzw. bestimmte Seitenbänder verschwinden (Bild N-5). Die FM benötigt bei großem Modulationsindex η eine wesentlich größere Bandbreite als die AM, weshalb sie nur im UKW-Bereich und noch höheren Frequenzen angewendet wird.

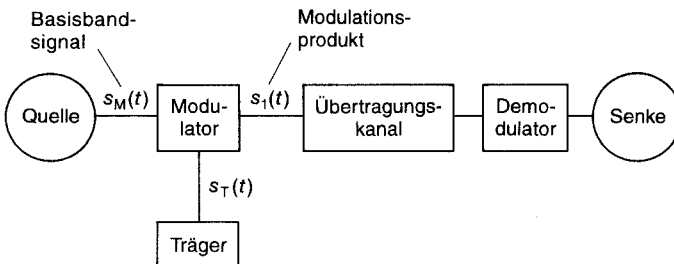


Bild N-3. Modulationsprinzip.

Tabelle N-4. Modulationsverfahren.

Sinusträger	modulierendes Signal			
	analog		digital	
	Amplitudenmodulation <i>amplitude modulation</i>	AM	Amplitudenumtastung <i>amplitude shift keying</i>	ASK
	Einseitenbandmodulation <i>single sideband modulation</i>	EM SSB		
	Restseitenbandmodulation <i>vestigial sideband modulation</i>	RM VSB		
	Frequenzmodulation <i>frequency modulation</i>	FM	Frequenzumtastung <i>frequency shift keying</i>	FSK
	Phasenmodulation <i>phase modulation</i>	PM	Phasenumtastung <i>phase shift keying</i>	PSK
Pulsträger	modulierendes Signal			
	unkodiert		kodiert	
	Pulsamplitudenmodulation <i>pulse amplitude modulation</i>	PAM	Pulskodemodulation <i>pulse code modulation</i>	PCM
	Pulsdauermodulation <i>pulse duration modulation</i>	PDM		
	Pulsfrequenzmodulation <i>pulse frequency modulation</i>	PFM		
	Pulsphasenmodulation <i>pulse phase modulation</i>	PPM		

Übersicht N-1. Amplitudenmodulation.

Träger	$s_T(t) = \hat{s}_T \cos \omega_T t$
modulierendes Basisband- signal	$s_M(t) = \hat{s}_M \cos \omega_M t$
Zeitfunktion	$s_{AM}(t)$ $= (\hat{s}_T + \hat{s}_M \cos \omega_M t) \cos \omega_T t$ $= \hat{s}_T \left[\cos \omega_T t + \frac{m}{2} \cos (\omega_T + \omega_M) t \right.$ $\quad \left. + \frac{m}{2} \cos (\omega_T - \omega_M) t \right]$
Modulations- grad	$m = \hat{s}_M / \hat{s}_T$
benötigte Bandbreite	$B_{AM} \approx 2 B_{NF}$
\hat{s}_T, ω_T	Amplitude und Kreisfrequenz des Trägers
\hat{s}_M, ω_M	Amplitude und Kreisfrequenz des modulierenden Signals
B_{NF}	Bandbreite des niederfrequenten Basisbandsignals

Phasenmodulation PM

Bei der PM wird der Phasenwinkel des Trägers durch das Basisbandsignal moduliert. Bei einem nur mit einer Sinusschwingung modulierten Träger sind PM und FM identisch. Beide werden unter dem Begriff *Winkelmodulation* zusammengefaßt.

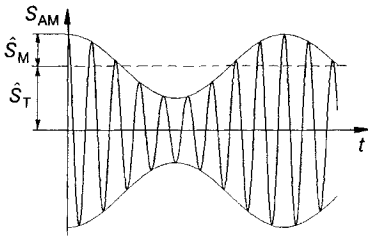
Pulsmodulation

Bild N-6 verschafft einen Überblick über die verschiedenen Pulsmodulationsverfahren. Bei den gezeigten Methoden entstehen zwar *zeitdiskrete*, aber *wertkontinuierliche* Signale.

Pulskodemodulation PCM

Durch Quantisierung wertkontinuierlicher Signale (z. B. der PAM) entstehen *wertdiskrete* Signale. Bild N-7 zeigt ein Beispiel mit acht Amplitudenstufen (3-bit-Kode). Anstelle des gezeigten *Dualkodes* werden meist andere Codes mit geringerer Störanfälligkeit zur Übertragung verwendet (z. B. *Gray-Kode*, Abschn. Y.1.2).

a) Zeitverlauf



b) Spektrum

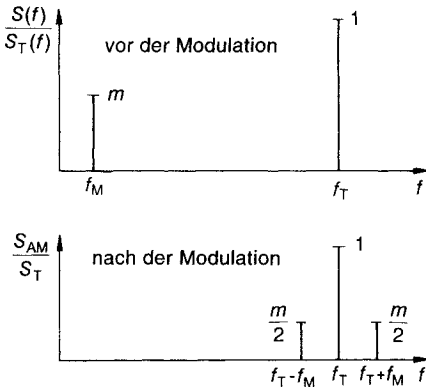


Bild N-4. Amplitudenmodulation.

Dem Vorteil der hohen Störsicherheit bei der digitalen Übertragung steht der Nachteil gegenüber, daß eine große Bandbreite benötigt wird. In der Praxis rechnet man mit einer erforderlichen Bandbreite von

$$B \approx 0,75 f_A N; \quad (N-8)$$

f_A Abtastfrequenz, Schrittgeschwindigkeit,
 N Anzahl der Quantisierungs-Bits.

So wird beispielsweise bei der PCM-Fernsprechübertragung mit $f_A = 8 \text{ kHz}$ ($T_A = 125 \mu\text{s}$) abgetastet und die Meßwerte mit 8 bit quantisiert (256 Amplitudenstufen). Für die Übertragung dieses 64-kbit/s-Signals ist also eine Bandbreite von $B = 48 \text{ kHz}$ erforderlich, während die Analogübertragung mit nur 3,4 kHz auskommt.

a) Zeitverlauf

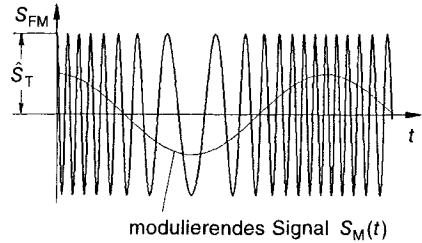
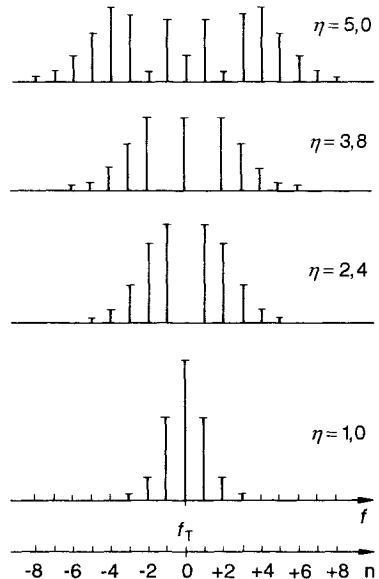
b) Spektren bei verschiedenen Modulationsindizes η 

Bild N-5. Frequenzmodulation.

Der große Vorteil der PCM besteht darin, daß in der Zeit zwischen den einzelnen Abtastpulsen andere Signale abgetastet und übertragen werden können (*Zeitmultiplex*). Bei dem in Europa eingeführten *PCM-Grundsystem* (PCM 30) werden innerhalb des Zeitrahmens von $T_A = 125 \mu\text{s}$ 32 Kanäle übertragen, davon sind 30 für Sprache oder Daten ausnutzbar. Insgesamt werden also $32 \cdot 64 \text{ kbit/s} = 2,048 \text{ Mbit/s}$ übertragen.

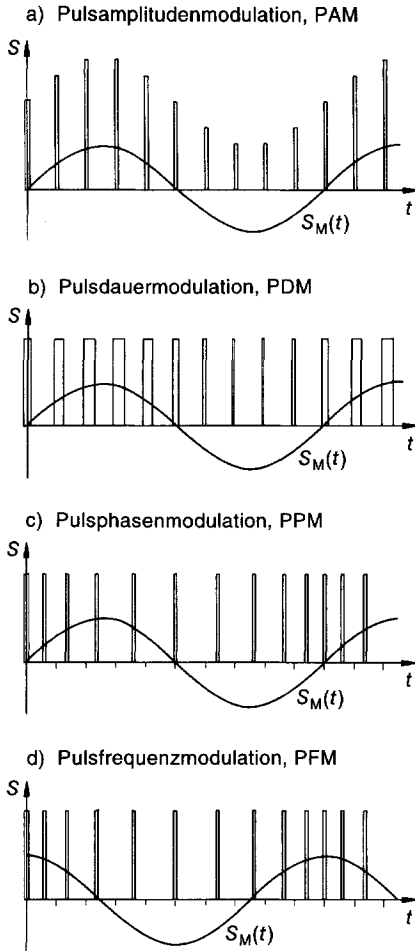


Bild N-6. Pulsmodulationsverfahren, $s_M(t)$ ist das modulierende Signal.

Übersicht N-2. Frequenzmodulation.

Augenblicks- frequenz des Trägers	$\Omega(t) = \omega_T + \Delta\Omega \cos \omega_M t$
modulierendes Basis- bandsignal	$s_M(t) = \hat{s}_M \cos \omega_M t$
Zeitfunktion	$s_{FM}(t) = \hat{s}_T \cos(\omega_T t + \eta \sin \omega_M t)$
Modulations- index	$\eta = \Delta\Omega / \omega_M = \Delta F / f_M$
Fourier-Reihe	$s_{FM}(t)$ $= \hat{s}_T \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(\eta) \cos(\omega_T + n\omega_M)t$
benötigte Bandbreite	$B_{FM} \approx 2(\Delta F + B_{NF})$ $= 2(\eta f_M + B_{NF})$

$(\Delta\Omega) \Delta F$ (Kreis) Frequenzhub
 ω_M Modulationskreisfrequenz
 ω_T Trägerkreisfrequenz
 $J_n(\eta)$ Besselfunktionen 1. Art, n -ter Ordnung
 B_{NF} Bandbreite des niederfrequenten Basisbandsignals

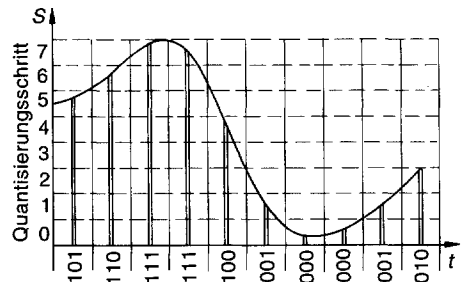


Bild N-7. Quantisierung und Kodierung.

N.2.4 Pegel und Dämpfungsmaß

In der Nachrichtentechnik treten Signalamplituden auf, die viele Größenordnungen überstreichen (z. B. Signalleistung am Anfang und Ende einer Leitung, Spannungsamplituden am Ein- und Ausgang eines Verstärkers). Deshalb werden Größenverhältnisse häufig logarithmiert und in dB angegeben (Tabelle N-5).

Neben dem in Tabelle N-5 definierten (absoluten) Pegel ist der *relative* Pegel gebräuchlich, bei dem der Bezugswert eines bestimmten Bezugspunkts (z. B. Eingang, Ausgang) zum Vergleich herangezogen wird. Der Bezugspunkt hat den relativen Pegel null. Die relativen Pegel werden mit dem Hinweiszeichen dBr angegeben.

Ist das Dämpfungsmaß *negativ*, dann liegt *Verstärkung* (Gewinn, gain) vor.

Tabelle N-5. Logarithmierte Größenverhältnisse.

Pegel (absoluter Pegel)

Bezugsgröße ist ein festgelegter Wert

Beispiel	Definition	Bezugsgröße	Einheitenzeichen IEC UIT	
Leistungspegel	$L_P = 10 \lg \frac{P}{P_0} \text{ dB}$	$P_0 = 1 \text{ mW}$ $P_0 = 1 \text{ W}$	dB(mW) dB(W)	dBm dBW
Spannungspegel	$L_U = 20 \lg \frac{U}{U_0} \text{ dB}$	$U_0 = 0,775 \text{ V}$ $U_0 = 1 \text{ V}$	dB(0,775 V)* dB(V)	– dBV
Strompegel	$L_I = 20 \lg \frac{I}{I_0} \text{ dB}$	$I_0 = 1 \text{ mA}$	dB(mA)	–
Dämpfungsmaß				
Leistungs- dämpfungsmaß	$a_P = 10 \lg \frac{P_1}{P_2} \text{ dB} = L_{P1} - L_{P2}$			
Spannungs- dämpfungsmaß	$a_U = 20 \lg \frac{U_1}{U_2} \text{ dB} = L_{U1} - L_{U2}$			

* 0,775 V entspricht am Bezugswiderstand 600 Ω von Fernsprecheinrichtungen einer Leistung von 1 mW

N.2.5 Verzerrungen

Lineare Verzerrungen entstehen beispielsweise während einer Übertragung dadurch, daß die verschiedenen Fourier-Komponenten eines Signals verschieden stark gedämpft werden (*Amplitudenverzerrungen*) oder unterschiedliche Laufzeiten aufweisen (*Laufzeitverzerrungen*). In beiden Fällen weicht das übertragene Signal vom Ausgangssignal ab. Bei den linearen Verzerrungen ändern sich im Fourier-Spektrum lediglich die Amplituden bzw. Phasen, es entstehen aber keine neuen Frequenzanteile.

Nichtlineare Verzerrungen entstehen bei der Aussteuerung eines Senders oder Netzwerks mit einer gekrümmten Kennlinie. Bild N-8 zeigt die gekrümmte Kennlinie eines Halbleiterlasers (Abschnitt X.1.3) als Sender für die optische Nachrichtenübertragung und die entstehende Verzerrung eines sinusförmigen Modulationssignals.

Eine nichtlineare Kennlinie kann mathematisch durch eine Taylor-Reihe beschrieben

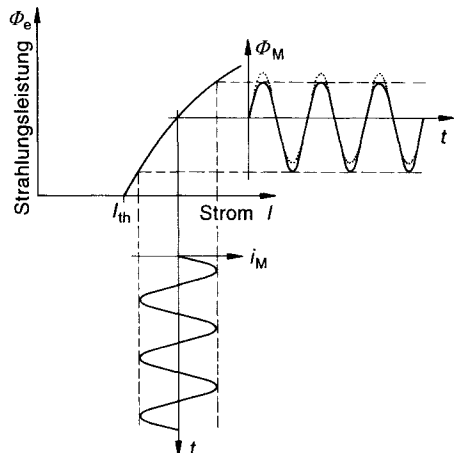
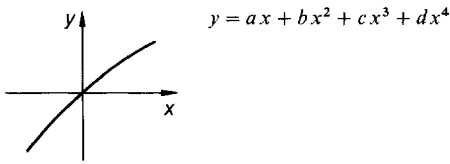
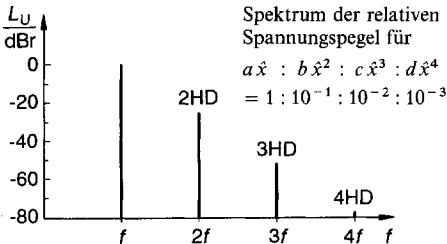


Bild N-8. Aussteuerung einer nichtlinearen Laserkennlinie.

Übersicht N-3. Nichtlineare Verzerrungen.

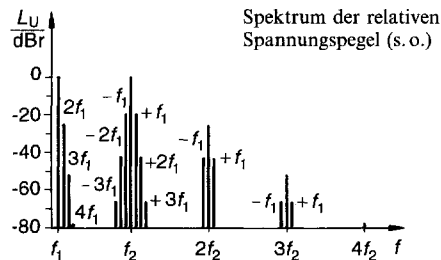
Modulation mit einem Signal: $x(t) = \hat{x} \cos \omega t$

$y(t) = \frac{1}{2} b \hat{x}^2 + \frac{3}{8} d \hat{x}^4$	Konstante
$+ \left(a \hat{x} + \frac{3}{4} c \hat{x}^3 \right) \cos \omega t$	Grundfrequenz
$+ \left(\frac{1}{2} b \hat{x}^2 + \frac{1}{2} d \hat{x}^4 \right) \cos 2\omega t$	zweite Harmonische (2HD)
$+ \frac{1}{4} c \hat{x}^3 \cos 3\omega t$	dritte Harmonische (3HD)
$+ \frac{1}{8} d \hat{x}^4 \cos 4\omega t$	vierte Harmonische (4HD)



Modulation mit zwei Signalen:

$$x(t) = \hat{x} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)$$



Übersicht N-4. Verzerrungsfaktoren.

Klirr-
faktor
(Gesamt-
klirr-
faktor)

$$k = \sqrt{\frac{\sum_{n=2}^{\infty} U_n^2}{\sum_{n=1}^{\infty} U_n^2}} = \sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} k_n^2}$$

Klirr-
faktor
 n -ter
Ordnung
(Teil-
klirr-
faktor)

$$k_n = \sqrt{\frac{U_n^2}{\sum_{i=1}^{\infty} U_i^2}} \quad n = 2, 3, 4 \dots$$

Klirr-
dämp-
fungs-
maß

$$a_k = 20 \lg \frac{1}{k} \text{ dB}$$

Klirr-
dämp-
fungs-
maß
 n -ter
Ordnung

$$a_{k_n} = 20 \lg \frac{1}{k_n} \text{ dB}$$

Inter-
modula-
tions-
faktor

$$m = \frac{\sqrt{\sum_{n=1}^{n_{\max}} (U_{f_2 - n f_1} + U_{f_2 + n f_1})^2}}{U_{f_2}}$$

 U_n Effektivwert der Spannung der n -ten Harmonischen

werden (Übersicht N-3). Bei der Aussteuerung entstehen neue Harmonische zur Grundfrequenz (**Harmonic Distortion, HD**). Ein Maß für die Verzerrung ist der *Klirrfaktor* k (Übersicht N-4). Bei der Aussteuerung einer nichtlinearen Kennlinie mit einem Frequenzgemisch entstehen Summen- und Differenzfrequenzen (*Intermodulation*). Übersicht N-3 zeigt die Intermodulationsprodukte von zwei Frequenzen f_1 und f_2 . Zur Beurteilung der Intermodulationsleistung gibt es verschiedene Definitionen (DIN 40 148, Blatt 3). Der in der Elektroakustik übliche *Intermodulationsfaktor* m ist in Übersicht N-4 angegeben. Der Intermodulationsfaktor und der Klirrfaktor werden durch Ausmessen eines Zweitonpektrums mit einem Spektrumanalysator bestimmt.

N.2.6 Rauschen

Die wichtigste *Störung* bei der Übertragung eines Nachrichtensignals ist das *Rauschen* (Noise). Folgende Rauscharten werden unterschieden:

- Widerstandsrauschen (thermisches Rauschen eines Widerstands),
- Generations-Rekombinationsrauschen (Schwankungen der Ladungsträgerdichte in einem Halbleiter),
- Schrotrauschen (statistisch regelloses Überqueren einer Sperrschicht durch Ladungsträger),
- Modulationsrauschen ($1/f$ -Rauschen modulierter Halbleiter),
- Antennenrauschen (Einfangen atmosphärischer Störungen).

Nach der Frequenzabhängigkeit der spektralen Rauschleistungsdichte werden unterschieden:

- weißes Rauschen (frequenzunabhängige Leistungsdichte),
- breitbandiges Rauschen (Leistungsdichte ist frequenzunabhängig bis zu einer oberen (3-dB-)Grenzfrequenz),
- farbiges Rauschen (entsteht durch Filterung aus breitbandigem Rauschen),
- rosa Rauschen (Leistungsdichte ist umgekehrt proportional zur Frequenz).

In Übersicht N-5 sind die wichtigsten Beziehungen zusammengestellt.

N.3 Nachrichtenübertragung

Nach DIN 40146 besteht ein Nachrichtenübertragungssystem aus *Sender*, *Übertragungskanal* und *Empfänger*.

Übersicht N-5. *Rauschen*.

effektive Rauschspannung eines Wirkwiderstands R	$U_n = \sqrt{4kTRB}$
verfügbare Rauschleistung bei Anpassung	$P_n = kTB$
Rauschtemperatur	$T_n = P_n/(kB)$
Rauschzahl eines Vierpols	$F = \frac{(P_s/P_n)_e}{(P_s/P_n)_a} = 1 + \frac{P_{n,v}}{G_L P_{n,e}} = 1 + \frac{T_{n,v}}{T_{n,q}}$
Rauschmaß	$F^* = 10 \lg F \text{ dB}$
Störabstand	$S = 10 \lg (P_s/P_n) \text{ dB}$
B	Bandbreite
e, a	Eingang, Ausgang
G_L	Leistungsverstärkung
k	Boltzmann-Konstante
P_n, P_s	Rausch-, Signalleistung
$T_{n,q}, T_{n,v}$	Rauschtemperatur von Signalquelle und Vierpol

N.3.1 Sender

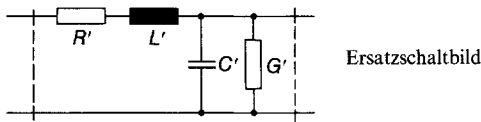
Signale der Nachrichtenquelle werden vom Sender so aufbereitet, daß sie für die Übertragung im Übertragungskanal geeignet sind und am Empfängereingang noch einen ausreichenden Pegel (Störabstand) aufweisen. Die zunächst in beliebiger Form vorliegende Nachricht wird mit Hilfe des *Aufnahmewandlers* in ein meist elektrisches Signal überführt. Die Signale werden meist nicht in ihrer Originalfrequenzlage (NF) übertragen, sondern als modulierte HF-Signale. Die Modulation (Abschnitt N.2.2) eines hochfrequenten Trägers gehört deshalb mit zu den Aufgaben des Senders.

N.3.2 Übertragungsmedium

Die wichtigsten Übertragungsmedien sind

- Leitungen (Drähte, Koaxialkabel),
- Hohlleiter,
- Lichtwellenleiter (Abschnitt L.1.3.2),
- freier Raum.

Übersicht N-6. Leitungsgleichungen.



Differentialgleichung der ortsabhängigen komplexen Spannung

$$\frac{d^2 \underline{U}(x)}{dx^2} = (R' + j\omega L')(G' + j\omega C') \underline{U}(x)$$

Ausbreitungskonstante

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}$$

Für *verlustarme* Leitungen

($\omega L' \gg R'$ und $\omega C' \gg G'$) gilt:

Dämpfungskonstante
(längenbezogene Dämpfung von \underline{U})

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(R' \sqrt{\frac{C'}{L'}} + G' \sqrt{\frac{L'}{C'}} \right)$$

Phasenkonstante
(längenbezogene Phasendrehung von \underline{U})

$$\beta = \omega \sqrt{L' C'}$$

C' längenbezogene Kapazität
 G' längenbezogener Querleitwert
 L' längenbezogene Induktivität
 R' längenbezogener Widerstand
 ω Kreisfrequenz

} Beläge

Die wichtigsten Leitungsgleichungen sind in Übersicht N-6 zusammengestellt. Informationen zum Wellenwiderstand sowie der Reflexion und Transmission von Wellen an Stoßstellen sind im Abschnitt J.2.2 zu finden.

Bei der Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen im *freien* Raum treten verschiedene Wellentypen auf (Bild N-9). *Bodenwellen* sind vor allem für Wellenlängen über 100 m von Bedeutung (Tabelle N-6). *Raumwellen* sind bei hohen Frequenzen (ab UKW) praktisch nur innerhalb optischer Sichtverbindung einsetzbar. Im Bereich der Kurz-, Mittel- und Langwellen ist die an der Ionosphäre reflektierte Raumwelle von großer Bedeutung. Bei Mittelwellen kann es zu Interferenzerscheinungen zwischen der Bodenwelle und der am Erdboden reflektierten Raumwelle kommen. Durch zeitlich wechselnde Ausbreitungsbedingungen kommt es zu *Schwund* (Fading). Übersicht N-7 enthält Antennengleichungen für Freiraumübertragung ($\lambda < 3$ m).

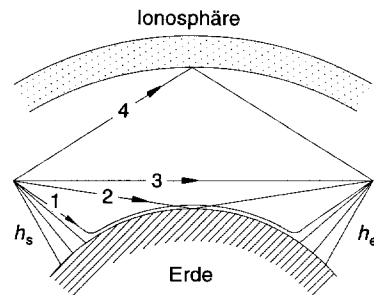


Bild N-9. Ausbreitungswege elektromagnetischer Wellen.

- 1 Bodenwelle, an Grenzfläche Erde – Luft geführt,
- 2 Raumwelle, an Erdoberfläche reflektiert,
- 3 Raumwelle, optische Sichtverbindung,
- 4 Raumwelle, an Ionosphäre reflektiert.

Tabelle N-6. Elektromagnetische Wellen.

Wellenlänge	Frequenz	Bodenwelle	Raumwelle
100 km Myriameterwellen Längstwellen	3 kHz very low frequency VLF	Reichweite > 10 000 km	unbedeutend
10 km Kilometerwellen Langwellen LW	30 kHz low frequency LF	Reichweite > 1000 km	tagsüber gedämpft, nachts große Reichweite durch Reflexion an Ionosphäre
1 km Hektometerwellen Mittelwellen MW	300 kHz medium frequency MF	Reichweite > 100 km	
100 m (1 hm) Dekameterwellen Kurzwellen KW	3 MHz high frequency HF	Reichweite < 100 km	
10 m (1 dam) Meterwellen Ultrakurzwellen UKW	30 MHz very high frequency VHF	–	
1 m Dezimeterwellen	300 MHz ultra high frequency UHF	–	Ausbreitung im Bereich der optischen Sichtverbindung, Überreichweite durch Beugung
1 dm Zentimeterwellen	3 GHz super high frequency SHF	–	
1 cm Millimeterwellen	30 GHz extremely high frequency EHF	–	
1 mm	300 GHz	–	

Übersicht N-7. Antennengleichungen.

wirksame Antennenfläche	
– Hertzscher Elementardipol	$A_{w, Hz} = \frac{3 \lambda^2}{8 \pi}$
– Kugelstrahler	$A_{w, k} = \frac{\lambda^2}{4 \pi}$
aufgenommene Leistung der Empfangsantenne	$P_e = P_s \left[\frac{\lambda}{4 \pi r} \right]^2 G_e G_s$
Antennengewinn	$G = A_w / A_{w, k}$
Antennengewinnmaß	$a_G = 10 \lg G \text{ dB}$
Freiraumdämpfungsmaß	$a_0 = 10 \lg (P_s / P_e) \text{ dB}$
Reichweite (quasioptische Sichtweite)	$d = \sqrt{2 R'} (\sqrt{h_s} + \sqrt{h_e})$
A_w wirksame Antennenfläche	
G_e, G_s Gewinn Empfangs-, Sendeantenne	
h_e, h_s Höhe Empfangs-, Sendeantenne	
P_s Sendeleistung	
r Abstand zwischen Sende- und Empfangsantenne	
R' effektiver Erdradius, 8470 km	
λ Wellenlänge	

N.3.3 Empfänger

Der Empfänger nimmt das übertragene Signal auf und verstärkt es. Nach *Demodulation* wird die Nachricht über einen *Wiedergabewandler* der Senke zugeführt.

Erfolgt die Übertragung in der Originalfrequenzlage, wird zur Verstärkung ein *Geradeausempfänger* eingesetzt, der auf die Signal-

frequenz abgestimmt ist. Bei der Übertragung mit Hilfe eines modulierten hochfrequenten Trägers wird meist ein *Überlagerungsempfänger* (Heterodyn-Empfang, Superhet) benutzt. Durch Mischung des HF-Signals mit der Schwingung eines lokalen Oszillators wird das Signal in eine niedrigere Zwischenfrequenz (ZF) umgesetzt und in der ZF-Lage weiter verarbeitet (Bild N-10).

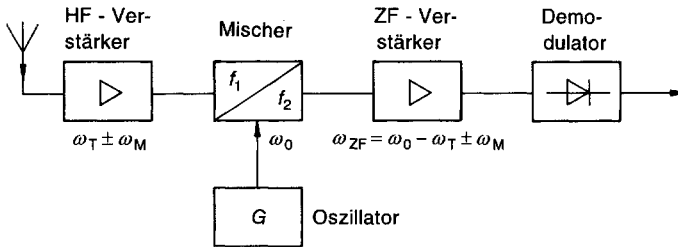


Bild N-10. Überlagerungsempfänger.

O Thermodynamik

Tabelle O-1. Wichtige Normen und Richtlinien.

Norm	Bezeichnung
DIN 1343	Referenzzustand, Normzustand, Normvolumen
DIN 1345	Thermodynamik; Formelzeichen, Einheiten
DIN 1953	Temperaturmessung
DIN 5491	Stoffübertragung; Diffusion und Stoffübergang, Grundbegriffe, Größen, Formelzeichen, Kenngrößen
DIN 13 346	Temperatur, Temperaturdifferenz; Grundbegriffe, Einheiten
VDE/VDI 3511	Technische Temperaturmessungen
VDE/VDI 3512	Meßanordnungen für Temperaturmessungen

Die Thermodynamik befaßt sich mit Energieumwandlungen unter besonderer Berücksichtigung von Wärmeerscheinungen. In der *phänomenologischen* Thermodynamik wird ein System durch makroskopische Variable beschrieben, während in der *statistischen* Thermodynamik eine mikroskopische Betrachtungsweise angewendet wird. Die wichtigsten Erkenntnisse der Thermodynamik sind in drei *Hauptsätzen* zusammengefaßt.

O.1 Grundlagen

O.1.1 Thermodynamische Grundbegriffe

Systeme

Nach Art der Systemgrenzen werden verschiedenartige Systeme unterschieden (Tabelle O-2).

Zustand, Zustandsgrößen

Der Zustand eines Systems wird durch Zustandsgrößen beschrieben (Tabelle O-3).

Befindet sich ein System in einem *Gleichgewichtszustand*, dann nehmen die Zustandsgrö-

Tabelle O-2. Thermodynamische Systeme.

Bezeichnung des Systems	Kennzeichen der Systemgrenzen	Beispiele
offen	durchlässig für Materie und Energie	Wärmeübertrager, Gasturbine
geschlossen	durchlässig für Energie, undurchlässig für Materie	geschlossener Kühlschrank, Warmwasserheizung, Heißluftmotor
abgeschlossen	undurchlässig für Energie und Materie	verschlossenes Thermosgefäß
adiabat	undurchlässig für Materie und Wärme, durchlässig für mechanische Arbeit	rasche Kompression in einem Gasmotor

Tabelle O-3. Beispiele für Zustandsgrößen.

thermische Zustandsgrößen		kalorische Zustandsgrößen	
Druck	p	innere Energie	U
Volumen	V	Enthalpie	H
Temperatur	T	Entropie	S

ßen Z konstante Werte an. Wird von einem Ausgangszustand 1 das System in den neuen Zustand 2 überführt, dann ist die *Änderung* der Zustandsgröße

$$\Delta Z = \int_1^2 dZ = Z_2 - Z_1 \qquad (O-1)$$

unabhängig von der Art der Prozeßführung; sie hängt nur vom Anfangs- und Endzustand ab. Wird ein *Kreisprozeß* durchlaufen, so daß

nach einer Folge von Zustandsänderungen der Anfangszustand wieder vorliegt, dann gilt

$$\oint dZ = 0; \quad (\text{O-2})$$

dZ totales Differential der Zustandsgröße Z .

Prozeßgrößen

Im Gegensatz zu den wegunabhängigen Zustandsgrößen sind Wärme und Arbeit wegunabhängige, d. h. von der Art der Prozeßführung abhängige *Prozeßgrößen*. Differentiell kleine Größen von Prozeßgrößen, die nicht als totales Differential schreibbar sind, werden im folgenden mit δ gekennzeichnet, also z. B. δQ und δW .

Spezifische und molare Größen

Thermodynamische Größen, die von der Substanzmenge abhängen, werden als *extensive* Größen (Quantitätsgrößen) bezeichnet (z. B. Volumen, innere Energie). *Intensive* Größen (Qualitätsgrößen) hängen nicht von der Substanzmenge ab, behalten also bei einer Zerlegung des Systems in Teilsysteme ihren Wert bei (z. B. Druck, Temperatur). Wird eine extensive Größe X durch die Substanzmenge dividiert, ergibt sich eine intensive Größe (Tabelle O-4).

Atom- und Molekülmassen

Die Masse eines Atoms m_A oder Moleküls m_M ist

$$m_A = A_r u, \quad m_M = M_r u; \quad (\text{O-6})$$

A_r relative Atommasse (angegeben z. B. im Periodensystem),

M_r relative Molekülmasse (Summe der relativen Atommassen),

u atomare Masseneinheit,

$$1 u = \frac{1}{12} m_A(^{12}\text{C}) = 1,66055 \cdot 10^{-27} \text{ kg}.$$

Für die Gesamtmasse m eines Einstoffsystems gilt

$$m = N m_M = \nu M; \quad (\text{O-7})$$

N Zahl der Teilchen (Moleküle, Atome) eines Systems,

ν Stoffmenge,

M Molmasse.

Tabelle O-4. Spezifische und molare Größen.

extensive Größe	intensive Größen	
	molar	spezifisch
X	$X_m = X/\nu \quad (\text{O-3})$	$x = X/m \quad (\text{O-4})$
	Zusammenhang:	
	$X_m = x(m/\nu) = x M$	(O-5)

m Masse des Systems

ν Stoff- oder Teilchenmenge

M Molmasse

Die Stoffmenge (Teilchenmenge) ν wird gemessen in mol. Die SI-Basiseinheit 1 mol ist die Menge eines Stoffs, der genau so viel Teilchen enthält, wie Atome in 12,000 g ^{12}C enthalten sind. Diese Zahl ist die *Avogadrosche Konstante* $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. Für die Stoffmenge ν gilt

$$\nu = N/N_A = m/M; \quad (\text{O-8})$$

N Teilchenzahl des Systems,

N_A Avogadrosche Konstante,

m Masse des Systems,

M Molmasse, d. h. Masse von $\nu = 1$ mol des Stoffes.

Die Molmasse M bestimmt sich aus der relativen Atommasse A_r bzw. Molekülmasse M_r gemäß

$$M = A_r \text{ g/mol} \quad \text{bzw.} \quad M = M_r \text{ g/mol.} \quad (\text{O-9})$$

O.1.2 Temperatur

Befinden sich zwei Körper auf verschiedenen Temperaturen, dann findet bei Kontakt der Körper ein Temperatenausgleich statt. Im *nullten Hauptsatz der Thermodynamik* wird formuliert:

Im thermodynamischen Gleichgewicht haben alle Bestandteile eines Systems dieselbe Temperatur.

Die physikalische Bedeutung der Temperatur wird im Abschnitt O.2.2 beschrieben; die

exakte Definition der *thermodynamischen* Temperatur erfolgt im Abschnitt O.3.5.

Zur Definition einer Temperaturskala sind zwei Fixpunkte erforderlich. Ein Fixpunkt ist der *absolute Temperaturnullpunkt*, der nicht unterschritten werden kann. Als zweiter Fixpunkt wurde der *Tripelpunkt* (Abschnitt O.4.3.2) des Wassers zu 273,16 K festgelegt. Daraus folgt für die SI-Basiseinheit der Temperatur:

1 Kelvin (1 K) ist der 273,16te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunkts von Wasser.

Die Kelvin-Skala hat dieselbe Teilung wie die ältere Celsius-Skala, deren Fixpunkte Schmelz- und Siedepunkte von Wasser (0 °C bzw. 100 °C) beim Normdruck $p_n = 101325 \text{ Pa}$ sind. Es gilt folgender Zusammenhang:

$$\frac{\vartheta}{^{\circ}\text{C}} = \frac{T}{\text{K}} - 273,15; \quad (\text{O-10})$$

ϑ Celsius-Temperatur,
 T Kelvin-Temperatur.

Für Temperaturdifferenzen gilt

$$\Delta\vartheta = \Delta T. \quad (\text{O-11})$$

Hinweise zur Temperaturmessung sowie eine Zusammenstellung der relevanten DIN-Normen finden sich in den VDE/VDI-Richtlinien 3511 und 3512.

O.1.3 Thermische Ausdehnung

Festkörper

Die meisten Festkörper dehnen sich bei Erwärmung aus (Übersicht O-1).

Der lineare Ausdehnungskoeffizient ist nur näherungsweise konstant. Bei großen Temperaturdifferenzen werden Mittelwerte gebildet (Tabelle O-5).

Übersicht O-1. Thermische Ausdehnung.

relative Längenänderung	$\frac{\Delta l}{l} = \alpha \Delta T$	(O-12)
absolute Länge	$l_2 = l_1 [1 + \alpha (T_2 - T_1)]$	(O-13)
relative Volumenänderung	$\frac{\Delta V}{V} = \gamma \Delta T$, mit $\gamma = 3\alpha$	(O-14)
absolutes Volumen	$V_2 = V_1 [1 + \gamma (T_2 - T_1)]$	(O-15)
Dichte	$\varrho(\vartheta) = \frac{\varrho_0}{1 + \gamma \vartheta} \approx \varrho_0 (1 - \gamma \vartheta)$	(O-16)

α	Längenausdehnungskoeffizient
γ	Raumausdehnungskoeffizient
ΔT	Temperaturänderung
l_1, l_2	Länge bei der Temperatur T_1 bzw. T_2
V_1, V_2	Volumen bei der Temperatur T_1 bzw. T_2
$\varrho(\vartheta)$	Dichte bei der Temperatur ϑ
ϱ_0	Dichte bei der Temperatur $\vartheta_0 = 0^{\circ}\text{C}$

Tabelle O-5. Mittlerer linearer Längenausdehnungskoeffizient α einiger Festkörper in verschiedenen Temperaturbereichen.

	$10^6 \alpha$ K^{-1}	$10^6 \alpha$ K^{-1}
Temperaturbereich	$0^{\circ}\text{C} \leq \vartheta \leq 100^{\circ}\text{C}$	$0^{\circ}\text{C} \leq \vartheta \leq 500^{\circ}\text{C}$
Aluminium	23,8	27,4
Kupfer	16,4	17,9
Stahl C60	11,1	13,9
rostfreier Stahl	16,4	18,2
Invarstahl	0,9	
Quarzglas	0,51	0,61
gewöhnliches Glas	9	10,2

Flüssigkeiten

Die Gln. (O-14) bis (O-16) in Übersicht O-1 gelten auch für Flüssigkeiten. Zahlenwerte des kubischen Ausdehnungskoeffizienten sind in Tabelle O-6 angegeben.

Gase

Bei einem Gas unter konstantem Druck existiert ein linearer Zusammenhang zwischen

Tabelle O-6. *Raumausdehnungskoeffizient γ einiger Flüssigkeiten bei der Temperatur $\vartheta = 20^\circ\text{C}$.*

Stoff	$10^3 \gamma$ in K^{-1}
Wasser	0,208
Quecksilber	0,182
Pentan	1,58
Ethylalkohol	1,10
Heizöl	0,9 bis 1,0

Volumen und Temperatur (*Gay-Lussacsches Gesetz*):

$$V(\vartheta) = V_0(1 + \gamma \vartheta); \quad (\text{O-17})$$

$V(\vartheta)$ Volumen bei der Temperatur ϑ ,
 V_0 Volumen bei der Temperatur $\vartheta_0 = 0^\circ\text{C}$,
 γ Raumausdehnungskoeffizient.

Für alle Gase ist der Volumenausdehnungskoeffizient bei kleinem Druck ($p \rightarrow 0$)

$$\gamma = 0,003661 \text{ K}^{-1} = \frac{1}{273,15 \text{ K}}.$$

Ein Gas in diesem Zustand wird als *ideales Gas* bezeichnet.

Mit der absoluten Temperatur T gilt

$$V(T) = V_0 \frac{T}{T_0} \text{ bzw. } V/T = \text{konst.}, \quad (\text{O-18})$$

$V(T)$ Volumen bei der absoluten Temperatur T ,
 V_0 Volumen bei der absoluten Temperatur $T_0 = 273,15 \text{ K}$.

O.1.4 Allgemeine Zustandsgleichung idealer Gase

Beim idealen Gas wird das Eigenvolumen der Gasmoleküle sowie deren Wechselwirkungen vernachlässigt. Die Zustandsgrößen p , V und T eines idealen Gases gehorchen der Beziehung

$$p \frac{V}{T} = \text{konst.}; \quad (\text{O-19})$$

p Druck,
 T absolute Temperatur,
 V Volumen des Gases.

Die Konstante auf der rechten Seite der Zustandsgleichung kann auf verschiedene Arten ausgedrückt werden (Übersicht O-2).

Die in Übersicht O-2 aufgeführten Konstanten sind:

– *individuelle* (spezifische, spezielle) Gaskonstante R_i

$$R_i = \frac{p_n}{T_n \varrho_n}; \quad (\text{O-27})$$

p_n Normdruck ($p_n = 101325 \text{ Pa}$),
 T_n Normtemperatur ($T_n = 273,15 \text{ K}$),
 ϱ_n Dichte des Gases im Normzustand.

Jedes Gas hat eine individuelle Gaskonstante, die sich von der anderer Gase unterscheidet.

– *allgemeine* (molare, universelle) Gaskonstante R_m

$$R_m = \frac{p_n V_{mn}}{T_n} = 8,31441 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}; \quad (\text{O-28})$$

V_{mn} Molvolumen eines idealen Gases im Normzustand ($V_{mn} = 22,414 \text{ dm}^3/\text{mol}$).

Die allgemeine Gaskonstante hat für alle idealen Gase denselben Wert.

– *Boltzmann-Konstante* k

$$k = \frac{R_m}{N_A} = 1,3807 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}; \quad (\text{O-29})$$

N_A Avogadro'sche Konstante.

Übersicht O-2. Zustandsgleichung idealer Gase.

	Gasgleichung in Verbindung mit der Masse		Stoffmenge	
extensiv	$p V = m R_i T$	(O-20)	$p V = \nu R_m T$	(O-23)
			$p V = N k T$	(O-24)
intensiv	$p v = R_i T$	(O-21)	$p V_m = R_m T$	(O-25)
	$p = \varrho R_i T$	(O-22)	$p = n k T$	(O-26)

p Gasdruck	m Masse
V Volumen	ϱ Dichte ($\varrho = m/V$)
v spezifisches Volumen ($v = V/m$)	ν Stoffmenge
V_m Molvolumen ($V_m = V/\nu$)	N Teilchenzahl
R_i individuelle Gaskonstante	n Teilchenzahldichte ($n = N/V$)
R_m allgemeine Gaskonstante	T absolute Temperatur
k Boltzmann-Konstante	

O.2 Kinetische Gastheorie**O.2.1 Gasdruck**

Die Moleküle eines Gases sind in ständiger Bewegung. Bei jedem Stoß auf die Gefäßwände wird eine Kraft auf die Wand ausgeübt. Der dadurch entstehende Druck kann für ideale Gase berechnet werden (*Grundgleichung der kinetischen Gastheorie*):

$$p = \frac{1}{3} \frac{N}{V} m_M \overline{v^2} = \frac{1}{3} n m_M \overline{v^2} = \frac{1}{3} \varrho \overline{v^2}; \quad (\text{O-30})$$

p Druck,
 N Teilchenzahl,
 n Teilchenzahldichte ($n = N/V$),
 V Volumen,
 m_M Masse eines Moleküls,
 ϱ Dichte,
 $\overline{v^2}$ Mittelwert der Geschwindigkeitsquadrate.

Für die *mittlere Geschwindigkeit* v_m gilt

$$v_m = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{3p/\varrho}. \quad (\text{O-31})$$

O.2.2 Thermische Energie und Temperatur

Für die Temperaturabhängigkeit der mittleren Geschwindigkeit v_m gilt

$$v_m = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{3kT/m_M} = \sqrt{3R_m T/M}; \quad (\text{O-32})$$

k Boltzmann-Konstante,
 R_m allgemeine Gaskonstante,
 m_M Masse eines Moleküls,
 M Molmasse,
 T absolute Temperatur.

Die mittlere kinetische Energie eines Moleküls ist

$$\bar{E}_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_M \overline{v^2} = \frac{3}{2} k T. \quad (\text{O-33})$$

Diese Gleichung gilt für punktförmige Moleküle, bei denen die kinetische Energie gleichmäßig auf die drei Freiheitsgrade der *Translation* ($f = 3$) verteilt ist. Mit der mittleren Energie je Freiheitsgrad

$$\bar{E}_f = \frac{1}{2} k T \quad (\text{O-34})$$

folgt für ein Gas, dessen Moleküle f Freiheitsgrade haben:

$$\bar{E}_{\text{kin}} = \frac{f}{2} k T; \quad (\text{O-35})$$

\bar{E}_{kin} mittlere kinetische Energie eines Moleküls,

f Zahl der Freiheitsgrade,

k Boltzmann-Konstante,

T absolute Temperatur.

O.2.3 Geschwindigkeitsverteilung von Gasmolekülen

In einem Gas ändern sich infolge von Stößen ständig die Geschwindigkeiten der einzelnen Gasmoleküle. Dennoch wird im zeitlichen Mittel ein konstanter Bruchteil $f(v)dv$ der Gasmoleküle Geschwindigkeiten zwischen v und $v + dv$ annehmen. Die *Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung* gibt dieses Verhältnis an:

$$f(v)dv = 4\pi v^2 \left(\frac{m_M}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_M v^2}{2kT}} dv; \quad (\text{O-36})$$

$f(v)dv$ Wahrscheinlichkeit, mit der Geschwindigkeiten zwischen v und $v + dv$ auftreten,

m_M Masse eines Moleküls,

T absolute Temperatur,

k Boltzmann-Konstante.

Bild O-1 zeigt die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung bei verschiedenen Temperaturen. Das Maximum der Funktion definiert die *wahrscheinlichste* Geschwindigkeit v_w :

$$v_w = \sqrt{2kT/m_M} = \sqrt{2/3} v_m. \quad (\text{O-37})$$

Die *durchschnittliche* Geschwindigkeit \bar{v} ist

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_M}} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} v_m. \quad (\text{O-38})$$

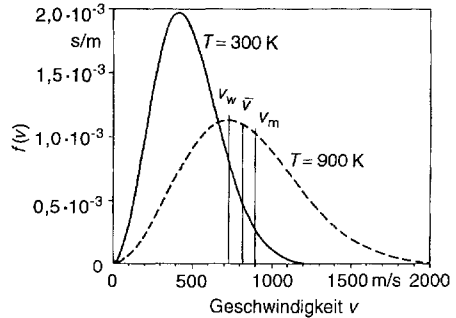


Bild O-1. Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung für Stickstoffmoleküle.

O.3 Hauptsätze der Thermodynamik

O.3.1 Wärme

Die Temperatur eines Körpers (Systems) ist ein Maß für die kinetische Energie, die in der ungeordneten Bewegung seiner Moleküle steckt (Abschnitt O.2.2). Die Temperatur kann demnach nur dadurch erhöht werden, daß dem Körper Energie zugeführt wird. Die erforderliche Energie kann auf verschiedene Arten zugeführt werden, beispielsweise in Form mechanischer, elektrischer oder elektromagnetischer Arbeit. Eine spezielle Form der Energieübertragung tritt auf, wenn zwei Körper in Kontakt gebracht werden, die sich auf verschiedenen Temperaturen befinden:

Energie, die aufgrund eines Temperaturunterschieds zwischen zwei Systemen ausgetauscht wird, wird als *Wärme* bezeichnet.

Die Wärme fließt stets vom System mit der höheren zum System mit der niedrigeren Temperatur.

Falls keine Phasenübergänge (Abschnitt O.4) stattfinden, ist mit einer Wärmeübertragung stets auch eine Temperaturänderung verknüpft (Übersicht O-3).

Molare Wärmekapazitäten von Gasen sind in den Tabellen O-7 und O-8 zusammengestellt. Weitere Werte finden sich in Tabelle P-1.

Übersicht O-3. Wärmekapazitäten.

Wärme für infinitesimal kleine Temperaturänderung:

$$\delta Q = C \, dT \quad (\text{O-39})$$

spezifische Wärmekapazität

$$c = C/m \quad (\text{O-40})$$

molare Wärmekapazität

$$C_m = C/\nu \quad (\text{O-41})$$

Wärme für endliche Temperaturänderung:

$$Q_{12} = m \int_{T_1}^{T_2} c(T) \, dT = \nu \int_{T_1}^{T_2} C_m(T) \, dT \quad (\text{O-42})$$

$$Q_{12} = m \bar{c} (T_2 - T_1) = \nu \bar{C}_m (T_2 - T_1) \quad (\text{O-43})$$

C	Wärmekapazität, $[C] = 1 \text{ J/K}$
c	spezifische Wärmekapazität $[c] = 1 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$
C_m	molare Wärmekapazität, $[C_m] = 1 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$
\bar{c}	mittlere spezifische Wärmekapazität
\bar{C}_m	mittlere molare Wärmekapazität
m	Masse des Systems
ν	Stoffmenge des Systems
T	Temperatur

Die spezifische bzw. molare Wärmekapazität von *Gasen* hängt von der Prozeßführung ab. Für zwei spezielle Randbedingungen, die leicht realisierbar sind, werden Wärmekapazitäten definiert:

- C_v, C_{mv}, c_v *isochore* Wärmekapazität für Wärmeumsatz bei konstantem Volumen,
- C_p, C_{mp}, c_p *isobare* Wärmekapazität für Wärmeumsatz bei konstantem Druck.

Wärmekapazitäten werden mit Kalorimetern gemessen. Beim *Mischungskalorimeter* befindet sich im Innern eines wärmeisolierten Dewar-Gefäßes eine Flüssigkeit (meist Wasser) der Masse m_1 und der spezifischen Wärmekapazität c_1 bei der Temperatur T_1 . Wird ein Körper der Masse m_2 und der Temperatur T_2 eingetaucht, so kann aus der Mischungstemperatur T_m und der Wärmekapazität C_K des Kalorimeters die spezifische

Übersicht O-4. Erster Hauptsatz der Thermodynamik.

$$\text{differenziell: } dU = \delta Q + \delta W \quad (\text{O-45})$$

$$\text{integriert: } \Delta U = U_2 - U_1 = Q_{12} + W_{12} \quad (\text{O-46})$$

$dU, \Delta U$ Änderung der inneren Energie

$\delta Q, Q_{12}$ umgesetzte Wärme

$\delta W, W_{12}$ übertragene Arbeit

Vorzeichenregel: Wärme und Arbeit, die dem System zugeführt werden, erhalten ein positives Vorzeichen. Vom System nach außen abgegebene Energie ist negativ.

Wärmekapazität c_2 des Körpers bestimmt werden:

$$c_2 = \frac{(m_1 c_1 + C_K)(T_m - T_1)}{m_2 (T_2 - T_m)}. \quad (\text{O-44})$$

O.3.2 Erster Hauptsatz der Thermodynamik

Die kinetische Energie, die in der ungeordneten Bewegung der Moleküle eines Systems steckt, sowie die potentielle Energie der gegenseitigen Wechselwirkungen der Teilchen wird zusammengefaßt zur *inneren Energie* eines Systems.

In einem abgeschlossenen System bleibt die innere Energie eines Systems konstant; es gibt kein *perpetuum mobile* erster Art.

Die innere Energie U erfährt eine Änderung dU , wenn das System mit der Umgebung Energie austauscht; dabei ist es unerheblich, ob die Energie in Form von Wärme oder Arbeit übertragen wird. Der erste Hauptsatz bilanziert die Änderung der inneren Energie durch zu- oder abgeführte Wärme und Arbeit (Übersicht O-4).

Die innere Energie ist eine *Zustandsgröße* (Abschnitt O.1.1). Sie hängt nur vom augenblicklichen Zustand ab, nicht aber davon, wie das System in diesen Zustand gelangt ist.

Beim idealen Gas besteht die innere Energie nur in der kinetischen Energie der

Molekülbewegung. Nach Abschnitt O.2.2 gilt

$$U = N \bar{E}_{\text{kin}} = N \frac{f}{2} k T = \nu \frac{f}{2} R_m T = m \frac{f}{2} R_i; \quad (\text{O-47})$$

U	innere Energie eines idealen Gases,
N	Teilchenzahl,
ν	Teilchenmenge,
m	Masse,
f	Zahl der Freiheitsgrade,
\bar{E}_{kin}	mittlere kinetische Energie je Molekül,
R_m	allgemeine Gaskonstante,
R_i	individuelle Gaskonstante,
k	Boltzmann-Konstante,
T	absolute Temperatur.

Für beliebige Zustandsänderungen ist die Änderung dU der inneren Energie U eines idealen Gases

$$dU = \nu C_{mv} dT = m c_v dT; \quad (\text{O-47})$$

C_{mv}	isochore molare Wärmekapazität,
c_v	isochore spezifische Wärmekapazität,
dT	differentielle Temperaturänderung.

Volumenänderungsarbeit

Wird in einem geschlossenen System das Volumen eines Gases verändert (Bild O-2), dann ist das Differential der Arbeit $dW = F ds$ ausdrückbar als

$$\delta W = -p dV. \quad (\text{O-48})$$

Bei einer Volumenänderung von V_1 auf V_2 gilt

$$W_{12} = - \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV; \quad (\text{O-49})$$

W_{12}	Volumenänderungsarbeit,
$p(V)$	Druck in Abhängigkeit vom Volumen.

Die Volumenänderungsarbeit entspricht der Fläche unter der Kurve der Zustandsänderung im p, V -Diagramm.

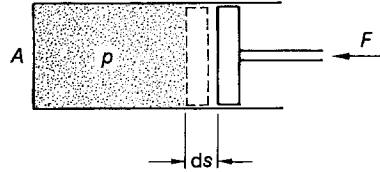


Bild O-2. Zur Bestimmung der Volumenänderungsarbeit. A Kolbenfläche; F Kraft; p Druck; ds Weg-element.

Enthalpie

Im Gegensatz zur inneren Energie benutzt man bei Vorgängen mit isobarer Zustandsänderung (z.B. bei offenen Systemen) die Enthalpie H .

$$H = U + p V; \quad (\text{O-50})$$

H	Enthalpie,
U	innere Energie,
p	Druck,
V	Volumen.

Bei einer isobaren Zustandsänderung ($p = \text{konst.}$) ist das totale Differential der Enthalpie $dH = dU + p dV$. Mit dem ersten Hauptsatz ergibt sich

$$\begin{aligned} dH|_{p=\text{konst.}} &= \delta Q|_{p=\text{konst.}} = \nu C_{mp} dT \\ &= m c_p dT; \end{aligned} \quad (\text{O-51})$$

$dH _{p=\text{konst.}}$	Enthalpieänderung bei konstantem Druck,
$\delta Q _{p=\text{konst.}}$	Wärmeumsatz bei konstantem Druck,
C_{mp}, c_p	isobare molare und spezifische Wärmekapazität,
ν	Stoffmenge,
m	Masse,
dT	Temperaturänderung.

O.3.3 Wärmekapazität idealer Gase

Die Wärmekapazitäten idealer Gase gehorchen einfachen Gesetzmäßigkeiten (Übersicht O-5).

Tabelle O-7 zeigt eine Zusammenstellung der berechneten molaren Wärmekapazitäten so-

Übersicht O-5. Wärmekapazitäten idealer Gase.

isobare und isochore Wärmekapazitäten	$C_{mp} - C_{mv} = R_m$ $c_p - c_v = R_i$ (O-52)
isochore Wärmekapazitäten	$C_{mv} = \frac{1}{v} \frac{dU}{dT}, \quad c_v = \frac{1}{m} \frac{dU}{dT}$ (O-53)
Einfluß der Freiheitsgrade der Gasmoleküle	$C_{mv} = \frac{f}{2} R_m, \quad C_{mp} = \left(\frac{f}{2} + 1\right) R_m$ (O-54)
	$c_v = \frac{f}{2} R_i, \quad c_p = \left(\frac{f}{2} + 1\right) R_i$ (O-55)
Isentropenexponent, Adiabatenexponent	$\kappa = \frac{C_{mp}}{C_{mv}} = \frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{2}{f}$ (O-56)

R_m, R_i	allgemeine bzw. individuelle Gaskonstante
v	Stoffmenge
m	Masse
U	innere Energie
f	Zahl der Freiheitsgrade eines Moleküls

wie des Isentropenexponenten für verschiedene Molekülformen und mögliche Freiheitsgrade. Experimentelle Ergebnisse sind in Tabelle O-8 angegeben.

Hinweise zur Berechnung der Wärmekapazität idealer Gase mit komplizierten Molekülformen finden sich beispielsweise im VDI-Wärmeatlas, Abschnitt Da. 7.1.

Tabelle O-7. Freiheitsgrade, molare Wärmekapazitäten C_m und Isentropenexponent κ für verschiedene Molekülformen.





Molekülform	Symbol	Freiheitsgrade				C_{mv} $\frac{J}{mol \cdot K}$	C_{mp} $\frac{J}{mol \cdot K}$	κ
		Translation	Rotation	Oszillation	gesamt			
punktförmig		3	–	–	3	12,47	20,79	1,67
starre Hantel		3	2	–	5	20,79	29,10	1,40
schwingende Hantel		3	2	2	7	29,10	37,41	1,29
mehratomig, starr		3	3	–	6	24,94	33,26	1,33


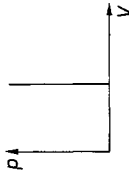
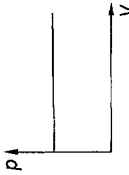

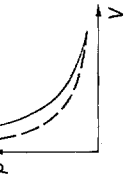
Tabelle O-8. Gemessene molare Wärmekapazitäten C_m einiger Gase beim Normdruck $p_n = 1013 \text{ hPa}$ und der Temperatur $\vartheta = 20^\circ\text{C}$.

Gas		C_{mv} $\frac{J}{mol \cdot K}$	C_{mp} $\frac{J}{mol \cdot K}$	κ
Helium	He	12,47	20,80	1,67
	Ar	12,47	20,80	1,67
Wasserstoff	H ₂	20,43	28,76	1,41
	O ₂	21,06	29,43	1,40
Stickstoff	N ₂	20,76	29,09	1,40
Luft		20,77	29,10	1,40
	Cl ₂	25,74	34,70	1,35
Kohlendioxid	CO ₂	28,46	36,96	1,30
Schwefeldioxid	SO ₂	31,40	40,39	1,29
Methan	CH ₄	26,19	34,59	1,32
Ethan	C ₂ H ₆	43,12	51,70	1,20
Ammoniak	NH ₃	27,84	36,84	1,31

Die Außenseiterrolle von Cl₂ bei den zweiatomigen Molekülen (Tabelle O-8) kommt daher, daß in Chlor bei 20 °C etwa die Hälfte der Moleküle sich wie starre Hanteln und die andere Hälfte wie schwingende Hanteln verhält. Während alle Moleküle die Freiheitsgrade der Translation ($f = 3$) besitzen, werden die Freiheitsgrade der Rotation und der Oszillation mit steigender Temperatur sukzessive angeregt.

In einem Festkörper schwingen die Atome um ihre Ruhelagen in drei Raumrichtungen. Mit $f = 6$ Schwingungsfreiheitsgraden je Atom folgt $C_{mv} = 3 R_m = 24,9 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$. Dieses Ergebnis, als *Dulong-Petitsches Gesetz* bekannt, gilt bei hohen Temperaturen. Mit abnehmender Temperatur geht die Wärmekapazität gegen null. In der Nähe des absoluten

Tabelle O-9. Spezielle Zustandsänderungen idealer Gase.

Zustands- änderung	Bedingung	p, V -Diagramm	thermische Zustandsgrößen	erster Hauptsatz	Wärme	Volumen- änderungsarbeit
isotherm	$dT = 0$ $T = \text{konstant}$		$pV = \text{konstant}$ BOYLE-MARIOTTE	$\delta Q + \delta W = 0$ $Q_{12} + W_{12} = 0$	$\delta Q = -\delta W$ $Q_{12} = v R_m T \ln \frac{V_2}{V_1}$ $= m R_i T \ln \frac{V_2}{V_1}$	$\delta W = -p dV$ $W_{12} = v R_m T \ln \frac{V_1}{V_2}$ $= m R_i T \ln \frac{V_1}{V_2}$
isochor	$dV = 0$ $V = \text{konstant}$		$\frac{p}{T} = \text{konstant}$ CHARLES	$dU = \delta Q$ $U_2 - U_1 = Q_{12}$	$\delta Q = n C_{mv} dT$ $Q_{12} = n C_{mv} (T_2 - T_1)$ $= m c_v (T_2 - T_1)$	$\delta W = 0$ $W_{12} = 0$
isobar	$dp = 0$ $p = \text{konstant}$		$\frac{V}{T} = \text{konstant}$ GAY-LUSSAC	$dU = \delta Q + \delta W$ $U_2 - U_1 = Q_{12} + W_{12}$	$\delta Q = n C_{mp} dT$ $Q_{12} = n C_{mp} (T_2 - T_1)$ $= m c_p (T_2 - T_1)$	$\delta W = -p dV$ $W_{12} = p (V_1 - V_2)$
isentrop	$dS = 0$ $\delta Q = 0$ $S = \text{konstant}$		$pV^\kappa = \text{konstant}$ $T V^{\kappa-1} = \text{konstant}$ $p^{1-\kappa} T^\kappa = \text{konstant}$	$dU = \delta W$ $U_2 - U_1 = W_{12}$	$\delta Q = 0$ $Q_{12} = 0$	$\delta W = v C_{mv} dT$ $W_{12} = v C_{mv} (T_2 - T_1)$ $= \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{\kappa - 1}$
polytrop			$pV^n = \text{konstant}$ $T V^{n-1} = \text{konstant}$ $p^{1-n} T^n = \text{konstant}$	$dU = \delta Q + \delta W$ $U_2 - U_1 = Q_{12} + W_{12}$	$\delta Q = dU - \delta W$ $Q_{12} = v R_m (T_2 - T_1)$ $\cdot \left(\frac{1}{\kappa - 1} - \frac{1}{n - 1} \right)$	$\delta W = -p dV$ $W_{12} = \frac{v R_m}{n - 1} (T_2 - T_1)$ $= \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{n - 1}$

Temperaturnullpunkts gilt $C_{mv} \sim T^3$ (DEBYE, Abschnitt V).

O.3.4 Spezielle Zustandsänderungen idealer Gase

Die wichtigsten Formeln für Zustandsänderungen idealer Gase sind in Tabelle O-9 zusammengestellt. Die Zustandsänderungen werden mit konstanter Stoffmenge ν bzw. Masse m durchgeführt (geschlossenes System). Das Gas ist in einem Zylinder mit reibungsfrei verschiebbarem Kolben eingeschlossen (Bild O-2). Zu jeder Zeit sollen Druck und Temperatur des Gases mit der Umgebung im Gleichgewicht sein. Derartig kontrollierte Prozesse sind *reversibel* (Abschnitt O.3.6).

Die in Tabelle O-9 angegebenen Beziehungen zwischen den thermischen Zustandsgrößen p , V und T bei der *polytropen* Zustandsänderung können als Verallgemeinerung der Beziehungen bei den anderen Zustandsänderungen aufgefaßt werden. Je nach Wahl des *Polytropenexponenten* n ergeben sich die Spezialfälle

- Isotherme ($n = 1$),
- Isochore ($n = \infty$),
- Isobare ($n = 0$),
- Isentrope ($n = \kappa$).

O.3.5 Kreisprozesse

Durchläuft ein System eine Folge von Zustandsänderungen, so daß der Endzustand wieder mit dem Anfangszustand übereinstimmt, dann liegt ein *Kreisprozeß* vor. Je nach Umlaufsinn im p , V -Diagramm unterscheidet man rechts- und linksläufige Kreisprozesse (Tabelle O-10).

Da die innere Energie U als Zustandsgröße bei einem vollständigen Umlauf keine Änderung erfährt, lautet der erste Hauptsatz bei Kreisprozessen:

$$\oint dU = 0 = \oint \delta W + \oint \delta Q = W + Q; \quad (\text{O-57})$$

W je Zyklus umgesetzte Arbeit,
 Q je Zyklus umgesetzte Wärme.

Die umgesetzten Energiebeträge treten im p , V -Diagramm (Bild O-3) als Fläche der umfahrenen Figur auf.

Rechtsläufiger Carnot-Prozeß

Der *Carnotsche* Kreisprozeß (Bild O-4) verläuft zwischen zwei Isothermen und zwei Isentropen. Er hat große theoretische Bedeutung, weil er den größten thermischen Wirkungsgrad besitzt, mit dem Wärme in mechanische Arbeit umgewandelt werden kann.

Die Energieumsätze auf den einzelnen Teilschritten sind in Tabelle O-11 zusammengestellt. Die auftretenden Energieströme sind im Bild O-5 anschaulich dargestellt. Dem System wird bei der hohen Temperatur T_3 Wärme zugeführt ($Q_{zu} = Q_{34}$); bei der tiefen Temperatur T_1 gibt das System Wärme an die Umgebung ab ($Q_{ab} = Q_{12}$). Je Umlauf wird die Nutzarbeit W abgegeben.

Das Verhältnis von betragsmäßig abgegebener Nutzarbeit $|W|$ und zugeführter Wärme Q_{zu} wird als *thermischer Wirkungsgrad* η_{th} einer Wärmekraftmaschine bezeichnet:

$$\eta_{th} = \frac{|W|}{Q_{zu}}. \quad (\text{O-58})$$

Mit den Gleichungen von Tabelle O-11 ergibt sich für die Nutzarbeit je Zyklus

$$\begin{aligned} W &= W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41} \\ &= -\nu R_m \ln \frac{V_4}{V_3} (T_3 - T_1). \end{aligned}$$

Mit der Wärme $Q_{zu} = Q_{34}$ wird der thermische Wirkungsgrad des Carnot-Prozesses $\eta_{th,c}$:

$$\eta_{th,c} = \frac{T_3 - T_1}{T_3} = 1 - \frac{T_1}{T_3}; \quad (\text{O-59})$$

T_3 Temperatur der Wärmequelle,
 T_1 Temperatur der Wärmesenke.

Thermodynamische Temperatur

Der thermische Wirkungsgrad des Carnot-Prozesses hängt nur von den Temperaturen der beteiligten Wärmebäder ab, nicht aber vom Arbeitsmedium. Dadurch wird es mög-

Tabelle O-10. Eigenschaften von Kreisprozessen.

Umlaufsinn	rechtsläufig	linksläufig
Bezeichnung	Kraftmaschinen-prozeß	Arbeitsmaschinen-prozeß
Wärmefluß	Wärme wird bei hoher Temperatur aufgenommen und bei tiefer Temperatur abgegeben.	Wärme wird bei tiefer Temperatur aufgenommen und bei hoher Temperatur abgegeben.
mechanische Arbeit	Differenz von zu- und abgeführter Wärme wird als mechanische Nutzarbeit abgegeben.	Differenz von ab- und zugeführter Wärme wird als mechanische Arbeit zugeführt.
Beispiele	Verbrennungsmotor, Wärmekraftmaschine	Kältemaschine, Wärmepumpe

lich, die *thermodynamische Temperatur* stoffunabhängig zu definieren. Die Temperaturen zweier Wärmebäder lassen sich also (im Prinzip) dadurch vergleichen, daß der Wirkungsgrad eines Carnot-Prozesses bestimmt wird, der zwischen den Wärmebädern betrieben wird.

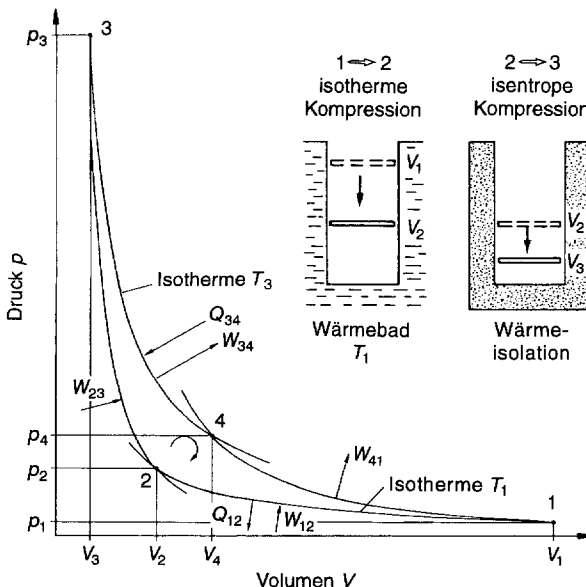


Bild O-4. Carnotscher Kreisprozeß.

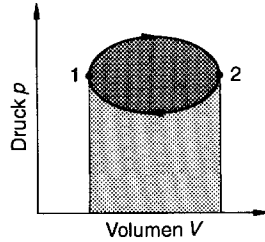


Bild O-3. Rechtsläufiger Kreisprozeß.
helle Graufärbung: zugeführte Volumenänderungsarbeit,
gesamte Graufärbung: abgegebene Volumenänderungsarbeit,
umfahrene Fläche: Nutzarbeit.

Linksläufiger Carnot-Prozeß

Beim linksläufigen Kreisprozeß treten Energieströme auf, die im Bild O-6 dargestellt sind. Es sind zwei Betriebsweisen möglich: *Kältemaschine* und *Wärmepumpe*. Die Leistungszahlen für diese Arbeitsmaschinenprozesse sind in Übersicht O-6 zusammengestellt.

Technische Kreisprozesse

Kreisprozesse, die in realen Maschinen ablaufen, können durch idealisierte *Vergleichsprozesse* angenähert werden (Tabelle O-12). Die Pfeile im p, V -Diagramm zeigen an, bei wel-

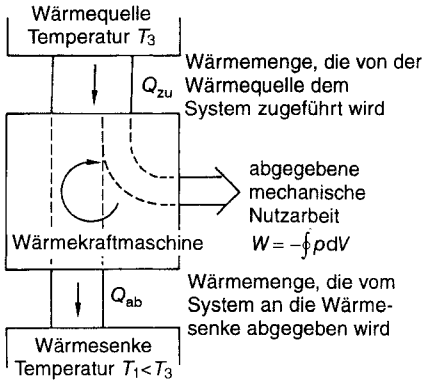


Bild O-5. Energieflußdiagramm beim rechtsläufigen Carnot-Prozeß.

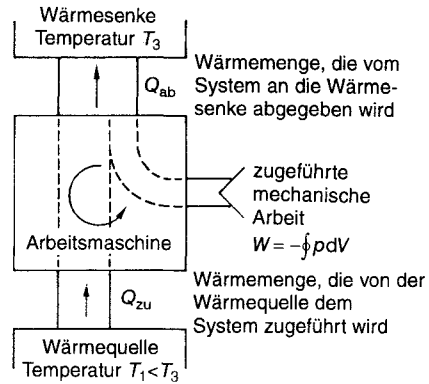


Bild O-6. Energieflußdiagramm beim linksläufigen Carnot-Prozeß.

Übersicht O-6. Leistungsziffer von Kältemaschine und Wärmepumpe.

	Kältemaschine	Wärmepumpe
Definition der Leistungsziffer ε	$\varepsilon_k = \frac{Q_{zu}}{W} = \frac{\dot{Q}_{zu}}{P}$ (O-60)	$\varepsilon_w = \frac{ Q_{ab} }{W} = \frac{ \dot{Q}_{ab} }{P}$ (O-61)
Leistungsziffer des Carnot-Prozesses	$\varepsilon_{k,c} = \frac{T_1}{T_3 - T_1}$ (O-62)	$\varepsilon_{w,c} = \frac{T_3}{T_3 - T_1} = \frac{1}{\eta_{th,c}}$ (O-63)

\dot{Q}_{zu} zugeführter Wärmestrom (dem kalten Wärmebad entzogen)
 P zugeführte Leistung
 $|\dot{Q}_{ab}|$ abgegebener Wärmestrom (an das Wärmebad hoher Temperatur)

Tabelle O-11. Energieumsätze beim Carnot-Prozeß.

Prozeßschritt	Arbeit	Wärme
1 → 2: isotherme Kompression	$W_{12} = \nu R_m T_1 \ln(V_1/V_2)$ zugeführt	$Q_{12} = -\nu R_m T_1 \ln(V_1/V_2)$ abgegeben
2 → 3: isentropische Kompression	$W_{23} = \nu C_{mv}(T_3 - T_1)$ zugeführt	—
3 → 4: isotherme Expansion	$W_{34} = -\nu R_m T_3 \ln(V_4/V_3)$ abgegeben	$Q_{34} = \nu R_m T_3 \ln(V_4/V_3)$ zugeführt
4 → 1: isentropische Expansion	$W_{41} = -\nu C_{mv}(T_3 - T_1)$ abgegeben	—

chen Zustandsänderungen Wärme übertragen wird; die schraffierten Flächen stellen die Nutzarbeit dar.

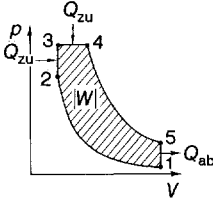
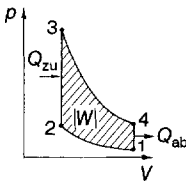
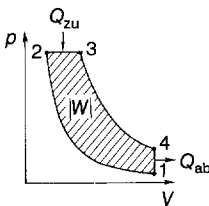
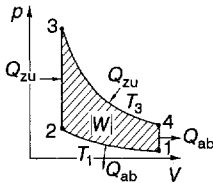
O.3.6 Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik

Reversible und irreversible Prozesse

Zustandsänderungen eines Systems können *reversibel* (umkehrbar) oder *irreversibel* (nicht umkehrbar) sein.

Ein Prozeß ist reversibel, wenn bei seiner Umkehr der Ausgangszustand wieder erreicht werden kann, ohne daß eine Änderung in der Umgebung zurückbleibt; ist dies nicht möglich, dann ist der Prozeß irreversibel.

Tabelle O-12. Technische Kreisprozesse.

		Bezeichnung	p, V -Diagramm	Einzelprozesse	thermischer Wirkungsgrad
Kolbenmaschinen	Verbrennungsmotoren	Seiliger-Prozeß		2 Isentropen, 2 Isochoren, 1 Isobare	$\eta_{th} = 1 - \frac{T_5 - T_1}{T_3 - T_2 + \kappa(T_4 - T_3)}$
		Otto-Prozeß		2 Isentropen, 2 Isochoren	$\eta_{th} = 1 - \frac{1}{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}}$
		Diesel-Prozeß		2 Isentropen, 1 Isochore, 1 Isobare	$\eta_{th} = \frac{\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\kappa} - 1}{\kappa \left(\frac{V_3}{V_2} - 1\right) \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}}$
	Heißluftmotor	Stirling-Prozeß		2 Isothermen, 2 Isochoren	$\eta_{th} = 1 - \frac{T_1}{T_3} = \eta_{th,c}$

Bei genauer Untersuchung zeigt es sich, daß alle natürlich ablaufenden Vorgänge irreversibel sind. Reversible Prozesse sind nur idealisierte Grenzfälle. Reversible Zustandsänderungen von Gasen (z. B. isotherme Expansion) sind denkbar, wenn die Prozeßführung quasi-statisch, d. h. über Gleichgewichtszustände, verläuft und wenn keine Reibung auftritt.

Beispiele für irreversible Zustandsänderungen sind

- Diffusion,
- Überströmprozesse (freie Expansion),
- Wärmeübergang,
- gedämpfte Schwingungen.

Tabelle O-12 (Fortsetzung)

		Bezeichnung	p, V -Diagramm	Einzelprozesse	thermischer Wirkungsgrad
Strömungsmaschinen	offene Gasturbine	Joule-Prozeß		2 Isentropen, 2 Isobaren	$\eta_{th} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$ $= 1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$
	geschlossene Gasturbine	Ericsson-Prozeß		2 Isothermen, 2 Isobaren	$\eta_{th} = 1 - \frac{T_1}{T_3} = \eta_{th,c}$
	Dampfkraftanlagen	Clausius-Rankine-Prozeß		2 Isentropen, 2 Isobaren	$\eta_{th} = \frac{h_3 - h_4}{h_3 - h_1} \approx 1 - \frac{h_4}{h_3}$

Formulierungen des zweiten Hauptsatzes

Es sind viele Prozesse in Übereinstimmung mit dem ersten Hauptsatz denkbar, die aber nicht realisierbar sind; sie verstoßen gegen den zweiten Hauptsatz. Eine klassische Formulierung lautet:

Es gibt keine periodisch arbeitende Maschine, die Wärme aus einer Wärmequelle entnimmt und vollständig in mechanische Arbeit umwandelt.

Eine Maschine, die dies könnte, wird als *perpetuum mobile 2. Art* bezeichnet.

Die linksläufigen Kreisprozesse zeigen, daß es unter Arbeitsaufwand möglich ist, Wärme einem kalten Körper zu entziehen und bei

einer höheren Temperatur wieder abzugeben (Wärmepumpe). Dagegen gilt:

Wärme geht nicht von selbst von einem kalten auf einen warmen Körper über.

Entropie

Mit Hilfe des Entropiebegriffs ist es möglich, den zweiten Hauptsatz mathematisch darzustellen. Für den reversibel geführten Carnotschen Kreisprozeß läßt sich zeigen, daß die Summe von zu- und abgeführter Wärme, jeweils dividiert durch die Temperatur, bei der die Wärme umgesetzt wird, null ergibt:

$$\frac{Q_{12}}{T_1} + \frac{Q_{34}}{T_3} = 0.$$

Übersicht O-7. Entropie.

Differential der Entropie	$dS = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T}$	(O-65)
Entropiedifferenz zwischen zwei Zuständen	$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T}$	(O-66)
Entropiedifferenz bei idealen Gasen	$\Delta S = v \left[C_{mv} \ln \frac{T_2}{T_1} + R_m \ln \frac{V_2}{V_1} \right]$ $= v \left[C_{mp} \ln \frac{T_2}{T_1} - R_m \ln \frac{p_2}{p_1} \right]$	(O-67)
S	Entropie, SI-Einheit $[S] = 1 \text{ J/K}$	
δQ_{rev}	reversibel umgesetzte Wärme	
T_1, T_2	Temperatur	
p_1, p_2	Druck	
V_1, V_2		
v	Stoffmenge	
R_m	allgemeine Gaskonstante	
C_{mp}, C_{mv}	isobare bzw. isochore molare Wärmekapazität	

Diese Beziehung gilt etwas modifiziert für beliebige Kreisprozesse bei reversibler Führung:

$$\oint \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} = 0. \quad (\text{O-64})$$

Die Größe $\delta Q_{\text{rev}}/T$ ist nach Gl. (O-2) das Differential einer Zustandsgröße, die als Entropie S bezeichnet wird (Übersicht O-7).

Der Nullpunkt der Entropie ist im Prinzip frei wählbar. Häufig wird in der Technik die Entropie eines Systems bei $\vartheta = 0^\circ\text{C}$ null gesetzt. Der dritte Hauptsatz zeigt, daß die Entropie reiner Stoffe am absoluten Temperaturnullpunkt null ist.

In *adiabaten geschlossenen* Systemen sind nur solche Vorgänge möglich, bei denen die Entropie zunimmt:

$$dS \geq 0. \quad (\text{O-68})$$

Das Gleichheitszeichen gilt für reversible, das Größer-als-Zeichen für irreversible Prozesse. In *abgeschlossenen* Systemen verlaufen alle Prozesse bei konstanter innerer Energie und

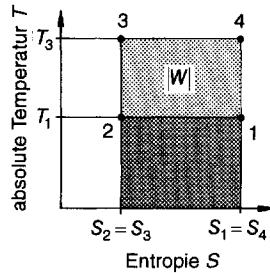


Bild O-7. T, S -Diagramm des rechtsläufigen Carnot-Prozesses. W Arbeit; 1 bis 4 Zustandspunkte.

ansteigender Entropie. Wenn die Entropie ein Maximum erreicht hat, liegt der Gleichgewichtszustand vor (Abschnitt O.4.3).

Aus der Definitionsgleichung für die Entropie folgt, daß in einem T, S -Diagramm die reversibel übertragene Wärme als Fläche unter der Kurve der Zustandsänderung abgelesen werden kann. Mit $\delta Q_{\text{rev}} = T dS$ ergibt sich

$$Q_{12, \text{rev}} = \int_1^2 T dS. \quad (\text{O-69})$$

Bild O-7 zeigt das *Wärmeschaubild* des Carnot-Prozesses. Die zugeführte Wärme Q_{34} entspricht der Fläche unter der Geraden 3-4, die abgegebene Wärme Q_{12} ist die Fläche unter der Geraden 1-2. Die Nutzarbeit entspricht wie beim p, V -Diagramm dem Flächeninhalt der umfahrenen Figur 1-2-3-4. Der thermische Wirkungsgrad ist das Verhältnis zwischen der umfahrenen Fläche und der Gesamtfläche.

Statistische Deutung der Entropie

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen der Entropie eines Systems in einem bestimmten Zustand und der Wahrscheinlichkeit der Realisierung dieses Zustandes. Nach BOLTZMANN gilt

$$S = k \ln P; \quad (\text{O-70})$$

S Entropie eines Systems,
 k Boltzmann-Konstante,
 P thermodynamische Wahrscheinlichkeit des Zustandes.

Der Entropieunterschied zweier Zustände 1 und 2 ist

$$\Delta S = S_2 - S_1 = k \ln (P_2/P_1). \quad (\text{O-71})$$

Da in abgeschlossenen Systemen natürlich ablaufende Prozesse sowohl mit einem Anstieg der Entropie als auch einer Abnahme des Ordnungsgrades verknüpft sind (z. B. Mischung zweier vorher getrennter Gase), gilt:

Die Entropie ist ein Maß für den Grad der Unordnung in einem System.

Exergie und Anergie

Die Erfahrung zeigt, daß nicht jede Energie in beliebige andere Energieformen umwandelbar ist. Während sich z. B. die mechanische Energie (kinetische und potentielle) und die elektrische Energie praktisch unbeschränkt in andere Energieformen umwandeln lassen, ist die Umwandlung der inneren Energie oder der Wärme in andere Energieformen durch den zweiten Hauptsatz begrenzt. Der Anteil einer Energie, der unter Mitwirkung der Umgebung in jede andere Energieform umwandelbar ist, wird als *Exergie*, der nicht umwandelbare Anteil als *Anergie* bezeichnet. Es gilt folgende Beziehung:

$$\text{Energie} = \text{Exergie} + \text{Anergie}.$$

Jede Energie läßt sich aufspalten in Exergie und Anergie, wobei ein Anteil auch null sein kann.

Als Beispiel soll die Exergie und Anergie der Wärme betrachtet werden. Die Exergie der Wärme ist jener Anteil, der sich in einem rechtsläufigen, reversibel geführten Kreisprozeß mit der Umgebung als Wärmesenke in Nutzarbeit verwandeln läßt. Die Anergie ist die Abwärme des Kreisprozesses. Die Exergie E_Q einer bestimmten Wärmemenge Q bei der Temperatur T ergibt sich aus Nutzarbeit eines Carnot-Prozesses, der zwischen der Temperatur T und der Umgebungstemperatur T_u abläuft (Bild O-8):

$$E_Q = \eta_C Q. \quad (\text{O-72})$$

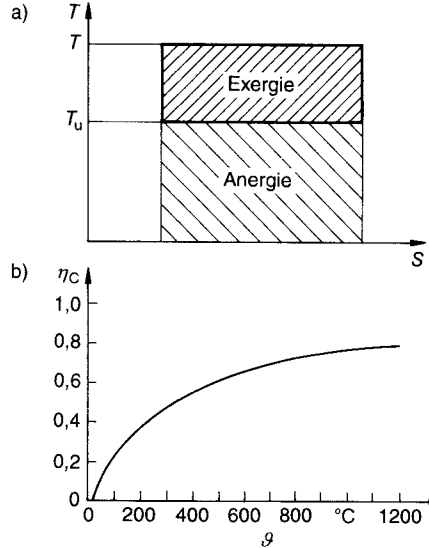


Bild O-8. Exergie und Anergie der Wärme Q (t) bei der Umgebungstemperatur T_u .

a) Wärmeschaubild; b) Carnot-Faktor η_C für die Umgebungstemperatur $T_u = 20^\circ\text{C}$.

η_C ist der als *Carnot-Faktor* bezeichnete thermische Wirkungsgrad des betrachteten Carnot-Prozesses:

$$\eta_C = 1 - T_u/T. \quad (\text{O-73})$$

Die Anergie A_Q der Wärme Q beträgt

$$A_Q = Q(1 - \eta_C). \quad (\text{O-74})$$

Wie Bild O-8 zeigt, ist die Exergie der Wärme um so größer, je höher die Temperatur T und je niedriger die Umgebungstemperatur T_u ist.

Zur Abschätzung der sinnvollen Ausnutzung von Primärenergie ist der *exergetische Wirkungsgrad* besser geeignet als der thermische:

$$\zeta = |W|/E_{Q, \text{zu}}; \quad (\text{O-75})$$

ζ exergetischer Wirkungsgrad,
 $|W|$ Betrag der abgegebenen Nutzarbeit,
 $E_{Q, \text{zu}}$ Exergie der zugeführten Wärme Q_{zu} .

Tabelle O-13. Thermodynamische Potentiale.

thermodynamisches Potential	$F = U - TS$ freie Energie (O-76)	$G = H - TS = U + pV - TS$ (O-77) freie Enthalpie
Richtung spontaner Prozesse	isotherm-isochores System: $dF \underset{\text{rev}}{\overset{\text{irr}}{\leq}} 0$	isotherm-isobares System: $dG \underset{\text{rev}}{\overset{\text{irr}}{\leq}} 0$
Gleichgewichtsbedingung	$F = \text{Min!}$	$G = \text{Min!}$
Differentialquotienten	$p = -(\partial F / \partial V)_T$ $S = -(\partial F / \partial T)_V$	$V = (\partial G / \partial p)_T$ $S = -(\partial G / \partial T)_p$

Nach BAEHR läßt sich der zweite Hauptsatz folgendermaßen formulieren:

- Bei allen irreversiblen Prozessen verwandelt sich Exergie in Anergie.
- Nur bei reversiblen Prozessen bleibt die Exergie konstant.
- Es ist unmöglich, Anergie in Exergie zu verwandeln.

Eine Konsequenz aus dieser Festlegung ist:

Der absolute Temperaturnullpunkt ist nicht erreichbar.

O.3.7 Thermodynamische Potentiale

Durch Kombination von bereits bekannten Zustandsgrößen lassen sich neue gewinnen. Von besonderer Bedeutung sind die *thermodynamischen Potentiale* (Tabelle O-13). Die Potentiale geben die Richtung an, in der spontane Prozesse (z. B. chemische Reaktionen) in isothermen Systemen verlaufen. Für das Gleichgewicht thermodynamischer Systeme sind die Minimalbedingungen entscheidend (Abschnitt O.4.3).

O.3.8 Dritter Hauptsatz der Thermodynamik

Entropieunterschiede verschiedener Phasen eines Stoffes verschwinden bei Annäherung an den absoluten Temperaturnullpunkt:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \Delta S = 0. \quad (\text{O-78})$$

Dieses *Nernstsche Wärmetheorem* wurde von PLANCK erweitert:

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0. \quad (\text{O-79})$$

Die Entropie reiner Stoffe ist am absoluten Temperatur-Nullpunkt null.

O.4 Reale Gase

Sind die Wechselwirkungen zwischen den Gasmolekülen nicht mehr zu vernachlässigen, so handelt es sich um *reale Gase*. Die spezifische Gaskonstante R_i wird mit dem *Realgasfaktor* Z korrigiert, um diese Wechselwirkungen zu beschreiben (Übersicht O-8).

O.4.1 Van-der-Waalsche Zustandsgleichung

Die Zustandsgleichung $pV_m = R_m T$ (Übersicht O-2) ist bei *realen Gasen* um folgende zwei Korrekturglieder zu ergänzen:

- *Binnendruck* (a/V_m^2). Er trägt den Anziehungskräften (Kohäsion) zwischen den Gasmolekülen Rechnung.
- *Kovolumen* (b). Es beschreibt das Eigenvolumen der Gasmoleküle.

Übersicht O-9 zeigt den Verlauf von Isothermen der Van-der-Waalschen-Zustandsgleichung (für CO_2). Die schraffierten Teile sind nicht realistisch. Im ganzen grau unterlegten Gebiet (*Koexistenzgebiet*) sind die gasförmige und die flüssige Phase gleichzeitig vorhanden. Der höchste Punkt des Koexistenzgebietes ist der kritische Punkt mit der kritischen Temperatur T_k , dem kritischen Druck p_k und dem kritischen Volumen V_{mk} .

Übersicht O-8. Dichte realer Gase und Realgasfaktor.

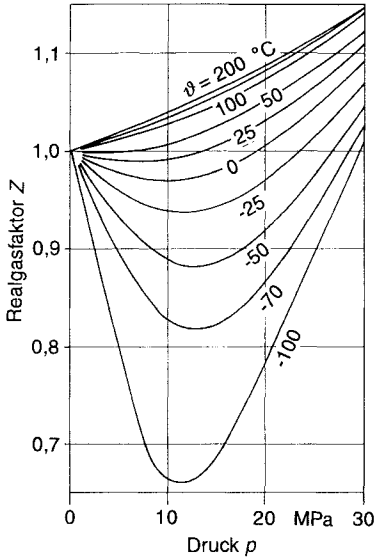
Dichte idealer Gase

$$\varrho = \frac{p}{R_i T}$$

Dichte realer Gase

$$\varrho = \frac{p}{Z R_i T}$$

Verlauf des Realgasfaktors von Luft



Dichte eines Gasgemisches

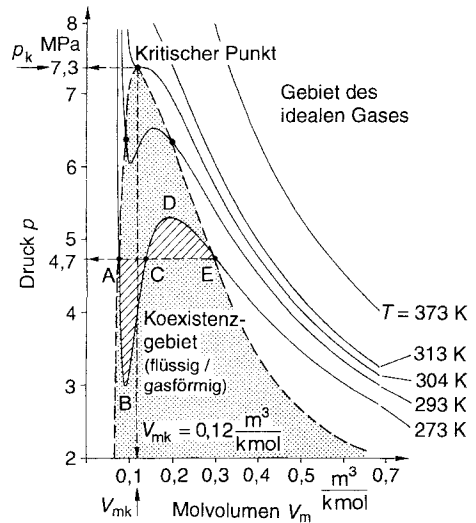
$$\varrho_G = \frac{\sum \varrho_i V_i}{V}$$

- p Druck
 R_i individuelle Gaskonstante
 T Temperatur
 V Volumen
 V_i Volumen des i -ten Gases
 Z Realgasfaktor
 ϱ Dichte
 ϱ_G Dichte eines Gasgemisches

Übersicht O-9. Van-der-Waalsche Zustandsgleichung, Verlauf im p, V -Diagramm für CO_2 .

van-der-Waalsche Zustandsgleichung

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = R_m T$$

Isothermen für CO_2 im p, V -Diagramm

kritische Werte

$$V_{mk} = 3b; \quad T_k = \frac{8a}{27bR_m}; \quad p_k = \frac{a}{27b^2}$$

$$\frac{p_k V_{mk}}{T_k} = \frac{3}{8} R_m; \quad Z_k = \frac{p_k V_{mk}}{R_m T_k} = \frac{3}{8}$$

$$a = 3p_k V_{mk}^2; \quad b = \frac{V_{mk}}{3}$$

- a, b van-der-Waalsche Konstante
 p, p_k Druck bzw. kritischer Druck
 R_m allgemeine Gaskonstante
 T, T_k Temperatur bzw. kritische Temperatur
 V_m molares Volumen
 V_{mk} kritisches molares Volumen
 Z_k Realgasfaktor am kritischen Punkt

Tabelle O-14. Kritische Temperatur T_k , kritischer Druck p_k sowie van-der-Waals'sche Konstanten a und b verschiedener Stoffe.

Stoff	T_k K	p_k MPa	a $10^5 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^4}{\text{kmol}^2}$	b $10^{-2} \frac{\text{m}^3}{\text{kmol}}$
Elemente				
Wasserstoff (H_2)	33,240	1,296	0,2486	2,666
Helium (He)	5,2010	0,2275	0,0347	2,376
Stickstoff (N_2)	126,20	3,400	1,366	3,858
Sauerstoff (O_2)	154,576	5,043	1,382	3,186
Luft	132,507	3,766	1,360	3,657
anorganische Verbindungen				
Chlor (Cl_2)	417	7,70	6,59	5,63
Wasser (H_2O)	647,30	22,120	5,5242	3,041
Ammoniak (NH_3)	405,6	11,30	4,246	3,730
Kohlendioxid (CO_2)	304,2	7,3825	3,656	4,282
organische Verbindungen				
Methan (CH_4)	190,56	4,5950	2,3047	4,310
Propan (C_3H_8)	370	4,26	9,37	9,03
Butan (C_4H_{10})	425,18	3,796	13,89	11,64

Gase lassen sich durch Druck nur *unterhalb der kritischen Temperatur* T_k verflüssigen (Tabelle O-14).

temperatur läßt sich aus der van-der-Waals'schen-Zustandsgleichung berechnen:

$$T_i \approx 2a/(R_m b).$$

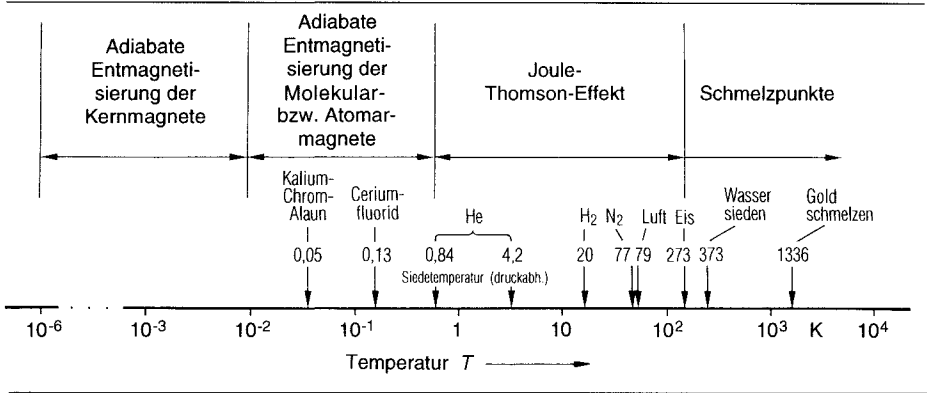
O.4.2 Gasverflüssigung (Joule-Thomson-Effekt)

Bei einem realen Gas ist wegen der zwischenmolekularen Wechselwirkungen (Kohäsionskräfte) und des Eigenvolumens der Moleküle die innere Energie U *volumen- und druckabhängig*. Wird deshalb ein reales Gas ohne Wärmeübertragung (adiabat) und ohne Arbeitsverrichtung (Drosselung) entspannt, dann *kühlt* es sich ab (*Joule-Thomson-Effekt*). Zur Überwindung der zwischenmolekularen Anziehungskräfte muß Energie aufgewendet werden, die aus dem Vorrat der inneren Energie genommen wird. Die druckbezogenen Temperaturdifferenzen betragen für Luft $\Delta T/\Delta p = 2,5 \text{ K/MPa}$ und für Kohlendioxid $\Delta T/\Delta p = 7,5 \text{ K/MPa}$. Eine Abkühlung tritt nur ein, wenn die Anfangstemperatur *unterhalb der Inversionstemperatur* T_i ist (Luft: 490°C , Wasserstoff: -80°C). Die Inversions-

In der Praxis wird in einer Kältemaschine nach dem *Linde-Verfahren* Luft mit 20 MPa über ein Drosselventil auf etwa 2 MPa entspannt. Dabei entsteht eine Abkühlung von $(20 \text{ MPa} - 2 \text{ MPa}) \cdot 2,5 \text{ K/MPa} = 18 \text{ MPa} \cdot 2,5 \text{ K/MPa} = 45 \text{ K}$. Anschließend wird die Luft in einem Kompressor wieder auf 20 MPa verdichtet, und der Prozeß läuft erneut ab.

Um zu tieferen Temperaturen zu gelangen, als es der Joule-Thomson-Prozeß ermöglicht, müssen *magnetische Effekte* herangezogen werden (adiabate Entmagnetisierung von Molekülen, Atomen oder Atomkernen). In ihnen werden geordnete Strukturen (magnetische Bereiche) in ungeordnete überführt. Dadurch wird dem Stoff Wärme entzogen.

Übersicht O-10. Technisch bedeutsame Temperaturen.



Übersicht O-11. Phasenübergänge und spezifische Enthalpie als Funktion der Temperatur.

	nach	fest	flüssig	gasförmig
von				
fest		Modifikationsänderung (Modifikationsenthalpie ΔH_M)	Schmelzen (Schmelzenthalpie ΔH_S)	Sublimieren (Sublimationsenthalpie $\Delta H_{Sub} = \Delta H_S + \Delta H_V$)
flüssig		Erstarren (Erstarrungsenthalpie $-\Delta H_S$)	–	Sieden (Verdampfungsenthalpie ΔH_V)
gasförmig		Desublimieren (Desublimationsenthalpie $-\Delta H_{Sub} = -\Delta H_S - \Delta H_V$)	Kondensieren (Kondensationsenthalpie $-\Delta H_V$)	–

Temperaturverlauf der spezifischen Enthalpie (Wasser)

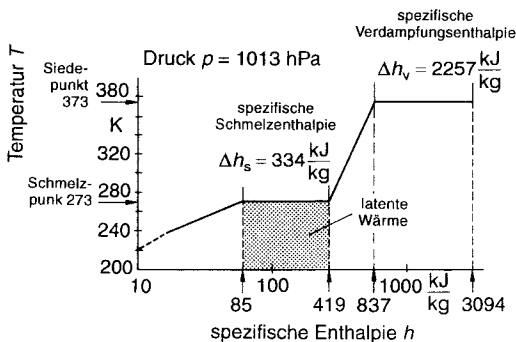


Tabelle O-15. Schmelz- und Verdampfungstemperaturen sowie spezifische Schmelzenthalpie Δh_s und spezifische Verdampfungsenthalpie Δh_v verschiedener Stoffe beim Normdruck $p_n = 1013 \text{ hPa}$.

Stoff	Schmelzen		Verdampfen	
	ϑ °C	Δh_s kJ/kg	ϑ °C	Δh_v kJ/kg
Elemente				
Wasserstoff (H_2)	−259,15	58,6	−252,75	461
Helium (He)	−270,7	3,52	−268,94	20,9
Stickstoff (N_2)	−209,85	25,75	−195,75	201
Sauerstoff (O_2)	−218,75	13,82	−182,95	214
Luft	−213		−192,3	197
anorganische Verbindungen				
Chlor (Cl_2)	−100,95	90,4	− 34,45	289
Wasser (H_2O)	0,00	335	100,00	2257
Ammoniak (NH_3)	− 80	339	− 33,45	1369
Kohlendioxid (CO_2)	− 56,55	184	− 78,45	574
organische Verbindungen				
Methan (CH_4)	−182,45	58,6	−161,45	510
Propan (C_3H_8)	−187,65	80,0	− 42,05	426
Buthan (C_4H_{10})	−138,35	77,5	− 0,65	386

Tabelle O-16. In der Technik gebräuchliche Kältemischungen.

Kältemischung	Erstarrungs- temperatur ϑ °C
100 g Wasser + 23 g Ammoniumchlorid	−16
100 g Wasser + 143 g Calciumchlorid	−55
100 g Wasser + 84 g Magnesiumchlorid	−34
100 g Wasser + 31 g Natriumchlorid	−21

dient die Energiezufuhr bei der Umwandlung der festen in die flüssige Phase dazu, das Festkörpergitter aufzubrechen). Die bei konstantem Druck und konstanter Temperatur zugeführte Wärme erhöht die *Enthalpie* der Substanz: $H_{\text{flüssig}} = H_{\text{fest}} + \Delta H_s$. ΔH_s wird als *Schmelzenthalpie* bezeichnet.

Wird ein fester Körper in einer Flüssigkeit gelöst, dann wird die dazu benötigte Wärmemenge der Flüssigkeit entzogen; sie kühlt ab. Damit können tiefere Temperaturen (Kältemischungen) oder niedrigere Erstarrungspunkte (z. B. von Wasser) erreicht werden (Tabelle O-16).

O.4.3 Phasenumwandlungen

Eine Phase ist ein räumlich abgegrenztes Gebiet mit *gleichen physikalischen Eigenschaften*. Die Phasen fest, flüssig und gasförmig werden auch *Aggregatzustände* genannt. Allen *Phasenübergängen* ist gemeinsam, daß Wärme zugeführt werden muß (latente Wärme), ohne daß sich die Temperatur ändert (z. B.

O.4.3.1 Thermodynamisches Gleichgewicht

Gleichgewicht herrscht in einem System, wenn der physikalische Zustand des Systems gleichbleibt. Ein stabiles Gleichgewicht liegt vor, wenn die treibenden Kräfte verschwinden (z. B. Minimum der potentiellen Energie in der Mechanik). Je nach Systemzustand treten in der Thermodynamik fünf Gleichgewichtszustände auf (Tabelle O-17).

Tabelle O-17. Gleichgewichtsbedingungen.

	isobar $dp = 0$	isochor $dV = 0$	isotherm $dT = 0$	$dU = 0$	adiabat $\delta Q = 0$
Maximum der Entropie $dS \geq 0$					
Minimum der freien Enthalpie $dG \leq 0$					
Minimum der freien Energie $dF \leq 0$					
Minimum der Enthalpie $dH \leq 0$					
Minimum der inneren Energie $dU \leq 0$					

freie Enthalpie

$- G$

$=$

Enthalpie H

$U + pV - TS$

freie Energie F

F freie Energie ($F = U - TS$)	T Temperatur
G freie Enthalpie ($G = U + pV - TS$)	S Entropie
H Enthalpie ($H = U + pV$)	U innere Energie
p Druck	V Volumen

Bei den Übergängen gasförmig-flüssig und flüssig-fest sind die Drücke von der Temperatur abhängig. Sie werden durch *Dampfdruckkurven* bzw. *Schmelzdruckkurven* beschrieben (Übersicht O-12). Wie beispielsweise die Dampfdruckkurve zeigt, steigt der Siedepunkt mit zunehmendem Druck.

Der Siedepunkt eines Lösungsmittels steigt um die Siedepunkterhöhung $\Delta\theta$, wenn in ihm ein Stoff gelöst wird.

$$\Delta\theta = E \frac{m}{m_{fl} M_r};$$

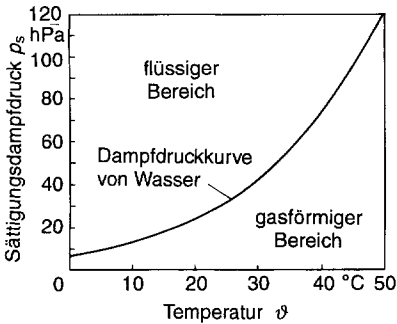
- E ebullioskopische Konstante (Tabelle O-18),
- m, m_{fl} Masse der gelösten Substanz bzw. des Lösungsmittels,
- M_r relative Molekülmasse der gelösten Substanz.

Tabelle O-18. Ebullioskopische Konstanten.

Lösungsmittel	ebullioskopische Konstante E 10^3 K
Ammoniak	0,34
Wasser	0,52
Ethanol	1,07
Diethylether	1,83
Schwefelkohlenstoff	2,29
Benzol	2,64
Essigsäure	3,07
Chloroform	3,80
Tetrachlorkohlenstoff	4,88

Übersicht O-12. Dampfdruck- und Schmelzdruckkurve.

Gleichgewicht flüssig – gasförmig



Steigung der Dampfdruckkurve

$$\frac{dp_s}{dT} = \frac{\Delta H_{mv}}{(V_m^D - V_m^{Fl}) T}$$

$$\ln\left(\frac{p_s}{p_{s0}}\right) = -\frac{\Delta H_{mv}}{R_m T} + c$$

Dampfdruckkurve vieler Substanzen

$$\ln\left(\frac{p_s}{p_{s0}}\right) = -\frac{a}{T} - b \ln(T/T_0) + c$$

$$p_s \sim e^{-\frac{\Delta H_{ms}}{R_m T}}$$

Gleichgewicht fest – flüssig

Steigung der Schmelzdruckkurve

$$\frac{dp_f}{dT} = \frac{\Delta H_{ms}}{(V_m^{Fl} - V_m^{Fest}) T}$$

Der Kurvenverlauf ist ähnlich dem bei flüssig – gasförmig, aber steiler, da Volumenänderung $V_m^{Fl} - V_m^{Fest}$ kleiner.

a, b, c	substanzabhängige Konstanten
ΔH_{ms}	molare Schmelzenthalpie
ΔH_{mv}	molare Verdampfungsenthalpie
p_f	Schmelzdruck
p_s	Sättigungsdampfdruck
p_{s0}	Sättigungsdampfdruck bei T_0
R_m	molare Gaskonstante $R_m = 8,314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$
T	Temperatur
V_m^D	molares Volumen Dampf
V_m^{Fl}	molares Volumen Flüssigkeit
V_m^{Fest}	molares Volumen fest

O.4.3.2 Koexistenz dreier Phasen

Die Phasengrenzen zwischen den Aggregatzuständen fest, flüssig und gasförmig sind vom Druck p , der Temperatur T und vom Volumen V abhängig. Dies beschreibt ein Zustandsdiagramm, wie es Bild O-9 zeigt. Die grauen Gebiete sind Gleichgewichtsgebiete zwischen Festkörper und Flüssigkeit (1), Flüssigkeit und Gas (2) sowie Festkörper und Gas (3). Im *Tripelpunkt* T_{Tr} stehen die feste, die flüssige und die gasförmige Phase im Gleichgewicht. Der Tripelpunkt des Wassers dient zur Festlegung der Temperatureinheit Kelvin ($T_{Tr} = 273,16 \text{ K}$; $p_{Tr} = 612 \text{ Pa}$).

Die *Gibbssche* Phasenregel beschreibt die Anzahl der physikalischen Größen (z. B. Druck p und Temperatur T), die frei variierbar sind, um einen bestimmten Zustand einzustellen:

$$f = k + 2 - P;$$

f Anzahl der Freiheitsgrade,
 k Anzahl der unabhängigen chemischen Komponenten,
 P Anzahl der Phasen.

O.4.4 Dämpfe und Luftfeuchtigkeit

In der Klimatechnik werden vor allem *Luft-Wasserdampf-Gemische* berechnet und die Anlagen entsprechend ausgelegt. Dabei werden vor allem Luftmassen befeuchtet oder getrocknet (Übersicht O-13).

Für klimatechnische Berechnungen werden *Mollier-Diagramme* verwendet (Bild O-10).

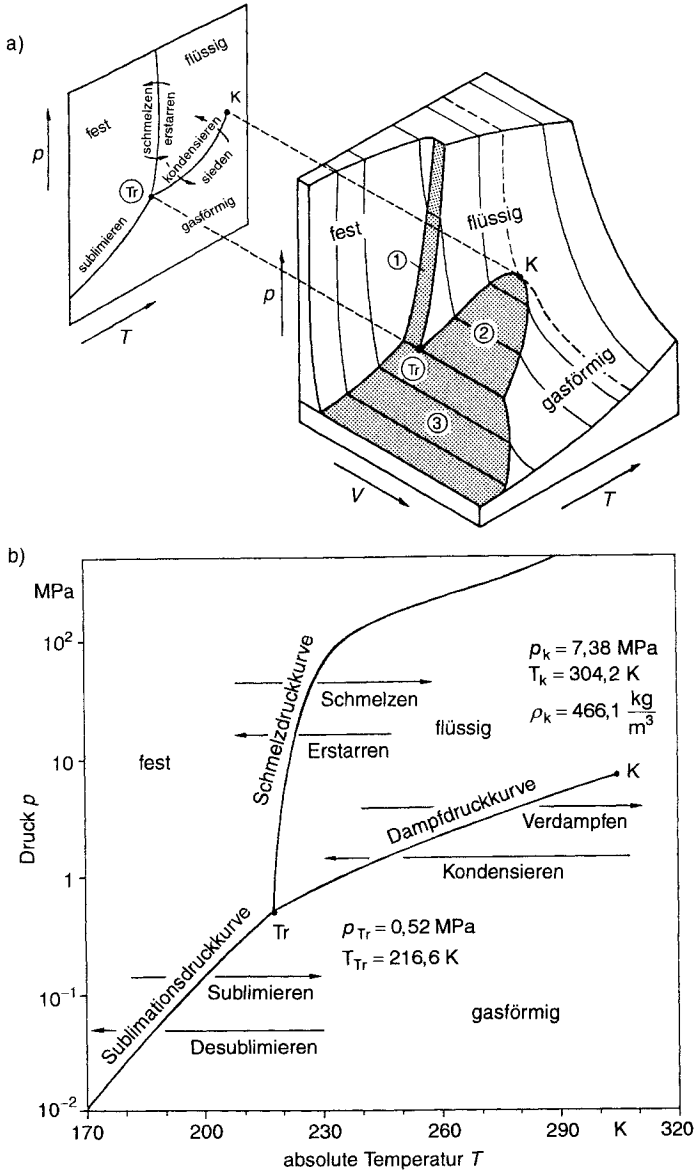


Bild O-9. Zustandsdiagramm (a) und p, T -Diagramm (b) für CO_2 .

Übersicht O-13. Aufgaben der Klimatechnik und ihre physikalischen Größen.

Aufgaben	Befeuchten	Trocknen
technische Lösung		
Mischung von Luftmassen	Zufuhr feuchter Luft	Zufuhr trockener Luft
Wärmezu- bzw. -abfuhr	Temperaturabsenkung	Temperaturerhöhung
Wasserzu- bzw. -abfuhr	Wasserzufuhr (durch Einsprühen)	Wasserentzug (durch Abkühlen unter Taupunkt)
Druck der feuchten Luft p_{FI}		
$p_{\text{FI}} = p_{\text{TL}} + p_{\text{D}}$		
absolute Luftfeuchtigkeit φ_{a}		
$\varphi_{\text{a}} = m_{\text{D}}/V_{\text{FL}}$		
relative Luftfeuchtigkeit φ		
$\varphi = p_{\text{D}}/p_{\text{s}}$		
Feuchtegrad x		
$x = m_{\text{D}}/m_{\text{TL}}$		

Übersicht O-13 (Fortsetzung)

Dichte der feuchten Luft ϱ_{FL}

$$\varrho_{\text{FL}} = \varrho_{\text{TL}} + \varrho_{\text{D}}$$

$$\varrho_{\text{FL}} = \frac{1}{T} \left(\frac{p_{\text{FL}} - p_{\text{D}}}{R_{\text{ITL}}} + \frac{p_{\text{D}}}{R_{\text{ID}}} \right)$$

spezifische Enthalpie feuchter Luft h_{FL}

$$h_{\text{FL}} = h_{\text{TL}} + x h_{\text{D}}$$

$h_{\text{D}}, h_{\text{FL}}, h_{\text{TL}}$ spezifische Enthalpie des Wasserdampfs, der feuchten Luft, der trockenen Luft
 $m_{\text{D}}, m_{\text{TL}}$ Masse des Wasserdampfs bzw. der trockenen Luft

$p_{\text{D}}, p_{\text{FL}}, p_{\text{TL}}$ Druck des Wasserdampfs, der feuchten Luft, der trockenen Luft

p_{s} Sättigungsdampfdruck
 $R_{\text{ID}}, R_{\text{ITL}}$ individuelle Gaskonstante des Wasserdampfs bzw. der trockenen Luft

T absolute Temperatur

V_{FL} Volumen der feuchten Luft

x Feuchtegrad

$\varphi, \varphi_{\text{a}}$ relative bzw. absolute Luftfeuchtigkeit

$\varrho_{\text{D}}, \varrho_{\text{FL}}, \varrho_{\text{TL}}$ Dichte des Wasserdampfs, der feuchten Luft, der trockenen Luft

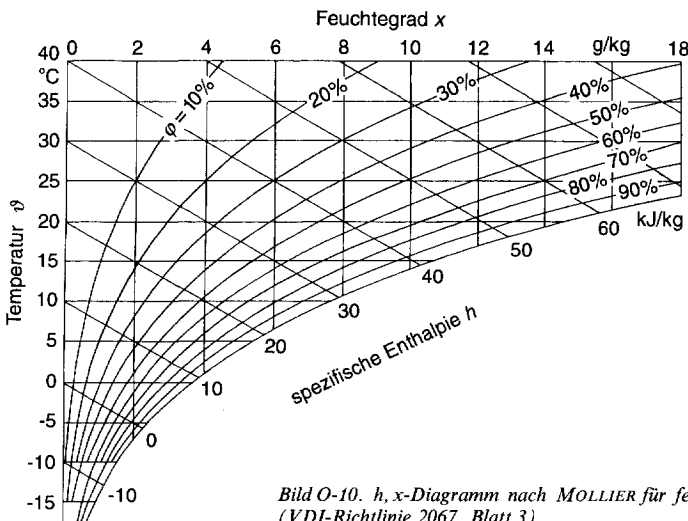


Bild O-10. h, x -Diagramm nach MOLLIER für feuchte Luft bei $p = 1013 \text{ Pa}$ (VDI-Richtlinie 2067, Blatt 3).

P Wärme- und Stoffübertragung

Die *Wärmeübertragung* befaßt sich mit dem *Übergang der Wärmeenergie* von Fluiden auf feste Trennbauteile oder zwischen unterschiedlichen Bereichen in Fluiden oder Festkörpern sowie dem Wärmetransport durch Festkörper, stehende Flüssigkeiten und Gase, wenn räumliche Temperaturunterschiede vorhanden sind. *Wärmeleitung*, *Konvektion* und *Wärmestrahlung* sind die Mechanismen der Wärmeübertragung (Übersicht P-1). Charakteristisch ist dabei der jeweilige *Wärmeübergangskoeffizient* für die Wärmeübertragungssituation; im allgemeinen hängt dieser sowohl von der Zeit, aber auch von den äußeren Einflußgrößen, wie z. B. von Geometrie, Stoffwerten und Temperatur, ab.

Die *Stoffübertragung* umfaßt das Gebiet des *Stofftransports* in Fluiden unter dem Einfluß von Dichteunterschieden oder Druckgradienten. Diffusion bezeichnet dabei den Stofftransport einer Stoffkomponente in einem Fluidgemisch, wenn örtliche Konzentrationsunterschiede vorhanden sind. Konvektion

wiederum ist ein Stofftransport im Fluid, der mit einer gleichzeitigen Wärmeübertragung verknüpft ist.

P.1 Wärmeleitung

Das *Fouriersche Grundgesetz des Wärmetransports* beschreibt den Zusammenhang zwischen der Ursache eines Wärmetransports, einem räumlichen Temperaturgefälle in einer Raumrichtung und dem dadurch bewirkten Wärmestrom durch eine Grenzfläche senkrecht zur Temperaturgradientenrichtung:

$$j_q = -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial n}; \quad (P-1)$$

j_q Wärmestromdichte,
 λ Wärmeleitfähigkeit,
 n Raumrichtung,
 $\partial \vartheta / \partial n$ Temperaturgradient in Raumrichtung n .

Übersicht P-1. Wärmeübertragungsmechanismen.

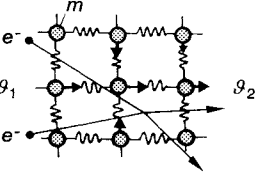
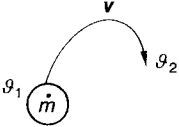

Wärmeübertragung		
Wärmeleitung	Konvektion	Wärmestrahlung
		
Energieübertragung gekoppelter Gitterschwingungen (Phononentransport) und durch bewegliche Ladungsträger (freie Elektronenbewegung)	Wärmeübertragung durch die freie oder erzwungene Strömung von Materie (Massentransport)	Wärmeübertragung durch elektromagnetische Strahlung (Photonentransport)

Tabelle P-1. Wärmetechnische Stoffwerte.

Stoff	ϑ °C	ρ $10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	c_p $\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$	λ $\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$	a $10^6 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$
Festkörper					
Aluminium	20	2,70	920	221	88,89
Eisen	20	7,86	465	67	18,33
Grauguß	20	ca. 7,2	545	ca. 50	ca. 13
Stahl 0.6 C	20	7,84	460	46	12,78
Gold	20	19,30	125	314	130,57
Kupfer	20	8,90	390	393	113,34
Schamottestein	100	1,7	835	0,5	0,35
Normalbeton	10	2,4	880	2,1 ^R	1,0
Gasbeton	10	0,5	850	0,22 ^R	0,5
Ziegelstein	10	1,2	835	0,5 ^R	0,5
Eis	0	0,92	1930	2,2	1,25
Schnee	0	0,1	2090	0,11	0,53
Fichtenholz	10	0,6	2000	0,13 ^R	0,11
Polystyrol fest	20	1,05	1300	0,17	0,125
Glas	20	2,5	800	0,8	0,4
Schaumglas	10	0,1	800	0,045 ^R	0,6
Mineralfaser	10	0,2	800	0,04 ^R	0,3
Kies	20	1,8	840	0,64	0,42
Flüssigkeiten					
Wasser	20	0,998	4182	0,600	0,144
Wärmeträgeröl	20	0,87	1830	0,134	0,084
Kältemittel R 12	-20	1,46	900	0,086	0,065
Ethanol	20	0,789	2400	0,173	0,091
Heizöl	20	0,92	1670	0,12	0,078
Quecksilber	0	13,55	138	0,143	5,62
Gase					
Luft	20	0,00119	1007	0,026	21,8
Kohlendioxid	0	0,00195	827	0,015	9,08
Wasserdampf	150	0,00255	2320	0,031	5,21
Helium	0	0,00018	5200	0,143	153
Wasserstoff	0	0,00009	14050	0,171	135
ϑ Temperatur ρ Dichte c_p spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck					
λ Wärmeleitfähigkeit (R Rechenwert DIN 4108) a Temperaturleitfähigkeit					

Die *Wärmeleitfähigkeit* ist eine Stoffkonstante des Wärmekontakts zwischen den Bereichen unterschiedlicher Temperatur. Die Werte der Wärmeleitfähigkeit sind sehr unterschiedlich; bei ruhenden Gasen besonders niedrig, bei elektrisch gut leitenden Metallen besonders hoch (Tabelle P-1). *Wärmedämmstoffe* sind porosierte, luft- oder schwergasgeschäumte

sowie faserartige Stoffe mit einer Wärmeleitfähigkeit $\lambda < 0,1 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$. Die Wärmeleitfähigkeit ist abhängig von der Dichte, der elektrischen Leitfähigkeit, der Temperatur und dem Feuchtegehalt des Materials. Zur Beurteilung des Wärmeschutzes im Hochbau dürfen daher nur *Rechenwerte der Wärmeleitfähigkeit* λ_R benutzt werden, welche entspre-

chende Zuschläge zu den experimentell im trockenen Zustand bei 10 °C bestimmten Werten enthalten. Für einige Abhängigkeiten der Wärmeleitfähigkeit lassen sich Näherungsgleichungen angeben (Tabelle P-2).

Der Wärmetransport durch Wärmeleitung in Festkörpern, stehenden Flüssigkeiten und ruhenden Gasen beschreibt die *Fouriersche Differentialgleichung für die Wärmeleitung* und das *Temperaturfeld im Wärmeleiter*:

Wärmestromdichte

$$c \varrho \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \dot{f} - \left(\frac{\partial j_{qx}}{\partial x} + \frac{\partial j_{qy}}{\partial y} + \frac{\partial j_{qz}}{\partial z} \right)$$

Temperaturfeld

$$c \varrho \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \dot{f} - \lambda \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right)$$

stationär $\partial \vartheta / \partial t = 0$

wärmequellenfrei $\dot{f} = 0$

(Laplace-Gleichung)

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} = 0; \quad (\text{P-2})$$

$\partial \vartheta / \partial t$ zeitliche Änderung der Temperatur,

$\partial^2 \vartheta / \partial x^2$, $\partial^2 \vartheta / \partial y^2$, $\partial^2 \vartheta / \partial z^2$ räumlicher Differentialquotient des Temperaturfeldes $\vartheta(x, y, z, t)$,

$\partial j_{qx} / \partial x$, $\partial j_{qy} / \partial y$, $\partial j_{qz} / \partial z$ räumliche Gradienten der Wärmestromdichte,

\dot{f} Energiedichte der internen Wärmequellen und Wärmesenken,

c spezifische Wärmekapazität,

ϱ Dichte,

λ Wärmeleitfähigkeit.

Rand- und Anfangsbedingungen bestimmen die Lösungen dieser partiellen Differentialgleichungen der Wärmeleitung. Lösungen der stationären, wärmequellenfreien *Laplace-Gleichung* sind für die einfachen Geometrien der Platte, des Zylinders und der Kugel geschlossen angebbar (Tabelle P-3). Für die wärmetechnische Planung von wärmegeprägten Bauteilen im Hochbau ist besonders der Spezialfall der ebenen ausgedehnten Platte von Bedeutung (Tabellen P-4 und P-5).

Tabelle P-2. Abhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit.

Stoffgruppe	Wärmeleitfähigkeitsabhängigkeit
Metalle	$\lambda = 2,45 \cdot 10^{-8} \frac{\text{V}^2}{\text{K}^2} T \kappa$ Wiedemann-Franz'sches Gesetz
Isolatoren	$\lambda = \frac{1}{3} \varrho c c_s l_{\text{ph}}$ $\lambda \sim T^{-3} \quad (T \ll T_D)$ $\lambda \sim T^{-1} \quad (T \gg T_D)$
lufttrockene porosierte Baustoffe ($400 \text{ kg/m}^3 \leq \varrho \leq 2500 \text{ kg/m}^3$)	$\lambda = a e^{b \varrho}$ $a = 0,072 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$ $b = 1,16 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$
T	absolute Temperatur
κ	elektrische Leitfähigkeit
ϱ	Dichte
c	spezifische Wärmekapazität
c_s	Schallgeschwindigkeit
l_{ph}	freie Phonon-Weglänge
T_D	Debye-Temperatur

Die Lösungen der instationären Fourier-Differentialgleichung sind selbst in geometrisch einfachen Fällen mathematisch kompliziert (Tabelle P-6). Charakteristische Kenngrößen für instationäre Wärmeleitungsvorgänge sind:

Kenngröße	Definition	Wärmeübertragungsart
Wärmeeindringkoeffizient	$b = \sqrt{\lambda c_p \varrho}$	Aufheizen, Abkühlen, Kontakttemperatur
Temperaturleitfähigkeit	$a = \frac{\lambda}{c_p \varrho}$	Temperaturzyklen, schnelle Änderungen

b Wärmeeindringkoeffizient,

a Temperaturleitfähigkeit,

c_p spezifische Wärmekapazität,

λ Wärmeleitfähigkeit,

ϱ Dichte.

Tabelle P-3. Stationäre Wärmeübertragung durch Wärmeleitung.

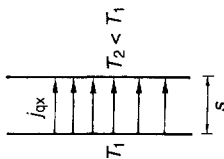
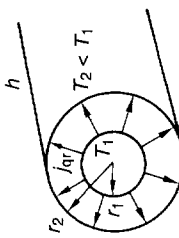
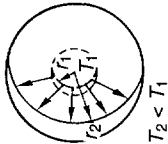
Geometrie	planparallele Platte (eindimensionaler Fall)	zylindrisches Rohr (zweidimensionaler Fall)	Hohlkugel (dreidimensionaler Fall)
			
Fourier-Grundgleichung	$j_{qx} = -\lambda \frac{dT}{dx}$ $\dot{Q} = j_{qx} A$	$j_{qr} = -\lambda \frac{dT}{dr}$ $\dot{Q} = j_{qr} 2\pi r h$	$j_{qr} = -\lambda \frac{dT}{dr}$ $\dot{Q} = j_{qr} 4\pi r^2$
Temperaturprofil	$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{s} x$	$T = \frac{T_1 \ln \frac{r}{r_2} - T_2 \ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_1}{r_2}}$	$T = \frac{(r_2 T_2 - r_1 T_1)}{r_2 - r_1} + \frac{r_1 r_2 (T_2 - T_1)}{(r_2 - r_1)} \frac{1}{r}$
Wärmestrom, einschichtige Trennwand	$j_{qx} = \frac{\lambda}{s} (T_1 - T_2)$	$j_{qr} = \frac{\lambda}{r} \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} (T_1 - T_2)$ $\frac{\dot{Q}}{h} = \frac{2\pi\lambda}{\ln \frac{r_2}{r_1}} (T_1 - T_2)$	$j_{qr} = \frac{\lambda}{r^2} \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2} (T_1 - T_2)$ $\dot{Q} = \frac{4\pi\lambda}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} (T_1 - T_2)$
Wärmestrom, mehrschichtige Trennwand	$j_{qx} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{s_3}{\lambda_3}}$	$\frac{\dot{Q}}{h} = \frac{2\pi(T_1 - T_2)}{\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{r_3}{r_2} + \frac{1}{\lambda_3} \ln \frac{r_4}{r_3}}$	$\dot{Q} = \frac{4\pi(T_1 - T_2)}{\frac{1}{\lambda_1} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{\lambda_2} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) + \frac{1}{\lambda_3} \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} \right)}$

Tabelle P-4. Temperaturverlauf in einer mehrschichtigen Wand im Beharrungszustand.

Modell	
Wärme- strom- dichte	$j_q = k (\vartheta_{Li} - \vartheta_{La})$
Wärme- durchgangs- widerstand	$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_i} + \frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{s_3}{\lambda_3} + \frac{s_4}{\lambda_4} + \frac{1}{\alpha_a}$
Temperatur- verlauf	$\begin{aligned}\vartheta_{oi} &= \vartheta_i - \frac{1}{\alpha_i} j_q \\ \vartheta_1 &= \vartheta_{oi} - \frac{s_1}{\lambda_1} j_q \\ \vartheta_2 &= \vartheta_1 - \frac{s_2}{\lambda_2} j_q \\ \vartheta_3 &= \vartheta_2 - \frac{s_3}{\lambda_3} j_q \\ \vartheta_{oa} &= \vartheta_3 - \frac{s_4}{\lambda_4} j_q = \vartheta_a + \frac{1}{\alpha_a} j_q\end{aligned}$
k	Wärmedurchgangskoeffizient
s	Schichtdicke
λ	Wärmeleitfähigkeit
α_i	Wärmeübergangskoeffizient, innen
α_a	Wärmeübergangskoeffizient, außen
ϑ_i	Innentemperatur
ϑ_a	Außentemperatur
ϑ_{Oa}	Oberflächentemperatur, außen
ϑ_{oi}	Oberflächentemperatur, innen
$\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$	Schichttemperaturen

Tabelle P-5. Eindimensionaler Wärmetransport durch ein- und mehrschichtige Bauteile.

Größe	Beziehung
Wärme- durchlaß- widerstand	einschichtig $\frac{1}{A} = R = \frac{s}{\lambda}$ mehrschichtig $\frac{1}{A} = \frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{s_3}{\lambda_3} \dots$
Wärme- durchgangs- widerstand	$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{A} + \frac{1}{\alpha_a}$
Wärme- durchgangs- koeffizient	$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{A} + \frac{1}{\alpha_a} + \dots}$
s	Schichtdicke
λ	Wärmeleitfähigkeit
α_i	Wärmeübergangskoeffizient innen
α_a	Wärmeübergangskoeffizient außen

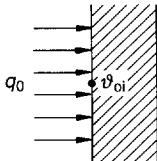
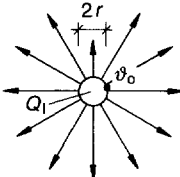
Die Kontakttemperatur, die sich beim Berühren zweier Halbkörper mit unterschiedlicher Temperatur einstellt, hängt von den Wärme-eindringkoeffizienten der sich berührenden Körper ab:

$$\vartheta_0 = \frac{b_1 \vartheta_1 + b_2 \vartheta_2}{b_1 + b_2}; \quad (P-3)$$

- ϑ_1, ϑ_2 Temperaturen der Körper 1 und 2,
 ϑ_0 Kontakttemperatur der Berührungs-
fläche,
 b_1, b_2 Wärmeeindringkoeffizienten der sich
berührenden Körper 1 und 2.

Berührt die menschliche Haut einen anderen Körper, so ist die Kontakttemperatur die subjektiv empfundene Temperatur am Anfang der Berührung.

Tabelle P-6. Instationäre Wärmeleitungsvorgänge, Näherungen für kurze Aufheiz- oder Abkühlzeiten.

	ebene Platte	dünner Draht
Modellfall		
Aufheizverlauf	$\vartheta_{oi}(t) = \vartheta_{oi}(0) + \frac{2q_0}{b\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{t}$	$\vartheta_o(t) = \vartheta_o(0) + \frac{Q_1}{2\pi\lambda} \ln \frac{4at}{1,781r^2}$ ($t \geq 0$)
ϑ_o Oberflächentemperatur	ϑ_o Dichte	
q_0 Wärmestromdichte	b Wärmeindringkoeffizient ($b = \sqrt{\lambda c_p \varrho}$)	
Q_1 längenbezogene Heizleistung	r Drahtradius	
c_p spezifische Wärmekapazität	a Temperaturleitfähigkeit	
λ Wärmeleitfähigkeit	t Zeit	

P.2 Konvektion

Für die konvektive Wärmeübertragung ist die Relativbewegung der beiden thermodynamischen Systeme mit unterschiedlichen Temperaturen charakteristisch, wie es beispielsweise beim Wärmeübergang von einem Fluid, einer strömenden Flüssigkeit oder einem Gas, auf eine Wand der Fall ist (Bild P-1). Zwei Konvektionsarten werden unterschieden:

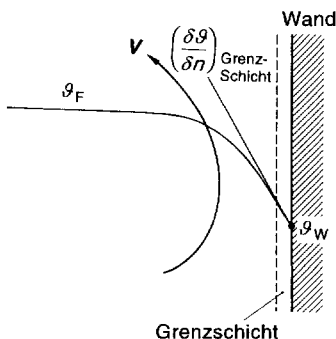


Bild P-1. Konvektiver Wärmeübergang mit Grenzschicht vor der wärmeübertragenden Wand.

– Freie Konvektion

Die Strömung des Fluids wird durch ein temperaturabhängiges Dichtegefälle im Fluid und die daraus resultierenden Auftriebskräfte verursacht

– Erzwungene Konvektion

Die gerichtete Zwangsströmung im Fluid wird durch äußere Kräfte, z. B. die Antriebskräfte von Pumpen und Ventilatoren, oder auch von Winddrücken erzwungen.

Die Wärmestromdichte zwischen Fluid und Wand ergibt sich aus folgenden Beziehungen:

Fouriersches Gesetz

der Grenzschicht-
Wärmeleitung

$$j_{q,k} = -\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial n} \right)_{Gr}$$

Wärmeübergangs-
gleichung

$$j_{q,k} = a_k^* (\vartheta_F - \vartheta_W);$$

(P-4)

- $j_{q,k}$ Wärmestromdichte der konvektiven Wärmeübertragung,
 λ Wärmeleitfähigkeit des ruhenden Fluids,
 a_k^* Wärmeübergangskoeffizient,
 ϑ_F Fluidtemperatur,
 ϑ_W Oberflächentemperatur der Wand,
 $(\partial \vartheta / \partial n)_{Gr}$ Temperaturgradient in der Fluid-Grenzschicht.

Tabelle P-7. Grundgleichungen der konvektiven Wärmeübertragung.

	Beziehungen
Wärmeleitungsgleichung (Energiesatz)	$c_p \varrho \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) \right] = \lambda \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right)$
$\lambda = \text{konst.}$	Fourier-Gleichung
Bewegungsgleichung der Hydromechanik (Impulssatz)	$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \gamma g \Delta T$
	(x-Komponente)
$\varrho = \text{konst.}$	$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right)$
	Navier-Stokes-Gleichung (x-Komponente)
$\varrho = \text{konst.}$ $\nu = 0$	$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x}$
inkompressible Fluide	Euler-Gleichung für ideale Fluide (x-Komponente)
Kontinuitätsgleichung (Massenerhaltungssatz)	$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \left(v_x \frac{\partial \varrho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \varrho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \varrho}{\partial z} \right) = 0$
$\varrho = \text{konst.}$	$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$
c_p	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck
ϱ	Dichte
λ	Wärmeleitfähigkeit
ν	kinematische Viskosität
γ	thermischer Ausdehnungskoeffizient
ϑ	Temperatur
v_x, v_y, v_z	Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit
g	Fallbeschleunigung
ΔT	Temperaturgefälle für den thermischen Auftrieb

Der Zahlenwert für den *konvektiven Wärmeübergangskoeffizienten* α_k^* hängt entscheidend von der Festlegung der Fluidtemperatur ϑ_F ab. Diese ist bei inhomogenen Temperaturen im Fluid, besonders bei der freien Konvektion, nicht einfach und von der experimentellen Meßanordnung im Modellversuch abhängig. Die Bestimmung des Temperaturgradienten in der Grenzschicht ist meßtechnisch aufwendig.

Die Grundgleichungen der konvektiven Wärmeübertragung (Tabelle P-7) sind wegen der räumlichen Mitführung des Temperaturfeldes mit der Fluidbewegung extrem kompliziert.

Die Lösungsfamilien dieser gekoppelten partiellen Differentialgleichungen liegen zwischen den Lösungsfamilien für die Grenzfälle:

- *Laminare Strömung*
Die Stromfäden der Fluidströmung verlaufen parallel zur Wand; keine konvektive Wärmeübertragung in Richtung auf die parallele Wand, sondern Wärmetransport durch Wärmeleitung senkrecht zu den Stromfäden. Strenge mathematische Lösungen für einfache laminare Strömungen sind vorhanden.
- *Turbulente Strömung*
Ungeordnete Querbewegungen durch sog. Turbulenzballen in der Fluidbewegung sorgen für ein gleichmäßiges Strömungsprofil in der turbulenten

Kernströmung und beeinflussen durch ihr Eindringen in die laminare Grenzschichtströmung deren Strömungsform. Mathematische Lösungen für die turbulente Strömung fehlen; zur Beschreibung dienen Näherungsgleichungen für empirische Beobachtungen und Messungen.

Nahezu alle praktisch interessanten konvektiven Wärmeübergänge haben turbulente Strömungsprofile; laminare Strömungsformen schlagen durch Störungen (Anströmkanten, Rauigkeit, Temperaturinhomogenitäten usw.) leicht in turbulente Zustände um. Deshalb muß in der Praxis der konvektive Wärmeübergangskoeffizient aus Modellversuchen ermittelt werden. Die Versuchsergebnisse lassen sich auf andere konvektive Wärmeübertragungsverhältnisse anwenden, wenn diese *geometrisch und hydrodynamisch ähnlich* sind. Damit die Lösungen eines Modellfalls übertragen werden können, müssen die Maßstabsfaktoren, die *dimensionslosen Ähnlichkeitskenngrößen*

der Wärmeübertragung (Tabelle P-8), des Anwendungs- und des Modellfalls übereinstimmen. Die in die Kenngrößen eingehenden Stoffwerte der Fluide sind z. T. stark temperaturabhängig (Tabelle P-9); zur Bildung der Ähnlichkeitskenngrößen sind die Stoffwerte der Mitteltemperatur des Fluids einzusetzen.

Die Kenngröße für die konvektive Wärmeübertragung ist die *Nußelt-Zahl* Nu . Aus der Nußelt-Zahl des zugeordneten Modellfalls läßt sich der konvektive Wärmeübergangskoeffizient für das Wärmeübertragungsproblem angeben:

$$a_k^* = \frac{Nu \lambda}{L}; \quad (P-5)$$

a_k^* Wärmeübergangskoeffizient,
 Nu Nußelt-Zahl,
 λ Wärmeleitfähigkeit des Fluids,
 L charakteristische Länge.

Tabelle P-8. Dimensionslose Kenngrößen der Wärmeübertragung.

Zeichen	Kenngrößen	Definition	Problemereich
Bi	Biot-Zahl	$Bi = \frac{\alpha_a L}{\lambda_i}$	Wärmeübertragung Festkörper/Fluid
Fo	Fourier-Zahl	$Fo = \frac{a t}{L^2}$	instationäre Wärmeleitung
Fr	Froude-Zahl	$Fr = \frac{v^2}{g L}$	Strömungen unter Schwerkrafteinfluß
Ga	Galilei-Zahl	$Ga = \frac{g L^3}{v^2} = \frac{Re^2}{Fr}$	Auftrieb in Fluiden
Gr	Grashof-Zahl	$Gr = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\nu^2}$	freie Konvektion bei Temperaturgradient
Gz	Graetz-Zahl	$Gz = \frac{L^2}{a t_v} = Fo^{-1}$	stationäre Strömungen mit konstanten Verweilzeiten in Rohrstücken
Ka	Kapitza-Zahl	$Ka = \frac{g \eta^4}{\rho \sigma^3} = \frac{We^3}{Fr Re^4}$	Filmströmungen und Fluidfilm-Kondensation
Le	Lewis-Zahl	$Le = \frac{a}{\delta} = \frac{Sc}{Pr}$	Trocknung und Verdunstungskühlung
Nu	Nußelt-Zahl	$Nu = \frac{\alpha_k^* L}{\lambda}$	stationärer konvektiver Wärmeübergang

Tabelle P-8 (Fortsetzung)

Zeichen	Kenngrößen	Definition	Problembereich
Pe	Péclet-Zahl	$Pe = \frac{v L}{a} = Re Pr$	erzwungene instationäre Konvektion
Pr	Prandtl-Zahl	$Pr = \frac{v}{a}$	Wärmeübertragungskennwert des Fluids
Ra	Rayleigh-Zahl	$Ra = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\nu a} = Re Pr$	freie Konvektion im Temperaturgradienten
Re	Reynolds-Zahl	$Re = \frac{\varrho v L}{\eta} = \frac{v L}{\nu}$	Strömungen unter Reibungseinfluß
Sc	Schmidt-Zahl	$Sc = \frac{v}{\delta}$	Kopplungskennwert Wärmetransport mit Diffusion
St	Stanton-Zahl	$St = \frac{\alpha_k^*}{\varrho c_p v} = \frac{Nu}{Pe}$	Wärmeübergang bei erzwungener instationärer Konvektion
We	Weber-Zahl	$We = \frac{v^2 L \varrho}{\sigma} = (Ka Fr Re^4)^{1/3}$	Strömungsvorgänge mit freien Oberflächen, Zerstäubung von Flüssigkeiten
<div><div><div><div>a</div><div>Temperaturleitfähigkeit</div></div><div><div>c_p</div><div>spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck</div></div><div><div>g</div><div>Fallbeschleunigung</div></div><div><div>L</div><div>charakteristische Länge</div></div><div><div>t</div><div>charakteristische Zeit</div></div><div><div>t_v</div><div>Verweilzeit</div></div><div><div>ΔT</div><div>Temperaturunterschied</div></div><div><div>v</div><div>Strömungsgeschwindigkeit</div></div><div><div>α_k^*</div><div>Wärmeübergangskoeffizient</div></div></div><div><div>α_a</div><div>Wärmeübergangskoeffizient außen</div></div><div><div>β</div><div>Wärmeausdehnungskoeffizient</div></div><div><div>δ</div><div>Diffusionskoeffizient</div></div><div><div>η</div><div>dynamische Viskosität</div></div><div><div>λ</div><div>Wärmeleitfähigkeit</div></div><div><div>λ_i</div><div>Wärmeleitfähigkeit des Innenkörpers</div></div><div><div>ν</div><div>kinematische Zähigkeit</div></div><div><div>ϱ</div><div>Dichte</div></div><div><div>σ</div><div>Oberflächenspannung</div></div></div>			

Tabelle P-9. Wärmetechnische Stoffwerte von Wasser und trockener Luft beim Druck $p = 1 \text{ bar}$ (aus VDI-Wärmeatlas, 6. Aufl., 1991).

ϑ °C	ϱ kg/m ³	c_p kJ/(kg · K)	γ 10 ⁻³ /K	λ 10 ⁻³ W/(m · K)	η 10 ⁻⁶ kg/(m · s)	ν 10 ⁻⁶ m ² /s	a 10 ⁻⁶ m ² /s	Pr
Wasser								
0,01	999,8	4,217	−0,0852	562	1791,4	1,792	0,1333	13,44
10	999,7	4,193	0,0821	582	1307,7	1,308	0,1388	9,42
20	998,3	4,182	0,2066	600	1002,7	1,004	0,1436	6,99
30	995,7	4,179	0,3056	615	797,7	0,801	0,1478	5,42
40	992,2	4,179	0,3890	629	653,1	0,658	0,1516	4,34
60	983,1	4,185	0,5288	651	466,8	0,475	0,1582	3,00
80	971,6	4,197	0,6473	667	355,0	0,365	0,1635	2,23
100	958,1	4,216	0,7547	677	282,2	0,294	0,1677	1,76
120	942,8	4,245	0,8590	683	232,1	0,246	0,1707	1,44
150	916,8	4,310	1,0237	684	181,9	0,198	0,1730	1,15
200	864,7	4,497	1,3721	663	133,6	0,154	0,1706	0,91
250	799,2	4,869	1,9552	618	105,8	0,132	0,1589	0,83
300	712,2	5,773	3,2932	545	85,8	0,120	0,1325	0,91

Tabelle P-9 (Fortsetzung)

ϑ °C	ρ kg/m ³	c_p kJ/(kg · K)	γ 10 ⁻³ /K	λ 10 ⁻³ W/(m · K)	η 10 ⁻⁶ kg/(m · s)	ν 10 ⁻⁶ m ² /s	α 10 ⁻⁶ m ² /s	Pr
trockene Luft								
-100	2,019	1,011	5,852	16,02	11,77	5,829	7,851	0,7423
- 40	1,495	1,007	4,313	21,04	15,16	10,14	13,97	0,7258
- 20	1,377	1,007	3,968	22,63	16,22	11,78	16,33	0,7215
- 10	1,324	1,006	3,815	23,41	16,74	12,64	17,57	0,7196
0	1,275	1,006	3,674	24,18	17,24	13,52	18,83	0,7179
10	1,230	1,007	3,543	24,94	17,74	14,42	20,14	0,7163
20	1,188	1,007	3,421	25,69	18,24	15,35	21,47	0,7148
30	1,149	1,007	3,307	26,43	18,72	16,30	22,84	0,7134
60	1,045	1,009	3,007	28,60	20,14	19,27	27,13	0,7100
100	0,9329	1,012	2,683	31,39	21,94	23,51	33,26	0,7070
140	0,8425	1,016	2,422	34,08	23,65	28,07	39,80	0,7054
200	0,7356	1,026	2,115	37,95	26,09	35,47	50,30	0,7051
300	0,6072	1,046	1,745	44,09	29,86	49,18	69,43	0,7083
500	0,4502	1,093	1,293	55,64	36,62	81,35	113,1	0,7194
1000	0,2734	1,185	0,7853	80,77	50,82	1859	249,2	0,7458

 ϑ Celsius-Temperatur ρ Dichte c_p spezifische Wärmekapazität
bei konstantem Druck γ Wärmeausdehnungskoeffizient λ Wärmeleitfähigkeit η dynamische Viskosität ν kinematische Viskosität α Temperaturleitfähigkeit

Pr Prandtl-Zahl

Die charakteristische Länge ist entsprechend dem Modellfall anzusetzen (Tabelle P-10). Im Übergangsbereich von laminarer zu turbulenter Strömung gilt mit für technische Zwecke ausreichender Genauigkeit:

$$a_K^* = \sqrt{a_{K, \text{lam}}^{*2} + a_{K, \text{turb}}^{*2}} \quad (\text{P-6})$$

P.3 Wärmestrahlung

Die Wärmeübertragung durch Wärmestrahlung ist im Vakuum der einzige Wärmetransportmechanismus; in Gasen kommt der Wärmeübergang durch Wärmestrahlung additiv zu demjenigen der Wärmeleitung hinzu.

Tabelle P-10. Modellfälle konvektiver Wärmeübergänge (nach VDI-Wärmeatlas, 6. Aufl. 1991).

Strömungsmodell	laminarer Bereich	turbulenter Bereich	Hinweise
erzwungene Konvektion längs einer Platte	$Nu = 0,664 Re^{1/2} Pr^{1/3}$	$Nu = \frac{0,037 Re^{0,8} Pr}{1 + 2,443 Re^{-0,1} (Pr^{2/3} - 1)}$	L Plattenlängen in Strömungsrichtung $\vartheta_m = \frac{1}{2} (\vartheta_E + \vartheta_A)$ ϑ_E Eintrittstemperatur ϑ_A Austrittstemperatur
erzwungene Strömung im Rohrinneren	$Nu = 0,664 \left(Re \frac{d_i}{L} \right)^{1/2} Pr^{1/3}$	$Nu = \frac{0,125 \xi (Re - 1000) Pr}{1 + 4,49 \sqrt{\xi} (Pr^{2/3} - 1)} \left[1 + \left(\frac{d_i}{L} \right)^{2/3} \right]$ $\xi = (1,82 \lg Re - 1,64)^{-2}$	d_i Innendurchmesser Rohr L Rohrlänge $\vartheta_m = \frac{1}{2} (\vartheta_E + \vartheta_A)$

Tabelle P-10 (Fortsetzung)

Strömungsmodell	laminarer Bereich	turbulenter Bereich	Hinweise
freie Konvektion an vertikaler Wand oder um ein senkrecht Rohrl	$Nu = \left\{ 0,825 + \frac{0,387 Gr Pr}{\left[1 + \left(\frac{0,492}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2$	$Nu = 0,15 \left\{ \frac{Gr Pr}{\left[1 + \left(\frac{0,322}{Pr} \right)^{11/20} \right]^{20/11}} \right\}^{1/5}$	L Höhe der vertikalen Wand oder des Rohres bzw. kurze Seitenlänge der horizontalen Platte
freie Konvektion längs einer horizontalen Platte (nach oben)	$Nu = 0,766 \left\{ \frac{Gr Pr}{\left[1 + \left(\frac{0,322}{Pr} \right)^{11/20} \right]^{20/11}} \right\}^{1/5}$	$Nu = \left\{ 0,825 + \frac{0,387 Gr Pr}{\left[1 + \left(\frac{0,492}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2$	$\Delta T = (\vartheta_0 - \vartheta_\infty)$ ϑ_0 Oberflächen-temperatur in Flächenmitte ϑ_∞ Fluidtemperatur außerhalb Grenzschicht $\vartheta_m = \frac{1}{2} (\vartheta_0 + \vartheta_\infty)$

Tabelle P-11. Emissionsgrade für Gesamtstrahlung ε und in Richtung der Flächennormalen ε_n einiger Metalle und Nichtmetalle (nach VDI-Wärmeatlas, 6. Aufl. 1991).

Oberfläche	ϑ °C	ε_n	ε
Metalle			
Aluminium walzblank	20	0,04	0,05
oxidiert	20	0,20	
Chrom poliert	150	0,058	0,071
Gold poliert	230	0,018	
Eisen poliert	100	0,17	0,65
angerostet	20	0,65	
verzinkt	25	0,25	0,61
Messing nicht oxidiert	25	0,035	
oxidiert	200	0,61	
Nichtmetalle			
Beton	20		0,94
Dachpappe	20	0,91	
Glas	20	0,94	0,90
Holz	25	0,94	
Mauerwerk	20		0,93
Kunststoffe	20		0,90
Lacke, Farben	100	0,92 bis	0,97
Wasser	20	0,95	

Die spezifische Ausstrahlung eines Temperaturstrahlers hängt nur von dessen absoluter Temperatur und seiner elektronischen Oberflächenstruktur ab. Die höchste Wärmestrahlungsdichte emittiert ein *schwarzer Körper*; dieser absorbiert andererseits auch die gesamte auffallende Strahlungsenergie. Auf den schwarzen Körper sind daher das Emissions- und Absorptionsvermögen der anderen *grauen Körper* bezogen (Tabelle P-11):

$$\text{Emissionszahl} \quad \varepsilon = M_e / M_{e,s}$$

$$\text{Absorptionszahl} \quad \alpha = M_a / M_{a,s}$$

$$\text{Kirchhoffsches Gesetz} \quad \varepsilon = \alpha; \quad (P-7)$$

M_e spezifische Abstrahlung des grauen Körpers,

$M_{e,s}$ spezifische Abstrahlung des schwarzen Körpers,

M_a absorbierte Strahlungsleistung des grauen Körpers,

$M_{a,s}$ absorbierte Strahlungsleistung des schwarzen Körpers.

Nach dem *Stefan-Boltzmann-Gesetz* ist die spezifische Abstrahlung eines grauen Körpers

$$M_e(T) = \varepsilon \sigma T^4; \quad (P-8)$$

T	absolute Temperatur des Strahlers,
$M_e(T)$	spezifische Ausstrahlung,
ε	Emissionszahl,
σ	Stefan-Boltzmann-Konstante [$\sigma = 5,670 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$]

Temperaturstrahler emittieren nicht nur Wärmestrahlung, sie empfangen auch vom kälteren Strahlungsleistung; für die Wärmestrahlungsübertragung vom wärmeren Körper 1 an den kälteren Körper 2 gilt

$$Q_{12} = C_{12} A_1 (T_1^4 - T_2^4)$$

$$C_{12} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \sigma \varphi_{12}}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) \frac{A_1}{A_2} \varphi_{12}^2},$$

für $\varepsilon \geq 0,9$ ist $C_{12} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sigma \varphi_{12}$

$$\varphi_{12} = \frac{1}{\pi A_1} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{r^2} dA_1 dA_2;$$

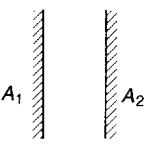
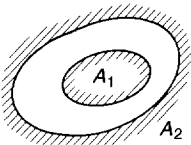
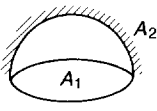
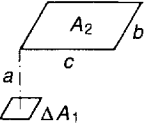
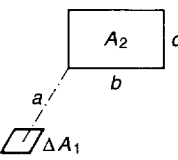
(P-9)

Q_{12}	Wärmestrom durch Wärmeübertragung durch Strahlung von Körper 1 nach Körper 2,
C_{12}	Strahlungsaustauschkoeffizient,
φ_{12}	Einstrahlzahl zwischen den Flächen A_1 und A_2 ,
A_1, A_2	abstrahlende Fläche der Körper 1 bzw. 2,
T_1, T_2	Oberflächentemperatur der Körper 1 bzw. 2,
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$	Emissionszahl des Körpers 1 bzw. 2,
β_1, β_2	Richtungswinkel zwischen der Strahlungsrichtung und den Flächennormalen von A_1 und A_2 ,
σ	Stefan-Boltzmann-Konstante [$\sigma = 5,670 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$].

Die Strahlungsaustauschkoeffizienten berücksichtigen die geometrische Situation der Wärmeübertragung durch Wärmestrahlung (Tabelle P-12).

Die Wärmestromdichte der Wärmeübertragung durch Wärmestrahlung der Oberfläche des Körpers 1 an den Körper 2 ist über den Wärmeübergangskoeffizienten α_3^* mit der

Tabelle P-12. Strahlungsaustauschkoeffizienten.

Geometrie	Strahlungsaustauschkoeffizient
 parallele Flächen	$C_{12} = \frac{\sigma}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$
 konvexe Fläche A_1 von konkaver Fläche A_2 umschlossen	$C_{12} = \frac{\sigma}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}$
 Halbraum A_2 über ebener Fläche A_1	$C_{12} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \sigma}{1 - \frac{1}{2} (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)}$
 Rechteckfläche parallel zum Flächenelement ΔA_1	$C_{12} = \sigma \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \arctan \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \arctan \frac{b}{\sqrt{a^2 + c^2}} \right)$
 Rechteckfläche senkrecht zum Flächenelement ΔA_1	$C_{12} = \sigma \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{1}{2\pi} \left(\arctan \frac{b}{a} - \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \arctan \frac{b}{\sqrt{a^2 + c^2}} \right)$

Oberflächentemperaturdifferenz der beiden Körper verknüpft:

$$j_{q,s} = \frac{Q_{12}}{A_1} = \alpha_s^* (\vartheta_1 - \vartheta_2) = \alpha_s^* (T_1 - T_2)$$

$$\alpha_s^* = C_{12} (T_1^2 + T_2^2) (T_1 + T_2); \quad (\text{P-10})$$

- $j_{q,s}$ Wärmestromdichte der Wärmestrahlungsemission des Körpers 1,
 Q_{12} Wärmestrom durch Wärmeübertragung durch Strahlung von Körper 1 nach Körper 2,
 C_{12} Strahlungsaustauschkoeffizient;,
 A_1 abstrahlende Fläche des Körpers 1,
 T_1, T_2 Oberflächentemperatur der Körper 1 bzw. 2 in K,
 ϑ_1, ϑ_2 Oberflächentemperatur der Körper 1 bzw. 2 in °C,
 α_K^* Wärmeübergangskoeffizient für Wärmestrahlung.

P.4 Wärmedurchgang

Beim Wärmedurchgang wird durch konvektive Wärmeübertragung Wärme des Fluids 1 und durch Wärmestrahlungsabgabe Strah-

lungswärme der Umgebungsflächen 1 von der wärmeren Seite 1 auf eine Trennwand übertragen, durch Wärmeleitung an die Oberfläche der kalten Seite 2 transportiert und dort konvektiv an das kältere Fluid 2 und die kalten Umgebungsflächen 2 abgegeben (Bild P-2).

Im Beharrungszustand der Wärmeübertragung addieren sich die Wärmeströme der Konvektion und der Wärmestrahlung auf die Trennwand, und der Transmissionswärmestrom Q_T durch die Trennwand hängt vom Wärmedurchgangskoeffizient k der Trennwand ab:

$$Q_T = k A (\vartheta_{\text{aq},1} - \vartheta_{\text{aq},2})$$

$$\vartheta_{\text{aq},1} = \frac{\alpha_{K,1}^* \vartheta_{F,1} + \vartheta_{S,1}^* \vartheta_{U,1}}{\alpha_1^*}$$

$$\vartheta_{\text{aq},2} = \frac{\alpha_{K,2}^* \vartheta_{F,2} + \vartheta_{S,2}^* \vartheta_{U,2}}{\alpha_2^*}$$

$$\alpha_1^* = \alpha_{K,1}^* + \alpha_{S,1}^*$$

$$\alpha_2^* = \alpha_{K,2}^* + \alpha_{S,2}^*; \quad (\text{P-11})$$

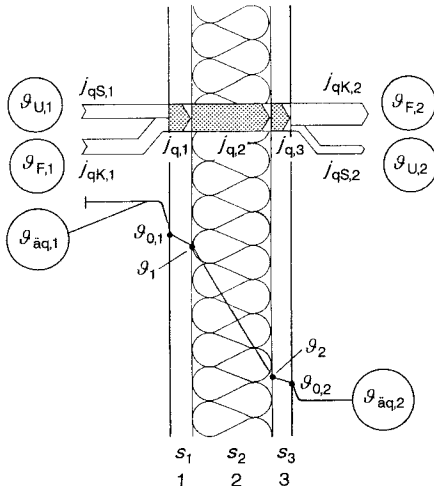


Bild P-2. Wärmedurchgang durch eine mehrschichtige Trennwand.

- Q_T Transmissionswärmestrom durch die Trennwand,
 A Wärmedurchgangsfläche innen oder außen,
 k Wärmedurchgangskoeffizient,
 $\vartheta_{\text{aq},1}, \vartheta_{\text{aq},2}$ äquivalente Temperatur der Seite 1 bzw. 2,
 $\vartheta_{F,1}, \vartheta_{F,2}$ Fluidtemperatur auf der Seite 1 bzw. 2,
 $\vartheta_{U,1}, \vartheta_{U,2}$ mittlere Oberflächentemperatur der Umgebungsflächen auf der Seite 1 bzw. 2,
 α_1^*, α_2^* Wärmeübergangskoeffizient auf den Fluidseiten 1 bzw. 2,
 $\alpha_{K,1}^*, \alpha_{K,2}^*$ Wärmeübergangskoeffizient für Konvektion auf der Seite 1 bzw. 2,
 $\alpha_{S,1}^*, \alpha_{S,2}^*$ Wärmeübergangskoeffizient für Wärmestrahlung auf der Seite 1 bzw. 2.

Bei gekrümmten wärmeübertragenden Trennwandflächen wird der Wärmedurchgangskoeffizient k auf die Innenoberfläche A_1 oder die Außenoberfläche A_2 bezogen. In der Praxis wird häufig angesetzt, daß die

Umschließungsflächentemperaturen und die Fluidtemperaturen näherungsweise gleich sind und $\vartheta_{aq} = \vartheta_F$ ist.

Der Wärmedurchgangskoeffizient einer ebenen planparallelen Trennwand aus mehreren Schichten (Bild P-2) ist:

$$k = \frac{1}{\alpha_1^{*-1} + \frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{s_3}{\lambda_3} + \alpha_2^{*-1}}; \quad (P-12)$$

s_1, s_2, \dots Dicke der Bauteilschichten,
 $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ Wärmeleitfähigkeit der Bauteilschichten,
 $\alpha_1^{*-1}, \alpha_2^{*-1}$ Wärmeübergangswiderstand auf der Seite 1 bzw. 2.

P.5 Stoffübertragung

Die Grundgleichungen der Stoffübertragung sind die *Fickschen Gesetze* (Tabelle P-13). Sie sind vom mathematischen Aufbau her identisch mit den Fourierschen Gesetzen der Wärmeleitung. So lassen sich vergleichbare Modellergebnisse bei Wärmeleitungsvorgän-

gen auch für vergleichbare Stoffübertragungen übernehmen.

Im allgemeinen müssen bei Stoffübertragungen, genauso wie bei der Wärmeübertragung durch Konvektion, Versuchsergebnisse von Modellversuchen auf den Anwendungsfall übernommen werden, wobei im Fall der Stoffübertragung die dimensionslosen Kenngrößen der Stoffübertragung von Modellversuchen und Anwendungsfall übereinstimmen müssen. Die *Sherwood-Zahl* Sh ist, vergleichbar mit der Nußelt-Zahl, die Kenngröße für den *Stoffübergangskoeffizienten* β :

$$\beta = \frac{D \text{ Sh}}{s} \quad (P-13)$$

β Stoffübergangskoeffizient,
 D Diffusionskoeffizient,
 s charakteristische Diffusionslänge,
 Sh Sherwood-Zahl.

Für einzelne Anwendungsfälle gibt es Beziehungen $Sh = Sh(Re, Sc, \dots)$ zwischen der Sherwood-Zahl Sh und den anderen Kenngrößen der Stoffübertragung.

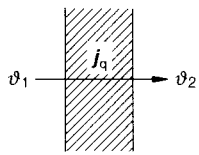
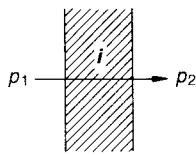
Ein Spezialfall der Stoffübertragung ist die *Dampfdiffusion*, insbesondere die Wasser-

Tabelle P-13. *Ficksche Gesetze.*

	allgemein	ideale Gase $\frac{p}{\varrho} = \frac{R_m T}{M}$
1. Ficksches Gesetz	$i = -D \left(\frac{\partial \varrho}{\partial n} \right)$	$i = -\frac{DM}{R_m T} \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)$
2. Ficksches Gesetz	$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = - \left(\frac{\partial i_x}{\partial x} + \frac{\partial i_y}{\partial y} + \frac{\partial i_z}{\partial z} \right)$	$\frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{R_m T}{M} \left(\frac{\partial i_x}{\partial x} + \frac{\partial i_y}{\partial y} + \frac{\partial i_z}{\partial z} \right)$
ideales Fluid $\eta = 0$	$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -D \left(\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial z^2} \right)$	$\frac{\partial p}{\partial t} = -D \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right)$

ϱ	Dichte	R_m	universelle Gaskonstante
$(\partial \varrho / \partial n)$	Dichtegradient in n -Richtung	$[R = 8,3144 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})]$	
p	Druck im Fluid	T	absolute Temperatur im Fluid
$(\partial p / \partial n)$	Druckgradient in n -Richtung	M	Molmasse
D	Diffusionskoeffizient, $[D] = 1 \text{ m}^2/\text{s}$	t	Zeit
i	Massenstromdichte $[i] = 1 \text{ kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$	x, y, z	Ortskoordinaten

Tabelle P-14. Analogie von Wärmeübertragung und Dampfdiffusion.

	Wärmetransport	Dampfdiffusion
Modell		
Ursache	Temperaturgefälle $\Delta T = \vartheta_1 - \vartheta_2$	Dampfdruckgefälle $\Delta p = p_1 - p_2$
Wirkung	Wärmestrom $j_q = k (\vartheta_1 - \vartheta_2)$	Diffusionsstrom $i = k_D (p_1 - p_2)$
Transportgrößen	$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}$ $\frac{1}{\lambda} = \frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{s_3}{\lambda_3}$	$k_D = \frac{1}{\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\beta_2}}$ $\frac{1}{\lambda} = \frac{s_1}{\delta_1} + \frac{s_2}{\delta_2} + \frac{s_3}{\delta_3}$
ϑ Temperatur	α Wärmeübergangskoeffizient	
j_q Wärmestromdichte	λ^{-1} Wärmedurchlaßwiderstand	
p Dampfdruck	k_D Diffusionsdurchgangskoeffizient	
i Dampfdiffusionsstromdichte	δ Dampfleitfähigkeit	
k Wärmedurchgangskoeffizient	β Dampfübergangskoeffizient	
λ Wärmeleitfähigkeit	λ^{-1} Dampfdurchlaßwiderstand	
s Schichtdicke		

dampfdiffusion, durch feste Bauteile. Für diesen Fall ist die Analogie zwischen der Dampfdiffusion und der Wärmeübertragung durch Wärmeleitung vollständig (Tabelle P-14). In

der Regel sind dabei die Wasserdampfübergangswiderstände $1/\beta$ vernachlässigbar klein gegenüber dem Wasserdampfdurchlaßwiderstand $1/\lambda$.

Q Energietechnik

Die physikalischen Grundlagen der Energietechnik finden sich zum großen Teil in den Abschnitten M Elektrizität und Magnetismus, O Thermodynamik, P Energie- und Stoffübertragung, T Kernphysik und W Metall- und Halbleiterphysik. Die Energietechnik sichert durch ihre ingenieurmäßige Anwendung die Strom- und Wärmeversorgung zum Lebenserhalt und zum menschlichen Komfort. Das Gebiet der Energietechnik reicht von der Primärenergiegewinnung bis zur Energiedienstleistung und der Entsorgung des Energieabfalls (Übersicht Q-1).

Q.1 Energieträger

Die Energieträger werden eingeteilt in *Primärenergien*, also energetisch nutzbare Stoffe aus Lagerstätten, Natur- oder Sonnenenergie, und *Sekundärenergien*, also für die Energienutzung im Energiewandler im allgemeinen verlustbehaftet aufbereitete und veredelte Energieträger und Brennstoffe (Übersicht Q-1). Der Verbrauch an Primärenergie steigt seit der Industrialisierung, insbesondere in den Industrieländern der nördlichen Hemisphäre, stark; 1990 betrug der Welt-Primärenergieverbrauch etwa 11 TWa, was $12 \cdot 10^9$ tSKE entspricht. Nach wie vor steigt der Weltenergieverbrauch, wobei die Verbrauchszunahme aufgrund des Bevölkerungswachstums die Ergebnisse von

Anstrengungen zur Energieeinsparung bei weitem übertrifft (Bild Q-1).

Dem stehen die wirtschaftlich gewinnbaren fossilen Energiereserven (Tabelle Q-2) gegenüber; die Reichweite der fossilen Reserven würde bei einem auf den Wert von 1990 von 11 TWa eingefrorenem Primärenergieverbrauch noch 100 Jahre betragen. Angesichts dieser historisch kurzen Zeitspanne setzt man zum einen auf Energieeinsparung durch rationelle Energieverwendung und zum anderen auf die Nutzung der regenerativen Energieträ-

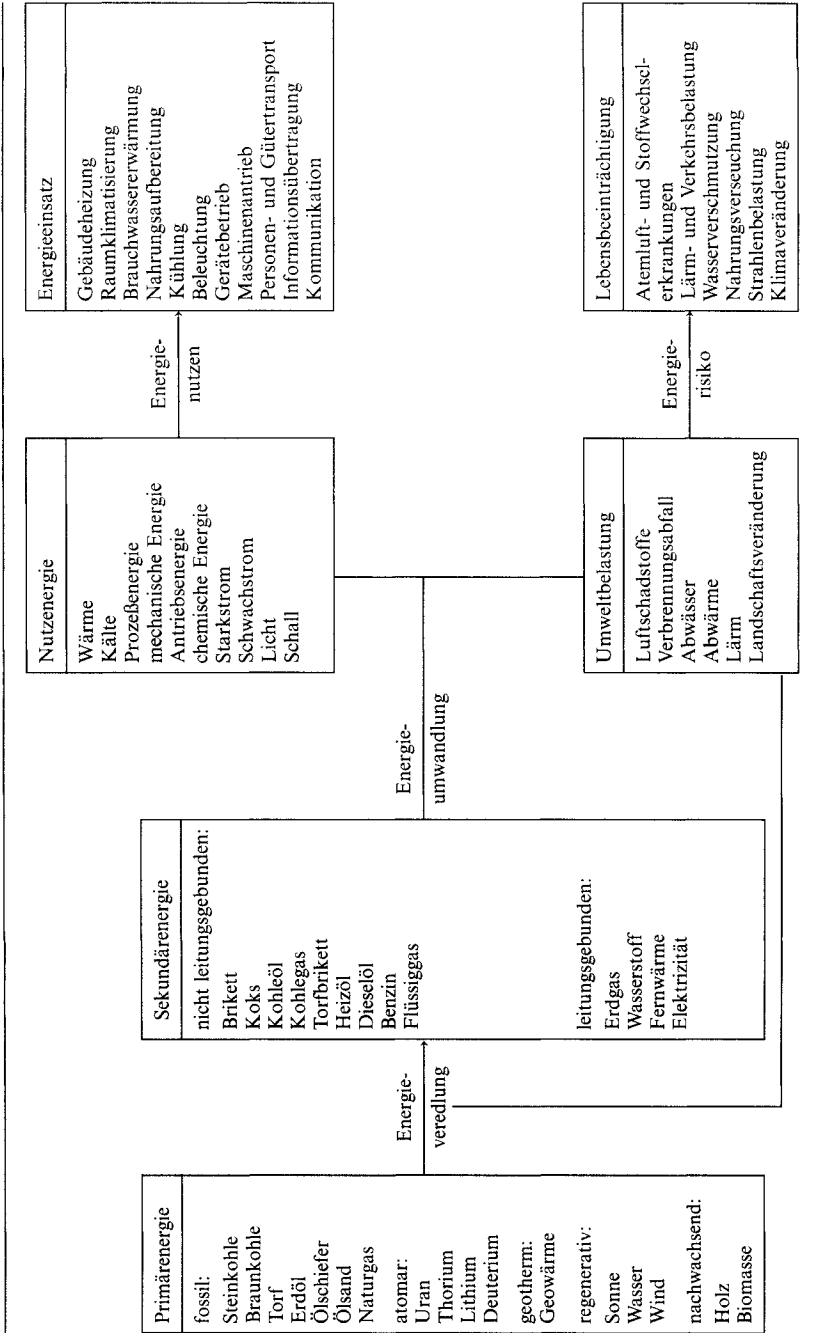
Tabelle Q-2. Wirtschaftlich gewinnbare fossile Energievorräte (Stand 1990).

Region	Kohle TWa	Erdöl TWa	Erdgas TWa	gesamt TWa	Anteil %
GUS	154,1	10,6	49,4	214,1	19,5
Nordamerika	179,0	5,9	8,5	193,4	17,6
Naher Osten/ Nordafrika	8,9	130,4	51,3	190,6	17,3
China	129,7	4,4	1,1	135,2	12,3
Westeuropa	82,5	2,5	5,3	90,3	8,2
Ferner Osten	60,9	4,4	7,6	72,9	6,6
Australien	58,5	0,3	0,7	59,5	5,4
Südafrika	51,4	0,0	0,1	51,5	4,7
Osteuropa	46,0	0,4	0,6	47,0	4,3
Mittel- und Südamerika	13,8	22,9	8,4	45,1	4,1
Welt absolut	784,8	181,8	133,0	1099,6	100,0
Welt prozentual in %	71,4	16,5	12,1	100,0	

Tabelle Q-1. Energieeinheiten.

Einheit	Umrechnung in SI-Einheit Joule
Kilowattstunde	$1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$
Terawattjahr	$1 \text{ TWa} = 8,76 \cdot 10^{12} \text{ kWh}$ $= 3,15 \cdot 10^{19} \text{ J}$
Tonne-Steinkohlen-einheit	$1 \text{ tSKE} = 9,3 \cdot 10^{-10} \text{ TWa}$ $= 29,3 \cdot 10^9 \text{ J}$
British thermal unit	$1 \text{ btu} = 1,055 \cdot 10^3 \text{ J}$

Übersicht Q-1. Energiefluß.



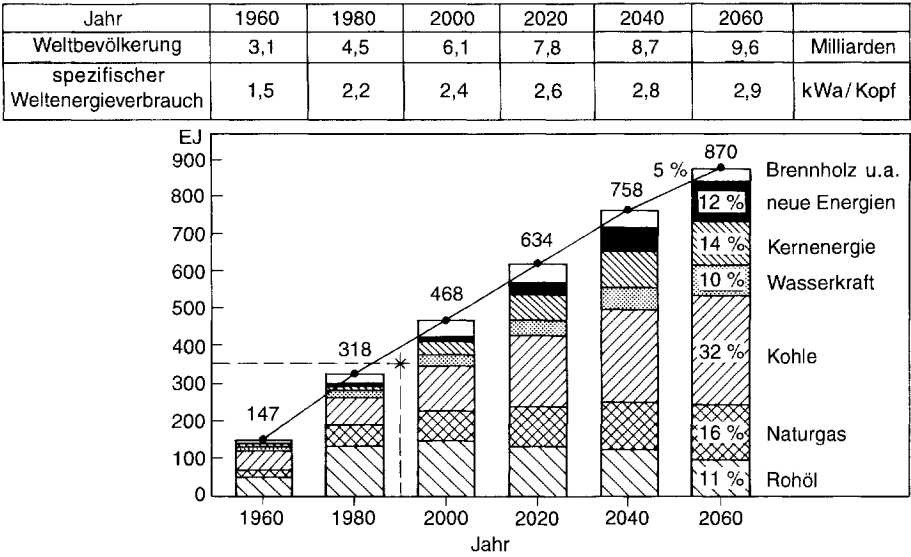


Bild Q-1. Historischer und prognostizierter Weltenergieverbrauch, mittlere Entwicklung (nach Weltenergiekonferenz 1986), × Verbrauchswert 1990 von 347 EJ.

Tabelle Q-3. Potential regenerativer Primärenergien.

Energieart	geschätzte Primärenergie	technisch nutzbares Potential	Verhältnis von technisch nutzbarem Potential zum Weltprimärenergieverbrauch 1990
	TWa/a	TWa/a	(11 TWa/a)
Solarstrahlung auf Kontinente	25 000	19	170%
Windenergie	350	1,0	9%
Biomasse	100	2,1	19%
Wasserkraft	5	1,5	14%
Geothermie	35	0,6	5%
Meeresenergie	20	0,5	5%
	25 510	34,7	222%

ger (Tabelle Q-3), die theoretisch um den Faktor 2 größer sind als 1990 der Primärenergieverbrauch in der Welt.

Der Energieinhalt der für die Energiebereitstellung wichtigen Sekundärenergieträger wird gekennzeichnet durch den oberen Heizwert H_o , welcher die chemische Reaktionsenthalpie einschließlich der Verdampfungswärme der Verbrennungsgase darstellt, und den unteren Heizwert H_u (Tabelle Q-4). Beim unteren Heizwert ist von der Reaktionsenthalpie die Verdampfungswärme der Brenngase abgezogen, welche bis auf Ausnahmen (Kon-

Tabelle Q-4. Heizwerte von Sekundärenergieträgern.

Brennstoffe	unterer Heizwert H_u	
	kJ/kg	kJ/m ³ _n
fest		
Kohlenstoff (rein)	33 820	
Steinkohle	31 500	
Pechkohle	22 900	
Braunkohlenbrikett	19 000*)	
Braunkohle (roh)	9 600*)	
Torf	13 800*)	
Holz	14 600*)	

Tabelle Q-4 (Fortsetzung)

Brennstoffe	unterer Heizwert H_u	
	kJ/kg	kJ/m ³
flüssig		
Methanol	19 510	
Ethanol/Alkohol	29 960	
Benzol	40 230	
Benzin	42 500	
Heizöl EL	42 000	
Heizöl S	39 500	
gasförmig		
Wasserstoff	119 970	10 780
Methan	50 010	35 880
Propan	46 350	93 210
Butan	45 720	123 800
Erdgas L	39 600	32 800
Erdgas H	46 900	37 000
Stadtgas	24 800	16 120

*) stark schwankend je nach Lagerstätte und Wassergehalt

densationskraftwerk, Brennwertkessel) in der Regel in der Energieumwandlung energetisch nicht nutzbar ist.

Q.2 Energiewandler

Die Sekundärenergien werden in Energiewandlern in Nutzenergien umgewandelt. Der Energieinhalt der Brennstoffe kann insbesondere bei thermischen Umwandlungsprozessen nicht vollständig umgewandelt werden. In der Energietechnik wird deshalb die Energie aufgeteilt in die *Exergie* und die *Anergie* (Tabelle Q-5, Abschnitt O.3.6)

$E = E_x + A_n$ (Q-1)

Ex Exergie; dieser Energieanteil läßt sich vollständig in andere Energieformen umwandeln,

An Anergie, der in der Energieumwandlung nicht nutzbare Energieanteil.

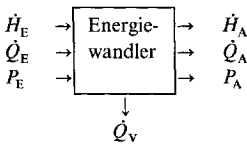
Tabelle Q-5. Energie, Exergie, Anergie.

Energieart	Energieinhalt	Exergie	Anergie
kinetische Energie	$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_2^2)$	$E_x = E_{\text{kin}}$	$A_n = 0$
potentielle Energie	$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} D (s_1^2 - s_2^2) + m g (h_1 - h_2)$	$E_x = E_{\text{pot}}$	$A_n = 0$
elektrische Energie	$E_{\text{el}} = \int_{t_1}^{t_2} u i dt$	$E_x = E_{\text{el}}$	$A_n = 0$
Volumenänderungsarbeit	$W_{12} = - \int_{V_1}^{V_2} p dV$	$E_x = W_{12} - p_U (V_1 - V_2)$	$A_n = p_U (V_1 - V_2)$
innere Energie	$\Delta U = c_v m (T_1 - T_2)$	$E_x = \Delta U - c_v (T_U (T_1 - T_2) - T_U (S_1 - S_U))$	$A_n = c_v (T_U (T_1 - T_2) + T_U (S_1 - S_U))$
Wärme	$Q_1 = \int_{T_U}^{T_1} c m dT$	$E_x = Q_1 \frac{T_1 - T_U}{T_1}$	$A_n = Q_1 \frac{T_U}{T_1}$
Reaktionsenergie	$E_R = -(H_{R,1} - H_{R,2})$	$E_x = E_R - T_U (S_1 - S_U)$	$A_n = T_U (S_1 - S_2)$

c	spezifische Wärmekapazität	p_U	Umgebungsdruck
c_v	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen	s	Lage des elastischen Körpers
D	Richtgröße des elastischen Körpers	S	Entropie
g	Fallbeschleunigung	S_U	Entropie bei Umgebungsbedingungen
h	Höhe	t	Zeit
H_R	Reaktionsenthalpie	T	Temperatur
i	elektrischer Strom	T_U	Umgebungstemperatur
m	Masse	u	elektrische Spannung
p	Druck	v	Geschwindigkeit
		V	Volumen

Übersicht Q-2. Güte- und Wirkungsgrade der Energieumwandlung.

Energiefluß

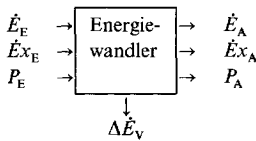
energetischer Gütegrad η

$$\eta = 1 - \frac{\dot{Q}_v}{\dot{H}_E + \dot{Q}_E + P_E}$$

thermischer Wirkungsgrad
von Kreisprozessen η_{th}

$$\eta_{th} = \frac{|P_A|}{\dot{Q}_E}$$

Exergiefluß

exergetischer Gütegrad ζ

$$\zeta = 1 - \frac{\Delta \dot{E}_v}{\dot{E}_E + \dot{E}_{X_E} + P_E}$$

exergetischer Wirkungsgrad ζ_{Ex}

$$\zeta_{Ex} = \frac{|P_A|}{\dot{E}_{X_E}}$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_A &= \sum_j \dot{E}_{A,j} && \text{austretende Energieströme} \\ \dot{E}_E &= \sum_i \dot{E}_{E,i} && \text{eintretende Energieströme} \\ \dot{E}_{X_A} &= \sum_j \dot{E}_{X_{A,j}} && \text{austretende Exergieströme} \\ \dot{E}_{X_E} &= \sum_i \dot{E}_{X_{E,i}} && \text{eintretende Exergieströme} \\ \dot{H}_A &= \sum_j \dot{H}_{A,j} && \text{austretende Enthalpieströme} \\ \dot{H}_E &= \sum_i \dot{H}_{E,i} && \text{eintretende Enthalpieströme} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_A &= \sum_j P_{A,j} && \text{abgegebene mechanische Leistungen} \\ P_E &= \sum_i P_{E,i} && \text{zugeführte mechanische Leistungen} \\ \dot{Q}_A &= \sum_j \dot{Q}_{A,j} && \text{ausströmende Wärmeströme} \\ \dot{Q}_E &= \sum_i \dot{Q}_{E,i} && \text{einströmende Wärmeströme} \\ \dot{Q}_v &= \sum_k \dot{Q}_{v,k} && \text{Wärmeverluste} \\ \Delta \dot{E}_v &= \sum_k \Delta \dot{E}_{v,k} && \text{Energieumwandlungsverluste} \end{aligned}$$

Abhängig von der Art des verarbeiteten Primär- bzw. Sekundärenergieträgers sind die Energieumwandlungsprozesse und ihre technische Realisierung sehr unterschiedlich. Sie lassen sich durch *Gütegrade* des Umwandlungsprozesses und *Wirkungsgrade* für die Nutzenergieerzeugung charakterisieren. Beim Gütegrad beziehen sich die Umwandlungsverluste auf die eingesetzten Energien oder Exergien; der Wirkungsgrad bezieht sich auf die tatsächlich erwünschte Nutzenergie im Verhältnis zur eingesetzten Energie oder Exergie (Übersicht Q-2).

Die Unterschiede zwischen den energetischen und den exergetischen Wirkungsgraden sind besonders groß, wenn, wie bei der Wärmeerzeugung, das Nutzwärmeniveau durch die Umgebungstemperatur bzw. die minimale Abgastemperatur begrenzt ist (Tabelle Q-6).

Die Energiewandler lassen sich in stromerzeugende, wärmeerzeugende und kombinierte

(Kraft-Wärme-Kopplung) Anlagen einteilen. Durch die *energetische Amortisationszeit* τ_E und den *Erntefaktor* f_E kann die Energiebereitstellungsqualität der verschiedenen Kraftwerksarten beurteilt werden (Tabelle Q-7). Derzeit werden für Kernkraft-, Kohlekraft-, Wasser- und Windkraftanlagen zur Stromerzeugung Amortisationszeiten von weniger als einem Jahr und Erntefaktoren von deutlich über 10 angegeben, bei Photovoltaikanlagen dagegen liegen die Werte bei $\tau_E \approx 20$ a bzw. $f_E \approx 1$. Diese Angaben sind jedoch insbesondere hinsichtlich der energetischen Beurteilung des Entsorgungsaufwands und der Umweltbelastung umstritten.

Tabelle Q-6. Energiewandler-Wirkungsgrade.

Energiewandler	energetischer Wirkungsgrad η_{th}	exergetischer Wirkungsgrad ζ_{Ex}
Wärmeerzeugung		
Elektro-Heizung (Kraftwerk $\eta = 0,33$)	0,9	0,035
Öl/Gas-Heizung	0,6	0,07
Elektro-Wärmepumpe	2 bis 3	0,1 bis 0,2
Elektro-Warmwasserbereitung	0,75	0,016
Heizöl/Gas-Warmwasserbereitung	0,50	0,032
Solar-Warmwasserbereitung	0,6	0,04
Stromerzeugung		
Dampfkraftwerk		0,33
Wasserkraftwerk		0,8
Windenergiekraftwerk		0,3
Antriebsenergieerzeugung		
Ottomotor		0,1
Dieselmotor		0,15
Elektroantrieb		0,1 bis 0,15
Elektromotor		0,6 bis 0,9
Dampfmaschine	0,5	0,8
Wasserturbine		0,8

Q.3 Energiespeicher

Diskrepanzen im Energieverbrauch sowohl im Tagesgang als auch im Jahresverlauf erfordern zur rationellen Energienutzung wirksame Kurzzeit- und Langzeit-Energiespeicher. Insbesondere ist dies für eine optimale Sonnenenergienutzung und Nutzung von Grundlast-Kraftwerken notwendig. Im Bereich der Stromspeicherung dominieren Pumpspeicher- und Staufenspeicherwerke. Elektrochemische Batteriespeicher eignen sich nur für die

Tabelle Q-7. Energetische Amortisationszeit, Erntefaktor.

Kenngröße	Definition
energetische Amortisationszeit	$\tau_E = \frac{E_{inv}}{\dot{E}_{a,el,N}} = \frac{E_{inv}}{P_{el,N} t_a}$
Energie-Erntefaktor	$f_E = \frac{\tau_L \cdot \dot{E}_{a,el,N}}{E_{inv} + \tau_L \dot{E}_{a,B}}$ $= \frac{\tau_L \cdot \dot{E}_{a,el,N}}{\tau_E \cdot \dot{E}_{a,el,N} + \tau_L \cdot \dot{E}_{a,B}}$
E_{inv}	benötigte Energieinvestition zur Herstellung des Kraftwerks
$\dot{E}_{a,el,N}$ $\dot{E}_{a,B}$	elektrische Nettoenergieerzeugung pro Jahr energetische Aufwendungen zum Kraftwerksbetrieb pro Jahr
$P_{el,N}$	elektrische Netto-Kraftwerksleistung
t_a	Jahres-Betriebsstunden
τ_L	Lebensdauer des Kraftwerks

niederenergetische Kurzzeitspeicherung. Unter den verschiedenen Speicherprinzipien (Tabelle Q-8) dominieren sowohl im Heizwärme- und Strombereich als auch unangefochten im Verkehrsbereich die Brennstoffspeicher nach dem Reaktionswärmeprinzip.

Energiespeicher werden nach der *massenbezogenen* und der *volumenbezogenen Energiedichte* charakterisiert:

$$\sigma = E_{Sp}/m, \quad \sigma' = E_{Sp}/V; \quad (Q-2)$$

- E_{Sp} gespeicherte Energie,
- m Masse des Energiespeichers,
- V Volumen des Energiespeichers,
- σ massenbezogene Speicherdichte,
- σ' volumenbezogene Speicherdichte.

Der Brennwert je 1 kg oder 1 m³ Brennstoff ist für die Praxis von untergeordneter Bedeutung. Zur Masse oder dem Volumen des Brennstoffs ist die Masse und das Raumvolumen der Speicherbehälter und Speichermaterialien hinzuzurechnen. Unter diesen Gesichtspunkten ist die Energiespeicherung in Heizöl oder in den Kraftstoffen Benzin und Dieselöl unübertriften (Tabelle Q-9). Deshalb haben bisher elektrische oder mit Wasserstoff angetriebene

Tabelle Q-8. Möglichkeiten der Energiespeicherung.

Speicherprinzip	Speicherenergie	Energiespeicher
Reaktionswärme	$E_{sp} = m H_u$ $E_{sp} = \Delta m c^2$	Brennstoffspeicher, Bunker, Tanks, Druckgasspeicher, H_2 -Hydrittspeicher für Nuklearbrennstoff
innere Energie	$E_{sp} = c_p m \Delta T$	Heißwasserspeicher, Stein-, Fels-, Erdspeicher, Aquiferspeicher
Phasenumwandlung Latente Wärme	$E_{sp} = m \lambda$	Eis-, Salz-Latentwärmespeicher, Ruths-Dampfspeicher
mechanische Energie	$E_{sp} = m g \Delta h$ $= V \Delta p$ $= \frac{1}{2} J (\Delta \omega)^2$	Pumpspeicher, Druckluftspeicher, Schwungradspeicher
elektrische Energie	$E_{sp} = \Delta Q U$ $= \frac{1}{2} C (\Delta U)^2$ $= \frac{1}{2} L (\Delta I)^2$	Batterien, Kondensatoren, Magnetfeldspulen

c	Lichtgeschwindigkeit ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s)	L	Induktivität
c_p	spezifische Wärmekapazität	m	Speichermasse
C	Kapazität	p	Gasdruck
E_{sp}	Speicherenergie	Q	elektrische Ladung
g	Fallbeschleunigung	T	Temperatur
h	Höhe	U	elektrische Spannung
H_u	unterer Heizwert	V	Speichervolumen
I	elektrischer Strom	λ	spezifische Phasenumwandlungswärme
J	Massenträgheitsmoment		

Tabelle Q-9. Speicherdichten von Fahrzeugspeichern.

Fahrzeugspeicher	Speicherdichte Wh/kg
Benzintank	9 700
Dieseltank	10 100
Methanoltank	4 400
Flüssig-Wasserstoffspeicher	5 000
TiFe-Hydrittspeicher	400
Hochdruck-Wasserstoffspeicher	300
Silber-Zink-Batterie	120
Blei-Akku-Traktionsbatterie	35

Fahrzeuge geringe Marktchancen; günstiger ist die Situation im Heizwärmebereich, wo die kritische massenbezogene Speicherdichte keine Rolle spielt.

Q.4 Energieverbrauch

Die Sekundärenergie wird in der Industrie, im Verkehr, in den Haushalten und im Kleinverbrauch als Nutzenergie verbraucht (Bild Q-2). Letztendlich wird in einem hochentwickelten Land wie der Bundesrepublik Deutschland nur etwas mehr als ein Viertel der Primärenergie zu Nutzenergie. Ins Auge springt insbesondere der niedrige Nutzungsgrad im Verkehrsbereich; dies ist jedoch vor den im Vergleich zum stationären Einsatz hohen Anforderungen an den Energieeinsatz im Fahrzeug (minimale Energiespeicherdichte, Start- und Fahrdynamik, Unfall- und Tanksicherheit) zu verstehen.

Nachdem bisher die wirtschaftliche Bereitstellung von Nutzenergie zum Energieverbrauch dominierte und Erntefaktoren sowie Kapitalrückflußzeiten im Vordergrund der energietechnischen Anstrengungen standen, hat sich der Schwerpunkt energietechnischer Beurtei-

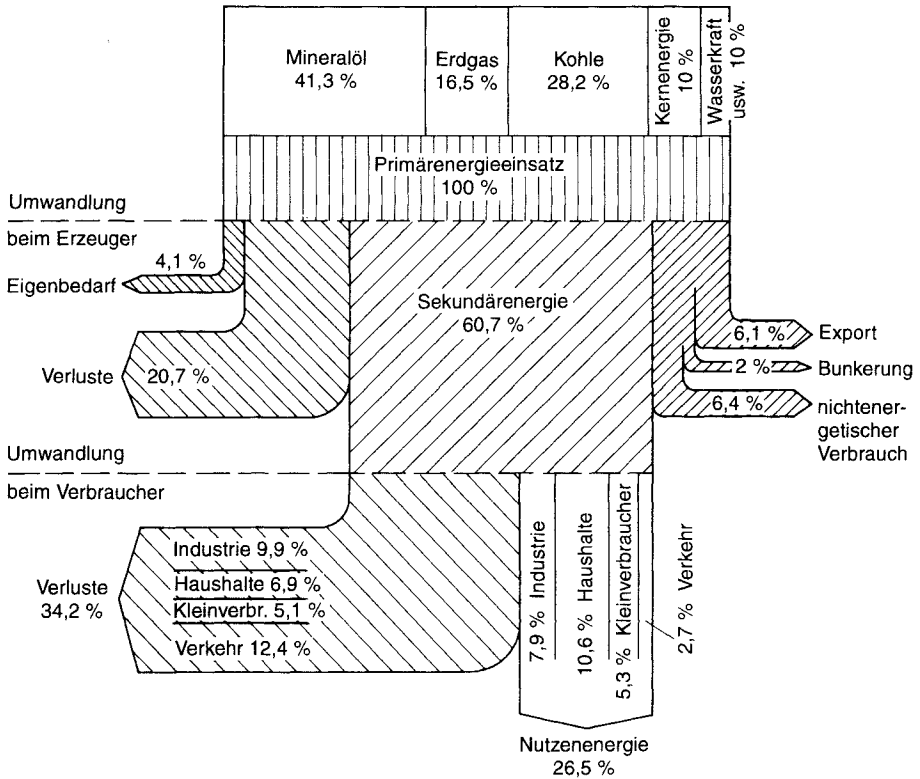


Bild Q-2. Energieumwandlung und Energieverbrauch in der Bundesrepublik Deutschland 1987 (Primärenergieverbrauch 0,392 TWh = 100 %).

lung spätestens seit Tschernobyl bei den Kernkraftwerken und der Weltenergiekonferenz 1989 in Montreal bei den fossilen Energieumwandlern zu den Belastungen der Umwelt (Tabelle Q-10) durch die Energieverwendung und den ökologischen Wirkungen des Nutzeinsatzes verlagert.

Die ökologisch-ökonomische Bilanzierung der Umweltbelastung der Energienutzung im Spannungsfeld Ökonomie – Energietechnik – Ökologie ist noch nicht gegeben. Derzeitiger Stand ist der Appell zur rationellen Energieumwandlung und -nutzung und die Förderung der Energiegewinnung aus regenerativen Energiequellen. Für die Beurteilung der Planung von energetischen Maßnahmen

und der Sanierung von Energieumwandlern hinsichtlich ihres Energiebedarfs sind Energiekennzahlen (Tabelle Q-11) hilfreich.

Der Heizwärmebedarf von wohnähnlich genutzten Gebäuden ohne Abwärmenutzung wird nach ISO 9164 unter Berücksichtigung der solaren Wärmegevinne durch die Verglasungen und der internen Wärmequellen (Personenwärme, Stromverbrauch) berechnet. Der Jahres-Energienutzungsgrad des Heizsystems berücksichtigt zusätzlich zum Heizwärmebedarf den Wärmebedarf der Warmwasserbereitung und die Anlagenverluste der Heizung und der Heizungsverteilung (Tabelle Q-12).

Tabelle Q-10. Umweltbelastungen.

Schadstoff	Verursacher	Belastung
Stäube, Ruß	Kraftwerke, Verkehr, industrielle Prozesse	Atemwegserkrankung, Korrosion, Verschmutzung
Abwässer, Aerosole	Rauchgaskondensation, Tankleckagen	Klärstörung, Trinkwasserverunreinigung, Hautallergie, Gewässerschaden
SO ₂ , NO _x , Kraftstoff-additive, Spurenstoffe	Verkehr, Kraftwerke, industrielle Prozesse	Atemwegserkrankung, Bodenversäuerung, Gewässerkippen, Waldschäden
Kohlendioxid CO ₂	Kraftwerke, Haushalt, Verkehr, industrielle Prozesse	Klimaveränderung (Treibhauseffekt)
Methan CH ₄	Tierhaltung, Erdöl-gewinnung, Reisanbau	Treibhauseffekt
Fluor-Chlor-Kohlen-wasserstoffe (FCKW)	industrielle Herstellung, Entfettung, Privateinsatz	Störung der Erdatmosphäre (Ozonloch)
radioaktive Stoffe	Kernkraftwerke, fossile Kraftwerke	Genmutationen, Krebserkrankung

Tabelle Q-11. Energiekennzahlen.

Kennzahl	Beziehung flächenbezogen	Beziehung volumenbezogen
Wohngebäude:		
Energie-Kennzahl Raumwärme	$EKZ_{w,f} = \frac{Q_h}{EBF}$	$EKZ_{w,v} = \frac{Q_h}{V}$
Energie-Kennzahl Elektrizität	$EKZ_{el} = \frac{Q_{el}}{EBF}$	
Nutzungsgrad Heizanlage	$\eta_h = \frac{Q_h + Q_{ww}}{E_w}$	
Industriebau:		
Energie-Kennzahl Produktivität	$EKZ_p = \frac{E_v}{PE}$	
EBF Energiebezugsfläche (Stockwerksfläche, Putzfläche, Nutzfläche usw.) E_w Heizenergiebedarf Heizanlage E_v Energieverbrauch PE Produktionseinheit (z. B. je 1 kg Mehlverbrauch, je Pkw) Q_{el} Elektroenergiebedarf Q_h Jahres-Heizwärmebedarf Q_{ww} Heizwärmebedarf Warmwasserbereitung V Gebäudevolumen (z. B. innerhalb der wärmeübertragenden Hüllfläche)		

Tabelle Q-12. Berechnung des Heizungs-Nutzungsgrads.

Größe	Beziehung
Nutzungsgrad η_h	$\eta_h = \frac{Q_h + Q_{ww} + Q_{v,H} + Q_{v,ww}}{E_w}$
Warmwasser-Energiebedarf Q_{ww}	$Q_{ww} = c_w \dot{m}_w P (\vartheta_w - \vartheta_K) t_d$
Energieverluste Raumheizung $Q_{v,H}$	$Q_{v,H} = Q_{v,Hb} + Q_{v,Hs} + Q_{v,Hv}$
Energieverluste Warmwasser $Q_{v,ww}$	$Q_{v,ww} = Q_{v,sp} + Q_{v,vz} + Q_{v,vu}$
c_w	spezifische Wärmekapazität von Wasser [$c_w = 1,16 \text{ Wh}/(\text{kg} \cdot \text{K})$]
E_w	Sekundärenergiebedarf des Heizungssystems
\dot{m}_w	Warmwasserverbrauch pro Person und Tag
P	Personenzahl der Warmwassernutzung
Q_h	Heizwärmebedarf
$Q_{v,Hb}$	Wärmeverluste des Wärmeerzeugers im Betrieb
$Q_{v,Hs}$	Wärmeverluste des Wärmeerzeugers im Stillstand
$Q_{v,Hv}$	Wärmeverluste der Heizungsverteilung
$Q_{v,sp}$	Wärmeverlust des Warmwasserspeichers
$Q_{v,vz}$	Wärmeverlust der Warmwasser-Zirkulationsleitung
$Q_{v,vu}$	Wärmeverlust der Stichleitungs-Unterverteilung des Warmwassernetzes
t_d	Warmwasser-Bereitstellungszeit (i. a. $t_d = 365 \text{ d}$)
ϑ_w	mittlere Warmwassertemperatur an der Entnahmestelle
ϑ_K	Kaltwassertemperatur

Als Zielwerte für eine energiesparende Bauplanung sind derzeit eine Heizwärme-Kennzahl von $EKZ_{w,F} = 50$ bis $60 \text{ kWh}/(\text{m}^2 \cdot \text{a})$ (Wärmeschutz-Verordnung BRD, Entwurf

1992) und ein Nutzungsgrad der Heizanlage von $\eta_h = 0,75$ bis $0,85$ (SIA 380/1 von 1988) im Gespräch.

R Umwelttechnik

Die Umwelttechnik ist die Anwendung technischer Lösungen zur Vermeidung der Bildung von Schadstoffen (*Primärmaßnahmen*) und zur Abreinigung gebildeter Schadstoffe

(*Sekundärmaßnahmen*). Emissionen entstehen durch nicht geschlossene Stoffströme; das Ziel umwelttechnischer Anwendungen ist deshalb die Bildung von *Stoffkreisläufen*.

Tabelle R-1. Gesetze, Verordnungen, Verwaltungsvorschriften, Normen.

Gesetz, Norm	Inhalt
Wasserhaushaltsgesetz (WHG, 23. 9. 1986)	Stand der Technik (§ 7a) Umgang mit wassergefährdenden Stoffen (§§ 19 g bis l)
Landwassergesetz (WG, z. B. B.-W., 1. 7. 1988)	Genehmigungspflicht für Abwasseranlagenbetrieb
Rahmenabwasser-VwV und Anhänge (z. B. Anhang 40, 1. 1. 1990)	Grenzwerte für Abwasserableitung Pflichten der Produktion DIN-Normen der Analytik
Indirekteinleiter-Verordnung (Bayern/Nordrhein-Westf.: VGS; Baden-Württ. ab 1. 10. 1990)	Schwellenwerte für die Genehmigungspflicht der Abwasserableitung
Abwasserherkunftsverordnung (3. 7. 1987)	Aufzählung der Produktionsbereiche mit gefährlichen Stoffen
Verordnung über Anlagen zum Umgang mit wassergefährdenden Stoffen (VAwS, z. Z. Entwurf)	Lagern, Abfüllen und Umschlagen von Chemikalien
Verordnung über Anlagen zum Herstellen, Behandeln und Verwenden wassergefährdender Stoffe (HBV-AnlagenV, z. Z. Entwurf)	Einsatz von Chemikalien in der Produktion
DIN 38 405 – D bis H	Abwasseranalytik
Bundesimmissionsschutzgesetz (BImSchG, 1990)	Regelung (allgemein) des – anlagenbezogenen, – produktbezogenen und – gebietbezogenen Immissionsschutzes.
1. Bundesimmissionsschutz-Verordnung (1. BImSchV)	Kleinf Feuerungsanlagen
2. Bundesimmissionsschutz-Verordnung (2. BImSchV)	Emissionsbegrenzung von leichtflüchtigen Halogenkohlenwasserstoffen
3. Bundesimmissionsschutz-Verordnung (3. BImSchV)	Schwefelgehalt von leichtem Heizöl und Dieselmotortreibstoff
4. Bundesimmissionsschutz-Verordnung (4. BImSchV)	Genehmigungsbedürftige Anlagen
5. Bundesimmissionsschutz-Verordnung (5. BImSchV)	Immissionsschutzbeauftragte

Tabelle R-1 (Fortsetzung)

Gesetz, Norm	Inhalt
6. Bundesimmissionsschutz-Verordnung (6. BImSchV)	Fachkunde und Zuverlässigkeit von Immissionsschutzbeauftragten
7. Bundesimmissionsschutz-Verordnung (7. BImSchV)	Auswurfbegrenzung von Holzstaub
9. Bundesimmissionsschutz-Verordnung (9. BImSchV)	Grundsätze des Genehmigungsverfahrens
10. Bundesimmissionsschutz-Verordnung (10. BImSchV)	Beschränkungen von PCB, PCT und VC* (Polychlorierte Biphenyle, -Terphenyle und Vinylchlorid)
11. Bundesimmissionsschutz-Verordnung (11. BImSchV)	Emissionserklärung
12. Bundesimmissionsschutz-Verordnung (12. BImSchV)	Störfallverordnung
13. Bundesimmissionsschutz-Verordnung (13. BImSchV)	Großfeuerungsanlagen (z. B. Kraftwerke)
17. Bundesimmissionsschutz-Verordnung (17. BImSchV)	Abfallverbrennungsanlagen
1. Allgemeine Verwaltungsvorschrift zum BImSchG (1. BImSchVwV)	Technische Anleitung zur Reinhaltung der Luft (TA Luft)
4. Allgemeine Verwaltungsvorschrift zum BImSchG (4. BImSchVwV)	Ermittlung von Immissionen in Belastungsgebieten
5. Allgemeine Verwaltungsvorschrift zum BImSchG (5. BImSchVwV)	Erstellung von Emissionskatastern in Belastungsgebieten
VDI-Richtlinie 2310	Maximale Immissionskonzentrationen (MIK-Werte) zum Schutz des Menschen
Abfallgesetz (AbfG 1986)	Definitionen, Grundsätze und allgemeine Pflichten der Bereiche <ul style="list-style-type: none"> – Abfalleinsammeln/-befördern – Abfallentsorgung – Reststoffverwertung – Abfallverbringung (Ausland) – Betriebsbeauftragter für Abfall – Rücknahmepflichten, Pfandsysteme
Landesabfallgesetze	Detailregelung der Andienungspflichten
Abfallbestimmungs-Verordnung (AbfBestV, 1990)	Benennung der besonders überwachungsbedürftigen Abfälle („Sondermüll“)
Reststoffbestimmungs-Verordnung (RestBestV, 1990)	Benennung der besonders überwachungsbedürftigen Reststoffe
Abfall- und Reststoffüberwachungs-Verordnung (AbfRestÜberV, 1990)	Detaillierte Regelung von <ul style="list-style-type: none"> – Einsammlung und Beförderung – Entsorgungs-Nachweis – Begleitscheinverfahren – Reststoff-Nachweis

Tabelle R-1 (Fortsetzung)

Gesetz, Norm	Inhalt
Verpackungs-Verordnung (VerpackV, 1991)	Pflichten der Wieder- oder Weiterverwertung von <ul style="list-style-type: none"> – Verkaufsverpackungen, – Transportverpackungen, – Umverpackungen
Altöl-Verordnung (AltölV, 1987)	Klassifizierung der Altöle in <ul style="list-style-type: none"> – rückgewinnbare Öle – verwertbare Öle – zu entsorgende Öle Vermischungsverbot, Pflichten für Rückstellproben/Analysen
Verordnung über das Verbot des Einsatzes von PCB, PCT und VC* (1989)	Stoffeinsatzverbote mit Regelung der Übergangsfristen
TA Abfall (2. Allgemeine Verwaltungsvorschrift zum AbfG, 1991)	Detailregelung der Abfallentsorgung, u. a. <ul style="list-style-type: none"> – Zuordnung der Abfälle zu Entsorgungsverfahren – Aufbauorganisation von Entsorgungsanlagen – Betriebsorganisation von Entsorgungsanlagen

R.1 Abwassertechnik

R.1.1 Entstehung von schadstoffbelastetem Abwasser

Die Oberflächenbehandlung (z. B. Galvanik, Härterei, Lackierbetrieb, mechanische Fertigung) besteht in der Regel aus einer Abfolge von Wirkbädern (Wirkschritte, z. B. Entfetten, Beizen, Entrosten, Phosphatieren, Brünieren, Metallisieren), zwischen denen Spülschritte angeordnet sind. Abwasser- und Schadstoffemission finden statt, sobald der Wirkstoff (Elektrolyt) das Wirkbad verläßt.

Abwasser- und Schadstoffemissionen entstehen durch Verwerfen und Ausschleppen des Wirkstoffes aus dem Wirkbad.

Das Wirkbad wird verworfen, weil Verunreinigungen seine Wirkung zu stark abschwächen. Ausgeschleppt wird der Elektrolyt durch Werkstücke und Werkstückträger. Die Ausschleppungen müssen an-

schließend von den Werkstücken abgespült werden.

Verwerfen des Wirkbades:
geringe Abwassermenge, hohe Schadstofffracht.

Ausschleppen von Wirkstoff:
hohe Abwassermenge, geringe Schadstoffmenge.

R.1.2 Verminderung der Ausschleppungen

Die Ausschleppungen werden von der Oberflächengeometrie der Werkstücke stark beeinflusst. Dennoch gibt es allgemein gültige Ansätze zur Ausschleppungsverminderung, die sich in chemische und mechanische Maßnahmen unterteilen (Tabelle R-2).

R.1.3 Standzeitverlängerung des Wirkbades

Je länger die Standzeit eines Wirkbades (weniger häufiges Verwerfen), desto geringer die emittierte Schadstofffracht.

Tabelle R-2. Maßnahmen zur Ausschleppungsverringerung.

Maßnahme	Praxisbeispiel
a) chemisch	
Oberflächenhydrophobierung	wäßrige Reinigung vor Härten, Lackieren, Prüfen
Verringerung der Wirkstoffkonzentration	Nachschärfen anstelle Wochenbedarfsansatz Senkung des Lösungsmittelanteils im Lacksystem
b) mechanisch	
Overspray vermindern	Drehscheibe hinter zu lackierendem Teil (Overspray-Recycling) Airless-Verfahren elektrostatisch lackieren
Anlagenbedienung und -steuerung	Abtropfzeiten, Warenbewegung, Teilepositionierung
Anlagentechnik	Abblasen, Abquetschen, Absprühen Kaskadenführung, Badkombinationen

Tabelle R-3. Maßnahmen zur Standzeitverlängerung.

Vorreinigungsverfahren	mehrstufige Spültechnik vorgeschaltete Reinigungsstufen, z. B. Entölen, mechanisches Reinigen Wirkbadkaskade
Nachreinigungsverfahren	Entschlammung Ionenaustausch Dialyse/Elektrodialyse Elektrolyse thermische Behandlung (Kristallisation, Eindampfen) Membranabtrennung (Ultra- und Mikrofiltration, Umkehrosmose)

Standzeitverlängerung durch

- Vorreinigung der Einschleppungen (Verunreinigung von außen);
- Nachreinigung der prozeßbedingten Verunreinigungen (Abbauprodukte).

Demzufolge untergliedern sich die Maßnahmen zur Standzeitverlängerung in Vorreinigung der Werkstücke und Nachreinigung der Wirkbadlösung (Tabelle R-3).

R.1.4 Spültechnik

Die Spültechnik hat die Aufgabe,

- ausgeschleppte Wirkstoffe vom Werkstück zu entfernen,
- die Reaktion der Werkstückoberfläche mit dem Wirkstoff abubrechen,
- Einschleppungen in das folgende Wirkbad zu unterbinden.

Gesetzesforderung ist die Einrichtung einer *mehrstufigen* Spültechnik (in der Regel drei Spülstufen), die als Voraussetzung für minimierten Abwasser- und Schadstoffanfall gilt. Als einzelne Spülstufe gilt auch eine Spritzeinrichtung über einem Spülbad (Spülbad + Spritzeinrichtung = zweistufiges System).

Unterschieden wird zwischen *Standspülen* (nicht durchflossen) und *Fließspülen* (kontinuierlicher Wasserdurchsatz \dot{Q}). Die Bilder R-1, R-2 und R-3 zeigen Beispiele verschiedener dreifacher Spülstufen nach dem Wirkbad.

Die Effektivität des Spülvorgangs wird ausgedrückt durch das Spülkriterium Sk , das als Quotient der Wirkbadkonzentration in

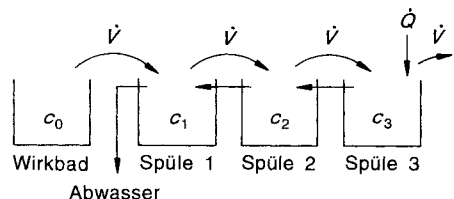


Bild R-1. Dreistufige Spültechnik als Dreifachkaskade.

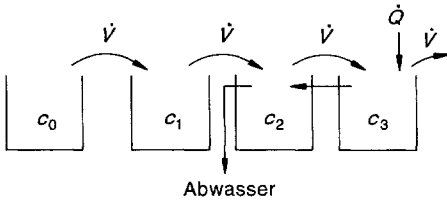


Bild R-2. Dreistufige Spültechnik als Standspüle und Zweifachkaskade.

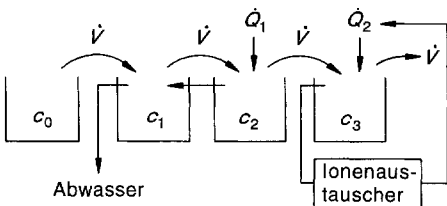


Bild R-3. Dreistufige Spültechnik als Vorspülkaskade und Fließspüle.

Gramm/Liter oder val/Liter und der Restkonzentration im letzten Spülbad n definiert ist:

$$Sk = c_0/c_n; \quad (R-1)$$

c_0 Elektrolytkonzentration im Wirkbad,

c_n Elektrolytkonzentration im n -ten Spülbad nach dem Wirkbad.

Spülkriterien liegen üblicherweise zwischen 10^3 und 10^7 .

Die Konzentration eines Standspülbades nach der Betriebszeit t beträgt

$$c_t = c_0 \left[1 - \left(\frac{V_B}{V_B + V} \right)^t \right]; \quad (R-2)$$

t Betriebsdauer in Stunden,

c_0 Elektrolytkonzentration im Wirkbad,

c_t Elektrolytkonzentration im Standspülbad nach t Stunden Betriebszeit,

V Verschleppungsvolumen, normiert auf 1 h,

V_B Volumen des Spülbades.

Tabelle R-4. Vergleich benötigter Spülwassermengen in Liter je Stunde für $c_0 = 10 \text{ val/l}$, $Sk = 10^4$, $\dot{V} = 10 \text{ l/h}$, Standspülwechsel in 8 h, Badvolumen $V_B = 1000 \text{ l}$.

Spülsystem	benötigte Spülwassermenge l/h	erzeugte Abwassermenge l/h
1 Fließspüle	100 000	100 000
1 Standspüle und 1 Fließspüle	7777	7777
Zweifachkaskade	1000	1000
1 Standspüle und Zweifachkaskade	402	402
Dreifachkaskade ¹⁾	215	215
Zweifachkaskade und 1 Fließspüle	50 + 4000 100 + 1000 200 + 250	114 116 204

¹⁾ Bei direkter Rückführung ins Wirkbad ist die Dreifachkaskade vorteilhaft, bei Kreislaufführung des Spülwassers (Ionenaustauscher) das System Vorspülkaskade und Schlußspüle.

Die Gleichgewichtskonzentrationen von Einzelfließspülen und Fließspülkaskaden betragen (Voraussetzung: $\dot{V} \ll \dot{Q}$)

$$c_n = c_0 (\dot{V}/\dot{Q})^n; \quad (R-3)$$

c_0 Elektrolytkonzentration im Wirkbad,

c_n Elektrolytkonzentration im n -ten Spülbad nach dem Wirkbad,

\dot{V} Ausschleppungsvolumen,

\dot{Q} Spülwasserdurchsatz.

Mit Hilfe dieser Formeln lassen sich vergleichende Betrachtungen des notwendigen Wassereinsatzes unterschiedlicher Spülsysteme durchführen und läßt sich der jeweils resultierende Abwasseranfall berechnen (Tabelle R-4).

Tabelle R-5. Ionenaustauscherharze.

Harztyp	funktionelle Austauschergruppe	Reaktion
stark saures Kationen-austauscherharz	Sulfonsäuregruppe ($-SO_3H$)	$Kation \leftrightarrow H^+$
schwach saures Kationen-austauscherharz	Carbonsäuregruppe ($-COOH$)	$Kation \leftrightarrow H^+$
schwach alkalisches Anionen-austauscherharz	tertiäre Ammoniumgruppe ($-R_2NHOH$)	$Anion \leftrightarrow OH^-$
stark alkalisches Anionen-austauscherharz	quartäre Ammoniumgruppe ($-R_3NOH$)	$Anion \leftrightarrow OH^-$

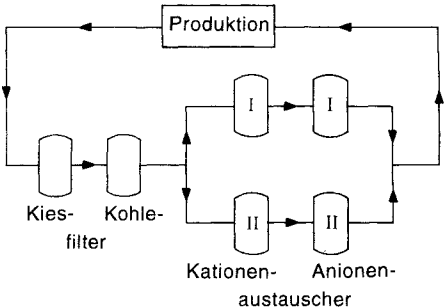


Bild R-4. Ionenaustauscheranlage in Straßenschaltung.

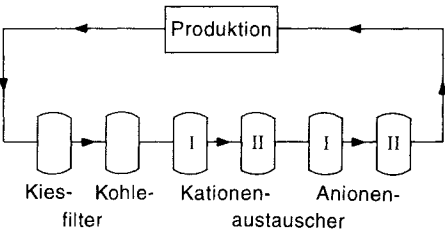


Bild R-5. Ionenaustauscheranlage in Reihenschaltung.

R.1.5 Kreislaufführung des Spülwassers (Ionenaustauscher)

Ionenaustauscher sind organische Polymerharze mit funktionellen Gruppen.

Die Vollentsalzung des Wassers geschieht in hintereinandergeschalteten Kationen- und Anionenaustauscherharzen (Tabelle R-5). Voraussetzung für den sinnvollen Einsatz von Ionenaustauschern ist ein geringer Salzgehalt (= Elektrolytgehalt) im kreislaufgeführten Wasser. Es gibt unterschiedliche verfahrenstechnische Schaltungsmöglichkeiten der Ionenaustauscheranlagen (Straßen- und Reihenschaltung, Bilder R-4 und R-5).

Abwasser (Regenerat, Eluat) entsteht bei der Regeneration der beladenen Harze. Kationenharze werden mit Säure (5%), Anionenharze mit Lauge (5%) regeneriert.

Je 1 val Salz Beladung auf die Austauscheranlage entstehen etwa 14 l Abwasser bei der Regeneration.

R.1.6 Abwasseraufbereitung (-behandlung)

Der Grundsatz lautet: Unnötige Mischungen vermeiden.

Die Verfahrensstufen (Bild R-6) sind

- Cyanidoxidation,
- Nitritoxidation oder -reduktion,
- Chromatreduktion,
- Neutralisation,
- Flockung,
- Sedimentation,
- Schlamm entwässerung,
- Schlußfiltration.

Probleme entstehen

- durch Bildung von (an Aktivkohle adsorbierbaren) Halogenkohlenwasserstoffen [AOX] bei der Oxidation mit Bleichlauge (NaOCl),
- bei der Entsorgung des anfallenden schwermetallhaltigen Galvanikschlammes (Sondermüll, Abschnitt R-3).

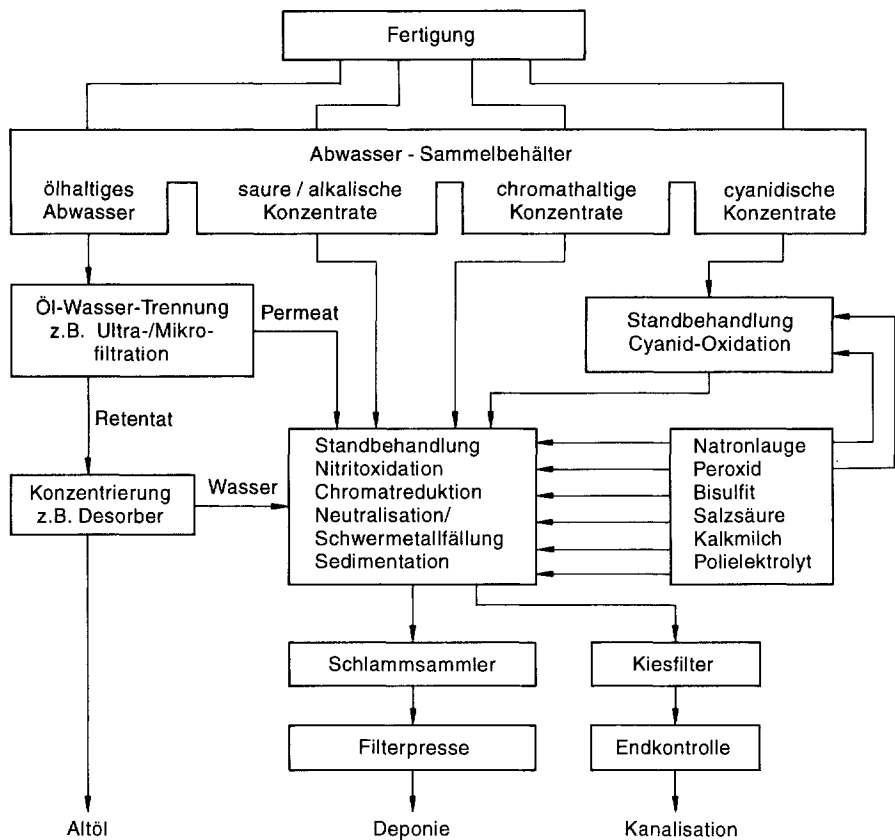


Bild R-6. Blockschema einer Abwasseraufbereitungsanlage.

R.2 Reinhaltung der Luft

Tabelle R-6. Begriffserläuterungen.

Luftverunreinigung	alle Stoffe, die die natürliche Zusammensetzung der Luft verändern
Emission	an die Umwelt abgegebene Luftverunreinigung
Immission	die Einwirkung der Luftverunreinigungen auf die Umwelt
Transmission	Ausbreitung der Luftverunreinigung (zwischen Emissionsquelle und Immissionseinwirkung)

Tabelle R-6 (Fortsetzung)

Smog	hohe Immissionskonzentrationen von Schadstoffen in Verbindung mit Nebel (Kombination von „smoke“ und „fog“)
Abgas	an die Umwelt abgegebenes Gas
Rauchgas	Abgas von Feuerungsanlagen
Abluft	Abgas, dessen Trägergas Luft ist

R.2.1 Entstehung von Luftverunreinigungen

Die natürliche Zusammensetzung der Luft ist

- Stickstoff (N_2) 78,10 %,
- Sauerstoff (O_2) 20,93 %
- Argon (Ar) 0,93 %
- Kohlendioxid (CO_2) 0,035 %,
- Spuren
 - andere Edelgase
 - Methan
 - Wasserstoff.

Hauptquellen der Luftverunreinigungen sind Energieerzeugung (Kraftwerke), Hausheizungen, Verkehr und Industrie. Hauptsächlich werden folgende Luftverunreinigungen emittiert:

- Kohlendioxid (CO_2),
- Stickoxide (NO und NO_2),
- Schwefeldioxid (SO_2),
- Kohlenwasserstoffe ($C_m H_n$),
- Kohlenmonoxid (CO),
- Ruß und Staub.

R.2.2 Auswirkungen von Luftverunreinigungen

Die hauptsächlichen Auswirkungen der Luftverunreinigungen sind Tabelle R-7 zu entnehmen. Bei der Beurteilung der Auswirkungen von Luftverunreinigungen ist stets die Transmission der Stoffe und ihre chemische Umwandlung zu anderen Produkten mit zu betrachten.

R.2.3 Primärmaßnahmen der Schadstoffbegrenzung

- Schwefeldioxid → Entschwefelung der Brennstoffe
- Stickoxide → mehrstufige Verbrennung
→ Abgasrückführung
- Kohlenwasserstoffe, Ruß, Kohlenmonoxid
→ vollständige Verbrennung, dabei
- ausreichender Luftüberschuß ($\lambda > 1$),
 - hohe Verbrennungstemperaturen,
 - lange Verweilzeit des Brennstoffes in Zonen hoher Temperatur,
 - gute Durchmischung von Luft und Brennstoff.

Tabelle R-7. Auswirkungen von Luftverunreinigungen.

Schadensart	Verursacher (Leitstoff)	Auswirkungen
Ozonloch	Fluorchlor-kohlenwasserstoffe (FCKW)	Zerstörung der Ozonschicht in der Stratosphäre: härtere Strahlung gelangt auf Erdoberfläche
hoher Ozongehalt in der Atemluft	Stickoxide und Licht	Herz-/Kreislaufbeschwerden
Treibhauseffekt	IR-aktive Gase (z. B. CO_2 , CH_4)	Erwärmung der Erdoberfläche: Klimastörungen
Waldsterben	vermutete Synergie aller Luftverunreinigungen	Änderung von Klima, Flora und Fauna
Smog	Nebel und austausch-arme Wetterlagen	Erkrankung von Atemwegen und -organen, Herz-/Kreislaufschwäche
fotochemischer Smog	Stickoxide, Licht und Kohlenwasserstoffe	Erkrankung von Atemwegen und -organen, Herz-/Kreislaufschwäche
saurer Regen	Stickoxide, Schwefeldioxid	Schädigung der Pflanzenwurzeln, Korrosion an Metallen/Baustoffen

R.2.4 Sekundärmaßnahmen der Schadstoffbegrenzung

Unter Sekundärmaßnahmen sind Abreinigungsverfahren zu verstehen.

Ruß und Staub

→ Staubabscheidung
Maßgebend für die Abscheidefähigkeit eines Staubes ist die Sinkgeschwindigkeit v_s der Partikeln aus dem Gasstrom, die sich für das

Modell kugelförmiger Partikeln wie folgt ergibt:

$$v_s = \frac{d^2 (\rho_p - \rho_g) g}{18 \eta_g}; \quad (\text{R-4})$$

- v_s Sinkgeschwindigkeit der Staubpartikeln,
 d Staubpartikeldurchmesser,
 ρ_p Dichte der Staubpartikeln,
 ρ_g Dichte des Abgases,
 g Erdbeschleunigung,
 η_g Viskosität des Abgases.

Alle Faktoren, die die Sinkgeschwindigkeit erhöhen, tragen zur Verbesserung der Abscheideleistung bei:

- Vergrößerung von Dichte und Partikeldurchmesser im Naßabscheider
 - Wirbelwäscher,
 - Venturiwäscher,
 - Rotationswäscher;
- Erhöhung der Beschleunigung im
 - Elektrofilter,
 - Zyklon.

Elektrofilter und Zyklone sind typische Vertreter der *Querstromfiltration* (Partikeln werden quer zur Gasströmung abgeschieden); Tuchfilter und Filterkerzen, die eine Sekundärfilterschicht durch abgeschiedene Staubteilchen ausbilden, sind typische Beispiele für die *Hauptstromfiltration* (Partikeln- und Gasbewegung in gleicher Richtung, Bild R-7).

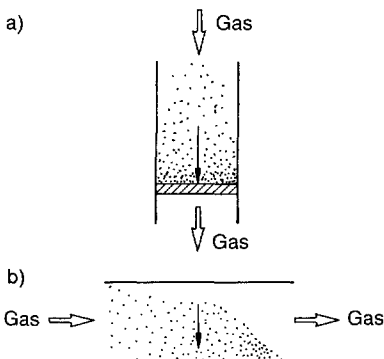


Bild R-7. Hauptstromfiltration (a) und Querstromfiltration (b).

Schwefeldioxid

- (Rauchgas-)Entschwefelung
Trockenes, halbtrockenes und nasses Verfahren. Unter Zugabe von Kalk (Kalkmilch) und mit Hilfe von Luftsauerstoff wird Gips gebildet ($\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$; Abfallproblematik).

Stickoxide

- Oxidationsverfahren (selten angewendet)
Oxidation der Stickoxide zu Stickstoffdioxid mit Hilfe von Ozon und Abreinigung durch Bildung von Salpetersäure.
- Reduktionsverfahren (katalytisch: SCR-Verfahren; nicht katalytisch: SNCR-Verfahren¹⁾).
Durch Eindüsung von Ammoniak werden Stickoxide zu Stickstoff reduziert, was einer Rückbildung des Ausgangsstoffes (Luft-N_2) entspricht.

Kohlenwasserstoffe

- Nachverbrennung (thermisch: TNV; katalytisch: KNV).
Nachgeschaltete Verbrennung bei hohen Temperaturen, Einsatz von Katalysatoren und allen Bedingungen vollständiger Verbrennung.
- Adsorption
Aktivkohlefiltration. Probleme der anschließenden Regeneration der beladenen Aktivkohle: Dampf gelangt in das Abwasser, Heißgas erfordert Energieaufwand. Bei Verwerfen der beladenen Aktivkohle entsteht Abfallproblematik.
- Kondensation
„Ausfrieren“ der Kohlenwasserstoffe in Kältefallen. Energieaufwendig, für einzuhaltende Grenzwerte nicht ausreichend, nur für schwerer flüchtige Kohlenwasserstoffe. Wird in der Regel als Abreinigungsvorstufe benutzt.
- Membrantrennung und biologische Abreinigung
Verfahren z. T. in der Markteinführung; Einzelfallbetrachtung des Einsatzes notwendig.

¹⁾ SCR: selective catalytic reduction, SNCR: selective non catalytic reduction.

Kfz-Katalysator

Der Dreizeige-Katalysator dient zur Um-
setzung der drei Schadstoffe Kohlenmon-
oxid, Kohlenwasserstoffe und Stickoxide.

- Katalysatoraufbau
Platin (Oxidationsprozesse) und Rhodium (Reduktionsvorgänge) als Katalysator-
metalle, die auf Träger Aluminiumoxid („washcoat“, hohe Oberfläche) aufgebracht
sind, das auf Keramikkörper oder Metall-
träger aufgetragen wird.
- Betriebsbedingungen
Der optimale Temperaturbereich liegt zwi-
schen 300 und 850 °C. Luftregelung mittels
Lambda-Sonde auf λ → 1 (stöchiometri-
scher Lufteinsatz, kein Luftüberschuß).
- Reaktionen
 - Kohlenwasserstoffe und Kohlenmonoxid
oxidieren an Platin zu Kohlendioxid
(= Endprodukt vollständiger Verbren-
nung).
 - Stickoxide (überwiegend NO) werden an
Rhodium zu Stickstoff reduziert.
 - Unerwünschte Nebenreaktionen (Luft-
überschuß, Luftmangel, ungünstige Tem-
peraturen) führen zur Bildung von
Schwefeltrioxid, Schwefelwasserstoff und
Ammoniak.

Lambda-Sonde

Notwendiges Aggregat, um Luftüberschuß-
zahl gegen 1 zu regeln (Voraussetzung für
Funktion des Dreizeige-Katalysators).

- Aufbau
Fingerhutförmig angeordnete Zirkon-
dioxid-Membran, auf deren Innenseite sich
Luft befindet. An der Außenseite werden
Abgase vorbeigeführt. Beide Seiten der
Membran sind mit einem Platingitter ver-
sehen, das als Ableitungselektrode dient.
- Meßprinzip
Potentiometrisches Meßprinzip. In Abhän-
gigkeit vom jeweiligen Sauerstoffpartial-
druck (Innen- und Außenseite der Mem-
bran) bilden sich – bedingt durch Diffusion
von Sauerstoff-Ionen in Fehlstellen des
Zirkondioxidgitters – unterschiedliche Po-
tentiale aus. Die Potentialdifferenz kann als

Membranspannung *U* abgegriffen werden
(Nernstsches Gesetz). Zur Bildung der
Sauerstoffionen werden Temperaturen
> 400 °C benötigt (Betriebstemperatur der
Sonde).

$$U = \frac{R_m T}{z F} \ln \frac{p_{O_2} (Luft)}{p_{O_2} (Abgas)} ; \tag{R-5}$$

- R_m* molare Gaskonstante
[*R_m* = 8,3144 J/(K · mol)],
- T* absolute Temperatur,
- z* Anzahl Elementarladungen,
- F* Faraday-Konstante
(*F* = 96 486 A · s/mol),
- p_{O2}* Sauerstoffpartialdruck.

- Meß- und Regeltechnik
Je geringer der Sauerstoffanteil im Abgas,
desto höher die abgegriffene Spannung. Die
Sonde regelt die Begrenzung der Luftzufuhr
so weit, bis steiler Spannungsanstieg ein-
tritt. Die Regelung erfolgt also nicht durch
exakte Sauerstoffmessung, sondern das
Luft-Kraftstoff-Verhältnis wird so geregelt,
daß der Sauerstoffanteil an der Abgasseite
der Sonde gegen null geht (steiler Span-
nungsanstieg).

R.3 Abfallwirtschaft

Tabelle R-8. Begriffserläuterungen.

Abfall	bewegliche Sache, derer sich der Besitzer entledigen will oder deren geordnete Entsorgung zur Wahrung des Wohls der Allgemeinheit geboten ist
Reststoff	bewegliche Sache, derer sich der Besitzer entledigen will und die einer stofflichen oder sonstigen Verwertung zugeführt wird
besonders überwachungs- bedürftiger Abfall/Rest- stoff („Sonder- abfall“)	Abfälle/Reststoffe, die aufgrund ihrer Eigenschaften ein besonderes Gefahrenpotential aufweisen (z. B. giftig, erbgut- schädigend)
Entsorgungs- anlage	Anlage zum Verwerten, Be- handeln, Lagern und Entsorgen von Abfällen/Reststoffen

R.3.1 Entstehung von Abfällen

Abfälle entstehen durch Vermischung und daraus folgender Feinverteilung von Wertstoffen.

Abfalldeponie: Wertstoffe in feinverteilter Form.
 Rohstofflager: Wertstoffe in konzentrierter Form.

R.3.2 Grundsatz der Abfallwirtschaft

Der Grundsatz des Umgangs mit Abfall ist allgemeingültig im Abfallgesetz definiert:

Vermeiden vor Verwerten vor Entsorgen.

Voraussetzung ist die Einbindung dieses Aspekts in die Fertigungsplanung, durch Schaffen eines Versorgungs- und Entsorgungskonzeptes, das die notwendigen Vorbereitungen zur Abfallvermeidung und -verwertung enthält.

Abfallvermeidung kann durch gezielte Einwirkung auf zwei Planungsbereiche unterstützt werden:

Abfallvermeidung durch

- Vermeidung des Entstehens von Reststoffen (*Primärmaßnahmen*),
- Schaffen von Stoffkreisläufen angefallener Reststoffe (*Sekundärmaßnahmen*).

R.3.3 Primärmaßnahmen der Abfallvermeidung

Ersatz abfallproblematischer Einsatzstoffe (Beispiele)

- Umstellung der CKW-Reinigung (Chlorkohlenwasserstoffe) auf wässrige Reinigungssysteme,
- Asbestersatz in der Baustoffindustrie,
- Ersatz cyanidischer Wirkbäder in der Oberflächenbehandlung,
- Umstellung cadmium- und bleichromathaltiger Lacke auf organische Pigmente,
- Ersatz von Quecksilber und Cadmium bei der Batterieherstellung.

Umstellung des Fertigungsverfahrens und der Produkte (Beispiele)

- Umstellung lösemittelhaltiger Lacke auf Wasserlacksysteme,
- Erhöhung des Auftragwirkungsgrades,
- Einsatz von NC-Bearbeitungsautomaten und CNC-Fertigungs-„poolcentern“ mit optimierter Materialausnutzung,
- verringerter Materialeinsatz (Hausgeräte, Verpackung),
- längere Produktlebensdauer.

R.3.4 Sekundärmaßnahmen der Abfallvermeidung

Die Weiterverwertung von Reststoffen (Schaffung von Stoffkreisläufen) setzt in der Regel unvermischte Reststoffe voraus.

Sortierung anfallender Abfallgemische

Das Sortieren des Mischabfalls dient der Auftrennung eines Stoffgemisches in Einzelfraktionen mit dem Ziel der weiteren stofflichen Nutzung. Die einzelnen Trennverfahren unterscheiden sich dabei weniger im Prinzip der Auftrennung als in der Reihenfolge der einzelnen Trennschritte. Bild R-8 zeigt den Aufbau eines Abfalltrennverfahrens.

Die finanziellen Aufwendungen für Investition und Betrieb der vorhandenen Anlagen sind bislang schwer zu amortisieren. Weitere Probleme der Abfallsortierung entstehen durch fehlende Kapazitäten zur Aufnahme der abgetrennten Fraktionen.

Nachträgliche Sortierung des angefallenen Mischabfalls ist die ungünstigere Alternative der Abfallverwertung.

Getrennte Sammlung und Verwertung von Abfällen

Die getrennte Erfassung der unvermischten Reststoffe ist Voraussetzung für ihre sinnvolle Verwertung.

Besonders effizient ist eine Rückführung der Fertigungsreststoffe in denselben Prozeß (Abfallvermeidung und Einsparung von Reststoffen).

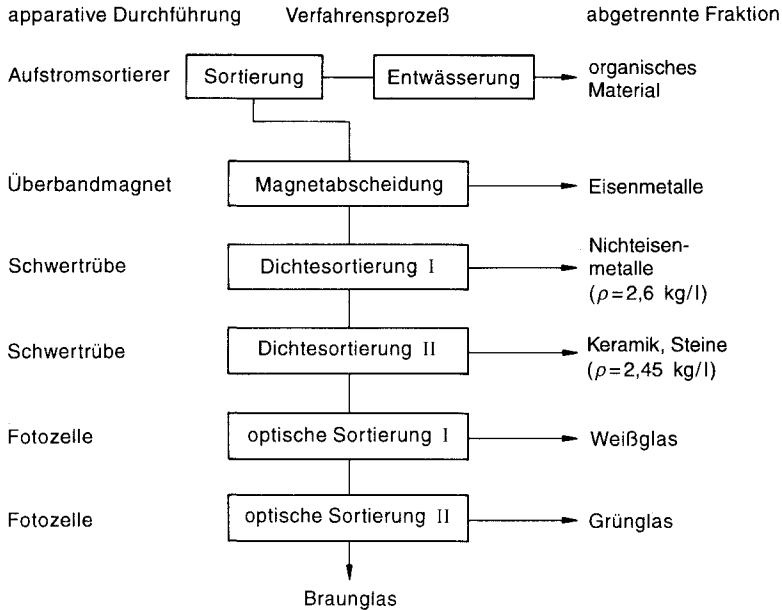


Bild R-8. Trennverfahren für Mischabfall.

Recycling während des Produktgebrauchs wird vornehmlich im Maschinenbau praktiziert. Die Austauscherzeugnis-Fertigung setzt sich zusammen aus den Fertigungsschritten

- Demontage,
- Reinigung,
- Prüfung/Sortierung,
- Aufarbeitung und
- Wiedermontage.

Altstoffrecycling nach Produktgebrauch ist vor allem beim Schrottreycling bekannt. So werden Kraftfahrzeuge in einer Hammerrmühle (Shredder) zerkleinert und anschließend einer Stofftrennung mit Hilfe von Magnetabscheidern, Windsichtern und anderen Dichtentrennanlagen unterzogen. Zur Zeit wird allerdings nur der Metallanteil zurückgewonnen.

S Atomphysik

S.1 Atombau und Spektren

Die Untersuchung von optischen *Spektren* liefert Informationen über den Aufbau von Atomen und Molekülen. Diese Teilchen können mit elektromagnetischer Strahlung in Wechselwirkung treten (Emission und Absorption).

S.2 Systematik des Atombaus

S.2.1 Aufbau der Atome

Ein Atom besteht aus dem *Atomkern* und der *Atomhülle*. Die Atomhülle besteht meist aus *Elektronen* und der Atomkern, sehr einfach gesagt, aus den *Nukleonen*: *Protonen* und *Neutronen*. In Tabelle S-1 sind die entsprechenden Größen zusammengestellt.

Ein Atom wird folgendermaßen gekennzeichnet:

$\frac{A}{Z} X$
X Elementsymbol
A Massenzahl (Anzahl der Protonen und Neutronen; $A = Z + N$)
Z Ordnungszahl (Anzahl der Protonen im Kern = Anzahl der Elektronen in der Hülle = Kernladungszahl; $Z = A - N$)

Beispiele sind $^{14}_7\text{N}$; $^{238}_{92}\text{U}$, Z kann auch weggelassen werden.

Tabelle S-2 zeigt die Unterschiede verschiedener Kernarten (*Nuklide*).

Tabelle S-1. Eigenschaften des Atomkerns und der Atomhülle.

Atom		Atomkern		Atomhülle
		Proton p	Neutron n	Elektron e
Ladung Q		$1,6021 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	0	$-1,6021 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Ruhemasse		$1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ($1836 m_{\text{el}}$)	$1,675 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ($1839 m_{\text{el}}$)	$9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ (m_{el})
Radius	$r_A \approx 0,5 \sqrt[3]{\frac{m_A}{\rho}}$; m_A Atommasse, ρ Dichte	$r_K \approx 1,4 \cdot 10^{-15} \sqrt[3]{A}$ in m; A Massenzahl (Nukleonenzahl) des Atomkerns	$r_K \approx 1,4 \cdot 10^{-15} \sqrt[3]{A}$ in m; A Massenzahl (Nukleonenzahl) des Atomkerns	$r_e = \frac{e^2}{4\pi m_e \epsilon_0 c^2}$ $= \frac{\mu_0 e^2}{4\pi m_e}$ $= 2,818 \cdot 10^{-15} \text{ m};$ $e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C},$ $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg},$ $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ H/m},$ $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m},$ $c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

Tabelle S-2. Isotope, Isobare und Isotone.

	isotopes Nuklid	isobares Nuklid	isotones Nuklid
Ordnungszahl Z (Protonenzahl; Zahl der Elektronen)	gleich	ungleich	ungleich
Massenzahl A (Anzahl der Nukleonen: Protonen und Neutronen; $A = Z + N$)	ungleich	gleich	ungleich
Neutronen- zahl N ($N = A - Z$)	ungleich	ungleich	gleich
Beispiele	$^{234}_{92}\text{U}, ^{235}_{92}\text{U},$ $^{238}_{92}\text{U}$	$^{204}_{82}\text{Pb},$ $^{204}_{80}\text{Hg}$	$^{39}_{19}\text{K},$ $^{40}_{20}\text{Ca}$

$$1 \text{ kg} = 6,0221367 \cdot 10^{26} u. \quad (\text{S-3})$$

Für die Massen m_A eines Atoms (bzw. Moleküls) ergibt sich

$$m_A = A_r \cdot u = A_r \cdot 1,66056 \cdot 10^{-27} \text{ kg}; \quad (\text{S-4})$$

A_r relative Atommasse.

Die Anzahl der Atome N eines Körpers der Masse m läßt sich aus der Masse eines Atoms m_A berechnen:

$$N = \frac{m}{m_A} = \frac{m}{A_r \cdot u} = \frac{m}{A_r \cdot 1,66056 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}; \quad (\text{S-5})$$

A_r relative Atommasse eines Stoffes,

m Masse des Körpers,

m_A Masse eines Atoms.

S.2.2 Atommasse und Anzahl der Atome

Die Masse von Atomen und Molekülen wird in *atomaren Masseneinheiten* u gemessen. Die Definition lautet

atomare Masseneinheit $u = 1/12$ der Masse des Kohlenstoffatoms ^{12}C .

Es gelten folgende Zusammenhänge:

$$1 u = 1 (\text{g/mol}) / N_A, \quad \text{wobei} \\ N_A = 6,0221367 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \quad (\text{S-1})$$

$$1 u = 1/12 m_{^{12}\text{C}} = 1,66056 \cdot 10^{-27} \text{ kg}. \quad (\text{S-2})$$

S.3 Quantentheorie

Für die Erklärung der Phänomene in der Mikrophysik werden die Erkenntnisse der Quantentheorie benötigt. Es sind dies (Übersicht S-1):

- Quantisierung der Energie,
- Energiequant (Photon) hat eine Masse und einen Impuls,
- Dualismus Teilchen – Welle (jedes Teilchen hat auch Wellencharakter, und jeder Welle kann ein Teilchen zugeordnet werden).

Übersicht S-1. Gesetze der Quantentheorie.

Quantisierung der Energie $E = h \nu$; h Plancks Wirkungsquantum ν Frequenz der Strahlung	Masse als Energieform $E = m c^2$; m Masse, c Lichtgeschwindigkeit
Photon (Energiequant)	
Masse $m_{\text{ph}} = \frac{h \nu}{c^2} = \frac{h}{c \lambda}$	Impuls $p_{\text{ph}} = \frac{h \nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$

Photonen bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit. Die Ruhemasse ist 0.

*Übersicht S-1 (Fortsetzung)***Compton-Effekt**

Streuung eines Photons an einem Elektron

Energieerhaltungssatz

$$h\nu + m_0 c^2 = h\nu' + m c^2$$

Impulserhaltung

– x-Richtung

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \vartheta + m v \cos \varphi$$

– y-Richtung

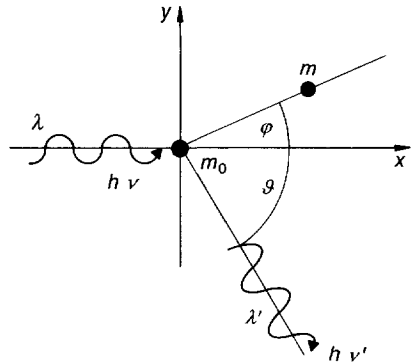
$$0 = \frac{h\nu'}{c} \sin \vartheta - m v \sin \varphi$$

Verschiebung der Wellenlänge

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \vartheta)$$

Compton-Wellenlänge

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c} = 2,426 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

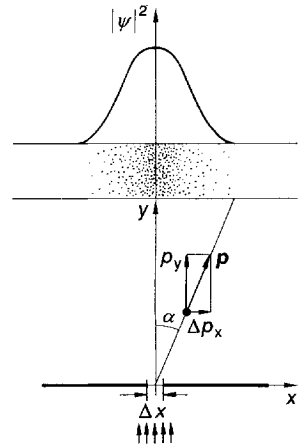
**Dualismus Teilchen – Welle**

Energierahlung hat Teilchen- und Wellencharakter.

Wellenlängen sind in Tabelle L-1 angegeben.

Unschärfe-RelationOrt x und Impuls p eines Teilchens können nicht beliebig genau ermittelt werden.

$$\Delta x \Delta p_x \geq h$$



Übersicht S-1 (Fortsetzung)

Schrödinger-Gleichung

Ein Teilchen entspricht einer Welle Ψ mit dem Wellenvektor $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$ und einer Kreisfrequenz ω :

$$\Psi(x, t) = a e^{(jk_x x - j\omega t)} = a e^{j(p_x x - Et)};$$

$$E = \hbar \omega, p_x = \hbar k_x, j = \sqrt{-1}.$$

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens am Ort (x, y, z) im Volumen dV ist $|\Psi(x, y, z)|^2 dV$.

Bestimmung von Ψ durch die Schrödinger-Gleichung

– zeitabhängig

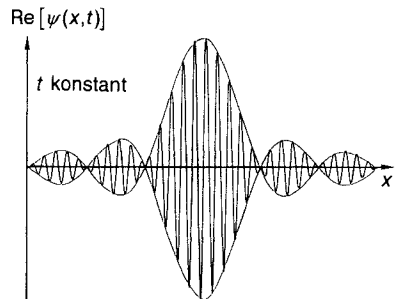
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) \right] \Psi(r, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(r, t);$$

$V(r)$ potentielle Energie,

Δ Laplace-Operator

– zeitunabhängig

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) \right] \Psi(r) = E \Psi(r)$$



c	Lichtgeschwindigkeit ($c = 2,99792458 \cdot 10^8$ m/s)
h	Plancksches Wirkungsquantum ($h = 6,6260755 \cdot 10^{-34}$ J · s)
\hbar	$h/2\pi$
k	Wellenzahl
m	Masse
m_0	Ruhemasse
p	Impuls
$V(r)$	potentielle Energie
v	Geschwindigkeit
Δx	Spaltbreite
λ	Wellenlänge
$\Psi(x, t)$	Wellenfunktion
Δ	Laplace-Operator $\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$

S.4 Atomhülle

S.4.1 Atommodelle

Zur Erklärung wurden folgende Modelle verwendet:

1. Rutherford

Die positive Ladung und fast die gesamte Masse des Atoms ist in einem Atomkern (Durchmesser etwa 10^{-15} m) konzentriert. Er ist von einer *Elektronenhülle* umgeben (Durchmesser etwa 10^{-10} m). Die Elektronen

kreisen dabei um den Atomkern wie Planeten um die Sonne. Die Zentrifugalkraft der Kreisbewegung ist gleich der Coulombschen Anziehungskraft zwischen den positiven Protonen des Atomkerns und den negativen Elektronen der Hülle.

Dieses Modell kann aber den Atombau nicht erklären: Die um den Kern umlaufenden Elektronen stellen eine beschleunigte Ladung dar, die Energie abstrahlt. Damit verlieren die Elektronen Energie und müßten mit der Zeit in den Kern fallen.

2. Bohrsche Postulate

Die drei Bohrschen Postulate lauten:

1. Elektronen können nur auf ganz bestimmten (diskreten) Bahnen umlaufen.
2. Die diskreten Bahnen werden durch die Quantelung des Bahndrehimpulses des Elektrons bestimmt.
3. Die Bewegung auf diesen Bahnen erfolgt strahlungslos. Der Übergang von einer Bahn zur anderen erfolgt sprunghaft unter Aussendung eines Strahlungsquants. Die Übergangsfrequenzen sind typisch für die Atomart.

Mit diesen Postulaten können Bahngeschwindigkeit, Kreisfrequenz, Bahnradius und Energieniveaus der Elektronen berechnet werden (Übersicht S-2).

S.4.2 Wasserstoff-Atommodell

Die Berechnungen aus dem Bohrschen Atommodell sind für das Wasserstoffatom besonders einfach, weil nur ein Elektron den Kern umkreist. Die Ergebnisse sind in Übersicht S-2 zusammengestellt.

Übersicht S-2. Wasserstoff-Atommodell.

$$\text{Bahnradius } r_n = \frac{n^2 \hbar^2 4\pi \epsilon_0}{e^2 m_0} = n^2 \cdot 5,29177 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

$$\text{Kreisfrequenz } \omega_n = \frac{e^4 m_0}{(4\pi \epsilon_0)^2 \hbar^3 n^3} = \frac{4,13413 \cdot 10^{16}}{n^3} \text{ s}^{-1}$$

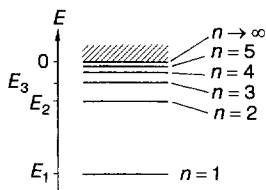
$$\text{Bahngeschwindigkeit } v_n = \frac{e^2}{2n\hbar\epsilon_0} = \frac{2,18769 \cdot 10^6}{n} \text{ m/s}$$

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
r_n 10^{-11} m	5,29177	21,16709	47,62595	84,66836	132,2943	190,5038
ω_n 10^{16} s^{-1}	4,13413	0,516766	0,153116	0,064596	0,033073	0,019139
v_n 10^6 m/s	2,18769	1,09385	0,72923	0,54692	0,43754	0,36462

$$\text{Bohrscher Radius } r_1 = 5,29177 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

$$\text{Gesamtenergie } E = -\frac{Z^2 e^4 m_0}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Termschema:



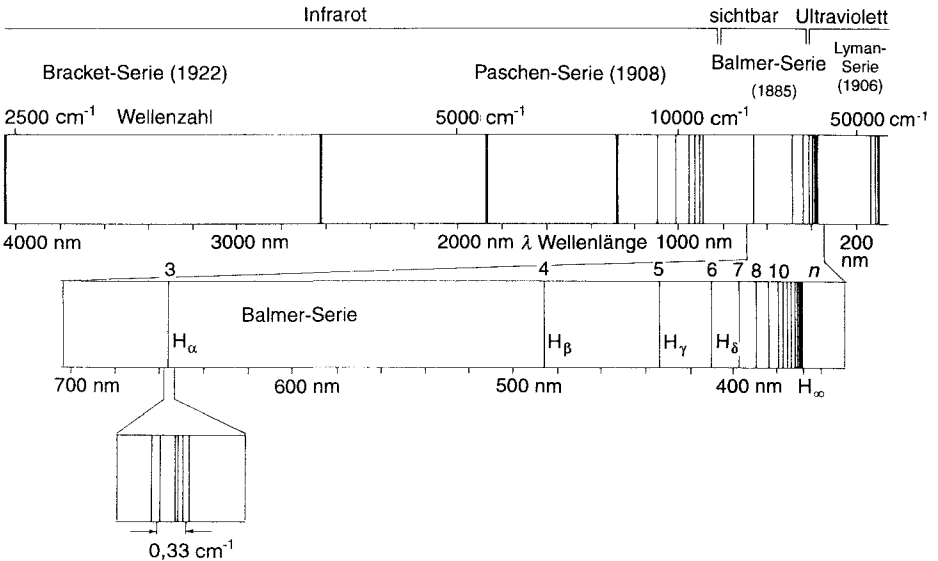
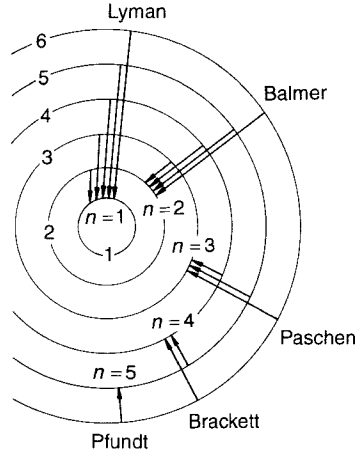
Übersicht S-2 (Fortsetzung)

Wellenzahl $\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{E}{hc} = R_H \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n' < n$

Frequenz $f = \frac{c}{\lambda} = c R_H \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad R_H \text{ Rydberg-Konstante}$

Serien des Emissionsspektrums

	n'	n	Wellenlänge λ nm
Lyman-Serie (ultraviolett)	1	2	122
		3	103
		4	97
		5	95
Balmer-Serie (sichtbar)	2	3	656
		4	486
		5	434
		6	410
		7	397
Paschen-Serie (infrarot)	3	4	1875
		5	1282
		6	1094
		7	1005
Brackett-Serie (infrarot)	4	5	4052
		6	2626
		7	2166
Pfundt-Serie (infrarot)	5	6	7460
		7	4654



Übersicht S-2 (Fortsetzung)

c	Lichtgeschwindigkeit ($c = 2,99792458 \cdot 10^8$ m/s)
e	Elementarladung ($e = 1,60217733 \cdot 10^{-19}$ A · s)
h	Plancksches Wirkungsquantum ($h = 6,6260755 \cdot 10^{-34}$ J · s)
\hbar	Plancksches Drehimpulsquantum ($\hbar = h/2\pi = 1,05457267 \cdot 10^{-34}$ J · s)
m_0	Ruhemasse des Elektrons ($m_0 = 9,1093897 \cdot 10^{-31}$ kg)
n	Hauptquantenzahl, Schalennummer
R_H	Rydberg-Konstante ($R_H = 1,09677581 \cdot 10^7$ m ⁻¹)
r_n	Radius der n -ten Bahn
v_n	Geschwindigkeit des Elektrons auf der n -ten Bahn
Z	Kernladungszahl
ϵ_0	elektrische Feldkonstante [$\epsilon_0 = 8,5418781762 \cdot 10^{-12}$ (A · s)/V · m]
λ	Wellenlänge
$\tilde{\nu}$	Wellenzahl ($\tilde{\nu} = 1/\lambda$)
ω_n	Kreisfrequenz des Elektrons auf der n -ten Bahn

S.4.3 Quantenzahlen

Die Quantenzahlen gestatten, die umlaufenden Elektronen und die Eigenrotation des Kerns genau zu kennzeichnen. In Übersicht S-3 sind die Quantenzahlen und ihre Beziehungen untereinander zusammengestellt.

Für den Aufbau der Elektronenhülle sind folgende Quantenzahlen maßgebend:

- Hauptquantenzahl n (beschreibt die Zahl der Kreisbahn),
- Bahndrehimpulsquantenzahl $\ell = 0, 1, 2, \dots, n - 1$,
- magnetische Quantenzahl
 $m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell$
- magnetische Quantenzahl des Elektronenspins $m_s = \pm 1/2$.

Folgende zwei Gesetzmäßigkeiten sind dabei zu beachten:

1. Elektronen nehmen die geringstmögliche Energie ein.
2. Zwei Elektronen eines Atoms müssen sich in mindestens einer Quantenzahl unterscheiden (*Pauli-Prinzip*).

Für die Elektronenanordnung (*Elektronen-Konfiguration*) gilt folgende Symbolik:

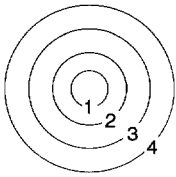
$$(\text{Hauptquantenzahl}) \cdot (\text{Bahndrehimpuls})^{(\text{Anzahl der Elektronen})}$$

Die maximal mögliche Anzahl z der Elektronen auf einer Schale beträgt

$$z = 2n^2. \quad (\text{S-6})$$

In Übersicht S-4 sind Elektronen-Konfiguration und das Energiediagramm zu sehen.

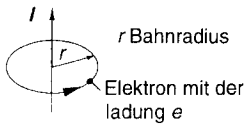
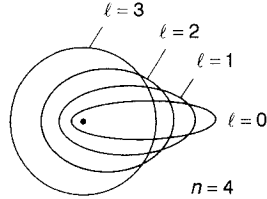
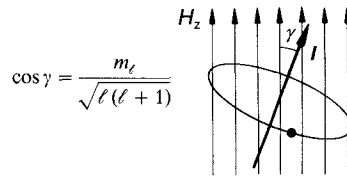
Übersicht S-3. Quantenzahlen und ihre Beziehungen.

	Modell	Quantenzahl
Bahn		Hauptquantenzahl n (Zahl der Kreisbahn) $n = 1, 2, 3, \dots$, maßgebend für die Energie E_n

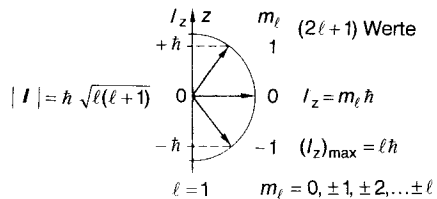
Übersicht S-3 (Fortsetzung)

Bahn-
magnetismusElektron bewegt sich auf
einer Kreisbahn


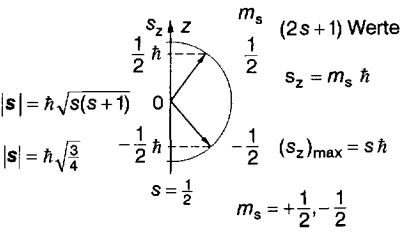
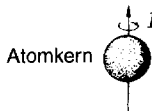
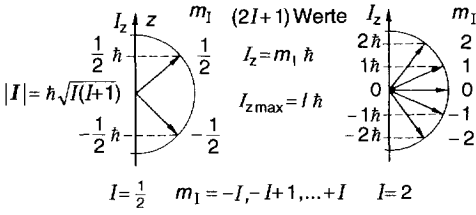
Bahndrehimpuls

Bahndrehimpuls-Quantenzahl ℓ
(auf Ellipsen bewegen sich Elektronen
unterschiedlich schnell)magnetische Quantenzahl m_ℓ
(räumliche Lage der Ebene
der Elektronenbahn)

$$\cos \gamma = \frac{m_\ell}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}$$

 ℓ Bahndrehimpulsquantenzahl m_ℓ magnetische Quantenzahl
(des Bahndrehimpulses)Nur solche Einstellungen von I sind
erlaubt, für die die Projektion in
z-Richtung ein ganzzahliges Vielfaches
von \hbar beträgt.

Übersicht S-3 (Fortsetzung)

	Modell	Quantenzahl
Spin- magnetismus	<p>Elektron dreht sich um seine eigene Achse</p> <p>Eigendrehimpuls Spindrehimpuls (kurz Spin)</p>  <p>Elektron</p>	 <p>m_s $(2s+1)$ Werte $s_z = m_s \hbar$ $(s_z)_{\max} = s \hbar$ $s = \frac{1}{2}$ $m_s = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$</p> <p>$m_s$ magnetische Quantenzahl (des Spins) s Spinquantenzahl s kann sich nicht parallel zur z-Richtung einstellen und präzediert wie l um die z-Achse</p>
Kernspin- magnetismus	<p>Atomkern dreht sich um seine eigene Achse</p> <p>Eigendrehimpuls Spindrehimpuls (kurz Kernspin)</p>  <p>Atomkern</p>	 <p>m_l $(2I+1)$ Werte $I_z = m_l \hbar$ $I_{z\max} = I \hbar$ $I = \frac{1}{2}$ $m_l = -I, -I+1, \dots, +I$ $I=2$</p> <p>I Kernspinquantenzahl I kann ganz- und halbzahlige Werte annehmen m_l magnetische Quantenzahl des Kernspins</p>

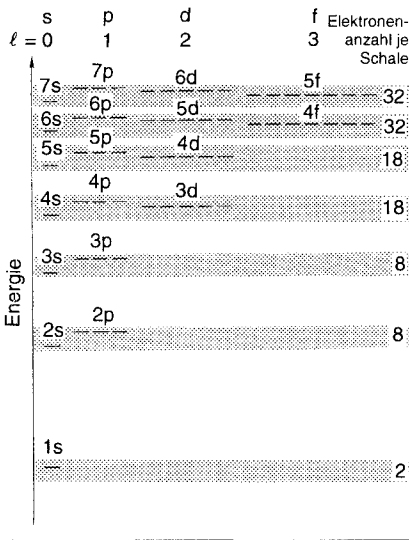
Übersicht S-4. Elektronen-Konfiguration und Energie-Termschema.

Elektronen-Konfiguration

n	l	m_l	m_s	Bezeichnung	Anzahl Elektronen Z N
1	0	0	$\pm 1/2$	$1s^2$	2 2
2	0	0	$\pm 1/2$	$2s^2$	2
	1	1, 0, -1	$\pm 1/2$	$2p^6$	6 8
3	0	0	$\pm 1/2$	$3s^2$	2
	1	1, 0, -1	$\pm 1/2$	$3p^6$	6 18
	2	2, 1, 0, -1, -2	$\pm 1/2$	$3d^{10}$	10
4	0	0	$\pm 1/2$	$4s^2$	2
	1	1, 0, -1	$\pm 1/2$	$4p^6$	6 32
	2	2, 1, 0, -1, -2	$\pm 1/2$	$4d^{10}$	10
	3	3, 2, 1, 0, -1, -2, -3	$\pm 1/2$	$4f^{14}$	14

Übersicht S-4 (Fortsetzung)

Energiediagramm der besetzten Elektronenschalen



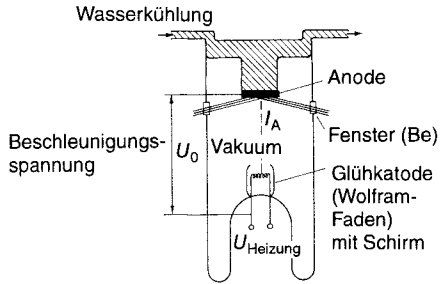
S.4.4 Röntgenstrahlung

Bei einer Röntgenröhre werden Elektronen aus einer beheizten Katode emittiert und durch Anlegen einer Spannung U_0 von etwa 20 kV bis 250 kV auf die Anode (Antikate) beschleunigt (Übersicht S-5). Die in das Material eindringenden Elektronen werden durch das Feld der positiv geladenen Atomkerne abgelenkt und abgebremst, wodurch eine Strahlung entsteht, die *Röntgenbremsstrahlung* genannt wird. Diese Bremsstrahlung besitzt ein kontinuierliches Spektrum mit der oberen Grenzfrequenz f_{\max} . (Übersicht S-5). Wenn die auftreffenden Elektronen Elektronen aus den inneren Schalen entfernen, dann füllen Elektronen aus den oberen Schalen die entstandenen Lücken auf, und es entsteht die *charakteristische Röntgenstrahlung* mit einem Linienspektrum (Übersicht S-5). Die Bezeichnung der Strahlung erfolgt durch folgende zwei Größen:

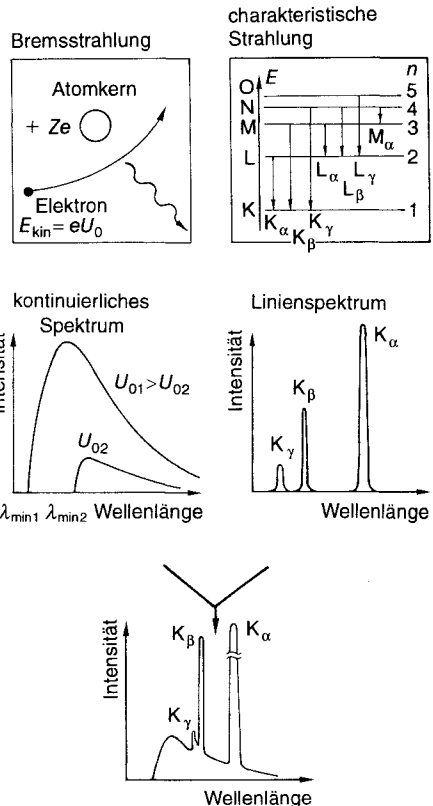
1. Schalenbezeichnung des Endzustands des Elektrons (K, L, M, ...),
2. Schalenbezeichnung des Anfangszustands ($\alpha, \beta, \gamma, \dots$).

Übersicht S-5. Röntgenstrahlen.

Röntgenröhre



Röntgenspektren



Übersicht S-5 (Fortsetzung)

Grenzfrequenz bzw. Grenzwellenlänge
der Bremsstrahlung

$$f_{\max} = \frac{e U_0}{h}$$

$$\lambda_{\min} = \frac{c h}{e U_0} = \frac{1,239842 \cdot 10^{-6} \text{ V} \cdot \text{m}}{U_0}$$

e	Elementarladung
c	Lichtgeschwindigkeit
f_{\max}	Grenzfrequenz
h	Plancksches Wirkungsquantum
U_0	beschleunigende Spannung
λ_{\min}	Grenzwellenlänge

Tabelle S-3. Ionisierungsenergien innerer Elektronen.

Element	Ordnungszahl	E_K keV	E_{L1} keV
Aluminium	13	1,559	0,087
Kupfer	29	8,980	1,100
Silber	47	25,517	3,810
Wolfram	74	69,508	12,090
Gold	79	80,713	14,353

Beide Spektren, die kontinuierliche Bremsstrahlung und das diskrete Linienspektrum, überlagern sich (Übersicht S-5).

Wenn die inneren Elektronen entfernt werden, werden die Atome *ionisiert*. Tabelle S-3 zeigt die *Ionisierungsenergien* für das Elektron der K- und L-Schale E_K bzw. E_L .

S.5 Molekülspektren

Atome können *kovalente Bindungen* eingehen. Wird der Abstand r zwischen zwei Atomen A und B verringert, dann tritt eine Kraftwirkung $F_{AB}(r)$ auf. Diese kann, wie Bild S-1 am Beispiel des Moleküls H_2^+ zeigt, entweder *bindend* oder *abstoßend* sein. Im Fall der Bindung zeigt die Potentialkurve beim Gleichgewichtsabstand r_e ein Minimum, d. h., eine weitere An-

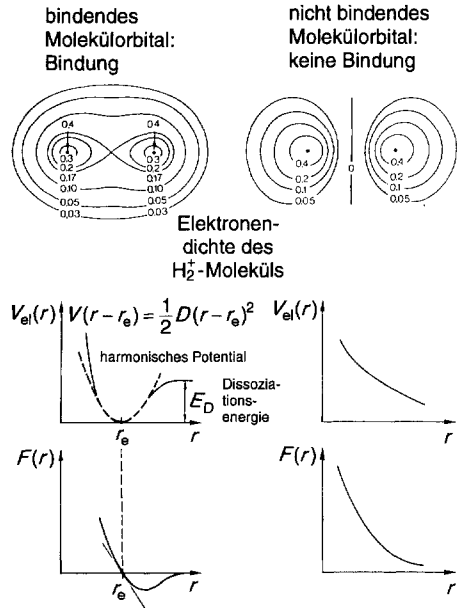


Bild S-1. Potentialkurve eines bindenden und eines nicht bindenden Molekülorbitals.

näherung beider Atome führt zu einer abstoßenden Coulomb-Kraft.

Das klassische Modell eines zweiatomigen Moleküls kann durch zwei Massen m_A und m_B beschrieben werden, die im Abstand r_e mit einer Feder verbunden sind. Übersicht S-6 zeigt die Schwingungsmöglichkeiten für ein n -atomiges Molekül mit f Freiheitsgraden und als Beispiel die Schwingungsmöglichkeiten eines dreiatomigen Moleküls, das linear (z. B. CO_2) bzw. nicht linear ist (z. B. H_2O).

S.5.1 Rotations-Schwingungs-Spektren

Die Schwingungs- und Rotationszustände sind *gequantelt*, d. h., das Molekül kann nur mit ganz bestimmten, mit der Schrödinger-Gleichung berechenbaren Frequenzen schwingen. Werden Moleküle mit Infrarotstrahlung bestrahlt, so finden Schwingungs- und Rotationsübergänge gleichzeitig statt, die von den

Übersicht S-6. Bewegungsmöglichkeiten und Schwingungen eines dreiatomigen Moleküls.

Bewegungsmöglichkeiten

- *Schwingung der Kerne gegeneinander* (Schwerpunkt des Moleküls bewegt sich nicht)

$$f_{\text{schw}} = \begin{cases} 3n - 5 & \text{lineares Molekül} \\ 3n - 6 & \text{nichtlineares Molekül} \end{cases}$$

- *Rotation um den Schwerpunkt*

$$f_{\text{rot}} = \begin{cases} 2 & \text{lineares Molekül} \\ 3 & \text{nichtlineares Molekül} \end{cases}$$

- *Translation des Schwerpunktes*

$$f_{\text{trans}} = 3.$$

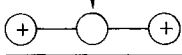
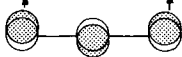
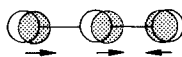
Übersicht S-6 (Fortsetzung)

Beispiel

lineares Molekül

CO₂ (Kohlendioxid)

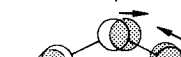
$$f_{\text{schw}} = 3 \cdot 3 - 5 = 4$$



nichtlineares Molekül

H₂O (Wasser)

$$f_{\text{schw}} = 3 \cdot 3 - 6 = 3$$



Auswahlregeln für die Schwingungsquantenzahl ν und die Rotationsquantenzahl ℓ bestimmt wird. Bild S-2 zeigt das Infrarotspektrum von Chlorwasserstoff und Polystyrol.

S.5.2 Raman-Effekt

Bei den Rotations-Schwingungs-Spektren ändert sich das Dipolmoment. Bei *unpolaren* Molekülen (z. B. O₂) gibt es kein Dipolmo-

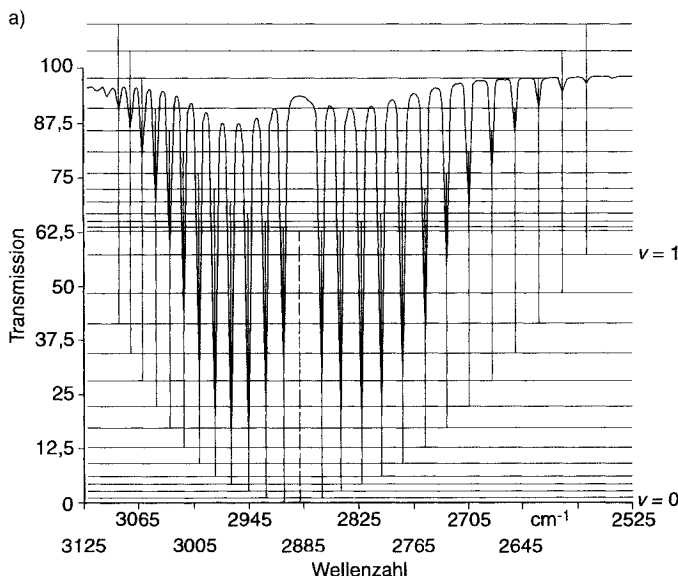


Bild S-2. Infrarotspektrum von Chlorwasserstoff (a) und Polystyrol (b).

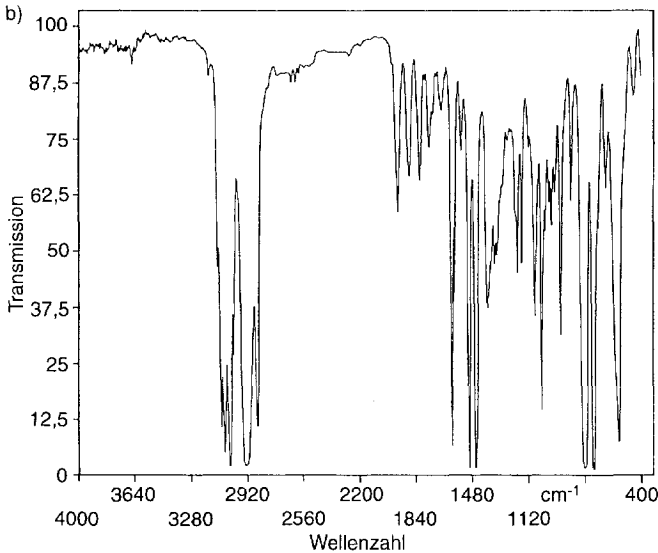


Bild S-2b.

ment und damit auch keine Schwingungen (IR-inaktiv). Durch Messung des gestreuten Lichtes (*Raman-Effekt*) können auch die nicht IR-aktiven Schwingungen untersucht werden.

S.6 Quanten-Hall-Effekt

Durch Anlegen einer Spannung U an den Leiter (dreidimensionales Elektronengas) fließt ein Strom I in x -Richtung, wie Bild S-3 zeigt. Durch die magnetische Induktion B in z -Richtung entsteht senkrecht zum Strom I und zum Magnetfeld B eine Spannung, die *Hall-Spannung*: $U_H = R_H I$. R_H wird analog zum Ohmschen Gesetz ($U = RI$) als *Hall-Widerstand* bezeichnet, für den sich im klassischen Fall ergibt (Abschnitt M.5.3, Bild M-52):

$$R_H = B_z / (n e); \quad (\text{S-7})$$

- B_z magnetische Induktion in z -Richtung,
 n Anzahldichte der Ladungsträger,
 e Elementarladung
 $(e = 1,60217733 \cdot 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s})$,
 d Dicke des Plättchens.

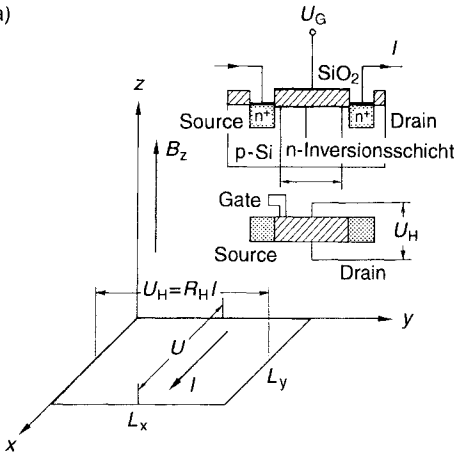
Wird ein *zweidimensionales Elektronengas* (2DEG) verwendet, wie dies bei einem MOSFET-Transistor unterhalb der SiO_2 -Schicht des Tores der Fall ist, dann ergeben sich die im Bild S-3 zusammengestellten Befunde. Es ist an der Abhängigkeit der Hall-Spannung U_H von der magnetischen Induktion B zu sehen, daß *Plateaus* auftreten, bei denen der Hall-Widerstand ϱ_H konstant wird (bzw. die Hall-Spannung U_H null ist). Der Hall-Widerstand R_H ist *quantisiert*, weil er nur folgende diskrete Werte annimmt:

$$R_H = \varrho_H = \frac{h}{ie^2} \approx \frac{25813}{i} \Omega \quad (i = 1, 2, 3 \dots). \quad (\text{S-8})$$

- h Plancksches Wirkungsquantum
 $(h = 6,6260755 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})$,
 e Elementarladung
 $(e = 1,60217733 \cdot 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s})$,
 i ganze Zahl.

Weil der Hall-Widerstand R_H sehr genau meßbar (Genauigkeit 10^{-8}) und unabhängig vom

a)



b)

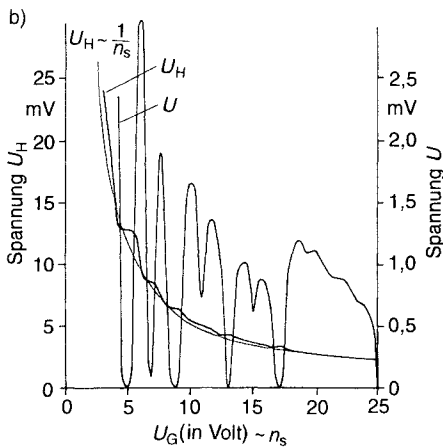
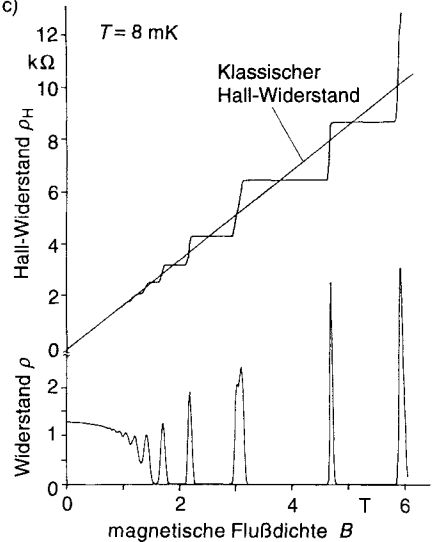


Bild S-3. Quanten-Hall-Effekt.

- a) zweidimensionales Elektronengas im MOSFET-Transistor,
 b) Hall-Spannung U_H in Abhängigkeit von der Gate-Spannung U_G ,
 c) Abhängigkeit der Widerstände ρ_H und ρ von der Magnetfeldstärke B .

c)



Material und dessen Reinheit ist, eignet er sich hervorragend als *Widerstandsnorm*.

Zusätzlich ist der Hall-Widerstand mit der Lichtgeschwindigkeit c und der Sommerfeldschen Feinstrukturkonstanten α verknüpft, und es gilt

$$R_{H(i=1)} = \frac{\mu_0 c}{2\alpha}; \quad (S-9)$$

- c Vakuumlichtgeschwindigkeit
 ($c = 2,99792458 \cdot 10^8$ m/s),
 α Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante
 ($\alpha = 7,29735308 \cdot 10^{-3}$),
 μ_0 magnetische Feldkonstante
 [$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (A · s)/(V · m)].

T Kernphysik

Im einfachen Kernmodell vereinigt der Atomkern den Hauptanteil der Masse eines Atoms; er besteht aus *Protonen* und *Neutronen*, die auch *Nukleonen* genannt werden. Die Nukleonen werden durch Kernkräfte kurzer Reichweite zusammengehalten.

Als Einheit für die Masse wird die *atomare Masseneinheit u* verwendet (Abschnitt S.2.2). Die Beziehungen und Werte für einige Teilchen- bzw. Nuklidmassen sind in Übersicht T-1 zusammengestellt.

Übersicht T-1. Beziehungen zwischen Teilchen- und Nuklidmassen.

atomare Masseneinheit m_u

$$m_u = 1 u = \frac{1}{12} m_A(^{12}\text{C}) = \frac{1}{12} \cdot \frac{12 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}}{N_A} = 1,66056 \cdot 10^{-27} \text{ kg}.$$

Für die relative Atommasse A_r bzw. Molekülmasse M_r gilt

$$A_r = \frac{m_a}{m_u}, \quad M_r = \frac{m_m}{m_u}.$$

Für die Molmasse M (Masse eines Mols von Atomen bzw. Molekülen) gilt

$$M = A_r N_A m_u = A_r \cdot 1 \text{ g/mol}, \quad M = M_r N_A m_u = M_r \cdot 1 \text{ g/mol}.$$

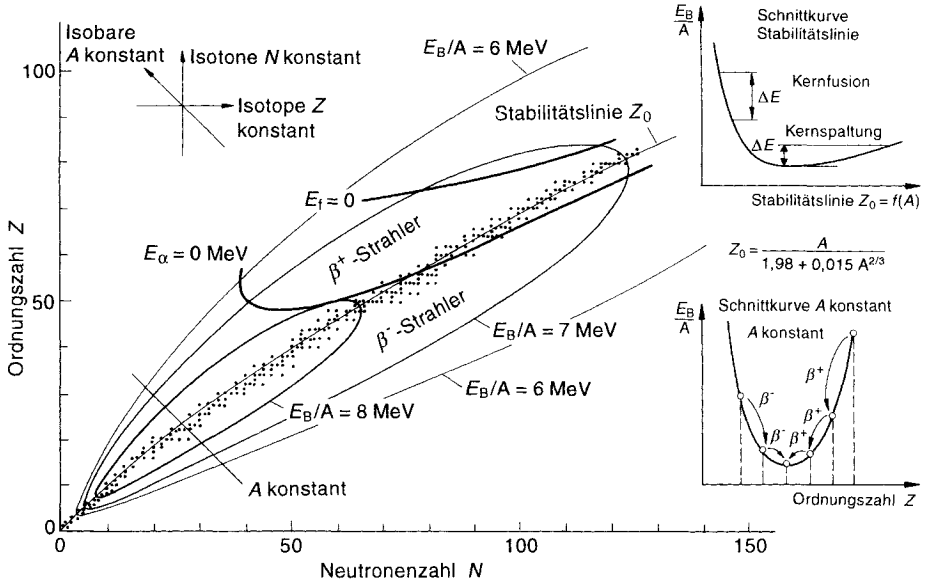
In der Kernphysik ist es üblich, die Masse über die Beziehung $m = E/c^2$ als *äquivalente Energie* anzugeben. Dann ist

$$m_u = 1 u = 931,5016 \text{ MeV}/c^2.$$

(Häufig wird c^2 weggelassen).

A_r	relative Atommasse ($A_r = m_a/m_u$),
M	Molmasse ($M = A_r N_A m_u$ bzw. $M_r N_A m_u$),
M_r	relative Molekülmasse ($M_r = m_m/m_u$),
m_a	Atommasse,
m_m	Molekülmasse,
m_u	atomare Masseneinheit ($m_u = u$) ($u = 1,66056 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 931,5016 \text{ MeV}/c^2$)
N_A	Avogadro-Konstante (Anzahl der Teilchen je mol) ($N_A = 6,0221357 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$)

Teilchen bzw. Nuklid	Masse u	Teilchen bzw. Nuklid	Masse u
Elektron	$5,48580 \cdot 10^{-4}$	^{14}N	14,003074008
Proton	1,00727647	^{17}O	16,9991306
Neutron	1,008664967	^{27}Al	26,9815413
^1H	1,007825037	^{30}Si	29,9737717
^2H	2,014101787	^{30}P	29,9783098
^4He	4,00260325	^{164}Dy	163,929183
^9Be	9,0121825	^{165}Dy	164,931712
^{12}C	12,00000000		

Bild T-1. Tal der β -Stabilität.

T.1 Radioaktiver Zerfall

T.1.1 Stabilität des Kerns

Für die Stabilität der Atomkerne gilt folgende Formel:

$$Z_0 = \frac{A}{1,98 + 0,015 A^{2/3}};$$

- A Massenzahl ($A = N + Z$),
 N Neutronenzahl,
 Z Ordnungszahl (Zahl der Protonen bzw. Elektronen),
 Z_0 Stabilitätslinie.

Im Bild T-1 sind die Linien gleicher Bindungsenergie E_B je Nukleon (E_B/A) zu sehen. Man erhält eine Parabel, welche ein Tal der β -Stabilität beschreibt, das bei kleinen N, Z -Werten sehr stark abfällt (eng ist) und bei großen N, Z -Werten sich öffnet. Die im linken Parabelast liegenden Nuklide wandeln sich durch β^- -Zerfall ($n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$), die rechts liegenden durch β^+ -Zerfall ($p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$) um. Ein Schnitt durch das

Tal der β -Stabilität für konstante Nukleonenzahl A zeigt Bild T-1 rechts unten. Im Bild T-1 rechts oben ist die Stabilitätslinie Z_0 aufgetragen. Man erkennt, daß zur Energieerzeugung folgende beiden Kernprozesse herangezogen werden können:

- Kernspaltung (Energiegewinn etwa 200 MeV),
- Kernfusion (Kernverschmelzung: Energiegewinn etwa 24 MeV).

Besonders viele stabile Isotope (Nuklide mit gleicher Protonenzahl) gibt es bei den *magischen Zahlen* für Neutronen bzw. Protonen:

2, 8, 20, 28, 50, 82, 126.

Insgesamt sind 267 stabile Nuklide bekannt, und zwar

158 g, g-Kerne	Z gerade	N gerade
53 g, u-Kerne	Z gerade	N ungerade
50 u, g-Kerne	Z ungerade	N gerade
6 u, u-Kerne	Z ungerade	N ungerade.

T.1.2 Zerfall

In Tabelle T-1 sind die Zerfallsarten und die Zerfallsreaktionen zusammengestellt, in

Tabelle T-1. Radioaktive Zerfallsreaktionen.

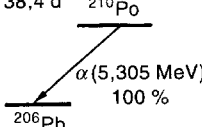
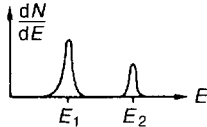
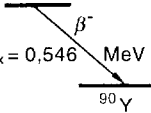
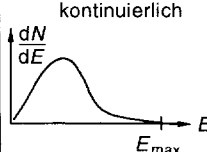
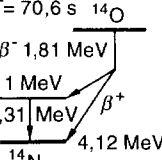
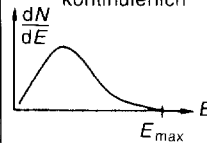
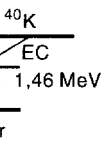
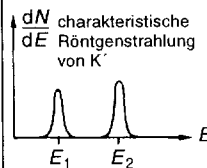
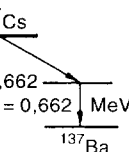
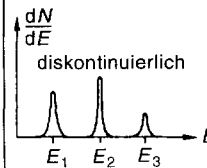
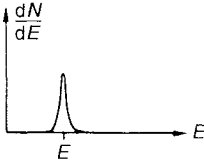
Zerfallsart	Zerfallsgleichung	ΔE -Wert Zerfallsschema	Energieverteilung	Bemerkungen
α -Zerfall	$\begin{matrix} A \\ Z \end{matrix} K \rightarrow \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \alpha + \begin{matrix} A-4 \\ Z-2 \end{matrix} K'$ $\begin{matrix} 210 \\ 84 \end{matrix} \text{Po} \rightarrow \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \alpha + \begin{matrix} 206 \\ 82 \end{matrix} \text{Pb}$	$\frac{\Delta E}{c^2} = m_a(K) - m_a(\alpha) - m_a(K')$ $T = 138,4 \text{ d}$ 	diskontinuierlich 	Dieser Zerfall tritt nur bei Ordnungszahlen größer als 80 auf.
β^- (e ⁻) Elektronen	$\begin{matrix} A \\ Z \end{matrix} K \rightarrow \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix} \beta^- + \begin{matrix} A \\ Z+1 \end{matrix} K' + \bar{\nu}_e$ $\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} n \rightarrow \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix} \beta^- + \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} p + \bar{\nu}_e$ $\begin{matrix} 90 \\ 38 \end{matrix} \text{Sr} \rightarrow \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix} \beta^- + \begin{matrix} 90 \\ 39 \end{matrix} \text{Y} + \bar{\nu}_e$	$\frac{\Delta E}{c^2} = m_a(K) - m_a(K')$ $T = 28,6 \text{ a}$ 	kontinuierlich 	Nuklide mit relativem Neutronenüberschuß (unterhalb der Linie der β -Stabilität).
β^+ (e ⁺) Positronen	$\begin{matrix} A \\ Z \end{matrix} K \rightarrow \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \beta^+ + \begin{matrix} A \\ Z-1 \end{matrix} K' + \nu_e$ $\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} p \rightarrow \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \beta^+ + \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} n + \nu_e$ $\begin{matrix} 14 \\ 8 \end{matrix} \text{O} \rightarrow \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \beta^+ + \begin{matrix} 14 \\ 7 \end{matrix} \text{N} + \nu_e$	$\frac{\Delta E}{c^2} = m_a(K) - m_a(K') - 2m_e$ $T = 70,6 \text{ s}$ 	kontinuierlich 	Dieser Prozeß kommt natürlich aufgrund der kurzen Halbwertszeit nicht vor (oberhalb der Linie der β -Stabilität).
Elektroneneinfang (EC)	$\begin{matrix} A \\ Z \end{matrix} K + \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix} e^- \rightarrow \begin{matrix} A \\ Z-1 \end{matrix} K' + \nu_e$ $\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} p(\text{Kern}) + \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix} e^- \rightarrow \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} n + \nu_e$ Hülle K-Schale $\begin{matrix} 40 \\ 19 \end{matrix} \text{K} + \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix} e^- \rightarrow \begin{matrix} 40 \\ 18 \end{matrix} \text{Ar} + \nu_e$	$\frac{\Delta E}{c^2} = m_a(K) - m_a(K')$ 	$\frac{dN}{dE}$ charakteristische Röntgenstrahlung von K' 	Der Zerfall tritt immer auf bei $m_a(K) > m_a(K')$.
γ -Zerfall elektromagnetische Strahlung	$\begin{matrix} A \\ Z \end{matrix} K^* \rightarrow \begin{matrix} A \\ Z \end{matrix} K + \gamma$ $\begin{matrix} 137 \\ 55 \end{matrix} \text{Cs} \rightarrow \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix} \beta + \begin{matrix} 137 \\ 56 \end{matrix} \text{Ba} + \gamma$	$\frac{\Delta E}{c^2} = m_a(K^*) - m_a(K)$ 	diskontinuierlich 	Begleiteerscheinung der anderen Zerfallsarten.

Tabelle T-1 (Fortsetzung)

Isomere Umwandlung (i. U.)	$^{A_m}_{Z}K^* \rightarrow ^A_ZK$	$T = 2,19 \text{ d}$ $^{133m}_{54}\text{Xe} \xrightarrow{0,233} ^{133}_{54}\text{Xe}$ $E_\gamma = 0,233 \text{ MeV}$		verzögerte Abgabe von γ -Quanten.
ν_e	Neutrino;	$\bar{\nu}_e$	Anti-Neutrino	

Übersicht T-2. Radioaktiver Zerfall.

Radioaktive Zerfallskonstante λ beschreibt das Verhältnis der im Moment zerfallenden Kerne ($-dN/dt$) zur Gesamtzahl vorhandener instabiler Kerne N :

$$\lambda = \frac{-dN/dt}{N};$$

Aktivität A (Anzahl der Zerfälle je Zeiteinheit):

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N = \frac{\ln 2 \cdot N}{T_{1/2}} = \lambda \frac{m_a N_A}{M} \text{ in Bq};$$

Zerfallsgesetz (Integration der Formel für die Aktivität):

$$N = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t} = \frac{N_0}{2^{t/T_{1/2}}};$$

spezifische Aktivität α (Aktivität A bezogen auf die Masse m):

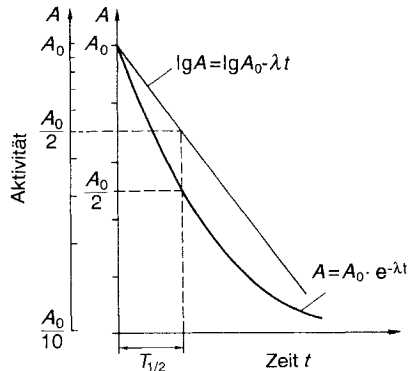
$$\alpha = \frac{\text{Aktivität } A}{\text{Masse } m} \text{ in Bq/g};$$

Halbwertszeit $T_{1/2}$ (Zeit, in der die Hälfte aller Kerne zerfallen ist)

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,69315}{\lambda};$$

mittlere Lebensdauer τ :

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} = \frac{T_{1/2}}{0,69315}.$$



A	Aktivität zur Zeit t	N_A	Avogadro-Konstante ($N_A = 6,0221367 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$)
A_0	Aktivität am Beginn ($t = 0$)	dN/dt	Anzahl Zerfälle je Zeiteinheit
m_a	Atommasse	$T_{1/2}$	Halbwertszeit
M	Molmasse	t	Zeit
N	Anzahl der zerfallsfähigen Kerne	α	spezifische Aktivität
N_0	Anzahl der Kerne zu Beginn	λ	Zerfallskonstante

Tabelle T-2. *Natürliche Radioaktivität.*

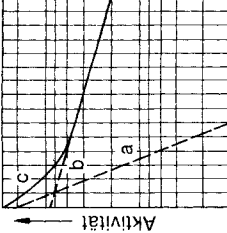
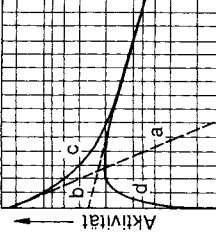
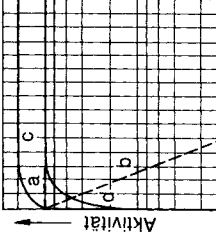
Gegenstand	Radionuklid	Konzentration mBq/l
Grundwasser	^3H	40 bis 400
	^{40}K	4 bis 400
	^{238}U	1 bis 200
Oberflächen- gewässer	^3H	20 bis 100
	^{40}K	40 bis 2000
	^{238}U	bis zu 40
Trinkwasser	^3H	20 bis 70
	^{40}K	200
	^{238}U	0,4
Milch	^{40}K	46 Bq/kg
Rindfleisch		116 Bq/kg
Hering		136 Bq/kg

Übersicht T-2 die wichtigsten Gleichungen. Tabelle T-2 sind die Werte der natürlichen Radioaktivität einiger Stoffe aus der Natur zu entnehmen.

Liegen mehrere Radionuklide vor, so muß man zwischen *unabhängigem* (genetisch nicht verknüpft) und *abhängigem* (genetisch verknüpft oder Mutter-Tochter-System) unterscheiden. Die Zerfallskurven und die Einzel- bzw. Gesamtaktivitäten sind in Tabelle T-3 zusammengestellt. Bild T-2 zeigt die drei natürlich vorkommenden Zerfallsreihen.

Radioaktive Stoffe werden, wie Tabelle T-4 zeigt, vor allem in der Medizin und in der Chemie eingesetzt.

Tabelle T-3. Radioaktiver Zerfall mehrerer Radionuklide.

	Zerfallsschema	Aktivitätsgleichung	Zerfallskurven
unabhängiger Zerfall, genetisch nicht verknüpft	$a^* \rightarrow c$ $b^* \rightarrow d$ (c, d stabile Kerne)	$A_a = \lambda_a N_a$ $A_b = \lambda_b N_b$ Gesamtaktivität $A_G = A_a + A_b$ allgemein $A_G = \sum_i A_i$	 <p>a Zerfallskurve von a^* b Zerfallskurve von b^* c Gesamtaktivität</p>
abhängiger Zerfall, genetisch verknüpft	$a^* \rightarrow b^* \rightarrow c$ c stabiler Kern Mutter-Tochter-System allgemein $a^* \rightarrow b^* \rightarrow c^* \rightarrow \dots, Z$	$A_b = \frac{dN_b}{dt} = -\underbrace{\lambda_b N_b}_{\text{Zerfall von b}} + \underbrace{\lambda_a N_a}_{\text{Nachbildung von b aus a}}$ $N_a = N_{a,0} e^{-\lambda_a t}$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px;"> $A_b = \frac{\lambda_b}{\lambda_b - \lambda_a} A_{a,0} (e^{-\lambda_a t} - e^{-\lambda_b t})$ </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px;"> $A_b = \frac{T_a A_{a,0}}{T_a - T_b} \left(e^{-\ln 2 \frac{t}{T_a}} - e^{-\ln 2 \frac{t}{T_b}} \right)$ </div> $A_b = \frac{T_a}{T_a - T_b} A_a \left(1 - e^{-\ln 2 \left(\frac{1}{T_b} - \frac{1}{T_a} \right) t} \right)$ <p>T_a, T_b Halbwertszeit von Kern a bzw. b Gleichgewichtseinstellung (kann nach einer gewissen Vernachlässigt werden)</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px;"> $\frac{A_a}{A_b} = 1 - \frac{T_b}{T_a}$ </div> <p>im Gleichgewicht</p>	<p>$T_a < T_b$</p>  <p>a Zerfallskurve von a^* b Zerfallskurve von b^* c Gesamtaktivität d A_b Aktivität von b^*, wenn anfänglich nur a^*-Aktivität vorliegt</p> <p>$T_a \geq T_b$</p>  <p>a Zerfallskurve von a^* b Zerfallskurve von b^* c Gesamtaktivität d A_b Aktivität von b^*, wenn anfänglich nur a^*-Aktivität vorliegt $A_s = A_b$</p> <p>Nachbildungsgleichung von b $A_b = A_a (1 - e^{-\ln 2 \frac{t}{T_b}})$</p>

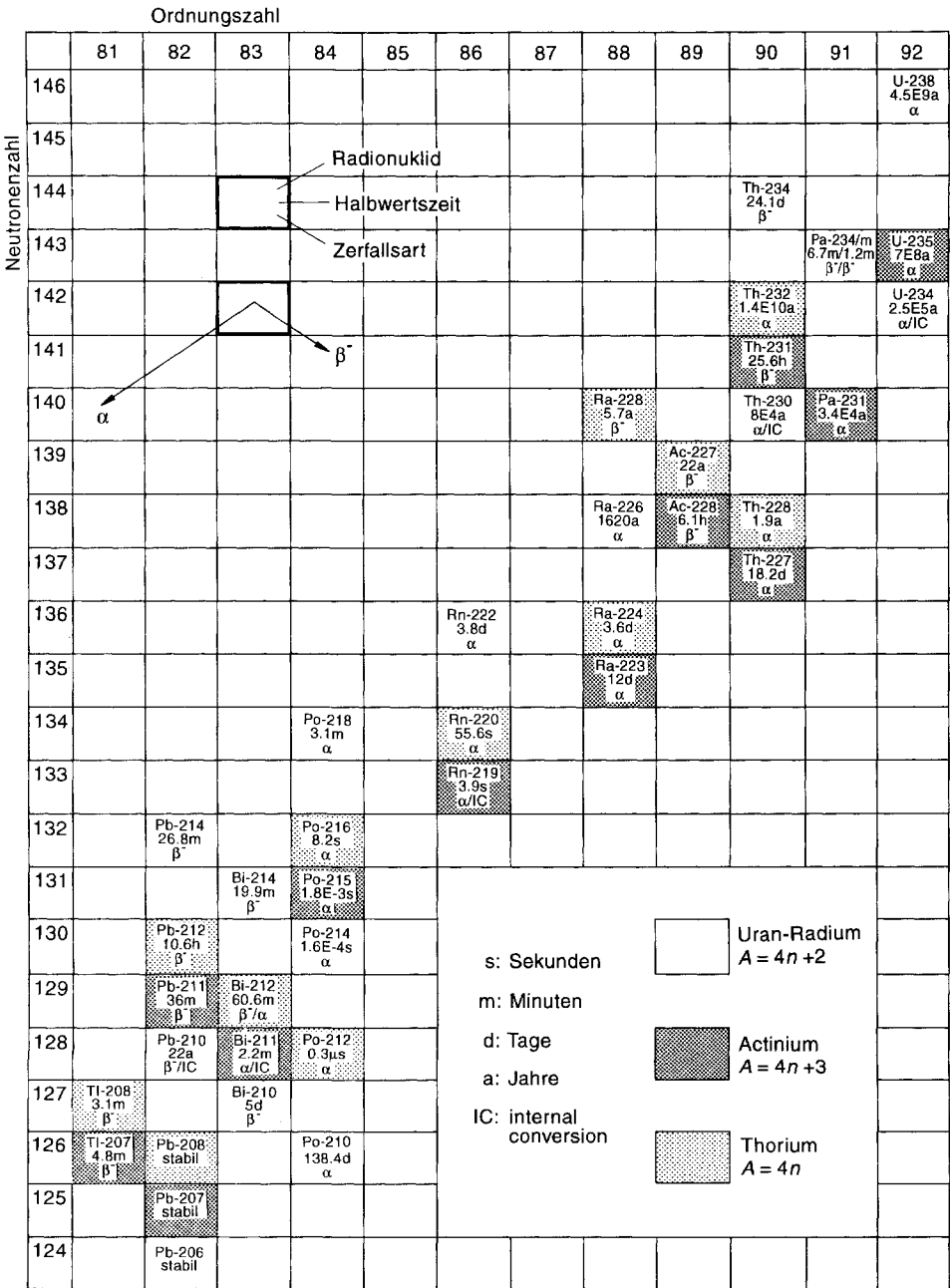


Bild T-2. Natürliche Zerfallsreihen.

Tabelle T-4. Anwendungsgebiete radioaktiver Nuklide.

Bereiche	Anwendungsfelder
umschlossene Strahlungsquellen	
Medizin	Strahlentherapie
Strahlen-chemie	Sterilisierung medizinischer Produkte (z. B. Einwegspritzen); Konservierung von Nahrungsmitteln; Abwasserbehandlung
chemische Analytik	Röntgenfluoreszenz-Analyse; Elektroneneinfangdetektor zum Spurennachweis halogener Kohlenwasserstoffe
Meßtechnik	Durchstrahl- und Rückstrahl-Verfahren mit β - und γ -Quellen (z. B. Messung der Füllhöhe, der Dichte und der Dicke)
Energie-umwandlung	Umwandlung der Zerfallsenergie in Wärme; weitere Umwandlung der Wärme (Seebeck-Effekt) in elektrische Energie; Radionuklid-Batterien
offene Strahlungsquellen	
Medizin	Organ-Funktionsdiagnostik (Leber- und Nierendagnostik); Lokalisationsdiagnostik (Anreicherung im Gewebe); Szintigraphen
chemische Analytik	Bestimmung des Schilddrüsenhormons
Öko-toxikologie	Bestimmung der Anreicherung von Umweltchemikalien in Organen und Geweben von Tieren durch radioaktive Markierung
Prozeß-analyse	quantitative Verfolgung des Stoff-Transports in verfahrenstechnischen Anlagen durch Zusatz radioaktiver Indikatoren
Verschleiß-messungen	Abriebmessung von $10^{-3} \mu\text{m}$ bis $10^{-4} \mu\text{m}$

T.2 Dosisgrößen

Bild T-3 zeigt die Dosisgrößen, deren Einteilung und Zusammenhänge. Man unterscheidet grob zwischen

- *Ionendosis I* (erzeugte Ladung dQ je Masseneinheit dm : $I = dQ/dm$),
- *Energiedosis D* (absorbierter Energiebetrag dE je Masseneinheit dm : $D = dE/dm$),
- *Äquivalentdosis H* (Beurteilung der biologischen Wirkung einer Strahlung durch den Bewertungsfaktor q : $H = Dq$).

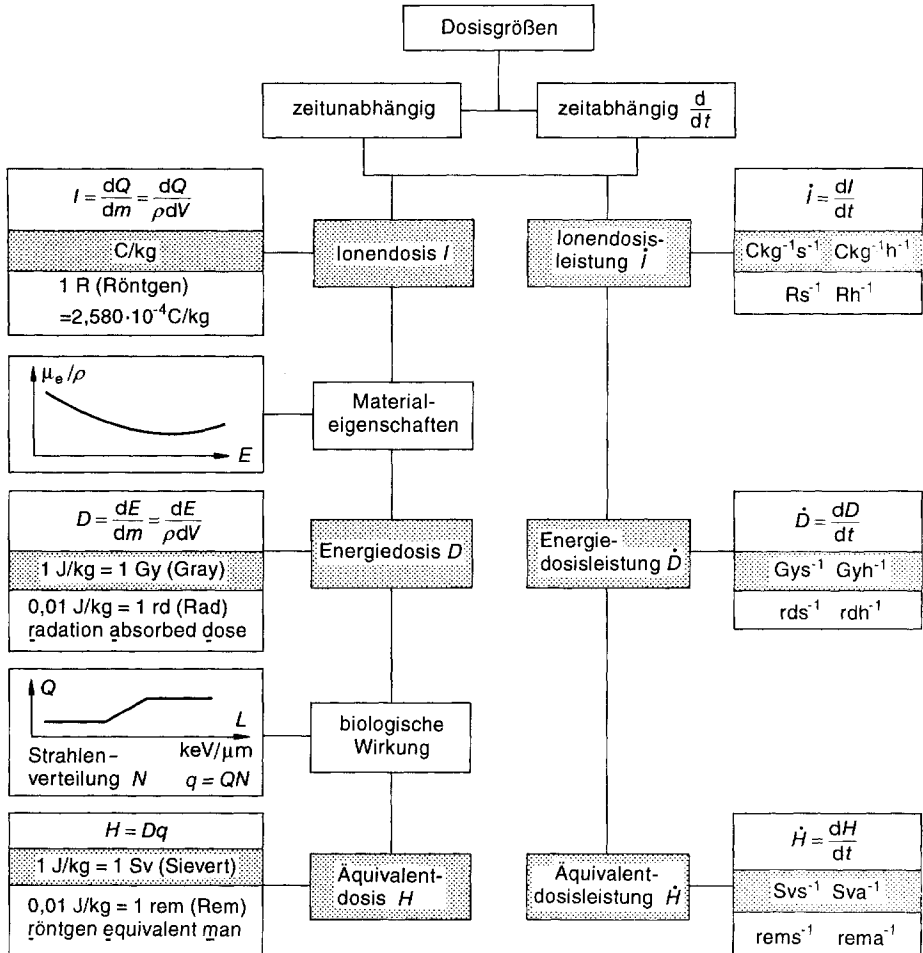


Bild T-3. Dosisgrößen der Radioaktivität.

T.3 Strahlenschutz

In vielen wissenschaftlichen und technischen Bereichen wird mit Substanzen und Apparaturen gearbeitet, die direkt oder indirekt ionisierende Strahlung emittieren. Bild T-4 zeigt die Zusammenhänge.

T.3.1 Wechselwirkung von Strahlung mit Materie (Schwächung)

Durch die Prozesse der Wechselwirkung der verschiedenen Strahlungsarten mit der Materie wird die Flußdichte der Strahlung und deren Energie gemindert. Die Abhängigkeit der Flußdichte von der Schichtdicke des Absor-

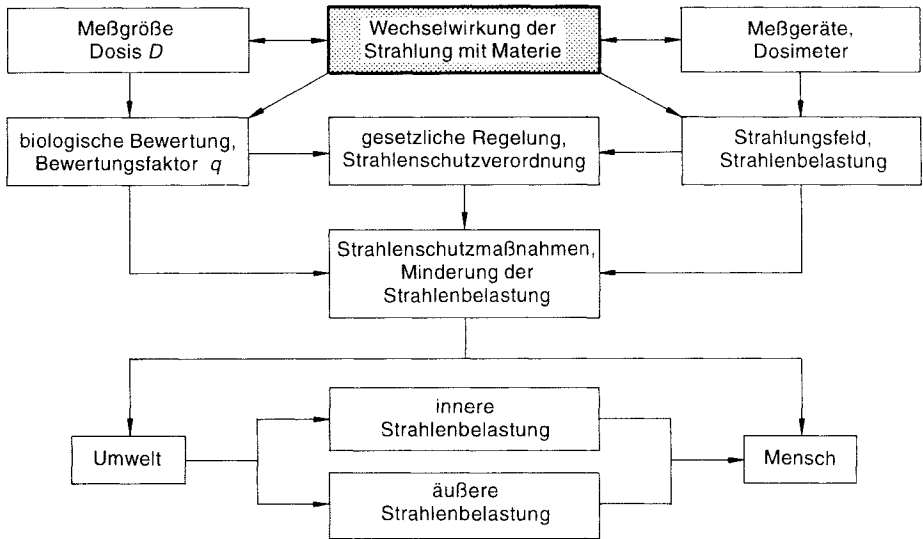


Bild T-4. Zusammenhänge im Strahlenschutz.

bermaterials wird *Absorptionskurve* genannt. Für die einzelnen Strahlungsarten sind die Wechselwirkungsprozesse, die Energiebilanz und die Absorptionskurve in Tabelle T-5 zusammengestellt. Tabelle T-6 zeigt die Massen-Reichweiten der einzelnen Strahlungsarten. Die *maximale Reichweite* ist die zur vollständigen Absorption notwendige Flächenmasse.

T.3.2 Dosismessverfahren

Tabelle T-7 zeigt die Dosismessverfahren.

T.3.3 Biologische Wirkung der Strahlung

Durch Ionisation und Anregung können sich chemisch sehr aktive Molekülbruchstücke (*Radikale*) bilden, die die chemischen Reaktionen stark beeinflussen. Besonders schwerwiegend wirken sich Veränderung der Erbanlagen der Zellen aus, insbesondere bei Keimzellen oder während des frühen Wachstums eines Organismus. Deshalb sind Gewebe mit hohen Zellteilungsrate (z. B. Knochenmark und

Haut) stärker gefährdet als Zellen, die sich weniger häufig teilen (z. B. Nerven, Bindegewebe und Muskeln).

Hinsichtlich der Wirkung der Schädigung unterscheidet man

- *somatische* Strahlenschäden (Schäden in Körperzellen),
- *genetische* Strahlenschäden (Schäden am Erbgut).

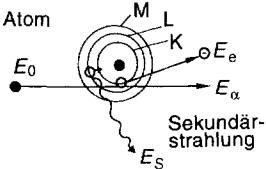
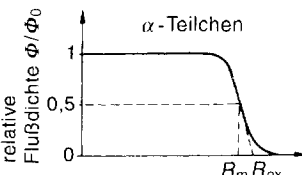
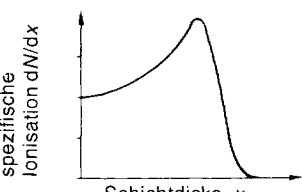
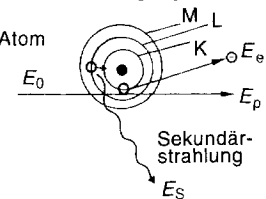
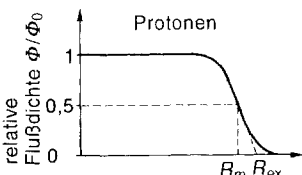
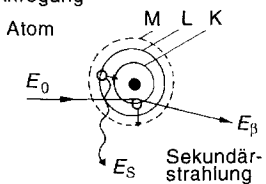
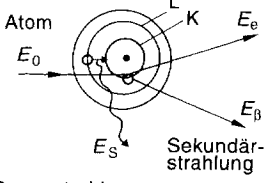
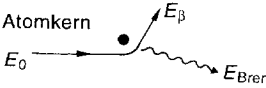
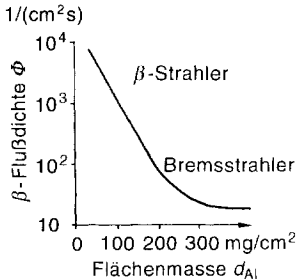
Tabelle T-8 zeigt die somatischen Strahlenwirkungen. Die natürliche und die zivilisatorische Strahlenbelastung der deutschen Bevölkerung geht aus Übersicht T-3 hervor.

T.3.4 Schutz vor Strahlenbelastung

In Tabelle T-9 sind die in der Strahlenschutzverordnung festgelegten Dosisgrenzwerte zusammengestellt, und in Tabelle T-10 ist ein Beispiel zur Berechnung der Strahlenbelastung aufgeführt.

In Übersicht T-4 ist die Gleichung für die Äquivalentdosisleistung hinter einer Abschir-

Tabelle T-5. Verhalten der verschiedenen Strahlungsarten.

Strahlenart	Wechselwirkungsprozesse	Energiebilanz	Absorptionskurve
α	<p>Ionisation, Anregung</p> 	<p>E_B Bindungsenergie des Elektrons</p> $E_\alpha = E_0 - E_e - E_B$ $E_S = E_M - E_N$	<p>R_m mittlere Reichweite R_{ex} extrapolierte Reichweite</p>  <p>relative Flußdichte ϕ/ϕ_0</p> <p>Schichtdicke x</p>  <p>spezifische Ionisation dN/dx</p> <p>Schichtdicke x</p>
Protonen p	<p>Ionisation, Anregung</p> 	$E_p = E_0 - E_e - E_B$ $E_S = E_M - E_N$	<p>R_m mittlere Reichweite R_{ex} extrapolierte Reichweite</p>  <p>relative Flußdichte ϕ/ϕ_0</p> <p>Schichtdicke x</p>
Elektronen e β^- , β^+	<p>Anregung</p>  <p>Ionisation</p>  <p>Bremsstrahlung</p>  <p>Vernichtungsstrahlung</p> <p>$e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$</p>	$E_\beta = E_0 - (E_K - E_M)$ $E_S = E_L - E_K$ $E_\beta = E_0 - E_B - E_e$ $E_\beta = E_0 - E_{Brems}$ $E_\gamma = m_e c^2$	<p>$1/(cm^2 s)$</p>  <p>β-Strahler</p> <p>Bremsstrahler</p> <p>β-Flußdichte Φ</p> <p>Flächenmasse d_{Ai}</p> <p>μ_m Massenabsorptionskoeffizient ($\mu_m = \mu/\rho$ in cm^2/mg)</p> <p>d Flächenmasse in mg/cm^2 ($d = x\rho$)</p> <p>ρ Dichte</p>

direkt ionisierende Strahlung

Tabelle T-5 (Fortsetzung)

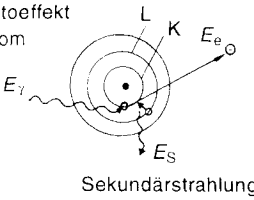
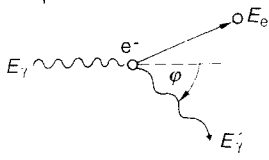
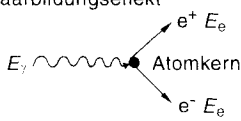
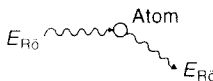
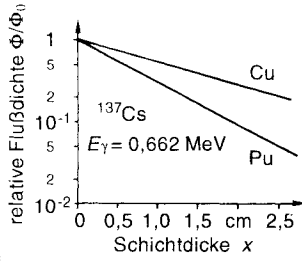
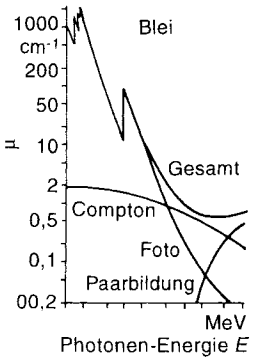
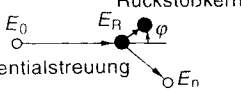
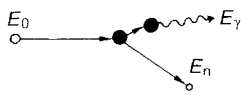
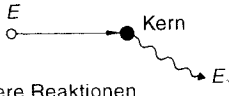
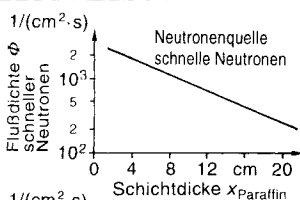
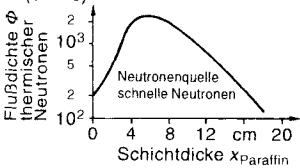
Strahlenart	Wechselwirkungsprozesse	Energiebilanz	Absorptionskurve
indirekt ionisierende Strahlung	<p>γ</p> <p>Fotoeffekt Atom</p>  <p>Sekundärstrahlung</p> <p>Comptoneffekt</p>  <p>Paarbildungseffekt</p>  <p>Rayleigh-Streuung Atom</p> 	$E_e = E_\gamma - E_B$ $E_S = E_L - E_K$ $E_e = E_\gamma - E_\gamma'$ $E_\gamma' = \frac{E_\gamma}{1 + E_\gamma q}$ $q = \frac{1 - \cos \varphi}{m_e c^2}$ $E_e = E_\gamma - 2m_e c^2$ $E_{\text{Röntgen}}$	<p>relative Flußdichte Φ/Φ_0</p>  <p>Schichtdicke x</p> <p>Blei</p>  <p>Photonen-Energie E</p> <p>$\Phi = \Phi_0 e^{-\mu x}$ $\mu = \mu_{\text{Photo}} + \mu_C + \mu_{\text{Paar}}$</p>
Neutronen n	<p>elastische Streuung (n, n)</p>  <p>Potentialstreuung</p> <p>inelastische Streuung (n, n')</p>  <p>Absorption (n, gamma)</p>  <p>weitere Reaktionen (n, p); (n, alpha) (n, 2n); (n, np)</p>	$E_n = E_0 - E_R$ $E_R = E_n \cos^2 \varphi$ für Protonen	<p>$1/(\text{cm}^2 \cdot \text{s})$</p>  <p>Schichtdicke x_{Paraffin}</p> <p>$1/(\text{cm}^2 \cdot \text{s})$</p>  <p>Schichtdicke x_{Paraffin}</p>

Tabelle T-6. Wechselwirkungen der verschiedenen Strahlungsarten.

Strahlenart	Energie- und Materialabhängigkeit der Wechselwirkungsprozesse	
direkt ionisierende Strahlung	α	
	Protonen p	
	Elektronen e β^+, β^-	<p> β-Strahler $0,05 \text{ MeV} < E_{\max} < 5 \text{ MeV}$ $E_{\max} = 1,92 \sqrt{R_{\max}^2 + 0,22 R_{\max}}$ R_{\max} maximale Reichweite in g/cm^2 E_{\max} β-Maximal-Energie in MeV $-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{Str}} = KZ^2(E + m_e c^2)$ Energieverlust durch Bremsstrahlung $p = 0,33 \cdot 10^{-3} Z E_{\max}$ p Anteil der β-Energie, der in Bremsstrahlung umgewandelt wird E_{\max} in MeV </p>

Tabelle T-7. Verfahren zur Dosismessung.

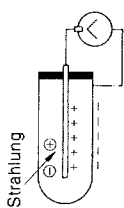
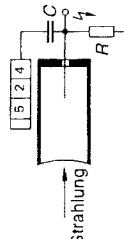
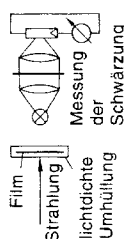
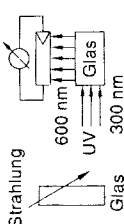
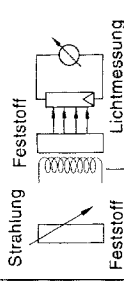
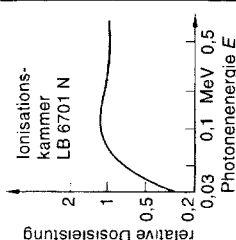
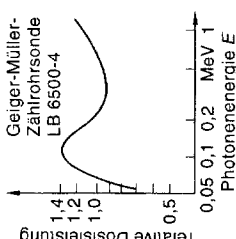
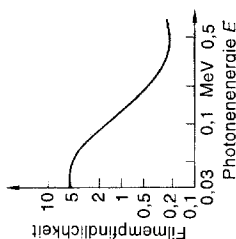
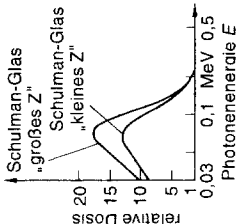
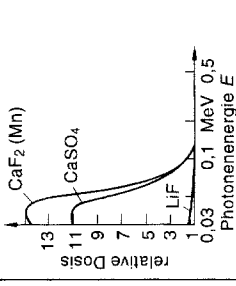
Messprinzip	 <p>Strahlung</p>	 <p>Strahlung</p>	 <p>Strahlung</p>	 <p>Strahlung</p>	 <p>Strahlung</p>	<p>Ionisationskammer Gasverstärkung $A_g = 1$</p> <p>Proportionalzählrohr $1 < A_g < 10^4$ (Geiger-Müller-Zählrohr)</p> <p>Film Umfüllung Messung Schwärzung</p> <p>Radiophotolumineszenz</p> <p>Thermolumineszenz</p>	<p>0,1 μGy bis 10^3 Gy 0,1 $\mu\text{Gy h}^{-1}$ bis 10^6 Gy h^{-1} je nach Gasvolumen 1 mm^3 bis 100 dm^3</p> <p>0,1 mGy bis 100 kGy Belichtungszeit: μs bis mehrere Monate bestrahlte Fläche: 10 μm^2 bis 10 m^2</p> <p>10^{-8} Ckg^{-1} bis 10 Ckg^{-1} (Photonen)</p> <p>$\text{CdSO}_4(\text{Mn})$: 10^{-5} Ckg^{-1} bis 10 Ckg^{-1} CaF_2: 10^{-6} Ckg^{-1} bis $0,1 \text{ Ckg}^{-1}$ (Photonen)</p>	<p>relative Dosisleistung</p>  <p>Ionisationskammer LB 6701 N</p> <p>relative Dosisleistung</p>  <p>Geiger-Müller-Zählrohrsonde LB 6500-4</p> <p>relative Dosisleistung</p>  <p>Filmpfeindlichkeit</p> <p>relative Dosisleistung</p>  <p>Schulman-Glas „großes Z“ Schulman-Glas „kleines Z“</p> <p>relative Dosis</p> <p>relative Dosisleistung</p>  <p>$\text{CaF}_2(\text{Mn})$ CaSO_4 LiF</p>	<p>Personendosimeter zur Bestimmung der Personendosis; schnelle und genaue Information</p> <p>Ablesung sofort und jederzeit möglich; Warmmöglichkeiten bei Dosisüberschreitung; auch als Personendosimeter</p> <p>Personendosimetrie; Auswertung durch amtliche Meßstellen in vorgegebenen Zeiträumen; universell einsetzbar</p> <p>Personendosimetrie; Meßwertspeicherung, daher beliebig auswertbar</p> <p>Personendosimetrie</p>
-------------	--	---	--	--	--	--	---	---	---

Tabelle T-8. Strahlenwirkungen bei kurzzeitiger Ganzkörperbestrahlung mit γ -Strahlung.

Dosis	1. Woche	2. Woche	3. Woche	4. Woche
Schwellendosis 0,25 Sv (25 rem)	keine subjektiven Symptome, Absinken der Anzahl von Lymphozyten im Verlauf von zwei Tagen	Blutbild wird rasch wieder normal.		
subletale Dosis 1 Sv (100 rem)	Blutbild wird rasch wieder normal.	keine deutlichen subjektiven Symptome.	Unwohlsein, Mattigkeit, Appetitmangel; Haarausfall, wunder Rachen.	Spermienproduktion läßt vorübergehend nach. Kräfteverfall, Erholung wahrscheinlich.
mittlere letale Dosis 4 Sv (400 rem)	am ersten Tag Erbrechen und Übelkeit, Absinken der Anzahl der Lymphozyten auf $1000/\text{mm}^3$ innerhalb von zwei Tagen	keine deutlichen Symptome	Unwohlsein, Mattigkeit, Appetitlosigkeit; Haarausfall, Entzündungen im Rachenraum und Dünndarm	längere bis lebenslange Sterilität bei Männern; Kräfteverfall, 50 % Todesfälle
letale Dosis 7 Sv (700 rem)	nach 1 bis 2 h Erbrechen und Übelkeit. Nach zwei Tagen keine Lymphozyten mehr.	Mattigkeit, Appetitlosigkeit, Entzündungen im Mund- und Rachenraum, innere Blutungen, hohes Fieber.		

mung zu sehen. Die Werte für μ und B sind den entsprechenden Grafiken zu entnehmen.

Zur Beurteilung der Schädlichkeit (*Toxizität*) von Radionukliden ist außer der physikali-

schen auch die *biologische Halbwertszeit* wichtig. Sie gibt die Zeit an, in der eine im Körper vorhandene Aktivität durch Ausscheidung auf die Hälfte vermindert wurde. Tabelle T-11 zeigt die Toxizität einiger Nuklide in den Toxizitätsklassen 1 bis 4.

Übersicht T-3. Strahlenbelastung der Menschen in Deutschland.

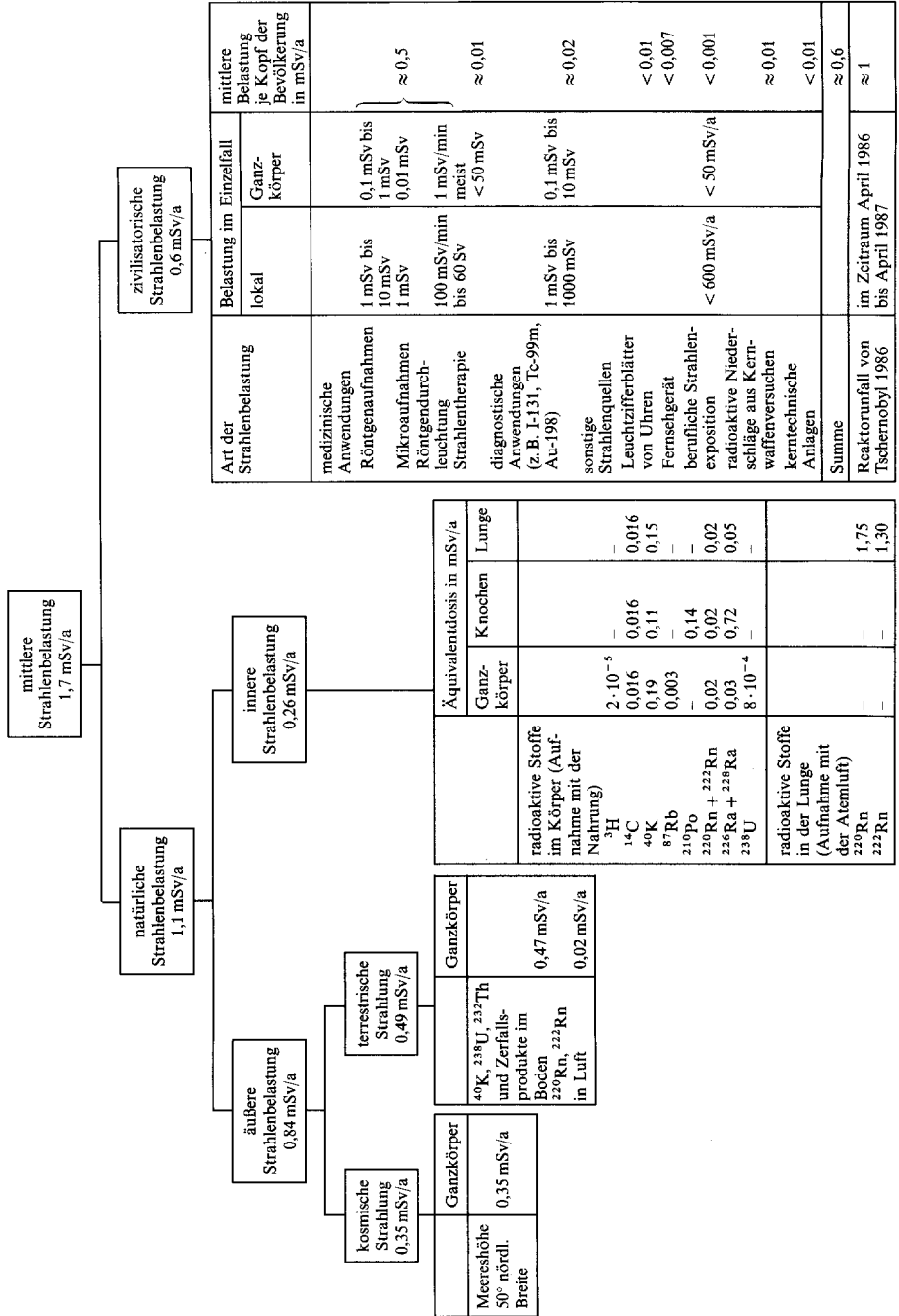


Tabelle T-9. Grenzwerte der Strahlendosis.

Körperbereich	allgemeines Staatsgebiet, natürliche Strahlenbelastung	Strahlenschutzbereiche, Dosisgrenzwerte an den Bereichsgrenzen			
		außerbetrieblicher Überwachungsbereich	betrieblicher Überwachungsbereich	Kontrollbereich (Aufenthalt 40 h/Woche)	Sperrbereich
Ganzkörper, Knochenmark, Gonaden, Uterus	2,2 mSv/a	0,3 mSv/a	5 mSv/a	15 mSv/a	3 mSv/h
Hände, Unterarme, Füße, Knöchel		3,6 mSv/a	60 mSv/a	180 mSv/a	
Haut, Knochen, Schilddrüse		1,8 mSv/a	30 mSv/a	90 mSv/a	
andere Organe		0,9 mSv/a	15 mSv/a	45 mSv/a	

Überwachungsmaßnahmen gemäß Strahlenschutzverordnung

Messung der Ortsdosis und Ortsdosisleistung	•	•	•	•
Kontaminationsüberwachung		•	•	•
ärztliche Überwachung			•	•
Messung der Körperdosis bzw. Personendosis			•	•

Grenzwerte der Körperdosen für beruflich strahlenexponierte Personen

Körperbereich	beruflich strahlenexponierte Personen der Kategorie A mSv/a	beruflich strahlenexponierte Personen der Kategorie B mSv/a
Ganzkörper, Knochenmark, Gonaden, Uterus	50	15
Hände, Unterarme, Füße, Unterschenkel, Knöchel	600	200
Knochen, Schilddrüse	300	100
andere Organe	150	50

Tabelle T-10. Beispiel zur Strahlenbelastung.

radioaktives Präparat: ^{137}Cs Dosiskonstante: $0,077 \mu\text{Sv h}^{-1} \text{m}^2 \text{MBq}^{-1}$ Aktivität: 10 MBq	Abstand r m	Äquivalentdosisleistung H $\mu\text{Sv/h}$
direktes Greifen des radioaktiven Präparats, Armlänge 0,5 m	0,01 0,5	$7,7 \cdot 10^3$ Finger 3,1 Körper
Verwendung einer Zange zum Greifen (0,25 m)	0,25 0,75	12,3 Finger 1,4 Körper
	1,00	0,77
Abschirmung 5 cm Blei	1,00	0,004 $\mu = 1,2 \text{ cm}^{-1}$; $B = 2$

Tabelle T-11. Toxizität von Radionukliden.

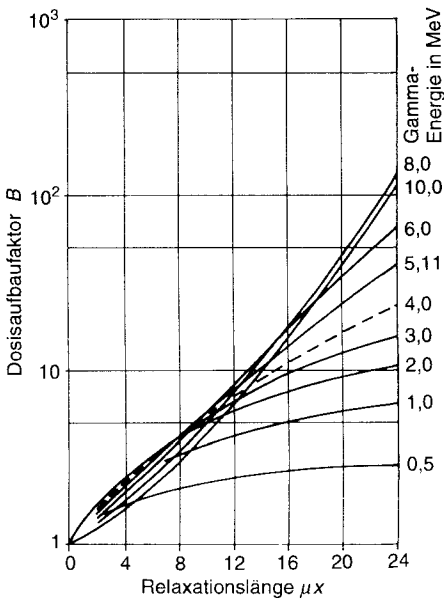
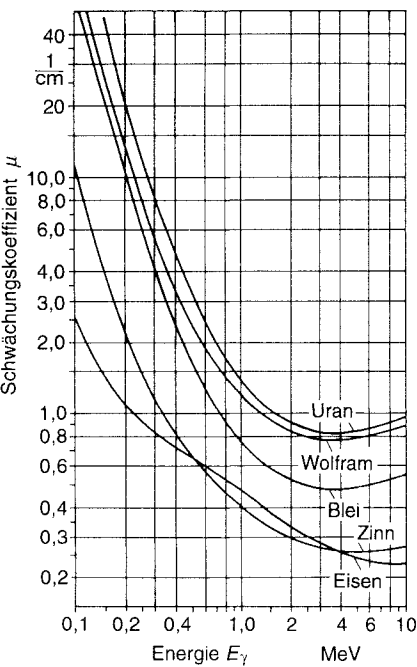
Radiotoxizitätsklasse	Nuklid	Halbwertszeit T_{phys}	Halbwertszeit T_{biol}	kritisches Organ
1 Freigrenze 3,7 kBq	^{90}Sr ^{210}Pb ^{210}Po ^{233}U	28,1 a 22 a 138 d $1,63 \cdot 10^5 \text{ a}$	11 a 730 d 40 d 300 d	Knochen Knochen Milz Knochen
2 Freigrenze 37 kBq	^{22}Na ^{137}Cs ^{144}Ce ^{131}I	2,58 a 26,6 a 285 d 8,0 d	19 d 100 d 330 d 180 d	gesamter Körper Muskel Knochen Schilddrüse
3 Freigrenze 370 kBq	^{14}C ^{24}Na ^{105}Rh ^{109}Cd	5570 a 15 h 1,54 d 1,3 a	35 a 19 d 28 d 100 d	Fett gesamter Körper Nieren Leber
4 Freigrenze 3,7 MBq	^3H ^{85}Sr ^{238}U	12,6 a 70 min $4,5 \cdot 10^9 \text{ a}$	19 d 11 a 300 d	gesamter Körper Knochen Nieren

Übersicht T-4. Absorption radioaktiver Strahlung.

$$\dot{H} = \underbrace{\Gamma_H}_{\substack{\text{Dosis} \\ \text{ohne} \\ \text{Abschir-} \\ \text{mung}}} \underbrace{\frac{A}{r^2}}_{\substack{\text{Schwä-} \\ \text{chungs-} \\ \text{faktor}}} e^{-\mu x} \underbrace{B(x, E)}_{\substack{\text{Aufbau-} \\ \text{faktor}}};$$

- B Dosisaufbaufaktor
 x Weglänge
 μx Relaxationslänge
 A Aktivität der Quelle
 r Abstand von der Quelle
 Γ_H Dosiskonstante
 μ Schwächungskoeffizient

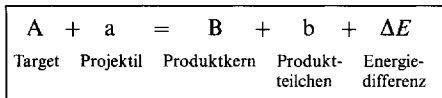
Radionuklid	Dosiskonstante Γ_H $\text{Sv m}^2 \text{ h}^{-1} \text{ Bq}^{-1}$
^{24}Na	$4,72 \cdot 10^{-13}$
^{60}Co	$3,36 \cdot 10^{-13}$
^{131}I	$5,45 \cdot 10^{-14}$
^{137}Cs	$7,70 \cdot 10^{-14}$
^{226}Ra	$2,14 \cdot 10^{-13}$



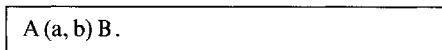
T.4 Kernreaktionen

T.4.1 Energetik

Eine Kernreaktion kann folgendermaßen geschrieben werden:



oder



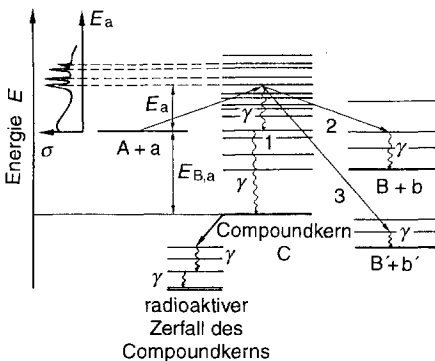
Die bei der Kernreaktion freiwerdende Energie ΔE (freiwerdend bzw. exoergisch oder benötigt bzw. endoergisch) berechnet sich aus der Massendifferenz des Ausgangszustandes ($A + a$) und des Endzustandes ($B + b$):

$$\Delta E = \{[m_a(A) + m_a(a)] - [m_a(B) + m_a(b)]\} c^2.$$

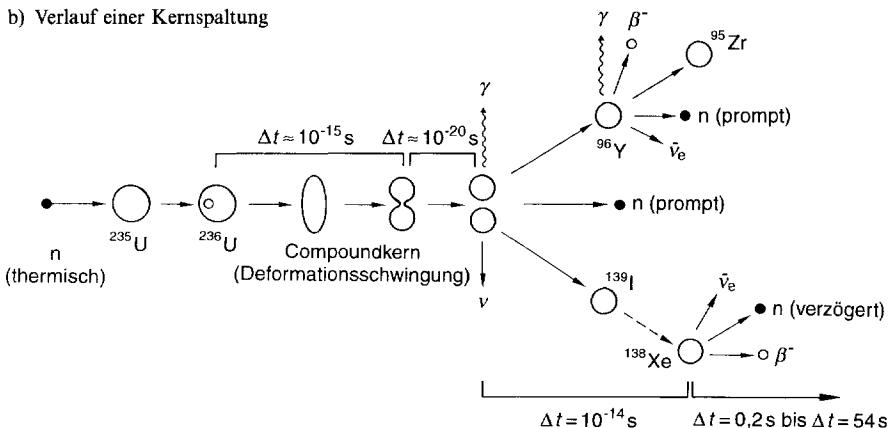
Übersicht T-5 zeigt das Energiediagramm einer Kernreaktion und eine mögliche Spaltkette von ^{235}U . Es ist ersichtlich, daß aus dem Target und dem Projektil ($A + a$) zunächst ein sehr kurzlebiger *Compoundkern* ($< 10^{-16}\text{ s}$) entsteht, der in den neuen Zustand ($B + b$)

Übersicht T-5. Reaktionen der Kernspaltung.

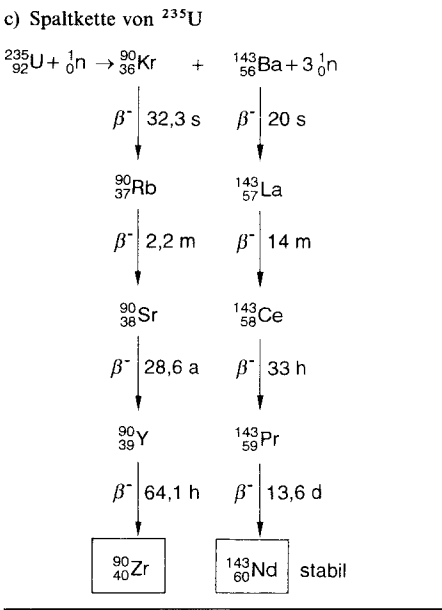
a) Energiediagramm



b) Verlauf einer Kernspaltung



Übersicht T-5 (Fortsetzung)



zerfällt. Tabelle T-12 zeigt die möglichen Kernreaktionen. Es ist darauf hinzuweisen, daß verschiedene Spaltketten möglich sind. Bild T-5 zeigt die Häufigkeit der Spaltprodukte für ^{235}U . Es ist zu erkennen, daß bevorzugt eine *asymmetrische Spaltung* auftritt, d. h., das Atom spaltet sich in einen kleineren (Massenzahlen 90 bis 100) und einen größeren (Massenzahlen 133 bis 143) Kern auf.

Die bei der Spaltung freiwerdende Energie ΔE kann aus Bild T-1 der Kurve rechts oben ermittelt werden. Sie beträgt für ^{235}U 0,86 MeV je Nukleon, d. h. 200 MeV je Spaltung. Bild T-6 zeigt die Verteilung der Spaltenergie. Aus den 85 % kinetischer Energie kann durch Umwandlung in Wärme mittels einer Dampfturbine elektrische Energie erzeugt werden (*Kernenergie*).

T.4.2 Wirkungsquerschnitt

Der Wirkungsquerschnitt σ gibt die *Wahrscheinlichkeit* an, mit der eine Kernreaktion

Tabelle T-12. Arten von Kernreaktionen.

Bezeichnung	Beschreibung
Austauschreaktion	Ein Teilchen gelangt in den Kern, ein anderes wird dafür emittiert. (p, n); (d, p); (α , p)
Einfangreaktion	Das einfallende Teilchen verbleibt im Kern. Die Anregungsenergie wird durch Emission von γ -Quanten frei. (n, γ).
elastische Streuung	Das einfallende Teilchen wird, ohne den Kern anzuregen, wieder emittiert. (n, n)
inelastische Streuung	Das Teilchen gibt einen Teil seiner Energie als Anregungsenergie an den Kern. (n, n')
inelastische Stöße	Teilchen werden aus dem Kern durch energiereiche Teilchen herausgeschlagen. (n, 2n); (d, 2n)
Kernspaltung	Der Kern zerfällt beim Beschuß in zwei oder mehrere Bruchstücke. (n, f); (γ , f)

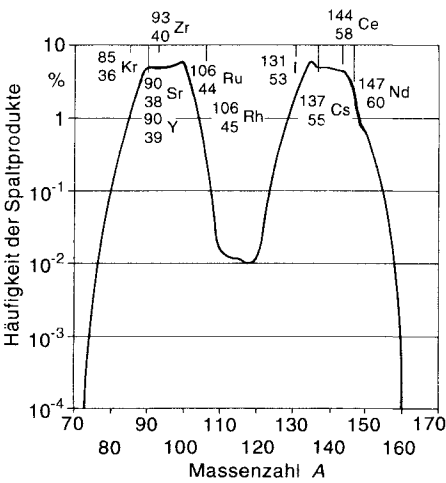


Bild T-5. Häufigkeit der Zerfallsprodukte bei der Spaltung von ^{235}U .

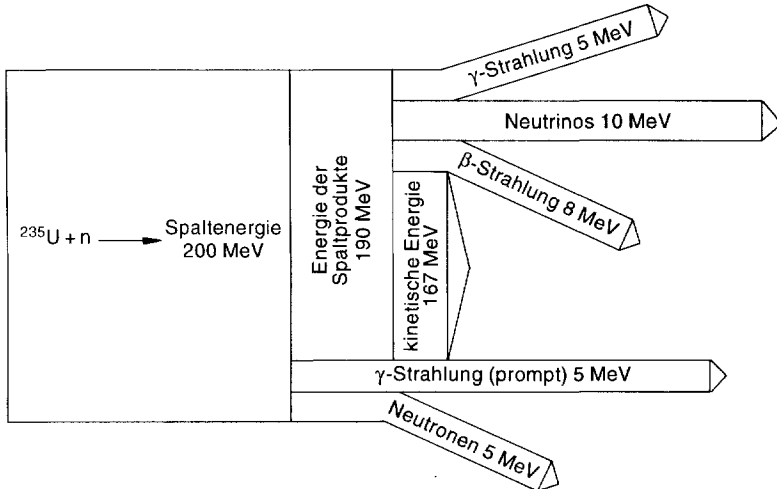


Bild T-6. Energieausbeute bei der Kernspaltung.

stattfindet. Wie Übersicht T-6 zeigt, sind die Atomkerne kleine Zielscheiben mit bestimmter Fläche, die mit Projektilen a beschossen werden. Eine Kernreaktion wird immer dann ablaufen, wenn ein Projektil die Zielscheibe trifft. Die Einheit des Wirkungsquerschnitts ist das barn ($1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$) und entspricht etwa der Kernquerschnittsfläche.

Jedem Reaktionstyp eines bestimmten Kernes A mit einem Projektil (z. B. Neutronen n) muß ein Wirkungsquerschnitt zugeordnet werden. Der *Gesamt-Wirkungsquerschnitt* σ_{iA} ergibt sich durch Addition der *partiellen* Wirkungsquerschnitte:

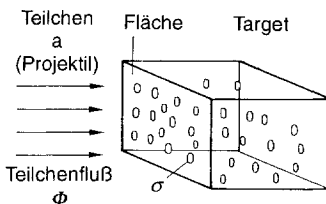
$$\sigma_{iA} = \sigma_{(n,n)A} + \sigma_{(n,\gamma)A} + \sigma_{(n,2n)A} + \sigma_{(n,\alpha)} + \dots$$

Übersicht T-6. Wirkungsquerschnitt.

Trefferzahl und Wirkungsquerschnitt

$$\frac{\text{Trefferzahl}}{\text{Zeit}} = \frac{\text{Projektilteilchen } a}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}} \cdot \text{Wahrscheinlichkeit des Treffers}$$

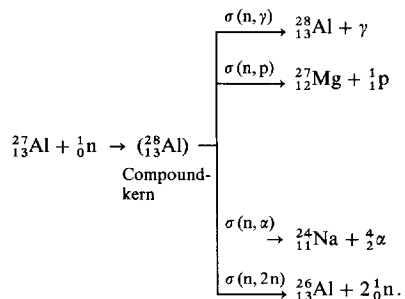
$$dN/dt = \Phi \cdot N_{AT} \sigma$$



Fläche der Zielscheibe
je Atom
(keine gegenseitige Überlappung)

Übersicht T-6 (Fortsetzung)

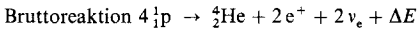
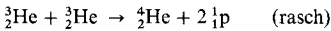
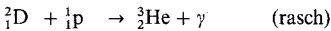
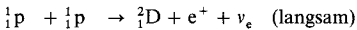
Kernreaktionen bei der Bestrahlung von $^{27}_{13}\text{Al}$ mit Neutronen



N_{AT} Anzahl der Kerne A im Target
 dN/dt Trefferanzahl je Zeit
 σ Wirkungsquerschnitt
 Φ Projektilflußdichte

Übersicht T-7. Mögliche Fusionsreaktionen.

Deuterium-Zyklus



Kohlenstoff-Zyklus

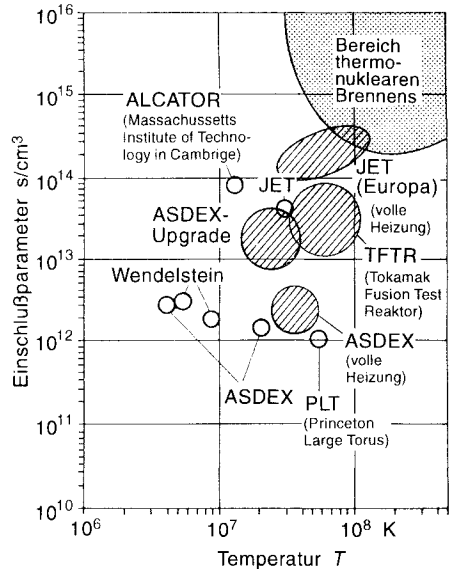
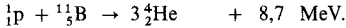
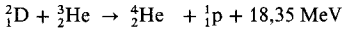
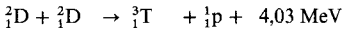
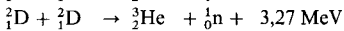
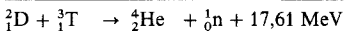
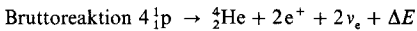
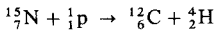
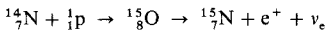
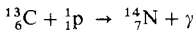
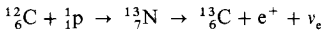


Bild T-7. Temperatur und Einschlußparameter einiger Kernfusionsprojekte.

T.5 Kernfusion

Fusionsreaktionen, bei denen eine *Kernverschmelzung* stattfindet, können zu einem Energiegewinn führen (z. B. Fusion von Wasserstoff zu Helium, wie es in der Sonne stattfindet). In Übersicht T-7 sind der *Deuterium-* und der *Kohlenstoff-Stickstoff-Zyklus* mit den Reaktionsgleichungen zusammengestellt, ferner die Fusionsreaktionen, die für die technische Nutzung in Frage kommen könnten, und die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von der Deuteronenenergie.

Die Fusion ist nur möglich, wenn zwei Voraussetzungen gegeben sind:

1. Temperatur $T > 10^8 \text{ K}$.
2. Einschlußparameter (Anzahl der Teilchen je Kubikzentimeter, multipliziert mit der Einschlußzeit t) von etwa 10^{14} s/cm^3 .

Bild T-7 zeigt die derzeitigen Versuche zur Fusion.

T.6 Elementarteilchen

T.6.1 Fundamentale Wechselwirkungen

Es gibt vier fundamentale Wechselwirkungen, die durch bestimmte *Austauschteilchen* beschrieben werden (Tabelle T-13):

1. die Kräfte zwischen den materiellen Körpern, denen das *Graviton* zugeordnet ist,
2. die Kräfte zwischen Ladungen, die vom *Photon* vermittelt werden,
3. starke Kernkraft, welche die Kernteile zusammenhält, deren Teilchen die *Hadronen* sind,
4. die schwache Kernkraft, die für die Radioaktivität zuständig ist mit den intermediären Vektorbosonen (Weakonen) als Austauschteilchen.

T.6.2 Erhaltungssätze

In Tabelle T-14 sind die für die Elementarteilchen wichtigen Erhaltungssätze zusammengestellt.

Tabelle T-13. Vier fundamentale Wechselwirkungen.

	Gravitation	elektromagnetische Wechselwirkung	starke Wechselwirkung	schwache Wechselwirkung
Reichweite	∞	∞	$10^{-15} \text{ m bis } 10^{-16} \text{ m}$	$\ll 10^{-16} \text{ m}$
Beispiel	Kräfte zwischen Himmelskörpern	Kräfte zwischen Ladungen, z. B. Atom	Zusammenhalt der Atomkerne	Betazerfall der Atomkerne
Stärke (relative)	10^{-41}	10^{-2}	1	10^{-14}
betroffene Teilchen	alle	geladene Teilchen	Hadronen	Hadronen und Leptonen
Feynman-Diagramm				
Austauschteilchen	Graviton	Photon	Hadronen Gluon	Intermediäre Vektorbosonen
Masse	0	0	$0,14 \frac{\text{GeV}}{c^2}$ π^+, π^-, π^0	$m_W = 82 \text{ GeV}/c^2$ $m_Z = 93 \text{ GeV}/c^2$ W^+, W^-, Z^0
Erhaltung				
Ladung Q	+	+	+	+
Baryonenzahl B	+	+	+	+
Leptonenzahl L	+	+	+	+
Spin J	+	+	+	+
Seltsamkeit S	-	+	+	-
Isospin I	-	-	+	-
I_3	-	+	+	-

T.6.3 Einteilung

Bild T-8 zeigt die Einteilung der Elementarteilchen. Zu jedem Teilchen existiert ein *Antiteilchen* mit entgegengesetzter Ladung und entgegengesetzten Werten aller ladungsartigen Quantenzahlen (z. B. B, S, C, I_3). Wenn beide zusammentreffen, dann lösen sie sich auf, und es entsteht Strahlung.

Die kleinsten Elementarteilchen sind die *Quarks*. Sie haben sechs Unterscheidungsmerkmale (up, down, charm, strange, top, bottom). Jede dieser Varianten kommt in drei Farben vor (dies sind keine sichtbaren Farben, sondern nur Bezeichnungen). So besteht beispielsweise ein Proton oder ein Neutron aus drei Quarks, eines von jeder Farbe (weitere Quantenzahlen sind in Tabelle T-15 zu finden).

Tabelle T-14. Erhaltungssätze bei Elementarteilchen.

Erhaltungssatz	Beschreibung	Beispiel
Elektrische Ladung Q	Die elektrische Ladung eines abgeschlossenen Systems bleibt erhalten.	$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ $Q: -1 = -1 + 0$ Das Pion π^- und das Muon μ^- müssen dieselbe Ladung haben, da Neutrinos $\bar{\nu}_\mu$ elektrisch neutral sind.
Leptonenzahl L	Insgesamt gibt es sechs Leptonen (Tabelle T-13) mit dem Spin 1/2 und einer elektromagnetisch schwachen Wechselwirkung. Die Leptonenzahl L bleibt bei einer Reaktion erhalten.	$\mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e$ $L: -1 = (-1) + (-1) + (+1)$
Baryonenzahl B	Baryonen (Spin 1/2) zerfallen in ein Proton. Die Baryonenzahl bleibt erhalten.	$p + p \rightarrow p + n + \pi^+$ $B: 1 + 1 = 1 + 1 + 0$ (π^+ : π^+ -Meson)
Seltsamkeit S	Für Reaktionen mit starker und elektromagnetischer Wechselwirkung bleibt sie erhalten.	
Charme C , Bottom B^*	Bleiben bei elektromagnetischer und starker Wechselwirkung erhalten.	
Isospin I	Isospin ist ein Vektor mit drei Komponenten. Die dritte Komponente I_3 liefert eine Aussage über die Ladung (Proton $I_3 = +1/2$, Neutron $I_3 = -1/2$). Bei der starken Wechselwirkung bleibt der Isospin erhalten, bei der elektromagnetischen nur die dritte Komponente I_3 .	
Spin J , Parität P	Der Spin ergibt sich durch Kombination der Quarkspins und des Bahndrehimpulses. Die Wellenfunktion Ψ darf nur ihr Vorzeichen ändern.	$\Psi(-x, -y, -z) = \Psi(x, y, z)$ Parität $P = 1$ (gerade) $\Psi(-x, -y, -z) = -\Psi(x, y, z)$ Parität $P = -1$ (ungerade)

Bei den Elementarteilchen unterscheidet man zwischen Teilchen mit *schwacher* Wechselwirkung (*Leptonen*) und solchen mit *starker* Wechselwirkung (*Hadronen*). Zu den Hadronen zählen die *Baryonen* (Spin J halbzahlig) und die *Mesonen* (Spin J ganzzahlig). Die

Baryonen zerfallen stets in *Nukleonen* (Protonen oder Neutronen). Baryonen können, wie bereits in Tabelle 14 bei den Erhaltungssätzen aufgestellt, weder erzeugt werden noch verschwinden. Die Mesonen zerfallen in Photonen, Elektronen und Neutrinos.

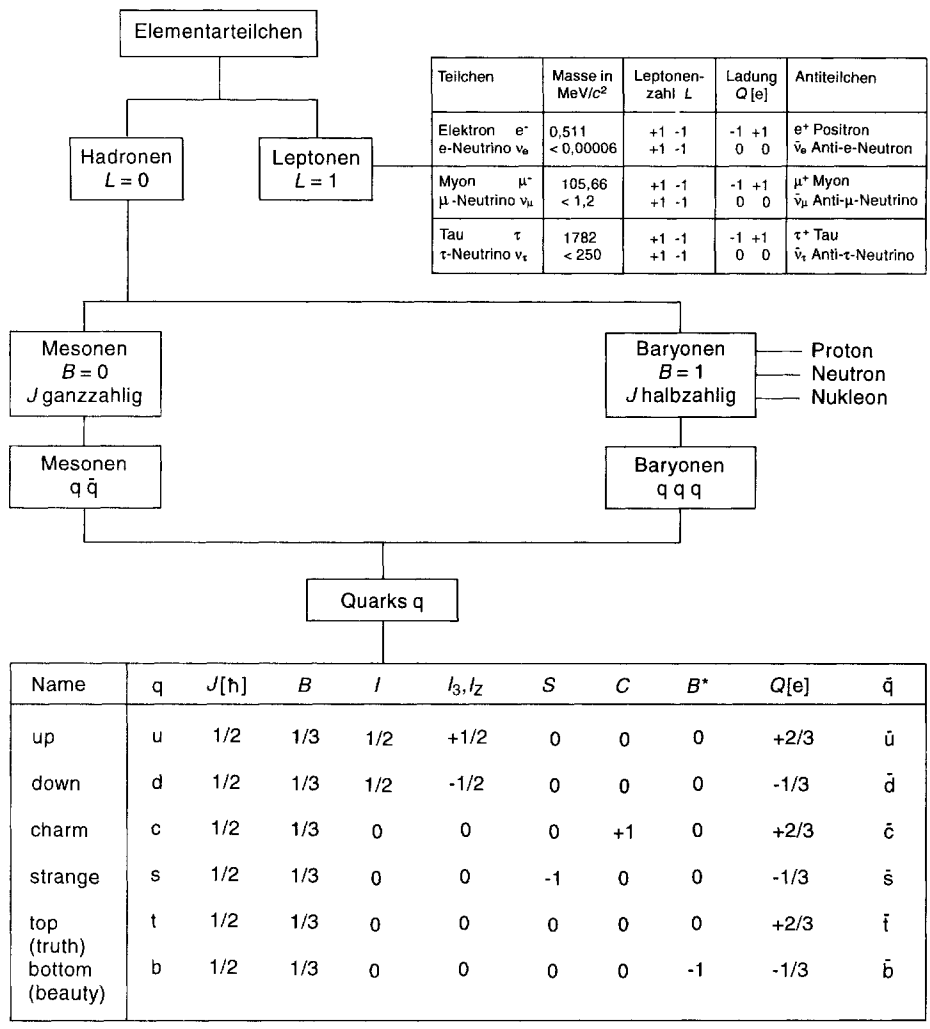


Bild T-8. Einteilung der Elementarteilchen.

Tabelle T-15. Quantenzahlen von Protonen und Neutronen.

	Proton p	Neutron n
Quarkkombination	u + u + d	u + d + d
Ladung Q	$2/3 + 2/3 - 1/3 = +1$	$2/3 - 1/3 - 1/3 = 0$
Baryonenzahl B	$1/3 + 1/3 + 1/3 = +1$	$1/3 + 1/3 + 1/3 = 1$
Isospin I_3	$1/2 + 1/2 - 1/2 = 1/2$	$1/2 - 1/2 - 1/2 = -1/2$

U Relativitätstheorie

U.1 Relativität des Bezugssystems

Die Gesetze der klassischen Mechanik gelten in *Inertialsystemen*, die sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit $v \ll c$ bewegen. Es gibt *kein bevorzugtes* Bezugssystem und keine Möglichkeit, eine Geschwindigkeit absolut zu messen.

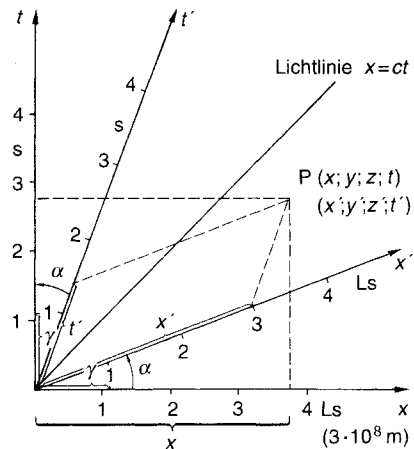
In jedem Inertialsystem breitet sich Licht unabhängig von der Relativbewegung zwischen Lichtquelle und Beobachter nach allen Richtungen mit derselben Geschwindigkeit, der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c ($c = 2,99792458 \cdot 10^8$ m/s) aus.

U.2 Lorentz-Transformation

Weil die Lichtgeschwindigkeit konstant ist, müssen die Orts- und Zeitkoordinaten der zwei sich relativ zueinander bewegenden Systeme S und S' umgerechnet werden (Lorentz-Transformation in Übersicht U-1).

Übersicht U-1. Lorentz-Transformation.

System S' (x', y', z') bewegt sich mit Geschwindigkeit v in x -Richtung relativ zum System S (x, y, z)
Ls Lichtsekunden



Umrechnung der Orts- und Zeitkoordinaten

System S	System S'
$x = \gamma(x' + vt')$	$x' = \gamma(x - vt)$
$y = y'$	$y' = y$
$z = z'$	$z' = z$
$t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$	$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$

relativistischer Faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

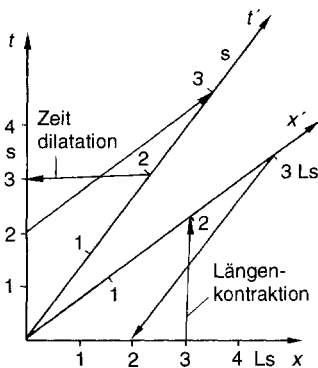
c	Lichtgeschwindigkeit
t	Zeit im System S
t'	Zeit im System S'
v	Relativgeschwindigkeit in x -Richtung zwischen S und S'
x, y, z	Ortskoordinaten des Systems S
x', y', z'	Ortskoordinaten des Systems S'
γ	relativistischer Faktor

U.3 Relativistische Effekte

Es treten folgende Effekte auf (Übersicht U-2):

- **Längenkontraktion.**
Ein relativ zu einem Beobachter sich bewegendes Körper erscheint verkürzt.
- **Zeitdilatation.**
Die Zeit läuft in einem System, das relativ zu einem Beobachter bewegt wird, langsamer.
- **Additionstheorem der Geschwindigkeiten.**
Bei Geschwindigkeitsüberlagerungen darf die Lichtgeschwindigkeit nicht überschritten werden.

Übersicht U-2. Relativistische Effekte.



Längenkontraktion

$$l' = \frac{1}{\gamma} l = \sqrt{1 - (v/c)^2} l.$$

Für alle Körper, die sich mit einer konstanten Geschwindigkeit v relativ zueinander bewegen, verkürzen sich die Längen des anderen Körpers in dieser Richtung um den Faktor $\sqrt{1 - (v/c)^2}$. Senkrecht zur Bewegungsrichtung liegende Strecken erscheinen nicht verkürzt.

Übersicht U-2 (Fortsetzung)

Zeitdilatation

$$\Delta t' = \gamma \Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Bewegen sich zwei Beobachter mit einer konstanten Geschwindigkeit v relativ zueinander, dann erscheint das Zeitintervall $\Delta t'$ des Systems S' vom System S aus betrachtet größer zu sein und umgekehrt.

relativistische Addition der Geschwindigkeiten

System S	System S'
$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}$	$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}$
$u_y = \frac{u'_y}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} u'_x\right)}$	$u'_y = \frac{u_y}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right)}$
$u_z = \frac{u'_z}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} u'_x\right)}$	$u'_z = \frac{u_z}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right)}$

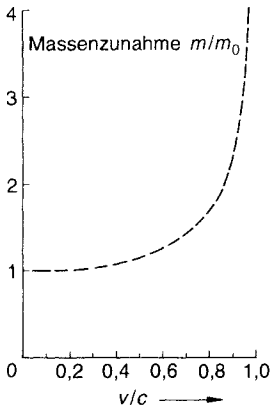
c	Lichtgeschwindigkeit ($c = 2,99792458 \cdot 10^8$ m/s)
u_x, u_y, u_z	Geschwindigkeiten im System S
u'_x, u'_y, u'_z	Geschwindigkeiten im System S'
v	Relativgeschwindigkeit
γ	relativistischer Faktor ($\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$)

U.4 Relativistische Dynamik

In der relativistischen Dynamik nimmt die Masse mit steigender Relativgeschwindigkeit zu. Dies hat Auswirkungen auf den Impuls ($p = mv$) und die Kraft ($F = ma$), wie Übersicht U-3 zeigt.

Übersicht U-3. Relativistische Dynamik.

relativistische Massenzunahme



$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \gamma m_0.$$

Ein Körper mit der Ruhemasse m_0 , der sich mit der Geschwindigkeit v relativ zu einem Inertialsystem bewegt, erfährt einen relativistischen Massenzuwachs.

relativistische Energie

$$E = m c^2.$$

Übersicht U-3 (Fortsetzung)

relativistischer Impuls

$$\mathbf{p} = m(v) \mathbf{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \mathbf{v} = \gamma m_0 \mathbf{v}.$$

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - m_0^2 c^2$$

relativistische Kraft

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \left[\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right]$$

für Relativgeschwindigkeit in x -Richtung

$$F_x = \frac{m_0 a_x}{[1 - (v/c)^2]^{3/2}} = m_0 \gamma^3 a_x$$

$$F_y = \frac{m_0 a_y}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = m_0 \gamma a_y$$

$$F_z = \frac{m_0 a_z}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = m_0 \gamma a_z$$

a_x, a_y, a_z Beschleunigung in x -, y -, z -Richtung
 c Lichtgeschwindigkeit

($c = 2,99792458 \cdot 10^8$ m/s)

E Energie

F Kraft

m, m_0 Masse, Ruhemasse

p Impuls

γ relativistischer Faktor

($\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$)

U.5 Relativistische Elektrodynamik

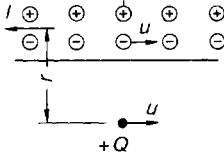
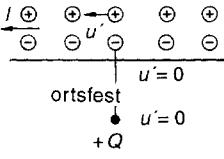
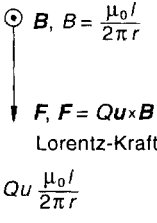
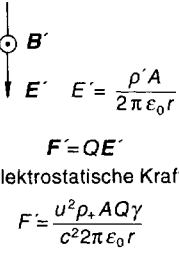
Die Relativitätstheorie macht deutlich, daß ein *rein elektrisches Feld* durch Wechsel in ein bewegtes Koordinatensystem *zusätzlich* ein *magnetisches Feld* erhält und ein *rein magnetisches Feld* ein *elektrisches*. Das bedeutet: Elektrische und magnetische Kräfte sind verschiedene Ausprägungen desselben physikalischen Phänomens: der *elektromagnetischen Wechselwirkung*.

Übersicht U-4 links zeigt ein System S. In ihm ist der Draht in Ruhe, die Elektronen fließen mit der Geschwindigkeit u nach rechts (die konventionelle Stromrichtung geht nach links). Die Ladung Q bewegt sich ebenfalls mit der Geschwindigkeit u nach rechts. Der Draht ist insgesamt elektrisch neutral. Das Magnet-

feld des Stroms erzeugt eine Lorentz-Kraft, welches die Ladung Q vom Draht abstößt.

In Übersicht U-4 rechts bewegt sich das System mit der Geschwindigkeit u nach rechts. Im System S' ruhen die Ladung Q und die Elektronen des Leiters. Die positiven Ionen laufen dafür nach links mit der Geschwindigkeit $u' = -u$. Das System S' ist aber nicht neutral: Wegen der *Längenkontraktion* ist der Abstand zwischen den positiven Ionen kleiner und der Abstand zwischen den Elektronen größer als im System S. Dadurch entsteht eine positive Ladungsdichte. Zusätzlich zum Magnetfeld entsteht so ein radial nach außen gerichtetes elektrisches Feld, das die ruhende Ladung Q abstößt.

Übersicht U-4. Elektrodynamische Kräfte.

	System S (Laborsystem)	System S'
Geometrie	<p>ortsfest</p> 	
Ladungsdichte im Leiter	$\rho_+ = -\rho_-$ $\rho = \rho_+ + \rho_- = 0$ elektrisch neutral	$\rho'_+ = \rho_+ \gamma > \rho_+, \rho'_- = \frac{\rho_-}{\gamma} < \rho_-$ $\rho' = \rho'_+ + \rho'_- = \rho_+ \gamma \frac{u^2}{c^2}$ positiv geladen
Feld und Kraft auf Ladung Q		

$$\mathbf{F}'_{\text{el}} = \gamma \mathbf{F}_{\text{magn}}; \quad c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}.$$

A	Querschnittsfläche
B	magnetische Induktion
c	Lichtgeschwindigkeit ($c = 2,99792458 \cdot 10^8$ m/s)
E	elektrische Feldstärke
F_{el}	elektrische Kraft
F_{magn}	magnetische Kraft
Q	Ladung
r	Abstand der Ladung Q zur Leitermitte
v	Geschwindigkeit
γ	relativistischer Faktor [$\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$]
ρ	Ladungsdichte
ϵ_0	elektrische Feldkonstante [$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ A · s/(V · m)]
μ_0	magnetische Feldkonstante [$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ V · s/(A · m)]

Die mit ' bezeichneten Größen gelten für das bewegte System.

U.6 Doppler-Effekt des Lichtes

Wenn Sender und Empfänger elektromagnetischer Wellen sich relativ zueinander mit der Geschwindigkeit v bewegen, ist die Frequenz der empfangenen Strahlung verschieden von der Senderfrequenz (Übersicht U-5).

Während beim Doppler-Effekt der Schallwellen (Abschnitt J.2.5) unterschieden werden muß, ob sich die Quelle oder der Beobachter relativ zum Übertragungsmedium Luft bewegen, ist beim Doppler-Effekt des Lichtes nur die Relativbewegung zwischen Quelle und Beobachter relevant (elektromagnetische Wellen benötigen kein Übertragungsmedium).

Kosmologische Rotverschiebung

Die Spektren des Lichts, das wir von fernen Galaxien empfangen, sind gegenüber bekannten Spektren irdischer Lichtquellen zu größeren Wellenlängen hin verschoben. Diese *Rotverschiebung* infolge des Doppler-Effekts zeigt, daß sich das Universum ausdehnt. HUBBLE fand eine lineare Beziehung zwischen der Entfernung r von Galaxien und ihrer Fluchtgeschwindigkeit v :

$$v = H r.$$

H Hubble-Parameter

$$H = (50 \dots 100) \text{ km/(s} \cdot \text{Mpc)}$$

$$= (15 \dots 30) \text{ km/(s} \cdot 10^6 \text{ Lj)}$$

$$1 \text{ pc (Parsec)} = 3,0856 \cdot 10^{13} \text{ km}$$

$$= 3,2615 \text{ Lj (Lichtjahre)}$$

Übersicht U-5. Doppler-Effekt des Lichts.

longitudinaler Doppler-Effekt

(Beobachter bewegt sich längs der Lichtstrahlen)

Beobachter entfernt sich
von der Quelle

$$f' = f \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

Beobachter nähert sich
der Quelle

$$f' = f \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

transversaler Doppler-Effekt

(Beobachter bewegt sich senkrecht zum Lichtstrahl)

$$f' = f \sqrt{1 - (v/c)^2} = f/\gamma$$

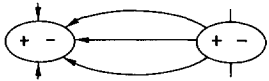
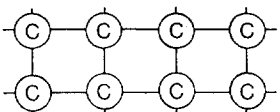
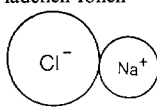
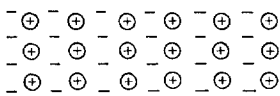
c	Lichtgeschwindigkeit ($c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$)
f	Frequenz im ruhenden System
f'	Frequenz im bewegten System
v	Relativgeschwindigkeit
γ	relativistischer Faktor $[\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}]$

V Festkörperphysik

V.1 Arten der Kristallbindung

Zwischen Atomen bzw. Molekülen fester Körper wirken ausschließlich elektrostatische Kräfte der Anziehung und Abstoßung. Dies führt zu verschiedenen Bindungsarten (Tabelle V-1).

Tabelle V-1. Bindungsarten.

Bindungsart	Kraftwirkungen	Bindungsenergie eV/Atom	Beispiele	Eigenschaften
van der Waals	<p>Zwischen zwei isolierten Atomen mit permanentem oder induziertem Dipolmoment</p> 	$E_B \sim \frac{1}{r^6}$ 10^{-2} bis 10^{-1}	Edelgaskristalle, H_2 , O_2 , Molekulkristalle, Polymere	Isolator, leicht komprimierbar, niedriger Schmelzpunkt, durchlässig für Licht im fernen UV
kovalent (homöopolar)	<p>Elektronenpaarbindung</p> 	1 bis 7	viele organische Stoffe, Elemente der Vierergruppe, C, Si, InSb	Isolator oder Halbleiter, sehr schwer verformbar, hoher Schmelzpunkt
Ionen (heteropolar)	<p>zwischen zwei verschieden geladenen Ionen</p> 	$E_B = \frac{Q^2 \cdot \alpha}{4\pi \epsilon_0 r}$ $(\alpha \approx 1,75)$ 6 bis 20	Salze (NaCl, KCl) BaF_2	Isolator bei niedrigen Temperaturen, Ionenleitung bei hohen Temperaturen, plastisch verformbar
metallisch	<p>zwischen festen Atomrümpfen und frei beweglichen Elektronen</p> 	1 bis 5	Metalle, Legierungen	elektrischer Leiter, guter Wärmeleiter, plastisch verformbar, reflektiert im IR, reflektiert Licht (durchlässig im UV)

E_B	Bindungsenergie	r	Abstand der Atome
Q	Ladung	α	Madelung-Konstante
		ϵ_0	elektrische Feldkonstante [$\epsilon_0 = 8,85412 \cdot 10^{-12} \text{ A} \cdot \text{s}/(\text{V} \cdot \text{m})$]

V.2 Kristalline Strukturen

V.2.1 Kristallsysteme und dichteste Kugelpackungen

In einem Kristall befinden sich die Atome in jeder Raumrichtung in gleichmäßigen Abständen an den Kreuzungspunkten eines räumlichen Gitters, dessen kleinstes Element die *Elementarzelle* ist. Sie wird beschrieben durch die *Atomabstände* entlang den Koordinatenachsen (x-Achse: a; y-Achse: b; z-Achse: c) und den Winkeln α , β und γ zwischen den Kristallachsen. Die sieben Kristallsysteme mit










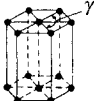




ihren Varianten ergeben die 14 *Bravais-Gitter* (Tabelle V-2).

Die Atome liegen besonders dicht beieinander, wenn aufeinanderfolgende Kugelebenen die Lücken der Ausgangsebenen besetzen. Es gibt drei unterschiedliche Anordnungen *dichtester Kugelpackungen* (Tabelle V-4).

V.2.2 Richtungen und Ebenen im Kristallgitter

Kristallrichtungen und Richtungen von Ebenen werden durch *Millersche Indizes* angegeben. Sie sind die *reziproken Werte* der Achsenabschnitte der Kristallrichtungen (Übersicht V-1).

Tabelle V-2. *Bravais-Gitter*.

	primitiv	flächen- zentriert	basis- zentriert	raum- zentriert
kubisch $a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$				
tetragonal $a = b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$				
orthorhombisch $a \neq b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$				
hexagonal $a = b \neq c$ $\alpha = \beta = 90^\circ$ $\gamma = 120^\circ$				
rhomboedrisch $a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$				
monoklin $a \neq b \neq c$ $\alpha = \gamma = 90^\circ$ $\beta \neq 90^\circ$				
triklin $a \neq b \neq c$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$ $\neq 120^\circ$				

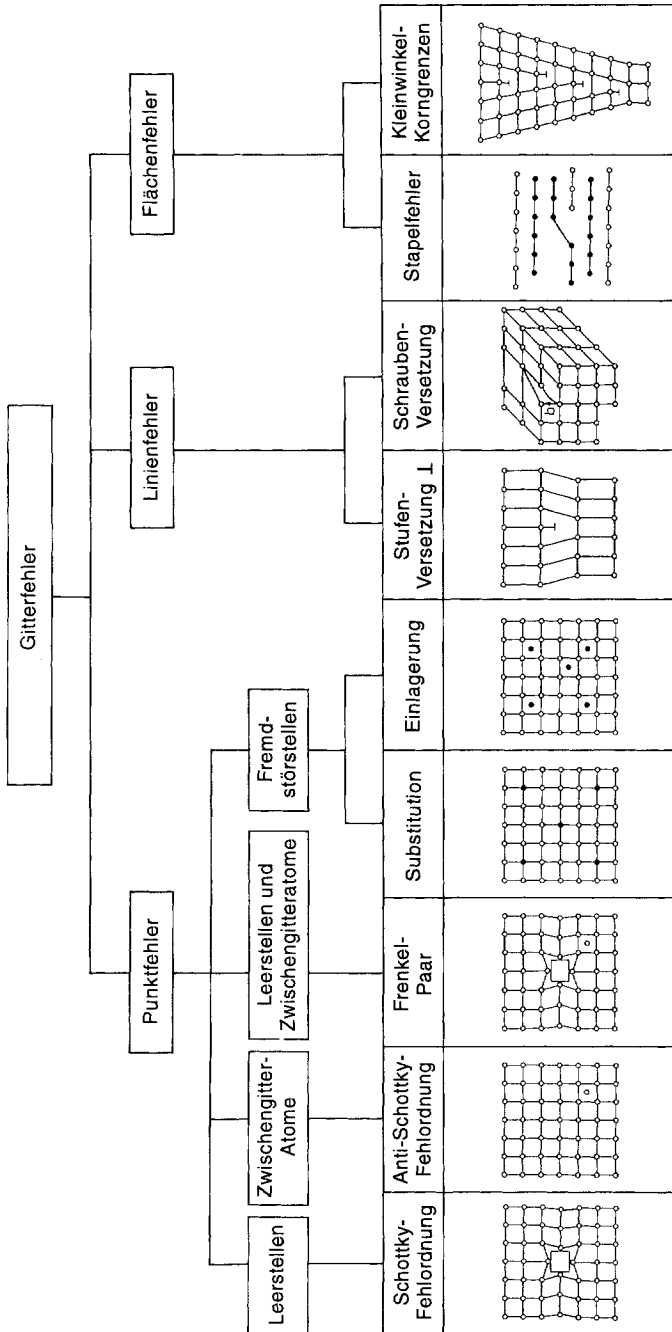


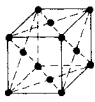
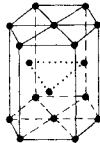

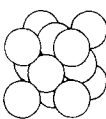
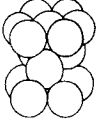
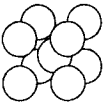
Bild V-1. Gitterfehler.

Tabelle V-3. Atomare Konstanten einiger Metalle mit kubisch-flächenzentrierter und kubisch-raumzentrierter Struktur.

kubisch-raum-zentriert	Dichte ρ g/cm ³	Gitter-konstante a 10^{-10} m	Abstand zweier nächster Nachbarn 10^{-10} m
Cs	1,9	6,08	5,24
K	0,86	5,33	4,62
Ba	3,5	5,01	4,43
Na	0,97	4,28	3,71
Zr	6,5	3,61	3,16
Li	0,53	3,50	3,03
W	19,3	3,16	2,73
Fe	7,87	2,86	2,48

kubisch-flächen-zentriert	Dichte ρ g/cm ³	Gitter-konstante a 10^{-10} m	Abstand zweier nächster Nachbarn 10^{-10} m
Ce	6,9	5,16	3,64
Pb	11,34	4,94	3,49
Ag	10,49	4,08	2,88
Au	19,32	4,07	2,88
Al	2,7	4,04	2,86
Pt	21,45	3,92	2,77
Cu	8,96	3,61	2,55
Ni	8,90	3,52	2,49

Tabelle V-4. Gittertypen dichtester Kugelpackungen.

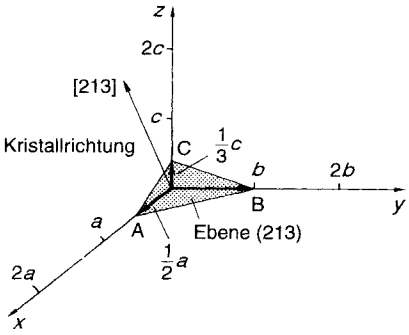
	Gittertypen		
Eigen-schaften	kubisch-flächen-zentriert	hexagonal dichteste Kugel-packung	kubisch-raum-zentriert
Elementar-zelle			
Kugel-modell			
Packungs-dichte	74%	74%	68%
Atom-anzahl je Zelle	4	2	2
Koordina-tionszahl	12	12	8
dichtest gepackte Richtung	Flächen-diagonale	Sechseck-seite	Raum-diagonale

V.2.3 Gitterfehler

Der periodisch regelmäßige Kristallaufbau kann Fehler aufweisen (Gitterfehler), die zu veränderten Materialeigenschaften führen. Mit absichtlich eingebauten Fehlern können die Werkstoffeigenschaften gezielt verändert werden (Bild V-1).

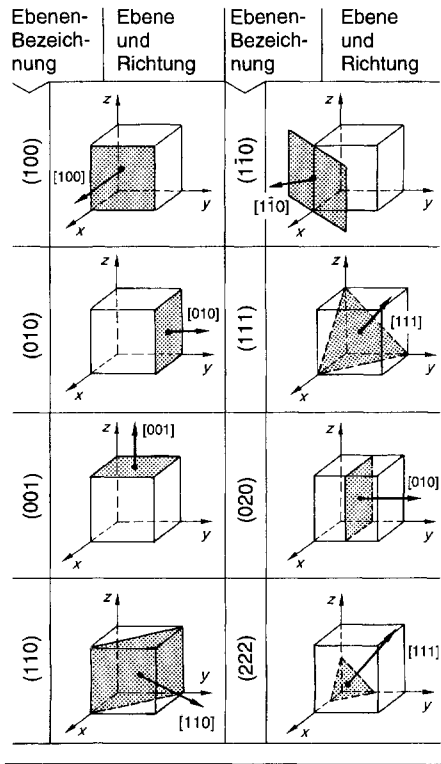
Übersicht V-1. Indizierung der Kristallrichtungen und Kristallebenen (Millersche Indizes).

Indizierung der Kristallrichtung und Kristallebene



Übersicht V-1 (Fortsetzung)

Beispiele für Kristallrichtungen und Kristallebenen



V.3 Makromolekulare Festkörper

Makromolekulare Festkörper sind aus sehr langen Molekülen aufgebaut. Sie bestehen entweder aus einem Riesenmolekül oder aus vielen kleinen Molekülen, die durch *homöopolare Elektronenpaarbindung* zusammengehalten werden. So entstehen Faden-, Schicht- und Raumnetzstrukturen.

Das Verformungsverhalten kann durch eine Kombination des elastischen Verhaltens (Federgesetz nach HOOKE) mit einem viskosen Verhalten (Dämpfungsglied nach NEWTON) erklärt werden. In der *Rheologie* wird die Verformung auch durch andere Modelle beschrieben (Tabelle V-6).

Tabelle V-5. Einteilung der Kunststoffe (Polymerwerkstoffe).

<div>Polymerwerkstoff</div> <div>Charakteristik</div>	Thermoplaste	Elastomere	Duomere
Schmelzverhalten	schmelzbar	nicht schmelzbar	nicht schmelzbar
Quellverhalten	quellbar	quellbar	nicht quellbar
Löslichkeit	löslich	nicht löslich	nicht löslich
Struktur	Molekülknäuel, unvernetzt, amorph, teilkristallin	weitmaschig vernetzt, amorph, teilkristallin	engmaschig vernetzt
Umweltfreundlichkeit	wiederverwendbar (200 °C)	nicht wiederverwendbar (pyrolisierbar)	

Tabelle V-5 (Fortsetzung)

Polymer- werkstoff	Thermoplaste	Elastomere	Duromere
Charakteristik			
Verarbeitung	alle Verfahren	alle Verfahren, Formgebung vor oder während der Vernetzung („Vulkanisieren“)	Pressen, Spritzgießen, Formgebung während der Vernetzung („Härtung“)
Beispiele	Polyethylen (PE), Polyvinylchlorid (PVC), Polystyrol (PS), Polyamid (Nylon, Perlon), Polyester (Trevira), Polyacrylnitril (Dralon), Polycarbonat (Macrolon)	Buna, Kautschuk, Silicon Rubber (SIR), Polychloropren (CR), Neopren	Phenolformaldehyd, Melaminformaldehyd, Harnstoffformaldehyd, (ungesättigter Polyester) (UP), Epoxidharz (EP)

Tabelle V-6. Verformungsmodelle von Kunststoffen.

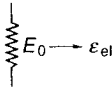
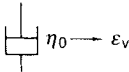
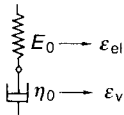
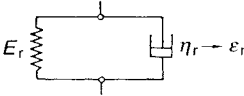
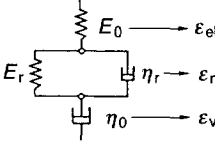
Modell	Verhalten
	Feder: Elastisches Verhalten (Hooke) $\sigma = E_0 \varepsilon_{el}$
	Dämpfungsglied: Viskoses oder plastisches Verhalten (Newton) $\sigma = \eta_0 \dot{\varepsilon}_v$
	Maxwell-Modell: (Feder und Dämpfer in Reihe) Elastisch-viskoses (plastisches) Verhalten $\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_v \rightarrow \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{el} + \dot{\varepsilon}_v = \frac{\dot{\sigma}}{E_0} + \frac{\sigma}{\eta_0}$ $\varepsilon(t) = \left(1 + \frac{t}{\tau_0}\right) \frac{\sigma_0}{E_0} u(t) \quad \tau_0 = \frac{\eta_0}{E_0}$
	Voigt-Kelvin-Modell: (Feder und Dämpfer parallel) Viskoelastisches Verhalten (relaxierendes Verhalten) $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = E_r \varepsilon_r + \eta_r \dot{\varepsilon}_r$ $\varepsilon_r(t) = \frac{1}{E_r} (1 - e^{-t/\tau_r}) \dot{\sigma} u(t) \quad \dot{\varepsilon}_r + \frac{\varepsilon_r}{\tau_r} = \frac{\sigma}{\eta_r} \quad \tau_r = \frac{\eta_r}{E_r}$

Tabelle V-6 (Fortsetzung)

		Burger-Modell: $\varepsilon = \varepsilon(\text{Maxwell}) + \varepsilon(\text{Voigt-Kelvin})$ $\varepsilon(t) = \left[\frac{1}{E_0} + \frac{t}{\eta_0} + \frac{1}{E_r} (1 - e^{-t/\tau}) \right] \hat{\sigma} u(t)$	
E	Elastizitätsmodul	ε_r	Relaxationsdehnung
t	Zeit	σ	Spannung
$u(t)$	Springfunktion	η_0	statische Viskosität
ε	Dehnung	η_r	dynamische Viskosität der Relaxation
ε_{el}	elastische Dehnung	τ	Relaxationszeit

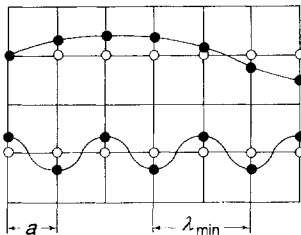
V.4 Thermodynamik fester Körper

V.4.1 Schwingendes Gitter (Phononen)

Die regelmäßig angeordneten Atome eines Kristallgitters führen Schwingungen um ihre Ruhelagen aus, wenn sie von außen angeregt werden. Diese Gitterschwingungen sind quantelt; ihre Quanten heißen *Phononen* (Übersicht V-2).

Übersicht V-2. Transversale Gitterwellen und Phononen.

transversale Gitterwellen



$$E_{\text{Phonon}} = hf = \hbar \omega$$

$$p_{\text{Phonon}} = h/\lambda = \hbar k$$

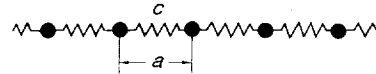
- a Gitterkonstante (Atomabstand)
- E Energie
- f Frequenz
- h Plancksches Wirkungsquantum
($h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$)
- \hbar Plancksche Konstante ($\hbar = h/2\pi$)
- k Wellenzahl
- p Impuls
- λ Wellenlänge
- ω Kreisfrequenz

Gitterschwingungen können demnach beschrieben werden, als ob Teilchen sich mit der Schallgeschwindigkeit c_s durch den Kristall bewegen, mit anderen Teilchen zusammenstoßen und Energie und Impuls austauschen. Eine lineare Atomkette zeigt als gekoppeltes Schwingungssystem die in Übersicht V-3 zusammengestellten Abhängigkeiten.

Wie Übersicht V-3 deutlich zeigt, ergibt sich ein *Phononenspektrum*, in dem die Frequenz f

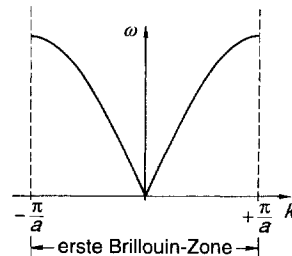
Übersicht V-3. Gitterwellen einer linearen Atomkette.

lineare Atomkette



Dispersion

$$\omega = \sqrt{\frac{2c}{m}} (1 - \cos ka) = \sqrt{\frac{4c}{m}} \sin \frac{ka}{2}$$

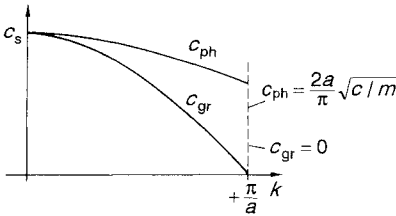


maximale Wellenzahl $k_{\text{max}} = \pi/a$

minimale Wellenlänge $\lambda_{\text{min}} = 2a$

Übersicht V-3 (Fortsetzung)

Gruppen- und Phasengeschwindigkeit



$$c_{gr} = a \sqrt{\frac{c}{2m}} \frac{\sin ka}{\sqrt{1 - \cos ka}}$$

$$c_{ph} = \sqrt{\frac{2c}{m}} \frac{\sqrt{1 - \cos ka}}{k}$$

maximale Schallgeschwindigkeit $c_{s, \max}$

$$c_{s, \max} = \sqrt{a^3 E/m} = \sqrt{E/\rho}$$

$$\omega_{\max} = 2 \sqrt{c/m}$$

$$f_{\max} = \frac{1}{\pi} \sqrt{a E/m}$$

a	Gitterkonstante
c	Federkonstante
c_{gr}	Gruppengeschwindigkeit
c_{ph}	Phasengeschwindigkeit
c_s	Schallgeschwindigkeit
E	Elastizitätsmodul
f	Frequenz
k	Wellenzahl ($k = 2\pi/\lambda$)
m	Masse
ρ	Dichte
ω	Kreisfrequenz
λ	Wellenlänge

von der Wellenlänge λ bzw. von der Wellenzahl k abhängt (*Dispersion*). Alle vorkommenden Wellenzahlen liegen innerhalb der ersten Brillouin-Zone ($-\frac{\pi}{a} \leq k \leq \frac{\pi}{a}$).

Sind zwei oder mehr Atome in einer Elementarzelle, dann ergeben sich je nach Schwingungstyp verschiedene Dispersionsrelationen, die in *akustische* (TA: transversal akustisch und LA: longitudinal akustisch) und *optische* Dispersionsrelationen (TO: transversal optisch und LO: longitudinal optisch) eingeteilt werden (Bild V-2).

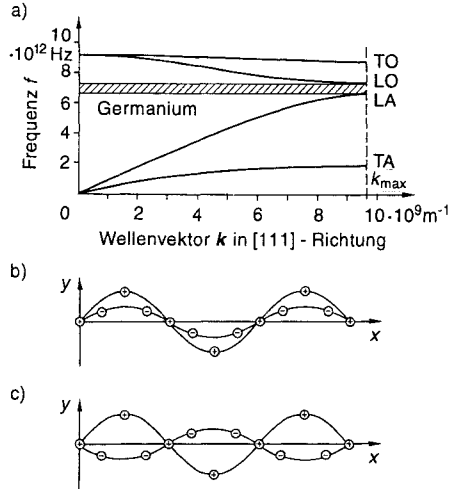


Bild V-2. Dispersion von Germanium (a), akustische (b) und optische Phononen (c).

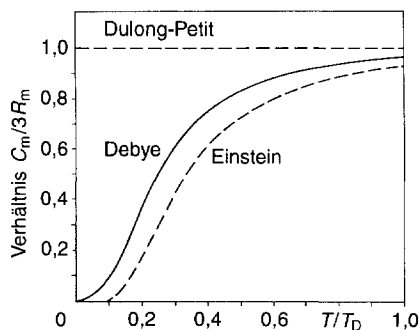
V.4.2 Molare und spezifische Wärmekapazität

Ein schwingungsfähiges System besitzt eine Schwingungsenergie, die sich gleichmäßig auf die potentielle und kinetische Energie aufteilt. Aufgrund der drei Freiheitsgrade eines Gitterbausteins gilt die *Dulong-Petitsche Regel*. Die tatsächlich gemessenen molaren Wärmekapazitäten weichen, vor allem bei tiefen Temperaturen, festem Gitterbindungen und leichten Atomen, sehr stark von diesem Wert ab. Deshalb schlug EINSTEIN eine *Quantelung* der Schwingungsenergie vor, und DEBYE ging davon aus, daß der Energieinhalt eines festen Körpers in den stehenden Wellen der N Gitterschwingungen gespeichert ist (Übersicht V-4).

Tabelle V-7. Debye-Temperatur T_D einiger Stoffe.

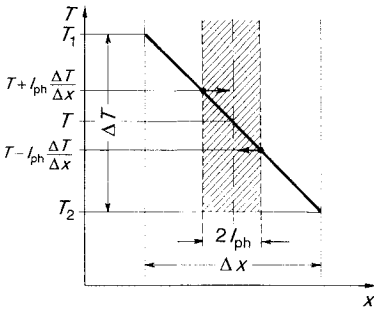
Stoff	T_D	Stoff	T_D in K
Pb	88	Mg	405
Na	172	Al	428
Ag	226	LiF	740
NaCl	281	Diamant	1860
Cu	345		

Übersicht V-4. Innere Energie und molare Wärmekapazität der Festkörper nach DULONG-PETIT, EINSTEIN und DEBYE.



<p>Boltzmann-Verteilung</p> $U = 3 \frac{N h f}{e^{kT} - 1}$	<p>Debye</p> $U = 9 N k T \frac{T^3}{T_D^3} \int_0^{z_D} \frac{z^3}{e^z - 1} dz$ <p>$z = (h f)/(k T)$ und $z_D = T_D/T$</p>
<p>Einstein-Temperatur</p> $T_E = h f/k$	<p>Debye-Temperatur</p> $T_D = h f_{gr}/k$
<p>$T \gg T_E$ und $T \gg T_D$: $U \approx 3 N k T = 3 \nu R_m T$ und $C_m = 3 R_m$ (Dulong-Petit)</p>	
<p>$T \ll T_E$</p> $U = 3 N h f e^{-\frac{h f}{k T}}$ $C_m = 3 R_m \left(\frac{h f}{k T} \right)^2 e^{-\frac{h f}{k T}}$	<p>$T \ll T_D$</p> $U = \frac{3}{5} \pi^4 N k T \frac{T^3}{T_D^3}$ $C_m = \frac{12}{5} \pi^4 R_m \frac{T^3}{T_D^3}$
<p>C_m molare Wärmekapazität f Frequenz f_{gr} Grenzfrequenz h Plancksches Wirkungsquantum $(h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})$ k Wellenzahl</p>	<p>N Anzahl der schwingenden Punkte R_m molare Gaskonstante T Temperatur T_D Debye-Temperatur T_E Einstein-Temperatur U innere Energie ν Stoffmenge (Anzahl Mol)</p>

Übersicht V-5. Wärmeleitung im Isolator und im Metall.



$$j_q = \lambda \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

Isolator

$$j_q = \frac{1}{2} n_{ph} k c_s l_{ph} \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} n_{ph} k c_s l_{ph}$$

$$\lambda = \frac{1}{3} \varrho c c_s l_{ph}$$

Metall

$$\lambda_{el} = \frac{1}{3} \pi^2 \frac{n}{m} k^2 \tau T$$

Bei konstanter Temperatur ist für alle Metalle die Wärmeleitfähigkeit λ proportional der elektrischen Leitfähigkeit κ :

$$\lambda = L T \kappa.$$

c	spezifische Wärmekapazität
c_s	Schallgeschwindigkeit der Phononen
j_q	Wärmestromdichte
k	Boltzmann-Konstante ($k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$)
L	Lorenzsche Zahl ($L = 2,45 \cdot 10^{-8} \text{ V}^2/\text{K}^2$)
l_{ph}	mittlere freie Phononenweglänge
m	Masse
n	Dichte der Elektronen
n_{ph}	Dichte der Phononen ($n_{ph} = N_{ph}/V$; N_{ph} Anzahl der Phononen; V Volumen)
T	Temperatur
$\Delta T/\Delta x$	Temperaturgefälle in x -Richtung
λ	Wärmeleitfähigkeit
κ	elektrische Leitfähigkeit
τ	Relaxationszeit

V.4.3 Wärmeleitfähigkeit

Zwar breiten sich die Phononen im Festkörper mit Schallgeschwindigkeit aus, doch der Wärmetransport ist bedeutend langsamer. Bei den Metallen wird Wärme nicht nur durch die Phononen, sondern auch durch die freien Elektronen übertragen (Übersicht V-5). Es gilt für Metalle, daß gute elektrische Leiter auch gute Wärmeleiter sind (und umgekehrt).

W Metalle und Halbleiter

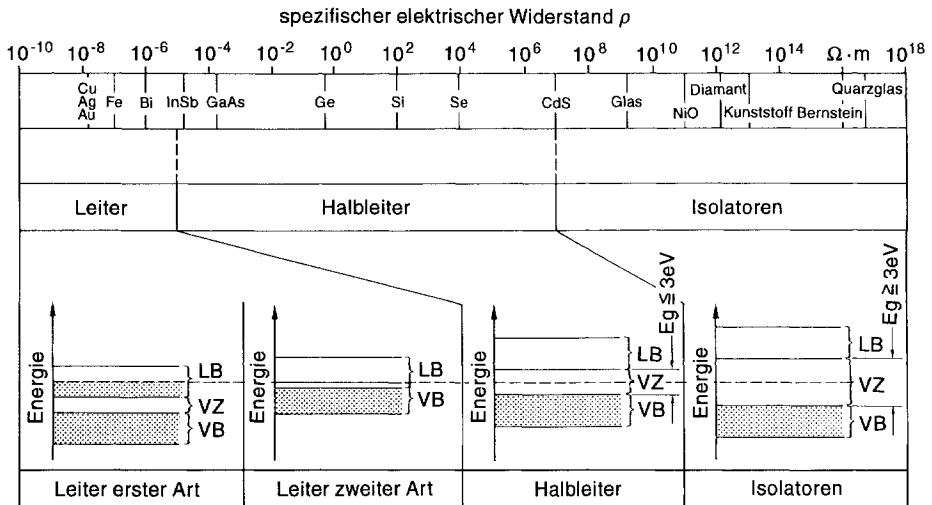


Bild W-1. Spezifischer elektrischer Widerstand (Resistivität) und Bändermodell von Festkörpern. Die mit Elektronen besetzten Zustände sind grau gekennzeichnet.

Anhand des spezifischen elektrischen Widerstandes (Resistivität) ρ wird eingeteilt in (Bild W-1):

- Leiter $\rho < 10^{-5} \Omega \cdot m$,
- Halbleiter $10^{-5} < \rho < 10^7 \Omega \cdot m$,
- Isolatoren $\rho > 10^7 \Omega \cdot m$.

W.1 Energiebänder

Die scharfen Energieniveaus der Elektronen in einzelnen Atomen werden durch Wechselwirkung mit Nachbarn verbreitert, so daß in Festkörpern die Elektronen Energien innerhalb mehr oder weniger breiter Bänder annehmen können.

Elektronen halten sich in Festkörpern innerhalb erlaubter Energiebänder auf, die durch verbotene Zonen voneinander getrennt sind.

Fließt in einem Festkörper ein elektrischer Strom, dann erhöht sich die Energie der Elektronen um die kinetische Energie der Driftbewegung. Sie werden dadurch auf höhere Energiezustände gehoben. Dies ist nur möglich, wenn das höchste mit Elektronen besetzte Band nicht voll besetzt ist. Dieses Band wird als *Leitungsband* (LB im Bild W-1) bezeichnet. Hat das oberste mit Elektronen besetzte Band *keine* freien Energiezustände, dann ist der Festkörper ein *Isolator* bzw. *Halbleiter*. Dieses Band wird als *Valenzband* (VB im Bild W-1) bezeichnet. Anhand der Breite E_g (energy gap) der verbotenen Zone (VZ) wird in Halbleiter und Isolatoren eingeteilt (Bild W-1).

W.2 Metalle

Im Modell des *freien Elektronengases* können sich die *Leitungselektronen* innerhalb des Kristalls frei bewegen (Tabelle W-1).

Tabelle W-1. Modell des freien Elektronen-gases.

kinetische Energie der Leitungselektronen	$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$
Impuls und Materiewellenlänge der Elektronen	$p = \hbar/\lambda = \hbar k$
Fermi-Energie; höchstes mit Elektronen gefülltes Energieniveau	$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}$
Wellenzahl des Fermi-Niveaus	$k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$
Fermi-Geschwindigkeit	$v_F = \frac{\hbar}{m} (3\pi^2 n)^{1/3}$

E kinetische Energie
 E_F Fermi-Energie
 \hbar Plancksche Konstante ($\hbar = h/2\pi$)
 k Wellenzahl ($k = 2\pi/\lambda$)
 m Elektronenmasse
 n Teilchenzahldichte ($n = N/V$)
 p Impuls
 λ Wellenlänge der Materiewelle

W.2.1 Energiezustände und Besetzung

Die möglichen Energiezustände der Elektronen im Leitungsband sind nicht gleichmäßig auf der Energieleiter angeordnet, sondern werden mit zunehmender Energie immer dichter. Die *Zustandsdichte* $D(E)$ gibt die Zahl der Energiezustände je Energieintervall dE und Volumeneinheit an (Übersicht W-1). Die Wahrscheinlichkeit, mit der ein bestimmter Energiezustand E besetzt ist, wird durch die *Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion* $f(E)$ beschrieben (Übersicht W-1).

W.2.2 Elektrische Leitung

In einem elektrischen Feld werden die Elektronen beschleunigt und zugleich durch Stoßprozesse im Kristall abgebremst. Bei konstanter Feldstärke folgt das *Ohmsche Gesetz* (Tabelle W-2).

Übersicht W-1. Zustandsdichte und Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion.

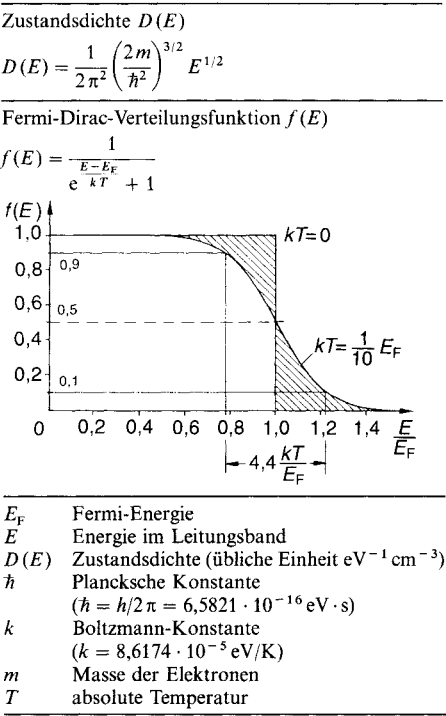


Tabelle W-2. Ohmsches Gesetz.

Differentialgleichung der Elektronenbeschleunigung	$\frac{dv_d}{dt} = -\frac{eE}{m} - \frac{v_d}{\tau}$
stationäre Driftgeschwindigkeit bei konstanter Feldstärke	$v_{d,0} = -\frac{e}{m} \tau E_0$ $= -\mu E_0$
elektrische Stromdichte (Ohmsches Gesetz)	$j = -en v_{d,0}$ $= \frac{e^2}{m} n \tau E_0$
elektrische Leitfähigkeit	$\kappa = en \mu$

E elektrische Feldstärke
 e Elementarladung
 m Elektronenmasse
 n Elektronenzahldichte
 v_d Driftgeschwindigkeit
 κ elektrische Leitfähigkeit
 μ Beweglichkeit
 τ Relaxationszeit

W.3 Halbleiter

Halbleiter haben bei tiefen Temperaturen ein mit Elektronen gefülltes Valenzband, welches durch eine *verbotene Zone* (Energieschlücke; energy gap) vom leeren Leitungsband getrennt ist (Bild W-1). Tabelle W-3 zeigt einige halbleitende Substanzen; Daten von Ge, Si und GaAs sind in Tabelle W-4 enthalten.

Tabelle W-3. Halbleitende Verbindungen.

Gruppen des Periodensystems zur Kombination der Elemente	Beispiele
IV IV–IV III–V II–VI	Si, Ge, Sn (grau) SiC GaAs, InSb ZnTe, CdSe, HgS

W.3.1 Eigenleitung

Bei $T = 0 \text{ K}$ ist die Leitfähigkeit eines Halbleiters null. Mit steigender Temperatur werden durch die Gitterschwingungen Bindungen zwischen benachbarten Atomen aufgerissen, so daß frei bewegliche Elektronen erzeugt werden. Im Bändermodell entspricht dies einer Anhebung von Elektronen vom Valenzband über die Energieschlücke ins Leitungsband (Tabelle W-5). Die im Valenzband zurückbleibenden Löcher verhalten sich wie positive Teilchen und tragen wie die Elektronen zum elektrischen Strom bei (Tabelle W-6).

W.3.2 Störstellenleitung

Der spezifische Widerstand eines Halbleiters ändert sich drastisch bei *Dotierung* mit Fremdstoffen. Je nach Dotierstoff beruht die Leitung

Tabelle W-4. Daten der Halbleiter Ge, Si und GaAs.

Die Zahlenwerte gelten für $T = 300 \text{ K}$.

	Ge	Si	GaAs
Kristallstruktur	Diamant	Diamant	Zinkblende
Gitterkonstante a in 10^{-10} m	5,65771	5,43043	5,65325
linearer Ausdehnungskoeffizient α in 10^{-6} K^{-1}	5,90	2,56	6,86
spezifische Wärmekapazität c in $\text{kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$	0,31	0,70	0,35
Wärmeleitfähigkeit λ in $\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$	64	145	46
Schmelzpunkt ϑ , in $^{\circ}\text{C}$	937	1415	1238
Atomdichte N/V in 10^{22} cm^{-3}	4,42	5,0	4,42
Dichte ρ in kg/m^3	5326,7	2328	5320
Molmasse M in g/mol	72,60	28,09	144,63
Bandgap E_g in eV	0,660	1,11	1,43
intrinsische Trägerdichte n_i in cm^{-3}	$2,33 \cdot 10^{13}$	$1,02 \cdot 10^{10}$	$2,00 \cdot 10^6$
Effektive Zustandsdichte im Leitungsband N_L in cm^{-3} im Valenzband N_V in cm^{-3}	$1,24 \cdot 10^{19}$ $5,35 \cdot 10^{18}$	$2,85 \cdot 10^{19}$ $1,62 \cdot 10^{19}$	$4,55 \cdot 10^{17}$ $9,32 \cdot 10^{18}$
Beweglichkeit μ_n in $\text{cm}^2/(\text{V} \cdot \text{s})$ μ_p in $\text{cm}^2/(\text{V} \cdot \text{s})$	3900 1900	1350 480	8500 435
relative Dielektrizitätszahl ϵ_r	16	11,8	12,9

Tabelle W-5. Leitungsmechanismen in Halbleitern.

	Eigenleitung	Störstellenleitung	
		n-dotiert (Elektronenleitung)	p-dotiert (Löcherleitung)
Elemente	Gruppe IV vier Valenzelektronen: C, Si, Ge, Sn	Gruppe V fünf Valenzelektronen: N, P, As, Sb (Donatoren)	Gruppe III drei Valenzelektronen: B, Al, Ga, In (Akzeptoren)
Kristallgitter			
Bändermodell			

Tabelle W-6. Gleichungen zur Eigenleitung.

elektrische Leitfähigkeit	$\kappa = e(n\mu_n + p\mu_p)$
Eigenleitungsdichte (intrinsische Ladungsträgerdichte)	$n_i(T) = \sqrt{N_L N_V} e^{-\frac{E_g}{2kT}}$ $= n_{i0} T^{3/2} e^{-\frac{E_g}{2kT}}$
Produkt von Elektronen- und Löcherdichte (unabhängig von Dotierung)	$np = n_i^2 = n_{i0}^2 T^3 e^{-\frac{E_g}{kT}}$
Beweglichkeit	$\mu(T) = \mu_0 (T/T_0)^{-3/2}$
ohmscher Widerstand eines Halbleiters	$R(T) \approx R_0 e^{\frac{E_g}{2kT}}$

E_g Energielücke (band gap)
 e Elementarladung
 k Boltzmann-Konstante
 N_L effektive Zustandsdichte des Leitungsbandes
 N_V effektive Zustandsdichte des Valenzbandes
 n Elektronendichte
 p Löcherdichte
 T absolute Temperatur
 κ Leitfähigkeit
 μ_n Elektronenbeweglichkeit
 μ_p Löcherbeweglichkeit

Tabelle W-4

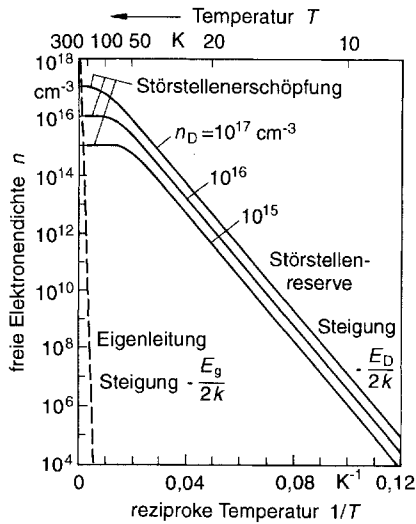
Tabelle W-7. Eigenschaften von Dotierstoffen.

	Platz des Dotierstoffs im Periodensystem	
	Gruppe III	Gruppe V
Bezeichnung	Akzeptor	Donator
Anzahl der Valenzelektronen	3	5
Majoritäten	Löcher	Elektronen
Minoritäten	Elektronen	Löcher
Leitungsmechanismus	Löcherleitung p-Typ	Elektronenleitung n-Typ

entweder auf Elektronen- oder Löcherleitung (Tabelle W-7).

Übersicht W-2 zeigt die Abhängigkeit der Elektronendichte eines n-Leiters von der Temperatur sowie die drei Bereiche Störstellenreserve, Störstellenerschöpfung und Eigenleitung.

Übersicht W-2. Dichte der freien Elektronen in n-Si in Abhängigkeit von der Temperatur.



Störstellenreserve

Trägerdichte hängt exponentiell von der Temperatur ab (tiefe Temperaturen).

$$n(T) = \sqrt{\frac{n_D N_L}{2}} e^{-\frac{E_D}{2kT}}, \quad n\text{-Typ}$$

$$p(T) = \sqrt{\frac{n_A N_V}{2}} e^{-\frac{E_A}{2kT}}, \quad p\text{-Typ}$$

E_A	Akzeptorbindungsenergie
E_D	Donatorbindungsenergie
k	Boltzmann-Konstante
N_L	effektive Zustandsdichte im Leitungsband
N_V	effektive Zustandsdichte im Valenzband
n	Elektronendichte
n_A	Akzeptorendichte
n_D	Donatorendichte
p	Löcherdichte
T	absolute Temperatur

W.3.3 pn-Übergang

Die meisten Halbleiterbauelemente besitzen einen oder mehrere pn-Übergänge. Bild W-2 zeigt Diagramme für einen *abrupten unsymmetrischen* pn-Übergang in Silicium.

Übersicht W-2 (Fortsetzung)

Störstellenerschöpfung

In der Nähe der Raumtemperatur sind alle Störstellen ionisiert.

	n-Typ	p-Typ
Majoritätsdichte	$n = n_D$	$p = n_A$
elektrische Leitfähigkeit	$\kappa = e n_D \mu_n$	$\kappa = e n_A \mu_p$
n_A, n_D	Akzeptoren- bzw. Donatorendichte	
μ_n, μ_p	Elektronen- bzw. Löcherbeweglichkeit	
e	Elementarladung	

Eigenleitung

Bei hohen Temperaturen liegt Eigenleitung vor (Tabelle W-6).

Typische Werte des Sperrsättigungsstroms liegen im Bereich von pA bei Si und von μ A bei Ge (Tabelle W-8).

W.3.4 Transistor

Transistoren dienen zum Verstärken von elektrischen Signalen und zählen deshalb zu den *aktiven Bauelementen* (Tabelle W-10).

Die *bipolaren Transistoren* werden in der Schaltungstechnik eingesetzt. Die Bedeutung der *Feldeffekttransistoren* (FET) für diskrete und integrierte Schaltungen ist erheblich gewachsen.

W.3.4.1 Bipolarer Transistor

Der am häufigsten vorkommende npn-Transistor besteht aus drei Elektroden; dem negativ dotierten Emitter (n), der positiv dotierten Basiszone (p) und dem negativ dotierten Kollektor (n) (Bild W-4).

Die bipolaren Transistoren arbeiten folgendermaßen: Der Basisstrom I_B (abhängig von der Basis-Emitter-Spannung U_{BE} und der Schichttemperatur T_j) bringt Ladungsträger in die in Sperrichtung betriebene und deshalb isolierende Basis-Kollektor-Diode (Basis-Kollektor-Übergang) und macht diese leitfähig.

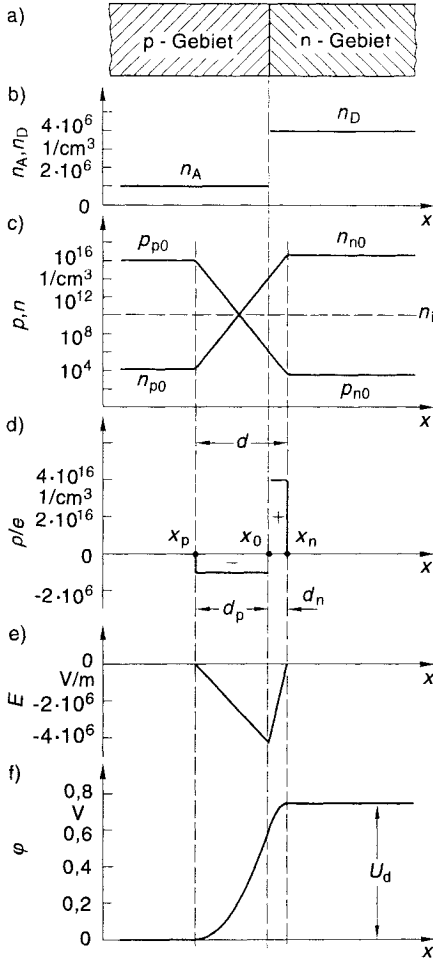


Bild W-2. pn-Übergang.

- a) p- und n-leitendes Silicium in Kontakt,
 b) Störstellenkonzentrationen,
 c) Konzentrationen der beweglichen Ladungsträger,
 d) Raumladungsdichte,
 e) elektrische Feldstärke,
 f) Potentialverlauf.

Bild W-3. Diodenkennlinie nach der Shockley-Gleichung.

- a) Koordinatenursprung vergrößert,
 b) Gleichrichterverhalten bei größeren Spannungen und Strömen.

Tabelle W-8. Gleichungen des pn-Übergangs.

Diffusionsspannung	$U_d = \frac{kT}{e} \ln \frac{n_A n_D}{n_i^2}$ $= U_T \ln \frac{n_A n_D}{n_i^2}$
Breite der Raumladungszone (RLZ)	$d = \sqrt{\frac{2\epsilon_r \epsilon_0 U_d}{e} \cdot \frac{n_A + n_D}{n_A n_D}}$
Diodenkennlinie nach SHOCKLEY	$I = I_s (e^{\frac{U}{kT}} - 1)$
Temperaturabhängigkeit des Sperrsättigungsstroms	$I_s \sim T^3 e^{-E_g/kT}$

E_g Energielücke
 e Elementarladung
 I Strom
 I_s Sperrsättigungsstrom
 k Boltzmann-Konstante
 n_A Akzeptorenkonzentration im p-Gebiet
 n_D Donatorenkonzentration im n-Gebiet
 n_i intrinsische Trägerdichte
 T absolute Temperatur
 U Spannung
 U_d Diffusionsspannung
 U_T Temperaturspannung ($U_T = kT/e$)
 ϵ_0 elektrische Feldkonstante
 ϵ_r Permittivitätszahl

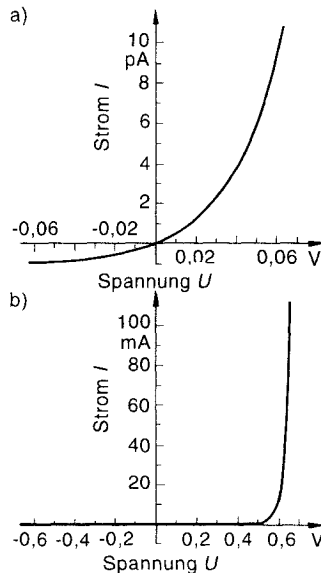


Tabelle W-9. Übersicht über Dioden.

Diodentyp	Schaltdiode	Schottky-Diode	Gleichrichterdiode	Schottky-Leistungsdiode	Zenerdiode	Diac
Schaltzeichen						
Gleichstromkennlinie						
Nutzkennlinie, schematisch						
genutzter Effekt	Ventilwirkung	Ventilwirkung	Ventilwirkung	Ventilwirkung	Zener- oder Lawinendurchbruch	kontrollierter Durchbruch
innerer Aufbau	pn Silicium (Germanium)	Metal-n Silicium	pn Silicium	Metal-n Silicium	pn Silicium	pnp Silicium
Frequenzbereich	Gleichstrom Niederfrequenz Hochfrequenz	Gleichstrom bis Höchstfrequenz	Gleichstrom Netzfrequenz Niederfrequenz	Gleichstrom bis mittlere Frequenzen	Gleichstrom Niederfrequenzen	Netzfrequenz
besondere Eigenschaften	schnell, klein, kleiner Sperrstrom, kleiner Durchlaßwiderstand, preisgünstig	sehr schnell, klein, kleine Durchlaßspannung	hohe Sperrspannung, hoher Durchlaßstrom, niederohmig, preisgünstig	sehr schnell, kleine Sperrspannung, hoher Durchlaßstrom, kleine Verluste	kontrollierter Durchbruch in Sperrichtung	Kennlinie mit Bereichen negativen Widerstandes
Anwendungsbereich	Universal diode zum Schalten, zum Begrenzen, zum Entkoppeln, für Logikschaltungen	Hochfrequenzgleichrichter, kleiner Schleusen- spannung, schnelle Logikschaltungen	Gleichrichter bei Netzfrequenz für kleine und große Spannungen und Ströme, auch für Schaltregler bei höheren Frequenzen	Gleichrichter bei hohen Frequenzen, hohen Strömen, aber kleinen Spannungen, Freilaufdiode	Spannungsstabilisierung, Spitzenspannungsbegrenzung	Triggerdiode zur sicheren Zündung bei einfachen Triacschaltungen zur Phasenanschnittsteuerung

Tabelle W-9 (Fortsetzung)

Diodentyp	Photodiode	Kapazitätsdiode	pin-Diode	Step-Recovery-Diode	Tunneldiode	Backward-Diode
Schaltzeichen						
Gleichstrom-kennlinie						
Nutzkennlinie, schematisch						
genutzter Effekt	lichtstärke-abhängiger Sperrstrom	spannungsabhängige Sperrschichtkapazität	stromabhängiger Durchlaßwiderstand	der Sperrstrom endet abrupt	Tunneleffekt	Ventilwirkung
innerer Aufbau	pn, pin Metall-n Silicium	pn Silicium Galliumarsid	pin Silicium	pn Silicium	pn Germanium hoch dotiert	pn Germanium hoch dotiert
Frequenzbereich	Gleichstrom bis Hochfrequenz					
besondere Eigenschaften	Sperrstrom abhängig von der Beleuchtung der Sperrschicht Avalanche-Effekt bei APD	Sperrschichtkapazität ist spannungsabhängig, hohe Güte	Durchlaßwiderstand ist stromabhängig, hohe Güte	abrupt endende Sperrverzögerungszeit, typenabhängig	Kennlinie mit negativem differentiellen Widerstandsreich	keine Schleusenspannung, sehr kleine Sperrspannung
Anwendungsbereich	Messung der Lichtstärke in einem großen Dynamikbereich, Dateneinpflüger am Ende einer Glasfaserstrecke	spannungsgesteuerte Abstimmung von Schwingkreisen für Frequenzfilter, Synthesizer, Phasenschieber	stromgesteuerte analoge Dämpfungsglieder für Hochfrequenz, stromgesteuerte Schalter für Hochfrequenz	Frequenzvielfacher bis in den GHz-Bereich mit sehr geringem Aufwand	sehr schnelle Triggerdiode, Entdämpfung von Schwingkreisen, Höchstfrequenzoszillator	Gleichrichter für sehr kleine Hochfrequenzspannungen

Tabelle W-10. Übersicht über die verschiedenen Transistoren.

Typ	Bipolare Transistoren		Unipolare Transistoren = Feld-Effekt-Transistoren			
	nnp Transistor	ppp Transistor	Sperrschicht FET (Junction FET)		Insulated Gate FET (MOSFET)	
prinzipieller Aufbau			n-Kanal FET	p-Kanal FET	Verarmungstyp (Depletion)	
					n-Kanal MOSFET	p-Kanal MOSFET
Schaltzeichen					Anreichererstyp (Enhancement)	
					n-Kanal MOSFET	p-Kanal MOSFET
Kennlinie						
Eigenschaften Bemerkungen						

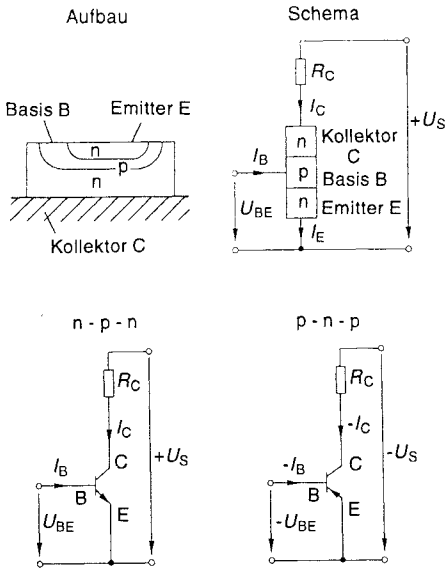


Bild W-4. Aufbau und Schaltung eines bipolaren Transistors mit Kollektorwiderstand R_C .

B Basis
 C Kollektor
 E Emitter
 I_{BE} Basis-Emitter-Strom
 I_B Basisstrom
 I_C Kollektorstrom
 R_C Kollektorwiderstand
 U_{BE} Basis-Emitter-Spannung
 U_S Versorgungsspannung.

hig. Der Basisstrom I_B erzeugt einen wesentlich größeren Kollektorstrom I_C , der von der Kollektor-Emitter-Spannung U_{CE} nur wenig abhängt. Dieser Kollektorstrom I_C fließt über die Basis zum Emitter.

Die Arbeitsbereiche eines Transistors werden deutlich, wenn man den Kollektorstrom I_C in Abhängigkeit von der Kollektorspannung U_C aufzeichnet (Bild W-5).

Die Transistoren werden für bestimmte Anwendungen in verschiedenen Grundsaltungen angeboten (Tabelle W-12).

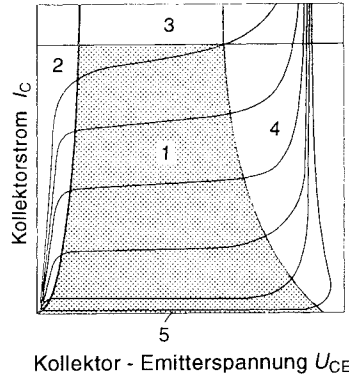


Bild W-5. Betriebsbereiche eines Transistors.

- 1 aktiver Bereich,
- 2 Übersteuerungsbereich,
- 3 Versagensbereich,
- 4 Durchbruchbereich,
- 5 Sperrbereich.

W.3.4.2 Feldeffekt-Transistor (FET)

Im Unterschied zum bipolaren Transistor sind beim FET nur Ladungsträger einer Sorte (Elektronen oder Löcher) beteiligt. Beim *Sperrschicht-FET* (Bild W-6) liegt an einem n-leitenden Bereich eine Gleichspannung, so daß die Elektronen von der *Quelle* (source) zur *Senke* (drain) fließen. Die Breite des Kanals wird von den beiden oben und unten liegenden p-Zonen und der anliegenden sperrenden Steuerspannung (Gatespannung U_G) gesteuert. Wird die Steuerspannung erhöht, dann werden die Raumladungszonen breiter und verengen die Strombahn. Den FET kann man somit als *steuerbaren Widerstand* ansehen, dessen Wert von der Gate-Source-Spannung U_{GS} und von der Drain-Source-Spannung U_{DS} bestimmt wird.

Der Arbeitsbereich eines FET läßt sich nach Bild W-7 in vier Bereiche unterteilen:

- *ohmscher Bereich*. Bei kleinen Spannungen U_{DS} und kleinen Drainströmen I_D verhält sich der FET wie ein ohmscher Widerstand.
- *Triodenbereich*. Die Steigung der Kennlinie geht vom ohmschen Bereich in eine flache Steigung über, die dem kleinen Ausgangsleitwert des Abschnürbereichs entspricht.

Tabelle W-11. Wichtige Kennwerte von Transistoren.

Basisstrom I_B

$$I_B = I_0 (e^{U_{BE}/U_T} - 1)$$

Basis-Emitter in Durchlaßrichtung geschaltet

$$I_B = I_0 e^{U_{BE}/U_T}$$

Temperaturspannung U_T

$$U_T = k T/e$$

Eingangswiderstand r_{BE}

$$r_{BE} = U_T/I_B$$

Gleichstromverstärkung B

$$B = I_C/I_B$$

differentielle Stromverstärkung β

$$\beta = dI_C/dI_B$$

Ausgangsleitwert g_a

$$g_a = dI_C/dU_{CE}$$

Spannungsrückwirkung D

$$D = dU_{CE}/dU_{BE}$$

Rauschleistung P_R

$$P_R = 4 k T \Delta f$$

Rauschspannung U_R

$$U_R = \sqrt{P_R R} = \sqrt{4 k T \Delta f R}$$

Rauschzahl F und Rauschmaß F^*

$$F = P_{RT}/P_R, F^* = 10 \lg (P_{RT}/P_R) \text{ dB}$$

B Gleichstromverstärkung

D Spannungsrückwirkung

F Rauschzahl

F^* Rauschmaß

g_a Ausgangsleitwert

Δf Frequenzbandbreite

I_B Basisstrom

I_0 Reststrom

k Boltzmann-Konstante
($k = 1,380658 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$)

P_R Rauschleistung

P_{RT} Rauschleistung im Transistor

R Widerstand

U_{BE} Basis-Emitter-Spannung

U_{CE} Kollektor-Emitter-Spannung

U_R Rauschspannung

U_T Temperaturspannung

β differentielle Stromverstärkung

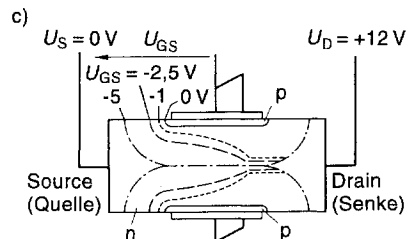
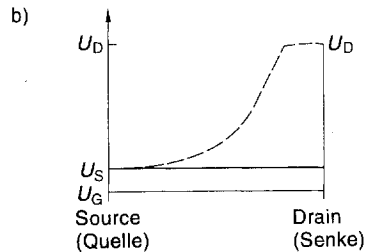
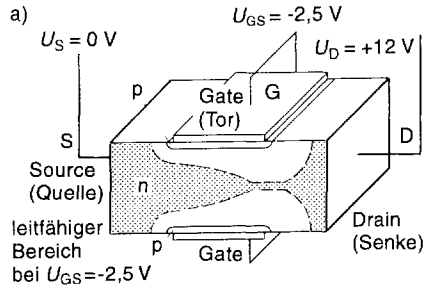


Bild W-6. Aufbau und Arbeitsweise des Sperrschicht-FET.

a) Aufbau,

b) Potentialverlauf entlang dem Kanal,

c) Querschnitt mit verschiedenen großen Raumladungszonen.

- **Abschnürbereich.** Hier liegt der meistgenutzte Arbeitsbereich. Die Gatespannung U_{GS} steuert den Drainstrom I_D .
- **Durchbruchbereich.** Dieser Bereich muß vermieden werden; denn ein Spannungsdurchbruch zwischen Gate und Drain zerstört den Transistor.

Ein besonders wichtiger Transistortyp ist der MOSFET (metal oxide semiconductor-FET), der Doppelgate-MOSFET und der MOSFET-Leistungstransistor für Schalter (Bild W-8).

Tabelle W-12. Grundsaltungen von Transistoren und ihre wichtigsten Eigenschaften.

Die Zahlenwerte gelten für einen Kleinsignaltransistor mit folgenden Daten:

$\beta_e = 100$, $f_T = 300 \text{ MHz}$, $U_T = 40 \text{ mV}$, $r_{BE} = 800 \Omega$.

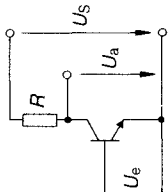
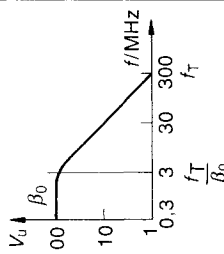
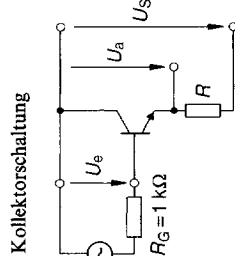
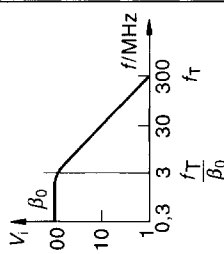
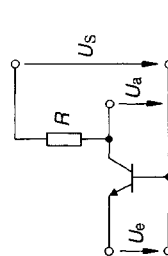
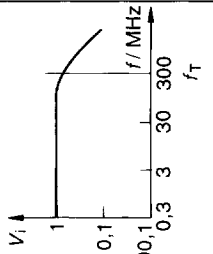
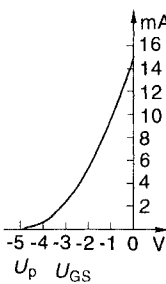
Grundsaltung	Stromver- stärkung des Tran- sistors V_I	Spannungs- verstärkung des Tran- sistors V_u	Eingangs- widerstand R_e	Ausgangs- widerstand R_a	Frequenzgang	Bemerkungen und Anwendungen
<p>Emitterschaltung</p> 	$\beta_e = \frac{i_c}{i_b}$ $\beta_e = 100$	$\frac{U_a}{U_e} = \frac{R \cdot \beta}{r_{BE}}$ $\frac{U_a}{U_e} = \frac{R \cdot I_E}{U_T}$ $\frac{U_a}{U_e} = \frac{1 \text{ k}\Omega \cdot 5 \text{ mA}}{40 \text{ mV}}$ $V_u = \frac{U_a}{U_e} = 125$	$R_e = r_{BE}$ $R_e = \frac{U_T}{I_B}$ $R_e = \frac{40 \text{ mV}}{50 \mu\text{A}}$ $R_e = 800 \Omega$	$R_a = R \parallel \frac{1}{h_{22}}$ $R_a = \frac{R}{1 + R \cdot h_{22}}$ $R_a = \frac{1 \text{ k}\Omega}{1 + 1 \text{ k}\Omega \cdot 50 \mu\text{S}}$ $R_a \approx 0,95 \text{ k}\Omega$		<ul style="list-style-type: none"> - häufigste Ver- stärkerschaltung - Strom- und Spannungs- verstärkung gut - durch Gegen- kopplung und Beschaltung gut variierbar

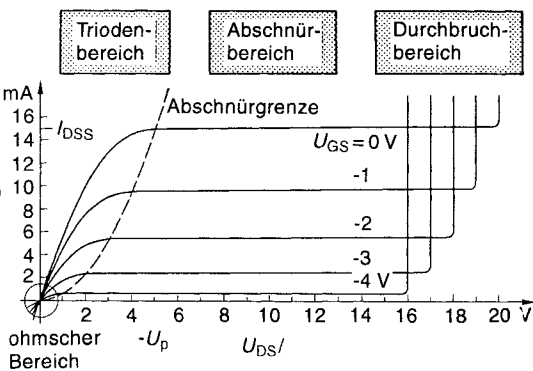
Tabelle W-12 (Fortsetzung)

Grundschaltung	Stromverstärkung des Transistors V_i	Spannungsverstärkung des Transistors V_u	Eingangs-widerstand R_e	Ausgangs-widerstand R_a	Frequenzgang	Bemerkungen und Anwendungen
Kollektorschaltung 	$\beta_i = \frac{i_c}{i_b} + 1$ $\beta_i = 101$	$\frac{U_a}{U_e} = \frac{r_{BE} + (1 + \beta) R}{(1 + \beta) R}$ $\frac{U_a}{U_e} = 0,99$ $\frac{U_a}{U_e} \approx 1$	$R_e = \frac{U_T}{I_B}$ $+ (1 + \beta_e) R$ $R_e = r_{BE}$ $+ (1 + \beta_e) R$ $R_e \approx \beta_e R$ $R_e \approx 1000 \text{ k}\Omega$	$R_a = \frac{R_G + r_{BE}}{\beta}$ $R_a \approx \frac{R_G + r_{BE}}{\beta}$ $R_a \approx 18 \Omega$		<ul style="list-style-type: none"> Impedanzwandler von hochohmig auf niederohmig Eingangsstufe für hochohmige Quellen Ausgangs-transistor in Leistungs-verstärkern Leistungs-transistor in längs-geregelten Netzgeräten
Basisschaltung 	$\alpha = \frac{i_c}{i_e}$ $\alpha = \frac{\beta_e}{1 + \beta_e}$ $\alpha \approx 1$ $\frac{i_c}{i_e} \approx 1$	$\frac{U_a}{U_e} = \frac{R \cdot \beta}{r_{BE}}$ $\frac{U_a}{U_e} = \frac{1 \text{ k}\Omega \cdot 100}{800 \Omega}$ $V_u = 125$	$R_e = \frac{U_T}{I_u \cdot \beta_e}$ $R_e \approx \frac{r_{BE}}{\beta_e}$ $R_e = 8 \Omega$	$R_a = R_c$ $R_a = R_c$ $R_a = 1 \text{ k}\Omega$		<ul style="list-style-type: none"> Impedanzwandler von niederohmig auf hochohmig Hochfrequenz-verstärker mit gutem Frequenz-gang niedrige Dämpfung des Ausgangskreises durch sehr kleinen Ausgangs-leitwert h_{22}

Übertragungs-
kennlinie



Ausgangs-Kennlinienfeld



verschiedene
Gate-
Spannungen
(ohmscher Bereich)

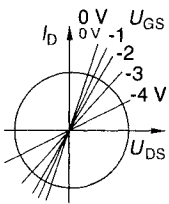
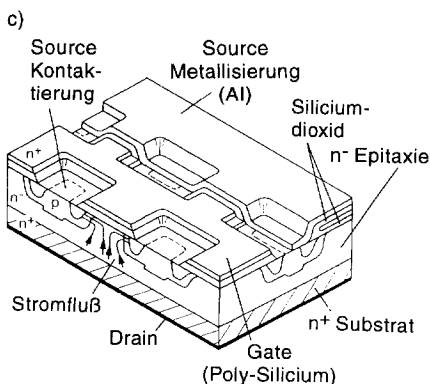
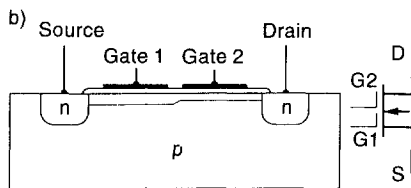
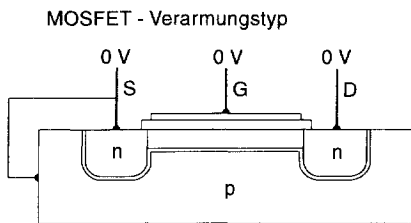
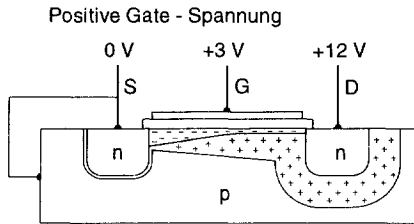
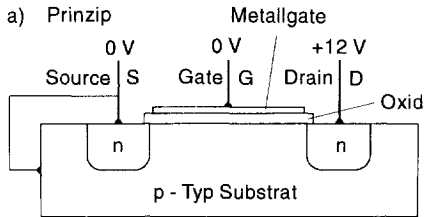


Bild W-7. Kennlinien und Arbeitsbereiche des n-Kanal-Sperrschicht-FET.

Tabelle W-13. Grundsaltungen des FET.

	Sourceschaltung	Drainschaltung	Gateschaltung
Grundsaltung			
Verstärkung	Spannungsverstärkung > 1	Spannungsverstärkung < 1	Spannungsverstärkung > 1 Stromverstärkung $V_1 = 1$
Eingangs- widerstand	sehr groß	sehr groß, mit der Boot- strapschaltung extrem groß	klein!
Anwendungs- bereich	Gleichspannung, NF, HF	Gleichspannung, NF, HF	wenig benutzt, nur bei HF
Besondere Vorteile	gute Spannungsverstärkung hoher Eingangswiderstand und geringes Rauschen	hoher Eingangswiderstand und geringes Rauschen eigenstabile Schaltung	sehr geringe Spannungs- rückwirkung vom Ausgang auf den Eingang
Entsprechende Schaltung bei bipolaren Transistoren siehe Tabelle W-12	Emitterschaltung	Kollektorschaltung	Basisschaltung



Die MOSFETs eignen sich besonders für digitale integrierte und hochintegrierte Schaltungen, da sich sehr schnelle Schaltkreise mit geringem Stromverbrauch auf kleinster Fläche herstellen lassen.

Beim MOSFET beeinflusst die Steuerspannung die Leitfähigkeit einer dünnen Oberflächenschicht im Halbleiterkristall. Der Strom kann im Kanal verstärkt werden. Der Doppelgate-MOSFET besitzt zwei Gates. Er wird als regelbarer Verstärker häufig in Hochfrequenzschaltungen eingesetzt. Für hohe Ströme werden die MOSFET-Leistungs-transistoren eingesetzt.

W.4 Supraleitung

Ein Supraleiter besitzt zwei Eigenschaften: Unterhalb der Sprungtemperatur T_C findet eine *widerstandslose Leitung* statt, und der Supraleiter verhält sich als *idealer Diamagnet* (Meißner-Ochsenfeld-Effekt: völlige Verdrängung des Magnetfeldes aufgrund starker Oberflächenströme; Bild W-9).

Der supraleitende Zustand wird oberhalb einer *kritischen magnetischen Flußdichte* B_C zerstört (Bild W-10).

Die Supraleitung hängt von drei kritischen Größen ab: der Sprungtemperatur T_C , der kritischen magnetischen Induktion B_C und der

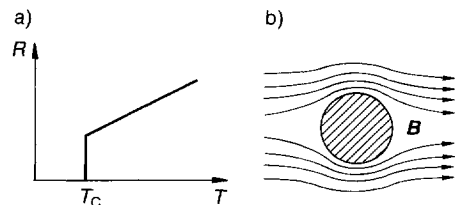


Bild W-9. Supraleiter.
a) widerstandsloser Leiter,
b) idealer Diamagnet.

Bild W-8. MOSFET (a), Doppelgate-MOSFET (b) und MOSFET-Leistungs transistor (c).

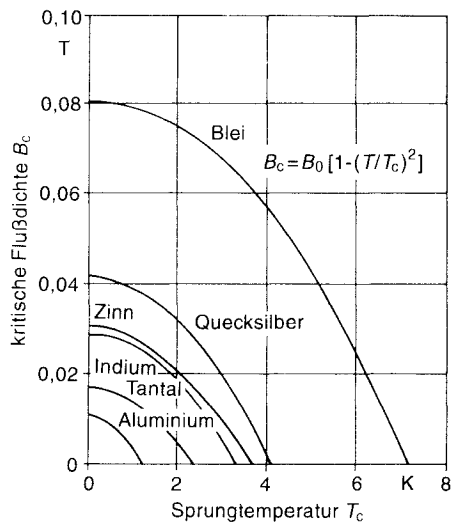


Bild W-10. Abhängigkeit der kritischen Flußdichte von der Sprungtemperatur.

B_0 kritische Flußdichte für $T = 0$ K

B_c kritische Flußdichte

T Temperatur

T_c kritische Temperatur.

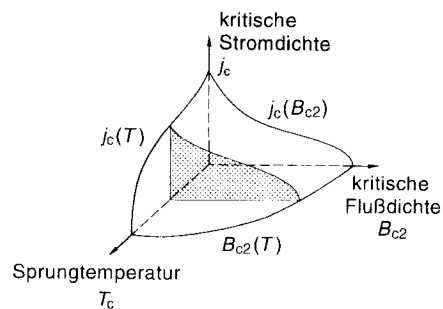


Bild W-11. Supraleitender Bereich.

Tabelle W-14. Kritische Temperatur T_c und kritische Flußdichte B_c supraleitender Elemente und Verbindungen.

Element	T_c in K	B_c (4,2 K) in T
Supraleiter erster Art		
Al	1,19	0,0091
Hg	4,15	0,0412
In	3,4	0,0293
Pb	7,2	0,0803
Sn	3,72	0,0309
Th	1,37	0,0162
Tl	2,39	0,0171

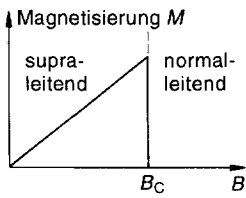
Supraleiter zweiter Art		
Nb	9,2	$B_{c2} = 0,2$ T
Ta	4,39	$B_{c2} = 0,18$ T
V	5,3	$B_{c2} = 0,34$ T
Zn	0,9	$B_{c2} = 0,0053$ T

Verbindung	T_c in K	B_{c2} (4,2 K) in T
Supraleiter zweiter Art		
Bi_3Ba	5,69	0,074
Bi_3Sr	5,62	0,053
Mo_3Re	9,8	0,053
Nb_3Au	11	–
NbSn_2	2,6	0,062

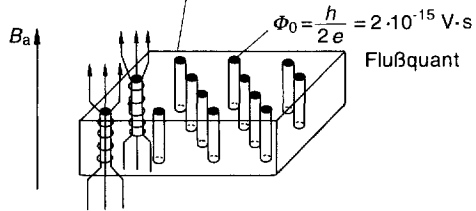
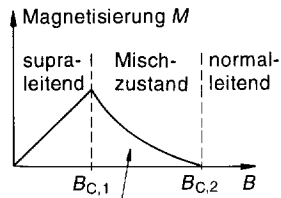
Supraleiter dritter Art		
MoRe	12,6	25
Nb_3Al	18	
Nb_3Ge	23	14
Nb_3Sn	18	
NbTi	9,5	14
NbZr	10,8	
PbMo_6S_8	15	
V_3Ga	14,5	
V_3Si	17	

Hochtemperatur-Supraleiter		
$\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-8}$	135	1730 bis 1760
$\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$	92	30 bis 60
$\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10}$	110	100 bis 200
$\text{Tl}_2\text{Ca}_2\text{Ba}_2\text{Cu}_3\text{O}_x$	125	100 bis 200

Supraleiter erster Art

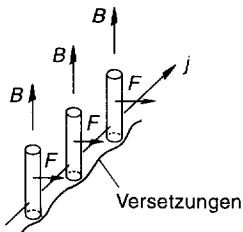


Supraleiter zweiter Art

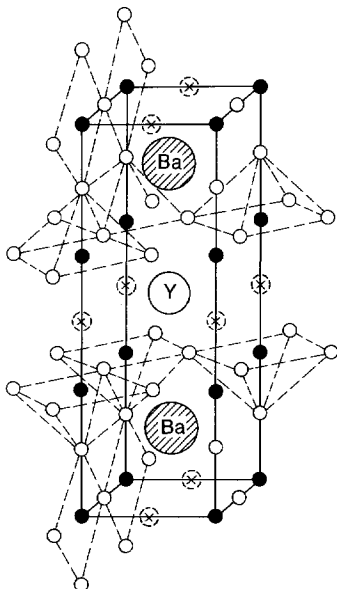


Supraleiter dritter Art

Hemmung der Wanderung der Flußlinien durch Pinning - Zentren



Hochtemperatur - Supraleiter



Perowskit - Struktur von $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$

- Sauerstoff
- ⊗ Leerstellen des Sauerstoffs
- Kupfer

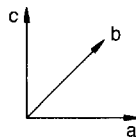


Bild W-12. Supraleiter erster, zweiter und dritter Art sowie Hochtemperatur-Supraleiter.

Stromdichte j_C . Bild W-11 zeigt den Bereich, in dem Supraleitung möglich ist.

Die Supraleiter werden in folgende vier Kategorien eingeteilt (Bild W-12):

– *Supraleiter erster Art*

Der Übergang von der Normalleitung zur Supraleitung erfolgt *sprunghaft*; sie ist nur bei Elementen zu finden, und ihre kritische Flußdichte B_C ist sehr gering.

– *Supraleiter zweiter Art*

Der Übergang von der normalleitenden zur supraleitenden Phase erfolgt allmählich durch Eindringen normalleitender Flußschläuche. Die kritische Flußdichte B_C ist gering.

– *Supraleiter dritter Art*

Bei einem Stromfluß durch den Supraleiter tritt eine Lorentz-Kraft auf, die die Flußschläuche in Bewegung versetzt. Dadurch entsteht Reibungswärme, und der supraleitende Zustand wird zerstört. Werden Versetzungen eingebracht, so hindern diese die Flußschläuche an der Bewegung (Pinnen der Flußschläuche). Dadurch können die Supraleiter höhere Ströme leiten. Technisch angewendet werden die Legierungen NbTi und Nb₃Sn.

– *Hochtemperatur-Supraleiter*

Bei Keramiken mit Perowskit-Struktur wurden Sprungtemperaturen mit über 135 K gefunden, so daß bereits mit flüssigem Stickstoff die supraleitenden Effekte ausgenutzt werden können (Tabelle W-14).

X Optoelektronik

X.1 Halbleiter-Sender

Übersicht X-1. Wichtige Normen.

DIN 41 855 Teil 2	Halbleiterbauelemente und integrierte Schaltungen; Optoelektronische Halbleiterbauelemente
DIN 44 028	Messung fotoelektronischer Bauelemente
DIN 44 030	Messen, Steuern, Regeln; Lichtschranken und Lichttaster
DIN IEC 47 (CO) 800	Halbleiterbauelemente und integrierte Schaltungen; Begriffe, Definitionen, Stromverhältnis Optokoppler
DIN IEC 47 (CO) 801	Optoelektronik; Optokoppler; Grenzfrequenz
DIN IEC 47 (CO) 973	Halbleiterbauelemente; PIN Fotodioden
DIN IEC 47 (CO) 980	Halbleiterbauelemente; Zusätzliche Begriffe für optoelektronische Halbleiterbauelemente
DIN IEC 47 (CO) 1040	Halbleiterbauelemente; Avalanche Fotodiode (APD)
DIN IEC 47 (CO) 1080	Optoelektronische Halbleiterbauelemente; Meßverfahren; Fotodioden und Fototransistoren
DIN IEC 47 (CO) 1082	Halbleiterbauelemente; Meßverfahren für Strahlungsleistung oder Vorwärtsstrom von LEDs, IREDs und Laserdioden
DIN IEC 47 (CO) 1083	Optoelektronische Halbleiterbauelemente; Leuchtdioden, infrarotemittierende Dioden und Laserdioden
DIN IEC 47 (CO) 1087	Halbleiterbauelemente; Meßverfahren für den Schwellenstrom von Laserdioden
DIN IEC 47 (CO) 1088	Halbleiterbauelemente; Zusätzliche Meßverfahren für LED, IRED und Laser-Dioden
DIN IEC 47 (CO) 1090	Halbleiterbauelemente; Rahmenspezifikation für optoelektronische Bauelemente
DIN IEC 47 (CO) 1154	Halbleiterbauelemente; PIN Fotodioden für Glasfaseranwendungen; Zusätzliche Kennwerte
DIN IEC 47 (CO) 1156	Optoelektronische Halbleiterbauelemente; Kollektor-Emitter-Sättigungsspannung eines Optokopplers
DIN IEC 47 (CO) 1157	Halbleiterbauelemente; Meßverfahren für die Schaltzeiten von Optokopplern
DIN IEC 47 (CO) 1158	Halbleiterbauelemente; Meßverfahren für den Dunkelstrom von Fotodioden und Fototransistoren
DIN IEC 47 (CO) 1164	Halbleiterbauelemente; Meßverfahren für den Kennwert S_{11} von Laser-Dioden, LED, IRED, Lasermodule mit und ohne Faseranschluß
DIN IEC 47 (CO) 1165	Halbleiterbauelemente; Trackingfehler eines Lasermoduls mit Faseranschluß mit und ohne Kühler
DIN IEC 747 Teil 5	Halbleiterbauelemente; Einzel-Halbleiterbauelemente und integrierte Schaltungen; Optoelektronische Halbleiterbauelemente

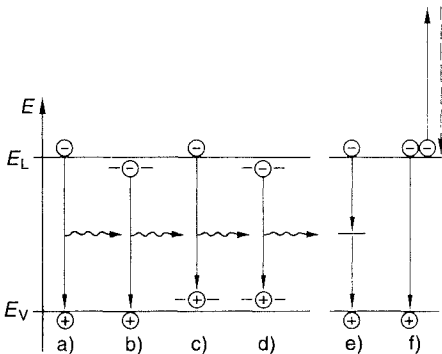


Bild X-1. Rekombinationsprozesse in Halbleitern.

Strahlende Übergänge: a) Band-Band, b) Donator-Valenzband, c) Leitungsband-Akzeptor, d) Paar-Übergang; nicht strahlende Übergänge: e) über tiefe Störstellen, f) Auger-Effekt.

X.1.1 Strahlungsemission aus Halbleitern

Elektromagnetische Strahlung entsteht bei der *Rekombination* eines Elektrons aus dem Leitungsband (Abschnitt W) mit einem Loch aus dem Valenzband (Bild X-1). In allen Fällen der *strahlenden* Rekombination entspricht die Energie E_{ph} der ausgesandten Photonen näherungsweise der Breite E_g der verbotenen Zone:

$$E_{ph} \approx E_L - E_V = E_g. \quad (X-1)$$

X.1.2 Lumineszenzdiode

Lumineszenz- oder Leuchtdioden (LED, Light Emitting Diode) emittieren Licht, wenn ihr pn-Übergang (Abschnitt W.3.3) in Flußrichtung betrieben wird (Bild X-2).

Die Farbe des Rekombinationslichts wird durch das Halbleitermaterial bestimmt. Von besonderem Interesse sind *Mischkristalle*, die durch die Wahl des Mischungsverhältnisses eine freie Einstellung des Energiegaps E_g und damit der Photonenenergie innerhalb gewisser Grenzen zulassen. Tabelle X-1 zeigt die Zusammensetzung gängiger LEDs.

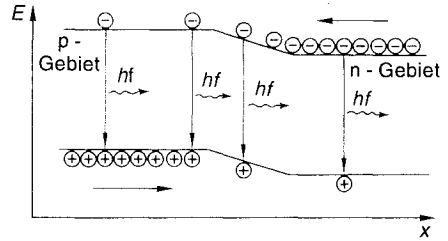


Bild X-2. Bänderschema einer in Flußrichtung betriebenen Leuchtdiode.

Tabelle X-1. Daten verschiedener Lumineszenz-dioden.

Material: Dotierstoff	Farbe	Wellenlänge λ/nm	Flußspannung U_F/V
GaAs: Si	IR	930	1,3
GaP: Zn, O	rot	690	1,6
GaAs _{0,6} P _{0,4}	rot	650	1,8
GaAs _{0,35} P _{0,65} : N	orange	630	2,0
GaAs _{0,15} P _{0,85} : N	gelb	590	2,2
GaP: N	grün	570	2,4
SiC: Al, N	blau	470	4
GaN: Zn	blau	440	4,5

Typische Kennlinien der Strahlungsleistung Φ_e bzw. des Lichtstroms Φ_v in Abhängigkeit vom Flußstrom I_F sind im Bild X-3 dargestellt.

Bild X-4 zeigt LED-Spektren; die Linienbreite (auf halber Höhe gemessen) liegt bei $\Delta\lambda \approx 40 \text{ nm}$.

X.1.3 Laserdiode

Die Laserdiode ist ein hoch dotierter pn-Übergang. Bei einer bestimmten Flußspannung (Bild X-5) entsteht im Übergangsbereich zwischen p- und n-Material, der *aktiven Zone*, eine *Besetzungsinversion* (1. Laserbedingung, Abschnitt L.4.2). Die *Rückkopplung* (2. Laserbedingung) der Laserwelle mit dem aktiven Medium geschieht beim *Fabry-Perot-Laser* durch Reflexion an den spiegelnden Endflächen (Spaltflächen) des Kristalls (Bild X-6). Beim *DFB-Laser* (Distributed Feedback Laser)

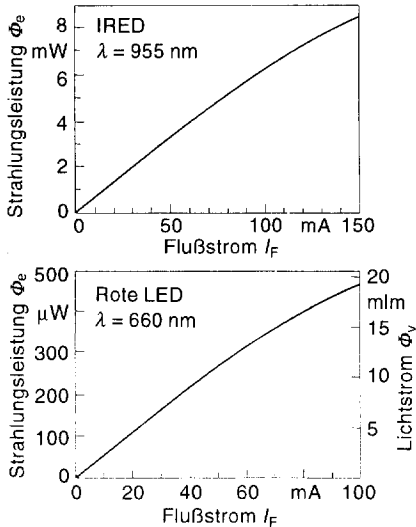


Bild X-3. Strahlungsleistung und Lichtstrom von Leuchtdioden in Abhängigkeit vom Flußstrom.

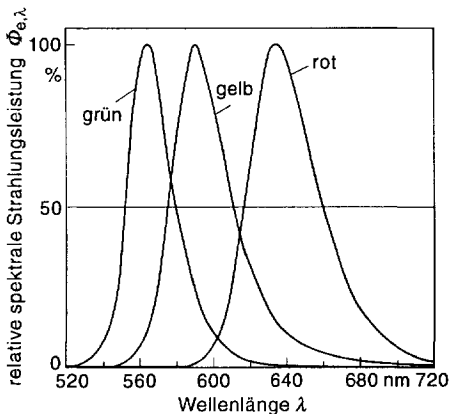


Bild X-4. Spektren verschiedener Lumineszenzdioden.

sorgt ein senkrecht zur Längsrichtung eingeätztes Gitter für *verteilte Rückkopplung*.

Die Kennlinie des Lasers (Bild X-7) zeigt, daß erst oberhalb eines Schwellenstroms I_{th} der Laserbetrieb einsetzt.

Die Wellenlänge der Laserstrahlung hängt wie bei der LED von der Größe des Bandgaps E_g

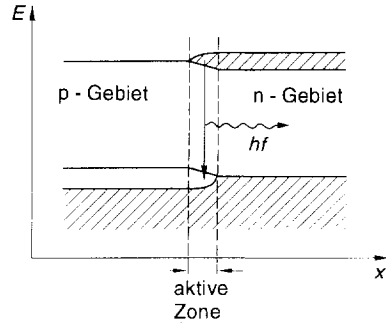


Bild X-5. Bänderschema einer Laserdiode bei Betrieb in Flußrichtung.

Die schraffierten Gebiete sind mit Elektronen besetzt.

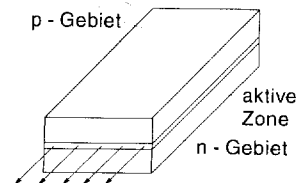


Bild X-6. Aufbau einer Laserdiode.

ab. Tabelle X-2 zeigt eine Zusammenstellung häufig verwendeter Lasermaterialien.

Das Spektrum eines Fabry-Perot-Lasers (Bild X-8) besteht aus mehreren sehr scharfen Linien, den *longitudinalen Schwingungsmoden* des Lasers. Im Laserresonator bauen sich *stehende Wellen* auf (Abschnitt J.2), für die gilt

$$nL = m \frac{\lambda}{2}; \quad (X-2)$$

- n Brechungsindex des Kristalls,
- L Länge des Resonators,
- m Ordnungszahl, $m = 1, 2, 3 \dots$,
- λ Wellenlänge der Strahlung.

Spezielle Bauformen des Fabry-Perot-Lasers und insbesondere der DFB-Laser begünstigen *Einmodenlaser* (Single-Mode-Laser, Abschn. L.4.2). Die Linienbreite der einzelnen Moden ist typischerweise $\Delta f \approx 20$ MHz bzw. $\Delta \lambda \approx 0,11$ pm.

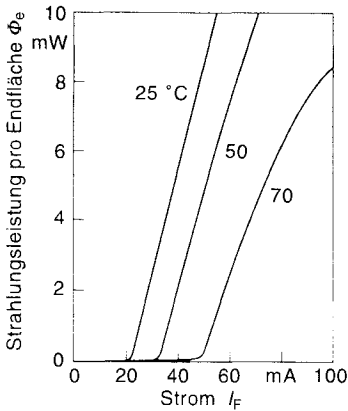


Bild X-7. Kennlinie eines Halbleiterlasers aus InGaAsP ($\lambda = 1,3 \mu\text{m}$).

Tabelle X-2. Materialien für Halbleiter-Laser.

Material	Wellenlängenbereich in μm	Anwendungen
ternäre Mischkristalle $\text{Ga}_x\text{Al}_{1-x}\text{As}$	0,69 bis 0,87	optische Datenspeicher, optische Nachrichtentechnik, Materialbearbeitung
quaternäre Mischkristalle $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}_y\text{P}_{1-y}$	0,92 bis 1,65	optische Nachrichtentechnik
Bleisalze, z. B. $\text{Pb}_x\text{Sn}_{1-x}\text{Se}$	4 bis 40	Umweltmeßtechnik, Absorptionsmessungen im mittleren IR

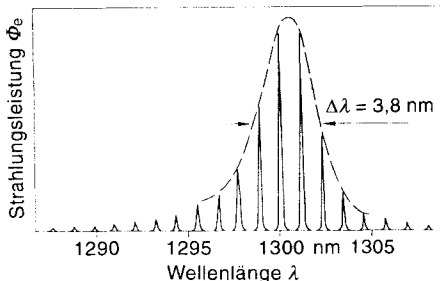


Bild X-8. Emissionsspektrum eines InGaAsP-Fabry-Perot-Lasers.

X.2 Halbleiter-Detektoren

X.2.1 Strahlungsabsorption in Halbleitern

Wird ein Halbleiter mit Licht bestrahlt, dann geben die Photonen ihre Energie an Valenzelektronen ab, die aus ihrer Bindung gerissen werden und sich dann frei im Kristall bewegen können. Im Bändermodell werden Elektronen aus dem Valenzband ins Leitungsband gehoben. Damit dieser Vorgang ablaufen kann, muß folgende Bedingung erfüllt sein:

$$E_{\text{ph}} \geq E_g \quad \text{oder}$$

$$\lambda \leq \lambda_g = \frac{h c}{E_g} = \frac{1,24 \mu\text{m} \cdot \text{eV}}{E_g}; \quad (\text{X-3})$$

- E_{ph} Photonenenergie,
- E_g Bandabstand,
- λ Wellenlänge,
- λ_g Grenzwellenlänge,
- h Plancksche Konstante
($h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$)
- c Lichtgeschwindigkeit
($c = 2,9979 \cdot 10^8 \text{ m/s}$).

Fällt elektromagnetische Strahlung mit der Strahlungsleistung Φ_0 auf einen Kristall, dann ist die Leistung Φ der Strahlung, die den Kristall durchdringt,

$$\Phi = \Phi_0 e^{-\alpha d}; \quad (\text{X-4})$$

- α Absorptionskoeffizient,
- d Kristalldicke.

Bild X-9 zeigt die Absorptionskoeffizienten einiger Halbleiter in Abhängigkeit von der Wellenlänge der Strahlung.

X.2.2 Fotowiderstand

Der Fotowiderstand (Light Dependent Resistor, LDR) oder Fotoleiter ist ein passives Bauelement, dessen elektrischer Widerstand sich bei Bestrahlung verringert. Der Zusammenhang zwischen Widerstand und Beleuch-

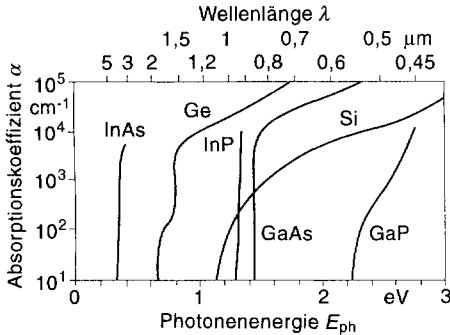


Bild X-9. Absorptionskoeffizienten verschiedener Halbleiter.

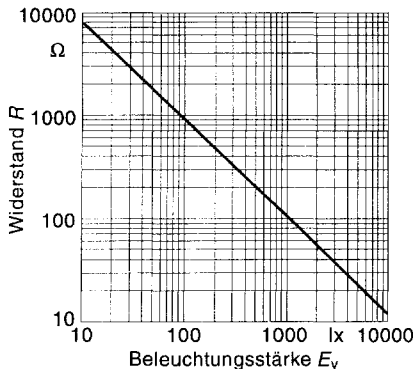


Bild X-10. Zusammenhang zwischen Widerstand und Beleuchtungsstärke (Lichtquelle mit Farbtemperatur $T_F = 2700\text{ K}$) eines CdS-Fotowiderstands.

tungsstärke kann näherungsweise durch ein Potenzgesetz beschrieben werden (Bild X-10):

$$R \sim E_v^{-\gamma}; \quad (\text{X-5})$$

R Widerstand,
 E_v Beleuchtungsstärke,
 γ Steilheit ($\gamma \approx 1$).

X.2.3 Fotodiode

Die Fotodiode ist ein *aktives* Bauelement, das bei Bestrahlung eine elektrische Spannung (*fotovoltaischer Effekt*) bzw. einen Fotostrom

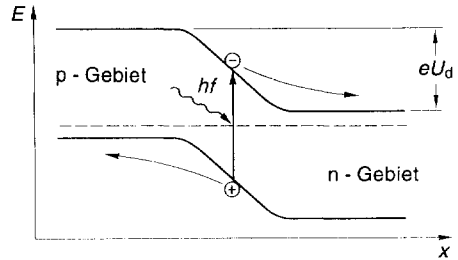


Bild X-11. Bänderschema einer Fotodiode ohne äußere Spannung.

Übersicht X-2. Fotodiode.

Fotostrom
(Kurzschluß)
$$I_{ph} = \frac{\Phi_e}{hf} e \eta(\lambda)$$

Leerlaufspannung
$$U_L = \frac{kT}{e} \ln \left(\frac{I_{ph}}{I_s} + 1 \right)$$

Kennlinie
$$I = I_s (e^{eU/kT} - 1) - I_{ph}$$

I_{ph}	Fotostrom,
Φ_e	absorbierte Strahlungsleistung,
h	Plancksche Konstante,
f	Lichtfrequenz,
e	Elementarladung,
$\eta(\lambda)$	Quantenausbeute ($\eta < 1$),
U_L	Leerlaufspannung,
k	Boltzmann-Konstante,
T	absolute Temperatur,
I_s	Sperrsättigungsstrom.

abgibt. Durch die Absorption eines Photons in einem pn-Übergang (Bild X-11) wird ein freies Elektron-Loch-Paar erzeugt. Infolge des eingebauten elektrischen Feldes (*Diffusionsspannung* U_d) werden die beiden Ladungsträger getrennt.

Im Leerlaufbetrieb ist an den Enden die *Leerlaufspannung* abgreifbar. Im Kurzschlußbetrieb fließt im äußeren Stromkreis in Sperrichtung der *Fotostrom* (Kurzschlußstrom) (Übersicht X-2, Bild X-12).

X.2.4 Solarzelle

Die Solarzelle wandelt mit Hilfe eines großflächigen pn-Übergangs Sonnenenergie in

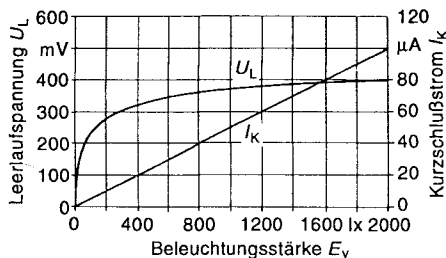


Bild X-12. Leerlaufspannung und Kurzschlußstrom einer Si-Fotodiode.

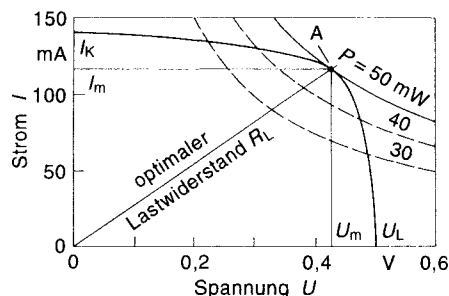


Bild X-13. Strom-Spannungs-Charakteristik einer Si-Solarzelle.

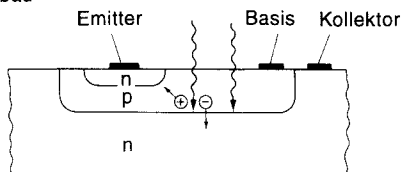
Übersicht X-3. Solarzelle

Füllfaktor (typisch 70 % bis 80 %)
$$F_F = \frac{I_m U_m}{I_K U_L} = \frac{P_m}{I_K U_L}$$

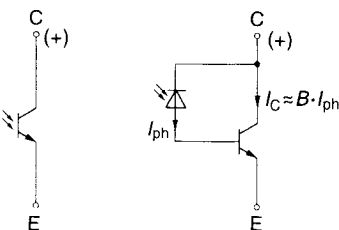
Wirkungsgrad
$$\eta = \frac{P_m}{\Phi_e} = \frac{I_K U_L F_F}{E_e A}$$

F_F	Füllfaktor (Kurvenfaktor),
I_m	Strom bei maximaler Leistung,
U_m	Spannung bei maximaler Leistung,
P_m	maximale Leistung,
I_K	Kurzschlußstrom,
U_L	Leerlaufspannung,
E_e	Bestrahlungsstärke,
A	Fläche.

Aufbau



Schaltsymbol und Ersatzschaltbild



Kennlinien

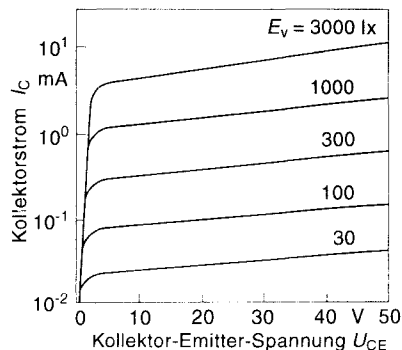


Bild X-14. Bipolarer Fototransistor.

die Leistung $P_m = I_m U_m$, die der Zelle entnommen wird, den Maximalwert erreicht hat (Übersicht X-3).

X.2.5 Fototransistor

elektrische Energie um. Bild X-13 zeigt eine Strom-Spannungs-Kennlinie. Der Schnittpunkt der Widerstandsgeraden $I = U/R_L$ mit der Kennlinie bestimmt den Arbeitspunkt A. Der optimale Lastwiderstand liegt vor, wenn

Der Fototransistor (Bild X-14) ist ein Detektor mit innerer Verstärkung. Durch Photonenabsorption erzeugte freie Elektron-Loch-Paare werden im elektrischen Feld der

Basis-Kollektor-Diode getrennt. Für den Kollektorstrom ergibt sich

$$I_C = (B + 1) (I_{ph} + I_{CB,d}) \approx B I_{ph} ; \quad (X-6)$$

I_C Kollektorstrom,

B Stromverstärkungsfaktor in Emitterschaltung,

I_{ph} Fotostrom,

$I_{CB,d}$ Dunkelstrom der Basis-Kollektor-Diode, Kollektorstrom.

Typische Werte für die Stromverstärkung liegen bei $B = 100$ bis 1000 .

X.3 Optokoppler

Der Optokoppler oder Optoisolator verbindet zwei galvanisch vollständig getrennte Stromkreise miteinander. Die Kopplung erfolgt durch Infrarotstrahlung, die meist von einer GaAs-IREDD ausgesandt und von einem Si-Detektor empfangen wird (Bild X-15).

Eine der wichtigsten Kenngrößen eines Optokopplers ist das *Stromübertragungsverhältnis* CTR (Current Transfer Ratio, auch *Kopplungsfaktor* genannt) zwischen Ausgangsstrom I_C und Eingangsstrom I_F (Tabelle X-3):

$$CTR = I_C / I_F . \quad (X-7)$$

Tabelle X-3. Stromübertragungsverhältnis und Grenzfrequenz verschiedener Optokoppler.

Empfänger	CTR	f_{gr}
Fotodiode	0,001 bis 0,008	5 bis 30 MHz
Diode und Transistor	0,05 bis 0,4	1 bis 9 MHz
Fototransistor	0,2 bis 1	20 bis 500 kHz
Foto-darlington	1 bis 10	1 bis 30 kHz

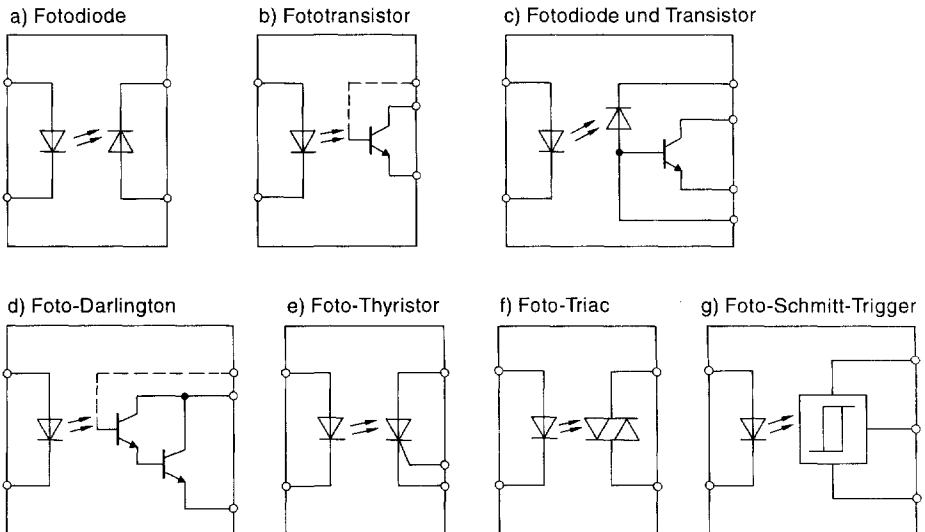


Bild X-15. Optokoppler mit verschiedenen Empfängern.

Y Informatik

Y.1 Digitaltechnik

Y.1.1 Zahlensysteme

Übersicht Y-1. Zahlensysteme.

Aufbau von Zahlensystemen

$$Z = \sum X_i Y^i \quad (i \in \mathbb{Z}; 0 \leq X < Y)$$

$$Z = \dots + X_3 Y^3 + X_2 Y^2 + X_1 Y^1 + X_0 Y^0 + X_{-1} Y^{-1} + \dots$$

Z Zahl,
 X Argument,
 $(0 \leq X < Y)$
 Y Basis,
 i Stellenwert

Zahlensysteme

	Wertigkeit der Argumente X_i				Summen- gleichung
allgemeine Darstellung	Y^3	Y^2	Y^1	Y^0	$\sum_i X_i Y^i$
Zahlensysteme: Dezimalzahl Wert dezimal	10^3 Wert 1000	10^2 Wert 100	10^1 Wert 10	10^0 Wert 1	$\sum_i X_i 10^i$
Dualzahl Wert dual dezimal	2^3 Wert 1000 _D 8	2^2 Wert 100 _D 4	2^1 Wert 10 _D 2	2^0 Wert 1 _D 1	$\sum_i X_i 2^i$
Oktalzahl Wert oktal dezimal	8^3 Wert 1000 _O 512	8^2 Wert 100 _O 64	8^1 Wert 10 _O 8	8^0 Wert 1 _O 1	$\sum_i X_i 8^i$
Hexadezimalzahl Wert hex. dezimal	16^3 Wert 1000 _H 4096	16^2 Wert 100 _H 256	16^1 Wert 10 _H 16	16^0 Wert 1 _H 1	$\sum_i X_i 16^i$

für alle oben dargestellten Zahlen gilt: $X_i = 1$

Y.1.2 Kodes

Unter Kodes versteht man die *Zuordnung zwischen zwei Zeichenvorräten* bzw. die *Abbildung zwischen Mengen von Wörtern*, die sich aus diesen Zeichenvorräten bilden lassen. Die *Kodierungsregeln* legen fest, wie diese Zuordnung stattfindet. *Nicht redundante Kodes* nutzen den ganzen Darstellungsbereich des Zahlensystems aus; *redundante Kodes* dagegen nicht. Deshalb gibt es bei redundanten Kodes Kodewörter, die *nicht benutzt* sind und zur *Fehlererkennung* dienen.

Für die Datenübertragung, zum Erstellen standardisierter Arbeitsdateien und zur Koppelung digitaler Geräte dient der *ASCII-Kode* (American Standard Code for Information Interchange).

Der *Gray-Kode* ist ein Zahlenkode, der zur Maschinensteuerung eingesetzt wird. Er ist ein *einschrittiger Kode*, da sich beim Übergang benachbarter Zahlen nur *ein Bit* ändert. Er vermeidet den Nachteil der Dualzahlen, daß sich beim Übergang benachbarter Zahlen mehrere Bits ändern können (z.B. ändern sich beim Übergang der Dualzahl 111 (Dezimal 7) auf 1000 (Dezimal 8) insgesamt 4 Bits).

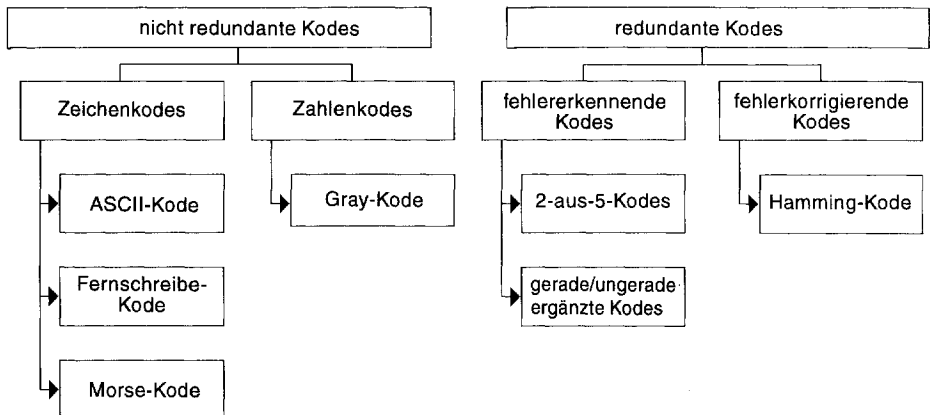


Bild Y-1. Übersicht über die wichtigsten Kodes.

Tabelle Y-1. ASCII-Tabelle (Standard von 0 bis 255; ASCII-Werte bis 1F werden in der Regel als Steuerzeichen genutzt).

Dez.	Hex.	Zeichen	Dez.	Hex.	Zeichen	Dez.	Hex.	Zeichen	Dez.	Hex.	Zeichen	Dez.	Hex.	Zeichen	Dez.	Hex.	Zeichen
0	00		43	2B	+	86	56	v	128	80	Ç	171	AB	½	214	D6	¶
1	01	☺	44	2C	,	87	57	w	129	81	ü	172	AC	¼	215	D7	‡
2	02	☻	45	2D	-	88	58	x	130	82	ë	173	AD	⅓	216	D8	‡
3	03	♥	46	2E	Y	89	59	Y	131	83	ä	174	AE	«	217	D9	┐
4	04	♦	47	2F	/	90	5A	Z	132	84	å	175	AF	»	218	DA	┌
5	05	♣	48	30	0	91	5B	[133	85	à	176	B0	⋮	219	DB	■
6	06	♠	49	31	1	92	5C	\	134	86	á	177	B1	⋮	220	DC	■
7	07	•	50	32	2	93	5D]	135	87	â	178	B2	⋮	221	DD	■
8	08	■	51	33	3	94	5E	^	136	88	ä	179	B3	⋮	222	DE	■
9	09	○	52	34	4	95	5F	_	137	89	å	180	B4	⋮	223	DF	■
10	0A	◼	53	35	5	96	60	`	138	8A	è	181	B5	≡	224	E0	α
11	0B	♀	54	36	6	97	61	a	139	8B	é	182	B6	≡	225	E1	β
12	0C	♂	55	37	7	98	62	b	140	8C	î	183	B7	≡	226	E2	Γ
13	0D	♪	56	38	8	99	63	c	141	8D	ï	184	B8	≡	227	E3	π
14	0E	♫	57	39	9	100	64	d	142	8E	Ï	185	B9	≡	228	E4	Σ
15	0F	⚙	58	3A	:	101	65	e	143	8F	Ä	186	BA	≡	229	E5	σ
16	10		59	3B	;	102	66	f	144	90	Ê	187	BB	≡	230	E6	μ
17	11	▲	60	3C	<	103	67	g	145	91	æ	188	BC	≡	231	E7	τ
18	12	↑↓	61	3D	=	104	68	h	146	92	Æ	189	BD	≡	232	E8	Φ
19	13	!!	62	3E	>	105	69	i	147	93	ô	190	BE	≡	233	E9	Θ
20	14	§	63	3F	?	106	6A	j	148	94	ö	191	BF	≡	234	EA	Ω
21	15	\$	64	40	@	107	6B	k	149	95	õ	192	C0	┐	235	EB	δ
22	16	—	65	41	A	108	6C	l	150	96	û	193	C1	┐	236	EC	∞
23	17	↑↓	66	42	B	109	6D	m	151	97	ù	194	C2	┐	237	ED	∅
24	18	↑	67	43	C	110	6E	n	152	98	ÿ	195	C3	┐	238	EE	ε
25	19	↓	68	44	D	111	6F	o	153	99	Ö	196	C4	—	239	EF	∩
26	1A	→	69	45	E	112	70	p	154	9A	Ü	197	C5	┐	240	F0	≡
27	1B	←	70	46	F	113	71	q	155	9B	φ	198	C6	┐	241	F1	±
28	1C	↔	71	47	G	114	72	r	156	9C	£	199	C7	┐	242	F2	≥
29	1D	↔	72	48	H	115	73	s	157	9D	¥	200	C8	┐	243	F3	≤
30	1E	▲	73	49	I	116	74	t	158	9E	Pt	201	C9	┐	244	F4	f
31	1F	▼	74	4A	J	117	75	u	159	9F	f	202	CA	┐	245	F5	J
32	20		75	4B	K	118	76	v	160	A0	á	203	CB	┐	246	F6	+
33	21	!	76	4C	L	119	77	w	161	A1	í	204	CC	┐	247	F7	≈
34	22	"	77	4D	M	120	78	x	162	A2	ó	205	CD	≡	248	F8	°
35	23	#	78	4E	N	121	79	y	163	A3	û	206	CE	≡	249	F9	•
36	24	\$	79	4F	O	122	7A	z	164	A4	ñ	207	CF	≡	250	FA	•
37	25	%	80	50	P	123	7B	{	165	A5	Ñ	208	D0	┐	251	FB	√
38	26	&	81	51	Q	124	7C		166	A6	±	209	D1	┐	252	FC	²
39	27	'	82	52	R	125	7D	}	167	A7	°	210	D2	┐	253	FD	■
40	28	(83	53	S	126	7E	~	168	A8	¿	211	D3	┐	254	FE	
41	29)	84	54	T	127	7F	△	169	A9	Γ	212	D4	┐	255	FF	
42	2A	*	85	55	U				170	AA	┐	213	D5	F			

Übersicht Y-2. Boolesche Gesetze der Schaltalgebra.

Kommutativgesetz

Das Kommutativgesetz besagt, daß die Reihenfolge der Variablen vertauscht werden kann. Es gilt:

$$A + B = B + A \quad \text{und} \\ A \cdot B = B \cdot A.$$

Assoziativgesetz

Beim Assoziativgesetz führen die beiden möglichen Beklammungen auf dasselbe Ergebnis:

$$A + B + C = (A + B) + C \\ = A + (B + C) \quad \text{und} \\ A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C \\ = A \cdot (B \cdot C).$$

Distributivgesetz

Das Distributivgesetz ermöglicht das Ausmultiplizieren von Klammerausdrücken. Dabei ist auf die Rangfolge der Operatoren zu achten. Es gilt:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad \text{oder} \\ (A + B) \cdot (A + C) = A + B \cdot C.$$

Übersicht Y-2 (Fortsetzung)

Absorptionsgesetze

Die Absorptionsgesetze sind das wichtigste Mittel bei der Vereinfachung von Gleichungen (siehe Distributivgesetz). Durch sie ist festgeschrieben, unter welchen Bedingungen Variable zu Konstanten werden, sich auslöschen oder sich selbst wiedergeben:

$$A + 0 = A \quad A + A = A \\ A + 1 = 1 \quad A + \bar{A} = 1 \\ A \cdot 0 = 0 \quad A \cdot \bar{A} = 0 \\ A \cdot 1 = A \quad A + (A \cdot B) = A \\ A \cdot A = A \quad A \cdot (A + B) = A \\ A + \bar{A} \cdot B = A + B$$

Doppelte Negierung

Wird eine Variable zweifach negiert, so heben sich die Negierungen auf. Somit gilt:

$$\bar{\bar{A}} = A.$$

Dies gilt auch dann, wenn die Variable mehrfach negiert ist. Beispielsweise reduziert sich eine dreifache Negierung der Variablen A auf eine einfache Negierung.

Y.1.3 Logische Verknüpfungen

Mit den beiden binären Elementarzuständen „1“ (wahr) und „0“ (nicht wahr) können nach *BOOLE logische Aussagen* und *logische Funktionen* beschrieben werden, wie sie in der digitalen Schaltungstechnik von Bedeutung sind. Die Booleschen Gesetze beschreiben die *Verknüpfungen* logischer Strukturen und dienen zur Entwicklung elektronischer Schaltungen.

In den Gesetzen von De Morgan wird über die *Negation* eine Beziehung zwischen ODER- und UND-Funktion hergestellt. Mit den Gesetzen ist man in der Lage, logische Gleichungen mit *vielen Negationen* zu vereinfachen.

Übersicht Y-3. Gesetze von De Morgan.

Erstes Gesetz von De Morgan

Negiert man eine ODER-Verknüpfung, so ist dies einer UND-Verknüpfung gleich, bei der die einzelnen Elemente negiert sind.

$$\overline{A + B + C + \dots} = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \dots$$

Zweites Gesetz von De Morgan

Negiert man eine UND-Verknüpfung, so ist dies einer ODER-Verknüpfung gleich, bei der die einzelnen Elemente negiert sind.

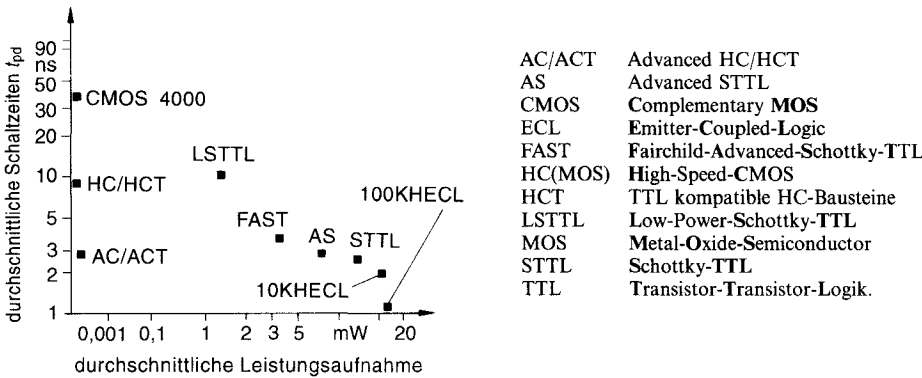
$$\overline{A \cdot B \cdot C \cdot \dots} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \dots$$

Y.1.4 Digitale Bauelemente

Digitale Bauelemente sind Schaltkreise, die auf der Grundlage der Booleschen Schaltungen entwickelt werden. Dazu bedient man sich sogenannter *Logikfamilien*.


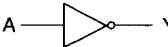

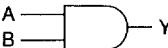

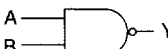
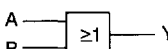

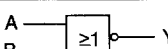
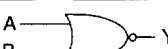
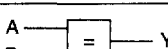
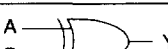
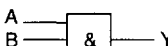

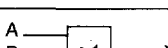

Übersicht Y-4. Logikfamilien und ihre Eigenschaften.

Logikfamilie	CMOS	TTL	LSTTL	HC(T)	STTL	FAST	ECL
Eigenschaften							
Schaltzeit	35 ns	10 ns	8 ns	8 ns	4 ns	3 ns	1 ns
Flip-Flop-Taktfrequenz	7 MHz	15 MHz	30 MHz	50 MHz	75 MHz	100 MHz	500 MHz
Leistungsaufnahme	10 nW	10 mW	2 mW	25 nW	20 mW	4 mW	25 mW



Y.1.5 Schaltzeichen

Tabelle Y-2. Schaltzeichen der Gatterfunktionen.

Funktion	Schaltzeichen		logische Verknüpfung	Wahrheitstabelle																																				
	DIN/IEC	amerikanisch																																						
Inverter			$Y = \overline{A}, A = \overline{Y}$	<table><tr><th>A</th><th>Y</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table>	A	Y	0	1	1	0																														
A	Y																																							
0	1																																							
1	0																																							
AND			$Y = A \cdot B$	<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>Y</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	A	B	Y	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1																					
A	B	Y																																						
0	0	0																																						
0	1	0																																						
1	0	0																																						
1	1	1																																						
NAND			$Y = \overline{A \cdot B}$	<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>Y</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	A	B	Y	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0																					
A	B	Y																																						
0	0	1																																						
0	1	1																																						
1	0	1																																						
1	1	0																																						
OR			$Y = A + B$	<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>Y</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	A	B	Y	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1																					
A	B	Y																																						
0	0	0																																						
0	1	1																																						
1	0	1																																						
1	1	1																																						
NOR			$Y = \overline{A + B}$	<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>Y</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	A	B	Y	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0																					
A	B	Y																																						
0	0	1																																						
0	1	0																																						
1	0	0																																						
1	1	0																																						
EXOR			$Y = A \oplus B$	<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>Y</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	A	B	Y	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0																					
A	B	Y																																						
0	0	0																																						
0	1	1																																						
1	0	1																																						
1	1	0																																						
3-fach AND			$Y = A \cdot B \cdot C$	<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>Y</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	A	B	C	Y	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1
A	B	C	Y																																					
0	0	0	0																																					
0	0	1	0																																					
0	1	0	0																																					
0	1	1	0																																					
1	0	0	0																																					
1	0	1	0																																					
1	1	0	0																																					
1	1	1	1																																					
3-fach OR			$Y = A + B + C$	<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>Y</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	A	B	C	Y	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
A	B	C	Y																																					
0	0	0	0																																					
0	0	1	1																																					
0	1	0	1																																					
0	1	1	1																																					
1	0	0	1																																					
1	0	1	1																																					
1	1	0	1																																					
1	1	1	1																																					

Y.1.6 Speicherbauelemente

Flüchtige Speicherbauelemente verlieren ihren Inhalt, wenn die Versorgungsspannung abgeschaltet wird, nicht flüchtige behalten dagegen den gespeicherten Inhalt.

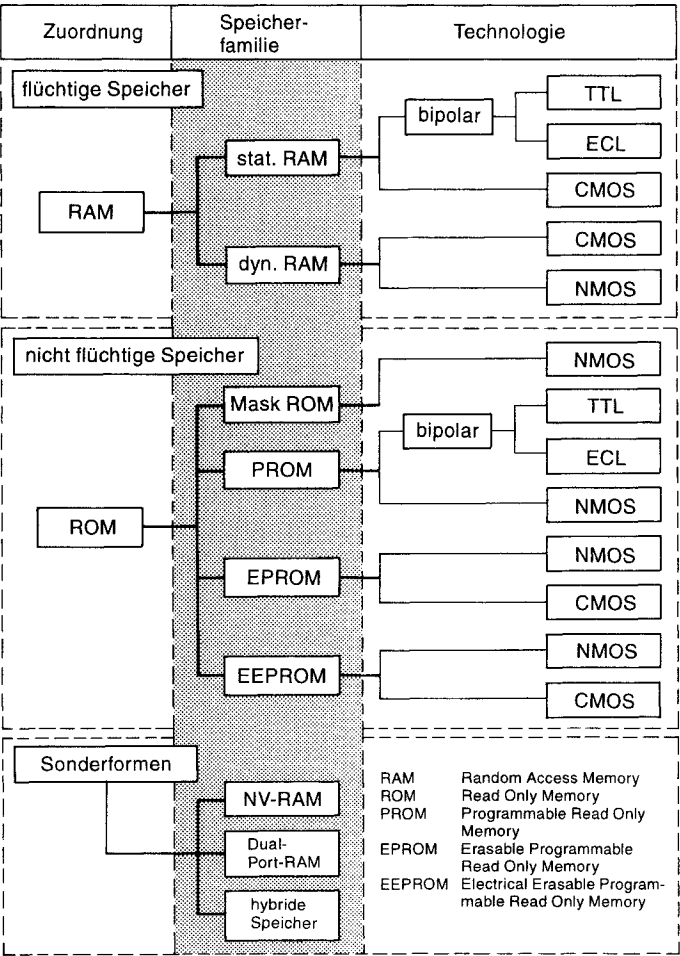


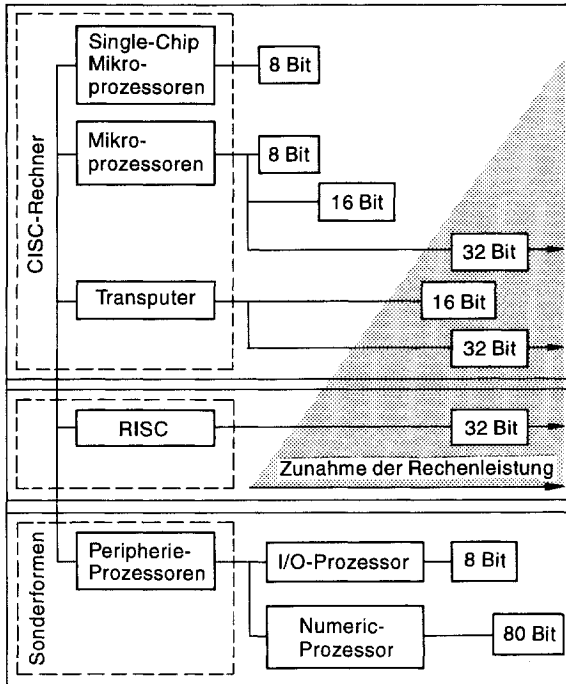
Bild Y-2. Speicherfamilien.

Y.1.7 Mikroprozessoren

Als Maß für die Beurteilung von Rechenleistungen dienen die Anzahl der pro Sekunde bearbeitbaren *Maschinenbefehle* in MIPS

(Million Instructions Per Second) oder die Anzahl der *Gleitkommaoperationen* in FLOPS (Floatingpoint Operations Per Second).

Übersicht Y-5. Prozeßrechner-Bausteine und Begriffe.



Größen für die Rechnerleistung	Begriffe
1 MIPS = 1 Million Befehle in der Sekunde	ALU Arithmetik Logic Unit
1 GIPS = 1000 MIPS	CPU Central Processing Unit
1 kFLOPS = 1000 FLOPS	DMA Direct Memory Access
1 MegaFLOPS (MFLOPS) = 1 000 000 FLOPS	MIMD Multiple Instruction Multiple Data
1 GigaFLOPS (GFLOPS) = 1000 MegaFLOPS	SIMD Single Instruction Multiple Data
	I/O Input/Output.

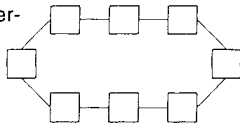
Zur Optimierung der Rechenleistungen werden Transputer eingesetzt. Diese lassen sich

nach bestimmten *Vernetzungs-Topologien* vernetzen (Bild Y-4).

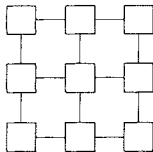
Transputer-
Pipeline



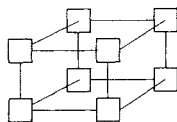
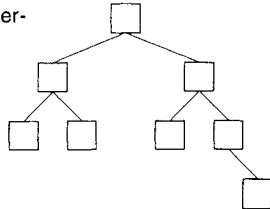
Transputer-
Ring



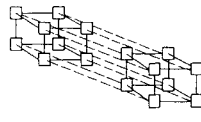
Transputer-
Gitter (2D)



Transputer-
Baum



3D - Cube



4D - Hypercube

Bild Y-3. Topologien zur Transputer-Vernetzung.

Tabelle Y-3. Bausteine der Rechner-Peripherie.

Speicher	RAM	dynamische Speicher
		statische Speicher
		bipolare Speicher
	ROM	EPROM
		EEPROM
		Mask-ROM
Standard-I/O	Sonstige	Mehrtor-Speicher
		Non Volatile RAM
Leistungs-I/O	parallel	Centronics
		RS 232C, RS 422A
	seriell	Ethernet, LAN
System- bausteine	direkt	parallele I/O-Ports
		Transistorausgangsstufen
	entkoppelt	Relais
		Optokoppler
	Prozeß- unter- stützung	Numerik-Prozessor
		DMA-Controller
		Interrupt-Controller
		Timer-Bausteine
		Spannungswächter
		Watchdog
	Benutzer- Schnitt- stellen	Grafik-Interface
		Keyboard-Controller
		Drucker-Interface

Y.1.8 Leitungen digitaler Signale

Tabelle Y-4. Leitungen für digitale Signale und ihr Wellenwiderstand.

Leitung	Geometrie	Wellenwiderstand Z	Bemerkungen
frei verdrahtete Leitung über einer Massefläche ("Wire over Ground")		$Z = \frac{60 \Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \left(\frac{4h}{d} \right)$	gilt für $h \gg d$
Koaxial-Kabel		$Z = \frac{60 \Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \left(\frac{D}{d} \right)$	Der Wellenwiderstand koaxialer Kabel wird meist von den Herstellern bereits festgelegt.
verdrehte Leitung (Twisted Pair-Leitung)		$Z \approx \frac{120 \Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \left(\frac{2D}{d} \right)$	neben den geometrischen Bedingungen hängt Z auch von der Anzahl Schleifen pro cm ab.
Flachbandkabel			Wechseln sich Masse- und Signalleitungen ab, existiert ein bestimmter Wellenwiderstand. Dieser ist von der Geometrie und dem Material abhängig.
Streifenleiter (Microstrip-Leitung)		$Z = \frac{87 \Omega}{\sqrt{\epsilon_r + 1,41}} \ln \left(\frac{5,98 h}{0,8 w + d} \right)$	Am meisten verwendete Technik. Gilt auch für Mehrlagen-Leiterplatten (Multi-Layer).
zweiseitig geschirmter Streifenleiter (Strip-Leitung oder Triplate-Streifenleiter)		$Z = \frac{60 \Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \left(\frac{4b}{0,67 w \pi \left(0,8 + \frac{d}{w} \right)} \right)$	Wird nur in besonderen Fällen verwendet, wie beispielsweise in der HF-Technik.

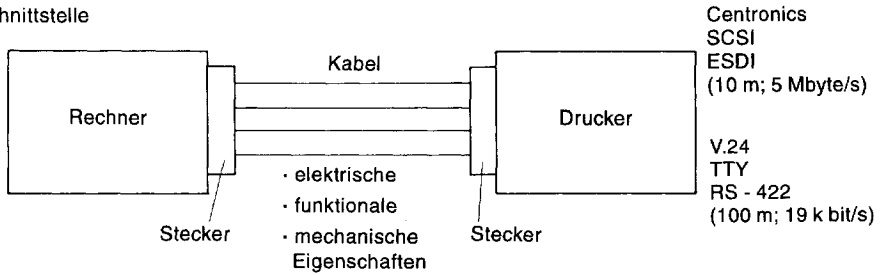
Y.1.9 ASIC

ASIC (Application Specific Integrated Circuit) sind *kundenspezifische* Schaltkreise, die den Einsatz *individueller* Digital- und Analogbausteine ermöglichen. Bei *Halbkunden-ASIC* werden Bausteine mit vorgefertigter Struktur verwendet, die kundenspezifisch verknüpft werden. Hierzu zählen die *PAL* (Programmable Array Logic) und die *Gate-Array* (eine Matrix aus sehr vielen UND-Gattern). Bei den *Kunden-ASIC* wird der *ganze Chip* nach Kundenwunsch angefertigt. Bei den *Standardzellen* greift man auf *standardisierte* Schaltungen (Makros) zurück, während beim *Vollkunden-ASIC* alle Funktionen nach Kundenwunsch erstellt werden.

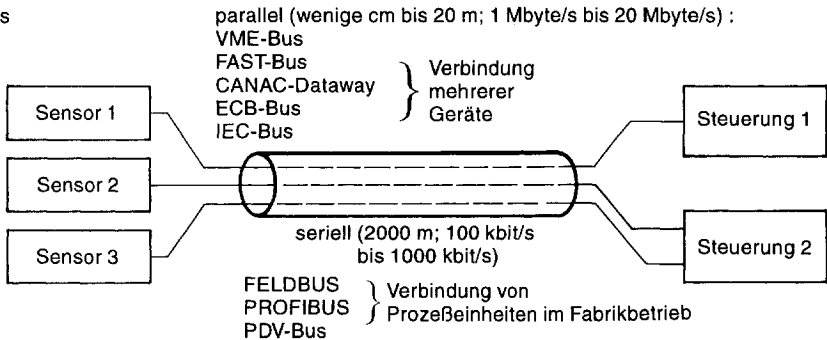
Y.2 Schnittstellen, Bussysteme und Netzwerke

Unter *Schnittstellen* versteht man die *Verbindungsstellen* zwischen zwei Systemen, die über *Schnittstellenleitungen* miteinander verbunden sind. *Busse* sind *Verbindungssysteme* zwischen Teilnehmern. Alle Datenleitungen gehen an alle Teilnehmer und werden von allen Teilnehmern gemeinsam benutzt. *Netze* sind ein gekoppeltes System, an dem *viele* einzelne, *räumlich getrennte Rechner* angeschlossen sind. Die Kommunikation erfolgt durch den Austausch von Informationen unter Beachtung bestimmter Regeln (Bild Y-4).

a) Schnittstelle



b) Bus



c) Netz

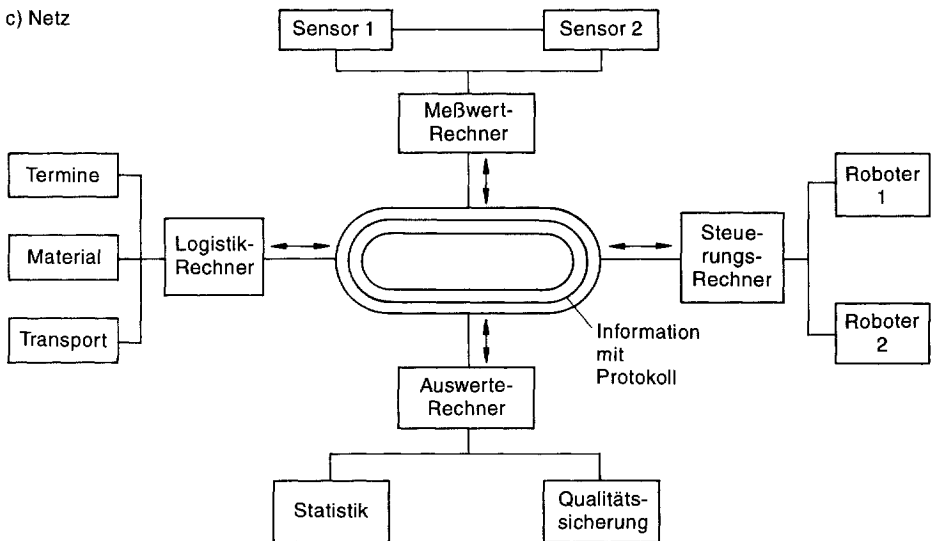
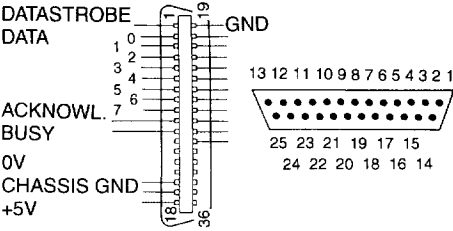
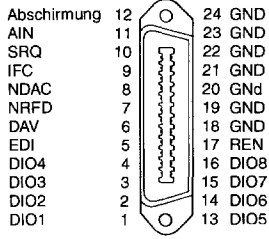
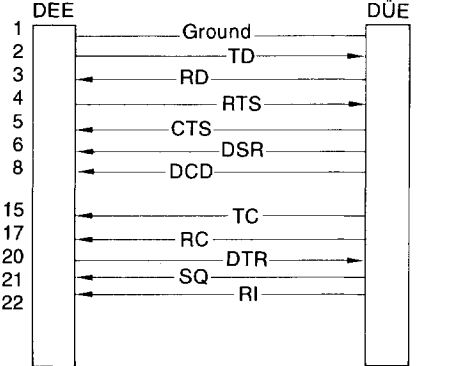
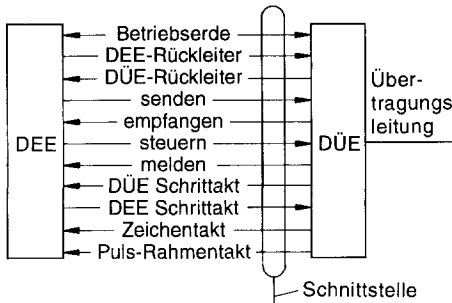


Bild Y-4. Schnittstelle, Bussystem und Netz.

Übersicht Y-6 (Fortsetzung)

Centronics	IEC-Bus nach IEEE-488
<p>c) Anschlußnummerierung</p>  <p>DATASTROBE DATA ACKNOWLEDGE BUSY 0V CHASSIS GND +5V</p> <p>1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36</p>	<p>b) Stecker</p>  <p>Abschirmung 12 AIN 11 SRQ 10 IFC 9 NDAC 8 NRFD 7 DAV 6 EDI 5 DIO4 4 DIO3 3 DIO2 2 DIO1 1</p> <p>24 GND 23 GND 22 GND 21 GND 20 GND 19 GND 18 GND 17 REN 16 DIO8 15 DIO7 14 DIO6 13 DIO5</p> <p>Abschirmung 13 AIN 12 SRQ 11 IFC 10 NDAC 9 NRFD 8 DAV 7 EDI 6 REN 5 DIO4 4 DIO3 3 DIO2 2 DIO1 1</p> <p>25 GND 24 GND 23 GND 22 GND 21 GND 20 GND 19 GND 18 GND 17 DIO8 16 DIO7 15 DIO6 14 DIO5</p>
<p>V.24</p>  <p>DEE DUE</p> <p>1 Ground 2 TD 3 RD 4 RTS 5 CTS 6 DSR 8 DCD 15 TC 17 RC 20 DTR 21 SQ 22 RI</p>	<p>X.24</p>  <p>DEE DUE</p> <p>Betriebserde DEE-Rückleiter DUE-Rückleiter senden empfangen steuern melden DUE Schritttakt DEE Schritttakt Zeichentakt Puls-Rahmentakt</p> <p>Übertragungsleitung</p> <p>Schnittstelle</p> <p>DEE Datenendeinrichtung, DUE Datenübertragungseinrichtung</p>

Y.2.2 Bussysteme

Über Busse werden Daten aus unterschiedlichen Systemen ausgetauscht.

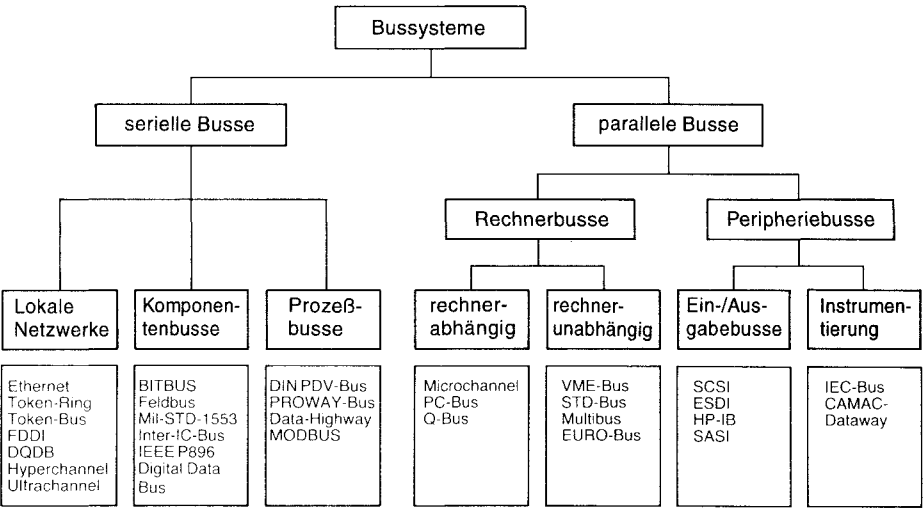


Bild Y-6. Bussysteme.

Y.2.3 Netze

Über Netze werden *unabhängige Rechner-systeme* miteinander verbunden.

Um über unterschiedliche Rechner digitale Daten austauschen zu können, sind die Aufgaben und die Anforderungen an 7 Schichten festgelegt worden. Von Schicht zu Schicht ist eine klare *Übergabeschnittstelle* vorhanden.

Die Kommunikation zwischen verschiedenen Stationen, die sowohl Sender als auch Empfänger darstellen, findet nach verschiedenen Prinzipien statt: Beim *Token-Passing-Verfahren* gibt es eine *Sendeberechtigungsmarke* (Token), die von Station zu Station weitergereicht wird. Beim *Token-Bus* liegt eine Busstruktur vor. Die einzelnen Stationen sind nur logisch verkettet. Beim *Token-Ring* sind die Teilnehmer *physikalisch und logisch* in einem Ring verbunden. Beim *Slotted-Ring-Verfahren*

laufen *Nachrichtencontainer* um, die beim Vorbeikommen an den Stationen mit Nachrichten gefüllt und entleert werden können. Das *QPSX/DQDB-Konzept* (Queued Packet and Synchronous Switch/Distributed Queue Dual Bus) benutzt zwei Bussysteme. Auf ihnen werden durch einen *Rahmengenerator* Pulse erzeugt, die für eine *synchrone* oder *asynchrone* Übertragung verantwortlich sind. Die umlaufenden Nachrichtencontainer können mit Nachrichten gefüllt und entleert werden. Beim Ausfall eines Teilsystems übernimmt das andere Bussystem die Funktionen (Sicherheit).

Zur *Automatisierung* der Fertigung wurde ein *MAP-Standard* (Manufacturing Automation Protocol) entwickelt. Als Sprache dient *MMS* (Manufacturing Message Specification).

Zur Kommunikation zwischen technischen und kaufmännischen Abteilungen dient der *TOP-Standard* (Technical and Office Proto-

Tabelle Y-5. OSI-Modell mit 7 Schichten.

	Bezeichnung	Bedeutung	Beispiel
anwendungsorientierte Schichten	7 Application layer Anwendungsschicht	Anwenderschnittstelle, Informationsverarbeitung	Chef
	6 Presentation layer Darstellungsschicht	Anpassung von Datenformaten	Übersetzer
	5 Session layer Kommunikationssteuerungsschicht	Darstellung der Verbindung als virtuelle Einheit	Sekretärin
transportorientierte Schichten	4 Transport layer Transportschicht	Umsetzen von Namen in Netzwerkadressen, Teilnehmerverbindungen	Telefonvermittlung
	3 Network layer Vermittlungsschicht	Wegefindung, Endsystemverbindungen	Nebenstellenanlage, Vermittlung
	2 Data Link Layer Sicherungsschicht	Zugriffssteuerung, Systemverbindungen, Prüfsummenbildung, Versenden und Empfangen von Datenpaketen	Telefonanlage, Satelliten-Richtfunkstation
	1 Physical Layer Bitübertragungsschicht	Erzeugen der elektrischen Signale	Modem, Akustikkoppler, Telefonapparat

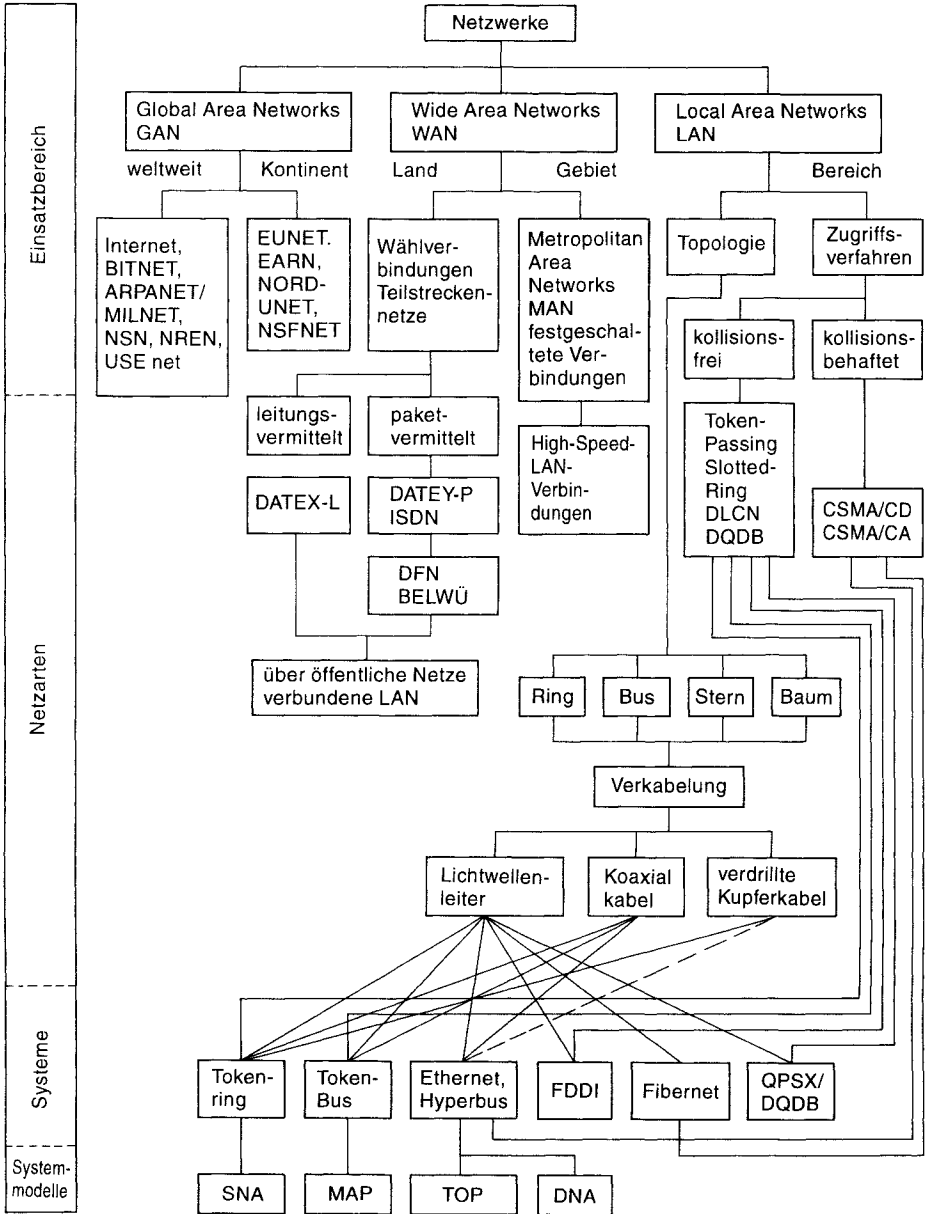
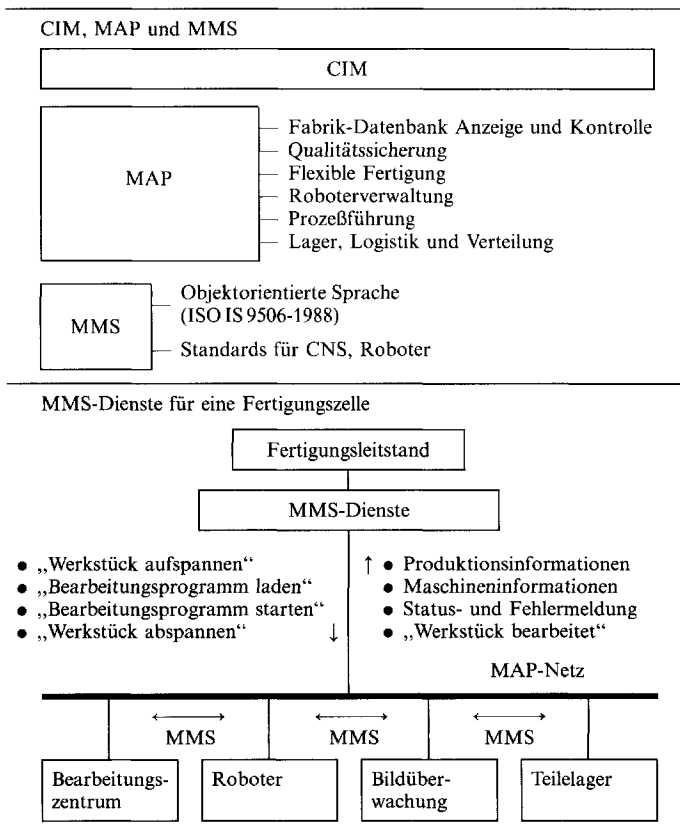


Bild Y-7. Netze.

Tabelle Y-6. Zugriffsverfahren bei Netzen.

	Bezeichnung	Verfahren	Normen	Übertragungs- geschwindigkeit Mbit/s
kollisions- behaftet	CSMA/CD CSMA/CA	Mithören und Senden bei freier Leitung	ISO 8802/3 –	1 bis 10 10 bis 400
Sende- berechtigungs- marke	Token-Bus Token-Ring Slotted-Ring FDDI-I QPSX/DQDB	beide Richtungen nur eine Richtung Nachrichtencontainer Token-Ring mit Glasfaser Doppelbus	ISO 8802/4 ISO 8802/5 ISO 8802/7 ANSI x3T9 ISO 880216	1, 4 und 16 10, 43 100 150
CSMA/CD Carrier Sense Multiple Access with Collision Detection,				
CSMA/CA Carrier Sense Multiple Access with Collision Avoidance,				
FDDI Fiber Distributed Data Interface,				
QPSX/DQDB Queued Packet and Synchronous Switch/Distributed Queue Dual Bus.				

Übersicht Y-7. MAP- und MMS-Dienste.



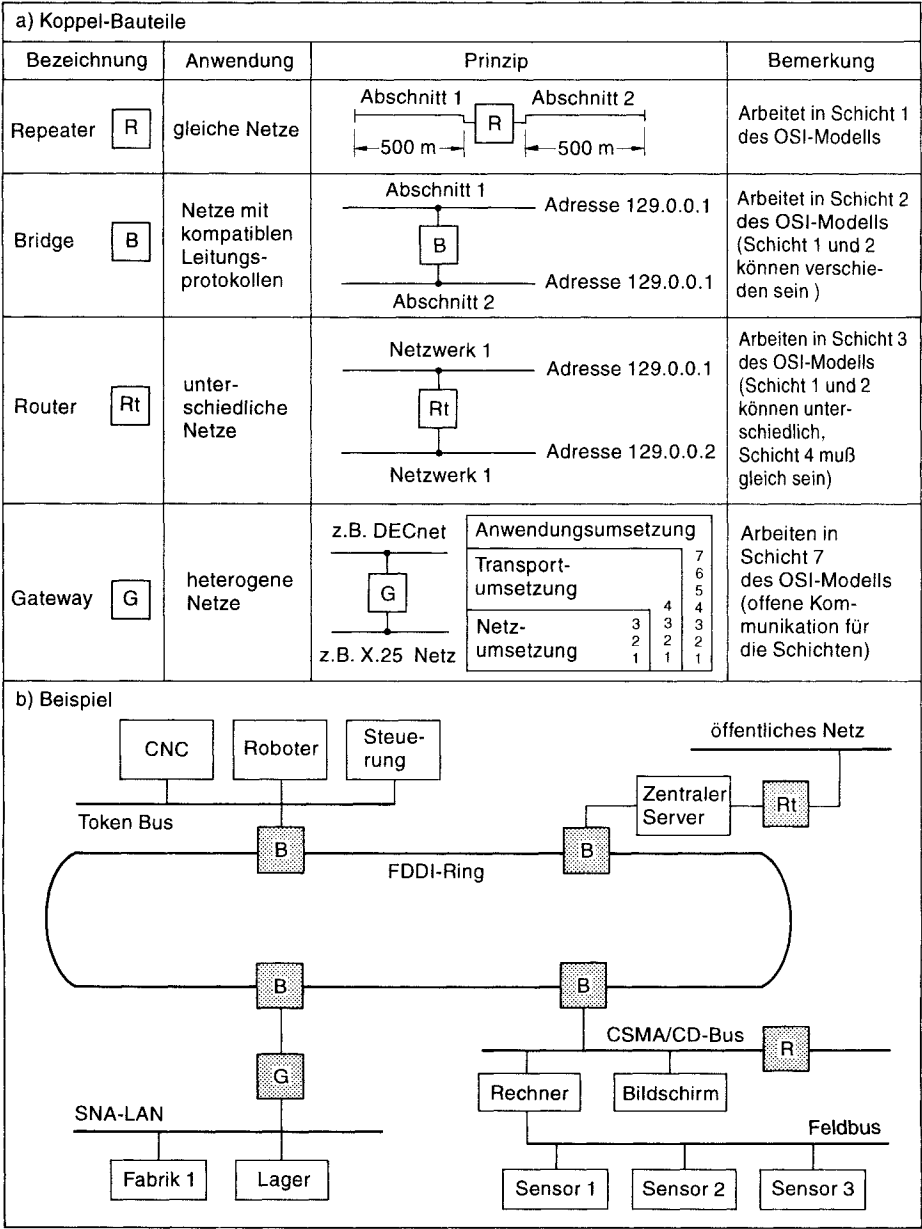


Bild Y-8. Koppelbauteile für Netze.

col). Beide Kommunikations-Standards bauen auf dem 7-Schichten-OSI-Modell auf.

Werden unterschiedliche Netzwerke zusammengestellt, dann müssen für eine sichere Kommunikation *Koppelbausteine* eingesetzt werden.

Y.3 Programmstrukturen

Programmabläufe können, unabhängig von der gewählten Programmiersprache, grafisch durch *Programmablaufpläne* (DIN 66 001) oder *Struktogramme* nach NASSI/SHNEIDERMAN (DIN 66 261) entworfen werden. Die Programmstrukturen *Folge*, *Auswahl* und *Wiederholung* sind in entsprechenden Symbolen dargestellt.

Tabelle Y-7. Programmstrukturen bei Programm-Ablaufplänen (DIN 66 001) und Struktogrammen (DIN 66 261) sowie deren sprachliche Umsetzung.

Programm-Ablaufplan	Struktogramm	PASCAL	BASIC	FORTRAN
Folge-Struktur				
		BEGIN Anweisung 1; Anweisung 2; END.	10 Anweisung 1 20 Anweisung 2 ... 100 weitere Anweisungen	Anweisung 1 Anweisung 2 ... weitere Anweisungen
Auswahl-Struktur				
Bedingte Auswahl (IF Then ... ENDIF)				
		IF Bedingung 1 THEN BEGIN Anweisung 1; ... END;	10 IF Bed. erf. THEN 100 20 Anweisung 1 Nein-Teil ... 100 weitere Anweisungen	IF (Bed. erf.) GO TO 10 Anweisung(en) Nein-Teil GO TO 20 10 Anweisung(en) Ja-Teil ... 20 weitere Anweisungen
Alternative Auswahl (IF THEN ... ELSE ... ENDIF)				
		IF Bedingung THEN BEGIN Anweisung 1; Anweisung 2; ELSE Anweisung 4 END;	10 IF Bed. erf. THEN 100 20 Anweisung(en) Nein-Teil ... 50 GO TO 200 100 Anweisung(en) Ja-Teil ... 200 weitere Anweisungen	IF (Bed. erf.) GO TO 10 Anweisung(en) Nein-Teil GO TO 20 10 Anweisung(en) Ja-Teil ... 20 weitere Anweisungen

Tabelle Y-7. (Fortsetzung)

Programm-Ablaufplan	Struktogramm	PASCAL	BASIC	FORTRAN
Fallunterscheidung (ohne Fehlerausgang) (CASE OF ... ENDCASE)				
		CASE Auswahl OF 1: Fall 1; 2: Fall 2; ... n: Fall n; END;	10 ON N GO TO 100, 200, 300 100 Anweisung Fall 1 ... 190 GO TO 400 200 Anweisung Fall 2 ... 290 GO TO 400 300 Anweisung Fall 3 ... 390 400 weitere Anweisung	GO TO (100, 200, 300), N 100 Anweisung Fall 1 GO TO 400 200 Anweisung Fall 2 GO TO 400 300 Anweisung Fall 3 400 weitere Anweisungen
Fallunterscheidung (mit Fehlerausgang) CASE OF ... OTHERCASE ... ENDCASE)				
		CASE Auswahl OF 1: Fall 1; 2: Fall 2; ... n: Fall n; ELSE Anweisung k; END;	10 IF N > 3 THEN 500 20 ON N GO TO 100, 200, 300 100 Fall 1 ... 190 GO TO 600 200 Fall 2 ... 290 GO TO 600 300 Fall 3 300 Fall 3 390 GO TO 600 500 Fehlerbehandlung ... 600 weitere Anweisungen	IF (N.GT.3) GO TO 50 GO TO (10, 20, 30), N 10 FALL 1 ... 20 FALL 2 ... 30 Fall 3 GO TO 60 GO TO 60 50 Fehlerbehandlung ... 60 weitere Anweisungen

Tabelle Y-7. (Fortsetzung)

Programm-Ablaufplan	Struktogramm	PASCAL	BASIC	FORTRAN
Wiederholungs-Struktur				
Zählschleife				
		<pre> FOR I = Startwert TO Endwert DO BEGIN Anweisung 1; Anweisung 2; END; </pre>	<pre> 10 FOR I = Start TO END STEPS 20 Anweisung 1 ... 90 NEXT I 100 weitere Anweisungen </pre>	<pre> DO 90 I = Start, N, S Anweisung 1 ... 90 CONTINUE weitere Anweisungen </pre>
abweisende Schleife (DO WHILE ... ENDDO)				
		<pre> WHILE Bedingung DO BEGIN Anweisung 1; ... END; </pre>	<pre> 10 IF Bei nicht erfüllt THEN 100 erfüllt 20 Anweisung 1 ... 90 GO TO 10 100 weitere Anweisungen </pre>	<pre> 1 IF (Bed. nicht erfüllt) GO TO 2 Anweisung 1 ... GO TO 1 2 weitere Anweisungen </pre>
nicht abweisende Schleife (DO UNTIL ... ENDDO)				
		<pre> REPEAT Anweisung 1; Anweisung 2; UNTIL Bedingung; </pre>	<pre> 10 Anweisung 1 20 ... 90 IF Abbruch der Bed. THEN 10 erfüllt 100 weitere Anweisungen </pre>	<pre> 1 Anweisung 1 ... IF (Abbruch der Bed. erf.) GO TO 1 weitere Anweisungen </pre>

Y.4 Datenstrukturen

Die Daten werden in Programmen verarbeitet. Eine *Datei* besteht aus einer Anzahl von *Datensätzen*. Diese bestehen aus einzelnen *Datenfeldern*, in denen bestimmte *Informationen* abgelegt sind. Alle Dateien zusammen sind die *Datenbasis* und können in einer *Datenbank* verwaltet werden.

Während des Programmlaufs ändern sich die Daten ständig. *Datenflußpläne* zeigen die

Bearbeitungsvorgänge (z. B. Sortieren), die *Datenträger*, die zur Ausführung der Bearbeitungsvorgänge benutzt werden, und die *Stationen* und *Wege*, über die die Daten das Programm durchlaufen.

Daten können sich je nach Verlauf des Programmes verschieden verhalten (*dynamische Daten*) und werden dann unterschiedlich *organisiert*.

Tabelle Y-8. Sinnbilder für Datenflußplan (DIN 66 001).



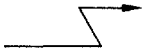

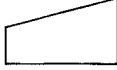






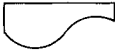



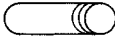


Sinnbild	Bennennung	Erläuterungen zur Anwendung
Flußlinien		
	Flußlinie (<i>flow line</i>)	Am Ende der Flußlinie muß immer ein Pfeil sein. Vorzugsrichtungen: von oben nach unten, von links nach rechts.
	Transport der Datenträger	Zur besonderen Kennzeichnung eines Transportes der Datenträger unter Angabe des Absenders oder Empfängers.
	Datenübertragung (<i>communication line</i>)	Häufig verwendet bei Datenübertragung (z. B. über Telex, Fax oder Telefon).
Bearbeitungsvorgänge		
	Bearbeiten, Operationen, allgemein (<i>process</i>)	Alle Bearbeitungsvorgänge sind mit diesem Sinnbild darzustellen, vor allem aber solche, die nicht weiter klassifiziert werden.
	Eingabe von Hand (<i>manual input</i>)	Darstellung der Dateneingabe von Hand (z. B. von Steuer-, Kontroll- oder Korrekturdaten über Tastatur).
	Mischen (<i>merge</i>)	
	Trennen (<i>extract</i>)	
	Mischen mit gleichzeitigem Trennen (<i>collate</i>)	
	Sortieren (<i>sort</i>)	

Tabelle Y-8 (Fortsetzung)

Sinnbild	Benennung	Erläuterungen zur Anwendung
Datenträger		
	Datenträger allgemein (<i>input/output</i>)	Steht der Datenträger noch nicht fest oder ist er nicht durch die folgenden Sinnbilder darstellbar, wird dieses Sinnbild verwendet.
	Datenträger vom Leitwerk gesteuert (<i>online storage</i>)	Im Sinnbild ist die Speicherart (z. B. Magnetplatte) anzugeben.
	Schriftstück (<i>document</i>)	Darunter fallen u. a. maschinenlesbare Vordrucke oder Listenausdrucke.
	Lochkarte (<i>punched card</i>)	Es empfiehlt sich, die Kartenart anzugeben (z. B. Lagerentnahmekarte).
	Lochstreifen (<i>punched tape</i>)	
	Magnetband (<i>magnetic tape</i>)	Es ist sinnvoll, die Dateinummer mit anzugeben oder bei Ausgabeänderungen Sperrfristen einzutragen. Zugriffsart: sequentiell
	Plattenspeicher (<i>magnetic disk</i>)	Daten auf Speicher mit Direktzugriff
	Anzeige (<i>display</i>)	Die Anzeige erfolgt in optischer (z. B. Bildschirm oder Plotter) oder akustischer Form (z. B. Summer).
		Daten im Zentralspeicher

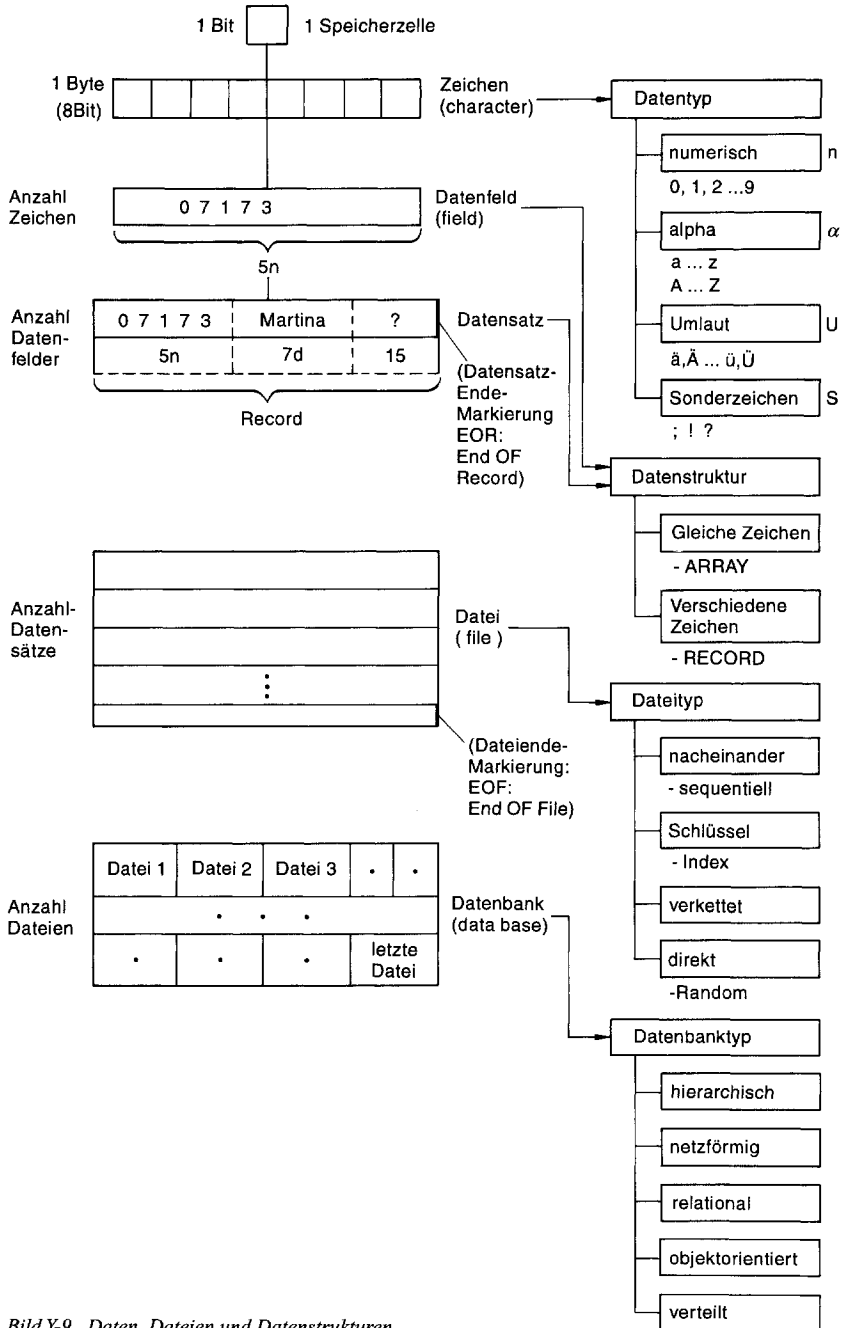
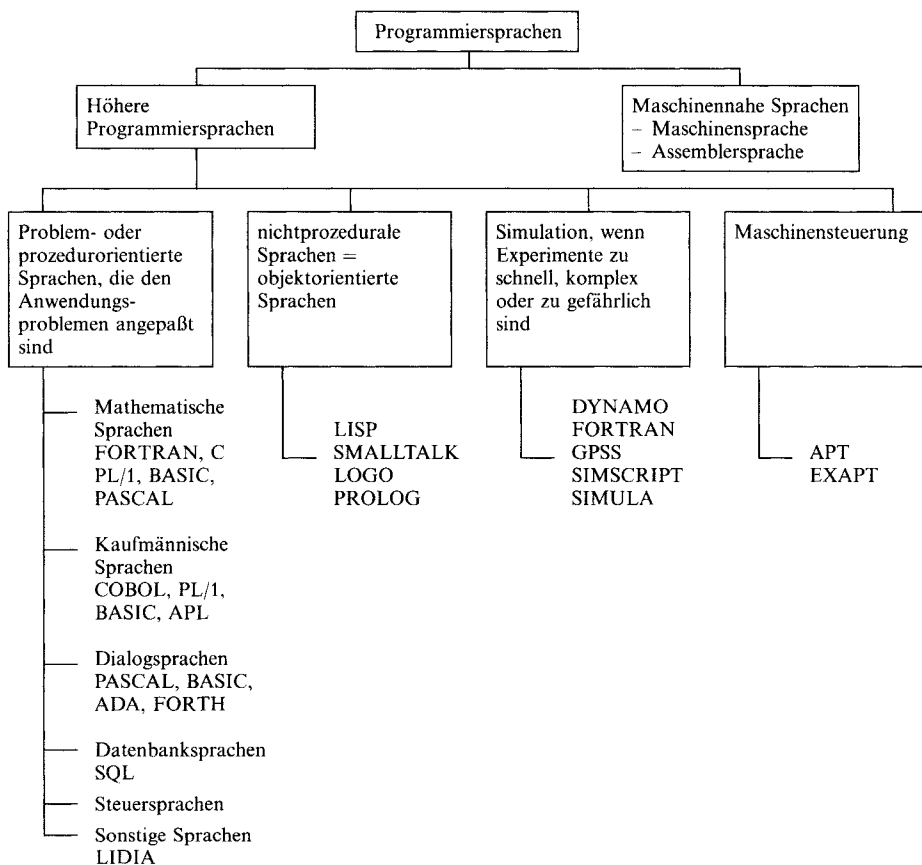


Bild Y-9. Daten, Dateien und Datenstrukturen.

Y.5 Sprachen

Übersicht Y-9. Einteilung der Programmiersprachen.



ADA	Nach ADA Auguste Byron benannt,	FORTH	für FO ur TH generation,
ALGOL	ALGO rithmic Language,	FORTTRAN	FOR mula TRAN slation,
APL	A Programming Language,	GPSS	General Purpose Systems Simulator ,
APT	Automatic Programming for Tools ,	LIDIA	Lernen Im DIA log,
BASIC	B eginners All Purpose Symbolic Instruction Code ,	LISP	LI st P rocessing language,
		PASCAL	Nach PASCAL benannt,
C	C -te (3.) Programmiersprache (nach A und B)	PL/1	P rogramming L anguage 1 ,
COBOL	CO mmun B usiness Language,	PROLOG	PRO gramming LOG ik,
DYNAMO	DYNA mische PRO grammierung,	SIMSCRIPT	SIM ulation De SCRIPTION,
EXAPT	EX panded Applied Programming of Tools ,	SIMULA	SIM ULATION language,
		SQL	Str uctured Q erry L anguage.

Z Chemische Elemente und ihre Eigenschaften

Z.1 Atom und chemische Bindung

Z.1.1 Das Periodensystem der Elemente

Kurz nach 1800 wurde eine naturwissenschaftliche Atomtheorie aufgestellt (aus chemischen Experimenten abgeleitet), in der formuliert wurde:

Ein Element besteht aus gleichartigen Atomen.

Als man die Atomsorten (Elemente) untereinander verglich, stellte man sowohl große Ähnlichkeiten als auch starke Unterschiedlichkeiten fest. Wenn man eine Anordnung der Elemente nach ihrer Ordnungszahl, also ein ganz einfaches Durchnummerieren, vornimmt, so stellt man fest, daß sich gewisse Elementeneigenschaften immer nach 8 Elementen wiederholen.

Man weiß heute, daß die sich ähnelnden Elemente in ihrer äußersten Schale dieselbe Elektronenkonfiguration besitzen, so gilt:

Nr. 9 (Fluor)	$1s^2$	$2s^2$	$2p^5$		
Nr. 17 (Chlor)	$1s^2$	$2s^2$	$2p^6$	$3s^2$	$3p^5$
Nr. 10 (Neon)	$1s^2$	$2s^2$	$2p^6$		
Nr. 18 (Argon)	$1s^2$	$2s^2$	$2p^6$	$3s^2$	$3p^6$
Nr. 11 (Natrium)	$1s^2$	$2s^2$	$2p^6$	$3s^1$	
Nr. 19 (Kalium)	$1s^2$	$2s^2$	$2p^6$	$3s^2$	$3p^6 - - 4s^1$

Die letzte Schale, erkennbar an der Hauptquantenzahl n , zeigt bei den sich ähnelnden Elementen dieselbe Elektronenbesetzung.

Sich ähnelnde Elemente haben dieselbe Anzahl von Außenelektronen (auch sog. „Valenzelektronen“). Ihre Elektronenkonfiguration unterscheidet sich nur in der Hauptquantenzahl n .

Somit bestimmen die Elektronen der äußersten Schale den Elementcharakter.

Das Periodensystem liefert also folgende Basisinformationen:

- Man erkennt, welche Elemente vergleichbare Reaktionen eingehen, weil das chemische Geschehen eine Art Wechselspiel der Außenelektronen ist. Im Periodensystem stehen diese Elemente untereinander, also z.B. Li, Na, K, Rb und Cs.
- An der Gruppennummer erkennt man die Anzahl der zur Verfügung stehenden Valenzelektronen.

Z.1.2 Die Basisgröße „Stoffmenge“

Es ist eine internationale Definition, als Bezugsmenge für chemisches Arbeiten so viele Teilchen zu betrachten, wie Atome in 12,00 g des Kohlenstoffisotops C(12) enthalten sind (Element Nr. 6). Diese Bezugsmenge ergibt sich, wenn man die 12 g durch die Masse eines einzelnen C-Atoms dividiert; sie wird Mol genannt und mit dem Einheitenzeichen mol angegeben.

Unter 1 mol versteht man eine Menge von $6,02209 \cdot 10^{23}$ Teilchen, ganz gleich, welcher Art und wie groß diese Teilchen sind. Teilchen sind hierbei nicht nur Atome, sondern auch alle zusammenhaltenden Atomgruppierungen. Man nennt diese Menge international „Avogadro-Zahl N_A “, in Deutschland allerdings häufig „Loschmidt'sche Zahl“.

Nach Norm DIN 32625, 12.89 gibt man die Stoffmenge in der Form $n(X)$ an, wobei X für die betrachteten Teilchen steht, also z.B.:

$$n(\text{HCl}) = 0,1 \text{ mol oder } n(\text{Na}) = 0,15 \text{ mol.}$$

Die Masse eines Mols (also von etwa $6 \cdot 10^{23}$ Teilchen) wird als „molare Masse“ bezeichnet und in der Form $M(X)$ angegeben.
Die Einheit lautet g/mol.

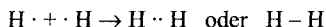
Andere Bezeichnungen wie etwa „Atommasse“ oder „Atomgewicht“ entsprechen nicht der Norm.

Z.1.3 Edelgaskonfiguration und Atombindung

Da die Edelgaskonfiguration s^2p^6 (also abgeschlossene s- und p-Orbitale) der Grund für große Stabilität ist, versteht man, daß auch andere Atome diese Konfiguration anstreben. Die Art und Weise, wie dieses zustande kommt, wird mit dem Begriff „Chemische Bindung“ beschrieben; eine dieser Arten nennt man Atombindung.

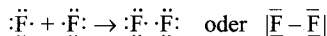
Der einfachste Fall, der auftreten kann, ist die Bildung eines H_2 -Moleküls aus zwei H-Atomen, da jedes H-Atom nur ein einziges Elektron in einem s-Orbital besitzt.

Dies läßt sich wie folgt wiedergeben:



Man erkennt: Jedes H-Atom erhält auf diese Weise quasi zwei Elektronen, d.h. die abgeschlossene Schale des Heliums (hier nur s^2). Daß tatsächlich ein Bindeeffekt zustande gekommen ist, sieht man am kleinen Abstand zwischen den H-Atomen im H_2 -Molekül. Er beträgt 74,14 pm (Picometer; $1 \text{ pm} = 10^{-12} \text{ m}$), während für den Radius eines H-Atoms 52,8 pm gilt.

Um zur Edelgasschale s^2p^6 zu gelangen, muß man Elemente der 1. Achterperiode betrachten, also Atome, deren zweite Hauptquantenbahn im Aufbau ist. Das Fluor ist ein Beispiel, weil hier s^2p^5 vorliegt, d.h. eines der p-Orbitale nur halbbesetzt ist. Überträgt man diese Vorstellungen auf die Bildung eines F_2 -Moleküls, so gilt:



Man stellt fest, daß man zweierlei Elektronenpaare unterscheiden muß:

Bindungselektronenpaare zwischen den Atomen. Diese gehören den Atomen gemeinsam.

So genannte „freie Elektronenpaare“, die frei von Bindung sind und nur einem Atom angehören.

Die Strichformel, die dabei entstanden ist, wird Lewis-Strukturformel genannt. Sie sammelt um ein Atomsymbol alle vorhandenen Elektronen. Das Oktett ergibt sich aus der Summe von bindenden und freien Elektronenpaaren (also Strichen, wobei jeder Strich für 2 Elektronen steht).

Z.1.3.1 Hybridisierung

Für alle Hydrogenhalogenide HF , HCl , HBr und HI gilt dasselbe, aber auch für den elementaren Zustand der Halogene F_2 , Cl_2 , Br_2 und I_2 .

Alle entstandenen Gebilde sind zweiatomige Moleküle. Geht man von der Gruppe 17 (Halogene) nach links, so kommt man zu s^2p^4 (Chalkogene), s^2p^3 (Stickstoff-Gruppe) und s^2p^2 (Kohlenstoff-Gruppe). Das Kästchen-Schema für Sauerstoff, Stickstoff und Kohlenstoff hat folgendes Aussehen:

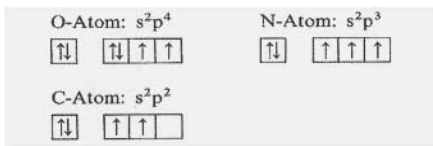


Bild Z-1. Kästchen-Schema für Sauerstoff, Stickstoff und Kohlenstoff.

Man erkennt:

- Das O-Atom besitzt zwei einfach besetzte p-Orbitale, aber außerdem noch zwei voll besetzte Orbitale. Wenn O und H miteinander reagieren, sind für die Erreichung des Oktetts aus Sauerstoff zwei H-Atome erforderlich, d.h., es resultiert die Formel des Wassers H_2O . Da p-Orbitale senkrecht zu-

einander stehen, ist ein gewinkeltes Molekül zu erwarten.

- Stickstoff benötigt drei H-Atome, um ein Oktett auszubilden; ein freies Elektronenpaar bleibt übrig. Die entstehende Verbindung hat die Formel NH_3 (Ammoniak). Die räumliche Anordnung des Moleküls ist pyramidal.
- Das C-Atom ist O-Atom ähnlich, weil zwei einfach besetzte p-Orbitale vorliegen. Man erwartet ein gewinkeltes Molekül CH_2 , welches aber die wichtige Forderung des Oktetts am Kohlenstoff nicht erfüllt. Die Lewis-Strukturformeln für diese drei Fälle lauten:

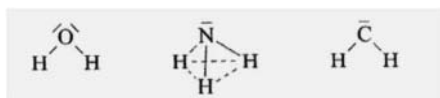


Bild Z-2. Die Lewis-Strukturformeln für Wasser, Ammoniak und Carben.

Z.1.3.2 Polare Atombindungen und Elektronegativität

Vergleicht man unter Zugrundelegung des Periodensystems die Eigenschaften der Elemente von s^1 (Alkalimetalle) bis s^2p^5 (Halogene), so fällt eine allmähliche Abnahme des metallischen Charakters auf. Die Gruppen 3 bis 12 (Übergangsmetalle) bleiben bei diesem Vergleich unberücksichtigt. Man findet, daß mit fortschreitender Besetzung der p-Orbitale die Elemente nichtmetallischer werden.

Das hat Auswirkungen auf das Bindungselektronenpaar einer Atombindung.

Je näher ein Element dem Schalenabschluß s^2p^6 ist, desto stärker zieht es das Bindungselektronenpaar zu sich herüber. Nur zwei identische Atomsorten besitzen in einer Atombindung ein symmetrisch angeordnetes Bindungselektronenpaar; in allen anderen Fällen ist das Bindungselektronenpaar zum nichtmetallischeren Partner hin verschoben.

Für die Tendenz, das Bindungselektronenpaar anzuziehen, wurde der Begriff Elektronegati-

vität eingeführt und auch eine Elektronegativitätsskala abgeleitet, in der den einzelnen Elementen Elektronegativitätswerte zugeordnet wurden.

Diese Elektronegativitätswerte wurden den einzelnen Elementen nicht ohne physikalisch-chemische Meßmethoden zugeordnet, sondern die bekannten Bindungsenergien dienen als Grundlage für die Skala. Unter Bindungsenergie versteht man die bei der Verbindungsbildung aus Atomen freiwerdende Energie.

Fluor erhielt den Wert 4,0; die niedrigsten Elektronegativitätswerte liegen knapp unter 1,0.

Im Periodensystem nimmt die Elektronegativität für Elemente, deren Valenzelektronen s- und p-Orbitale besetzen, ausgehend von Fluor (4,0) sowohl von oben nach unten, als auch von rechts nach links ab. Sie erreicht links unten beim Alkalimetall Cäsium den tiefsten Wert von etwa 0,8 bis 0,7.

Der Elektronegativitätswert läßt sich neben anderen Eigenschaften heranziehen, um Nichtmetalle von Metallen abzugrenzen.

Da die Übergänge im Periodensystem jedoch fließend sind, kommt man mit einer Einteilung in Nichtmetalle und Metalle nicht aus. Für die Gruppen 1, 2, 13, 14, 15, 16 und 17 (s^1 bis s^2p^5) lassen sich die Elemente je nach Elektronegativität wie folgt unterscheiden:

Nichtmetalle mit Werten von 4,0 bis etwa 2,5
 Halbmetalle mit Werten von etwa 2,5 bis ca. 1,8
 Metalle mit Werten von etwa 1,8 bis ca. 1,6
 Edelmetalle mit Werten von ca. 1,6 bis 0,7

Da nach dieser Vorstellung das F-Atom im HF-Molekül mehr vom Bindungselektronenpaar erhält als das H-Atom, wird ersteres ein wenig negativer, letzteres um den gleichen Betrag positiver. Man spricht von Teilladung.

Z.1.3.3 Mehrfachbindungen

Die Atombindung (die auch als kovalente Bindung bezeichnet wird) ist noch nicht vollständig beschrieben, da auch mehr als ein Elektronenpaar für die Bindung zwischen zwei Atomen beitragen kann. Es gibt Doppelbindungen (2 Striche), Dreifachbindungen (3 Striche), aber auch alle Zwischenzustände. So besitzt das Stickstoff-Atom infolge der Elektronenkonfiguration s^2p^3 drei einfach besetzte p-Orbitale:



Bild Z-3. Elektronenkonfiguration des Stickstoffs.

Zur Erklärung der Bindung im N_2 -Molekül, müssen die Modellvorstellungen erweitert werden. Es erfolgt nur eine einzige Überlappung zweier p-Orbitale in der Atomverbindungslinie (analog zur Bildung des F_2 -Moleküls). Weitere Überlappungsbereiche der anderen p-Orbitale treten außerhalb der Atomverbindungslinie auf. Diese bestehen aus zwei Anteilen.

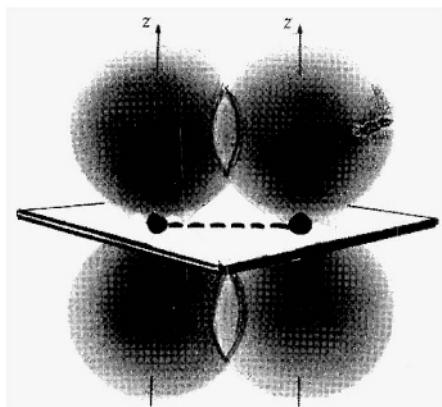


Bild Z-4. Überlappung zweier p_z -Orbitale außerhalb der Atomverbindungslinie (gestrichelt). Die Überlappungsbereiche oberhalb und unterhalb der Ebene sind hervorgehoben.

Die rotationssymmetrische Bindung in der Atomverbindungslinie heißt σ -Bindung. Die beiden anderen Überlappungen der p_z - (und beim N_2 zusätzlich der p_y -) Orbitale führen zu sog. π -Bindungen, die keine Rotationssymmetrie, sondern Spiegebildsymmetrie zeigen.

Insgesamt ergibt sich in diesem Modell eine Dreifachbindung für N_2 , die aus einer σ -Bindung und zwei π -Bindungen besteht.

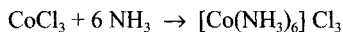
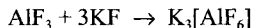
Bei einer Doppelbindung kommt die Bindung nur durch eine σ -Bindung und eine π -Bindung zustande.

Z.1.3.4 Komplexbindungen

Verbindungen, die gesättigt und in sich abgeschlossen sind, können noch weiter reagieren. Das ist mit der üblichen „Valenzlehre“ (Valenz = Wertigkeit) nicht vereinbar, da diese einem bestimmten Atom eine maximale Anzahl von Bindungen (Valenzen) zuordnet. Entsprechend der Theorie ist nicht einzusehen, warum so stabile Verbindungen wie AlF_3 (Aluminiumfluorid) und KF (Kaliumfluorid) miteinander reagieren.

Die neuen Verbindungen bezeichnet man als Komplex oder Koordinationsverbindung.

In der heutigen Schreibweise lauten entsprechende Reaktionsgleichungen:



Der eigentliche Komplex ist jeweils das in eckiger Klammer geschriebene Ion $[AlF_6]^{3-}$ und $[Co(NH_3)_6]^{3+}$.

Es lässt sich zusammenfassen:

Ein Komplex ist ein „kompliziert gebautes Gebilde“, in dessen Zentrum das sog. Zentralatom sitzt.

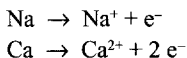
Um dieses Zentralatom herum ordnen sich Ionen oder Moleküle an, die Liganden genannt werden.

Zwischen Zentralatom und Liganden bestehen Atombindungen. Die Anzahl der Bindungen, die das Zentralatom betätigt, nennt man Koordinationszahl (übliche Abkürzung: KZ).

Z.1.4 Die Ionenbindung

Edelgase sind deshalb so stabil und reaktionsträge, weil sie ihre s- und p-Orbitale voll besetzt haben. Atome wie H, F, Cl, N hatten nur eine einzige Möglichkeit, um auch zu dieser Besetzung zu gelangen: sie mußten Elektronen miteinander teilen (Lewis). Dies führt dann zu einer „vorgetäuschten“ Vollbesetzung, da in Wirklichkeit die Summe der Elektronen nicht zugenommen hat. Um wirklich eine vollbesetzte Außenschale zu erhalten, muß das Fluoratom ein Elektron einfangen. Da am Anfang des Periodensystems (Gruppe 1 und 2) Elemente stehen, die ein oder zwei Elektronen über einer abgeschlossenen Schale besitzen, wird ein Elektronenaustausch vorgenommen.

Alkali- und Erdalkalimetalle besitzen nur ein bzw. zwei Elektronen über einer vollbesetzten Schale. Wenn ein Elektronen aufnehmender Partner anwesend ist, können diese Elektronen abgespalten und übertragen werden.



Positive Ionen wie Na^+ und Ca^{2+} nennt man Kationen. Die zur Abspaltung erforderliche Energie heißt Ionisierungsenergie. Der Vorgang der Elektronenabgabe wird als Oxidation bezeichnet, die Anzahl der abgegebenen Elektronen als Oxidationszahl (hier +II, wobei römische Zahlenangabe üblich ist). Das Kation Ca^{2+} besitzt jetzt dieselbe Außenschale wie das Edelgas Argon (Nr. 18).

Reaktionspartner für Alkali- und Erdalkalimetalle findet man insbesondere unter den Halogenen und Chalkogenen, da diese durch Elektronenaufnahme von ein oder zwei Elektronen zur Vollbesetzung gelangen. Der Vorgang der Elektronenaufnahme heißt Reduktion. Auch hier wird die Anzahl der aufgenommenen Elektronen Oxidationszahl genannt, allerdings mit negativem Vorzeichen.

Tabelle Z-1. Oxidation und Reduktion

Oxidation = Elektronenabgabe	Reduktion = Elektronenaufnahme
Oxidationszahl positiv	Oxidationszahl negativ
Beispiel: $\text{K} \rightarrow \text{K}^+ + \text{e}^-$	Beispiel: $\text{Br} + \text{e}^- \rightarrow \text{Br}^-$
Das Ion heißt Kation	Das Ion heißt Anion

Die gebildeten Ionen ordnen sich räumlich zu „Ionengittern“ an (s. Kapitel V).

Z.1.5 Metallische Bindung und Metallstrukturen

Wenn man die Möglichkeiten berücksichtigt, eine chemische Bindung einzugehen, so gilt:

Zwei „hinreichend“ elektronegative Elemente (bzw. zwei Nichtmetalle) gehen eine Atombindung ein, die je nach Elektronegativitätsunterschied mehr oder weniger polar ist.

Zwei in Bezug auf die Elektronegativität unterschiedliche Elemente (bzw. ein Nichtmetall und ein Metall) gehen eine Ionenbindung ein.

Es fehlt noch der Fall, daß Metalle (also Elemente mit niedriger Elektronegativität) untereinander Bindungen eingehen. Metalle neigen nicht zur Elektronenaufnahme (Reduktion), sondern zur Elektronenabgabe (Oxidation).

Metallatome geben ihre Valenzelektronen an ein Elektronenreservoir ab, das allen gemeinsam ist. Es verbleiben positive Metallionen, die sich im „Meer von Elektronen“ (auch Elektronengas genannt) nach räumlichen Gesichtspunkten anordnen.

Da sich die Metallatome als Kationen in diesem Elektronengas aufhalten und von diesem ganz umhüllt werden, entwickeln sich ungeordnete Anziehungskräfte wie bei einer Ionenbindung. Die Atome ordnen sich nach geometrischen Gesichtspunkten so dicht wie möglich an; man spricht von einer dichtesten Kugelpackung.

Z.2 Wäßrige Lösungen

Z.2.1 Lösevorgänge und Konzentrationsangaben

Wasser ist ein ideales Lösungsmittel für Stoffe, die ebenfalls polare Bindungen oder ionogenen Aufbau zeigen, also etwa für Alkohole wie Methanol CH_3OH und Ethanol $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ einerseits oder Salze wie NaCl (Natriumchlorid), KNO_3 (Kaliumnitrat) oder Na_2SO_4 (Natriumsulfat) andererseits.

Die Ion-Dipol-Wechselwirkungen können zur Auflösung eines Kristalls führen, wenn die energetische Bilanz stimmt.

Für den Löseprozeß (d.h. Überwindung der Gitterkräfte bzw. Gitterenergie) spielt außer der Temperatur die sog. Hydrationsenthalpie als Energiefaktor eine Rolle. Darunter versteht man die Energie, die frei wird, wenn sich 1 mol Ionen mit H_2O -Dipolen umgibt. Aufgrund der Ion-Dipol-Wechselwirkungen wird ein Kation H_2O -Dipole immer in der Weise um sich anordnen, daß das O-Atom des Wassers auf das Kation zugeht. Für Anionen ist es die andere Seite des H_2O -Moleküls.

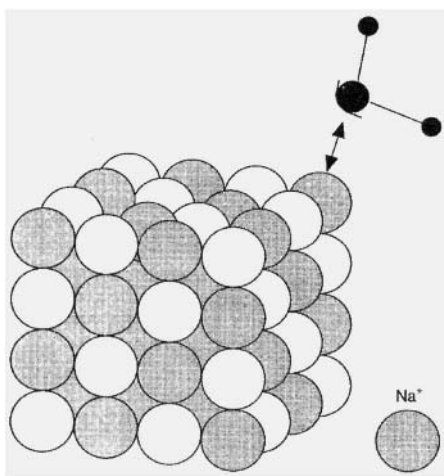
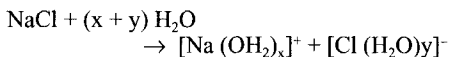


Bild Z-5. Lösevorgang bei NaCl .

Man kann das Auflösen von Kochsalz wie folgt in einer Gleichung wiedergeben:



In der Lösung befinden sich dann solvatisierte, in diesem Falle hydratisierte Ionen, d.h. Ionen, die von einer Hülle aus Lösungsmittelmolekülen umgeben sind.

Liegt dann eine Lösung vor, so ist es notwendig, diese zu charakterisieren. Hierzu dienen verschiedene Konzentrationsangaben, die auf unterschiedlichen Definitionen basieren.

Eine Lösung ist x%ig, wenn sie in 100 g Lösung x g des gelösten Stoffes enthält.

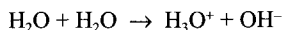
In der Chemie hat eine andere Konzentrationsangabe Vorrang, die sich auf die Teilchenzahl des gelösten Stoffes bezieht. Teilchenzahl bedeutet Stoffmenge; folglich spricht man von Stoffmengenkonzentration (englisch: amount-of-substance concentration). Hierzu gilt die Norm DIN 32625, 12.89.

Eine Lösung hat die Stoffmengenkonzentration $c(\text{X}) = y \text{ mol/l}$, wenn sich in 1 l Lösung y mol des gelösten Stoffes befinden.

Da die Stoffmengenkonzentration auf das Volumen, die Prozentangabe jedoch auf die Masse der Lösung bezogen ist, läßt sich jede der Konzentrationsangaben nur dann in die andere umrechnen, wenn die Dichte bekannt ist.

Z.2.2 Ionenprodukt des Wassers

Reinstes Wasser zeigt eine geringe elektrische Leitfähigkeit von ca. $5,5 \cdot 10^{-8} \text{ S} \cdot \text{cm}^{-1}$ bei 25°C fest, d.h. Wasser verfügt auch im allerreinsten Zustand über Ladungsträger, ohne die eine elektrische Leitfähigkeit nicht möglich wäre. Diese Ladungsträger sind die Ionen H_3O^+ (Hydronium-Ion) und OH^- (Hydroxid-Ion). Sie entstehen durch sog. Eigendissoziation des Wassers (auch „Autoprotolyse“):



Wendet man auf dieses Gleichgewicht das MWG (Massenwirkungsgesetz) an, so ergibt sich:

$$K = \frac{a(\text{H}_3\text{O}^+) \cdot a(\text{OH}^-)}{a(\text{H}_2\text{O})}$$

Da durch Definition $a(\text{H}_2\text{O}) = 1,0$ ohne Einheit ist (reine Flüssigkeit), vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$K = a(\text{H}_3\text{O}^+) \cdot a(\text{OH}^-) \quad \text{Einheit: (mol/l)}^2$$

Diese MWG-Gleichung wird als „Ionenprodukt des Wassers“ und die Konstante K als K_w bezeichnet. Der K_w -Wert ist eine temperaturabhängige Größe, die über Leitfähigkeitsmessungen zugänglich ist, z. B.

$$\text{Bei } 5^\circ\text{C} \quad K_w = 0,1846 \cdot 10^{-14} \text{ (mol/l)}^2$$

$$10^\circ\text{C} \quad = 0,2920 \cdot 10^{-14} \text{ (mol/l)}^2$$

$$25^\circ\text{C} \quad = 1,008 \cdot 10^{-14} \text{ (mol/l)}^2$$

Dem K_w -Wert bei 25°C kommt eine besondere Bedeutung in der Chemie zu, da er praktisch $1,00 \cdot 10^{-14} \text{ (mol/l)}^2$ entspricht. Bei allen anderen Temperaturen kommt es zu mehr oder weniger starken Abweichungen, da die Eigen dissoziation des Wassers mit der Temperatur zunimmt.

Daß es nur sehr wenige Ionen sind, die in reinstem Wasser vorliegen, rechnet man wie folgt:

Es gilt, daß in dieser extrem verdünnten Lösung der Ionen H_3O^+ und OH^- in Wasser kaum interionische Wechselwirkungen vorliegen, so daß man $a(\text{H}_3\text{O}^+) = c(\text{H}_3\text{O}^+)$ setzen kann, d. h. bei 25°C :

$$c(\text{H}_3\text{O}^+) \cdot c(\text{OH}^-) = 10^{-14} \text{ (mol/l)}$$

Nach der Dissoziationsgleichung entstehen die Ionen im Verhältnis 1:1, deshalb gilt (bei 25°C):

$$c(\text{H}_3\text{O}^+) = c(\text{OH}^-) = \sqrt{10^{-14}} = 10^{-7} \text{ mol/l}$$

Da 1 l Wasser bei 25°C eine Masse von 997,1 g besitzt, liegen insgesamt pro Liter $997,1/18 = 55,394 \text{ mol H}_2\text{O}$ vor. Die errechneten 10^{-7} mol/l sind hiervon nur ca. $1,8 \cdot 10^{-7}\%$!

Z.2.3 Säuren und Basen

Nach Brönsted gelten folgende Bezeichnungen:

Brönsted-Säure:

Protonendonator, d. h. $\text{A-H} \rightarrow \text{H}^+ + \text{A}$
(A steht für acid = Säure, A ist dann das Anion der Säure)

Brönsted-Base:

Protonenakzeptor, d. h. $|\text{B} + \text{H}^+ \rightarrow [\text{B-H}]^+$
oder $\text{B}^- + \text{H}^+ \rightarrow \text{B-H}$

Eine Verbindung kann sich als Säure verhalten, wenn sie auf eine Base trifft, die das Proton auch aufnimmt, andernfalls bleibt diese Verbindung eine Wasserstoffverbindung, die ein Proton abgeben könnte. Für eine Base gilt das entsprechende, so daß beides unzertrennliche Begriffe sind. Daher spricht man immer von Säure-Base-Reaktionen.

Da eine Base nach Brönsted ein freies Elektronenpaar zur Bindung des Protons mitbringen muß und alle Anionen über mindestens ein derartiges verfügen, sind alle Anionen Basen. Sie sind also als Protonenakzeptor oder aber als Elektronenpaardonator zu bezeichnen.

Dieses führt zu einer anderen Säure-Base-Definition, die von G.N. Lewis stammt.

Säuren sind als Elektronenpaar-Akzeptoren, Basen als Elektronenpaardonatoren zu betrachten.

Diese zweite Säure-Base-Definition setzt die erste nicht außer Kraft, sondern ergänzt sie. Nach Lewis ist es nicht mehr nötig, daß eine Säure eine Wasserstoffverbindung ist; sie muß lediglich die Möglichkeit haben, mit einem Elektronenpaar einer Base reagieren zu können.

Die Säuren der Praxis gehören in erster Linie der anorganischen Chemie an. So ist Schwefelsäure in der Industrie mengenmäßig die am meisten hergestellte Verbindung überhaupt.

Anorganische Säuren nennt man auch Mineralsäuren, weil ihre Salze bisweilen sehr wichtige Minerale der Natur darstellen (Steinsalz

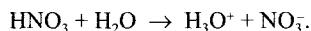
NaCl, Gips $\text{CaSO}_4 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$, Salpeter NaNO_3 oder die komplizierter aufgebauten Phosphate).

- **Salzsäure:** Die einfachste Mineralsäure ist die Salzsäure, eine wäßrige Lösung von Hydrogenchlorid, das extrem gut wasserlöslich ist. Die gesättigte Lösung bei 20 °C ist ca. 40,4%ig und enthält etwa 485 g HCl pro Liter: $\text{HCl}_{(\text{g})} + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_3\text{O}^+ + \text{Cl}^-$.

Das Gleichgewicht der Säure-Base-Reaktion mit Wasser liegt praktisch vollkommen auf der rechten Seite der Reaktionsgleichung, so daß ein Pfeil von links nach rechts die Verhältnisse am besten beschreibt.

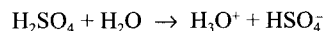
- **Salpetersäure:** Mit Salpeter bezeichnet man i. d. R. Natriumnitrat NaNO_3 , daneben aber auch KNO_3 , NH_4NO_3 oder $\text{Ca}(\text{NO}_3)_2$. Zur Unterscheidung spricht man deshalb von Natron-, Kali-, Ammon- oder Kalk-Salpeter.

Reine HNO_3 ist kein Gas, sondern eine Flüssigkeit mit Kp. 82,6 °C, die durch die Reaktion mit Wasser zur eigentlichen Salpetersäure wird:



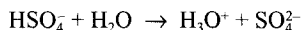
Die Verhältnisse sind mit Salzsäure vergleichbar, d.h., auch hier liegt eine starke Säure vor. Wie HCl-Gas, so dissoziiert auch HNO_3 in Wasser praktisch vollständig, so daß $c(\text{HNO}_3) = c(\text{H}_3\text{O}^+)$ gilt.

- **Schwefelsäure:** Reine H_2SO_4 ist ein farbloses Öl mit Kp. 280 °C. Die Reaktion mit Wasser ist dermaßen exotherm, daß die Mischung zum Sieden kommt. Es ist daher nicht ungefährlich, reine H_2SO_4 (oder auch konzentrierte H_2SO_4) zu verdünnen. Beim Verdünnen kommt es zur Säure-Base-Reaktion mit Wasser. Diesmal liegt eine zweiprotonige Säure vor, d.h., ein Molekül, das zwei Protonen abspalten kann. Man spricht von 2 Stufen, weil dies hintereinander geschieht. Allerdings ist nur die erste Dissoziationsstufe eine praktisch vollkommen nach rechts ablaufende Reaktion:

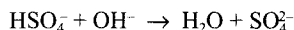


Es entsteht das Hydrogensulfat-Ion HSO_4^- , das ein Ampholyt ist. Die Weiterreaktion

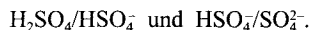
mit Wasser ist eine Gleichgewichtsreaktion mit der Konstanten $K = 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ mol/l}$:



Wasser ist als Base zu schwach, um das HSO_4^- -Ion nennenswert dissoziieren zu lassen. Die wesentlich stärkere Base OH^- (Hydroxid-Ion), läßt folgende Reaktion ablaufen:



Eine Säure und ihr durch die Protonenabspaltung entstehendes Anion (das eine Base ist) nennt man „korrespondierendes Säure-Base-Paar“. Für Schwefelsäure gibt es zwei derartige Paare:

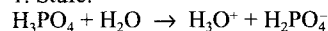


In Schwefelsäure-Lösungen, die stärker konzentriert als 10%ig sind, kann man die zweite Dissoziationsstufe fast vernachlässigen. In einer 10%igen H_2SO_4 sind nur etwa 1,3% der H_2SO_4 -Moleküle bis zu Sulfat-Ionen SO_4^{2-} dissoziiert.

- **Phosphorsäure:** Phosphorsäure ist eine sehr wichtige Säure, da ihre Derivate (Abkömmlinge) im Tier- und Pflanzenreich eine bedeutende Rolle spielen. Spricht man von Phosphorsäure, so ist die Orthophosphorsäure H_3PO_4 , eine dreiprotonige Säure, gemeint. Unter einer „Orthosäure“ (d.h. richtige Säure) versteht man die Verbindung mit der maximalen Zahl an OH-Gruppen. Säuren, die mehr als eine OH-Gruppe besitzen, können unter bestimmten Bedingungen H_2O abspalten und ohne Änderung der Oxidationszahl in eine andere Form übergehen. Diese neue Form heißt Metasäure. Eine Ortho-Salpetersäure H_3NO_4 kennt man nicht. Während HNO_3 ein kleines Molekül ist, liegt HPO_3 polymer vor (d.h. vervielfacht).

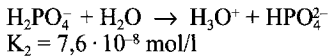
Alle drei H-Atome sind über Sauerstoffatome gebunden und können abgespalten werden. Aus diesem Grunde kennt man drei verschiedene Salze: Dihydrogenphosphate, Hydrogenphosphate und Phosphate. Man bezeichnet sie oft als primäres, sekundäres und tertiäres Phosphat.

1. Stufe:

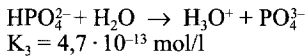


$K_1 = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ mol/l}$

2. Stufe:



3. Stufe:



Z.2.4 Der pH-Wert

Zur Charakterisierung der Säure-Base-Eigenschaften wäßriger Lösungen wird eine Größe herangezogen, die im physikalischen Sinne gar keine Größe ist. Es handelt sich um die Benennung „pH-Wert“; definitionsgemäß ist dafür keine Einheit vorgesehen.

Der negative dekadische Logarithmus des Zahlenwerts der H_3O^+ -Konzentration wird als pH bezeichnet. Dies bedeutet etwa „Menge an H_3O^+ -Ionen“.

Um mathematisch exakt zu sein (weil sich eine Einheit nicht logarithmieren läßt), muß man den pH-Wert wie folgt definieren:

$$\text{pH} = -1 \text{ g} \frac{c(\text{H}_3\text{O}^+) \text{ mol/l}}{c(\text{H}_3\text{O}^+) = 1 \text{ mol/l}}$$

Zur Definition des pH-Werts und der sog. pH-Skala gehört, daß das Ionenprodukt des Wassers (K_w) nicht nur für reines Wasser gilt, sondern auch für verdünnte wäßrige Lösungen. Voraussetzung ist allerdings, daß diese einfach zusammengesetzt sind und die Konzentrationen $c(X) = 0,1 \text{ mol/l}$ nicht überschreiten. Für den Fall, daß diese Voraussetzungen nicht erfüllt sind, ist mit Abweichungen vom theoretischen K_w -Wert zu rechnen.

Somit erhält eine pH-Skala einen Anfang und ein Ende; denn die größte noch exakte Konzentration $c(\text{H}_3\text{O}^+)$ ist dann 10^{-1} mol/l ($\text{pH} = 1$), die kleinste 10^{-13} mol/l ($\text{pH} = 13$), weil dann $c(\text{OH}^-)$ den Grenzwert von 10^{-1} mol/l einnimmt. Es gilt also:

$$c(\text{H}_3\text{O}^+) \cdot c(\text{OH}^-) = 10^{-1} \cdot 10^{-13} (\text{mol/l})^2$$

aber nicht mehr:

$$10^{-1} \cdot 10^{-15} (\text{mol/l})^2,$$

obwohl die zweite Gleichung aus mathematischer Sicht gültig ist.

Die pH-Skala liegt zwischen $\text{pH} = 1,0$, d. h. $c(\text{H}_3\text{O}^+) = 10^{-1} \text{ mol/l}$ und $\text{pH} = 13,0$, d. h. $c(\text{H}_3\text{O}^+) = 10^{-13} \text{ mol/l}$.

In diesem Falle betrachtet man den theoretischen K_w -Wert als gültig. Man kann dies auch wie folgt ausdrücken: die pH-Skala liegt zwischen 0 und 14.

Da neutrales Wasser die H_3O^+ -Konzentration $c(\text{H}_3\text{O}^+) = \sqrt{K_w}$ hat, gilt bei 25°C : $\text{pH} = 7$ (neutral), $\text{pH} < 7$ (sauer), $\text{pH} > 7$ (basisch).

Z.2.5 Redoxreaktionen in wäßriger Lösung

– *Oxidation* (Elektronenabgabe): Bei jeder Oxidation steigt die Oxidationszahl. Den Unterschied der Oxidationszahlen zwischen rechts und links muß man als Elektronen auf die Seite der höheren Oxidationszahl schreiben: $\text{SO}_2 \rightarrow \text{HSO}_4^- + 2 \text{e}^-$.

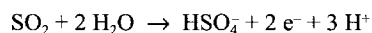
Für den nächsten Schritt benötigt man die wäßrige Lösung, d. h., die immer vorhandenen H_3O^+ -Ionen. Diese sind in die Reaktionsgleichung mit einzubeziehen, wobei man zur Vereinfachung nur H^+ schreibt. Es gilt:

Auf die Seite der Elektronen werden so viele H^+ -Ionen zugefügt, bis dieselbe Gesamtladung (nicht Oxidationszahl) wie auf der gegenüberliegenden resultiert.

Die linke Seite der Reaktion (nur SO_2) enthält überhaupt keine Ladungen, die rechte dagegen drei negative. Folglich sind rechts 3H^+ anzuschreiben, damit die Bilanz der Ladungen stimmt:

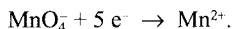


Man erkennt, daß immer mit H_2O -Molekülen auf der den H^+ -Ionen gegenüberliegenden Seite ausgeglichen werden kann. Es fehlen somit links 2 H_2O :

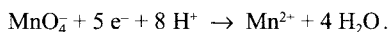


– Reduktion (Elektronenaufnahme)

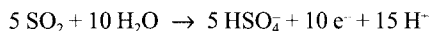
Bei einer Reduktion wird die Oxidationszahl des beteiligten Elements erniedrigt. Das Permanganat-Ion MnO_4^- nimmt 5 Elektronen auf und geht von der Oxidationszahl +VII in +II über:



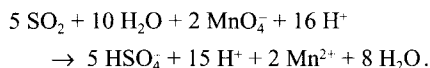
Der Ausgleich mit H^+ -Ionen fordert links (immer auf der Seite der Elektronen) 8 H^+ . Rechts müssen 4 H_2O angeschrieben werden:



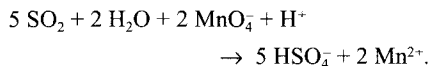
Die Vereinigung beider Teilreaktionen erfolgt in der Weise, daß jeweils dieselbe Anzahl von Elektronen umgesetzt wird. Da die Oxidation nur 2 mol Elektronen liefert, die Reduktion jedoch 5 mol benötigt, wird erst addiert, wenn die Oxidation mit 5 und die Reduktion mit 2 multipliziert wurde, d. h.:



Die Zahl der Elektronen entfällt bei der Addition der beiden linken und der beiden rechten Seiten:



Die Gleichung vereinfacht sich weiter zu:



Spezialfälle von Redoxreaktionen, die mit ein und demselben Element ablaufen, werden als Komproportionierung oder Disproportionierung bezeichnet.

Das betreffende Element muß dann in mindestens drei verschiedenen Oxidationszahlen vorliegen können, einer hohen, einer mittleren und einer niedrigen. Die mittlere Oxidationszahl muß nicht dem Mittelwert der anderen beiden Stufen entsprechen.

Z.3 Verbindungsklassen der organischen Chemie

Z.3.1 Alkane

(gesättigte Kohlenwasserstoffe, Paraffine)

Die einfachste Verbindungsklasse der Organischen Chemie besteht aus den Elementen C und H und baut auf der (sp^3)-Hybridisierung des Kohlenstoffs auf.

Die von der Summenformel her noch einfacher erscheinenden Oxide Kohlenmonoxid CO und Kohlendioxid CO_2 werden genauso wie das Element C (und seine Modifikationen) sowie die Carbonate (Anion CO_3^{2-}) der Anorganischen Chemie zugeordnet.

Methan CH_4 ist das Grundglied einer großen Zahl von Verbindungen, die entweder existieren oder aber zumindest vorstellbar sind. An die Stelle einer C–H-Bindung tritt eine C–C-Bindung, so daß nach Substitution (Ersatz) eines H-Atoms durch CH_3 immer mehr Verbindungen entstehen.

Die Verbindungsklasse der Summenformel $\text{C}_n\text{H}_{2n+2}$, also CH_4 (Methan), C_2H_6 (Ethan), C_3H_8 (Propan), C_4H_{10} (Butan) usw., wird als Alkane bezeichnet.

Z.3.2 Erdöl

Ausgangsmaterial für Erdöl ist das Plankton das, einmal abgestorben, von Bakterien am Meeresboden unter Luftausschluß verarbeitet wurde. Somit enthält Erdöl Verbindungen, die all diejenigen Elemente aufweisen, die auch sonst im Tier- und Pflanzenreich gefunden werden, in erster Linie C, H, O, N und S.

Hauptbestandteil des Erdöls sind Kohlenwasserstoffe, wobei man zwischen paraffinbasischen (reich an kettenförmigen Alkanen) und naphthenbasischen (reich an Cycloalkanen) unterscheidet.

Erdölanalysen erbringen folgende Durchschnittswerte: ca. 85% C, ca. 12% H, ca. 1%

N, ca. 0,5% O, Rest Schwefel (da Eiweißstoffe S- und N-haltig sind) und einige Metallsuren.

Kerosin ist eine Sammelbezeichnung für KW im Bereich zwischen C_{10} und C_{16} mit Kp. zwischen 200 und 300 °C.

Es wird u. a. als Treibstoff für Düsenflugzeuge verwendet, wobei es verschiedene Qualitäten gibt.

Kraftstoffe für Otto- und Dieselmotoren genügen unterschiedlichen Anforderungen, welche durch unterschiedliche KW (Kohlenwasserstoffe) erfüllt werden:

- Kleinere und verzweigte Alkane, aber auch Aromaten eignen sich als Otto-Kraftstoff, wobei das sog. Isooctan (exakter: 2,2,4-Trimethylpentan) als besonders günstig und daher als Standard eingestuft wurde.
- Längere und unverzweigte Alkane sind gut als Diesel-Kraftstoff geeignet. Auch hier hat man eine Standardsubstanz im n-Hexadecan $C_{16}H_{34}$ gefunden, das allerdings als Cetan bezeichnet wird. Ein weiterer großer Verwendungsbereich nach Heizölen und Kraftstoffen ist der Einsatz für sog. petrochemische Produkte.

Unter der Bezeichnung Petrochemikalien werden alle Substanzen zusammengefaßt, die man aus Erdöl oder Erdgas auf verschiedenste Weise herstellen kann.

Z.3.3 Ungesättigte Kohlenwasserstoffe

Kohlenwasserstoffe werden als ungesättigt bezeichnet, wenn sie nicht die maximal mögliche Anzahl von H-Atomen gebunden enthalten.

Das bedeutendste Alken ist das Ethen, das als Ethylen bezeichnet wird. Da innerhalb eines Moleküls mehrere Hybridisierungsarten vorkommen können, ist eine unüberschaubare Anzahl kettenförmiger oder cyclischer Verbindungen mit einer oder mehreren Doppelbindungen möglich. Bei der Benennung wird die Lage der Doppelbindung(en) durch eine Nummerierung der C-Atome angegeben, z. B.:

$H_2C = CH - CH_2 - CH_3$	1-Buten
$H_3C - CH = CH - CH_3$	2-Buten
$H_2C = CH - CH = CH_2$	1,3 Butadien
$H_2C = CH - C(CH_3) = CH_2$	2-Methyl-1,3 butadien oder Isopren

Neben der IUPAC-Bezeichnung Alken findet man auch noch den historischen Namen Olefin, der Ölbildner bedeutet.

Das einfachste Alkin ist das Ethin mit dem traditionellen Namen Acetylen und der Summenformel C_2H_2 .

Das geruchlose Gas ist im Gemisch mit Luft in weiten Bereichen (etwa von 3- bis 70% Volumenanteile) explosiv. Die Verbrennung, die mit reinem Sauerstoff Temperaturen oberhalb von 2500 °C erreicht, wird zum Schweißen genutzt.

Z.3.4 Benzol und Aromaten

Benzol ist eine farblose, charakteristisch riechende Flüssigkeit (Kp. 80,1 °C; F. 5,5 °C), die ein starkes Gift und eine krebserregende Substanz darstellt.

Benzol hat eine ebene Ringstruktur, in der sechs (sp^2)-hybridisierte C-Atome ein Sechseck bilden.

Jedes C-Atom bindet über s-Bindungen ein H-Atom und zwei benachbarte C-Atome und besitzt weiterhin noch ein einfach besetztes p-Orbital. Über dieses können nach beiden Seiten hin π -Bindungen ausgebildet werden.

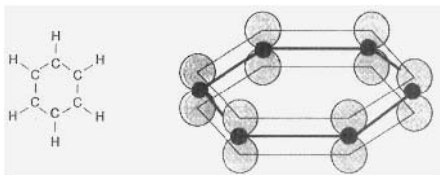


Bild Z-6. Links: s-Bindungen im Benzolring. Rechts: Veranschaulichung der π -Bindungen im Benzolring durch die hervorgehobenen (aber verkleinerten) p-Orbitale.

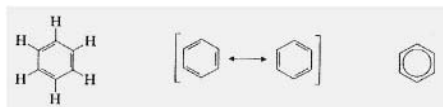


Bild Z-7. Mögliche Strukturformeln für Benzol.

Der erste Fall liegt vor bei Verbindungen wie Toluol und Styrol (ein einziger Substituent) oder bei den Xylenen (zwei Substituenten). Bei der Substitution von zwei H-Atomen können drei unterschiedliche Verbindungen entstehen, die mit ortho-, meta- und para- gekennzeichnet werden.

Benzol ist der Grundkörper der sog. aromatischen Verbindungen.

Das Benzolmolekül lässt sich auf zwei verschiedene Weisen erweitern, ohne daß das Gebiet der Kohlenwasserstoffe verlassen wird:

- Substitution von H-Atomen durch Alkyl- oder Alkenylgruppen
- Anreihung mehrerer Ringe zu aromatischen Polycyclen (Anellierung).

Polycyclische aromatische KW entstehen durch sog. Anellierung von Benzolringen, d.h. eine Aneinanderreihung über gemeinsame Kanten. Man spricht dann von kondensierten Ringsystemen.

Das einfachste System mit zwei Ringen ist Naphthalin (F. 80°C). Da diese Substanz früher gegen Motten eingesetzt wurde, bringt man ihren Geruch mit „Mottenpulver“ in Verbindung.

Tabelle Z-2. Einfache Benzolderivate (Kohlenwasserstoffe)

Formel der Verbindung	Name	Eigenschaften
	Toluol (Methylbenzol)	Aromatisch riechende Flüssigkeit, Kp. 111 °C, FP. etwa 5 °C; Name vom Tolubaum, aus dessen Harz (Tolubalsam) es erstmals gewonnen wurde. Weniger giftig als Benzol; Lösungsmittel, Benzinbestandteil (hohe Octanzahl)
	Styrol (Vinylbenzol)	Farblose Flüssigkeit, die aus dem Harz des Styraxbaumes gewonnen wurde; Kp. 146 °C, FP. 32 °C; Monomeres des Polystyrols (PS)
	o-Xylol	Nach dem griechischen Wort für Holz (xylo) benannt. Die Orthoverbindung hat Kp. 144 °C. Technisches Xylol ist eine Mischung aus o-, m- und p-Xylol; Lösungsmittel
	m-Xylol	Kp. 139 °C
	p-Xylol	Kp. 138 °C Ausgangsstoff für Polyester
	Biphenyl	Farblose Blättchen, dient zur Behandlung der Schalen von Zitrusfrüchten (E 230, je kg ganzer Frucht maximal 70 mg)

Z.3.5 Weitere Verbindungsklassen der organischen Chemie

Zahlreiche Verbindungen der organischen Chemie lassen sich zu charakteristischen Klassen zusammenfassen. Es werden nur die allerwichtigsten erwähnt.

- **Alkohole** (funktionelle Gruppe: $-\text{OH}$): Die einfachen Verbindungen haben die Formel $\text{R}-\text{OH}$ wie Methanol CH_3OH oder Ethanol $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$. Kompliziertere Alkohole besitzen an verschiedenen C-Atomen OH-Gruppen („mehrwertige Alkohole“) wie etwa Glykol $\text{HO}-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{OH}$ oder Glycerin $\text{HO}-\text{CH}_2-\text{CH}(\text{OH})-\text{CH}_2-\text{OH}$. Mehr als eine OH-Gruppe läßt sich i.d.R. nicht an ein C-Atom binden (sog. Erlenmeyer-Regel).
- **Ether** (funktionelle Gruppe: $-\text{O}-$): Der übliche Ether ist der Diethylether $\text{C}_2\text{H}_5-\text{O}-\text{C}_2\text{H}_5$, also $\text{R}-\text{O}-\text{R}$, wobei alle denkbaren Reste möglich sind. Cyclische Ether tragen die Gruppe im Ring.
- **Carbonsäuren** (organische Säuren): Die funktionelle Gruppe ist $-\text{CO}-\text{OH}$, wobei das H als H^+ abgespalten werden kann. Typische Beispiele sind Ameisensäure $\text{H}-\text{COOH}$ und Essigsäure CH_3-COOH .
- **Ester** (funktionelle Gruppe: $-\text{CO}-\text{OR}$): Dieser Name für Verbindungen der Formel $\text{R}-\text{CO}-\text{OR}$ wurde durch zusammenziehen der Worte Essig und Ether gebildet, wobei das h entfiel.
- **Aldehyde** (funktionelle Gruppe: $-\text{CO}-\text{H}$): Auch dieser Name ist durch eine Zusammenziehung entstanden, und zwar aus „alcohol dehydrogenatus“, d.h. oxidierten Alkohol. Die Verbindungsklasse $\text{R}-\text{CO}-\text{H}$ erhält im Namen die Endung $-\text{al}$, z.B. Ethanal $\text{CH}_3-\text{CO}-\text{H}$.
- **Ketone** (funktionelle Gruppe: $-\text{CO}-$): Ein wichtiges Beispiel ist Aceton, nach dem die Gruppe benannt wurde: (A)-ceton. Es handelt sich um die feuergefährliche Flüssigkeit $\text{CH}_3-\text{CO}-\text{CH}_3$ (Kp. 56°C).
- **Amine** (funktionelle Gruppe: $-\text{NH}_2$): Es handelt sich um Ammoniakderivate wie Methylamin CH_3-NH_2 (Gas, Kp. $-6,3^\circ\text{C}$).
- **Säureamide** $\text{R}-\text{CO}-\text{NH}_2$: Hierin ist die saure OH-Gruppe der Carbonsäuren durch $-\text{NH}_2$ ersetzt. Die ersten beiden Verbindungen sind Formamid $\text{H}-\text{CO}-\text{NH}_2$ und Acetamid $\text{CH}_3-\text{CO}-\text{NH}_2$.

- **Aminosäuren** $\text{R}-\text{CH}(\text{NH}_2)-\text{COOH}$. Diese große Familie hat in den α -Aminosäuren ihre bedeutendsten Vertreter, weil sie am Aufbau der Proteine (Eiweißstoffe) beteiligt sind. α bedeutet, daß die NH_2 -Gruppe am ersten C-Atom nach der COOH -Gruppe sitzt.

Z.4 Elektrochemie

Z.4.1 Die Elektrolyse

Als Elektrolyse wird ein chemischer Vorgang bezeichnet, der unter dem Einfluß einer elektrischen Spannung erfolgt, wenn diese von der Spannungsquelle in eine ionenhaltige Flüssigkeit übertragen wird.

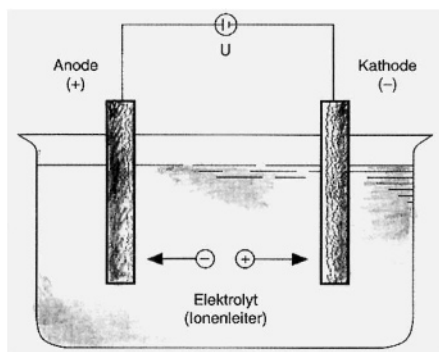


Bild Z-8. Prinzip einer elektrolytischen Zelle. Über die Art des Elektrolyten sind keine näheren Aussagen gemacht.

Zu den wichtigsten Elektrolysen gehören diejenigen, die in wäßriger Lösung ablaufen. Da Wasser schon von sich aus Ionen enthält (H_3O^+ und OH^-), stehen nach Auflösung eines Ionengitters A^+B^- der Kathode die Ionen H_3O^+ und A^+ für eine Reduktion, der Anode OH^- und B^- für eine Oxidation zur Verfügung. Es wird jeweils der energetisch günstigere Prozeß ablaufen, wobei die Verhältnisse sowohl von thermodynamischen als auch kinetischen Gesichtspunkten entschieden werden. Vergleicht man wäßrige Lösungen von NaCl , Na_2SO_4 , H_2SO_4 , CuSO_4 und CuCl_2 hinsichtlich der Elektrodenprodukte an Platin-Elektroden, so erhält man die in Tabelle Z-3 zusammengefaßten Ergebnisse.

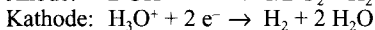
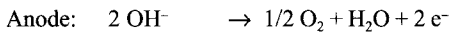
Tabelle Z-3. Elektrodenprodukte bei Elektrolysen wäßriger Lösungen (Platinelektroden)

Elektrolyt (wäßrige Lösung)	Kathodenreaktion	Anodenreaktion
NaCl	H ₂ -Entwicklung	Cl ₂ -Entwicklung
Na ₂ SO ₄	H ₂ -Entwicklung	O ₂ -Entwicklung
H ₂ SO ₄	H ₂ -Entwicklung	O ₂ -Entwicklung
CuSO ₄	Cu-Abscheidung	O ₂ -Entwicklung
CuCl ₂	Cu-Abscheidung	Cl ₂ -Entwicklung

Es gilt:

- Aus wäßriger Lösung werden keine Alkali- und Erdalkali-Ionen kathodisch reduziert
- Chlorid-, Bromid- und Iodid-Ionen lassen sich aus wäßriger Lösung anodisch oxidieren
- Sulfat-Ionen SO₄²⁻ reagieren i. d. R. an der Anode nicht, sondern nur in Ausnahmefällen.

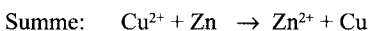
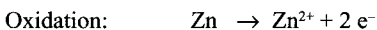
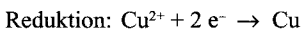
Da Wasser ein extrem schwacher Elektrolyt mit einer äußerst niedrigen Leitfähigkeit ist, setzt man für eine Elektrolyse des Wassers eine geeignete Ionenverbindung zu, die nicht reagiert, aber den Strom leitet (z. B. Na₂SO₄). Die eingebrachten Ionen sind dann nur zur Erhöhung der Leitfähigkeit vorhanden, ohne daß die Elektrodenreaktionen verändert werden:



Z.4.2 Galvanische Zellen

Jeder galvanischen Zelle liegt eine freiwillig ablaufende Redoxreaktion zugrunde.

Beim Eintauchen eines Zink- oder Eisenstabes in eine wäßrige Lösung von Kupfersulfat CuSO₄ erfolgt eine Verkupferung des eingetauchten Stabes. Eine äquivalente Menge Zink geht dafür in Lösung. Es läuft folgende Reaktion freiwillig ab:



Elementares Zink ist hierbei durch Abgabe von 2 mol Elektronen pro mol Zink ohne äußeren Einfluß in Zn²⁺ übergegangen. Die Cu²⁺-Ionen haben pro mol 2 mol Elektronen aufgenommen und elementares Kupfer gebildet, das den Zinkstab überzieht.

Dieselbe Reaktion läßt sich in einer galvanischen Zelle durchführen, wobei verhindert wird, daß Elektronen vom Zink direkt zum Cu²⁺-Ion übergehen, indem beide nicht in unmittelbarem Kontakt stehen.

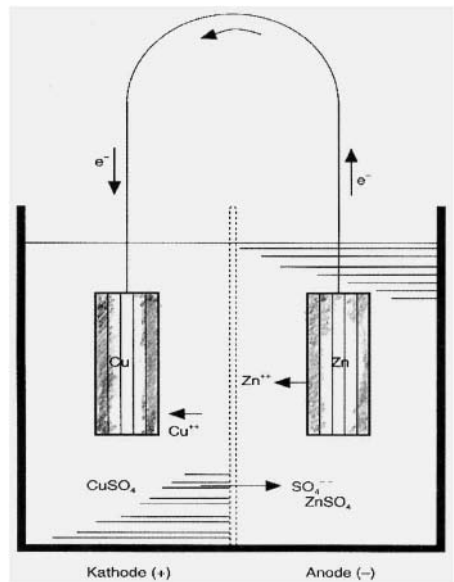


Bild Z-9. Aufbau-Prinzip einer galvanischen Zelle am Beispiel der Daniell-Zelle.

Jede galvanische Zelle besteht aus zwei sog. Halbzellen. In der Daniell-Zelle sind die Halbzellen Cu/Cu²⁺ und Zn/Zn²⁺ beteiligt.

Die Bezeichnung „Halbzelle“ drückt aus, daß ein in seine Ionenlösung eintauchendes Metall (also M/M⁺) nur eine halbe Anordnung darstellt. Erst durch die Kombination zweier Halbzellen entsteht die eigentliche Zelle.

Wenn in einer galvanischen Zelle nur die Reaktion an einer der beiden Halbzellen interessiert, dann bezeichnet man die nicht interessierende zweite Halbzelle als „Bezugselektrode“.

Das Meßergebnis bezieht sich auf diese zusätzliche Halbzelle. Hätte man eine andere Bezugselektrode ausgewählt, so wäre auch eine andere Spannung gemessen worden.

Die gemessene Spannung einer galvanischen Zelle setzt sich immer aus der Differenz zweier Potentialdifferenzen zusammen. Es wurde festgelegt:

Spannung $U = E(\text{Kathode}) - E(\text{Anode})$
Einheit: V

Hierin haben die Halbzellen für die Spannung den Buchstaben E erhalten, die gesamte galvanische Zelle dagegen U.

Als geeignetste Bezugselektrode wurde die Wasserstoffelektrode gewählt, ein System, das von den üblichen abweicht, denn Wasserstoffgas H_2 übernimmt die Rolle des Metalls, d.h. der reduzierten Stufe. Es wurde international festgelegt, daß diese Halbzelle unter ganz bestimmten Konzentrations- und Druckbedingungen als „Standardbezugselektrode“ für alle anderen Halbzellen dienen soll. Man spricht von Standardwasserstoffelektrode (abgekürzt: SWE, englisch: SHE).

Ein platinierter Platindraht, der in eine Lösung der H_3O^+ -Aktivität 1,00 eintaucht und von reinem Wasserstoff mit Druck 1013,25 hPa umspült wird, wird zur Festlegung der sog. Spannungsreihe als Bezugselektrode herangezogen. Diese Halbzelle erhält bei allen Temperaturen als Potentialdifferenz E den Wert 0,00 V.

Durch diese Null-Definition entfällt in der Gleichung $U = E(\text{Kathode}) - E(\text{Anode})$ eine Halbzellenspannung, so daß das Meßergebnis direkt E entspricht. Es ist ein „relatives E° “, bezogen auf die Standardwasserstoffelektrode (SWE) als Bezugselektrode. Außerdem muß nicht nur die SWE im Standardzustand (d.h.

Aktivitäten 1,00) vorliegen, sondern auch das interessierende Redoxsystem Metall/Metallion. Das Meßergebnis wird Standardpotential E° genannt.

Z.4.2.1 Die Spannungsreihe

Wenn alle interessierenden Redoxsysteme (so weit sie einer Messung zugänglich sind) gegen die SWE vermessen werden, erhält man eine Liste von Standardpotentialen, die von etwa -3 V bis ca. $+3$ V reicht. Diese Liste wird als Spannungsreihe bezeichnet (s. Tabelle Z-4).

Z.4.2.2 Die Nernst'sche Gleichung

Standardpotentiale beziehen sich immer nur auf den Standardzustand, d. h. auf die Aktivität $a(X) = 1,00$ mol/l. Sobald andere Konzentrationsverhältnisse vorliegen – und das ist gewöhnlich immer der Fall – ist dies auch zu berücksichtigen.

W.H. Nernst hat eine Gleichung abgeleitet, die für Abweichungen vom Standardzustand herangezogen werden muß. Sie lautet:

$$E = E^\circ(\text{red(ox)}) + \frac{F_N}{n} \cdot 1 \text{ g} \frac{a(\text{ox})}{a(\text{red})} \quad \text{Einheit: V}$$

Tabelle Z-4. Einige Standardpotentiale $E^\circ(\text{red/ox})$ in V bei 25°C bezogen auf $E^\circ(H_2/H_3O^+) = 0,0 \text{ V}$

Negative Systeme	E° in V	Positive Systeme	E° in V
Li/Li ⁺	- 3,02	SO ₂ /HSO ₄ ⁻	+ 0,12
Na/Na ⁺	- 2,71	Cu/CuCl ₂ ⁻	+ 0,19
Mg/Mg ²⁺	- 2,34	Cu/Cu ²⁺	+ 0,34
Al/Al ³⁺	- 1,67	I/I ₂	+ 0,53
Zn/Zn(OH) ₄ ²⁻	- 1,22	Ag/Ag ⁺	+ 0,80
Mn/Mn ²⁺	- 1,10	NO/HNO ₃	+ 0,96
Zn/Zn ²⁺	- 0,76	Br ⁻ /Br ₂	+ 1,07
Cr/Cr ³⁺	- 0,74	Pt/Pt ²⁺	+ 1,20
Fe/Fe ²⁺	- 0,44	Cl ⁻ /Cl ₂	+ 1,36
Cd/Cd ²⁺	- 0,40	Au/Au ³⁺	+ 1,42
Pb/PbSO _{4(s)}	- 0,30	Mn ²⁺ /MnO ₄ ⁻	+ 1,52
Co/Co ²⁺	- 0,27	PbSO _{4(s)} /PbO _{2(s)}	+ 1,62
Ni/Ni ²⁺	- 0,25	SO ₄ ²⁻ /S ₂ O ₈ ²⁻	+ 2,06
Pb/Pb ²⁺	- 0,12	F ⁻ /F ₂	+ 2,85

Das Standardpotential E^0 wird durch einen Summanden korrigiert, der die vorliegende Aktivität in logarithmischer Form enthält. Bei Vorliegen aller Aktivitäten von 1,00 resultiert $E = E^0$ (weil $\lg 1 = 0$). Es bedeuten:

- F_N sog. Nernst-Faktor (auch Nernstspannung U_N). Da als Variable die Temperatur enthalten ist, muß bei Berechnungen auf die Temperatur geachtet werden (25°C: 0,0591 V; 50°C: 0,0641 V).
- n Änderung der Oxidationszahl bzw. Unterschied der Oxidationszahlen für red/ox.
- $a(\text{ox})$ steht immer im Zähler und entspricht dem Produkt der Aktivitäten aller Partner der oxidierten Seite der Reaktionsgleichung.
- $a(\text{red})$ steht immer im Nenner und entspricht analog zu $a(\text{ox})$ dem Produkt der Aktivitäten aller Partner der reduzierten Seite der Gleichung. Reine Metalle befinden sich im Standardzustand $a(\text{M}) = 1,00$ ohne Einheit.

Z.4.3 Die elektrochemische pH-Messung

Die praktische pH-Skala beruht auf elektrochemisch gemessenen pH-Werten, wobei eine Wasserstoffelektrode als Indikatorelektrode eingesetzt wird. Die Wasserstoffelektrode stellt in ihrer Form als SWE (alle Aktivitäten $a(\text{X}) = 1,00$) eine Bezugselektrode dar. Sobald aber $a(\text{H}_3\text{O}^+)$ von 1,0 mol/l abweicht, beträgt der E-Wert nicht mehr 0,00 V, sondern wird durch die neue Aktivität bestimmt. Für einen H_2 -Druck von 1013 hPa nimmt die Nernst'sche Gleichung der Wasserstoffelektrode folgende Form an:

$$E = -F_N \cdot \text{pH} \quad \text{Einheit: V}$$

Die Potentialdifferenz E ist somit eine Funktion des pH-Wertes, so daß man aus E auf den pH-Wert rückschließen kann. Damit nimmt aber die Wasserstoffelektrode nicht mehr die Stelle einer Bezugselektrode ein.

Eine Halbzelle, deren von der Aktivität abhängige Potentialdifferenz für Aktivitätsmessungen ausgenutzt wird, nennt man Indikatorelektrode.

Alle Halbzellen, die aus analytischen Gründen eingesetzt werden, sind derartige Indikatorelektroden, denn sie zeigen eine bestimmte Ionenaktivität $a(\text{X})$ an.

Für den Aufbau einer galvanischen Zelle zur pH-Ermittlung ist eine zweite Halbzelle als Bezugselektrode erforderlich. Eine SWE wäre hierfür prinzipiell geeignet, aber die Handhabung einer SWE ist u.a. so umständlich und empfindlich, daß man in der Praxis immer auf andere Bezugselektroden ausweicht. Eine der geeignetsten Bezugselektroden der Praxis ist die Silber-Silber-chlorid-Elektrode Ag/AgCl (hier liegt Ag^+ in Form des schwer löslichen AgCl vor).

Z.4.4 Elektrochemische Stromerzeugung (Batterien)

Elektrochemische Stromquellen (Batterien) sind Energiespeicher, die in einer exergonischen Reaktion ihre Energie abgeben.

Sobald der Gleichgewichtszustand erreicht ist ($\Delta G = 0$), hat eine derartige Stromquelle „ihr Lebensende“ erreicht. In einigen Fällen ist allerdings eine Reaktionsumkehr möglich, ein sog. Aufladeprozess, der wieder Energie verbraucht. Daher unterscheidet man zwei Fälle:

- *Primärzellen*, d.h. „Einmal-Zellen“, die keine Wiederaufladung vertragen. Nach Reaktionsende werden sie zu Sondermüll.
- *Sekundärzellen oder Akkumulatoren*. Das sind Zellen, die über längere Zeit hinweg einen Ladeprozess zulassen, der die Ausgangsstoffe wieder aufbaut. Hier kommt es zu einem ständigen Wechsel zwischen galvanischer und elektrolytischer Zelle. Aber auch diese Zellen werden eines Tages zu Sondermüll.

Z.4.4.1 Der Bleiakкумулятор

Bei den im Bleiakкумулятор ablaufenden Reaktionen handelt sich um eine Komproportionierung zwischen elementarem Blei und Blei(IV)oxid PbO_2 , wobei Schwefelsäure

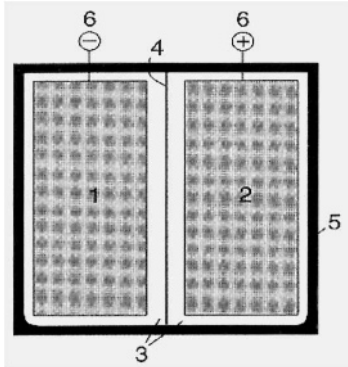
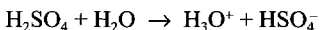


Bild Z-10. Aufbauprinzip einer Batterie.

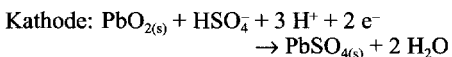
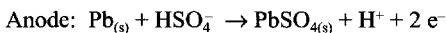
Erläuterungen:

- (1) *Anode*, d.h. Elektrode, an der die Oxidation stattfindet; hier die negative Elektrode. Es handelt sich um ein Metall (Zn, Pb, Li), das oxidiert wird (zu Zn^{2+} , Pb^{2+} , Li^+).
- (2) *Kathode*, d.h. Elektrode, an der die Reduktion stattfindet; hier die positive Elektrode. Als Oxidationsmittel kommen z.B. MnO_2 , PbO_2 , Ag_2O u.a. in Frage.
- (3) *Elektrolyt*, eine ionenhaltige wässrige oder nicht-wässrige Lösung (eventuell eingedickt). Lithiumbatterien vertragen keine wässrigen Lösungen!
- (4) *Separator* genannte *Trennschicht*, die als Diaphragma dient. Sie verhindert unerwünschte Berührungen und Vermischungen.
- (5) *Behälter* oder *Gehäuse*.
- (6) *Stromableitende Kontakte*.

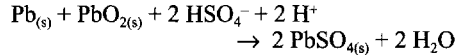
Elektrolyt ist. Die Dichte der H_2SO_4 liegt für einen vollgeladenen Akkumulator mindestens bei $1,27 \text{ g/cm}^3$; dies entspricht einer Konzentration von ca. 35%, bzw. $c(\text{H}_2\text{SO}_4) = \text{ca. } 4,5 \text{ mol/l}$. In einer derartig hohen Konzentration spielt die 2. Dissoziationsstufe der H_2SO_4 praktisch keine Rolle, sondern nur:



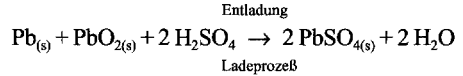
Die ablaufenden Reaktionen sind daher mit Hydrogensulfat-Ionen wie folgt zu formulieren:



Die Summierung ergibt folgende Gesamtgleichung:



oder (wenn statt $\text{HSO}_4^- + \text{H}^+$ Schwefelsäure geschrieben wird):



Da die Standardpotentiale sowohl der anodischen Oxidation als auch der kathodischen Reduktion bekannt sind, läßt sich die Urspannung der Zelle näherungsweise berechnen. Es gelten:

$$E^0(\text{Pb}/\text{PbSO}_4) = -0,303 \text{ V};$$

$$E^0(\text{PbSO}_4/\text{PbO}_2) = +1,627 \text{ V}.$$

Somit lauten die jeweiligen Ausdrücke für die Nernstschen Gleichungen:

$$E(\text{Anode}) = -0,303 + \frac{F_N}{2} \cdot \lg \frac{a(\text{H}^+)}{a(\text{HSO}_4^-)}$$

$a(\text{H}^+)$ steht vereinfacht für $a(\text{H}_3\text{O}^+)$. Die Aktivitäten der reinen Festkörper betragen 1,0.

$$E(\text{Kathode}) = +1,627 + \frac{F_N}{2} \cdot \lg \frac{a(\text{HSO}_4^-) \cdot a^3(\text{H}^+)}{a^2(\text{H}_2\text{O})}$$

Da eine 35%ige H_2SO_4 nicht als verdünnte wässrige Lösung angesehen werden kann, muß für eine exakte Berechnung die Aktivität des Wassers mit einbezogen werden.

Die Urspannung ergibt sich durch die Differenz

$$U = E(\text{Kathode}) - E(\text{Anode}), \text{ d.h.}$$

$$U = 1,627 - (-0,303)$$

$$+ \frac{F_N}{2} \cdot \lg \frac{a(\text{HSO}_4^-) \cdot a^3(\text{H}^+) \cdot a(\text{HSO}_4^-)}{a^2(\text{H}_2\text{O}) \cdot a(\text{H}^+)} \\ = 1,93 + F_N \cdot \lg \frac{a(\text{HSO}_4^-) \cdot a(\text{H}^+)}{a(\text{H}_2\text{O})}$$

Da die Aktivitäten nicht bekannt sind, setzt man für eine Berechnung an:

- statt $a(\text{X})$ die Konzentration $c(\text{X})$
- für $a(\text{H}_2\text{O}) = 1,00$, als ob eine verdünnte wässrige Lösung vorliegen würde

- und vernachlässigt die 2. Dissoziationsstufe der Schwefelsäure; dann gilt $c(\text{H}^+) = c(\text{HSO}_4^-) = c(\text{H}_2\text{SO}_4)$.

Aus der Gleichung wird somit:

$$U = 1,93 + F_N \cdot 1 \text{ g } c^2(\text{H}_2\text{SO}_4)$$

Für 25°C und $c(\text{H}_2\text{SO}_4) = 4,5 \text{ mol/l}$ resultiert:

$$U = 1,93 + 2 \cdot 0,0591 \cdot 1 \text{ g } 4,5$$

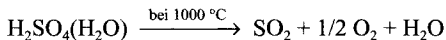
$$U = 2,006 \text{ V}$$

Z.5 Industrielle anorganische Chemie

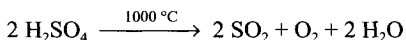
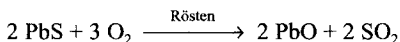
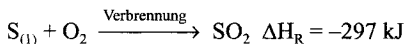
Z.5.1 Schwefelsäure

Mit etwa 140 Millionen jato (d.h. Tonnen pro Jahr) ist H_2SO_4 mengenmäßig die wichtigste Chemikalie, von der der größte Anteil in der Düngemittelindustrie verbraucht wird. Sie wird durch katalytische Oxidation von SO_2 zu SO_3 und anschließende Umsetzung mit Wasser hergestellt.

Am Ende vieler Verfahren hat man daher eine verunreinigte und verdünnte Schwefelsäure vorliegen, die früher als „Abfall“ betrachtet, mit Sonderschiffen aufs Meer transportiert und dort durch einfaches Ablassen (Verklappen) entsorgt wurde. Diese sog. „Dünnsäure“ wird heute rezykliert, wobei die Verfahren hierzu immer mehr verbessert wurden. Man konzentriert die Dünnsäure auf ca. 65%ig und sprüht sie in eine 1000°C heiße Flamme, wobei organische Verunreinigungen zerstört und die Schwefelsäure zersetzt werden (sog. Spaltverfahren):



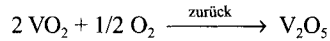
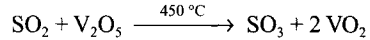
Die Reaktionsgleichungen für das Herstellungsverfahren lauten:



Schwefel kann zwar problemlos zu SO_2 verbrannt werden, aber nicht ohne weiteres zu

SO_3 . Hierzu ist eine katalytische Oxidation erforderlich.

Unter Einbeziehung des V_2O_5 läßt sich diese Reaktionsgleichung wie folgt schreiben:



Z.5.2 Ammoniak

5.2.1 Ammoniak-Synthese

Die Reaktionsgleichung des Verfahrens lautet:



Die exotherme und unter Volumenverminderung ablaufende Reaktion sollte bei möglichst tiefen Temperaturen und hohen Drücken durchgeführt werden, damit ein guter Umsatz erzielt wird.

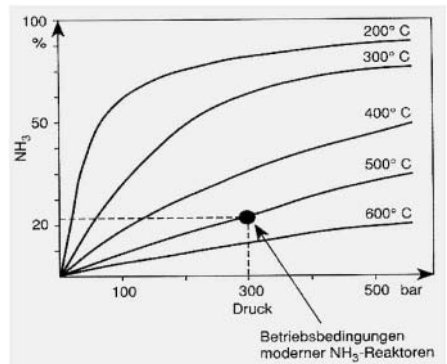


Bild Z-11. NH_3 -Ausbeute in Abhängigkeit von Druck und Temperatur.

Bei tieferen Temperaturen ist der NH_3 -Anteil im Gleichgewicht größer als bei höheren, weil die Reaktion exotherm abläuft; ebenso steigt der NH_3 -Anteil mit dem Druck an, weil aus 4 mol Gas 2 mol werden. Da die Reaktionsgeschwindigkeit aber bei niedriger Temperatur zu gering ist, arbeitet man bei Temperaturen zwischen 400 und 500°C (Druck zwischen 10^5 und $3 \cdot 10^5 \text{ hPa}$). Außerdem wird die NH_3 -

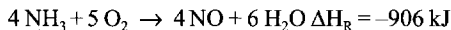
Synthese an einem Katalysator durchgeführt, der in diesem Falle die Aktivierungsenergie auf etwa ein Drittel erniedrigt.

Z.5.2.2 Verwendung von Ammoniak

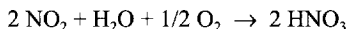
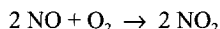
Die größte Menge des Ammoniaks wird zu Düngemitteln verarbeitet. Die Ammoniak-synthese ist auch der Eingangsprozeß zur Herstellung von Salpetersäure.

Durch Ammoniakverbrennung (Ostwald-Verfahren) wird in einem großtechnischen katalytischen Prozeß NO gewonnen, aus dem durch weitere Oxidation und Umsetzung mit H_2O

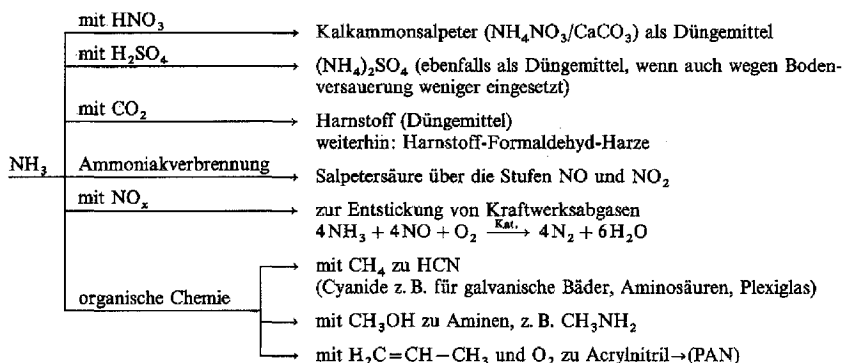
Salpetersäure hergestellt wird. Diese NH_3 -Verbrennung an einem Pt-Rh-Netzkatalysator (ca. 10% Rh) mit sehr kurzen Verweilzeiten (nur ca. 10^{-5} s) bedarf ganz bestimmter Reaktionsbedingungen, da mehrere miteinander konkurrierende Reaktionen möglich sind. Erwünscht ist die Reaktion:



Es schließen sich an:



Die wichtigste Verwendung von NH_3 ist in folgender Übersicht enthalten:



Z.5.3 Die Alkalichlorid-Elektrolyse – Erzeugung von Cl_2 , NaOH und H_2

Chlor und Natronlauge werden überwiegend durch Elektrolyse einer wäßrigen NaCl-Lösung gewonnen.

Der dabei ebenfalls anfallende Wasserstoff (Verwendung als Heizgas, Synthesegas, Ballonfüllung) spielt mengenmäßig keine Rolle im Vergleich zur Wasserstoffproduktion aus Erdgas und Erdöl (partielle Oxidation, Steam-Reforming, Reforming).

Das Ausgangsmaterial der Elektrolyse (Steinsalz, Kochsalz) steht in ausreichender Menge zu Verfügung. Vor der Elektrolyse muß die Sole durch Ausfällen von Ionen wie SO_4^{2-} , Mg^{2+} , Ca^{2+} und Fe^{3+} gereinigt werden. Die Alkalichlorid-Elektrolyse kann nach drei Verfahren durchgeführt werden:

- Diaphragmaverfahren
- Amalgamverfahren
- Membranverfahren.

Die Verwendung von Natronlauge und Chlor wird durch die folgende Zusammenfassung verdeutlicht:

NaOH	mit Bauxit	→ Al-Gewinnung, d. h. Aufschluß, gefolgt von Abtrennung des $\text{Fe}(\text{OH})_3$
	mit H_3PO_4	→ Phosphate, z. B. $\text{Na}_5\text{P}_3\text{O}_{10}$ (STP)
	mit Cl_2	→ durch Disproportionierung NaClO (Hypochlorit) und NaClO_3 (Chlorat); Bleich- und Desinfektionsmittel
	mit CO_2	→ NaHCO_3 (Backpulver) und Na_2CO_3 (Soda zur Glas- und Seifenherstellung)
	weiterer Einsatz für	<ul style="list-style-type: none"> → Aufschluß von Holz (Zellstoff- und Papierherstellung) → Regenerierung von Ionenaustauschern → Absorptionsmittel für saure Gase wie CO_2 oder CH_3-SH im Erdöl
Chlor	mit NaOH	→ NaClO und NaClO_3 (wie oben)
	mit Rutil(TiO_2)/Kohle	→ Überführung in TiCl_4 und daraus Titan oder das Weißpigment TiO_2
	mit H_2	→ Chlorwasserstoff HCl
	mit SiO_2 /Kohle	→ SiCl_4 ($\text{SiO}_2 + 2\text{C} + 2\text{Cl}_2 \rightarrow \text{SiCl}_4 + 2\text{CO}$)
	mit CO	→ Phosgen $\text{O}=\text{CCl}_2$; trotz Giftigkeit bedeutende Zwischenverbindung (Herstellung von Diisocyanaten für Polyurethane)
	mit CH_4	→ chlorierte Methanderivate (Lösungsmittel)
	mit $\text{H}_2\text{C}=\text{CH}_2$	→ 1,2-Dichlorethan (daraus Vinylchlorid)
	mit Benzol	→ Chlorbenzol (als Zwischenverbindung für Pharmaka, Farbstoffe, Insektizide)

Tabelle Z-5. Vergleich der drei Elektrolyse-Verfahren

	Diaphragma-Verfahren	Amalgam-Verfahren	Membran-Verfahren
Vorteile	Nur 3 V Zellspannung, kein Quecksilber	50%ige chloridfreie NaOH	Weitgehend reine NaOH, nur 3,15 V Spannung, kein Quecksilber
Nachteile	NaOH deutlich Cl^- -haltig; Kosten für Eindampfen höher als bei Membranverfahren	4,2 V Spannung, d. h. 3300 kWh pro t Chlor; Hg-Emissionen, teurer Umweltschutz	NaOH nur ca. 35%ig, Membrankosten

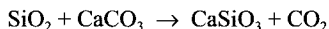
Z.5.4 Gewinnung von Eisen und Stahl

Für die Gewinnung von Eisen werden die folgenden Eisenerze verwendet:

- Hämatit oder Roteisenstein Fe_2O_3 ,
- Limonit oder Brauneisenstein $\text{Fe}_2\text{O}_3 \cdot n\text{H}_2\text{O}$,
- Magnetit Fe_3O_4 ,
- Siderit FeCO_3 .

Die Reduktion der Eisenoxide erfolgt in etwa 30–40 m hohen Hochofen, die abwechselnd mit Koks und einer Mischung aus angereicher-

tem Erz und sog. Zuschlägen beschickt werden. Aus Zuschlägen (Kalkstein, Dolomit) und Begleitmaterial des Erzes (insbesondere SiO_2) bildet sich eine Schlacke, die im wesentlichen aus Calciumsilicat besteht. Die Schlackebildung läßt sich vereinfacht wie folgt zusammenfassen:



Die Beschickung des Hochofens erfolgt über Glockenverschlüsse, die verhindern, daß Gicht-

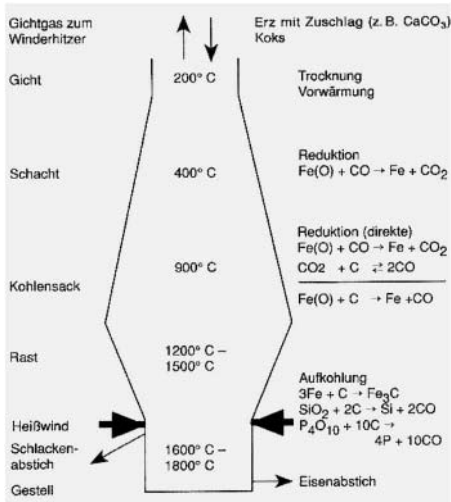
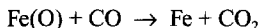


Bild Z-12. Reaktionszonen und Temperaturverlauf im Hochofen (Höhe ca. 40 m, Gestelldurchmesser ca. 11 m).

gas aus dem Hochofen entweicht (Gicht wird der obere Teil genannt). In den unteren Bereich des Hochofens bläst man über eine Ringleitung heiße Luft (Heißwind) von 900 bis 1300°C, so daß der Koks verbrennt und die erforderliche Temperatur erzeugt wird. Die Reduktion der Eisenoxide erfolgt nur in den sehr heißen unteren Bereichen direkt durch Kohlenstoff, zum größeren Teil jedoch durch CO.

Da unterschiedliche Eisenoxide mit den Oxidationszahlen +2 und +3 beteiligt sind, schreibt man vereinfacht Fe(O) – ein 100%ig reines FeO ist nicht bekannt:



Das gebildete CO_2 reagiert mit Kohlenstoff in einer als Boudouard-Gleichgewicht bezeichneten Reaktion zu CO:



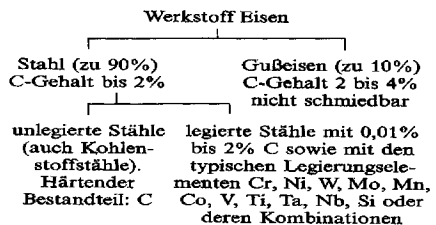
Die Produkte des Hochofenprozesses sind:

- **Roheisen**; es enthält 3,2–4% C, 0,2–3% Si, 0,5–5% Mn, 0,08–2,5% P und weniger als 0,04% S
- **Schlacke**; sie setzt sich etwa zusammen aus 35% SiO_2 , 40% CaO , 10% Al_2O_3 , weiterhin

MgO , FeO und CaS . Man verarbeitet sie für Produkte der Bauindustrie (Hochofenzement, Hüttensand).

- **Gichtgas**; das 150 bis 400°C heiße Gas enthält noch etwa 30% CO. Es wird nach Reinigung zum Betrieb der Winderhitzer und der Gebläse für den Heißwind benutzt. Winderhitzer sind regenerative Wärmeaustauscher, die mit feuerfesten Steinen ausgekleidet sind. Sie werden durch Abgase (aus der Verbrennung von Gichtgas) erwärmt und geben die aufgenommene Wärme an den eingelassenen Kaltwind ab, der dann als Heißwind dem Hochofen zugeführt wird.

Etwa 90% des Roheisens werden in Stahl übergeführt, der Rest wird zu Gußeisen verarbeitet. Härtender Bestandteil ist in erster Linie der Kohlenstoff, dessen Verhalten gegenüber Eisen die Vielfalt dieses Werkstoffs bewirkt. Die folgende Einteilung gibt einen Überblick:



Zur Herstellung von Stahl muß der Kohlenstoffgehalt des Roheisens stark gesenkt (bei Baustählen z.B. auf 0,05 bis 0,25%), andere Begleitstoffe müssen weitgehend entfernt werden. Erst dann läßt sich die Eisenlegierung (also Stahl) schmieden und walzen.

Der Raffinationsprozeß umfaßt das Frischen, also das Oxidieren der gelösten Bestandteile (wie z.B. C, Si, Mn, P), die Entschwefelung (z.B. mit CaO) und eine als Desoxidation bezeichnete Nachbehandlung; das ist die Entfernung des in der Stahlschmelze gelösten Sauerstoffs durch Desoxidationsmittel, wie z.B. Ferrosilicium, CaSi oder Al.

Die überwiegende Menge des Stahls wird heute durch das Sauerstoffaufblasverfahren (LD-Verfahren) erzeugt, nach dem weit mehr als 100 Stahlwerke in der Welt arbeiten. Hierbei

werden Roheisen, Stahlschrott und Kalk in einen Konverter eingebracht und über eine Lanze reiner Sauerstoff mit $5 \cdot 10^3$ bis 10^4 hPa auf die Schmelze geblasen.

Legierte Stähle stellt man meistens durch das Elektrostahlverfahren her.

Hierbei erfolgt die Beheizung durch Lichtbogen, die zwischen Elektroden aus Graphit und der Schmelze brennen (heute mit Zusatzheizung). Die gewünschten Legierungszusätze werden als Ferrolegierung eingebracht (Legierung zwischen Eisen und dem Legierungsbestandteil, z. B. Ferrochrom, Ferromangan usw.) oder in Form reiner Legierungsmetalle.

Z.6 Industrielle organische Chemie

Z.6.1 Erdöl

In den Raffinerien erfolgt eine Auftrennung des Rohöls in sog. Siedeschnitte.

Je nach Zielrichtung werden die Raffinerien in Heizöl-, Kraftstoff- und petrochemische Raffinerien unterschieden.

Z.6.2 Erdgas

Man unterscheidet „trockenes“ und „nasses“ Erdgas. Das trockene Erdgas enthält einen sehr hohen Anteil an CH_4 (ca. 80%) neben

CO_2 , H_2S und N_2 , nasses Erdgas dagegen hat eine Zusammensetzung von ca. 60% CH_4 , 15% C_2H_6 , 10% C_3H_8 . Vor der Einspeisung in Pipelines muß Erdgas aufbereitet werden:

- Trocknung in Absorberkolonnen
- Abtrennung von H_2S und COS (Kohlensulfidoxid) durch Absorption

Aus Erdgas wird durch Umsetzen mit Wasserdampf (steam-reforming) katalytisch eine Mischung $\text{CO} + \text{H}_2$ (sog. Synthesegas) gewonnen, aus dem eine Reihe wichtiger Grundchemikalien hergestellt werden kann (Methanol, Ammoniak, Aldehyde).

Z.6.3 Kohle

Kohle ist wie Erdöl ein fossiler Brennstoff. Im Laufe des Inkohlungsprozesses wurden die Produkte immer C-reicher: Cellulose \rightarrow Torf \rightarrow Braunkohle \rightarrow Steinkohle \rightarrow Anthrazit \rightarrow Graphit.

Kohle hat eine komplexe Struktur, die vom Inkohlungsgrad abhängt.

Aus Kohle lassen sich zahlreiche wichtige Verbindungen herstellen:

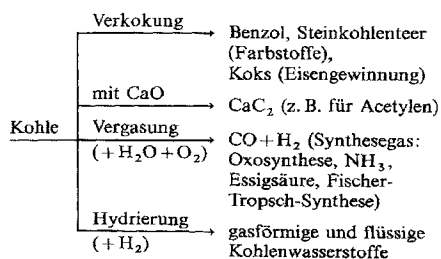
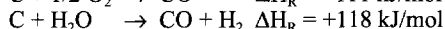


Tabelle Z-6. Substanzgruppen.

Gruppenname	Siedebereich	C-Anzahl
Gasförmige Verbindungen	bis ca. 0°C	bis C_4 (Butan)
Otto-Kraftstoff (Rohbenzin)	bis $150\text{--}200^\circ\text{C}$	bis etwa 12
Naphta (Chemiebenzin)	bis 200°C	bis etwa 12
Düsentreibstoff oder Kerosin	$200\text{--}250^\circ\text{C}$	12 bis 16
Diesel-Kraftstoff und leichtes Heizöl (Mitteldestilat)	$200\text{--}350^\circ\text{C}$	12 bis 25
Schweres Heizöl	Oberhalb 350°C	oberhalb 25
Schmieröle	$350\text{--}550^\circ\text{C}$	25 bis 40
Bitumen (Rückstand der Vakuumdestillation; abgeleitet vom lat. Wort für Erdharz)	Oberhalb 550°C	40 bis 50

Die Kohlevergasung ist eine Reaktion der Kohle mit H_2O -Dampf und Luft (oder O_2) zu CO und H_2 (Synthesegas):



Z.6.4 Biomasse

Während Erdöl und Kohle in Jahrmillionen gebildet wurden, ist Biomasse (die durch Assimilation von CO_2 entsteht) eine sich rasch erneuernde Rohstoffquelle. Die Industrie verwendet Biomasse folgender Art:

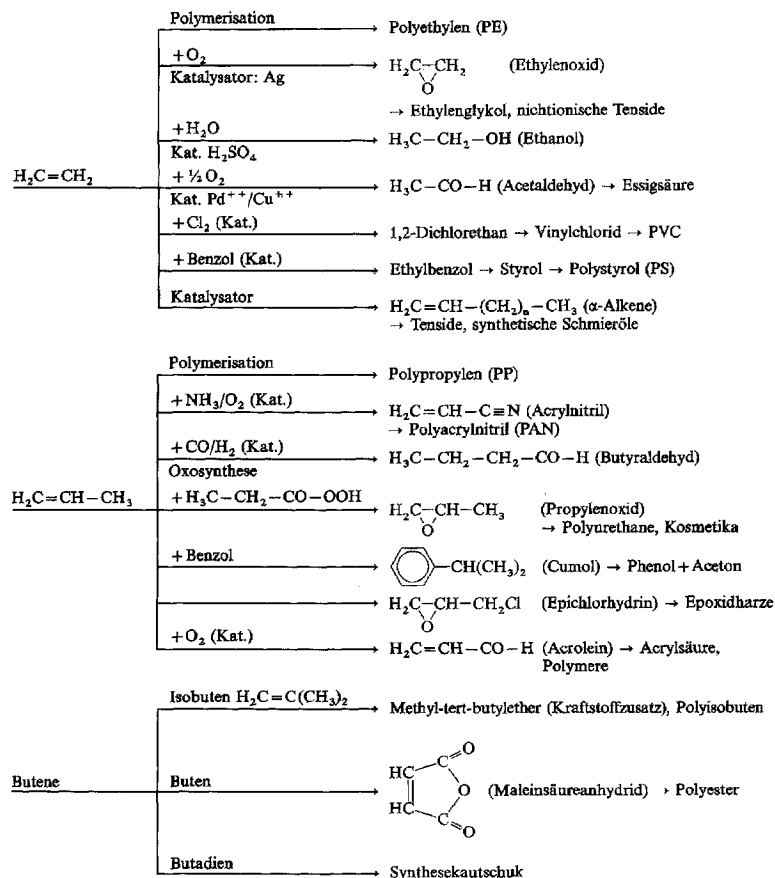
- Cellulose aus Holz in der Papier- und Textilindustrie (z. B. Viskoseseide)
- Naturkautschuk

- Fette und fette Öle (Fettsäureglycerinester) nicht nur als Nahrungsmittel, sondern auch für Biodiesel, Lacke und in der Tensid-Herstellung.

Z.6.5 Olefine

Ethen ist die zur Zeit mengenmäßig wichtigste Grundchemikalie der industriellen organischen Chemie, gefolgt von Propen, den C_4 -Alkenen, Benzol und Toluol. Schwefelsäure und Ammoniak werden jedoch in noch größeren Mengen produziert.

Über die Verwendung von Ethen, Propen und Buten informieren folgende Übersichten:



Z.6.6 Schmier- und Mineralöle

Unter dem Begriff „Schmiermittel“ werden Schmieröle, Schmierfette und feste Schmierstoffe (Graphit und Molybdänsulfid MoS_2) zusammengefaßt. Schmieröle werden in Mineralöle und synthetische Öle unterteilt.

– Mineralöle

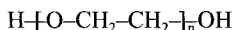
Mineralöle teilt man in paraffinbasierte (Hauptbestandteil: Paraffine) und naphthenbasierte (Hauptbestandteil: Cycloalkane und Aromaten) Grundöle ein. Sie fallen als Rohprodukte bei der Erdölraffination an.

– Synthetische Schmieröle

Extreme Anforderungen an Schmieröle (z.B. in Flugmotoren) können mit natürlichen Kohlenwasserstoffen nur schwer erfüllt werden. Seit etwa 1930 werden daher synthetische Schmieröle produziert, die im allgemeinen Gemische von Verbindungen darstellen. Hierzu gehören:

– Polyether

z.B. Polyethylenglykole mit dem allgemeinen Aufbau



– Carbonsäureester (Esteröle)

Es handelt sich mengenmäßig um die wichtigsten Syntheseöle. Das Veresterungsprodukt zwischen Adipinsäure (Hexandicarbonsäure) und 2-Ethylhexanol ist ein Beispiel;

– Siliconöle

Diese Öle besitzen eine geringe Neigung zur Schaumbildung und ein gutes VT-Verhalten. Sie sind besonders gut als Schmiermittel für Lager und Getriebe mit rollender Reibung geeignet.

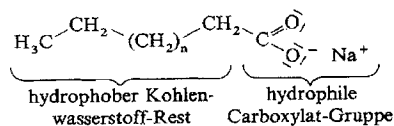
– Halogenkohlenwasserstoffe

Einsatz finden z.B. Polychlorparaffine oder Chlortrifluorethylen-Polymere. Die Verbindungen sind nicht brennbar, oxidationsbeständig und benetzen Metalloberflächen gut.

Z.6.7 Tenside

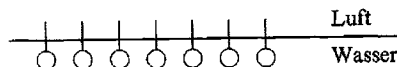
Mit der Entwicklung der Textilindustrie nahm die Bedeutung der Seife als Waschmittel zu. Heute werden Fette mit überhitztem Wasserdampf bei 10^5 hPa (Katalysator: CaO , MgO) gespalten. Das entstehende Fettsäuregemisch wird destillativ getrennt.

Seifen gehören zu den oberflächenaktiven Substanzen, den sog. Tensiden.



Veranschaulichung: $\text{---}\bigcirc$

Aufgrund dieser Struktur nehmen Tenside an der Wasseroberfläche eine Orientierung ein, in der die hydrophile Gruppierung ins Wasser taucht, der hydrophobe Rest aber in die Luft ragt:



Diese Anordnung erniedrigt die hohe Oberflächenspannung des Wassers und erleichtert den Benetzungsvorgang (d.h. die Ausbreitung des Wassers auf der Faser Oberfläche).

– Anionische Tenside

Hierzu gehören die Seifen, Sulfate und Sulfonate. Es handelt sich um die bedeutendste Gruppe von Tensiden, deren wichtigste Untergruppe die Alkylbenzolsulfonate darstellen.

– Kationische Tenside

Diese Gruppe spielt in Waschmitteln keine Rolle, da der hydrophile Charakter bei Anwesenheit von anionischen Tensiden verloren geht (es bilden sich schwer lösliche Salze). In sog. quartären Ammoniumverbindungen NR_4^+X^- bewirkt die positive Ladung am N-Atom die hydrophile Eigenschaft. Derartige Tenside spielen in der Textilverarbeitung eine Rolle (sie verleihen den Textilien einen weichen Griff und verringern die elektrostatische Aufladung).

– Nichtionische Tenside

Diese Tenside werden als Waschmittel für stark öl- und fettthaltige Substrate verwendet. Sie enthalten im hydrophilen Rest eine Hydroxylgruppe $-OH$ und mehrere Ether-sauerstoffatome.

Z.6.8 Polymere**Z.6.8.1 Allgemeines**

Polymere können natürliche oder aber synthetisch hergestellte Makromoleküle sein. Zu den Polymeren der Natur zählen beispielsweise Cellulose, Stärke, Eiweißkörper oder Kautschuk. Synthetische Polymere nennt man in der Regel Kunststoffe.

Der detaillierte Aufbau eines Polymeren kann sehr unterschiedlich ausfallen. Je nachdem, wie die beiden Monomereinheiten eines Copolymeren miteinander verbunden sind, unterscheidet man:

alternierende Polymere	X-Y-X-Y-X-Y-X-Y-X-Y-X
statistische Polymere	X-Y-X-X-X-Y-X-Y-Y-X-Y
Blockpolymere	X-X-X-Y-Y-Y-Y-X-X-X-X
Pfropfpolymere	X-X-X-X-X-X-X-X-X-X-X
	$ \begin{array}{ccc} & & \\ Y & & Y \\ & & \\ Y & & Y \end{array} $

Die Anordnung der Substituenten (Konfiguration) einer polymeren Kette charakterisiert man durch die sog. Taktizität.

Isotaktische und ataktische Polymere unterscheiden sich in physikalischen Eigenschaften.

Es erweicht beispielsweise ataktisches Polystyrol bereit bei 100°C , während isotaktisches bis ca. 230°C stabil bleibt.

Alle Aufbaureaktionen für Polymere nennt man zusammenfassend Polymerisationen wobei in Additionspolymerisationen und Kondensationspolymerisationen unterteilt wird.

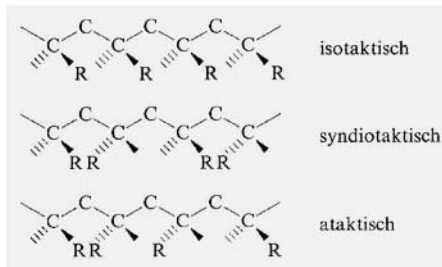


Bild Z-13. Isotaktische, syndiotaktische und ataktische Polymere (H-Atome nicht gezeichnet).

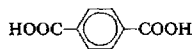
Die klassische Unterteilung in Polymerisation, Polykondensation und Polyaddition entspricht nicht mehr der heutigen IUPAC-Nomenklatur. Zur prägnanten Charakterisierung eines Kunststoffes wurden Kurzzeichen eingeführt, die in der Norm DIN 7728 zusammengestellt sind. Eine Vielzahl von Kurzbezeichnungen beginnt mit dem Buchstaben P für „Poly“ und bezieht sich immer auf Homopolymerisate, z. B.:

PE	Polyethylen	PAN	Poly(acrylnitril)
PA	Polyamid	PVC	Poly(vinylchlorid)
PC	Polycarbonat	PVAC	Poly(vinylacetat)
PB	Polybuten-1		

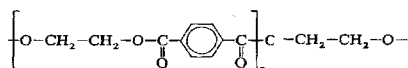
Z.6.8.2 Lineare Polyester

Zu den bedeutendsten Kunststoffen dieser Art gehört Poly(ethylenterephthalat) PETP, bekannt als Kunstfaser für Kleidungsstücke unter Bezeichnungen wie Diolen oder Trevira. Er wird aber auch als Formmasse für Haushaltsgeräte, für Flaschen oder Folien verwendet. Die Ausgangssubstanzen sind:

- Ethylenglykol $HO-CH_2-CH_2-OH$
- Terephthalsäure (1,4-Benzoldicarbonsäure)



Durch Veresterung (H_2O -Abspaltung nach beiden Seiten) erhält man das lineare Polymere



Z.6.8.3 Weitere technische Kondensationspolymerisate

- **Plastomere (auch Thermoplaste)**
Das sind Kunststoffe, die bei höherer Temperatur plastisch und weich werden, wobei man sie verformen kann. Man setzt sie als Granulat ein und verarbeitet sie zu Folien (in Kalandern) oder Formteilen (in Spritzgußmaschinen). Bei Raumtemperatur sind Plastomere wieder fest und elastisch. Den Verformungsvorgang kann man öfters wiederholen, da zwischen den Polymerketten keine echten chemischen Atombindungen bestehen.
- **Duromere (auch Duroplaste)**
Diese Kunststoffe lassen sich nicht plastisch verformen (durus = hart). Der Aufbau gleicht einem starren Raumnetz mit chemischen Bindungen zwischen den Polymerketten. Diese harten und festen Kunststoffe kann man durch Hitzeeinwirkung nur zerstören, aber nicht schmelzen.
- **Elastomere**
Diese dritte Gruppe könnte man verständlicher auch als Gummiprodukte bezeichnen, da es sich um gummiartig elastische Kunststoffe handelt. Sie sind ebenfalls nicht plastisch verformbar, weil auch hier eine gewisse Vernetzung der Kettenmoleküle vorliegt. Der klassische Ausdruck für diese Art der Vernetzung lautet Vulkanisation.

Z.6.8.4 Polyethylen, Polypropylen

So wie Ethylen unter den organischen Industrieprodukten die erste Stelle einnimmt, kommt **Polyethylen (PE)** eine Vorrangstellung unter den Kunststoffen zu. Die Bedeutung des PE prägt sich auch in der Vielzahl der Namen aus, die es in der Welt hat. Es steht mit mehr als 2300 Namen an der Spitze aller Verbindungen.

Im wesentlichen unterscheidet man zwei PE-Produkte:

- **LDPE (Low Density PolyEthylene)**
- **HDPE (High Density PolyEthylene)**

HD bedeutet in diesem Falle nicht Hochdruck sondern Hohe Dichte. Diese Polymerisation

läuft über Ziegler-Natta-Katalysatoren bei Niederdruck (etwa 5000 hPa). Da die erhaltenen PE-Makromoleküle kaum Verzweigungen aufweisen, ordnen sie sich besser zu mehr oder weniger parallelen Paketen an als bei LDPE, d.h. es liegt höhere Kristallinität vor.

Z.6.8.5 Poly(vinylchlorid) PVC, Poly(tetrafluorethylen) PTFE

Reines PVC ist ein sehr hartes, licht- und wärmeempfindliches Produkt, dessen Einsatz gewisser stabilisierender Zusätze bedarf. Wärmeeinwirkung führt beispielsweise rasch zur HCl-Abspaltung.

Kunststoffe wie PE oder PS sind (insbesondere im Lebensmittelbereich) auch ohne Additive einsetzbar, wenn sie keinen außergewöhnlichen Belastungen ausgesetzt sind (Licht, Wärme, Erwartung langer Haltbarkeit). Bei PVC dagegen sind es erst die Zusatzstoffe, die aus diesem den gebrauchsfertigen Kunststoff machen. Ganz allgemein werden Kunststoffadditive wie folgt unterteilt:

- Wärmestabilisatoren (Zn-, Pb-, Ba- oder Cd-Verbindungen)
- Lichtstabilisatoren
- Flammenschutzmittel
- Weichmacher
- Füllstoffe (Sand, Glasfasern, Gesteinsmehl) und Pigmente (insbesondere Titanweiß TiO₂ und Ruß).

Man unterscheidet in Hart-PVC (weichmacherfrei) und Weich-PVC (weichmacherhaltig).

Weichmacher sind spezielle organische Verbindungen, deren Eindringen in das Polymere zu einer Art Gelierung führt; sie wirken wie ein Gleitmittel zwischen den Molekülketten.

PVC ist nur eines der Produkte aus der Reihe der halogenhaltigen Kunststoffe. Einige Polyolefine enthalten auch das Halogen Fluor. Deren Geschichte begann in den 1930er Jahren, als in der Firma Hoechst das Poly(chlorotrifluorethylen) PCTFE und bei DuPont das **Poly(tetrafluorethylen) PTFE** (Handelsna-

men: Hostaflon, Teflon) entwickelt wurden. Später kamen Poly(vinylidenfluorid) PVDF und einige Copolymerisate hinzu.

Diese Kunststoffe zeichnen sich durch besondere Korrosions- und Temperaturbeständigkeit aus und wurden zunächst in Bereichen wie der

Raumfahrt verwendet. Heute sind sie aus dem chemischen Apparatebau (Behälter, Rohrleitungen, Staubfilter) genau so wenig wegzudenken wie aus dem Warenangebot eines jeden Kaufhauses (teflonbeschichtete Bratpfannen, Goretex-Anoraks).

Symbol des Elements Element	Ac Actinium	Al Aluminium
<i>chemische Eigenschaften</i>		
Ordnungszahl	89	13
relative Atommasse	(227,0)	26,982
Elektronenkonfiguration	[Rn] 6 d1 7 s2	[Ne] 3 s2 3 p1
Wertigkeit(en)	3	3
Ionisierungsenergien in eV (I, II, III)	6,9–12,1	5,96–18,74–28,31
Atom- bzw. Ionenradius in pm (Ladung des Ions)	188 118 (3+)	143 51 (3+)
Elektronegativität	1,1	1,61
Häufigkeit in der Erdkruste in %	$6,1 \cdot 10^{-14}$	7,57
Säure-Base-Verhalten des Oxids	–	sauer/basisch
Struktur/Dichte	kubisch flächenzentriert 10,1	kubisch flächenzentriert 2,702
<i>physikalische Eigenschaften</i>		
Isotope/Häufigkeit der Isotope in %	227 228	27/100
Schmelztemperatur in °C	1050	660,4
Siedetemperatur in °C	3200	2467
molare Schmelzwärme in $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$	14	10
molare Verdampfungswärme in $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$	–	291
spezifische Wärmekapazität in $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{g}^{-1}$	0,12	0,9
Wärmeleitfähigkeit bei 20 °C in $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	–	273
linearer Ausdehnungskoeffizient in 10^{-6}K^{-1}	–	23,9
spezifischer elektrischer Widerstand in $10^{-6} \Omega \cdot \text{cm}$	–	2,655 (0)
Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes in 10^{-4}K^{-1} (0 °C bis 100 °C)	–	42,9 (0)
magnetische Suszeptibilität 10^{-6}	–	+16,5 RT
Supraleiter-Übergangstemperatur in K (p: unter Druck)	–	1,175

Symbol des Elements Element	At Astat	Ba Barium
<i>chemische Eigenschaften</i>		
Ordnungszahl	85	56
relative Atommasse	(210)	137,33
Elektronenkonfiguration	[Xe] 4 f14 5 d10 6 s2 6 p5	[Xe] 6 s2
Wertigkeit(en)	7, 5, 3, 1	2
Ionisierungsenergien in eV (I, II, III)	–	5,2–10,0
Atom- bzw. Ionenradius in pm (Ladung des Ions)	62 (7+)	217 134 (2+)
Elektronegativität	2,2	0,89
Häufigkeit in der Erdkruste in %	$3 \cdot 10^{-24}$	0,026
Säure-Base-Verhalten des Oxids	–	stark basisch
Struktur/Dichte	– –	kubisch raumzentriert 3,51
<i>physikalische Eigenschaften</i>		
Isotope/Häufigkeit der Isotope in %	215 218 219	132/0,1 134/2,4 135/6,6 136/7,8 137/11,3 138/71,7
Schmelztemperatur in °C	302	725
Siedetemperatur in °C	335	1640
molare Schmelzwärme in $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$	–	7,7
molare Verdampfungswärme in $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$	33	151
spezifische Wärmekapazität in $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{g}^{-1}$	0,14	0,19
Wärmeleitfähigkeit bei 20 °C in $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	–	–
linearer Ausdehnungskoeffizient in 10^{-6}K^{-1}	–	–
spezifischer elektrischer Widerstand in $10^{-6} \Omega \cdot \text{cm}$	–	36 (0)
Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes in 10^{-4}K^{-1} (0 °C bis 100 °C)	–	61 (0)
magnetische Suszeptibilität 10^{-6}	–	+20,6 RT
Supraleiter-Übergangstemperatur in K (p: unter Druck)	–	p 1 ... 5,4

Am Americium	Sb Antimon	Ar Argon	As Arsen
95 (243,1) [Rn] 5 f ⁷ 6 d ⁰ 7 s ² 6, 5, 4, 3 6 182 107(3+) 92(4+) 1,3 – – hexagonal 11,7	51 121,75 [Kr] 4 d ¹⁰ 5 s ² 5 p ³ 5, 3 8,5–18–24,7 145 76(3+) 62(5+) 2,05 0,000065 schwach sauer rhomoedrisch 6,68	18 39,948 [Ne] 3 s ² 3 p ⁶ – 15,8–27,6–40,9 98 – 0,00036 – kubisch flächenzentriert 1,40(1)	33 74,9222 [Ar] 3 d ¹⁰ 4 s ² 4 p ³ 5, 3 10,5–20,1–28,0 125 58(3+) 46(5+) 2,18 0,00055 schwach sauer kubisch raumzentriert 5,72/2,03
242 243 244 994 2607 10 216 0,14 – – – – +100 RT 1	121/57,2 123/42,8 630,7 1750 19,8 83 0,21 22 10,8 39,0(0) 51(0) –99,0 (293) p 3,6	36/0,3 38/0,1 40/99,2 –189,2 –185,7 1,2 6,5 0,52 0,02 – – – – –19,6 RT –	75/100 817 613 28 – 0,33 – 5,6 33,3(20) – –23,7 (293) p 0,31 ... 0,5

Bk Berkelium	Be Beryllium	Bi Bismut	Pb Blei
97 (247,1) [Rn] 5 f ⁹ 6 d ⁰ 7 s ² 4, 3 – 96(3+) 1,3 – – –	4 9,0122 1 s ² 2 s ² 2 9,32–18,2–154 112 35(2+) 1,57 0,0005 sauer/basisch hexagonal 1,85	83 208,98 [Xe] 4 f ¹⁴ 5 d ¹⁰ 6 s ² 6 p ³ 5, 3 8,0–16,6–25,42 155 96(3+) 74(5+) 2,02 0,00002 schwach sauer rhomboedrisch 9,8	82 207,19 [Xe] 4 f ¹⁴ 5 d ¹⁰ 6 s ² 6 p ² 4, 2 7,38–14,96–31,9 175 120(2+) 84(4+) 2,33 0,0018 sauer/basisch kubisch flächenzentriert 11,4
– – – – – – – – – – – –	9/100 1280 2970 12 309 1,9 210 12 4,2(20) 250(20) –9,0 RT 0,026	209/100 271,3 1560 11 179 0,12 9 13,3 106,8(0) 46(0) –280,1 RT p 4 ... 8	204/1,5 206/23,6 207/22,6 208/52,3 327,5 1740 4,8 178 0,13 37 29,1 19,0(0) 42(0) –23,0(289) 7,19

Symbol des Elements Element	B Bor	Br Brom
<i>chemische Eigenschaften</i>		
Ordnungszahl	5	35
relative Atommasse	10,81	79,904
Elektronenkonfiguration	1 s2 2 s2 2 p1	[Ar] 3 d10 4 s2 4 p5
Wertigkeit(en)	3	5, 1
Ionisierungsenergien in eV (I, II, III)	8,3–25,1–37,9	11,8–21,8–36
Atom- bzw. Ionenradius in pm (Ladung des Ions)	79 23 (3+)	114 195 (1–)
Elektronegativität	2,04	2,96
Häufigkeit in der Erdkruste in %	0,0014	0,0006
Säure-Base-Verhalten des Oxids	schwach sauer	stark sauer
Struktur/Dichte	rhomboedrisch 2,34	orthorhombisch 3,12
<i>physikalische Eigenschaften</i>		
Isotope/Häufigkeit der Isotope in %	10/19,6 11/80,4	79/50,5 81/49,5
Schmelztemperatur in °C	2080	–7,2
Siedetemperatur in °C	2550	58,78
molare Schmelzwärme in kJ · mol ⁻¹	22	5,3
molare Verdampfungswärme in kJ · mol ⁻¹	510	15
spezifische Wärmekapazität in J · K ⁻¹ · g ⁻¹	1,03	0,45
Wärmeleitfähigkeit bei 20 °C in W · m ⁻¹ · K ⁻¹	29	–
linearer Ausdehnungskoeffizient in 10 ⁻⁶ K ⁻¹	8,3	–
spezifischer elektrischer Widerstand in 10 ⁻⁶ Ω · cm	1,8 · e12 (27)	–
Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes in 10 ⁻⁴ K ⁻¹ (0 °C bis 100 °C)	–	–
magnetische Suszeptibilität 10 ⁻⁶	–6,7 RT	–56,4
Supraleiter-Übergangstemperatur in K (p: unter Druck)	–	–

Symbol des Elements Element	Ce Cer	Cl Chlor
<i>chemische Eigenschaften</i>		
Ordnungszahl	58	17
relative Atommasse	140,12	35,453
Elektronenkonfiguration	[Xe] 4 f5 5 d0 6 s2	[Ne] 3 s2 3 p5
Wertigkeit(en)	4, 3	7, 5, 3, 1
Ionisierungsenergien in eV (I, II, III)	5,6–12,3–20	13,0–23,8–39,9
Atom- bzw. Ionenradius in pm (Ladung des Ions)	183 107 (3+) 94 (4+)	99 181 (1–)
Elektronegativität	1,12	3,16
Häufigkeit in der Erdkruste in %	0,0043	0,19
Säure-Base-Verhalten des Oxids	schwach basisch	stark sauer
Struktur/Dichte	kubisch flächenzentriert 6,75	orthorhombisch 1,56 (1)
<i>physikalische Eigenschaften</i>		
Isotope/Häufigkeit der Isotope in %	136/0,2 138/0,2 140/88,5 142/11,1	35/75,5 37/24,5
Schmelztemperatur in °C	798	–101
Siedetemperatur in °C	3426	–34,6
molare Schmelzwärme in kJ · mol ⁻¹	9	3,2
molare Verdampfungswärme in kJ · mol ⁻¹	314	10,2
spezifische Wärmekapazität in J · K ⁻¹ · g ⁻¹	0,18	0,49
Wärmeleitfähigkeit bei 20 °C in W · m ⁻¹ · K ⁻¹	11	0,0072
linearer Ausdehnungskoeffizient in 10 ⁻⁶ K ⁻¹	8,5	–
spezifischer elektrischer Widerstand in 10 ⁻⁶ Ω · cm	78 (20)	–
Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes in 10 ⁻⁴ K ⁻¹ (0 °C bis 100 °C)	87 (20)	–
magnetische Suszeptibilität 10 ⁻⁶	+2450 (293)	–40,5 (1)
Supraleiter-Übergangstemperatur in K (p: unter Druck)	p 1,3 ... 1,9	–

Cd Cadmium	Ca Calcium	Cf Californium	Cs Cäsium
48	20	98	55
112,41	40,08	(251,1)	132,91
[Kr] 4 d10 5 s2	[Ar] 4 s2	[Rn] 5 f10 6 d0 7 s2	[Xe] 6 s1
2	2	3	1
8,96–16,8–38,0	6,1–11,9–50,9	–	3,9–25,1
149 97 (2+)	197 99 (2+)	95 (3+)	265 167 (1+)
1,69	1	1,3	0,79
0,00003	3,39	–	0,00065
schwach basisch	stark basisch	–	stark basisch
hexagonal 8,65	kubisch	– –	kubisch
	flächenzentriert 1,55		raumzentriert 1,87
110/12,4 111/12,7	40/97,0 42/0,6 43/0,1	–	133/100
112/24,1 113/12,3	44/2,1 46/0,003 48/0,2		
114/28,8 116/7,6			
320,9	839	–	28,4
765	1484	–	669,3
6,4	8	–	2,1
100	151	–	66
0,23	0,66	–	0,22
100	130	–	–
29,8	25,2	–	97
6,83 (0)	3,91 (0)	–	20 (20)
43 (0)	42 (0)	–	50 (20)
– 19,8 RT	+ 40,0 RT	–	+ 29,0 RT
0,52	–	–	p 1,5

Cr Chrom	Co Cobalt	Cm Curium	Dy Dysprosium
24 51,996 [Ar] 3 d5 4 s1 6, 3, 2 6,74–16,6–31 125 63(3+) 52(6+) 1,66 0,019 stark sauer kubisch raumzentriert 7,2	27 58,933 [Ar] 3 d7 4 s2 3, 2 7,81–17,3–33,5 125 72(2+) 63(3+) 1,88 0,0037 sauer/basisch hexagonal 8,90	96 (247,1) [Rn] 5 f7 6 d1 7 s2 3 – 98(3+) 1,3 – – – 13,51	66 162,5 [Xe] 4 f10 5 d0 6 s2 3 6,8–11,6 175 92(3+) 1,22 0,00042 schwach basisch hexagonal 8,54
50/4,3 52/83,8 53/9,5 54/2,4 1857 2672 15 347 0,46 87 6,6 12,7(0) 21,4(0) +180 (293) –	59/100 1495 2870 15,5 381 0,42 96 12,36 5,6(0) 65,8(0) ferro 1404 –	– 1340 – – – – – – – – – – –	158/0,1 160/2,3 161/18,9 162/25,5 163/25,0 164/28,2 1409 2562 17 251 0,17 10 8,6 57(25) 11,9 (25) ferro 85 –

Symbol des Elements Element	Es Einsteinium	Fe Eisen
<i>chemische Eigenschaften</i>		
Ordnungszahl	99	26
relative Atommasse	(254,1)	55,847
Elektronenkonfiguration	[Rn] 5 f11 6 d0 7 s2	[Ar] 3 d6 4 s2
Wertigkeit(en)	–	3, 2
Ionisierungsenergien in eV (I, II, III)	–	7,83–16,16–30,6
Atom- bzw. Ionenradius in pm (Ladung des Ions)	–	124 74(2+) 64(3+)
Elektronegativität	1,3	1,83
Häufigkeit in der Erdkruste in %	–	4,7
Säure-Base-Verhalten des Oxids	–	sauer/basisch
Struktur/Dichte	– –	kubisch raumzentriert 7,86
<i>physikalische Eigenschaften</i>		
Isotope/Häufigkeit der Isotope in %	–	54/5,8 56/91,7 57/2,2 58/0,3
Schmelztemperatur in °C	–	1535
Siedetemperatur in °C	–	2750
molare Schmelzwärme in kJ · mol ⁻¹	–	14
molare Verdampfungswärme in kJ · mol ⁻¹	–	351
spezifische Wärmekapazität in J · K ⁻¹ · g ⁻¹	–	0,45
Wärmeleitfähigkeit bei 20 °C in W · m ⁻¹ · K ⁻¹	–	78
linearer Ausdehnungskoeffizient in 10 ⁻⁶ K ⁻¹	–	11,7
spezifischer elektrischer Widerstand in 10 ⁻⁶ Ω · cm	–	8,9(0)
Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes in 10 ⁻⁴ K ⁻¹ (0 °C bis 100 °C)	–	65(0)
magnetische Suszeptibilität 10 ⁻⁶	–	ferro 1043
Supraleiter-Übergangstemperatur in K (p: unter Druck)	–	–

Symbol des Elements Element	Fr Francium	Gd Gadolinium
<i>chemische Eigenschaften</i>		
Ordnungszahl	87	64
relative Atommasse	(223,0)	157,25
Elektronenkonfiguration	[Rn] 7 s1	[Xe] 4 f7 5 d1 6 s2
Wertigkeit(en)	1	3
Ionisierungsenergien in eV (I, II, III)	–	6,16–12
Atom- bzw. Ionenradius in pm (Ladung des Ions)	180 (1+)	179 97(3+)
Elektronegativität	0,7	1,2
Häufigkeit in der Erdkruste in %	1,3 · e ⁻²¹	0,00059
Säure-Base-Verhalten des Oxids	stark basisch	schwach basisch
Struktur/Dichte	kubisch raumzentriert	hexagonal 7,90
<i>physikalische Eigenschaften</i>		
Isotope/Häufigkeit der Isotope in %	223	154/2,1 155/14,7 156/20,5 157/15,7 158/24,9 160/21,9
Schmelztemperatur in °C	(27)	1313
Siedetemperatur in °C	(677)	3266
molare Schmelzwärme in kJ · mol ⁻¹	2	15,5
molare Verdampfungswärme in kJ · mol ⁻¹	64	312
spezifische Wärmekapazität in J · K ⁻¹ · g ⁻¹	0,14	0,23
Wärmeleitfähigkeit bei 20 °C in W · m ⁻¹ · K ⁻¹	–	9
linearer Ausdehnungskoeffizient in 10 ⁻⁶ K ⁻¹	–	6,4
spezifischer elektrischer Widerstand in 10 ⁻⁶ Ω · cm	–	134,0 (25)
Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes in 10 ⁻⁴ K ⁻¹ (0 °C bis 100 °C)	–	17,6(25)
magnetische Suszeptibilität 10 ⁻⁶	–	ferro 289
Supraleiter-Übergangstemperatur in K (p: unter Druck)	–	–

Symbol des Elements Element	Ha Hahnium	He Helium
<i>chemische Eigenschaften</i>		
Ordnungszahl	105	2
relative Atommasse	(262)	4,0026
Elektronenkonfiguration	[Rn] 5 f 14 6 d 3 7 s 2	1 s 2
Wertigkeit(en)	–	–
Ionisierungsenergien in eV (I, II, III)	–	24,6–54,4
Atom- bzw. Ionenradius in pm (Ladung des Ions)	–	93
Elektronegativität	–	–
Häufigkeit in der Erdkruste in %	–	0,00000042
Säure-Base-Verhalten des Oxids	–	–
Struktur/Dichte	– –	hexagonal 0,15 (1)
<i>physikalische Eigenschaften</i>		
Isotope/Häufigkeit der Isotope in %	–	3 4/100
Schmelztemperatur in °C	–	–272,2
Siedetemperatur in °C	–	–268,9
molare Schmelzwärme in kJ · mol ⁻¹	–	0,02
molare Verdampfungswärme in kJ · mol ⁻¹	–	0,08
spezifische Wärmekapazität in J · K ⁻¹ · g ⁻¹	–	5,21
Wärmeleitfähigkeit bei 20 °C in W · m ⁻¹ · K ⁻¹	–	0,15
linearer Ausdehnungskoeffizient in 10 ⁻⁶ K ⁻¹	–	–
spezifischer elektrischer Widerstand in 10 ⁻⁶ Ω · cm	–	–
Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes	–	–
in 10 ⁻⁴ K ⁻¹ (0 °C bis 100 °C)	–	–
magnetische Suszeptibilität 10 ⁻⁶	–	–1,88 RT
Supraleiter-Übergangstemperatur in K (p: unter Druck)	–	–

Symbol des Elements Element	K Kalium	C Kohlenstoff
<i>chemische Eigenschaften</i>		
Ordnungszahl	19	6
relative Atommasse	39,098	12,011
Elektronenkonfiguration	[Ar] 4 s 1	1 s 2 2 s 2 2 p 2
Wertigkeit(en)	1	4, 2
Ionisierungsenergien in eV (I, II, III)	4,3–31,8–46,0	11,26–24,4–47,9
Atom- bzw. Ionenradius in pm (Ladung des Ions)	227 133(1+)	71 16(4+)
Elektronegativität	0,82	2,55
Häufigkeit in der Erdkruste in %	2,4	0,087
Säure-Base-Verhalten des Oxids	stark basisch	schwach sauer
Struktur/Dichte	kubisch raumzentriert 0,86	hexagonal/Diamant 2,26/3,51
<i>physikalische Eigenschaften</i>		
Isotope/Häufigkeit der Isotope in %	39/93,1 40/0,01 41/6,9	12/98,9 13/1,1 14
Schmelztemperatur in °C	63,25	3550
Siedetemperatur in °C	760	4827
molare Schmelzwärme in kJ · mol ⁻¹	2,4	–
molare Verdampfungswärme in kJ · mol ⁻¹	79	–
spezifische Wärmekapazität in J · K ⁻¹ · g ⁻¹	0,75	0,719
Wärmeleitfähigkeit bei 20 °C in W · m ⁻¹ · K ⁻¹	100	45 G
linearer Ausdehnungskoeffizient in 10 ⁻⁶ K ⁻¹	84	0,6–4,3
spezifischer elektrischer Widerstand in 10 ⁻⁶ Ω · cm	6,3 (0)	1375 (0)
Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes	54 (0)	–
in 10 ⁻⁴ K ⁻¹ (0 °C bis 100 °C)	–	–
magnetische Suszeptibilität 10 ⁻⁶	+20,8 RT	–6,09 RT
Supraleiter-Übergangstemperatur in K (p: unter Druck)	–	–

Symbol des Elements Element	Lr Lawrencium	Li Lithium
<i>chemische Eigenschaften</i>		
Ordnungszahl	103	3
relative Atommasse	(260)	6,941
Elektronenkonfiguration	[Rn] 5 f14 6 d1 7 s2	1 s2 2 s1
Wertigkeit(en)	–	1
Ionisierungsenergien in eV (I, II, III)	–	5,39–75,6–122
Atom- bzw. Ionenradius in pm (Ladung des Ions)	–	152 68 (+1)
Elektronegativität	–	0,98
Häufigkeit in der Erdkruste in %	–	0,006
Säure-Base-Verhalten des Oxids	–	stark basisch
Struktur/Dichte	–	kubisch raumzentriert 0,53
<i>physikalische Eigenschaften</i>		
Isotope/Häufigkeit der Isotope in %	–	6/7,4 7/92,6
Schmelztemperatur in °C	–	180,5
Siedetemperatur in °C	–	1342
molare Schmelzwärme in kJ·mol ⁻¹	–	2,9
molare Verdampfungswärme in kJ·mol ⁻¹	–	148
spezifische Wärmekapazität in J·K ⁻¹ ·g ⁻¹	–	3,4
Wärmeleitfähigkeit bei 20°C in W·m ⁻¹ ·K ⁻¹	–	70
linearer Ausdehnungskoeffizient in 10 ⁻⁶ K ⁻¹	–	56
spezifischer elektrischer Widerstand in 10 ⁻⁶ Ω·cm	–	8,55 (0)
Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes in 10 ⁻⁴ K ⁻¹ (0°C bis 100°C)	–	47,5 (0)
magnetische Suszeptibilität 10 ⁻⁶	–	+14,2 RT
Supraleiter-Übergangstemperatur in K (p: unter Druck)	–	–

Symbol des Elements Element	Mo Molybdän	Na Natrium
<i>chemische Eigenschaften</i>		
Ordnungszahl	42	11
relative Atommasse	95,94	22,99
Elektronenkonfiguration	[Kr] 4 d5 5 s1	[Ne] 3 s1
Wertigkeit(en)	6, 5, 4, 3, 2	1
Ionisierungsenergien in eV (I, II, III)	7,35–16,2–27,1	5,1–47,3–71,6
Atom- bzw. Ionenradius in pm (Ladung des Ions)	136 70 (4+) 62 (6+)	186 97 (1+)
Elektronegativität	2,16	0,93
Häufigkeit in der Erdkruste in %	0,0014	2,64
Säure-Base-Verhalten des Oxids	stark sauer	stark basisch
Struktur/Dichte	kubisch raumzentriert 10,2	kubisch raumzentriert 0,97
<i>physikalische Eigenschaften</i>		
Isotope/Häufigkeit der Isotope in %	92/15,9 95/15,7 96/16,5 97/9,5 98/23,8 100/9,6	23/100
Schmelztemperatur in °C	2610	97,81
Siedetemperatur in °C	5560	882,9
molare Schmelzwärme in kJ·mol ⁻¹	28	2,6
molare Verdampfungswärme in kJ·mol ⁻¹	590	99
spezifische Wärmekapazität in J·K ⁻¹ ·g ⁻¹	0,25	1,23
Wärmeleitfähigkeit bei 20°C in W·m ⁻¹ ·K ⁻¹	141	135
linearer Ausdehnungskoeffizient in 10 ⁻⁶ K ⁻¹	5,44	71
spezifischer elektrischer Widerstand in 10 ⁻⁶ Ω·cm	5,2(0)	4,2 (0)
Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes in 10 ⁻⁴ K ⁻¹ (0°C bis 100°C)	43,5(0)	55 (0)
magnetische Suszeptibilität 10 ⁻⁶	+89,0 (298)	+16,0 RT
Supraleiter-Übergangstemperatur in K (p: unter Druck)	0,92	–

Symbol des Elements Element	Nb Niob	No Nobelium
<i>chemische Eigenschaften</i>		
Ordnungszahl	41	102
relative Atommasse	92,906	(259)
Elektronenkonfiguration	[Kr] 4 d4 5 s1	[Rn] 5 f14 6 d0 7 s2
Wertigkeit(en)	5, 3	–
Ionisierungsenergien in eV (I, II, III)	6,88–14,3–25,0	–
Atom- bzw. Ionenradius in pm (Ladung des Ions)	143 69 (5+)	110 (2+)
Elektronegativität	1,6	1,3
Häufigkeit in der Erdkruste in %	0,0019	–
Säure-Base-Verhalten des Oxids	schwach sauer	–
Struktur/Dichte	kubisch raumzentriert 8,55	– –
<i>physikalische Eigenschaften</i>		
Isotope/Häufigkeit der Isotope in %	93/100	–
Schmelztemperatur in °C	2468	–
Siedetemperatur in °C	4742	–
molare Schmelzwärme in kJ · mol ⁻¹	27	–
molare Verdampfungswärme in kJ · mol ⁻¹	695	–
spezifische Wärmekapazität in J · K ⁻¹ · g ⁻¹	0,27	–
Wärmeleitfähigkeit bei 20 °C in W · m ⁻¹ · K ⁻¹	52	–
linearer Ausdehnungskoeffizient in 10 ⁻⁶ K ⁻¹	7,1	–
spezifischer elektrischer Widerstand in 10 ⁻⁶ Ω · cm	13,9(0)	–
Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes in 10 ⁻⁴ K ⁻¹ (0 °C bis 100 °C)	39,5(0)	–
magnetische Suszeptibilität 10 ⁻⁶	+195,0 (298)	–
Supraleiter-Übergangstemperatur in K (p: unter Druck)	9,25	–

Symbol des Elements Element	Pu Plutonium	Po Polonium
<i>chemische Eigenschaften</i>		
Ordnungszahl	94	84
relative Atommasse	(244,1)	(209)
Elektronenkonfiguration	[Rn] 5 f6 6 d0 7 s2	[Xe] 4 f14 5 d10 6 s2 6 p4
Wertigkeit(en)	6, 5, 4, 3	4, 2
Ionisierungsenergien in eV (I, II, III)	5,8	8,42
Atom- bzw. Ionenradius in pm (Ladung des Ions)	151 108 (3+) 93 (4+)	167 67 (6+)
Elektronegativität	1,28	2
Häufigkeit in der Erdkruste in %	2 · e ⁻¹⁹	2,1 · e ⁻¹⁴
Säure-Base-Verhalten des Oxids	sauer/basisch	sauer/basisch
Struktur/Dichte	monoklin 19,8	monoklin 9,4
<i>physikalische Eigenschaften</i>		
Isotope/Häufigkeit der Isotope in %	236 238 239 240 242	210 211 212 214 215
Schmelztemperatur in °C	244	216
Siedetemperatur in °C	641	254
molare Schmelzwärme in kJ · mol ⁻¹	3232	962
molare Verdampfungswärme in kJ · mol ⁻¹	–	13
spezifische Wärmekapazität in J · K ⁻¹ · g ⁻¹	–	101
Wärmeleitfähigkeit bei 20 °C in W · m ⁻¹ · K ⁻¹	–	0,13
linearer Ausdehnungskoeffizient in 10 ⁻⁶ K ⁻¹	9	–
spezifischer elektrischer Widerstand in 10 ⁻⁶ Ω · cm	54	–
Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes in 10 ⁻⁴ K ⁻¹ (0 °C bis 100 °C)	160(0)	–
magnetische Suszeptibilität 10 ⁻⁶	–29(0)	–
Supraleiter-Übergangstemperatur in K (p: unter Druck)	+610 RT	–
	–	–

Os Osmium	Pd Palladium	P Phosphor	Pt Platin
76 190,2 [Xe] 4 f14 5 d6 6 s2 8, 6, 4, 3, 2 8,7 134 69 (4+) 2,2 0,000001 schwach sauer hexagonal 22,6	46 106,4 [Kr] 4 d10 5 s0 4, 2 8,3–19,8–32,9 138 80 (2+) 2,2 0,000001 schwach basisch kubisch flächenzentriert 12,0	15 30,974 [Ne] 3 s2 3 p3 5, 4, 3 11,0–19,7–30,1 110 44(3+) 35(5+) 2,19 0,09 schwach sauer kubisch 1,82 w/2,35 r	78 195,09 [Xe] 4 f14 5 d9 6 s1 4, 2 8,88–18,6 139 80(2+) 2,28 0,0000005 schwach basisch kubisch flächenzentriert 21,4
186/1,6 187/1,6 188/13,3 189/16,1 190/26,4 192/41,0 3050 5000 29 678 0,13 87 6,6 9,5(20) 42 (20) + 9,9 RT 0,65	102/1,0 104/11,0 105/22,2 106/27,3 108/26,7 110/11,8 1554 2970 18 377 0,23 75 11,67 10,0(0) 38 (0) + 567,4 (288) –	31/100 44,1 w 280 w 0,6 13 0,77 w – 124 1 · e ¹⁷ w (11) – –20,0 r p 5,8	190/0,01 192/0,8 194/32,9 195/33,8 196/25,3 198/7,2 1772 3827 20 510 0,13 73 8,9 9,81(0) 39,2(0) + 201,9 (290) –

Pr Praseodym	Pm Promethium	Pa Protactinium	Hg Quecksilber
59 140,91 [Xe] 4 f3 5 d0 6 s2 4, 3 5,46–10,55–20,2 132 106(3+) 92(4+) 1,13 0,00052 schwach basisch hexagonal 6,77	61 146,9 [Xe] 4 f5 5 d0 6 s2 3 5,55–10,90 106 (3+) 1,2 1 · e ⁻¹⁹ schwach basisch hexagonal 7,2	91 231,04 [Rn] 5 f2 6 d1 7 s2 5, 4 – 161 113(3+) 98(4+) 1,5 9,0 · e ⁻¹¹ schwach basisch orthorhombisch 15,4	80 200,59 [Xe] 4 f14 5 d10 6 s2 2, 1 10,44–18,76–34,2 150 110(1+) 96(2+) 2 0,00004 schwach sauer rhomboedrisch 13,53
141/100 931 3512 10 333 0,19 12 4,8 68(25) 17,1 (25) + 5010 (293) –	144 145 146 147 1170 2460 13 293 0,19 – – – – – – – –	231 234 <1600 – 15 460 0,12 – – – – – – 1,3	198/10,0 199/16,8 200/23,1 201/13,2 202/29,8 204/6,9 – 38,87 356,6 2,3 59 0,14 8,4 – 98,4(50) – – 33,4 (293) 4,15 3,95

Symbol des Elements Element	Ra Radium	Rn Radon
<i>chemische Eigenschaften</i>		
Ordnungszahl	88	86
relative Atommasse	(226,0)	(222,0)
Elektronenkonfiguration	[Rn] 7 s ₂	[Xe] 4 f ¹⁴ 5 d ¹⁰ 6 s ² 6 p ⁶
Wertigkeit(en)	2	–
Ionisierungsenergien in eV (I, II, III)	5,28–10,15	10,75
Atom- bzw. Ionenradius in pm (Ladung des Ions)	143 (2+)	–
Elektronegativität	0,9	–
Häufigkeit in der Erdkruste in %	$9,5 \cdot 10^{-11}$	$6,2 \cdot 10^{-16}$
Säure-Base-Verhalten des Oxids	stark basisch	–
Struktur/Dichte	kubisch raumzentriert 5	kubisch flächenzentriert 4,4(1)
<i>physikalische Eigenschaften</i>		
Isotope/Häufigkeit der Isotope in %	223 224 226 228	218 219 220 222
Schmelztemperatur in °C	700	–71
Siedetemperatur in °C	1140	–61,8
molare Schmelzwärme in kJ · mol ^{–1}	10	2,9
molare Verdampfungswärme in kJ · mol ^{–1}	115	16
spezifische Wärmekapazität in J · K ^{–1} · g ^{–1}	0,12	0,09
Wärmeleitfähigkeit bei 20 °C in W · m ^{–1} · K ^{–1}	–	–
linearer Ausdehnungskoeffizient in 10 ^{–6} K ^{–1}	–	–
spezifischer elektrischer Widerstand in 10 ^{–6} Ω · cm	–	–
Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes in 10 ^{–4} K ^{–1} (0 °C bis 100 °C)	–	–
magnetische Suszeptibilität 10 ^{–6}	–	–
Supraleiter-Übergangstemperatur in K (p: unter Druck)	–	–

Symbol des Elements Element	Sm Samarium	O Sauerstoff
<i>chemische Eigenschaften</i>		
Ordnungszahl	62	8
relative Atommasse	150,35	15,999
Elektronenkonfiguration	[Xe] 4 f ⁶ 5 d ⁰ 6 s ²	1 s ² 2 s ² 2 p ⁴
Wertigkeit(en)	3, 2	2
Ionisierungsenergien in eV (I, II, III)	5,6–11,2	13,6–35,2–54,9
Atom- bzw. Ionenradius in pm (Ladung des Ions)	179 100(3+)	63 140 (2–)
Elektronegativität	1,17	3,44
Häufigkeit in der Erdkruste in %	0,0006	49,4
Säure-Base-Verhalten des Oxids	schwach basisch	–
Struktur/Dichte	rhomboedrisch 7,52	kubisch 1,15 (1)
<i>physikalische Eigenschaften</i>		
Isotope/Häufigkeit der Isotope in %	147/15,0 148/11,3 149/13,8 150/7,4 152/26,7 154/22,7	16/99,8 17/0,04 18/0,2
Schmelztemperatur in °C	1077	–218,4
Siedetemperatur in °C	1791	–183
molare Schmelzwärme in kJ · mol ^{–1}	8,9	0,22
molare Verdampfungswärme in kJ · mol ^{–1}	165	3,4
spezifische Wärmekapazität in J · K ^{–1} · g ^{–1}	0,2	0,92
Wärmeleitfähigkeit bei 20 °C in W · m ^{–1} · K ^{–1}	–	0,026
linearer Ausdehnungskoeffizient in 10 ^{–6} K ^{–1}	–	–
spezifischer elektrischer Widerstand in 10 ^{–6} Ω · cm	92 (25)	–
Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes in 10 ^{–4} K ^{–1} (0 °C bis 100 °C)	14,8 (25)	–
magnetische Suszeptibilität 10 ^{–6}	+1860 (291)	+3449 (293)
Supraleiter-Übergangstemperatur in K (p: unter Druck)	–	–

Re Rhenium	Rh Rhodium	Rb Rubidium	Ru Ruthenium
75 186,21 [Xe] 4 f14 5 d5 6 s2 7, 6, 4, 2, 1 7,87–16,6 137 72(4+) 56(7+) 1,9 0,0000001 schwach sauer hexagonal 21,0	45 102,91 [Kr] 4 d8 5 s1 4, 3, 2 7,7–18,1–31,1 134 68(3+) 2,28 0,0000001 sauer/basisch kubisch flächenzentriert 12,4	37 85,468 [Kr] 5 s1 1 4,2–27,3–40 248 147(1+) 0,82 0,0029 stark basisch kubisch raumzentriert 1,53	44 101,07 [Kr] 4 d7 5 s1 8, 6, 4, 3, 2 7,36–16,8–28,5 133 67(4+) 2,2 0,000002 schwach sauer hexagonal 12,4
185/37,1 187/62,9	103/100	85/72,2 87/27,8	96/5,5 99/12,7 100/12,6 101/17,1 102/31,6 104/18,6
3180 5627 33,5 707 0,15 48 6,6 18,6(0) 31(0)	1966 3700 22 494 0,24 150 8,5 4,3(0) 44(0)	38,89 686 2,2 76 0,34 60 90 12,5(20) 53(20)	2310 3900 25 619 0,25 117 9,6 7,3(0) 42(20)
+67,6 (293) 1,698	+111,0 (298) –	+17,0 (303) –	+43,2 (298) 0,49

Sc Scandium	S Schwefel	Se Selen	Ag Silber
21 44,956 [Ar] 3 d1 4 s2 3 6,54–12,8–24,8 161 81(3+) 1,36 0,00051 schwach basisch hexagonal 3,0	16 32,06 [Ne] 3 s2 3 p4 6, 4, 2 10,4–23,4–35,0 102 184(2–) 12(6+) 2,58 0,048 stark sauer orthorhombisch/ monoklin 2,07 r/1,96 m	34 78,96 [Ar] 3 d10 4 s2 4 p4 6, 4, 2 9,70–21,3–33,9 116 198(2–) 42(6+) 2,55 0,00008 stark sauer hexagonal [Se8] 4,80 g/ 4,50 r	47 107,87 [Kr] 4 d10 5 s1 1 7,544–21,4–35,9 144 126(1+) 1,93 0,00001 sauer/basisch kubisch flächenzentriert 10,5
45/100	32/95,0 33/0,8 34/4,2 36/0,02	74/0,9 76/9,0 77/7,6 78/23,5 80/49,8 82/9,2	107/51,4 109/48,6
1541 2832 16 305 0,56 63 12 66(25) 28,2(25)	113 r 444,7 1,2 9,6 0,7 r 0,28 r – 2 · e ²³ (20) –	217 685 5,2 21 0,329 0,2 g 37 12(0) –	961,9 2212 11 258 0,23 418 19,68 1,51(0) 41(0)
+315 (292) –	–15,5 r RT –	–25,0 RT p 6,9	–19,5 (296) –

Symbol des Elements Element	Si Silicium	N Stickstoff
<i>chemische Eigenschaften</i>		
Ordnungszahl	14	7
relative Atommasse	28,086	14,007
Elektronenkonfiguration	[Ne] 3 s ² 3 p ²	1 s ² 2 s ² 2 p ³
Wertigkeit(en)	4	5, 4, 3, 2
Ionisierungsenergien in eV (I, II, III)	8,15–16,3–33,5	14,5–29,6–47,4
Atom- bzw. Ionenradius in pm (Ladung des Ions)	118 42 (4+)	73 171 (3–) 13 (5+)
Elektronegativität	1,9	3,04
Häufigkeit in der Erdkruste in %	25,8	0,03
Säure-Base-Verhalten des Oxids	sauer/basisch	stark sauer
Struktur/Dichte	Diamant 2,33	hexagonal 0,81 (1)
<i>physikalische Eigenschaften</i>		
Isotope/Häufigkeit der Isotope in %	28/92,2 29/4,7 30/3,1	14/99,6 15/0,4
Schmelztemperatur in °C	1410	–209,9
Siedetemperatur in °C	2355	–195,8
molare Schmelzwärme in kJ · mol ^{–1}	46	0,36
molare Verdampfungswärme in kJ · mol ^{–1}	383	2,8
spezifische Wärmekapazität in J · K ^{–1} · g ^{–1}	0,71	1,04
Wärmeleitfähigkeit bei 20 °C in W · m ^{–1} · K ^{–1}	153	0,026
linearer Ausdehnungskoeffizient in 10 ^{–6} K ^{–1}	7,6	–
spezifischer elektrischer Widerstand in 10 ^{–6} Ω · cm	32 · e ¹⁰ (20)	–
Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes in 10 ^{–4} K ^{–1} (0 °C bis 100 °C)	–	–
magnetische Suszeptibilität 10 ^{–6}	–3,9 RT	–12,0 RT
Supraleiter-Übergangstemperatur in K (p: unter Druck)	p 6,7 ... 7,1	–

Symbol des Elements Element	Tb Terbium	Tl Thallium
<i>chemische Eigenschaften</i>		
Ordnungszahl	65	81
relative Atommasse	158, 93	204,38
Elektronenkonfiguration	[Xe] 4 f ⁹ 5 d ⁰ 6 s ²	[Xe] 4 f ¹⁴ 5 d ¹⁰ 6 s ² 6 p ¹
Wertigkeit(en)	4, 3	3, 1
Ionisierungsenergien in eV (I, II, III)	5,98–11,52	6,11–20,4–29,8
Atom- bzw. Ionenradius in pm (Ladung des Ions)	176 93 (3+)	170 147 (1+) 95 (3+)
Elektronegativität	1,2	2,04
Häufigkeit in der Erdkruste in %	0,000085	0,00003
Säure-Base-Verhalten des Oxids	schwach basisch	schwach basisch
Struktur/Dichte	hexagonal 8,23	hexagonal 11,85
<i>physikalische Eigenschaften</i>		
Isotope/Häufigkeit der Isotope in %	159/100	203/29,5 205/70,5
Schmelztemperatur in °C	1360	303,5
Siedetemperatur in °C	3123	1457
molare Schmelzwärme in kJ · mol ^{–1}	16	4,3
molare Verdampfungswärme in kJ · mol ^{–1}	293	166
spezifische Wärmekapazität in J · K ^{–1} · g ^{–1}	0,18	0,13
Wärmeleitfähigkeit bei 20 °C in W · m ^{–1} · K ^{–1}	–	49
linearer Ausdehnungskoeffizient in 10 ^{–6} K ^{–1}	7	29,4
spezifischer elektrischer Widerstand in 10 ^{–6} Ω · cm	116 (25)	16,6 (20)
Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes in 10 ^{–4} K ^{–1} (0 °C bis 100 °C)	–	52 (20)
magnetische Suszeptibilität 10 ^{–6}	ferro 219	–50,9 RT
Supraleiter-Übergangstemperatur in K (p: unter Druck)	–	2,39

Sr Strontium	Ta Tantal	Tc Technetium	Te Tellur
38 87,62 [Kr] 5 s2 2 5,7–11,0–43,6 215 112 (2+) 0,95 0,014 stark basisch kubisch flächenzentriert 2,54	73 180,95 [Xe] 4 f14 5 d3 6 s2 5 7,88–16,2 143 68 (5+) 1,5 0,0008 schwach sauer kubisch raumzentriert 16,6	43 98,91 [Kr] 4 d5 5 s2 7 7,3–15,3–29,5 135 1,9 – stark sauer hexagonal 11,5	52 127,6 [Kr] 4 d10 5 s2 5 p4 6, 4, 2 8,96–18,6–30,5 143 221 (2–) 56 (6+) 2,1 0,000001 schwach sauer hexagonal 6,24
84/0,6 86/9,9 87/7,0 88/82,5 769 1384 9 139 0,29 – – 23 (20) 50 (20) +92,0 RT –	180/0,01 181/99,99 2996 5425 28 753 0,15 58 6,6 12,6 (0) 35 (0) +154 (298) 4,48	97 98 99 2172 4877 23 577 0,25 – – – – +270,0 (298) 7,8	122/2,4 124/4,6 125/7,0 127/18,7 128/31,8 130/34,5 449,5 990 18 52 0,2 4,8 17,2 4,36 · e5 (23) – –39,5 RT p 2,4 ... 5,1

Th Thorium	Tm Thulium	Ti Titan	U Uran
90 232,04 [Rn] 5 f0 6 d2 7 s2 4 6,95–11,5–20,0 180 102 (4+) 1,3 0,0011 schwach basisch kubisch flächenzentriert 11,7	69 168,93 [Xe] 4 f13 5 d0 6 s2 3 5,81–12,05–23,71 172 87 (3+) 1,25 0,000019 schwach basisch hexagonal 9,33	22 47,9 [Ar] 3 d2 4 s2 4, 3 6,81–13,6–27,6 145 94 (2+) 68 (4+) 1,54 0,41 sauer/basisch hexagonal 4,54	92 238,03 [Rn] 5 f3 6 d1 7 s2 6, 5, 4, 3 6,08 139 97 (4+) 80 (6+) 1,38 0,00032 sauer/basisch orthorhombisch 18,95
232/100 1750 ≈4790 15 64 0,14 41 10,5 18,62 (20) 38 (20) +132,0 (293) 1,37	169/100 1545 1947 18 213 0,16 – 11,6 90 (25) 20 (25) +25500 (291) –	46/7,9 47/7,3 48/74,0 49/5,5 50/5,3 1660 3287 15,5 429 0,53 23 8,4 50 (0) 38 (0) +153 (293) 0,39	234/0,01 235/0,7 238/99,3 1132 3818 13 417 0,12 28 15,3 29 α (0) 34 (0) +409 α (298) p 0,4 ... 2,4

Symbol des Elements Element	V Vanadium	H Wasserstoff
<i>chemische Eigenschaften</i>		
Ordnungszahl	23	1
relative Atommasse	50,942	1,008
Elektronenkonfiguration	[Ar] 3 d3 4 s2	1 s1
Wertigkeit(en)	5, 4, 3, 2	1
Ionisierungsenergien in eV (I, II, III)	6,71–14,6–29,3	13,6
Atom- bzw. Ionenradius in pm (Ladung des Ions)	131 88 (2+) 59 (5+)	37 208 (1–)
Elektronegativität	1,63	2,2
Häufigkeit in der Erdkruste in %	0,014	0,88
Säure-Base-Verhalten des Oxids	sauer/basisch	sauer/basisch
Struktur/Dichte	kubisch raumzentriert 6,12	hexagonal 0,07 (1)
<i>physikalische Eigenschaften</i>		
Isotope/Häufigkeit der Isotope in %	50/0,2 51/99,8	1/99,98 2/0,02
Schmelztemperatur in °C	1890	–259,1
Siedetemperatur in °C	3380	–252,9
molare Schmelzwärme in kJ · mol ^{–1}	18	0,06
molare Verdampfungswärme in kJ · mol ^{–1}	459	0,45
spezifische Wärmekapazität in J · K ^{–1} · g ^{–1}	0,48	14,3
Wärmeleitfähigkeit bei 20 °C in W · m ^{–1} · K ^{–1}	30	0,18
linearer Ausdehnungskoeffizient in 10 ^{–6} K ^{–1}	18,2 (0)	–
spezifischer elektrischer Widerstand in 10 ^{–6} Ω · cm	39 (0)	–
Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes in 10 ^{–4} K ^{–1} (0 °C bis 100 °C)	+255 (298)	–
magnetische Suszeptibilität 10 ^{–6}	5,3	–3,98
Supraleiter-Übergangstemperatur in K (p: unter Druck)	–	–

Symbol des Elements Element	Zn Zink	Sn Zinn
<i>chemische Eigenschaften</i>		
Ordnungszahl	30	50
relative Atommasse	65,38	118,69
Elektronenkonfiguration	[Ar] 3 d10 4 s2	[Kr] 4 d10 5 s2 5 p2
Wertigkeit(en)	2	4, 2
Ionisierungsenergien in eV (I, II, III)	9,36–17,89–40,0	7,30–14,5–30,5
Atom- bzw. Ionenradius in pm (Ladung des Ions)	130 74 (2+)	151 93 (2+) 69 (4+)
Elektronegativität	1,65	1,96
Häufigkeit in der Erdkruste in %	0,012	0,0035
Säure-Base-Verhalten des Oxids	sauer/basisch	sauer/basisch
Struktur/Dichte	hexagonal 7,14	tetragonal/Diamant 7,30 w/5,76 g
<i>physikalische Eigenschaften</i>		
Isotope/Häufigkeit der Isotope in %	64/48,9 66/27,8 67/4,1 68/18,6 70/0,6	116/14,3 117/7,6 118/24,0 119/8,6 120/32,8 124/5,9
Schmelztemperatur in °C	419,6	232
Siedetemperatur in °C	907	2270
molare Schmelzwärme in kJ · mol ^{–1}	7,4	7,1
molare Verdampfungswärme in kJ · mol ^{–1}	115	296
spezifische Wärmekapazität in J · K ^{–1} · g ^{–1}	0,39	0,23 w
Wärmeleitfähigkeit bei 20 °C in W · m ^{–1} · K ^{–1}	121	63 w
linearer Ausdehnungskoeffizient in 10 ^{–6} K ^{–1}	26,3	27
spezifischer elektrischer Widerstand in 10 ^{–6} Ω · cm	5,5 (0)	10,4 (0)
Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes in 10 ^{–4} K ^{–1} (0 °C bis 100 °C)	42 (0)	46 (0)
magnetische Suszeptibilität 10 ^{–6}	–11,4 RT	+3,1 w RT
Supraleiter-Übergangstemperatur in K (p: unter Druck)	0,85	3,722

W Wolfram	Xe Xenon	Yb Ytterbium	Y Yttrium
74 183,85 [Xe] 4 f14 5 d4 6 s2 6, 5, 4, 3, 2 7,98 137 70(4+) 62(6+) 2,36 0,0064 schwach sauer kubisch raumzentriert 19,35	54 131,3 [Kr] 4 d10 5 s2 5 p6 – 12,13–21,2–32,1 131 – 2,4 · e ^{–9} – kubisch flächenzentriert 3,5 (1)	70 173,04 [Xe] 4 f14 5 d0 6 s2 3, 2 6,25–12,17–25,2 194 86(3+) 1,1 0,00025 schwach basisch kubisch flächenzentriert 6,96	39 88,907 [Kr] 4 d1 5 s2 3 6,38–12,2–20,5 178 92(3+) 1,22 0,0026 schwach basisch hexagonal 4,5
180/0,1 182/26,4 183/14,4 184/30,7 186/28,4 3410 5660 35 824 0,14 167 4,45 4,9 48 (0)	129/26,4 130/4,1 131/21,2 132/26,9 134/10,4 136/8,9 –111,9 –107,1 2,3 12,6 0,16 0,006 – – –	170/3,0 171/14,3 172/21,8 173/16,1 174/31,9 176/12,7 819 1193 9 155 0,14 – – 29 (25) 13 (25)	89/100 1523 3337 11 367 0,29 15 10,8 65 (25) 27,1 (25)
+ 59,0 (298) 0,015	–43,9 RT –	+ 249 (292) –	+ 2,15 (292) p 1,7 ... 2,5

Zr Zirkonium	Sg Seaborgium	Ns Nielsbohrium	Hs Hassium	Mt Meitnerium
40	106	107	108	109
91,22	(263)	(262)	(265)	(266)
[Kr] 4 d2 5 s2	[Rn] 5 f14 6 d4 7 s2	—	—	—
4	—	—	—	—
6,92–13,97–24,00	—	—	—	—
159 79(4+)	—	—	—	—
1,33	—	—	—	—
0,021	—	—	—	—
sauer/basisch	—	—	—	—
hexagonal 6,49	— —	— —	— —	— —
90/51,5 91/11,2	—	—	—	—
92/17,1 94/17,4 96/2,8	—	—	—	—
1852	—	—	—	—
4377	—	—	—	—
17	—	—	—	—
582	—	—	—	—
0,28	—	—	—	—
22	—	—	—	—
5,89	—	—	—	—
40 (0)	—	—	—	—
44 (0)	—	—	—	—
+122,0 (293)	—	—	—	—
0,65	—	—	—	—

Sachwortverzeichnis

A

- Abbe-Zahl 267
- Abbildung 265
- Abbildungsfehler 273
- Aberration, chromatische 274
- , sphärische 274
- Abfallwirtschaft 426, 427
- Abgas 423
- Abklingkoeffizient 220, 222
- Abkühlzeit 397
- Ableitung 56, 57, 58, 59, 60, 61
- Abluft 423
- Abreinigungsverfahren 424
- Abschnürbereich 495
- Absorption 290
- Absorptionsfläche, äquivalente 258
- Absorptionsgesetz 514
- Absorptionsgrad, Schall- 252
- Absorptionskoeffizient 506
- Absorptionskurve 452, 462
- Absorptionszahl 402
- Abtasttheorem, Shannonsches 354, 355
- Abwassertechnik 419, 422
- Ac 544
- AC/ACT 515
- ACSE 531
- Actinium 544
- ADA 540
- Adhäsion 195
- adiabat 366
- adiabatische Strömung 212
- Admittanz 347
- aerodynamisches Paradoxon 205
- Aeromechanik 190 ff.
- Aerostatik 190, 191
- Ag 557
- Aggregatzustand 387
- Ähnlichkeit 399
- Ähnlichkeitsgesetz 190, 191, 210
- Airysche Beugungsscheibchen 283
- Akkomodation 273
- Aktionsgesetz 143
- Aktivität 446, 448
- , optische 289
- Akustik 244 ff.
- , Bau- 257
- , Raum- 258
- , technische 259
- Akzeptanzwinkel 268
- Al 544
- algebraische Gleichung 44
- ALGOL 540
- allgemeine Gaskonstante 369
- allgemeine Zustandsgleichung 369, 370
- ALU 518
- Aluminium 544
- AM 356, 357
- Americum 545
- Amortisationszeit, energetische 411, 412
- Ampere 306
- Amplitude 215
- , Wellen- 236
- Amplituden-Resonanzfunktion 224
- Amplitudenmodulation 356, 357
- Amplitudenumtastung 357
- Amplitudenverhältnis 220, 221
- AND 516
- Änderung, Form- 177
- , Gestalt- 177
- Anergie 382, 410
- Anion 317
- Anode 317
- Anregung, hochfrequente 225, 226
- , Luftschall- 256
- , quasistatische 225, 226
- Antennengleichung 364
- Antimon 545
- aperiodischer Grenzfall 221, 222
- Apertur, numerische 268
- APL 540
- APT 540
- Äquipotentialfläche 172
- Äquipotentiallinie 296, 298
- Äquivalent, elektrochemisches 318
- Äquivalentdosis 450, 451
- äquivalente Absorptionsfläche 258
- äquivalenter Dauerschallpegel 259
- Ar 545
- Arbeit 94, 150, 163
- , Beschleunigungs- 163
- , elektrische 310
- , Gravitations- 172
- , Rotations- 163
- , Torsions- 163
- , Verschiebungs- 299
- , Volumenänderungs- 373
- Arcusfunktion 35
- Areafunktion 36, 37
- Argon 545
- arithmetische Reihe 88
- arithmetischer Mittelwert 112

- ARRAY 545
 Arsen 535
 AS 515
 ASCII-Kode 511, 512
 ASIC 522
 ASK 357
 Assembler 540
 Assoziativgesetz 514
 Astat 544
 Astigmatismus 274
 Atomabstand 476
 atomare Masseneinheit 430, 443
 Atombau 429
 Atomhülle 429, 430
 Atomkern 429
 Atommasse 367, 430
 –, relative, 430
 Atommodell 432, 433
 Atomphysik, 429 ff.
 Au 549
 Aufbereitung, Abwasser 422
 Aufenthaltswahrscheinlichkeit 432
 Aufheizzeit 397
 Auflösungsvermögen 283
 Aufnehmer, Schall- 245
 Auftrieb 190, 191, 194, 211
 Auge 273
 Augenblickswert 215
 Ausbreitung, Schall- 244
 Ausbreitungskonstante 363
 Ausdehnung, thermische 368
 Ausdruck, unbestimmter 64
 Ausfließen 204
 Ausgleichsgerade 122
 Ausschaltvorgang 348, 349
 Ausschleppen 419
 Austauschteilchen 467
 Austrittsarbeit 321
 Austrittspupille 273
 äußere Kraft 154
 Avogadro-Zahl 318, 369
 Axiom, Newtonsches 143 ff.
- B**
 B 546
 Ba 544
 Backward-Diode 492
 Bahnbeschleunigung 137
 Bahndrehimpulsquantenzahl 435
 Bahngeschwindigkeit 136
 Bahnkurve 138
 Bahnmagnetismus 436
 Balmer-Serie 434
 Bandbreite 353, 358
 Bändermodell 488
 Bandfilter 251
 Bandmittenfrequenz 252
 Barium 544
 barometrische Höhenformel 197, 198
 Baryon 467, 468, 469
 BASIC 534, 535, 536, 540
 Basisgröße 124, 125
 Basisschaltung 497
 Batterie 320, 321
 Bauakustik 259
 Bauch, Schwingungs- 243
 Bauelement, digitales 515
 –, Wechselstromkreis 343, 344, 345
 Bauelemente, Bildzeichen elektrischer 295
 Bauernfeindsches Prisma 269
 Be 545
 Bedingung, Gleichgewichts- 166
 Begrenzung, Schadstoff- 424
 Belag 240
 Belastung, Strahlen- 450, 451
 Belastungsfall 181
 Beleuchtungsstärke 281
 Belichtung 281
 Beobachtungsfehler 115
 Berkelium 545
 Bernoulli-Gleichung 191, 199, 200, 201, 207, 212
 Beryllium 545
 Beschleunigung 135
 –, Bahn- 137
 –, Schwerpunkts- 155
 –, Schwingung 217
 –, Winkel- 137
 Beschleunigungsarbeit 163
 Beschleunigungsvektor 139
 Besetzungsinversion 504
 bestimmtes Integral 65, 68
 Bestrahlungsstärke 278
 Beugung 281, 283, 284, 285
 Bewertung, biologische 452
 Bewertungsfaktor 257, 452
 Bewertungskurve, Schall- 257
 Bezugssystem, bewegtes 148
 Bezugsweite 274
 Bi 545
 Biegemoment 183
 Biegung 182, 183
 Bilanz, ökologische 414
 Bild 265
 Bildpunkt 265
 Bildzeichen elektrischer Bauelemente 295
 Bindung, kovalente 439
 Bindungsarten 475
 Binnendruck 383
 binomische Reihe 91
 biologische Bewertung 452
 biologische Halbwertszeit 458
 Biot-Savartsches Gesetz 326
 Biot-Zahl 399
 bipolarer Transistor 489, 493
 Bismut 545
 Bk 545

Blatt, Cartesisches 42
Blei 545
Blende 273
Blendenzahl 279
Blindanteil 344
Blindfaktor 347
Blindleistung 346
Bodenwelle 363
Bohrsches Postulat 433
Boltzmann-Konstante 369
Boolesches Gesetz 514
Bor 546
Bottom 468
Boyle-Mariottesches Gesetz 190, 191, 197, 376
Br 546
Brackett-Serie 434
Bravais-Gitter 476
Brechung 267
Brechungsgesetz, Snelliussches 267
Brechungsindex 239
Brechzahl 267
Bremsstrahlung 438
Brennpunkt 266
Brennwert 412
Brewster-Winkel 286
Bridge 532
Brillouin-Zone 481, 482
Brinell-Härteprüfung 189
Brom 546
Bruchdehnung 180
Bruchmechanik 186
Brücke, Thomson- 317
–, Wheatston- 317
Brückenschaltung 317
Burger-Modell 481
Bussystem 522, 523, 527

C

C 540, 550
Ca 547
Cadmium 547
Caesium 547
Calcium 547
Californium 547
Candela 280
Carnot-Faktor 382
Carnot-Prozeß 375, 377
Cartesisches Blatt 42
Cassinische Kurve 43
Cd 547
Ce 546
Celsius 368
Centronics-Schnittstelle 524, 525
Cer 546
Cf 547
Charakteristik, Resonator- 253
Charles-Gesetz 376
Charme 468

chemisches Element 543 ff.
Chlor 546
Chrom 547
chromatische Aberration 274
CICS-Rechner 518
CIM 530
Cl 546
Clausius-Rankine-Prozeß 380
Cm 547
CMOS 515
Co 547
Cobalt 547
COBOL 540
Compoundkern 463
Coriolis-Kraft 149, 150
Coulombkraft 298
CPU 518
Cr 547
Cramersche Regel 48, 49
Crestfaktor 357
Cs 563
CSMA/CA 529, 530
CSMA/CD 529, 530
CTR (Current Transfer Ration) 509
Cu 551
Curie-Temperatur 331
Curium 547

D

d'Alembertsches Prinzip 149
Dachkantprisma 269
Dämmmaß, Luftschall- 259
Dampf 390
Dampfdiffusion 405
Dampfdruckkurve 388, 389, 390
Dampfkraftanlage 380
Dampfübergangswiderstand 406
Dämpfungsfrequenz 222
Dämpfungsgrad 220, 222
Dämpfungskoeffizient, Schallabsorption 248
Dämpfungsmaß 359, 360, 364
data base 539
Datei 539
Dateityp 539
Daten, Mond- 176
–, Planeten 174
–, Satelliten- 175
Datenbanktyp 539
Datenfeld 539
Datenflußplan 537, 542
Datenstruktur 537, 539
Datenträger 537, 538
Datentyp 539
DATEX-L 529
DATEX-P 529
Dauer, Einschwing- 225
Dauermagnetsystem 334
Dauerschallpegel, äquivalenter 257

- Dauerschwingfestigkeit 187
 - De Morgan-Gesetz 514
 - de-Broglie-Wellenlänge 291, 293
 - Debye-Temperatur 394, 482, 483
 - Dehnung 178, 182
 - Deklination 325
 - Dekrement, logarithmisches 220, 221
 - Demodulation 356
 - Deponie, Abfall- 427
 - desublimieren 386
 - Detektor, Halbleiter- 506
 - Determinante 50, 51, 52, 54, 55
 - Deuterium-Zyklus 466
 - Dezimalzahl 510
 - Diac 491
 - diamagnetisch 332
 - Dichroismus 288
 - Dichte 143, 144
 - , Strahl- 278
 - dichteste Kugelpackung 476, 478
 - dicke Linse 271
 - Diesel-Prozeß 379
 - Differentialgleichung 99 ff.
 - , exakte 103
 - , gewöhnliche 99 ff.1
 - , lineare 100, 104
 - , separierbare 101
 - , ungedämpfte, harmonische Schwingung 232, 234
 - Differentialquotient 56
 - Differentialrechnung 56 ff.
 - Differentiation, mehrere Variable 61
 - Differentiationsregel 56, 57, 58, 59
 - differentieller Widerstand 311
 - Diffusion 213, 379
 - Diffusionsspannung 507
 - digitales Bauelement 515
 - Digitaltechnik 510 ff.
 - Diode 491, 492
 - , Laser- 504
 - , Lumineszenz- 504
 - Diodenkennlinie 490
 - Dipolmoment, magnetisches 330
 - Dispersion 241, 482
 - Dissipation 248
 - Distributivgesetz 514
 - DMA 518
 - Doppelbrechung 288
 - , Spannungs- 288
 - doppelelastische Lagerung 261
 - Doppelintegral 84, 85
 - Doppler-Effekt des Lichtes 474
 - Doppler-Effekt 241
 - Dosisgröße 450 ff.
 - Dosiskonstante 462
 - Dosismeßverfahren 452, 457
 - Dotierstoffe 486
 - Drain 494
 - Drainschaltung 498
 - Drehbewegung 160 ff.
 - Drehfederkonstante 163
 - Drehimpuls 161, 167
 - Drehimpulserhaltungssatz 162, 166
 - Drehmoment 160
 - Drehmomentenstoß 162
 - Dreieck-Stern-Umwandlung 313
 - Dreieck-Sternschaltung 350, 351
 - Drosselgerät 203
 - Druck 181, 192
 - , Binnen- 383
 - , dynamischer 201, 202
 - , Gas- 370
 - , geodätischer 201, 202
 - , hydrostatischer 193
 - , Kolben- 190, 191, 193
 - , kritischer 385
 - , osmotischer 213
 - , Schall- 246
 - , Schwere- 190, 191, 193, 197
 - , statischer 201, 202
 - Druckeinheit 133
 - Druckenergie 201
 - Drucksonde 202
 - Dual-Port-RAM 517
 - Dualismus Teile-Welle 290, 431
 - Dualkode 357
 - Dualzahl 512
 - Dulong-Petitische Regel 482, 483
 - Dulong-Petitsches Gesetz 374
 - dünne Linse 270
 - Durchbruchbereich 495
 - Durchflußzahl 203
 - Durchflutungsgesetz 326, 333
 - Durchgang, Schall- 244
 - Duromer 479
 - Dy 547
 - Dynamik 143 ff.
 - dynamische Viskosität 206
 - dynamischer Druck 201, 202
 - dynamisches Kräftegleichgewicht 149
 - DYNAMO 540
 - Dysprosium 547
- E**
- E-Reihen 3
 - Ebene 13 ff.
 - ebullioskopische Konstante 388
 - ECL 515
 - EEPROM 517
 - Effekt, elektrooptischer 289
 - , Faraday- 289, 290
 - , Kerr- 289
 - , Pockels- 289
 - , Skin- 337
 - effektive Leistung 152
 - Effektivwert 341
 - Eigenfrequenz 243

- Eigenleitung 487
- Eigenschwingung 243
- Eindringtiefe 337
- einfachelastische Lagerung 261
- Einlagerung 477
- Einmassesystem, viskoelastisches 261
- Einmoden-Laser 505
- Einsatz, Energie 408
- Einschaltvorgang 348, 349
- Einschlußparameter 466
- Einschwingdauer 225
- Einseitenbandmodulation 356, 357
- Einstein-Temperatur 482, 483
- Einsteinium 548
- Einstrahlzahl 403
- Eintrittspupille 273
- Eisen 548
- elastische Energie 188
 - Kraft 146
 - Lagerung 260
 - Welle 236, 238
- elastischer Stoß 155, 157, 158
- Elastizitätsmodul 178
- Elastomer 479
- elektrische Arbeit 310
 - Energiedichte 306
 - Feldkonstante 300
 - Feldlinien 296
 - Feldstärke 237, 296, 297
 - Flußdichte 297, 300
 - Kraft 298
 - Leistung 310
 - Momentanleistung 346
 - Polarisierung 300
 - Spannung 316
 - Stromstärke, Definition 125
- elektrischer Widerstand, spezifischer 307, 310
- elektrisches Feld 296
 - Netzwerk 311
 - Potential 297, 299
- elektroakustische Wandler 250
- elektrochemische Spannungsreihe 318, 319
- elektrochemisches Äquivalent 318
- Elektrode, Standardwasserstoff- 318
- Elektrodynamik, relativistische 472, 473
- Elektrofilter 425
- Elektrolyse 318
- Elektrolyt 317
- Elektrolytkonzentration 421
- Elektromagnet, Tragkraft 336
- elektromagnetische Schwingung 218, 226, 352
 - Welle 238, 242, 364
- elektromagnetischer Schwingkreis 351
- Elektromagnetismus 325
- Elektromotor 349
- Elektron 429
- Elektronen-Konfiguration 435, 437
- Elektroneneinfang (EC) 445
- Elektronenemission 321
- Elektronengas, freies 485
 - , zweidimensionales 441
- Elektronenmikroskop 293
- elektrooptischer Effekt 289
- Elementarteilchen 466 ff.
- Elementarzelle 476
- Ellipse 20
- Eluat 422
- EM 356, 357
- Emission 423
 - , Feld- 322
 - , Foto- 322
 - , Sekundärelektronen- 322
 - , spontane 290
 - , stimulierte 290
 - , Strahlungs- 504
 - , thermische 321
- Emissionsgrad 400
- Emissionszahl 400
- Emitterschaltung 496
- Empfang, Heterodyn- 365
- Empfänger 362, 365
 - , Geradeaus- 365
 - , Überlagerungs- 365
- Empfindung, Schall- 244, 257
- energetische Amortisationszeit 411, 412
- Energie 152, 410
 - , Druck- 201
 - , elastische 188
 - , Fermi- 486
 - , fossile 407
 - , innere 372
 - , Ionisations- 324, 439
 - , Kern- 464
 - , Nutz- 408
 - , Oberflächen- 196
 - , Photonen- 290
 - , plastische Verformungs- 188
 - , potentielle 163, 166, 172
 - , Primär- 407
 - , regenerative 409
 - , Rotations-, kinetische 164, 167
 - , Schwingungs- 216, 219, 238
 - , Sekundär- 407
 - , Strahlungs- 278
 - , thermische 370
- Energieband 485
- Energiediagramm 435, 436, 437, 438
- Energiedichte 238, 412, 413
 - , elektrische 306
 - , magnetische 336
 - , Schallwelle 248
- Energiedosis 450, 451
- Energieeinheit 133
- Energieeinsatz 408
- Energiefluß 408
- Energiekennzahlen 415

- Energiequant 430
- Energierisiko 408
- Energiesatz der Mechanik 152 ff., 164
- Energiespeicher 412, 413
- Energietechnik 407 ff.
- Energieträger 407
- Energieumwandlung 392
- Energieverbrauch 407, 409, 413
- Energieveredlung 408
- Energievorrat 407
- Energiewandler 410
- Enthalpie 373, 386, 387
- Entmagnetisierungsfaktor 332, 335
- Entmagnetisierungskurve 333
- Entropie 380, 381, 382
- , Nachricht 355
- Entscheidungstabelle 542
- Entsorgen 427
- EOR 539
- Epizykloide 39
- EPROM 517
- Erbium 549
- Erdbeschleunigung 171
- Erdmagnetfeld 325
- Erhaltungssatz, Drehimpuls- 162, 164
- , Elementarteilchen 466
- , Energie- 153, 164
- , Impuls- 155, 164
- , Massen- 398
- Ericsson-Prozeß 380
- Erntefaktor 411, 412
- Erreger 223
- Erregung, magnetische 325 ff.
- erstarren 386
- Erwartungswert 110, 112
- erzwungene elektrische Schwingung 226
- Es 548
- Ethernet 529
- Eu 549
- Euler-Gleichung 398
- Europium 549
- eV 322
- Evolvente, Kreis- 38
- EXAPT 540
- exergetischer Wirkungsgrad 382
- Exergie 382, 410
- EXOR 516
- Expansionszahl 203
- Exponentialfunktion 33
- extensive Größe 367
- Extremwert, Funktion 63

- F**
- F 549
- Fabry-Perot-Interferometer 504
- Fading 363
- Faktor, Bewertungs- 257
- , Hallradius- 259
- , relativistischer 470
- Fallbeschleunigung 171
- Faraday-Effekt 289
- Faradaysches Gesetz 318
- Farben dünner Plättchen 282
- FAST 515
- FDDI 529, 530
- Fe 548
- Feder-Masse-System 218
- Federkonstante 146
- Federkraft 146, 151
- Fehler, Abbildungs- 273
- , Größt- 112
- Fehlerfortpflanzung 114
- Fehlerrechnung 111 ff.
- Fehlersumme 112
- Feld, elektrisches 296
- , magnetisches 325 ff.
- Feldeffekt-Transistor 494
- Feldemission 322
- Feldkonstante, elektrische 300
- , magnetische 326
- Feldlinien, elektrische 239, 296, 297
- Feldstärke, Gravitations- 171
- , magnetische 239, 325 ff.
- , Transport- 200
- Feldstecher 276
- Fermi-Dirac-Verteilung 486
- Fermi-Energie 486
- Fermi-Geschwindigkeit 486
- Fermium 549
- Fernpunkt 274
- Fernrohr 276
- Fernsehröhre 325
- Fernsprechen 354
- ferromagnetisch 332
- Ferromagnetismus 331
- Festigkeit, Wechsel- 187
- Festkörper, makromolekularer 479
- Festkörperphysik 475 ff.
- Festkörperreibung 147
- FET-Transistor 493
- Feuchtegrad 391
- Fibernet 529
- Ficksches Gesetz 405
- file 539
- Filter, Elektro- 425
- Filtration 425
- Fizeau-Streifen 282
- Flachbandkabel 521
- Flächeneinheit 131
- Flächenfehler 477
- Flächengeschwindigkeit 173
- Flächeninhalt 24
- Flächenpressung 180
- Flächenträgheitsmoment 82, 183, 184, 185
- Fließspülen 420
- FLOPS 518

Fluor 549
 Flüssigkeitspendel 218
 Flüssigkeitsreibung 147
 Flüssigkristall 289
 Flußdichte, elektrische 297, 300
 →, magnetische 326
 →, Transport- 200
 Flußgleichung 334
 FM 356, 357
 Fm 549
 Formänderung 177
 Formfaktor 341
 Formzahl 186, 187
 FORTH 540
 FORTRAN 535, 535, 536, 540
 fossile Energie 407
 Foto-Darlington 509
 Foto-Diode 507
 Foto-Multiplier 322
 Foto-Schmitt-Trigger 509
 Foto-Thyristor 509
 Foto-Transistor 508
 Foto-Triac 509
 Fotoapparat 276
 Fotoemission 322
 Fotostrom 507
 Fokowiderstand 309, 506
 Fourier-Analyse 231, 232
 Fourier-Gesetz des Wärmetransports 392, 394, 398
 Fourier-Integral 353
 Fourier-Koeffizienten 231, 233
 Fourier-Reihe 93 ff.
 Fourier-Synthese 231
 Fourier-Transformation 96 ff., 353
 Fourier-Zahl 399
 Francium 548
 Fraunhoferlinie 267
 freie Knicklänge 185
 freies Elektronengas 485
 Freiheitsgrad 135, 164, 370, 374
 Freimachen von Körpern 166
 Freiraumdämpfungsmaß 364
 Freistrahlergeräusch 262
 Fremdstörstellen 477
 Frenzel-Paar 477
 Frequenz 214
 →, Bandmitten- 252
 →, Dämpfungs- 222
 →, Eigen- 243
 →, Grenz- 252, 353
 →, Schall- 244
 →, Spuranpassungs- 245
 Frequenzfunktion 96 ff.
 Frequenzmodulation 356, 357
 Frequenzumtastung 357
 Froude-Zahl 211, 399
 FSK 357
 FTAM 531

Fundamentalschwingung 235
 Funktion 3. Grades 30
 Funktion, Arcus- 35
 →, Area- 36, 37
 →, Exponential- 33
 →, Extremwert 63
 →, Frequenz- 96 ff.
 →, ganze rationale 63
 →, gebrochen rationale 63
 →, Hyperbel- 32
 →, implizite 59
 →, lineare 29
 →, Logarithmus- 34
 →, Parameterform 60
 →, Polarkoordinaten 60
 →, Potenz- 31, 32
 →, quadratische 30
 →, trigonometrische 10 ff., 34
 →, Übertragungs- 354
 →, Verteilungs- 109
 →, Wurzel- 32, 33
 →, Zeit- 96 ff.
 →, zyklometrische 92
 Fusion 466

G

Ga 549
 Gadolinium 548
 Galilei-Transformation 148
 Galilei-Zahl 399
 Gallium 549
 galvanische Elemente 318
 Galvanisieren 317
 GAN 529
 Gangunterschied 242, 281
 ganze rationale Funktion 63
 ganze Zahl 4
 Gas, ideales 212
 →, reales 383 ff.
 Gasdruck 370
 Gasentladung 324
 Gaskonstante 369
 Gastheorie, kinetische 370 ff.
 Gasturbine 380
 Gasverflüssigung 385
 Gate-Array 522
 Gateschaltung 498
 Gateway 532
 Gauß-Verteilung 111
 Gaußsches Verfahren 49
 Gay-Lussacsches Gesetz 369, 376
 Gd 548
 Ge 549
 gebrochen rationale Funktion 63
 gedämpfte elektromagnetische Schwingung 352
 Gegenstandspunkt 265
 gekoppelte Schwingung 235
 Generator 349

- geodätischer Druck 201, 202
 - geometrische Reihe 88
 - Gerade 16, 17
 - Geradeausempfänger 365
 - Geräusch, Strömungs- 277
 - Germanium 565
 - Geschwindigkeit 135
 - , Bahn- 136
 - , Gruppen- 241
 - , kosmische 173
 - , Phasen- 240
 - , Schall- 244, 246
 - , Schwerpunkts- 154
 - , Schwingung 217
 - , Winkel- 136
 - Geschwindigkeitseinheit 1134
 - Geschwindigkeitsvektor 138
 - Geschwindigkeitsverteilung, Maxwellsche 373
 - Gesetz von actio und reactio 143
 - Gesetz von Malus 287
 - Gesetz, Ähnlichkeits- 190, 191, 210
 - , Biot-Savartsches 326
 - , Boolesches 214
 - , Boyle-Mariotte 190, 1191, 197, 376
 - , Charles- 376
 - , de Morgan 514
 - , Dulong-Petitsches 374
 - , Durchflutungs- 326, 333
 - , Faradaysches 318
 - , Ficksches- 405
 - , Fouriersches des Wärmetransports 390, 394, 396
 - , Gay-Lussacsches 369, 376
 - , Gravitations- 171
 - , Hookesches 178
 - , Induktions- 335
 - , Keplersches 170, 174
 - , Kirchhoffsches 400
 - , Ohmsches 311
 - , Stefan-Boltzmann 402
 - , Wiedemann-Franzsches 394
 - Gestaltänderung 177
 - Gewichtskraft 145, 151
 - Gibbssche Phasenregel 390
 - GIPS 518
 - Gitter 476
 - Gitterfehler 477, 478
 - Gitterwelle 481
 - Gleichgewicht, thermodynamisches 367, 386
 - Gleichgewichtsbedingung 166
 - Gleichgewichtsfall 166
 - Gleichgewichtszustand 366
 - Gleichrichter-Diode 491
 - Gleichstromkreis 306 ff.
 - Gleichung n-ten Grades 45
 - Gleichung, algebraische 44
 - , Bernoulli 191, 199, 200, 201, 207, 213
 - , Kontinuitäts- 199, 200, 201
 - , kubische 44
 - , Navier-Stokes 190, 191
 - , quadratische 44
 - , Richardsonsche 321
 - Gleichungssystem, lineares 44, 45
 - Gleichwert 341
 - Gleitreibung 147
 - Glimmentladung 324
 - Gluon 467
 - Gold 549
 - GPSS 540
 - Gradient 200
 - Gradientenfaser 268
 - Graetz-Zahl 399
 - Grashof-Zahl 399
 - grauer Körper 402
 - Gravitation 170 ff.
 - Graviton 467
 - Gray 451
 - Gray-Kode 357, 511, 513
 - Grenzfall, aperiodischer 221, 222
 - Grenzfrequenz 252, 353, 509
 - , Spuranpassungs- 256
 - Grenzschicht 208
 - Grenzspannung 186
 - Grenzwinkel der Totalreflexion 267
 - Größe, extensive 367
 - , intensive 367
 - , molare 367
 - , physikalische 126 ff.
 - , spektrale, 277
 - , spezifische 367
 - , strahlungsphysikalische 277
 - Größtfehler 114
 - Grundgesetz der Mechanik, Rotation 162
 - , Translation 143
 - Grundgesetz, hydrodynamisches 247
 - Grundintegral, 67 ff.
 - Grundstromkreis 313, 314
 - Gruppengeschwindigkeit 243, 482
 - Gruppenindex 241
 - Güte 220, 222
 - Gütegrad 411
- H**
- H 560
 - Hadron 468, 469
 - Hadrion 467
 - Hafnium 549
 - Haftreibung 147
 - Hagen-Poiseuillesches Gesetz 207
 - Hahnium/Nielsborium 550
 - Halbleiter 485 ff.
 - Halbleiter-Detektor 506
 - Halbleiter-Laser 506
 - Halbleiter-Sender 503 ff.
 - Halbschwingungsmittelwert 341
 - Halbwertsbreite 112
 - Halbwertszeit 446

–, biologische 458
 Hall-Effekt 329
 –, Quanten- 307
 Hall-Generator 330
 Hall-Koeffizient 330
 Hall-Sonde 330
 Hall-Spannung 329, 441
 Hall-Widerstand 441
 Hallradius, Schall- 259
 Hallradiusfaktor 259
 Hangabtriebskraft 145
 HaNs 550
 harmonische Welle 236
 Härteprüfung 189
 Häufigkeit, relative 111
 Hauptebe 272
 Hauptquantenzahl 435
 Hauptsatz, der Thermodynamik 367, 371
 Hauptschluß 315
 Hauptstromfiltration 425
 HC(T) 515
 He 550
 Heißeiter 309
 Heißeitmotor 379
 Heizungsnutzungsgrad 416
 Heizwärmebedarf 414
 Heizwert 409
 Helium 550
 Hellempfindlichkeitsgrad 280
 Helmholtz-Resonator 253
 Heterodyn-Empfang 365
 heteropolare Bindung 475
 Hexadezimalzahl 510
 hexagonales Gitter 476
 Hf 549
 Hg 555
 Hiebtton 262
 Histogramm 111
 Ho 550
 hochfrequente Anregung 225, 226
 Höhenformel, barometrische 197, 198
 Höhensatz 22
 Hohlraumstrahler 279
 Hohlspiegel 266
 Holmium 551
 Holografie 286, 287
 Hookesches Gesetz 146, 178
 Hörbereich 245
 Hubble-Parameter 474
 hybrider Speicher 517
 hydraulische Presse 193
 hydrodynamisches Grundgesetz 247
 Hydromechanik 190 ff.
 Hydrostatik 190, 191
 hydrostatische Waage 195
 hydrostatischer Druck 193
 Hyperbel 20, 35, 36
 Hyperschall 245

Hypozykloide 40
 Hysterese, magnetische 332
 –, mechanische 188

I

I 551
 I/O 518
 ideale Gase 212
 IEC-Bus 524, 525
 IEEE-488 524
 imaginäre Zahl 2, 6
 Immission 423
 Impedanz 347
 implizite Funktion 59
 Impuls 153 ff.
 –, Dreh- 161, 167
 Impulserhaltungssatz 155, 164
 Impulssatz 154
 In 551
 indifferentes Gleichgewicht 166
 Indium 551
 individuelle Gaskonstante 369
 Induktion, magnetische 326, 331
 –, Sättigungs- 333
 Induktionsgesetz 335
 Induktivität 336
 inelastischer Stoß 155, 157, 158
 Inertialsystem 470
 Influenz 300
 Informatik 510 ff.
 Informationsfluß 355
 Informationstheorie 353
 Infrarotspektrum 440
 Infraschall 245
 Inklination 325
 Innenpolmaschine 349
 innere Energie 370
 – Kraft 154
 innerer Leitwert 313
 – Widerstand 313
 Integral, bestimmtes 65
 –, Doppel- 84, 85
 –, Grund- 67, 68, 69
 –, Linien- 83
 –, Partialbruchzerlegung 71
 –, Substitution 70
 –, uneigentliches 68
 Integralrechnung 64 ff.
 Integration, Produkt- 69
 Integrationsregel 69 ff.
 Intensität 238
 –, Schall- 247, 248
 Intensitätsverlauf 284
 intensive Größe 367
 Interferenz 242, 281
 Interferenzen gleicher Dicke 282
 Interferenzmikroskop 283
 Interferometer 283

Intermodulation 361
 Inverse 52
 Inversionstemperatur 385
 Inverter 516
 Iod 551
 Ionenaustauscher 422
 Ionenbindung 475
 Ionendosis 450, 451
 Ionisationsenergie 324, 439
 Ionisierungskoeffizient 324
 Ir 551
 Iridium 551
 irrationale Zahl 4
 irreversibler Prozeß 378
 isentrope Schallausbreitung 244
 Isentrope 375, 376
 Isentropenexponent 244, 374
 isobare Wärmekapazität 372
 Isobare 375, 376, 430
 isochore Wärmekapazität 372
 Isochore 375, 376
 Isokline 288
 Isolator 485
 Isolierwirkungsgrad 261
 isomere Umwandlung 446
 Isospin 467, 468
 Isotherme 375, 376
 Isoton 430
 Isotop 430
 Iterationsverfahren (Nullstellen) 45

J

Jackson Strukturierte Programmierung 542
 Joule-Prozeß 380
 Joule-Thomson-Effekt 385

K

K 550
 Kabel, Flachband- 521
 –, Koaxial- 521
 Kalium 550
 Kältemaschine 377, 378
 Kältemischung 387
 Kaltleiter 309
 Kanalkapazität 355
 Kapazität 300 ff.
 Kapazitäts-Diode 490
 Kapillarwirkung 196, 197
 Kapitza-Zahl 399
 Kaskadenspülung 421
 Katalysator 426
 Kathetensatz 22
 Kation 317
 Katode 317
 Katodenstrahlen 325
 Kavitation 262
 Kegel, Machscher- 242
 Kegelschnitt, Polargleichung 173

Kelvin 366
 Kennzahlen, Energie- 415
 Keplersches Gesetz 170, 174
 Kernart 429
 Kernenergie 464
 Kernfusion 466
 Kernphysik 443 ff.
 Kernreaktion 463, 464, 465
 Kernspaltung 463, 464
 Kernspinnmagnetismus 437
 Kerr-Effekt 289
 Kettenlinie 41
 Kettenregel 57
 Kinematik 135 ff.
 kinematische Viskosität 206
 kinetische Gastheorie 370 ff.
 – Rotationsenergie 164, 167
 Kirchhoffsches Gesetz 402
 Kirchhoffsche Regel 311 ff.
 klassische Mechanik 143 ff.
 Klimatechnik 391
 Klirrfaktor 361
 Knicklänge, freie 185
 Knickspannung 185, 186
 Knickung 185
 Knoten, Schwingungs- 243
 Knotenregel 311
 Koaxialkabel 521
 Kode 510 ff.
 –, Dual- 357
 –, Gray- 357
 Koeffizient, Fourier- 231, 233
 –, Hall- 330
 –, Ionisierungs- 324
 –, Längenausdehnungs- 368
 –, Raumausdehnungs- 369
 –, Volumenausdehnungs- 192
 –, Wärmeeindring- 392
 Koexistenzgebiet 383, 384, 390
 Kohärenz 281
 Kohäsion 195
 Kohlenstoff 550
 Kohlenstoff-Stickstoff-Zyklus 466
 Kohlenwasserstoff 424, 425
 Kolbendruck 190, 191, 193
 Kollektorschaltung 497
 Koma 274
 Kombinatorik 107 ff.
 Kommutativgesetz 514
 komplexe Spannung 341
 – Zahl 6 ff.
 komplexer Leitwert 326
 – Strom 325
 – Widerstand 342
 – Zeiger 342
 Kompressibilität 179, 192
 Kompression 179
 Kompressionsmodul 179

Kompressionsverlust 203
 Konchoide des Nikomedes 43
 Kondensation 425
 Kondensator 300 ff.
 kondensieren 386
 Konduktanz 347
 Konkavlinse 271
 Konkavspiegel 266
 Konstante, Boltzmann- 369
 –, ebullioskopische 388
 –, Richardson- 321
 –, Verdettsche 290
 Kontakttemperatur 396
 Kontinuitätsgleichung 199, 200, 201, 398
 Konvektion 392, 397 ff.
 konvergente Reihe 89
 Konvexlinse 270
 Konvexspiegel 266
 Konzentration, Elektrolyt- 421
 Koordinaten, Schwerpunkts- 166
 Koordinatensystem 13, 14
 Koppel-Baustein 532
 Korngrenze 477
 Körper, freimachen 166
 –, starrer 155, 164 ff.
 Körperschall 260
 Körperschall-Isolierwirkungsgrad 260
 Korrelationsanalyse 122, 123
 Kosinussatz 23
 kosmische Geschwindigkeit 173
 kosmologische Rotverschiebung 474
 kovalente Bindung 439, 475
 Kovolumen 383
 Kr 551
 Kraft 144
 –, äußere 154
 –, Coriolis- 149, 150
 –, Coulomb- 298
 –, elastische 146
 –, elektrische 298
 –, Feder- 146, 151
 –, Gewichts- 1459, 151
 –, Gravitations- 171
 –, Hangabtriebs- 145
 –, innere 154
 –, Lorentz- 298, 328
 –, magnetische 298, 325
 –, Normal- 145
 –, Reibungs- 147, 151, 220
 –, Schwer- 145, 151
 –, Trägheits- 148
 –, Zentrifugal 149
 –, Zentripetal- 145
 Kraft-Wärme-Kopplung 411
 Kraftdichte 199
 Kräfte-diagramm 145
 Kräftegleichgewicht 144, 149
 Krafteinheit 132

Kräftepaar 166
 Kräftezerlegung 145
 Kreis 19
 Kreisbewegung 140
 Kreisel 167, 169
 Kreiselpräzession 169
 Kreisevolvente 38
 Kreisfrequenz 215
 Kreisprozeß 366, 375 ff.
 Kriechen 187
 Kriechfall 221
 Kristallbindung 475
 Kristallrichtung 478
 Kristallstrukturen 476
 Kristallsystem 476
 kritische magnetische Flußdichte 499
 – Stromdichte 500
 – Temperatur 385, 490
 kritischer Druck 385
 – Punkt 384
 Krypton 551
 Kubatur 78
 kubische Gleichung 44
 kubisches Gitter 476
 Kugelkoordinaten 14
 Kugelpackung, dichteste 476, 478
 Kunststoff 479
 Kupfer 551
 Kurchatovium/Rutherfordium 551
 KuRf 551
 Kurvenanpassung 114 ff.
 kurzsichtig 274

L

La 551
 labiles Gleichgewicht 166
 Ladung 294
 –, spezifische 328
 Ladungsträgerinjektion 324
 Ladungstransport, im Vakuum 321 ff.
 –, in Gasen 321, 324 ff.
 Ladungsverschiebung 300
 Lageplan 165
 Lagerung, elastische 260, 261
 Lambda-Sonde 426
 Lambert-Strahler 277
 laminare Grenzschicht 209
 – Strömung 206, 398
 LAN 529
 Länge, Definition 125
 –, Kohärenz- 281
 Längenausdehnungskoeffizient 368
 Längeneinheit 130
 Längenkontraktion 471, 472
 Längswelle 236
 Lanthan 551
 Laplace-Gleichung 200, 394
 Laser 290, 504 ff.

Laser-Diode 504
 Laserbedingung 291
 Lautheit 257
 Lautsprecher 249
 Lautstärke 256
 Lawrencium 552
 LDR 309, 506
 Lebensdauer, mittlere 446
 LED 504
 Leerlaufspannung 507
 Leerstellen 477
 Leistung 150, 152, 163
 –, effektive 152
 –, elektrische 310
 –, Nenn- 152
 –, Rausch- 354, 362
 –, Schall- 247, 248
 –, Schein- 346
 –, Signal- 354
 –, Strahlungs- 278
 –, Strömungs- 190, 191
 –, Wirk- 346
 Leistungs, Blind- 346
 Leistungsband 485
 Leistungseinheit 133
 Leistungsfaktor 347
 Leistungspegel 360
 Leistungsziffer 378
 Leitungsgleichung 363
 Leitwert 307
 –, innerer 313
 –, komplexer 342
 Lepton 468, 469
 Leuchtbereich 324
 Leuchtdichte 281
 Lewis-Zahl 399
 Li 552
 Lichtausstrahlung, spezifische 281
 Lichtmenge 281
 Lichtquant 290, 322
 Lichtstärke 280, 281
 –, Definition 125
 Lichtstrahl 264, 265
 Lichtstrom 280, 281
 Lichtwellenleiter 268
 LIDIA 540
 Linde-Verfahren 385
 lineare Funktion 29
 Linienfehler 477
 Linienintegral 83
 Linse 271, 272
 Linsensystem 273
 LISP 540
 Lissajous-Figur 233, 234
 Lithium 552
 Lochblende 283
 logarithmisches Dekrement 220, 221
 Logarithmus 9, 10, 34

Logik, mathematische 2 ff.
 Logikfamilie 515
 logische Verknüpfung 514
 logischer Operator 514
 logisches Schaltzeichen 516
 Longitudinalwelle 236
 Lorentz-Kraft 298, 328
 Lorentz-Transformation 470
 Lösung 213
 Lr 552
 LSTTL 515
 Lu 553
 Luft, Reinhaltung 423, 424
 Luftfeuchtigkeit 390, 391
 Luftreibung 147
 Luftschall-Dämmmaß 259
 Luftschallanregung 266
 Lumineszenz-Dioden 504
 Lutetium 553
 Lyman-Serie 434

M

Machscher Kegel 242
 MacLaurinsche Reihe 91
 magische Zahl 444
 Magnan 553
 Magnesium 553
 Magnetfeld, Erd- 325
 magnetische Energiedichte 336
 – Erregung 325 ff.
 – Feldkonstante 326
 – Feldstärke 239, 325 ff.
 – Flußdichte 326
 – Flußdichte, kritische 500
 – Hysterese 332
 – Induktion 326, 331
 – Kraft 298, 325
 – Polarisation 332
 – Polstärke 330
 – Quantenzahl 435
 – Spannung 326
 – Suszeptibilität 331
 magnetischer Nordpol 325
 magnetisches Dipolmoment 330
 – Feld 325 ff.
 – Moment 330
 Magnetisierung 332
 Magnetismus, Bahn- 436
 –, Elektro- 325
 –, Kernspin- 437
 –, Spin- 437
 Magnetorotation 290
 Magnetwerkstoff 334
 Magnus-Effekt 205
 makromolekularer Festkörper 479
 MAP 528, 530, 531
 Maschenregel 312
 Maschine, Innenpol- 349

- Masse, Atom- 367, 430
–, Definition 125
–, Molekül- 367
Masseneinheit, atomare 430, 443
Massenerhaltungssatz 398
Massenmittelpunkt 154
Massenstrom 201
Massenträgheitsmoment 81, 82, 167, 168, 216
Massentransport 392
Massenzahl 429
Massenzunahme, relativistische 472
Materiewelle 293
mathematisches Pendel 216, 218
– Zeichen 1, 2
Matrix 50
Matrizenrechnung 50 ff.
maximale Reichweite 452
Maxwell-Modell 480
Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung 371
Md 553
Mechanik, Bruch- 186
Mechanik, klassische 143 ff.
–, Strömungs- 199
mechanische Hysterese 188
mehrere Variable, Differentiation 61
Meißner-Ochselfeld-Effekt 499
Membrantrennung 425
Mendelevium 553
Meson 468, 469
Messung, Spannungs- 315, 316
–, Strom- 315, 316
Meßbereichserweiterung 315, 316
Meßunsicherheit 113
Metall 485 ff.
metallische Bindung 475
Mg 553
MHS 531
Microstrip-Leitung 521
Mikrofon 249
Mikroprozessor 518
Mikroskop 276
–, Elektronen- 293
–, Interferenz- 283
Millerscher Index 476, 478
MIMD 518
Mindestfrequenz 322
MIPS 518
Mittelwertsatz 62
mittlere Lebensdauer 446
MMS 528, 530, 531
Mn 553
Mo 552
Mode 268
Modulation 356, 357
Mohrscher Spannungskreis 178
molare Größe 367
molare Wärmekapazität 374, 482
Molekülmasse 367
Molekülspektrum 439
Mollier-Diagramm 390, 391
Molmasse 367
Molybdän 552
Moment, Dreh- 160
–, magnetisches 330
–, statisches 81
Momentanleistung 152, 163, 346
Monddaten 176
Monochromator 286
monoklines Gitter 476
Monotonie 62
MOSFET-Transistor 441, 493
Multiplex, Zeit- 358

N
N 558
Na 552
Nachhallzeit 258
Nachrichtentechnik 353 ff.
Nahpunkt 274
NAND 516
Natrium 552
Naturkonstante 134
natürliche Radioaktivität 447
Navier-Stokes, Gleichung 190, 191, 398
Nb 554
Nd 553
Ne 553
Negation 514
Negierung 514
Neilsche Parabel 41
Nennleistung 152
Neodym 553
Neon 553
Neptunium 553
Nernstsches Wärmetheorem 383
Netz 528 ff.
Netzwerk 522, 523, 529
–, elektrisches 311
Neukurve 333
Neutron 429, 443
Newtonscher Ring 283
Newtonssches Axiom 143 ff.
– Verfahren 45
Ni 553
nichtkohärente Schallquelle 246
Nickel 553
Niob 554
Nobelium 554
NOR 516
Nordpol, magnetischer 325
Norm-Trittschallpegel 259
Normalgleichung 115, 116, 117
Normalkraft 145
Normalspannung 176, 181
Normalverteilung 111
Normzahl 3

Np 553
 NTC 309
 Nukleid 429
 Nukleon 429, 443
 Nuklid 443, 450
 Nullphasenwinkel 215
 –, Spannung 341
 –, Strom 341
 Nullstelle 45
 numerische Apertur 268
 – Reihe 88 ff.
 Nußelt-Zahl 399
 Nutzenergie 408
 Nutzungsgrad, Heizungs- 416
 NV-RAM 517

O

O 556
 Oberflächenenergie 196
 Oberflächenprüfung 283
 Oberflächenspannung 195
 Öffnung, relative 277
 Ohmsches Gesetz 311, 486
 ökologische Bilanz 414
 Oktalzahl 510
 Operator, logischer 514
 Optik 264 ff.
 –, Quanten- 290
 optische Aktivität 289
 Optoelektronik 503
 Optokoppler 509
 OR 516
 Ordnungszahl 429
 orthorhombisches Gitter 476
 orts- und zeitabhängige Schwingung 236
 Ortsvektor 138
 Os 555
 OSI-Modell 528
 Osmium 555
 Osmose 213
 osmotischer Druck 213
 Otto-Prozeß 379
 Ozonloch 424

P

P 555
 Pa 555
 Paar, Kräfte- 166
 Palladium 555
 PAM 357
 Parabel 21
 –, Neilsche 41
 –, semikubische 41
 Parabolspiegel 266
 Paradoxon, aerodynamisches 205
 Parallelschaltung 312, 313
 –, Wechselstrom 345
 paramagnetisch 332

Parameterform, Funktion 60
 parametrische Schwingung 235
 Parität 468
 Partialbruchzerlegung, Integral 71
 PASCAL 534, 535, 536, 540
 Paschen-Serie 434
 Paßfehler 283
 Pauli-Prinzip 435
 Pb 545
 PCM 357
 Pd 555
 PDM 357
 Péclelet-Zahl 400
 Pegel 359
 –, Leistungs- 360
 –, Schall- 250
 –, Spannungs- 360
 –, Strom- 360
 Pendel, Flüssigkeits- 218
 –, mathematisches 216, 218
 –, physikalisches 218
 –, Torsions- 216, 218
 Pentagonalprisma 269
 Periodendauer 215
 Periodizität 214, 215
 Permeabilität 332
 Permeabilitätszahl 331
 Permittivität 300
 Permittivitätszahl 300
 Permutation 107 ff.
 perpetuum mobile erster Art 153
 – – zweiter Art 380
 Petri-Netz 542
 PFM 357
 Pfundt-Serie 436
 Phase 215
 Phasen-Resonanzfunktion 224
 Phasengeschwindigkeit 240, 482
 Phasenmodulation 357
 Phasenübergang 386
 Phasenumtastung 357
 Phasenumwandlung 387
 Phasenverschiebung 242
 Phasenwinkel 215, 228
 phon 256
 Phonon 481
 Phononentransport 392
 Phosphor 555
 Photo-Diode 492
 Photometrie 277 ff.
 Photon 430, 467
 Photonenenergie 290
 Photonentransport 392
 physikalische Größe 126 ff.
 physikalisches Pendel 218
 pin-Diode 492
 Pitot-Rohr 202
 PL/I 540

Planetenbewegung 173
 Planetendaten 174
 plastische Verformungsenergie 188
 Plateau 441
 Platin 555
 Plattenschwinger 253
 Plutonium 554
 PM 357
 Pm 555
 pn-Übergang 489, 490
 Po 554
 Pockels-Effekt 289
 Poisson-Zahl 179
 Polargleichung der Kegelschnitte 173
 Polarisierung 287
 –, elektrische 300
 –, magnetische 332
 Polarisationsfolie 288
 Polarisationswinkel 288
 Polarisator 287
 Polarkoordinaten 173
 –, Funktion 60
 Polonium 554
 Polstärke, magnetische 330
 Polstrahl 165
 Polymerwerkstoff 479
 Polytrope 376
 Polytropenexponent 375
 poröser Schallabsorber 253
 Porrosches Prisma 268
 Potential, elektrisches 297, 299
 –, Gravitations- 172
 –, thermodynamisches 383
 potentielle Energie 163, 166, 172
 Potenzfunktion 31, 32
 Potenzregel 56
 PPM 357
 Pr 555
 Prandtl-Zahl 400
 Prandtl'sches Staurohr 402
 Praseodym 555
 Präzession, Kreisel- 167
 Presse, hydraulische 193
 Primärelement 320
 Primärenergie 407
 Prinzip von d'Alembert 149
 Prisma 268
 –, Bauernfeindsches 269
 –, Dachkant- 269
 –, Pentagonal- 269
 –, Schmidt-Pechan 269
 –, Umkehr- 269
 –, Uppendahl- 269
 –, Wende- 269
 Prismensystem 269
 Produktintegration 69
 Produktregel 56
 Programm 533 ff.

Programmablaufplan 533, 534, 535, 536, 542
 Programmiersprache 540
 PROLOG 540
 PROM 517
 Promethium 555
 Protactinium 555
 Proton 429, 443
 Prozeß, irreversibler 378
 –, reversibler 378
 Prozeßgröße 367
 PSK 357
 Pt 555
 PTC 309
 Pu 554
 Pulsamplitudenmodulation 357
 Pulsdauermodulation 357
 Pulsfrequenzmodulation 357
 Pulsmodulation 357
 Pulsphasenmodulation 357
 Pumpe 212
 Punktfehler 477
 Pupille, Eintritts- 273
 Pythagoras, Satz des 22

Q

Q-switching 291
 QPSX/DQDB-Verfahren 528, 529, 530
 quadratische Funktion 30
 – Gleichung 44
 Quanten-Hall-Effekt 307, 442, 442
 Quantenoptik 290
 Quantentheorie 430 ff.
 Quantenzahl 435
 Quark 467
 quasistatische Anregung 225, 226
 Quecksilber 555
 Quelle 494
 Querdehnung 179
 Querstromfiltration 425
 Querwelle 236
 Quotientenregel 57

R

Ra 556
 Rad 451
 Radikal 452
 radioaktiver Zerfall 444, 446
 Radioaktivität natürliche 447
 Radium 556
 Radkurve 39
 Radon 556
 Raketengleichung 156, 159
 RAM 517, 520
 Raman-Effekt 440, 441
 rationale Zahl 2
 Rauchgas 423
 Raum 14
 Raumakustik 258

- Raumausdehnungskoeffizient 369
- Rauminhalt 25
- räumlicher Spannungszustand 180
- Raumwärme 415
- Raumwelle 363
- Raumwinkel 278
- Rauschen 362
- Rauschleistung 354, 362
- Rauschmaß 362
- Rauschspannung 362
- Rauschzahl 362
- Rayleigh-Kriterium 283
- Rayleigh-Zahl 400
- Rb 557
- Re 557
- Reaktanz 347
- reale Spannungsquelle 314
 - Stromquelle 314
- reales Gas 383 ff.
- Realgasfaktor 383, 384
- RECORD 539
- Recycling 428
- Redundanz, Nachricht 355
- Reflexion 237, 238, 239, 243, 265
 - , Total- 267, 268
- Reflexionsgrad, Schall- 252
- reflexvermindernde Schichten 282
- Regen, saurer 424
- Regenerat 422
- regenerative Energie 409
- Regression 114 ff.
- Regressionsparameter 115, 116, 117
- Reibung, äußere 147
 - , Festkörper- 147
 - , Flüssigkeit 147
 - , Gleit- 147
 - , Haft- 147
 - , innere 147
 - , Luft- 147
 - , Roll- 147
 - , turbulente 147
- Reibungskraft 147, 151, 220
- Reichweite 364
 - , maximale 452
- Reihe, arithmetische 88
 - , binomische 91
 - , Fourier- 93 ff.
 - , geometrische 88
 - , konvergente 88
 - , MacLaurische 91
 - , numerische 88
 - , Taylorsche 91
- Reihenentwicklung 88 ff.
- Reihenschaltung 313
 - , Wechselstrom 344
- Reinhaltung, Luft 423, 424
- Rekombination 504
- Rekombinationsbereich 322
- Rektifikation 77
- relative Atommasse 430
 - Häufigkeit 111
 - Öffnung 277
- relativistische Elektrodynamik 472, 473
 - Massenzunahme 472
- relativistischer Faktor 470
- Relativitätstheorie 470 ff.
- Relaxation 187, 248
- Rem 451
- Repeater 532
- Resistanz 347
- Resistivität 397
- Resonanz 215
- Resonanzabsorber 253
- Resonanzfall 225, 226
- Resonanzfunktion, Amplituden- 224
 - , Phasen- 224
- Resonanzkatastrophe 215
- Resonator 223
 - , Helmholtz 253
- Resonator-Charakteristik 253
- Reststoff 426
- reversibler Prozeß 378
- Reynolds-Zahl 400
- Reynoldszahl 190, 191, 210
- Rh 557
- Rhenium 557
- Rheologie 479
- Rhodium 557
- rhomboedrisches Gitter 476
- Richardson-Konstante 321
- Richardsonsche Gleichung 321
- Richtgröße 146
- Richtmoment 163
- Riesenimpulslaser 291
- RISC 518
- Risiko, Energie 408
- Rn 556
- Rockwell-Härteprüfung 189
- Rohr, Pitot- 202
 - , Venturi- 203
- Rohrreibungszahl 210
- Rohstofflager 427
- Rollreibung 147
- ROM 501, 520
- Röntgen 451
- Röntgenbeugung 285
- Röntgenstrahlung 438
- Rotations-Schwingungs-Spektrum 439
- Rotationsarbeit 163
- Rotationsenergie, kinetische 164, 167
- Rotverschiebung, kosmologische 474
- Router 532
- RS 438, 439, 501, 524
- Ru 557
- Rubidium 557
- Rückkopplung 504

- Ruß 424
- Ruthenium 557
- Rutherford 432
- S
- S 557
- SA/SADT 542
- Samarium 556
- Sammellinse 270
- Sarrus'sche Regel 54
- Satellitendaten 175
- Sättigungsinduktion 333
- Sättigungsstrom 324
- Satz des Pythagoras 22
- Satz von Rolle 62
- Sauerstoff 556
- Saugeffekt 205
- saurer Regen 424
- Sb 545
- Sc 557
- Scandium 557
- Schaden, Strahlen- 452
- Schädlichkeit, Strahlen- 458
- Schadstoff 419
- Schadstoffbegrenzung 424
- Schadstoffbelastung 415
- Schadt-Helfrich-Drehzelle 289
- Schall, Hyper- 245
- , Infra- 245
- , Körper- 260
- , Luft- 259
- , Tritt- 259
- , Ultra- 245, 263
- Schallabsorber 253
- Schallabsorption, Dämpfungskoeffizient 248
- Schallabsorptionsgrad 252
- Schallaufnehmer 245
- Schallausbreitung 244
- , isentrope 244
- Schallbewertungskurve 257
- Schalldämmmaß 254
- Schalldruck 246
- Schalldruckpegel 250, 256
- Schalldurchgang 244
- Schalleistung 247, 248
- Schalleistungspegel 250
- Schallempfindung 244, 257
- Schallfrequenz 244
- Schallfrequenzspektrum 251
- Schallgeber 245
- Schallgeschwindigkeit 244, 246
- Schallintensität 247, 248
- Schallintensitätspegel 250
- Schallkennimpedanz 244
- Schallpegel 250
- Schallpegeldifferenz 247
- Schallquelle, nichtkohärente 244
- Schallreflexionsgrad 252
- Schallschnelle 237, 247
- Schallschnellepegel 250
- Schalltransmissionsgrad 252, 254
- Schallwandler 249
- Schallwechseldruck 237
- Schallwelle 241
- Schallwellenlänge 246
- Schallwiderstand 246
- Schaltdiode 491
- Schaltzeichen, logisches 516
- Schärfentiefe 277
- Schätzwert 112
- Scheinanteil 342
- Scheingröße 342
- Scheinleistung 346
- Scheitelfaktor 341
- Scherung 179, 182
- Scherungsgerade 335
- Schichten, reflexvermindernde 282
- Schiebung 182
- schiefer Wurf 141, 142
- Schlankheitsgrad 185
- Schleppkurve 42
- Schmelzdruckkurve 388, 389, 390
- schmelzen 386
- Schmelzenthalpie 387
- Schmelzpunkt 386
- Schmerzgrenze 256
- Schmidt-Pechan-Prisma 269
- Schmidt-Zahl 400
- Schnelle, Schall- 247
- Schnittstelle 522, 523, 524
- Schottky-Diode 491
- Schottky-Fehlordnung 477
- Schranke 5
- Schrödinger-Gleichung 432
- Schubmodul 179
- Schubspannung 177, 182
- Schwächung der Strahlung 451
- schwarzer Körper 402
- Strahler 279
- Schweben 194
- Schwebung 230
- Schwefel 557
- Schwefeldioxid 424, 425
- Schweredruck 190, 191, 193, 197
- Schwerkraft 145, 151
- Schwerpunkt eines Meßwertes 122
- Schwerpunkt 80, 81, 154, 166
- Schwerpunktsbeschleunigung 155
- Schwerpunktsgeschwindigkeit 154
- Schwerpunktskoordinaten 166
- Schwerpunktssatz 155
- Schwimmen 194
- Schwinger, Platten- 253
- Schwingfall 221
- Schwingfestigkeit, Dauer- 187
- Schwingkreis, elektromagnetischer 226, 351

- Schwingung 214 ff.
–, Eigen- 243
–, elektromagnetische 218
–, –, gedämpfte 222, 352
–, erzwungene 214, 223 ff.
–, freie 214 ff.
–, Fundamental- 235
–, gekoppelte 235
–, orts- und zeitabhängig 236
–, parametrische 235
–, Überlagerung 228
Schwingungsbauch 243
Schwingungsdauer 214, 215
Schwingungsknoten 243
Schwingungsmodus 505
Schwingungssystem 216, 218
Schwund 363
SCR (selective catalytic reduction) 425
Se 557
Sehfehler 274
Sehnen-Halbsehensatz 23
Sehweite 274
Sehwinkel 275
Seileckverfahren 165
Sekanten-Tangentensatz 23
Sekundärelektronenemission 322
Sekundärelement 321
Sekundärenergie 407
Sekundärionen 324
Selbstinduktion 337
Selen 557
Seliger-Prozeß 379
Seltsamkeit 467, 468
semikubische Parabel 41
Sender 362
–, Halbleiter- 503
Senke 494
senkrechter Wurf 141, 142
Shannonsches Abstatttheorem 354, 355
Sherwood-Zahl 405
Shredder 428
Si 558
SI-Maßsystem 125
Sicherheit, statistische 113
Siedepunkt 386
Sievert 451
Signal 353
Signalleistung 354
Silber 557
Silicium 558
SIMD 518
SIMSCRIPT 540
SIMULA 540
Single-Mode-Laser 505
Sinken 194
Sinkgeschwindigkeit 425
Sinussatz 23
skalares Produkt 27, 28, 29
Skineffekt 337
Slotted-Ring-Verfahren 528, 529, 530
Sm 556
Smog 423, 424
Sn 560
SNCR (selective non catalytic reduction) 425
Snelliussches Brechungsgesetz 267
Software-Engineering 541, 542
Software-Lebenszyklus 541
Solarzelle 507, 508
Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante 442
Sortierung, Abfall- 427
Source 494
Sourceschaltung 498
Spannung 177
–, Hall- 329, 441
–, Knick- 185, 186
–, komplexe 341
–, magnetische 326
–, Normal- 177, 182
–, Oberflächen- 196
–, Rausch- 362
–, Schub- 177, 182
–, Wechsel- 340
Spannungs, elektrische 306
–, Grenz- 186
Spannungsdoppelbrechung 288
Spannungsfaktor 335
Spannungskreis, Mohrscher 178
Spannungsmessung 315, 316
Spannungspegel 360
Spannungspfeil 306, 311
Spannungsquelle, reale 314
Spannungsreihe, elektrochemische 318, 319
Spannungsteiler 315, 317
Spannungsverhältnis 314
Spannungszustand 177, 178
Speicher, Energie- 412, 413
–, hybrider 517
Speicherbaustein 517
Spektralapparat 285
spektrale Größe 277
– Strahldichte 279
Spektralfunktion 353
Spektralphotometer 286
Spektrograph 286
Spektrometer 277, 286
Spektroskop 286
Spektrum 353, 429
–, Schallfrequenz- 251
Sperrschicht-FET 494, 495
spezifische Aktivität 446
– Ausstrahlung 278, 279
– Enthalpie 386
– Größe 367
– Ladung 328
– Lichtausstrahlung 281
– Wärmekapazität 482

- spezifischer elektrischer Widerstand 307, 310
 sphärische Aberration 274
 Spiegel 266
 Spin 467, 468
 Spinmagnetismus 437
 Spirale 41
 spontane Emission 290
 Sprungtemperatur 500
 Spültechnik 420
 Spuranpassung 255
 SQL 540
 Sr 559
 stabiles Gleichgewicht 166
 Stabilität 444
 Standardabweichung 110, 112, 114
 Standardwasserstoff-Elektrode 318
 Standsicherheit 166
 Standspülen 420
 Standzeitverlängerung 420
 Stanton-Zahl 400
 Stapelfehler 477
 starrer Körper 155, 164 ff.
 statischer Druck 201, 202
 statisches Moment 80
 statistische Sicherheit 113
 Staub 424
 Staudruck 202
 Staurohr, Prandtl'sches 202
 Stefan-Boltzmann Gesetz 402
 stehende Welle 243
 Step-Recovery-Diode 492
 Stern-Dreieck-Umwandlung 314
 steuerbarer Widerstand 494
 Stickoxid 424, 425
 Stickstoff 558
 stimulierte Emission 290
 Stirling-Prozeß 379
 Stoffmenge 367
 –, Definition 125
 Stoffübergangskoeffizient 405
 Stoffübertragung 392, 405 ff.
 Störabstand 362
 Störstellenleitung 487
 Störstellenreserve 489
 Stoß, elastischer 155, 157, 158
 –, inelastischer 155, 157, 158
 Stoßprozeß 155
 Strahldichte 278
 –, spektrale 279
 Strahlenbelastung 452, 459, 461
 Strahlendosis 460
 Strahlenkegel 279
 Strahlensatz 22
 Strahlenschaden 452
 Strahlenschädlichkeit 458
 Strahlenschutz 451 ff.
 Strahler 279
 Strahlstärke 278
 Strahlung, Schwächung 451
 Strahlungsäquivalent, 280
 Strahlungsart 453 ff.
 Strahlungsaustauschkoeffizient 403
 Strahlungsemission 504
 Strahlungsenergie 278
 Strahlungsfluß 281
 Strahlungsleistung 278
 strahlungsphysikalische Größe 277
 Streckgrenze 180
 Streifenleiter 521
 Streufaktor 331, 335
 Streufluß 331
 Strip-Leitung 521
 Strom, komplexer 341
 –, Licht- 281
 –, Sättigungs- 324
 –, Wechsel- 340
 Stromdichte 321
 –, kritische 500
 Strommessung 315
 Strompegel 3
 Strompfeil 306, 311
 Stromquelle, reale 314
 Stromstärke 306
 –, Definition 125
 Stromübertragungsverhältnis 509
 Strömung 398
 –, adiabatische 212
 –, laminare 206
 –, turbulente 208
 Strömungsgeräusch 261
 Strömungsleistung 190, 191
 Strömungsmaschine 380
 Strömungsmechanik 199
 Strömungswiderstand 190, 191
 Stromverhältnis 312
 Strontium 559
 Strophoid 42
 Struktogramm 533 ff., 542
 STTL 515
 Student-Faktor 113
 Stufenindexfaser 268
 sublimieren 386, 389
 Substitution 477
 –, Integral 70
 Superhet 365
 Superpositionsprinzip 228, 244, 315
 Supraleitung 499 ff.
 Supremum 6
 Suszeptanz 347
 Suszeptibilität, magnetische 331
 System, Dauermagnet- 334
 –, Feder-Masse 218
 –, Linsen- 273
 –, Schwingungs- 216
 –, thermodynamisches 366

T

Ta 559
 Tantal 559
 Taylorsche Reihe 91
 Tb 558
 Tc 559
 Technetium 559
 technische Akustik 259
 Tellur 559
 Temperatur 367 ff.
 –, Debye- 394, 482, 483
 –, Definition 125
 –, Einstein- 482, 483
 –, Kontakt- 396
 –, kritische 385, 500
 –, thermodynamische 375
 Temperaturkoeffizient 307
 Temperaturstrahler 279, 403
 Tensor der Permittivitätszahl 300
 Terbium 558
 Tesla 328
 tetragonales Gitter 476
 Th 559
 Thallium 558
 Theorieparameter 114
 thermische Ausdehnung 368
 – Emission 321
 – Energie 370
 thermischer Wirkungsgrad 375
 Thermodynamik 366 ff.
 thermodynamische Temperatur 375
 thermodynamisches Gleichgewicht 388
 – Potential 383
 – System 366
 Thermoplast 479
 Thomson-Brücke 317
 Thorium 559
 Thulium 559
 Ti 559
 Titan 559
 Tl 558
 Tm 559
 Token-Bus 541
 Token-Passing-Verfahren 528, 530
 Token-Ring-Verfahren 528, 529, 530
 Ton, Hieb- 262
 TOP 528, 531
 Topologie, Vernetzungs- 519, 520
 Torsion 182, 186
 Torsionsarbeit 163
 Torsionsmodul 179
 Torsionspendel 216, 218
 Totalreflexion 267, 268
 Toxizität 458, 461
 Trägheitsgesetz 143
 Trägheitskraft 148
 Trägheitsmoment, Flächen- 82, 83, 183, 184, 185
 –, Massen- 82, 167, 168

Tragkraft eines Elektromagneten 336
 Transformation, Fourier- 96 ff.
 –, Galilei- 148
 Transformator 347
 Transistor 489, 493
 Transmission 237, 239, 423
 Transmissionsgrad, Schall- 252, 254
 Transmissionswärmestrom 404
 transponierte Matrix 53
 Transportfeldstärke 200
 Transportflußdichte 200
 Transportgröße 200
 Transputer 518, 519
 Transversalwelle 236
 transzendente Zahl 2
 Treibhauseffekt 424
 Trennung, Membran- 425
 Trennverfahren 428
 trigonometrische Funktion 10, 11, 12, 34, 58
 triklines Gitter 476
 Triodenbereich 494
 Tripelpunkt 368, 390
 Trittschallpegel, Norm- 259
 TTL 515
 TTY 524
 Tunnel-Diode 492
 turbulente Grenzschicht 209
 turbulente Strömung 208, 398

U

U 559
 Überdruck 197
 Überlagerung von Schwingungen 228
 Überlagerungsempfänger 365
 Überströmprozeß 379
 Übertragung 353
 Übertragungskanal 362
 Übertragungsmedium 362
 Übertragungsverhältnis, Strom- 509
 Ultraschall 245, 263
 Umkehrprisma 269
 Umwandlung, Energie 408
 –, isomere 446
 Umwelttechnik 417 ff.
 unbestimmter Ausdruck 64
 Une 561
 uneigentliches Integral 68, 69
 ungedämpfter, elektromagnetischer Schwingkreis 351
 Unh 561
 unipolarer Transistor 493
 Uno 561
 Uns 561
 Unschärfe 277
 Unschärfe-Relation 431
 Unterdeterminante 53, 55
 Uppendahl-Prisma 269
 Uran 559

V

V 560
 V.24 526, 527
 Valenzband 485
 van-der-Waalsche Bindung 475
 – Zustandsgleichung 383
 Vanadium 560
 Varianz 110, 112
 Varistor 309
 VDR 309
 Vektor, Geschwindigkeit 138, 139
 Vektorbosen 467
 Vektorrechnung 26 ff.
 Venturi-Rohr 203
 Verarbeitung 353
 verbotene Zone 487
 Verbrauch, Energie 407, 409, 413
 Verbrennungsmotoren 379
 Verdampfungsenthalpie 386
 Verdettsche Konstante 290
 Veredlung, Energie 408
 Verfahren, Abreinigungs- 424
 –, Gaußsches 49
 Verformungsart 178, 179
 Vergrößerung 275
 Verknüpfung, logische 514
 Verlängerung, Standzeit 420
 Verlust, Kompressions- 203
 Verlustdichte 188
 Verlustfaktor 220, 347
 Vermittlung 353
 Vernetzungstopologie 519, 520
 Verschiebung, Ladungs- 300
 Verschiebungsarbeit 299
 Verschiebungsdichte 297, 300
 Verschiebungsgesetz, Wiensches 279
 Versetzung 477
 Verstärker 359
 Verteilungsfunktion 109
 Vertrauensbereich 113
 Verwerfen 419
 Verzeichnung 274
 Verzerrung 360
 Verzerrungsfaktor 361
 Vickers-Härteprüfung 189
 viskoelastisches Einmassesystem 261
 viskoses Verhalten 480
 Viskosität 206
 Voigt-Kelvin-Modell 480
 Volumenänderungsarbeit 373
 Volumeneinheit 132
 Volumen 25
 –, Zylinder- 86
 Volumenausdehnungskoeffizient 192
 Volumenstrom 201
 Vorgang, Ausschalt- 348, 349
 –, Einschalt- 348, 349

Vorrat, Energie 407

Vorwiderstand 315

W

W 561
 Waage, hydrostatische 195
 waagrecht Wurf 141, 142
 Wahrheitswert 2
 Wahrscheinlichkeit, Aufenthalts- 432
 –, Theorie 107 ff.
 Waldsterben 424
 WAN 529
 Wandler, elektroakustischer 250
 –, Energie 410
 –, Schall- 249
 –, Wiedergabe- 365
 Wärme 371
 Wärmedämmstoff 393
 Wärmedurchgang 404 ff.
 Wärmeindringkoeffizient 394
 Wärmekapazität 372, 482
 Wärmeleitfähigkeit 392, 393, 484
 Wärmeleitung 392, 484
 Wärmeleitungsgleichung 398
 Wärmepumpe 377, 378
 Wärmeschaubild 381
 Wärmestrahlung 392, 401 ff.
 Wärmestromdichte 392, 394, 403
 Wärmetheorem, Nernstsches 383
 Wärmetransport, Fourier-Gesetz 392, 394, 398
 Wärmeübergang 379, 397
 Wärmeübergangskoeffizient 398
 Wärmeübertragung 392 ff.
 Wasserdampfdurchlaßwiderstand 406
 Wasserdampfübergangswiderstand 406
 Wasserstoff 560
 Wasserstoff-Atommodell 433
 Wasserstrahlpumpe 205
 Weber-Zahl 400
 Wechselfestigkeit 187
 Wechselspannung 340
 Wechselstromkreis 340 ff.
 Wechselstromkreis, Bauelemente 343, 344, 345
 Wechselwirkung zwischen Körpern 144
 Wechselwirkung 429
 –, fundamentale 467
 Weißscher Bezirk 331
 weitsichtig 274
 Welle 214, 236 ff.
 –, Boden- 363
 –, elastische 236, 238
 –, elektromagnetische 238, 242, 364
 –, harmonische 236
 –, Longitudinal- 236
 –, Materie- 293
 –, Raum- 363
 –, Schall- 241
 –, stehende 243

Welle

–, Transversal- 236
 Wellenamplitude 236
 Wellenfunktion 293
 Wellengleichung 246
 Wellenlänge, Materie- 291
 –, Schall- 246
 Wellenoptik 281 ff.
 Wellenwiderstand 236, 238, 239
 Wellenzahl 239
 Wendepisma 269
 Wheatstonesche Brücke 317
 Widerstand 307, 308, 309
 –, Dampfübergangs- 406
 –, differentieller 311
 –, Foto- 506
 –, Hall- 441
 –, innerer 313
 –, komplexer 342
 –, Schall- 246
 –, spezifischer elektrischer 307, 310
 –, steuerbarer 494
 –, Strömungs- 190, 191
 –, Wasserdampfdurchlaß- 406
 –, Wasserdampfübergangs- 406
 –, Wellen- 236, 238, 239
 Widerstandsbeiwert 209, 210
 Widerstandsmoment 183, 184, 185
 Widerstandsnormal 307, 442
 Wiedemann-Franzsches Gesetz 394
 Wiedergabewandler 365
 Wiensches Verschiebungsgesetz 279
 Winkelbeschleunigung 137
 Winkelbeziehung 12, 13
 Winkelgeschwindigkeit 136
 Wirbelstrom 336, 337
 Wirkanteil 342
 Wirkbad 419
 Wirkleistung 346
 Wirkungsgrad 152, 411
 –, elektrischer Maschinen 310
 –, exergetischer 382
 –, thermischer 375
 Wirkungslinie 165
 Wirkungsquerschnitt 464, 465
 Wölbspiegel 266
 Wolfram 561
 Wurfbewegung 140, 141, 142
 Wurzel, Bestimmung einer 45
 Wurzelfunktion 32, 33

X

Xe 561
 Xenon 561

Y

Ytterbium 561
 Yttrium 561

Z

Zahl, ganze 2
 –, imaginäre 6 ff.
 –, irrationale 2
 –, komplexe 6 ff.
 –, magische 444
 –, rationale 2
 –, transzendente 2
 Zahlensystem 510
 Zeiger, komplexer 342
 Zeiger-Diagramm 342
 Zeit, Definition 125
 Zeitdilatation 471
 Zeiteinheit 134
 Zeitfunktion 96 ff., 353
 Zeitmultiplex 358
 Zeitstandverhalten 187
 Zener-Diode 491
 Zentrifugalkraft 149
 Zentripetalkraft 145
 Zerfall, radioaktiver 444, 446
 Zerfallskurve 447, 448
 Zerfallsprodukt 464
 Zerfallsreaktion 445
 Zerfallsreihe 449
 Zerfallsschema 448
 Zerstäuber 205
 Zerstreuungslinse 272
 Zink 560
 Zinn 560
 Ziolkowskische Raketengleichung 156,
 159
 Zirkonium 561
 Zissoide 42
 Zn 560
 Zr 561
 Zugversuch 180
 Zustand 366
 –, Gleichgewichts- 366
 –, Spannungs- 177, 178
 Zustandsdiagramm 389
 Zustandsdichte 486
 Zustandsgleichung, allgemeine 369,
 370
 –, van-der-Waalsche 383
 Zustandsgröße 366, 372
 zweidimensionales Elektronengas
 441
 Zwischengitteratom 477
 Zyklode 39
 Zyklon 425
 Zylinderkoordinate 14
 Zylindervolumen 86
 zyklometrisch, Funktion 92
 $\lambda/4$ -Platte 288
 α -Zerfall 445
 β -Zerfall 445
 γ -Zerfall 445