



Norbert Olah

# Einstiens trojanisches Pferd

Eine thermodynamische Deutung  
der Quantentheorie

SpringerWienNewYork

**Dr. rer. nat. Norbert Olah**

Düsseldorf, Deutschland

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdruckes, der Entnahme von Abbildungen, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Buch berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürfen.

Produkthaftung: Sämtliche Angaben in diesem Fachbuch/wissenschaftlichen Werk erfolgen trotz sorgfältiger Bearbeitung und Kontrolle ohne Gewähr. Eine Haftung des Autors oder des Verlages aus dem Inhalt dieses Werkes ist ausgeschlossen.

© 2011 Springer-Verlag/Wien  
Printed in Germany

SpringerWienNewYork ist ein Unternehmen von  
Springer Science+Business Media  
[springer.at](http://springer.at)

Satz: le-tex publishing services GmbH, 04229 Leipzig, Deutschland  
Druck: Strauss GmbH, 69509 Mörlenbach, Deutschland

Gedruckt auf säurefreiem, chlorfrei gebleichtem Papier  
SPIN: 8006260

Mit 12 Abbildungen

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek  
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;  
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-7091-0805-5 SpringerWienNewYork

Für Rüdiger Bessenrodt

# Vorwort

*Quidquid id est, timeo  
Danaos et dona ferentis.  
Vergil, Aeneis 2,49*

Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr. Rüdiger Bessenrodt, Prof. Dr. Wolfgang Dau-nicht und Prof. Dr. Karl Theodor Kalveram, von denen ich lernen durfte. Wertvolle Hinweise, Unterstützung und anregende Gespräche verdanke ich Prof. Dr. Tobias Schäfer, Dr. Ernst-Wolfgang Laedke, Dr. Frank Rosemeier, Dr. Raimund Pauen, Dr.-Ing. Markus Lemmen, Dipl.-Ing. Klaus Theißen, Dr. Svenja Ettl, Dipl.-Mathe. Stephanie Aslanidis, Dipl.-Mathe. Angela Schmitz, RA Bernhard Schmitz von der Lohe, Dr. jur. Peter Neumann, Daniel Schily, Johannes Stützgen, Wilm Kösters, Dipl. Geogr. Olaf van Ackeren, Dr. Jochen Dresselhaus, Thomas Kimmel, Thomas Heidlauf und Elisabeth Wegener.

Dem Springer-Verlag Wien danke ich für die Möglichkeit, als nichthauptberuflicher Wissenschaftler zum wissenschaftlichen Diskurs beitragen zu können. Insbesondere danke ich Mag. Judith Martiska und Stephen Soehnlen für die wohlwollende und entgegenkommende Betreuung. Prof. Dr. Carola Kryschi danke ich sehr herzlich für die freundliche Übernahme des Reviews, meiner Mutter, Monika Olah, für Illustrationen.

Mit großer Dankbarkeit blicke ich zurück auf das Verständnis meiner Kollegen und Vorgesetzten der R&D Steuerungstechnik GmbH & Co. KG und der Siemens AG (Automation & Drives), ohne das ein Gelingen nicht möglich gewesen wäre: Dipl.-Ing. Reiner Rohde, Dipl.-Volkswirt Detlev Gunia, Dipl.-Ing. Johannes Jenne-ßen, Dipl.-Ing. Norbert Stapper, Dipl.-Ing. Walter Häring, Dipl.-Ing. Stefan Peschke und alle Kollegen, die aus voller Eiskasse „1000 mal zu spät“ für mich gesungen haben.

Nicht zuletzt danke ich meiner Familie, die mir meinen Weg ermöglicht hat: Monika Olah, Margot Bruscha, Colette Maria Olah, Zsuzsanna Landsbergen, Dipl.-Ing. Frans Landsbergen, Marita Schmidt und Dr. Hilde Dummer.

Düsseldorf, Mai 2011

*Norbert Olah*

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Quantenmechanik und Thermodynamik</b>	1
1.1	Zielsetzung und Übersicht	2
1.2	Der Zusammenbruch der klassischen Physik	3
1.3	Der Siegeszug der statistischen Physik	4
1.4	Einstins trojanisches Pferd	5
1.5	Deutungen der Quantenmechanik	6
1.6	Quantenthermodynamik	8
1.7	Das Paradox der Zeitumkehrinvarianz	10
<b>2</b>	<b>Thermodynamik irreversibler Prozesse</b>	13
2.1	Wahrscheinlichkeit und Entropie	14
2.2	Thermodynamische Lagrange-Funktionen	14
2.3	Das Prinzip der kleinsten Energiedissipation	15
2.4	Thermodynamische Stabilitätstheorie	16
2.5	Brown'sche Bewegung in einem Potential	19
2.6	Selbstorganisation und Entropieexport	20
<b>3</b>	<b>Umdeutung der Schrödinger-Gleichung</b>	23
3.1	Transformation des Quantenpotentials	24
3.2	Ableitung der Schrödinger-Gleichung	25
3.3	Superpotential und Riccati-Gleichung	26
3.4	De-Broglie-Bohm-Theorie	28
3.5	Dissipationsfreiheit der stationären Zustände	29
3.6	Feldtheoretische Lagrange-Dichten	30
<b>4</b>	<b>Quanteneffekte und Entropiediffusion</b>	33
4.1	Thermodynamische Stabilität und Nullpunktsenergie	34
4.2	Der harmonische Oszillatator: Quantisierung	35
4.3	Das Wasserstoffatom: Quantenzahlen	38
4.4	Superposition und Bifurkation	43
4.5	Dekohärenz als Entropimaximierung	46

<b>5 Klassische Analogien</b> .....	49
5.1 Der Welle-Teilchen-Dualismus .....	50
5.2 Das Korrespondenzprinzip .....	50
5.3 Das Wirkungsprinzip .....	52
5.4 Die Adiabatenhypothese .....	53
5.5 Die Wahrscheinlichkeitsflüssigkeit .....	54
<b>6 Die Unschärferelation</b> .....	57
6.1 Optische Analogie: Ähnlichkeitssatz .....	58
6.2 Hydrodynamische Analogie: Brown'sche Bewegung .....	59
6.3 Thermodynamische Analogie: Entropieaustausch .....	61
6.4 Zweiter Hauptsatz und Messprozess .....	63
6.5 Unschärfe und Nullpunktsenergie .....	64
6.6 Strukturelle Stabilität und Nullpunktsenergie .....	65
<b>7 Quantenlogik</b> .....	67
7.1 Klassische Logik .....	68
7.2 Doppelspaltexperimente .....	68
7.3 Komplementaritätslogik .....	69
7.4 Zustandsräume und Projektoren .....	71
<b>8 Quantenphilosophie</b> .....	75
8.1 Schrödingers Katze .....	76
8.2 Komplementarität .....	77
8.3 Akausalität .....	79
8.4 Vollständigkeit .....	81
8.5 Quantensprünge .....	82
8.6 Dekohärenz .....	82
8.7 Nichtlokalität .....	83
8.8 Absoluter Zufall? .....	85
8.9 Ensemble-Interpretation .....	87
<b>9 Zusammenfassung</b> .....	89
<b>Literaturverzeichnis</b> .....	93
<b>Abbildungsverzeichnis</b> .....	101
<b>Stichwortverzeichnis</b> .....	103

# Kapitel 1

## Quantenmechanik und Thermodynamik

*The true logic of this world  
is the theory of probability.*  
James Clerk Maxwell

Die Quantenmechanik ist die wahrscheinlich erfolgreichste Theorie, die die Physik im letzten Jahrhundert hervorgebracht hat. Wer hätte sich vor 100 Jahren eine Mikroelektronik träumen lassen? Heute wird mehr als ein Drittel des Weltbrutto-sozialprodukts mit Quantenmechanik erwirtschaftet (Lesch et al. 2007). Dennoch haftet der Quantenmechanik etwas Mystisches an, weil sie sich der Anschauung mit Bildern der klassischen Physik immer wieder entzieht: Das *Teilchenbild* der klassischen *Mechanik* verliert seine Gültigkeit, wenn sich Elektronen als Materiewelle zeigen und damit Welleneigenschaften annehmen. Das *Wellenbild* der klassischen *Elektrodynamik* verliert seine Gültigkeit, wenn sich Licht als Photon zeigt und damit Teilcheneigenschaften offenbart. Max Borns statistische Deutung des Quadrats der Wellenfunktion als Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens vermag zwar den Welle-Teilchen-Dualismus zu überbrücken, das Quantenobjekt bleibt jedoch ein Chamäleon, das sich je nach experimenteller Situation mal als Welle und mal als Teilchen präsentiert. Die klassischen Bilder passen nur eingeschränkt – solange die *Thermodynamik* als eigenständige klassische Theorie vernachlässigt wird.

Obwohl der Operatorformalismus der Quantenmechanik durch seine ungeheure Einfachheit, Eleganz und Ästhetik besticht, und obwohl ihre Anwendungen ganz erstaunliche Erfolge erzielen, ist die naturphilosophische Deutung der Quantentheorie immer noch umstritten. Ziel der Naturwissenschaft ist es aber seit jeher, alle Ungeheimnisse aus dem Weg zu räumen, um Platz für neue zu schaffen. Aus diesem Grund wird im folgenden ein neuer Ansatz für eine *thermodynamische* Deutung der Quantenmechanik entwickelt. Die thermodynamische Sichtweise soll die Diskrepanz zwischen dem grandiosen Erfolg und der mangelnden Anschaulichkeit der Quantentheorie verringern. Niels Bohr sagte über die Quantenmechanik: „Wer sie nicht verrückt findet, hat sie nicht verstanden!“ Richard Feynman hielt dagegen: „Wer glaubt, sie verstanden zu haben, ist verrückt!“

## 1.1 Zielsetzung und Übersicht

*Beiß mir nicht in den Finger;  
schau, wohin er zeigt.  
Warren S. McCulloch*

Die *Quantenthermodynamik* beschäftigt sich mit der Frage, unter welchen Bedingungen die Thermodynamik aus der Quantenmechanik abgeleitet werden kann. Im Rahmen der vorliegenden Monographie wird der umgekehrte Weg beschritten und die Quantenmechanik aus einer statistischen Thermodynamik abgeleitet.

Ziel der folgenden Überlegungen ist es, das weit verbreitete Vorurteil zu widerlegen, dass es unmöglich ist, mit klassischen Begriffen konsistent *und* anschaulich über Quantenphänomene zu sprechen. Die statistische Deutung der Wellenfunktion wird hier erstmalig zu einer thermodynamischen Deutung des Quantenpotentials erweitert, indem wir von der Wellenfunktion zur Wahrscheinlichkeit und von dort weiter zur Entropie übergehen. Mit Einsteins Umkehrung der Boltzmann-Beziehung, dass die Entropie proportional zum Logarithmus einer Wahrscheinlichkeit ist, kann die Schrödinger-Gleichung auf thermodynamische Variablen transformiert werden. Dass durch diese Variablentransformation plötzlich thermodynamisch und damit „klassisch“ deutbare Terme in der bisher als „unklassisch“ angesehenen Schrödinger-Theorie auftauchen, sollte kein Zufall sein!

Die statistische Thermodynamik könnte also ein neues Licht auf die Quantenwelt werfen. Die Quantenwelt enthält trotz aller Zufälligkeiten ein überraschend hohes Maß an Ordnung und Struktur. Die Abbildung dieser Ordnung in einer thermodynamischen Sprache ermöglicht eine tiefere statistische Fundierung der Quantentheorie. Die wichtigsten Ergebnisse der thermodynamischen Umdeutung lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

- Quantenobjekte werden als *thermodynamische* Systeme aufgefasst. *Welle* und *Teilchen* sind zwei Gesichter eines thermodynamischen Prozesses.
- Die thermodynamische Beschreibung der Quantenvorgänge ist *stetig* und *kausal*.
- Die Schrödinger-Gleichung kann aus einer thermodynamischen Lagrange-Funktion mit *statistischen* Potentialen hergeleitet werden.
- Quanteneffekte entstehen aus thermodynamischer Sicht durch ein subtiles Zusammenspiel von *Entropieproduktion* und *Entropiediffusion*.
- Die Forderung nach thermodynamischer Stabilität erzwingt die *Quantisierung* der Energie gebundener Zustände sowie eine endliche *Nullpunktsenergie*.
- Quantensysteme sind *dissipative* Systeme, die erst in stationären Zuständen *konservativ* werden. In den Eigenzuständen verschwindet die Energiedissipation.
- Die *Dekohärenz* quantenmechanischer Überlagerungszustände kann thermodynamisch begründet werden: Eigenzustände sind thermodynamisch stabiler als Überlagerungszustände.
- *Quantensprünge* sind schnelle, aber stetige Übergänge des Quantensystems von einem Eigenzustand über einen instabilen Mischzustand in einen anderen Eigenzustand.

- Die *Unschärferelation* wird auf den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik zurückgeführt.
- Das *Paradox der Zeitumkehrinvarianz* löst sich im Bereich der Schrödinger-Theorie.

Die vorliegende Monographie gliedert sich wie folgt: Kapitel 1 beschreibt die Motivationen, die es lohnenswert erscheinen lassen, *Quantenmechanik* und *Thermodynamik* noch einmal neu zu verheiraten. In Kapitel 2 werden einige Grundbegriffe aus der Thermodynamik irreversibler Prozesse zur Verfügung gestellt. Kapitel 3 präsentiert mit der thermodynamischen Umdeutung der Schrödinger-Gleichung das Hauptergebnis dieser Arbeit. In Kapitel 4 wird gezeigt, wie die stationären Lösungen für einfache Quantensysteme auch in den thermodynamischen Variablen gefunden und thermodynamisch gedeutet werden können. Der harmonische Oszillator, das „Haustier“ der theoretischen Physik, und das Wasserstoffatom dienen als Beispiele, um die engen Zusammenhänge zwischen Nullpunktsenergie, Quantisierung, Entropiediffusion und der thermodynamischen Stabilität des Quantensystems zu verdeutlichen und anschaulich zu machen. Kapitel 5 stellt die klassischen Analogien gegenüber, die optische und die hydrodynamische Analogie. In Kapitel 6 wird dann die Heisenberg'sche Unschärferelation im Sinne dieser klassischen Bilder interpretiert und im thermodynamischen Bild auf den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik zurückgeführt. Kapitel 7 untersucht die formallogischen Konsequenzen der Quantentheorie. Kapitel 8 behandelt abschließend verschiedene Deutungen der Quantenmechanik. Durch die Emanzipation der statistischen Thermodynamik in der quantenmechanischen Theoriebildung kann ein neuer Versuch zu einer kritischen Synthese zwischen Einsteins „unträglichem statistischen Riecher“ (Bessenrodt 1986) und Bohrs Kopenhagener Schule unternommen werden.

## 1.2 Der Zusammenbruch der klassischen Physik

Die Quantentheorie wurde entwickelt, um den Zusammenbruch der klassischen Physik im mikroskopischen Bereich aufzufangen. Die Ursachen für das Versagen der klassischen Theorie liegen im *Welle-Teilchen-Dualismus*, in der *Quantisierung der Wirkung* und in den *Unschärferelationen* beim Messprozess. Die Teilcheneigenschaften der Strahlung, die Welleneigenschaften der Materie und die Quantelung der Energiezustände des Atoms sind Beispiele für nichtklassisches Verhalten.

Das Quantengeschehen konnte mit den damals verfügbaren klassischen Begriffen der Mechanik und Elektrodynamik nicht konsistent beschrieben werden. Um trotzdem die klassischen Vorstellungen weiterverwenden zu können, wurden vor allem zwei Analogien zur Klassik verfolgt: die *optische* Analogie der Materiewellen und die *hydrodynamische* Analogie einer Wahrscheinlichkeitsflüssigkeit, die den Zustand eines Quantensystems beschreibt.

Albert Messiah schreibt über die klassische Anschauung (Messiah 1976): „Die Beschreibung eines quantenmechanischen Systems durch eine Wellenfunktion und seine statistische Deutung sind wegen ihres abstrakten Charakters intuitiv nur

schwer zu erfassen. Versucht man aber, sich die mikroskopischen Erscheinungen konkreter vorzustellen und sie für die Anschauung zugänglicher zu machen, stößt man stets auf Widersprüche.“ Weder die Vorstellung eines Quantenobjekts als Welle noch die als Teilchen lässt sich widerspruchsfrei in allen experimentellen Situationen durchhalten. „Das beweist natürlich nicht, dass es unmöglich ist, eine konsistente und konkrete Beschreibung der mikroskopischen Erscheinungen zu liefern. Dies ist jedoch noch niemandem gelungen. Im übrigen muss man bedenken, dass es logisch überhaupt nicht notwendig ist, die mehr oder weniger abstrakten Vorstellungen einer physikalischen Theorie konkret auszudrücken.“ Unsere Anschauung ist von der durchweg klassischen Alltagserfahrung geprägt und damit alle Begriffe, die zur Beschreibung eines Phänomens verwendet werden. „Nichts weist darauf hin, dass man mit einer solchen Sprache widerspruchsfrei auch im Zusammenhang mit Erscheinungen operieren kann, die so weit von unserer Erfahrung entfernt sind, wie die Inhalte der mikroskopischen Physik.“

Hier drängt sich nun die Frage auf, ob sich anschaulich *und* widerspruchsfrei mit *klassischen* Begriffen über Quantenphänomene reden lässt, wenn wir neben klassischer *Mechanik* und *Elektrodynamik* auch die *Thermodynamik* als eigenständige klassische Theorie zulassen.

### 1.3 Der Siegeszug der statistischen Physik

„Wir leben nicht im Zeitalter der Mechanik, der Elektrodynamik, Optik und vielleicht nicht einmal dem der Elementarteilchen – unsere Epoche ist die der *Statistischen Physik*. Sie hat als integrierende interdisziplinäre Methodik nach einem Siegeszug von 125 Jahren die gesamte Physik erobert. Gewachsen am Atomismus, beherrscht sie heute die Massenphänomene unterschiedlichster Art, von Quarks bis Galaxienhaufen.“ Mit diesen Worten beginnt Rüdiger Bessenrodt seine „Geschichte grundlegender Ideen der Statistischen Physik“ (Bessenrodt 1987). „Es mag im allgemeinen zweifelhaft sein, ob man aus der Geschichte lernen kann – nicht jedoch, was die Wissenschafts-, speziell die Physikgeschichte angeht, und zwar in mehrfacher Hinsicht: die Einfachheit, Anschaulichkeit, Gründlichkeit und den Wagemut der Pioniere, Kontroversen, Trends, soziale, speziell wirtschaftliche Abhängigkeiten u. v. a. [...] Die Geschichte des Eindringens statistischer Methoden in die (deterministische) Physik zeigt: Es war nicht einfach, ehrbar zu werden, von verrufenen Glücksspielen zu physikalischen Modellen der Materie zu gelangen, die quantitativ behandelt werden können – das erforderte zwei Jahrhunderte!“

„Wenn man die Bedeutung der Statistischen Physik überschauen will, darf man nicht übersehen, welchen *grundlegenden* Beitrag sie zur Quantenmechanik geleistet hat: Durch Max Borns statistische Deutung (1926, Nobelpreis 1954) gelang es, Wellen- und Teilchenbild sowohl der Strahlung wie der Materie widerspruchsfrei zu vereinen.“ Plancks Strahlungsgesetz, die Lichtquantenhypothese und Einsteins Theorie der spezifischen Wärmes von Festkörpern waren wesentliche Entdeckungen der älteren Quantentheorie, die allesamt *statistischen* Überlegungen entstamm-

ten. Borns Deutung, d. h. sein grundlegender Schritt von der Wellenfunktion zu deren Betragsquadrat, das die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchens angibt, wurde in ihrer Bedeutung „allgemein unterschätzt und er selbst kaum erwähnt – vielleicht, weil sie jedem zu schnell einging“.

In den folgenden Überlegungen soll die Frage untersucht werden, ob die Statistische Physik ihren „Siegeszug“ nicht noch weiter in die Quantenmechanik hinein fortsetzen kann, als dies bisher ohnehin der Fall ist. Der Zusammenbruch angesichts der Quantenrevolution war für die Klassik des Jahres 1926 zwar unvermeidbar; doch schon in den 30er Jahren begann die klassische Theorie- und Begriffsbildung insbesondere im Bereich der statistischen Physik große Fortschritte zu machen.

## 1.4 Einsteins trojanisches Pferd

Die Geschichte der Statistischen Physik kennt fünf Gründungsväter (Bessenrodt 1987): Maxwell (1831–1879), Boltzmann (1844–1906), Gibbs (1839–1903), Planck (1858–1947) und Einstein (1879–1955). Bessenrodt: „Während Boltzmann und Planck durch kritische Einwände zur Statistik gezwungen wurden, war Einstein – wie Maxwell – ein Statistiker von Anfang an. Seine wissenschaftliche Karriere begann ja – was manchen überraschen mag – mit einer von Boltzmann inspirierten Nachentdeckung und Weiterentwicklung der statistischen Mechanik – was auf eine tief gehende Prägung schließen lässt. Zeitlich erstreckten sich Einsteins Beiträge über 25 Jahre, von 1900 bis 1925, in denen er rund 40 Arbeiten mit ca. 460 Seiten veröffentlichte. Dabei interessierte ihn vor allem die Nahtstelle zwischen Thermodynamik und Statistik: die *Schwankungstheorie* – sei es Brown’sche Bewegung, thermische Strahlung oder ideales Quantengas. Sie erweist sich durch Einstein geradezu als Hebamme der entstehenden Quantentheorie (und schließlich auch als trojanisches Pferd!).“ Einstein begann als Statistiker und „alle seine Beiträge zur frühen Quantentheorie stammen aus *statistischen* Überlegungen“. Demgegenüber scheint es verwunderlich, dass er Borns *statistische* Deutung so heftig ablehnte: „Solange die Statistik als nur durch menschliche Unkenntnis bedingt, als unvollständige Beschreibung der Natur aufgefasst werden konnte, hatte Einstein keinerlei philosophische Schwierigkeiten damit – im Gegenteil.“ Die klassische Statistik erwies sich jedoch „als trojanisches Pferd, das – zunächst kaum beachtet – ,echten‘ Zufall in die Naturgesetze einschmuggelte.“ Durch Borns statistische Deutung „wurde die ‚echte‘ Statistik *fundamental* und umfassend, im Rahmen der Theorie *nicht* mehr durch bessere Kenntnis eliminierbar! Einsteins Widerstand war enorm. Seine ‚Nase‘ sagte ihm, dass ‚Gott nicht würfelt‘ – sein Gott sieht dem Laplace’schen Dämon verteufelt ähnlich. Der *reine* Zustand eines *einzelnen* quantenmechanischen Systems kann nur eine *unvollständige* Beschreibung dieses Systems sein; dagegen mag er sehr wohl die Statistik eines *Ensembles* bestimmen – dies ist genau der Übergang von der unvollständigen Beschreibung *eines* Systems zu repräsentativen *Ensembles* in der *klassischen* Statistischen Mechanik. In *diesem* – und nur in *diesem* – Sinne kann er Borns statistische Deutung akzeptieren. Aber dann ist sie eben *unvollständig* und

deshalb vorläufig. Wird Einstein *langfristig* recht behalten? Reicht sein Riecher bis ins nächste Jahrtausend? Ist die Statistik wirklich nur cleveres Management menschlichen Unvermögens – oder würfelt Gott selbst?“

## 1.5 Deutungen der Quantenmechanik

*Wir haben hier eine ganz verrückte Theorie vor uns.  
Die Frage ist nur, ob sie verrückt genug ist, um richtig zu sein.*  
Niels Bohr

Die Kopenhagener Deutung der Quantenmechanik beruht auf der Annahme, dass der Zustand eines Quantensystems durch eine Wellenfunktion vollständig beschrieben wird. Mit der Wellenfunktion sind nur die Wahrscheinlichkeiten von Messergebnissen festgelegt. Einige Aspekte der Kopenhagener Deutung verursachen durch ihren etwas unphysikalischen Charakter ein gewisses „Unbehagen mit Kopenhagen“:

- *Komplementarität* und *Welle-Teilchen-Dualität*, überbrückt nur durch Borns Wahrscheinlichkeitsinterpretation (Quadrat der Wellenfunktion = Aufenthaltswahrscheinlichkeit).
- *Quantensprünge* und andere Unstetigkeiten wie der „Kollaps der Wellenfunktion“ bei der Messung.
- Aufgabe der *Kausalität*: Nichtkausale Zustandsänderungen beim Messprozess.
- Die Quantenwelt wird von einem absoluten *Zufall* beherrscht, der nicht durch besseres Wissen eliminiert werden kann.
- Nichtlokalität und universelle Verschränkung: Alles hängt mit allem zusammen.
- Die Wellenfunktion beschreibt nicht das Quantensystem selbst (*realistische Deutung*), sondern enthält nur das verfügbare Wissen über das Quantensystem (*epistemische Deutung*).
- Fehlende *Anschaulichkeit*: Stellt die Wellenfunktion eine Wahrscheinlichkeitswelle dar? Aber kann eine Wahrscheinlichkeit überhaupt eine Welle sein?

Man kann versuchen, eine Interpretation der Quantentheorie mit verborgenen Variablen zu finden, die das Verhalten eines individuellen Quantensystems bestimmen, aber bei den heutigen Messungen herausgemittelt werden. Oder man kann versuchen, alternative Interpretationen ohne zusätzliche neue Parameter zu finden. Eine neue Theorie kann durch Experimente von der alten Theorie unterscheidbar sein oder die gleichen Voraussagen machen wie diese.

Bei allen Anwendungen statistischer Theorien im Bereich der klassischen Physik war es schließlich möglich, die Gesetze für das Verhalten der individuellen Teile eines statistischen Ensembles anzugeben. Entsprechend kann man für die Quantentheorie eine deterministische, kausale Beschreibung anstreben oder bei einer Ensemblebeschreibung bleiben.

Bis in die heutige Zeit gibt es vielfältige Versuche, die Quantenmechanik aus einer statistischen Mechanik abzuleiten (Fürth 1933; Fényes 1952; Weizel 1953; Wax 1954; Wesley 1961; Comisar 1965; Nelson 1966; Favella 1967; De La Peña-Auerbach 1967; De La Peña-Auerbach und Cetto 1969; De La Peña-Auerbach, Velasco und Cetto 1970; Ballentine 1970; Ghirardi, Omero, Rimini und Weber 1978; Davidson 1979; Grabert, Hänggi und Talkner 1979; Ghirardi, Rimini und Weber 1986; Grabert, Schramm und Ingold 1988; Roncadelli 1991; Dittrich et al. 1998; Bacciagaluppi 1999; Hänggi und Ingold 2005; Davidson 2007). In vielen Varianten taucht allerdings eine imaginäre Diffusionskonstante auf, deren anschauliche Deutung Schwierigkeiten bereitet. Die moderne Theorie der *Dekohärenz* kann das Messproblem lösen (Lindblad 1976; Gorini, Kossakowski und Sudarshan 1976; Walls und Milburn 1985; Weis 1993; Zeh 1993; Zurek 1991, 2001, 2002; Zurek und Paz 1994; Omnes 1994, 1995; Bub 1997; Braun, Braun und Haake 1999, 2000; Nielsen und Chuang 2000; Audretsch 2002; Breuer und Petruccione 2002; Buchleitner und Hornberger 2002; Giulini et al. 2003; Zeilinger 2003; Camejo 2006).

Die *de-Broglie-Bohm-Theorie* (Madelung 1926, 1927; de Broglie 1926, 1927, 1928, 1964; Bohm 1951, 1952; Bohm und Vigier 1954; Bell 1966, 1987; Kochen und Specker 1967; Mermin 1990; Valentini 1991, 1992; Vink 1993; Bohm und Hiley 1993; Holland 1993, 1998; Cushing 1994; Goldstein 1996; Ghirardi und Deotto 1998; Dürr 2001; Dürr, Goldstein und Zanghì 1992, 2004; Myrvold 2003; Passon 2004, 2006; Teufel und Tumulka 2005; Bacciagaluppi und Valentini 2007) liefert ein kausales deterministisches Modell, das nicht nur den Messprozess als ganz normale Wechselwirkung behandelt, sondern auch auf den Begriff der Komplementarität verzichten kann: Das Quantenobjekt ist *gleichzeitig* Welle und Teilchen. Nach einer Aufspaltung der komplexen Schrödinger-Gleichung in zwei reelle Gleichungen interpretierten de Broglie und Bohm das entstehende Quantenpotential als „Pilotwelle“ oder „Führungsfeld“ für die Bewegung des Teilchens, analog zu den Schienen einer Eisenbahn. Das Führungsfeld wird von den Teilchen selbst erzeugt, so wie sich etwa Ameisen ihre Wege markieren. Die Teilchen laufen auf Bahnen entlang, die durch die Führungswelle bestimmt sind. Wie bei einer Fledermaus wird diese Welle ausgesandt, um die Umgebung zu „lesen“ und entsprechende Informationen an das Teilchen zurückzumelden. Das Teilchen „surft“ auf der Führungswelle wie ein Surfer auf einer Wasserwelle. Die resultierenden Teilchenbahnen sind allerdings vollkommen unklassisch.

Die Transformation des Quantenpotentials von der Wellenfunktion auf die Wahrscheinlichkeit war bereits früh bekannt (Madelung 1926, 1927). Diese Variablentransformation macht die Differentialgleichung aber komplizierter und unübersichtlicher. Erst mit der hier vorgeschlagenen weiteren Transformation von der Wahrscheinlichkeit auf die Entropie wird die Situation wieder einfacher und übersichtlicher, weil dadurch thermodynamisch deutbare Terme in den Gleichungen auftauchen. In der thermodynamischen Deutung sind es statistische Kräfte, die die Quanteneffekte erzeugen.

## 1.6 Quantenthermodynamik

Die Quantenthermodynamik beschäftigt sich mit der Frage nach dem Verhältnis zwischen Quantenmechanik und Thermodynamik. Die klassische Mechanik (ohne Reibungseffekte) wie auch die Quantenmechanik beschreiben reversible Prozesse, ihre Bewegungsgleichungen sind zeitumkehrinvariant. Die Thermodynamik hingegen beschreibt auch irreversible Prozesse; die Zeitumkehrinvarianz ist durch den zweiten Hauptsatz gebrochen. Aus diesem Grund kann die Thermodynamik nicht vollständig aus der Mikrophysik abgeleitet werden: Es ist nicht möglich, die Thermodynamik aus der Hamilton'schen Mechanik oder aus der Quantentheorie abzuleiten, ohne eine zusätzliche Quelle der Dissipation in die mikroskopischen Gleichungen einzuführen (Muschik und Kaufmann 1992, 1994; Kaufmann 1995; Kaufmann, Muschik und Schirrmeister 1996; Xing 1998; Kato et al. 2000; Gümbel 2004; Gemmer, Michel und Mahler 2009). Um diesen Widerspruch zwischen dynamischer Reversibilität und thermodynamischer Irreversibilität zu überwinden, wurden verschiedene mikroskopische Theorien irreversibler Prozesse entwickelt.

Im Rahmen der statistischen Physik des Nichtgleichgewichts eignet sich hierfür eine zeitasymmetrische generalisierte Liouville-Gleichung (Xing 1998, 2001). Die Annäherung an das Gleichgewicht ist von einer Entropiediffusion begleitet. In Nichtgleichgewichtszuständen diffundiert Entropie von Bereichen hoher Dichte in Bereiche niedriger Dichte. Diese stochastische Diffusion ist der mikroskopische Ursprung der makroskopischen Irreversibilität. Die *Entropiediffusion* wird neben der *Entropieproduktion* eine entscheidende Rolle in einer thermodynamischen Deutung der Quantenmechanik spielen.

Als mikroskopische Repräsentation der Entropie im Rahmen der Quantenmechanik wurde ein mikroskopischer Entropie-Operator vorgeschlagen (Prigogine 1979). Die Zeitentwicklungsoperatoren  $U_t$  bilden bei konservativen Systemen eine Gruppe von unitären Operatoren, bei dissipativen Systemen hingegen nur noch eine Halbgruppe von nichtunitären Operatoren:

$$\text{dynamische Gruppe:} \quad U_t U_s = U_{t+s} \quad \text{für } t, s \in [-\infty, \infty]$$

$$\text{dynamische Halbgruppe:} \quad U_t U_s = U_{t+s} \quad \text{für } t, s \in [0, \infty].$$

Die inversen Transformationen ergänzen die Halbgruppe zu einer Gruppe. Bei der Halbgruppe fehlen diese Rücktransformationen in die Vergangenheit. Dissipative Systeme vergessen ihre Anfangsbedingungen. Die Entropie unterscheidet zwischen Vergangenheit und Zukunft. Auf diese Weise bildet sich der Symmetriebruch in den algebraischen Strukturen ab. Sowohl die klassische Mechanik als auch die Quantenmechanik beschreiben eine *Physik des Seins*, die Thermodynamik dagegen eine *Physik des Werdens*.

Die Irreversibilität hängt eng mit der dynamischen Instabilität zusammen wie sie z. B. für einen Würfel charakteristisch ist. Selbst ein deterministisches mechanisches System kann in seinem Verhalten so empfindlich von seinen Anfangsbedingungen abhängen, dass es unvorhersagbar oder gar chaotisch wird. Dadurch werden die

Anfangsbedingungen letztlich beliebig. Diese „Zufälligkeit“ auf der Mikroebene manifestiert sich auf der Makroebene als Irreversibilität.

Ergänzend zu diesen hochinteressanten Entwicklungen wollen wir hier den umgekehrten Weg beschreiten: die Irreversibilität und den zweiten Hauptsatz als gegeben hinnehmen und die Quantenmechanik aus einer Thermodynamik ableiten. Unsere Fragestellung ist also nicht, wie die makroskopische Irreversibilität mikroskopisch begründet werden kann, sondern – etwas einfacher – wie makroskopische Reversibilität aus mikroskopischer Irreversibilität entstehen kann. Die Schrödinger-Gleichung wird hier als Makroebene angenommen, die allgegenwärtigen Schwingungen auf der (sub)mikroskopischen Ebene etwa als Vakuumfluktuationen.

Das Quantenteilchen kann zwar nicht ohne weiteres aus einem Potential entkommen, es kann sich aber – wie wir noch sehen werden – so darin einrichten, dass es durch eine Kompensation der äußeren Kraft durch innere statistische Kräfte bei Einhaltung gewisser Quantisierungsbedingungen zu einem freien Teilchen wird. Im Gleichgewicht genügt die Beschreibung durch eine Untergruppe der dynamischen Transformationen. Die statistischen Kräfte formen im Gleichgewicht eine Art „inverse Dynamik“ zu den äußeren Kräften (z. B. von Holst und Mittelstaedt 1950; Penrose 1955; Munn und Penrose 1955; Paul 1972, 1981; Waters 1979; Hollerbach 1980; Widrow und Stearns 1985; Isidori 1985; Ljung 1987; Varjú 1990; Haykin 1991; Daunicht 1991, 1996; De Groff et al. 1993; Benaim 1993; Bishop 1995; De Witt, Siciliano und Bastin 1996; Olah 2001).

Eine durchaus vergleichbare Kompensationsstrategie verfolgt ein Zentralnervensystem oder ein künstliches neuronales Netz, das ein Gliedmaßensystem bzw. einen Roboter steuern soll: Mit Hilfe zunächst zufälliger und später zielgerichteter Bewegungen erlernt ein adaptiver Regler eine inverse Kinematik und Dynamik des Gliedmaßensystems. Die Vorwärtstransformationen  $T$  des Körpers werden mit den entsprechenden inversen Transformationen  $T^{-1}$  zu einer Einheit verknüpft, zur (sensu-motorischen) Identität:  $T^{-1}T = 1$ . Dadurch wird das Gliedmaßensystem zu einem System freier Gelenke, das von höheren Hirnzentren auf einfache Weise gesteuert werden kann. Die inverse Dynamik kompensiert automatisch die Schwerkraft, die Reibung sowie alle dynamischen Wechselwirkungen zwischen den Gliedern. Das Gesamtsystem aus Körper und Nervensystem erlangt seine erstaunliche Autonomie und Bewegungsfreiheit, indem es die dynamische Halbgruppe des Körpersystems durch eine neuronale Repräsentation der inversen Halbgruppe zu einer Gruppe ergänzt.

## 1.7 Das Paradox der Zeitumkehrinvarianz

*Dreifach ist der Schritt der Zeit  
zögernd kommt die Zukunft hergezogen,  
pfeilschnell ist das Jetzt entflohen,  
ewig still steht die Vergangenheit.*

*Friedrich Schiller*

Das *Paradox der Zeitumkehrinvarianz* besteht darin, dass die Symmetrie der fundamentalen Naturgesetze unter Zeitumkehr im Widerspruch zur offensichtlichen Anisotropie der physikalischen Zeit steht (Bessenrodt 1990): „Obwohl die physikalischen Grundgesetze zeitumkehrinvariant sind, ist unsere Welt zeitlich ganz unsymmetrisch – die meisten Vorgänge laufen nur in einer Richtung ab, ihre zeitlichen ‚Spiegelbilder‘ treten niemals auf.“ Andererseits hat sich die *Zeitumkehrinvarianz* in vielen Bereichen als äußerst wirkungsvolles Supergesetz erwiesen. Bessenrodt konstatiert eine „auffallende Unterschätzung der Statistischen Thermodynamik – des Stolpersteins aller Zeitumkehrinvarianz-Fans“. Aus thermodynamischer Sicht drängt sich der zweite Hauptsatz als Master-Symmetriebrecher auf.

Im Rahmen der hier angestellten Überlegungen gehen wir nicht von einem zeitumkehrinvarianten Naturgesetz aus, um dann nach den Ursachen eines Symmetriebrechs zu suchen, sondern geben umgekehrt eine Erklärung für die *Entstehung* der höheren Symmetrie der Schrödinger-Gleichung beim Übergang in dissipationsfreie stationäre Zustände und damit eine Begründung für die *Nützlichkeit* der Zeitumkehrinvarianz als Supergesetz: Wenn eine dissipative Physik des Werdens den Weg in einen Attraktor beschreibt, eine konservative Physik des Seins die Dynamik auf dem Attraktor, und wenn das System hinreichend schnell einen Attraktor erreicht und sich deshalb die meiste Zeit im Gleichgewicht befindet, dann ist eine zeitumkehrinvariante Beschreibung gut. Der Erfolg der Zeitumkehrinvarianz als Supergesetz kann damit aus einer impliziten Gleichgewichtsannahme begründet werden: *Zeitumkehrinvarianz* beruht auf einer *Zeitskalentrennung*, die eine adiabatische Elimination schnell relaxierender Prozessanteile ermöglicht (Haken 1981).

Die Zeitskalentrennung spielt eine wichtige Rolle in der statistischen Nichtgleichgewichtstheorie. Das Vorliegen von *Zeitumkehrinvarianz* (ZUI) und *Zeitverschiebungsinvarianz* (ZVI) ist bei linearen Systemen gleichbedeutend damit, dass keine Energieabsorption stattfindet. Wenn umgekehrt der Energietransport zwischen Subsystemen schnell genug, d. h. zeitskalengetrennt in ein Fließgleichgewicht übergeht, verbleiben auf der nächst höheren Makroebene Systeme mit den Invarianzeigenschaften ZUI und ZVI (z. B. Bessenrodt 1983).

Die Klassik folgerte aus der mikroskopischen Zeitumkehrinvarianz, dass die makroskopische Irreversibilität eine Näherung sein müsse, eine Illusion, die auf unsere Unwissenheit zurückzuführen sei. Aus thermodynamischer Sicht ist das Gegenteil wahrscheinlicher: Die Zeitumkehrinvarianz ist eine Näherung und die Reversibilität damit keine universelle Eigenschaft mehr.

Von einer zeitumkehrinvarianten Schrödinger-Gleichung ist nicht zu erwarten, dass sie die Übergänge zwischen den Eigenzuständen ohne weiteres beschreiben

kann. Um Übergangswahrscheinlichkeiten berechnen zu können, wird deshalb eine kleine zeitabhängige Störung als Symmetriebrecher angenommen. Dem zeitunabhängigen Hamilton-Operator des Systems wird ein Störoperator hinzugefügt, der den Übergang induziert. Wird ein solcher Störoperator angenommen, z. B. als Repräsentation eines allgegenwärtigen Rauschens, oder eine weitere dissipative Gleichung, die auf einer schnellen Zeitskala die Entwicklung bis in die Gleichgewichtszustände hinein beschreibt, löst sich das Paradox der Zeitumkehrinvarianz im Bereich der Quantenmechanik. Die Schrödinger-Gleichung modelliert in dieser Interpretation nur einen langsameren Prozessanteil für die dissipationsfreien Eigenzustände. Eine schnelle Relaxation der dissipativen Dynamik erzeugt die höhere Symmetrie des reduzierten Modells.

Veränderung setzt Invarianz voraus und umgekehrt. Heinz von Foerster über eine kybernetische Epistemologie des Lebendigen (von Foerster 1981, 1985): „Die logischen Eigenschaften von ‚Invarianz‘ und ‚Veränderung‘ sind die Eigenschaften von Repräsentationen. Wird dies missachtet, entstehen Paradoxa.“ Das Paradox der Zeitumkehrinvarianz entsteht in diesem Sinne durch das Fehlen einer Repräsentation der hier postulierten dissipativen Dynamik.

*Fazit:* Zeitumkehrinvarianz ist eine Gleichgewichtseigenschaft und Folge einer Zeitskalentrennung. Der Erfolg der Zeitumkehrinvarianz als Supergesetz beruht auf der Annahme einer schnellen Relaxation der dissipativen Anteile der Dynamik. Der Übergang ins Gleichgewicht lässt die zusätzliche Symmetrie entstehen. Die Zeitumkehrinvarianz der Naturgesetze ist also nur eine adiabatische Invarianz. Makroskopische *Irreversibilität* entsteht aus einer instabilen Mikrodynamik, makroskopische *Reversibilität* aus einer schnell relaxierenden Mikrodynamik.

# Kapitel 2

## Thermodynamik irreversibler Prozesse

*Mathematics is a way of saying  
less and less about more and more.  
George Spencer Brown*

Ausgangspunkt der Theorie irreversibler Prozesse ist Boltzmanns Definition der Entropie  $s$  als Logarithmus einer Wahrscheinlichkeit  $P$  und deren Umkehrung durch Planck und Einstein:

$$\text{Boltzmann-Beziehung: } s = k \cdot \ln P \Leftrightarrow P = \exp(s/k).$$

Dabei ist  $k$  die Boltzmann-Konstante. Die Entropie ist ein Maß für die *Irreversibilität* und für die *Unordnung* in einem thermodynamischen System. Unter dem Gesetz der Entropiezunahme versteht man die Tendenz des Universums und jedes isolierten Teilsystems, in Zustände wachsender Unordnung überzugehen.

In Analogie zur klassischen Mechanik werden mit thermodynamische Variablen Lagrange-Funktionen definiert. Thermodynamische Lagrange-Funktionen wurden von Onsager und Machlup in die Statistische Physik eingeführt (Onsager und Machlup 1953). Verschiedene Prozesse sollen anhand der mit ihnen einhergehenden *Entropieänderungen* verglichen werden. Ausgehend von dieser These formuliert Onsager das *Prinzip der kleinsten Energiedissipation* (Onsager 1931). Das Prinzip der kleinsten Energiedissipation entspricht dem Prinzip der kleinsten Wirkung in der klassischen Mechanik.

Die Stabilität thermodynamischer Systeme ist durch das Vorzeichen der zweiten Ableitung, d. h. durch die Krümmung der Entropiedichte bestimmt. Im Gleichgewicht können statistische Kräfte die äußeren Kräfte neutralisieren. Derartige „thermische Response-Überlegungen“ gehen auf Einstein zurück, der sie im Zusammenhang mit seiner Theorie der Brown'schen Bewegung entwickelte (Einstein 1905; Smoluchowski 1923; Uhlenbeck und Ornstein 1930; Onsager 1931; Chandrasekhar 1943; Kubo 1966). Die Brown'sche Bewegung ist die „wichtigste Brücke zwischen Mikro- und Makrophysik“ (Bessenrodt 1977) und dient als einfaches Beispiel für einen irreversiblen Prozess. In offenen Systemen sind nicht nur irreversible, sondern auch *selbstorganisierende Prozesse* möglich. *Entropieexport* und *Expansion* sind die grundlegenden Strategien der Selbstorganisation.

## 2.1 Wahrscheinlichkeit und Entropie

Bei einem thermodynamischen System können Mikro- und Makrozustände unterschieden werden. Die zeitliche Entwicklung des Systems soll einer Zeitskalentrennung genügen; es gibt eine schnelle Mikrodynamik und eine wesentlich langsamere Makrodynamik. Jedem Mikrozustand ist ein wohlbestimmter Makrozustand zugeordnet. Umgekehrt gehören jedoch zu jedem Makrozustand viele verschiedene Mikrozustände. Die elementarste statistische Annahme besteht darin, alle Mikrozustände als gleichwahrscheinlich anzusehen. Die Wahrscheinlichkeit  $P(x)$  eines bestimmten Makrozustands  $x$  ist proportional zur Anzahl der Mikrozustände, die diesen Makrozustand realisieren („Komplexionen“):

$$\text{Wahrscheinlichkeit (Makrozustand)} \sim \text{Anzahl der Mikrozustände}.$$

Die Entropie  $s(x, t)$  eines Makrozustandes  $x$  zur Zeit  $t$  ist proportional zum Logarithmus der Wahrscheinlichkeit  $P(x, t)$  dieses Zustands:

$$\text{Entropiedichte: } s(x, t) = k \cdot \ln P(x, t).$$

Die Entropie ist ein Maß für die Irreversibilität von Prozessen. Für abgeschlossene Systeme besagt der zweite Hauptsatz der Thermodynamik, dass die Entropie nicht abnehmen kann, sondern für irreversible Prozesse zunimmt und für reversible Prozesse gleich bleibt. Für die *Entropieproduktionsdichte*  $ds/dt$  gilt:

$$\text{Zweiter Hauptsatz: } \frac{ds}{dt} \geq 0$$

$$\text{Irreversible Prozesse: } \frac{ds}{dt} > 0$$

$$\text{Reversible Prozesse: } \frac{ds}{dt} = 0.$$

In isolierten Systemen wächst die Entropie und erreicht im Gleichgewicht ihren Maximalwert. Nur irreversible Prozesse tragen zur Entropieerzeugung bei. Der wahrscheinlichste Makrozustand besitzt die meisten ihn realisierenden Mikrozustände und ist durch ein Maximum der Entropie charakterisiert. Eine Zunahme der Entropie bedeutet mikroskopisch das Streben nach dem wahrscheinlichsten Makrozustand. Das thermodynamische Gleichgewicht ist ein Attraktor für Nichtgleichgewichtszustände. Je größer die Zahl der Mikrozustände ist, desto schärfer ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung gepeakt, und desto geringer sind die Fluktuationen um das Gleichgewicht.

## 2.2 Thermodynamische Lagrange-Funktionen

Der makroskopische Zustand eines thermodynamischen Systems sei durch eine Observable  $x$  beschrieben. Eine thermodynamische Kraft  $X(x)$  ist als Ableitung der

Entropiedichte  $s(x)$  nach der phänomenologischen Variablen  $x$  definiert:

$$\text{thermodynamische Kraft: } X = \frac{\partial s}{\partial x} = s'.$$

Ausgehend von einem Fluss, der von den statistischen Kräften abhängt, werden phänomenologische Gleichungen oder *Fluss-Kraft-Beziehungen* von der folgenden Form angenommen (vgl. z. B. Reif 1987; Jetschke 1989; Reichl 1991):

$$\text{Fluss-Kraft-Beziehung: } \dot{x} = J(X).$$

Damit folgt für die Entropieproduktionsdichte:

$$\text{Entropieproduktionsdichte: } \dot{s}(x) = \frac{\partial s}{\partial x} \dot{x} = J \cdot X \geq 0.$$

Irreversible Prozesse werden durch thermodynamische Kräfte  $X$  verursacht und haben Ströme  $J$  zur Folge. Im thermodynamischen Gleichgewicht verschwinden alle Kräfte und Ströme:

$$\text{Gleichgewicht: } X = 0 \wedge J = 0 \Rightarrow \dot{s} = 0.$$

Die Entropiedichte  $s$  ist mit  $P \leq 1$  und  $\ln P \leq 0$  eine Ljapunov-Funktion für isolierte Systeme:

$$\text{Ljapunov-Funktion: } s \leq 0 \wedge \dot{s} \geq 0.$$

Mit den kinetischen Koeffizienten  $R$  werden zwei Dichten wie folgt definiert:

$$\text{Dissipationsfunktion: } \Phi = \frac{1}{2} R^{-1} \dot{x}^2$$

$$\text{Entropieproduktion: } \Psi = \frac{1}{2} R X^2.$$

Aus diesen Größen wird eine *thermodynamische Lagrange-Funktion* zusammengebaut, ganz in Analogie zur klassischen Mechanik als Summe von kinetischen und potentiellen Anteilen (Onsager und Machlup 1953):

$$\text{Lagrange-Funktion: } L = \Phi + \Psi.$$

Die Dissipationsfunktion  $\Phi$  ist das Analogon zur kinetischen Energie, die Entropieproduktion  $\Psi$  entspricht einem Potential.

## 2.3 Das Prinzip der kleinsten Energiedissipation

Das *Prinzip der kleinsten Energiedissipation* (Onsager 1931) in Form des Variationsprinzips

$$\delta [\dot{s} - \Phi] = 0$$

liefert durch Variation der  $\dot{x}$  bei festem  $x$  lineare Bewegungsgleichungen:

$$\delta[\dot{s} - \Phi] = \left( \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}} \right) \cdot \delta \dot{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}} \Leftrightarrow \dot{x} = R \cdot X.$$

Im Falle linearer Fluss-Kraft-Gleichungen hat man

$$\dot{x} = J(X) = R \cdot X \Rightarrow \Phi = \Psi \Rightarrow L = R \cdot X^2.$$

Im Rahmen der *linearen* Theorie irreversibler Prozesse stimmen Dissipationsfunktion und Entropieproduktion also überein. Die Stabilität des Gleichgewichts zieht sofort  $R \geq 0$  nach sich. Denn für die Entropieproduktionsdichte folgt aus dem zweiten Hauptsatz

$$\dot{s}(x) = J \cdot X = R \cdot X^2 \geq 0.$$

Die Matrix  $R$  der kinetischen Koeffizienten erfüllt bei mikroskopischer Zeitumkehrinvarianz *Onsagers Reziprozitätsbeziehung*:  $R = R^T$ .

Wenn in einem stationären Nichtgleichgewichtszustand der Fluss  $J$  verschwindet, gilt folgende Extremalbedingung:

$$\frac{\partial}{\partial X} \dot{s}(x) = 2R \cdot X = 2J = 0.$$

Während im thermodynamischen Gleichgewicht die Entropieproduktion verschwindet, sind stationäre Nichtgleichgewichtszustände durch eine minimale Entropieproduktion charakterisiert. Wenn also gegebene Randbedingungen das System daran hindern, das thermodynamische Gleichgewicht zu erreichen, geht das System in einen Zustand der geringsten Entropieproduktion über. Diese Eigenschaft ist nur in der Nachbarschaft des Gleichgewichts streng gültig. In großer Entfernung vom Gleichgewicht kann das thermodynamische Verhalten ganz anders sein. Das Nichtgleichgewicht kann eine Quelle der Ordnung sein. Diese Ordnung ist durch das Auftreten von dissipativen Strukturen gekennzeichnet.

## 2.4 Thermodynamische Stabilitätstheorie

Wir leiten nun für die thermodynamische Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} R^{-1} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} R X^2$$

die Bewegungsgleichung her:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow R^{-1} \ddot{x} - R X X' = 0.$$

Für lineare Fluss-Kraft-Beziehungen kann diese Bewegungsgleichung auf folgende Form gebracht werden:

$$\ddot{x} - \zeta R \dot{x} = 0.$$

Damit die Dynamik stabil ist, muss der „Reibungskoeffizient“  $\zeta = X' = s''$  negativ sein und wir erhalten ein Kriterium für

$$\text{thermodynamische Stabilität : } \zeta = s'' < 0.$$

Die Entropiedichte  $s(x)$  muss in der Nähe eines Maximums eine konkave Funktion ihrer Variablen sein und folglich eine negative Krümmung besitzen. Die Entropiekrümmung  $\zeta$  ist ein Maß für die Reibung und auch für die Stärke der Fluktuationen im Gleichgewicht. Eine quadratische Approximation der Entropie um ein Maximum liefert mit Einsteins Umkehrung der Boltzmann-Formel den zentralen Grenzverteilungssatz für die Fluktuationen in der Nähe des Gleichgewichts. Reibung und Fluktuationen sind über das *Fluktuations-Dissipations-Theorem* miteinander verknüpft (z. B. Callen und Welton 1951). Onsagers *Regressions-Schwankungs-Hypothese* besagt, dass die Mittelwerte der Schwankungen im Gleichgewicht die makroskopischen Bewegungsgleichungen erfüllen (Onsager 1931; Bessenrodt 1987, 1990). Die Entropiekrümmung  $\zeta$  spielt als *Entropiediffusion* eine wichtige Rolle in neueren Entwicklungen der statistischen Physik des Nichtgleichgewichts (Xing 1998, 2001).

Wenn  $s_0$  die maximale Gleichgewichtsentropie ist, so gilt in zweiter Ordnung

$$s = s_0 + \delta s + \frac{1}{2} \delta^2 s.$$

Da  $s_0$  ein Maximum ist, verschwindet der Term erster Ordnung  $\delta s$  und die Stabilität ist durch das Vorzeichen des Terms zweiter Ordnung  $\delta^2 s$  bestimmt.

Die Differenz der Entropiedichte  $s(x)$  zum Entropimaximum  $s_0$  wird als Überschussentropie oder auch *Exzessentropie* bezeichnet:

$$\text{Exzessentropiedichte : } \delta^2 s = 2 \cdot (s - s_0) = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} (\delta x)^2 = \zeta \cdot (\delta x)^2 \leq 0.$$

Die zeitliche Ableitung der Exzessentropiedichte, die Exzessentropieproduktionsdichte, ist mit der Entropieproduktion verknüpft:

$$\text{Exzessentropieproduktion : } \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \delta^2 s = J \cdot X \geq 0.$$

Aufgrund dieser Eigenschaften spielt die Exzessentropie die Rolle einer Ljapunov-Funktion für thermodynamische Prozesse in der Nähe des Gleichgewichts (De Groot und Mazur 1963; Glansdorff und Prigogine 1971; Nicolis und Prigogine 1977; Jetschke 1989):

$$\text{Ljapunov-Funktion : } \delta^2 s \leq 0 \wedge \frac{d}{dt} \delta^2 s \geq 0.$$

Im Bereich des linearen Regimes hat die Exzessentropieerzeugung das gleiche Vorzeichen wie die Entropieerzeugung selbst. Fern vom Gleichgewicht ändert sich diese Situation. Sind  $\delta J$  und  $\delta X$  die Abweichungen von einem stationären Nichtgleichgewichtszustand, so hängt die Exzessentropieproduktion von der Entropieproduktion dieser Störung ab (Glansdorff und Prigogine 1971; Prigogine 1979):

$$\text{Nichtgleichgewichtszustände: } \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \delta^2 s = \delta J \cdot \delta X .$$

Fern vom Gleichgewicht ist die Exzessentropie  $\delta^2 s$  zwar weiterhin negativ, die Exzessentropieproduktion hat aber im allgemeinen kein eindeutiges Vorzeichen mehr. Die Exzessentropie verliert mithin ihre Eigenschaft, Ljapunov-Funktion zu sein. Für stationäre Nichtgleichgewichtszustände können andere Ljapunov-Funktionen gefunden werden (Fox 1979, 1980).

In der Nähe des Gleichgewichts gewährleistet die Existenz einer Ljapunov-Funktion die Dämpfung aller Schwankungen. Aus diesem Grund ist in der Nähe des Gleichgewichts eine makroskopische Beschreibung ausreichend. Schwankungen treten nur als Korrekturen zu den makroskopischen Gesetzen auf und können für große Systeme vernachlässigt werden. Oberhalb eines kritischen Abstands vom thermodynamischen Gleichgewicht können jedoch gewisse Schwankungen verstärkt werden und makroskopische „dissipative“ Strukturen erzeugen, die durch eine Energiezufuhr von außen stabilisiert werden.

Die Exzessentropie hat eine weitere Bedeutung als Maß für die Komplexität eines Systems (Grassberger 1986; Feldman und Crutchfield 1998, 2003; Bialek, Nemenman und Tishby 2001; Crutchfield und Feldman 2003). Sie verschwindet für die beiden Extreme totaler Zufälligkeit und totaler Vorhersagbarkeit. Im Zwischenbereich zwischen Zufall und Notwendigkeit ist ein komplexeres Systemverhalten möglich bis hin zur Selbstorganisation (Haken 1981).

Fassen wir zusammen, was wir über die statistischen Potentiale wissen. Die Entropie spielt in der Theorie irreversibler Prozesse eine Doppelrolle als Potential statistischer Kräfte und als Wahrscheinlichkeitsexponent:

- Die *Entropie* ist Wahrscheinlichkeitsexponent:  $P = \exp(s/k)$
- Die *Entropie* ist Potential der statistischen Kraft:  $s' = X$
- Die *Entropieproduktion* ist Potential des Flusses:  $\frac{\partial}{\partial x} \dot{s} = 2\zeta \cdot \dot{x}$
- Die *Exzessentropie* ist Ljapunov-Funktion des Flusses:  $\frac{d}{dt} \delta^2 s \geq 0 .$

Für die weiteren Untersuchungen benutzen wir die folgenden vereinfachten Dichten:

$$\text{Entropieproduktionsdichte: } \sigma = s'^2 = X^2$$

$$\text{Entropiediffusionsdichte: } \zeta = s'' = X' .$$

## 2.5 Brown'sche Bewegung in einem Potential

Die Wahrscheinlichkeitsdichte  $P(x,t)$  für die Brown'sche Bewegung in Gegenwart einer äußeren Kraft  $K(x)$  genügt einer *Fokker-Planck-Gleichung* der Form

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(KP) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}.$$

Für stationäre Lösungen gilt:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(KP) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}.$$

Die resultierende Gleichung kann sofort einmal nach  $x$  hochintegriert werden; die anfallende Integrationskonstante wird aus Gründen der hinreichenden Lokalisierung zu Null gesetzt:

$$KP = \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x} \Rightarrow K = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \ln P = \frac{1}{2k} \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{2k} X.$$

Im stationären Zustand kompensiert die thermodynamische Kraft  $X$  die äußere Kraft  $K$ . Auf der Ebene der Potentiale zeigt sich der Potentialcharakter der Entropie  $s$ . Wenn  $V(x)$  das Potential der Kraft  $K(x)$  ist, kommt mit  $K = -V'$

$$K = \frac{1}{2k} X \Rightarrow -V = \frac{1}{2k} s \Rightarrow P = \exp(-2V).$$

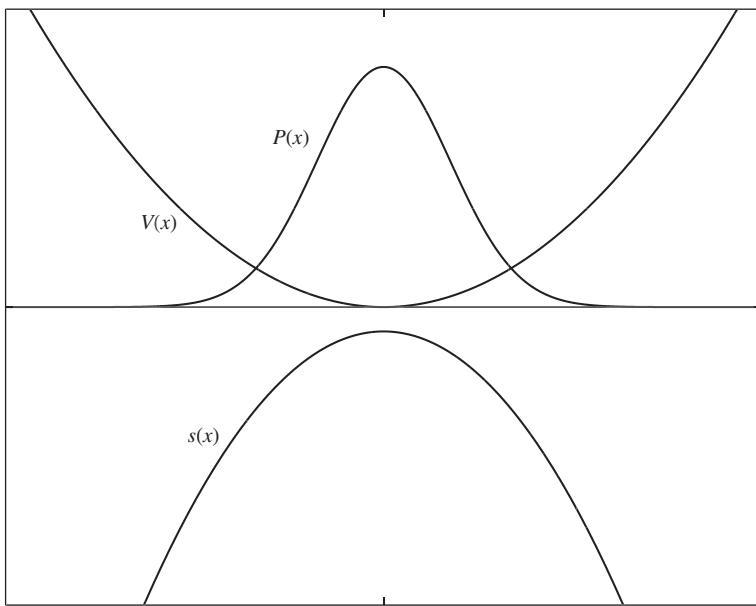


Abb. 2.1 Brown'sche Bewegung im Oszillatorenpotential

Potentialminima entsprechen Wahrscheinlichkeitsmaxima; Potentialmaxima entsprechen Wahrscheinlichkeitsminima. Für einen harmonischen Oszillatator mit  $K = -x$  ist die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichte eine Gauß-Verteilung (Abb. 2.1):

$$V = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow \frac{s}{k} = -2V = -x^2 \Rightarrow P = \exp(-x^2).$$

Im Gleichgewicht ist die Entropie maximal. Die Schärfe des Entropiemaximums ist ein Maß für die Schwankung einer statistischen Größe (Einstein 1905; Smoluchowski 1923; Uhlenbeck und Ornstein 1930; Onsager 1931; Kubo 1966; Chandrasekhar 1943).

## 2.6 Selbstorganisation und Entropieexport

*Das, wovon ein Organismus sich ernährt, ist negative Entropie.*

*Erwin Schrödinger*

Thermodynamische Prozesse können nicht nur *reversibel* oder *irreversibel*, sondern auch *selbstorganisierend* sein. Von einem selbstorganisierenden System wird erwartet, dass es seine innere Ordnung mit der Zeit vergrößert, seine Entropie  $s$  also abnimmt:

$$\text{Selbstorganisation : } \frac{ds}{dt} < 0.$$

Wegen des zweiten Hauptsatzes ist aber sofort klar, dass ein isoliertes System alleine niemals selbstorganisierend sein kann, sondern nur *selbstdesorganisierend*. Die Wechselwirkung mit einer Umwelt ist also eine notwendige Bedingung für Selbstorganisation. Nur offene Systeme können selbstorganisierend sein. Selbstorganisation ist eine Eigenschaft des Gesamtsystems, dessen Gesamtentropie natürlich insgesamt zunehmen muss (z. B. Schrödinger 1947; Eigen und Schuster 1978; von Foerster 1981, 1985; Nicolis und Prigogine 1987; Jetschke 1989). Wenn  $s_S$  die Entropie eines selbstorganisierenden Systems ist und  $s_E$  die Entropie der Umwelt, dann muss für die Gesamtentropie  $s$  des Universums der zweite Hauptsatz gelten:

$$s = s_S + s_E \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{ds_S}{dt} + \frac{ds_E}{dt} \geq 0 \Rightarrow \frac{ds_E}{dt} \geq -\frac{ds_S}{dt}.$$

Die Entropie eines selbstorganisierenden Systems kann demzufolge nur dann abnehmen, wenn die Entropie der Umwelt entsprechend zunimmt und damit die höhere Ordnung im Subsystem mindestens kompensiert:

$$\frac{ds_S}{dt} < 0 \Rightarrow \frac{ds_E}{dt} > 0.$$

Selbstorganisation ist nur auf Kosten einer Desorganisation der Umwelt möglich, d. h. durch *Entropieexport*. Diese Umwelt muss demnach strukturiert sein, denn

woher sonst soll das selbstorganisierende System seine Ordnung assimilieren? Es muss allein deshalb eine gewisse Ordnung geben, weil der Zustand maximaler Unordnung des Universums noch nicht erreicht ist. Daher nimmt die Entropie immer noch zu. Wo aber kommt die Ordnung im Universum her, die dann abnehmen und von „selbstorganisierenden“ Systemen assimiliert werden kann?

Die *relative Entropie* ist definiert als Verhältnis der tatsächlichen Entropie  $s_S$  zur maximalen Entropie  $s_m$  des betrachteten Systems. Aus der relativen Entropie ergibt sich die *Redundanz*  $R$ :

$$\text{Redundanz: } R = 1 - \frac{s_S}{s_m}.$$

Die Redundanz ist ebenfalls ein Maß für die Ordnung in einem System und nimmt offenbar Werte zwischen 0 und 1 an:

$$\text{maximale Unordnung: } s_S = s_m \Rightarrow R = 0$$

$$\text{maximale Ordnung: } s_S = 0 \Rightarrow R = 1.$$

Damit lässt sich sofort ein Kriterium dafür angeben, dass ein System sich selbst organisiert. Es muss Redundanz erzeugen, indem es seine tatsächliche Unordnung  $s_S$  verringert oder seine maximal mögliche Unordnung  $s_m$  vergrößert (Sahal 1979; von Foerster 1981, 1985):

$$\text{Selbstorganisationskriterium: } \frac{dR}{dt} > 0 \Rightarrow \frac{1}{s_m} \frac{ds_m}{dt} > \frac{1}{s_S} \frac{ds_S}{dt}.$$

Interessant an dieser Form des Selbstorganisationskriteriums, das aus dem Jahre 1960 stammt, ist vor allem, dass die tatsächliche Entropie  $s_S$  des Systems nicht notwendig abnehmen muss, damit das System höhere Zustände der Organisation erreicht! Das Kriterium sagt lediglich aus, dass für selbstorganisierende Prozesse die relative Zunahme der *maximalen* Unsicherheit größer ist als die relative Zunahme der *faktischen* Unsicherheit. Zur Verdeutlichung werden zwei Enkel von Maxwell's Dämon angestellt (von Foerster 1981, 1985): Der *innere* Dämon arbeitet an einer Verringerung der tatsächlichen Unordnung  $s_S$  bei konstanter maximaler Unordnung ( $s_m = \text{const}$ ), der *äußere* Dämon dagegen sorgt für eine Vergrößerung der maximal möglichen Unordnung  $s_m$  bei einer konstanten tatsächlichen Unordnung ( $s_S = \text{const}$ ):

$$\text{innerer Dämon: } \frac{ds_m}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{ds_S}{dt} < 0$$

$$\text{äußerer Dämon: } \frac{ds_S}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{ds_m}{dt} > 0.$$

Die einfachste Möglichkeit des äußeren Dämons besteht darin, im „Verhaltensuniversum“ des Systems neue Zustände zu erzeugen, z. B. durch *Expansion*. Die Entropie eines Systems mit  $N$  gleichwahrscheinlichen Zuständen beispielsweise hat die Gestalt  $s_m \sim \ln N$ . Die maximale Entropie wird folglich zunehmen, wenn die Zahl der Zustände sich vergrößert. Demzufolge kann die im Universum vorhandene Ord-

nung durch die Expansion des Universums zustande gekommen sein, insofern im Zuge der Expansion immer neue räumliche Zustände zur Verfügung gestellt werden. Expansion ist also eine mögliche Quelle von Selbstorganisation. Der äußere Dämon alleine vermag aber keine langfristig stabilen Strukturen zu schaffen. In einer begrenzten Petrischale ist kein grenzenloses Wachstum möglich. Nicht wenige Kulturen und Unkulturen haben versucht, durch wirtschaftliche bzw. kriegerische Expansion ihre innere Organisation aufrecht zu erhalten. Nicht selten schien eine Expansion der einzige Ausweg aus einer Schuldenfalle, einem drohenden Staatsbankrott und einer von der Zinseszinsformel getriebenen Vermögens- und Verschuldungskaskade zu sein. In der *Wachstumsphase* kann der *äußere* Dämon eine wichtiger Motor der Entwicklung sein; in der *Sättigungsphase* hingegen sollte der *innere* Dämon wirksam werden. Ein wichtiges Kennzeichen selbstorganisierender Systeme ist, dass sie die Umweltordnung in ihrer eigenen Organisation abbilden, assimilieren. Das kann z. B. dadurch geschehen, dass ein Zentralnervensystem mit Hilfe eines inneren Dämons ein inverses Modell seiner Umwelt erlernt und dem Gesamtorganismus auf diese Weise zu mehr Autonomie verhilft. Da für den Geldstrom die gleichen Gesetze gelten wie etwa für den elektrischen Strom, würde der innere Dämon zur Stabilisierung des Finanzsystems einen *Bandpass* in den Geldstrom einbauen: einen *Hochpass* als Offsetkorrektur in der Zinsstruktur, um den Zinseszinseffekt bei niedrigen Wachstumsraten zu vermeiden, und einen *Tiefpass*, um die unerwünschten spekulativen Schwankungen wichtiger volkswirtschaftlicher Variablen zu dämpfen. Dadurch würde die gefährliche exponentielle Eigendynamik des Geldes gebremst. Ziel der Regelung ist die Einhaltung der *Goldenen Regel der Kapitalakkumulation*, wonach die Gleichheit von Realzinsniveau und Wachstumsrate eine *notwendige* Bedingung für ein optimales Wachstum mit maximalem Konsum und maximalem Gewinn ist (z. B. Olah 2001; Olah, Huth und Löhr 2010).

*Fazit:* Selbstorganisierende Systeme sind Entropieverzögerer und Redundanzerzeuger, die Ordnung (Negentropie) aus ihrer Umwelt importieren und Unordnung (Entropie) exportieren. Die beiden einfachsten Selbstorganisationsstrategien sind *Expansion* und *Entropieexport*. Zur Maximierung der Selbstorganisationsmöglichkeiten folgt aus der Tätigkeit des inneren bzw. äußeren Dämons Heinz von Foersters ästhetischer resp. ethischer Imperativ (von Foerster 1981, 1985):

*Ästhetischer Imperativ: Willst du erkennen, lerne zu handeln.*

*Ethischer Imperativ: Handle stets so, dass weitere Möglichkeiten entstehen.*

# Kapitel 3

## Umdeutung der Schrödinger-Gleichung

*Understanding has to do with the fact  
that what ever is said or done  
can always be said or done a different way,  
and yet all ways remain the same.*

*George Spencer Brown*

Der Unterschied zwischen der klassischen Mechanik und der Quantenmechanik zeigt sich am deutlichsten beim Vergleich der entsprechenden Hamilton-Jacobi-Gleichungen. Für das nichtklassische Verhalten des Quantenobjekts ist das zusätzliche „Quantenpotential“ in der quantenmechanischen Hamilton-Jacobi-Gleichung verantwortlich zu machen. An diesem Zusatzterm kann eine statistische Deutung mit thermodynamischen Begriffen am einfachsten ansetzen. Hierzu kann das Quantenpotential von der Wellenfunktion auf die Wahrscheinlichkeitsdichte und weiter auf die Entropiedichte umgeschrieben werden. Damit zeigt sich das Quantenpotential als Summe aus zwei statistischen Potentialen:

$$\text{Quantenpotential} = \text{Entropieproduktion} + \text{Entropiediffusion}.$$

Die stationäre Schrödinger-Gleichung ist äquivalent zu einer speziellen Riccati-Differentialgleichung für eine statistische Kraft, das Superpotential. In stationären gebundenen Zuständen wird die äußere Kraft durch statistische Kräfte kompensiert. Durch die Kompensation wird das Quantenobjekt zu einem freien Teilchen.

In einer thermodynamischen Deutung werden Quantenobjekte nicht mehr als konservative Systeme angesehen, sondern als dissipative Systeme, deren Energie-dissipation in stationären Zuständen verschwindet. Im Rahmen der linearen Thermodynamik irreversibler Prozesse wird eine Evolutionsgleichung für die Entropiedichte bzw. für die statistische Kraftdichte abgeleitet, die den Übergang in die dissipationsfreien stationären Zustände hinein beschreibt.

Die Schrödinger-Gleichung eines Einzelteilchens in einem äußeren Potential kann aus einer *thermodynamischen* Lagrange-Funktion hergeleitet werden. Die bekannten Herleitungen der Schrödinger-Gleichung aus Wirkungsprinzipien mit *feldtheoretischen* Lagrange-Dichten werden ebenfalls auf thermodynamische Variablen transformiert.

### 3.1 Transformation des Quantenpotentials

Wir betrachten zunächst die eindimensionale Schrödinger-Gleichung für die Wellenfunktion  $\psi(x, t)$  eines Teilchens mit der Masse  $m$  in einem äußeren Potential  $V(x)$ :

$$\text{Schrödinger-Gleichung: } i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V \right) \psi.$$

Dabei ist  $\hbar$  ist das Planck'sche Wirkungsquantum. Die Born'sche Deutung interpretiert das Quadrat der Wellenfunktion als Wahrscheinlichkeit  $P(x, t)$ , das Teilchen zur Zeit  $t$  am Ort  $x$  anzutreffen:

$$\text{Born'sche Deutung: } P(x, t) = \psi^2(x, t).$$

Durch den allgemeinen Ansatz

$$\psi(x, t) = A(x, t) \cdot \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(x, t)\right)$$

kann die komplexe Schrödinger-Gleichung in zwei reelle Differentialgleichungen zerlegt werden, die der Schrödinger-Gleichung in Strenge äquivalent sind (Madelung 1926, 1927; Bohm und Vigier 1954; Messiah 1976). Mit  $P = A^2$  ergibt sich eine Hamilton-Jacobi-Gleichung für die Wirkung  $S(x, t)$  und eine Kontinuitätsgleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte  $P(x, t)$ :

$$\begin{aligned} \text{Hamilton-Jacobi-Gleichung: } \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(S')^2}{2m} + V &= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{A''}{A} \\ \text{Kontinuitätsgleichung: } \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( P \cdot \frac{S'}{m} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Die Kontinuitätsgleichung ist rein klassisch und drückt die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit aus. Der entscheidende Unterschied zur klassischen Mechanik zeigt sich auf der rechten Seite der Hamilton-Jacobi-Gleichung als ein zusätzliches „Quantenpotential“:

$$\text{Quantenpotential: } U = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{A''}{A}.$$

Im klassischen Grenzfall verschwindet dieser Term mit dem Wirkungsquantum und es bleibt die klassische Hamilton-Jacobi-Gleichung. Um das Quantenpotential thermodynamisch umzudeuten, benutzen wir Einsteins Umkehrung der Boltzmann-Beziehung, dass die Entropie proportional zum Logarithmus der Wahrscheinlichkeit ist (Einstein 1910; Onsager 1931; Onsager und Machlup 1953). Aus der Wahrscheinlichkeitsdichte  $P(x, t)$  kann damit eine Entropiedichte  $s(x, t)$  und daraus eine statistische Kraft  $s'$  berechnet werden, wobei  $k$  die Boltzmann-Konstante ist:

$$P(x) = \exp\left(\frac{s(x)}{k}\right) \Rightarrow s' = k \frac{P'}{P}.$$

Das Quantenpotential  $U$  wird nun wie folgt umgeformt (Olah 2001):

$$\begin{aligned} U &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{A''}{A} = -\frac{\hbar^2}{4m} \left[ \frac{P''}{P} - \frac{1}{2} \left( \frac{P'}{P} \right)^2 \right] = -\frac{\hbar^2}{4m} \left[ \left( \frac{P'}{P} \right)' + \frac{1}{2} \left( \frac{P'}{P} \right)^2 \right] \\ &= -\frac{\hbar^2}{4m} \left[ \frac{s''}{k} + \frac{s'^2}{2k^2} \right]. \end{aligned}$$

Durch diese Variablentransformationen tauchen zwei bekannte Funktionen aus der Thermodynamik irreversibler Prozesse auf:

$$\text{Entropieproduktion : } \sigma(x) = s'^2$$

$$\text{Entropiediffusion : } \zeta(x) = s''.$$

Das Quantenpotential besteht damit aus zwei thermodynamischen Potentialen:

$$\text{Quantenpotential : } U = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{A''}{A} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{\zeta}{2k} + \frac{\sigma}{4k^2} \right].$$

Von der quantenmechanischen Hamilton-Jacobi-Gleichung aus können wir nun den Weg der klassischen Mechanik rückwärts beschreiben:

$$\text{Hamilton-Jacobi-Gleichung : } \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(S')^2}{2m} + V + U = 0.$$

Mit Hilfe einer geeigneten kanonischen Transformation gehen wird von der thermodynamischen Hamilton-Jacobi-Gleichung zu einer thermodynamischen Hamilton-Funktion über, und von dort über eine Legendre-Transformation zu einer entsprechenden thermodynamischen Lagrange-Funktion (z. B. Goldstein 1987). Wenn  $p$  den Impuls des Teilchens bedeutet, kommt also:

$$\text{Hamilton-Funktion : } H = \frac{p^2}{2m} + V + U$$

$$\text{Lagrange-Funktion : } L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V - U.$$

Aus dieser Lagrange-Funktion kann die Schrödinger-Gleichung hergeleitet werden.

## 3.2 Ableitung der Schrödinger-Gleichung

Um die Schrödinger-Gleichung in drei räumlichen Dimensionen aus einer thermodynamischen Lagrange-Funktion herzuleiten, werden folgende Funktionen benötigt:

$$\text{Wellenfunktion : } \psi(x, t) = A(x, t) \cdot \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(r, t)\right)$$

$$\text{Wahrscheinlichkeit : } P(x, t) = |\psi(x, t)|^2 = \exp\left(\frac{s(x, t)}{k}\right)$$

$$\text{Entropiedichte : } s(x, t) = k \cdot \ln P(x, t) = k \cdot \ln |\psi|^2$$

$$\text{Entropieproduktion : } \sigma(x, t) = (\nabla s)^2 \geq 0$$

$$\text{Entropiediffusion : } \zeta(x, t) = \Delta s < 0$$

$$\begin{aligned} \text{Quantenpotential : } U(x, t) &= -\frac{\hbar^2}{4m} \left[ \frac{\zeta(x, t)}{k} + \frac{\sigma(x, t)}{2k^2} \right] \\ &= -\frac{\hbar^2}{4m} \left[ \frac{\Delta s}{k} + \frac{(\nabla s)^2}{2k^2} \right]. \end{aligned}$$

Damit lässt sich die Schrödinger-Gleichung für ein Teilchen in einem Potential  $V(x)$  auf dem Weg über die Hamilton-Jacobi-Gleichung aus einer Lagrange-Funktion ableiten:

$$\text{Lagrange-Funktion : } L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) - U(x, t)$$

$$\text{Hamilton-Jacobi-Gleichung : } \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta A}{A}$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung : } m \frac{\partial P}{\partial t} + \text{div}(P \cdot \nabla S) = 0$$

$$\text{Schrödinger-Gleichung : } i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x) \right) \psi(x, t).$$

In der Schrödinger-Gleichung ist die Kontinuitätsgleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte durch die komplexe Zusammenfassung mit der Hamilton-Jacobi-Gleichung auf elegante Art und Weise mit eingewoben. Die Kontinuitätsgleichung selbst ist klassisch; hier tritt kein Wirkungsquantum auf. Für das nichtklassische Verhalten des Quantenobjekts ist das Quantenpotential auf der rechten Seite der quantenmechanischen Hamilton-Jacobi-Gleichung verantwortlich zu machen.

### 3.3 Superpotential und Riccati-Gleichung

Es ist bekannt, dass die stationäre Schrödinger-Gleichung äquivalent ist zu einer speziellen Riccati-Differentialgleichung (Kamke 1967). Dabei wird die stationäre Schrödinger-Gleichung von einer Eigenwertgleichung in eine Kompensationsgleichung umgeschrieben:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + (E - V) \psi = 0 \Leftrightarrow \left( \frac{\psi'}{\psi} \right)' + \left( \frac{\psi'}{\psi} \right)^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (V - E).$$

Mit Hilfe des Superpotentials  $W = -\psi'/\psi$  aus der supersymmetrischen Quantenmechanik (Witten 1981; Bessenrodt 1999) kann diese Riccati-Gleichung auf eine sehr einfache Form gebracht werden:

$$\text{Riccati-Gleichung : } W^2 - W' = \frac{2m}{\hbar^2} (V - E) .$$

Das Superpotential ist im Wesentlichen eine statistische Kraft. Das Quantenpotential wird nun durch das Superpotential ausgedrückt. Die Lagrange-Funktion und die Hamilton-Funktion des Quantensystems werden noch einmal aufgeschrieben. Daraus ergeben sich die entsprechenden Bewegungsgleichungen, die Lagrange-Gleichungen bzw. die kanonischen Gleichungen:

$$\text{Superpotential : } W(x, t) = -\frac{\psi'}{\psi} = -\frac{s'}{2k} = -\frac{X}{2k}$$

$$\text{Entropieproduktion : } \sigma(x, t) = s'^2 = X^2 = 4k^2 \cdot W^2$$

$$\text{Entropiediffusion : } \xi(x, t) = s'' = X' = -2k \cdot W'$$

$$\text{Quantenpotential : } U(x, t) = -\frac{\hbar^2}{4m} \left[ \frac{\zeta}{k} + \frac{\sigma}{2k^2} \right] = -\frac{\hbar^2}{2m} [W^2 - W']$$

$$\text{Lagrange-Funktion : } L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x) + \frac{\hbar^2}{2m} [W^2 - W']$$

$$\text{Hamilton-Funktion : } H(p, x, t) = \frac{p^2}{2m} + V(x) - \frac{\hbar^2}{2m} [W^2 - W']$$

$$\text{Lagrange-Gleichung : } m\ddot{x} = -V' + \frac{\hbar^2}{2m} [2WW' - W'']$$

$$\begin{aligned} \text{kanonische Gleichungen : } \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \wedge \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\hbar^2}{2m} [2WW' - W''] . \end{aligned}$$

In den thermodynamischen Variablen sind die stationären Zustände durch eine Kompensation des äußeren Potentials  $V$  durch das Quantenpotential  $U$  bis auf die Energie  $E$  charakterisiert:

$$\text{stationäre Zustände : } V + U = E \Leftrightarrow \frac{\sigma}{4k^2} + \frac{\zeta}{2k} = W^2 - W' = \frac{2m}{\hbar^2} (V - E) .$$

Auf der Beschreibungsebene der Bewegungsgleichungen resultiert aus der Kompensation der äußeren Kraft  $F = -V'$  durch die statistischen Kräfte ein freies Teilchen:

$$\frac{\hbar^2}{2m} [W^2 - W'] = (V - E) \Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m} [2WW' - W''] = -F \Rightarrow m\ddot{x} = \dot{p} = 0 .$$

Die Integration dieser Kompensationsforderung liefert genau die Riccati-Gleichung für die stationären Zustände zurück. Die Integrationskonstante  $E$  ist so zu bestimmen, dass Lösungen existieren.

### 3.4 De-Broglie-Bohm-Theorie

Für de Broglie war die Wellenfunktion eine Art „Führungswelle“ oder „Pilotwelle“, die die Bewegung des Teilchens bestimmt (de Broglie 1926, 1927, 1928, 1964). In ähnlicher Weise interpretierte Bohm das Quantenpotential  $U$  als „Führungsfeld“ für die Bewegung des Teilchens (Bohm 1951, 1952; Bohm und Vigier 1954; Bell 1966, 1987; Kochen und Specker 1967; Mermin 1990; Valentini 1991, 1992; Vink 1993; Bohm und Hiley 1993; Holland 1993, 1998; Cushing 1994; Goldstein 1996; Ghirardi und Deotto 1998; Dürr 2001; Dürr, Goldstein und Zanghì 1992, 2004; Myrvold 2003; Passon 2004, 2006; Teufel und Tumulka 2005; Bacciagaluppi und Valentini 2007). Die Hamilton-Jacobi-Gleichung mit Quantenpotential soll weiterhin eine Teilchenbewegung beschreiben:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V + U = 0.$$

Die auf das Teilchen wirkenden Kräfte werden nicht nur aus dem klassischen Potential  $V$  abgeleitet, sondern zusätzlich aus dem Quantenpotential  $U$ . Das Quantenpotential ist eine Art Bugwelle, die das Teilchen im Vakuum erzeugt.

Der klassische Weg, die Hamilton-Jacobi-Gleichung mit Teilchentrajektorien zu verbinden, soll auch im quantenmechanischen Bereich beibehalten werden. Bohm nahm an, dass der klassische Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit  $v$  des Teilchens bzw. dem Teilchenimpuls  $p$  und der Wirkung  $S$  als sogenannte „Führungsgleichung“ gültig bleibt:

$$p = \nabla S \Leftrightarrow v = \frac{\nabla S}{m}.$$

Für die stationäre Hamilton-Jacobi-Gleichung gilt aber:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E \Rightarrow \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V + U = E.$$

Andererseits folgt aus der stationären Schrödinger-Gleichung eben auch  $V + U = E$  für geeignete Energiewerte  $E$ . Im Gegensatz zur Klassik ergibt sich daraus die räumliche Konstanz der verkürzten Wirkung  $S_0$  und damit eine verschwindende Geschwindigkeit:

$$V + U = E \Rightarrow \frac{(\nabla S)^2}{2m} = 0 \Rightarrow \nabla S = p = m \cdot v = 0 \Rightarrow S = S_0 - E \cdot t.$$

Demnach kann eine „Führung“ durch einen Gradienten der Wirkung nur in nicht-stationären Zuständen wirksam werden. Das macht wenig Sinn für klassische deterministische Teilchenbahnen, mehr schon für eine thermodynamische Deutung der beteiligten Variablen.

Interessant an der de-Broglie-Bohm-Theorie ist also aus thermodynamischer Sicht die Zurückführung der Quanteneffekte auf das Quantenpotential, welches thermodynamisch weiter ausgedeutet wurde.

### 3.5 Dissipationsfreiheit der stationären Zustände

Durch die thermodynamische Umdeutung der Schrödinger-Gleichung wird das Quantenobjekt nicht mehr als konservatives, sondern als dissipatives System aufgefasst. Die Energiedissipation kann als totale Zeitableitung der Hamilton-Funktion  $H$  längs Lösungen der kanonischen Gleichungen ermittelt werden und ist durch die explizite Zeitabhängigkeit von  $H$  gegeben:

$$\text{Hamilton-Funktion : } H = \frac{p^2}{2m} + V + U$$

$$\text{Energiedissipation : } \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Die explizite Zeitabhängigkeit steckt im Quantenpotential  $U$ . In stationären Zuständen stellt sich das Quantenpotential so ein, dass die Riccati-Gleichung erfüllt ist. Übergänge in stationäre Zustände sind folglich durch eine Energiedissipation gekennzeichnet, während die Energiedissipation in stationären Zuständen gerade verschwindet. Im klassischen Grenzfall ergibt sich ebenfalls Dissipationsfreiheit und damit ein konservatives System:

$$\text{stationäre Zustände : } \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0$$

$$\text{klassischer Grenzfall : } \hbar \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} \rightarrow 0.$$

Um die dissipative Dynamik, die das System ins Gleichgewicht führt, genauer zu verstehen, betrachten wir die Bewegungsgleichung des Systems:

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= -\nabla(V + U) = -\nabla V + \frac{\hbar^2}{4m} \nabla \left[ \frac{(\nabla s)^2}{2k^2} + \frac{\Delta s}{k} \right] \\ &= -\nabla V + \frac{\hbar^2}{4m} \left[ \frac{X \cdot \nabla X}{k^2} + \frac{\Delta X}{k} \right]. \end{aligned}$$

Mit einer linearen Fluss-Kraft-Beziehung der Form  $v = \dot{x} = X = \nabla s$  folgt daraus die gesuchte Evolutionsgleichung für die Entropiedichte  $s$  oder die statistische Kraftdichte  $X$ :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{m} (E - V - U) = \frac{1}{m} (E - V) + \frac{\hbar^2}{4m^2} \left[ \frac{1}{2k^2} (\nabla s)^2 + \frac{1}{k} \Delta s \right]$$

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{1}{m} \nabla(V + U) = -\frac{1}{m} \nabla V + \frac{\hbar^2}{4m^2} \left[ \frac{1}{k^2} X \cdot \nabla X + \frac{1}{k} \Delta X \right].$$

Auf der Beschreibungsebene der Entropie ist die Dynamik durch ein Wechselspiel zwischen *Entropieproduktion* und *Entropiediffusion* bestimmt, auf der Beschreibungsebene der Kräfte durch *Konvektion* und *Reibung*. In stationären Zuständen ergibt sich wieder die Riccati-Gleichung:

$$\frac{ds}{dt} = 0 \Rightarrow V + U = E \Leftrightarrow \frac{(\nabla s)^2}{4k^2} + \frac{\Delta s}{2k} = \frac{2m}{\hbar^2} (V - E) .$$

Mit der Annahme einer linearen Fluss-Kraft-Beziehung  $v = X$  erhalten wir einen Zwei-Zeiten-Formalismus: Die Schrödinger-Gleichung beschreibt die langsamere Dynamik, die Evolutionsgleichung für die Entropiedichte die schnellere Dynamik. Die schnelle Dynamik sorgt für eine Kompensation des *äußeren* Potentials durch eine entsprechende Entropieverteilung, d. h. durch ein statistisches *inneres* Potential, das im System selbst erzeugt wird.

*Fazit:* Quantensysteme sind dissipative Systeme, die in stationären Zuständen konservativ werden. In stationären Zuständen wird das Quantenobjekt durch eine Kompensation der äußeren Kraft durch statistische Kräfte zu einem freien Teilchen. Diese Beschleunigungsfreiheit ist der Grund, warum in den Eigenzuständen keine Strahlungsdämpfung stattfindet.

## 3.6 Feldtheoretische Lagrange-Dichten

Die bekannten Herleitungen von Schrödinger-Gleichungen aus Wirkungsprinzipien verwenden Lagrange-Dichten  $L$ , die von  $\psi(x, t)$ ,  $\psi^*(x, t)$  und deren ersten Ableitungen abhängen (Roman 1965; Spatschek 1990; Hasegawa und Kodama 1995). Die hier betrachtete Schrödinger-Gleichung ergibt sich z. B. bei Variation nach  $\psi^*$  aus

$$L = \frac{i\hbar}{2} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} - V \psi^* \psi .$$

Um die feldtheoretische Lagrange-Dichte ebenfalls konsequent auf statistische Variablen zu transformieren, werden folgende Zusammenhänge benötigt:

$$\text{Wellenfunktion :} \quad \psi = A \cdot \exp \left( \frac{i}{\hbar} S \right)$$

$$\text{Wirkung :} \quad S = \frac{i\hbar}{2} \ln \left| \frac{\psi^*}{\psi} \right|$$

$$\text{Amplitude :} \quad A = \sqrt{\psi^* \psi} = |\psi|$$

$$\text{Entropie :} \quad s = k \cdot \ln (\psi^* \psi) = k \cdot \ln (A^2)$$

$$\text{Wahrscheinlichkeit :} \quad P = |\psi|^2 = A^2 = \exp \left( \frac{s}{k} \right) .$$

Damit kann die quantenmechanische Lagrange-Dichte wie folgt transformiert werden:

$$\begin{aligned} L(\psi, \psi^*) &= \frac{i\hbar}{2} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right) - \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 - V |\psi|^2 \\ L(S, A) &= A^2 \cdot \left[ \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V + \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\nabla A}{A} \right)^2 \right] \\ L(S, P) &= P \cdot \left[ \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V + \frac{\hbar^2}{8m} \left( \frac{\nabla P}{P} \right)^2 \right] \\ L(S, s) &= \exp \left( \frac{s}{k} \right) \cdot \left[ \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V + \frac{\hbar^2}{8m} \left( \frac{\nabla s}{k} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

In welchen Variablen die Lagrange-Dichte auch angeschrieben wird, stets liefern die feldtheoretischen Euler-Lagrange-Gleichungen die in diesen Variablen ausgedrückte Hamilton-Jacobi-Gleichung und die Kontinuitätsgleichung zurück. Alle aufgeführten Lagrange-Dichten führen zu äquivalenten Darstellungen der Schrödinger-Gleichung in den entsprechenden Variablen:

$$\begin{aligned} L(\psi, \psi^*) &\Rightarrow \quad \text{Schrödinger-Gleichung} \quad \wedge \quad \text{Schrödinger-Gleichung*} \\ &\Downarrow \Updownarrow \quad \Downarrow \Updownarrow \\ L(S, P) &\Rightarrow \quad \text{Hamilton-Jacobi-Gleichung} \quad \wedge \quad \text{Kontinuitätsgleichung}. \end{aligned}$$

Das Variationsprinzip, aus dem diese Gleichungen abgeleitet werden, kann auch mit Hilfe der *Fisher-Information* aufgeschrieben werden (vgl. Fisher 1925; Kullback 1959; Reginatto 1998; Parwani 2005):

$$\begin{aligned} \text{Wirkungsintegral:} \quad S &= \int P \cdot \left[ \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V \right] dx dt + \frac{\hbar^2}{8} I_F \\ \text{Fisher-Information:} \quad I_F &= \int \frac{P}{m} \cdot \left( \frac{\nabla P}{P} \right)^2 dx dt = \int \frac{P}{m} \cdot \left( \frac{\nabla s}{k} \right)^2 dx dt. \end{aligned}$$

In dieser Form kann die Fisher-Information als mittlere Entropieproduktion gedeutet werden. Eine breitere (schmalere) Verteilung  $P(x)$  bedeutet eine größere (kleinere) Unsicherheit in  $x$ , aber eine kleinere (größere) Fisher-Information. Deshalb ist die Fisher-Information ein inverses Unsicherheitsmaß. Im klassischen Grenzfall verschwindet die Entropieproduktion aus den Lagrange-Dichten und damit die Fisher-Information aus dem Variationsprinzip. Es bleibt in den Variablen  $S$  und  $P$ :

$$\text{klassischer Grenzfall:} \quad L(S, P) = P \cdot \left[ \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V \right].$$

Als feldtheoretische Euler-Lagrange-Gleichungen ergeben sich konsistenterweise wieder die Kontinuitätsgleichung für die Wahrscheinlichkeit (bei Variation nach  $S$ ) und die klassische Hamilton-Jacobi-Gleichung für die Wirkung (bei Variation

nach  $P$ ). Quantenmechanisch sind diese beiden Gleichungen über das Wirkungsquantum aneinander gekoppelt.

*Fazit:* Auf der Beschreibungsebene der Lagrange-Dichten entstehen Quanteneffekte durch eine Entropieproduktionsdichte, die als Zusatzterm im Vergleich zur klassischen Feldtheorie hinzukommt. Neben der üblichen Herleitung der Schrödinger-Gleichung als *Euler-Lagrange-Gleichung* einer *feldtheoretischen* Lagrange-Dichte gibt es noch einen anderen Weg, der von einer *thermodynamischen* Lagrange-Funktion aus über eine *Hamilton-Jacobi-Gleichung* zur Schrödinger-Gleichung führt.

# Kapitel 4

## Quanteneffekte und Entropiediffusion

*Das ewig Unbegreifliche an der Natur  
ist ihre Begreiflichkeit.*

*Albert Einstein*

Da die herkömmlichen thermodynamischen Lagrange-Funktionen lediglich eine Entropieproduktion enthalten, nicht aber eine Entropiediffusion, können wir schließen, dass die Entropiediffusion eine entscheidende Rolle bei der Erzeugung von Quanteneffekten spielen muss. Quanteneffekte entstehen in unserer thermodynamischen Interpretation durch ein Wechselspiel von *Entropieproduktion* und *Entropiediffusion*. Erst die Entropiediffusion ermöglicht komplexere stationäre Anziehungs- und Abstoßungsmuster in äußeren Potentialen.

Anhand des harmonischen Oszillators und des Kepler-Problems werden die Zusammenhänge zwischen thermodynamischer Stabilität, Entropieproduktion, Entropiediffusion, Nullpunktsenergie und der Quantisierung der Wirkung gebundener Zustände untersucht. Die thermodynamische Stabilität erzwingt für gebundene Zustände eine endliche Nullpunktsenergie. Die stationären Zustände eines Quantenobjekts in äußeren Feldern sind durch eine Kompensation der äußeren Kräfte durch statistische Kräfte charakterisiert. Die Kompensationsbedingung ist eine Riccati-Gleichung für das Superpotential  $W$  vom Typ  $W^2 - W' \sim V - E$ . Durch ein subtiles Zusammenspiel von Entropieproduktion  $\sigma \sim W^2$  und Entropiediffusion  $\zeta \sim -W'$  wird das Quantenobjekt zum freien Teilchen und zahlt dafür in gebundenen Zuständen lediglich den Preis der Quantisierung seiner Energie, da die Kompensation nur für bestimmte diskrete Werte  $E_n$  der Integrationskonstanten  $E$  möglich ist. Die Energiequantisierung gebundener Zustände ist eine Folge der Kompensation, insoweit die Kompensationsbedingung auf Eigenwertgleichungen mit diskreten Eigenwerten führt.

Die Eigenzustände sind die thermodynamisch stabilsten Zustände des Quantensystems. Jede Überlagerung von Eigenzuständen führt zu einer Absenkung der mittleren Entropie: Reine Zustände sind thermodynamisch stabiler als gemischte Zustände. Damit ist eine thermodynamische Erklärung für die Dekohärenz quantenmechanischer Zustände gegeben.

## 4.1 Thermodynamische Stabilität und Nullpunktsenergie

Während die Entropieproduktion  $\sigma \geq 0$  stets positiv oder Null ist, verlangt das thermodynamische Stabilitätskriterium eine negative Entropiekrümmung  $\zeta$ :

$$\text{thermodynamische Stabilität: } \zeta = s'' < 0.$$

Für die Untersuchung der thermodynamischen Stabilität eines Quantenobjekts in einem Potential  $V$  wird die Riccati-Gleichung für die stationären Zustände zweimal abgeleitet:

$$\frac{\zeta}{k} + \frac{\sigma}{2k^2} = \frac{4m}{\hbar^2}(V - E) \Rightarrow \frac{\zeta''}{k} + \frac{\zeta^2 + s' \cdot \zeta'}{k^2} = \frac{4m}{\hbar^2} \cdot V''.$$

Wenn wir annehmen, dass das Potential  $V(x)$  bei  $x = 0$  ein Minimum hat, wird die Wahrscheinlichkeit  $P(x)$  und damit auch die Entropiedichte  $s(x)$  bei  $x = 0$  ein Maximum haben. In einer quadratischen Näherung folgt mit  $\zeta' = 0$ :

$$\frac{\zeta^2}{k^2} = \frac{4m}{\hbar^2} \cdot V'' \Rightarrow \frac{\zeta}{k} = -\frac{2}{\hbar} \cdot \sqrt{m \cdot V''}.$$

Das Minuszeichen resultiert aus dem thermodynamischen Stabilitätskriterium  $\zeta < 0$ . Eine Lösung  $\zeta = 0$  ist nur für ein Potential  $V$  mit verschwindender Krümmung  $V''$  möglich. Sobald das Potential eine endliche Krümmung aufweist, wird auch die Entropiekrümmung einen endlichen Wert annehmen. Für einen harmonischen Oszillatoren folgt

$$V = \frac{1}{2}m\omega x^2 \Rightarrow V'' = m\omega^2 \Rightarrow \frac{\zeta}{2k} = -\frac{m\omega}{\hbar} \Rightarrow \frac{\sigma}{4k^2} = \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}x^2.$$

Die Boltzmann-Konstante  $k$  ist ein Maß für die thermische Stabilität eines Systems im Gleichgewicht und für die Größe von Schwankungen (Einstein 1904; Bessenrodt 1987). Hier koppelt sie die Krümmung  $\zeta$  der Entropiedichte mit der Krümmung  $m\omega^2$  des Potentials  $V$ .

Einsetzen von  $\sigma$  und  $\zeta$  in die Riccati-Gleichung liefert einen einfachen Zusammenhang zwischen Nullpunktsenergie  $E_0$  und Entropiekrümmung  $\zeta$ :

$$\text{Nullpunktsenergie: } E_0 = -\frac{\hbar^2}{4m} \frac{\zeta}{k} \Rightarrow E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega.$$

Für Muldenpotentiale ergibt sich daraus eine untere Grenze für die verkürzte Wirkung von der Größenordnung des Wirkungsquantums.

*Fazit:* Thermodynamisch stabile gebundene Zustände in Muldenpotentialen sind nur bei echt positiven Energien möglich. Die thermodynamische Stabilität erzwingt für gebundene Zustände die Existenz einer endlichen Nullpunktsenergie  $E_0$ :

$$\zeta < 0 \Rightarrow E_0 > 0.$$

## 4.2 Der harmonische Oszillator: Quantisierung

Als Beispiel betrachten wir einen harmonischen Oszillator mit der Kreisfrequenz  $\omega$  und dem Potential  $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ . In stationären Zuständen gilt die folgende Riccati-Gleichung:

$$V + U = E \Rightarrow \frac{\hbar^2}{4m} \left[ \frac{s''}{k} + \frac{s'^2}{2k^2} \right] = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 - E.$$

Um eine erste Lösung zu erhalten, nehmen wir eine konstante Entropiekrümmung an. Der folgende Ansatz führt auf eine einfach integrierbare Gleichung, deren Integrationskonstante wir unterdrücken, da nur  $s'$  physikalisch relevant ist:

$$\frac{\hbar^2}{4m} \frac{s''}{k} = -E \Rightarrow \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \frac{\hbar^2}{8m} \frac{s'^2}{k^2} \Rightarrow \frac{s(x)}{k} = -\frac{m\omega}{\hbar}x^2 \Rightarrow \frac{\zeta}{k} = \frac{s''}{k} = -\frac{2m\omega}{\hbar}.$$

Das Minuszeichen kommt aus der Stabilitätsbedingung  $\zeta < 0$ . Wegen  $s = k \cdot \ln P$  folgt sofort die Wahrscheinlichkeitsdichte  $P_0$  für den Grundzustand und die zugehörige Energie  $E_0$ :

$$\begin{aligned} \text{Grundzustand: } \quad P_0(x) &= \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right) \\ \text{Nullpunktsenergie: } \quad E_0 &= \frac{1}{2}\hbar\omega. \end{aligned}$$

Die Entropiekrümmung lässt sich damit auch durch die Ortsunschärfe  $\Delta x$  bzw. die Varianz der Verteilung  $\Delta x^2$  ausdrücken.

$$\frac{\zeta}{k} = \frac{s''}{k} = -\frac{m\omega^2}{E_0} = -\frac{V''}{E_0} = -\frac{1}{\Delta x^2}.$$

Im klassischen Grenzfall gilt trivialerweise thermodynamische Stabilität. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung strebt gegen einen  $\delta$ -Peak:

$$\text{klassischer Grenzfall: } \quad \hbar \rightarrow 0 \Rightarrow \zeta \rightarrow -\infty \wedge P(x) \rightarrow \delta(x).$$

Der Grundzustand ist durch eine Kompensation des äußeren Potentials durch die Entropieproduktion gekennzeichnet. In den weiteren Lösungen wird das kompensierende Wechselspiel zwischen den vier Termen in der Riccati-Gleichung komplexer sein. Wir nehmen an, dass sich der Grundzustand stets aus diesen Lösungen ausfaktorisieren lässt, so dass die Kompensation des äußeren Potentials durch den Grundzustand erhalten bleibt. Damit die Wahrscheinlichkeit weiterhin positiv bleibt, fügen wir das Quadrat einer Funktion  $H_n(x)$  hinzu und berechnen hieraus  $s(x)$ :

$$P = P_0 \cdot H_n^2 \Rightarrow \frac{s}{k} = \ln P = \ln P_0 + \ln H_n^2 = -\frac{m\omega}{\hbar}x^2 + \ln H_n^2.$$

Differenzieren und Einsetzen in die Riccati-Gleichung liefert mit der üblichen Variablentransformation

$$\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \cdot x$$

nach kurzer Rechnung:

$$\frac{H_n''(\xi) - 2\xi H_n'(\xi)}{H_n(\xi)} = -\frac{E - E_0}{E_0} \Rightarrow H_n''(\xi) - 2\xi H_n'(\xi) = -\frac{E - E_0}{E_0} H_n(\xi).$$

Da die Energie  $E$  als Integrationskonstante aus der Kompensationsbedingung für die Kräfte nicht mehr von  $x$  bzw.  $\xi$  abhängt, ergibt sich daraus eine Eigenwertgleichung für  $H_n$ . Die Lösungen dieser Eigenwertgleichung sind genau die *Hermite-Polynome* mit natürlichen Zahlen  $n \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$  und  $H_0 = 1$  für den Grundzustand (vgl. Messiah 1976; Schwabl 1990):

$$\text{Hermite-Polynom: } H_n(\xi) = (-1)^n \exp(\xi^2) \frac{d^n}{d\xi^n} \exp(-\xi^2)$$

$$\text{Differentialgleichung: } \left[ \frac{d^2}{d\xi^2} - 2\xi \frac{d}{d\xi} + 2n \right] H_n(\xi) = 0$$

$$\text{Rekursionsformel: } H_{n+1} = 2\xi H_n - 2n H_{n-1}.$$

Ein Vergleich liefert

$$2n = \frac{E - E_0}{E_0} \Rightarrow E = (2n + 1) E_0.$$

Damit kommt für den Energienivea  $E_n$  zur Quantenzahl  $n$  sofort

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega.$$

Abbildung 4.1 zeigt die ersten vier Eigenzustände des harmonischen Oszillators mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen  $P(x)$ . Die Bilder der entsprechenden Entropieverteilungen  $s(x)$  legen die Vermutung nahe, dass die „Faltungen“ und Singularitäten der Entropieverteilung  $s(x)$  in den angeregten Zuständen  $n \geq 1$  durch die thermodynamische Stabilitätsbedingung  $\zeta < 0$  erforderlich werden: Die Entropieverteilungsfunktion muss überall eine hinreichend negative Krümmung aufweisen, so dass es insbesondere keine Wendepunkte oder Minima geben kann. Wegen  $s(x) \sim \ln P(x)$  sind die Maxima der Aufenthaltswahrscheinlichkeit auch Maxima der Entropieverteilung und Minima der Entropieproduktion; die Minima der Aufenthaltswahrscheinlichkeit mit  $P = 0$  sind Singularitäten der Entropieverteilung und also auch Singularitäten der Entropieproduktion und der Entropiediffusion. Die Maxima der Entropieverteilung, die zwischen zwei Minima der Aufenthaltswahrscheinlichkeit liegen, sind auch Maxima der Entropiediffusion.

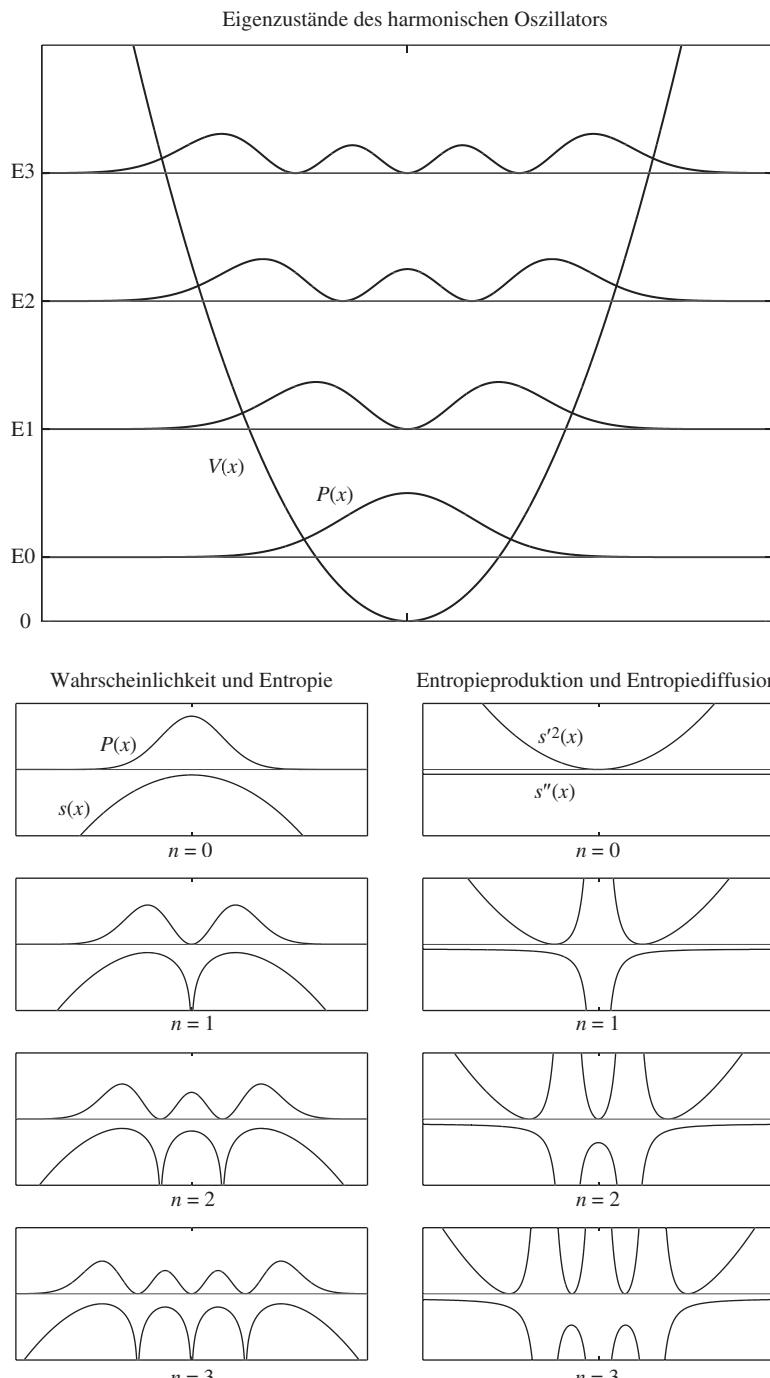


Abb. 4.1 Eigenzustände des Oszillatorenpotentials

### 4.3 Das Wasserstoffatom: Quantenzahlen

Wir betrachten nun ein Elektron im Coulomb-Potential eines Protons. Zur Vereinfachung setzen wir alle Konstanten zu Eins. Für das Kepler-Problem in einem Zentralfeld lautet das effektive Potential  $V_{\text{eff}}(r)$  in Abhängigkeit von der Radialkoordinate  $r$ :

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + V_l(r) = -\frac{1}{r} + \frac{l^2}{2r^2}.$$

Der Drehimpuls  $l$  erzeugt eine abstoßende Zentrifugalbarriere  $V_l$ . Die Riccati-Gleichung für die stationären Zustände wird für dieses Problem in Kugelkoordinaten aufgeschrieben:

$$V_{\text{eff}}(r) + U(r) = E \Rightarrow \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) s + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s}{\partial r} \right)^2 \right] = -\frac{1}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - E.$$

Betrachten wir zunächst den Fall  $l = 0$ . Um den Grundzustand zu bekommen, nehmen wir eine Entropieverteilung mit verschwindender Krümmung an. Mit  $s'' = 0$  bleibt

$$\frac{1}{2r} \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{1}{8} \left( \frac{\partial s}{\partial r} \right)^2 = -\frac{1}{r} - E.$$

Diese Gleichung soll für alle  $r$  bzw.  $x$  gelten. Ein Koeffizientenvergleich liefert unter Vernachlässigung der Integrationskonstanten:

$$\frac{\partial s}{\partial r} = -2 \Rightarrow s = -2r.$$

Damit können wir den Grundzustand sofort angeben, d. h. die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte  $R_1(r) = \exp(s)$  und die Nullpunktsenergie  $E_1$ :

$$R_1 = \exp(-2r)$$

$$E_1 = -\frac{1}{2}.$$

Analog zu unserer früheren Vorgehensweise beim harmonischen Oszillator suchen wir jetzt nach allgemeineren Lösungen, indem wir der Wahrscheinlichkeitsdichte des Grundzustands  $R_1$  das Quadrat einer weiteren Funktion  $L$  hinzufügen. Wir suchen Lösungen der Form

$$R(x) = \exp(-x) \cdot L^2(x) \Rightarrow s(x) = \ln R(x) = -x + \ln L^2$$

mit  $x = \frac{2r}{n}$ . Nach kurzer Rechnung erhält man damit für das Quantenpotential:

$$U = -\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{nr} \left[ \frac{xL'' + (2-x)L' - L}{L} \right].$$

Einsetzen in die Riccati-Gleichung für die stationären Zustände ergibt:

$$V + U = E \Rightarrow \frac{1}{nr} \left[ \frac{xL'' + (2-x)L' - L}{L} \right] + \frac{1}{2n^2} = -\frac{1}{r} + E_n.$$

Diese Gleichung soll wieder für alle  $r$  bzw.  $x$  gelten. Ein Koeffizientenvergleich liefert eine Differentialgleichung für eine gewisse Teilmenge  $L_{n-1}^1$  der *Laguerre-Polynome*, deren Lösung positive natürliche Zahlen  $n$  verlangt:

$$\left[ \frac{xL'' + (2-x)L' - L}{L} \right] = -n \Rightarrow xL'' + (2-x)L' + (n-1)L = 0.$$

Die allgemeine Definition der Laguerre-Polynome lautet mit  $p, k \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$  (vgl. Messiah 1976; Schwabl 1990):

$$\text{Laguerre-Polynome: } L_p^0 = e^x \frac{d^p}{dx^p} (e^{-x} x^p) \quad \text{und} \quad L_p^k = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} L_{p+k}^0.$$

Die Laguerre-Polynome erfüllen folgende Differentialgleichung:

$$\text{Differentialgleichung: } \left[ x \frac{d^2}{dx^2} + (k+1-x) \frac{d}{dx} + p \right] L_p^k(x) = 0.$$

Mit  $p = n-1$  und  $k = 1$  lässt sich die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte und die Energie des  $n$ -ten Eigenzustands berechnen:

$$R_n = \exp\left(-\frac{2r}{n}\right) \cdot \left[ L_{n-1}^1 \left(\frac{2r}{n}\right) \right]^2$$

$$E_n = -\frac{1}{2n^2}.$$

Für  $n = 1$  ergibt sich wegen  $L_0^1 = 1$  wieder der Grundzustand  $R_1$  mit der Energie  $E_1$ . Damit haben wir alle s-Orbitale mit der Hauptquantenzahl  $n$  durch einen thermodynamischen Kompensationsansatz reproduziert.

Im Weiteren suchen wir Lösungen mit nichtverschwindendem Drehimpuls  $l \neq 0$ . Zur Vereinfachung setzen wir die Eigenwerte  $l(l+1)$  des Drehimpulsoperators als bekannt voraus, d.h. die Nebenquantenzahl  $l \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ . Wir bleiben unserer Strategie treu und suchen wiederum eine zusätzliche Funktion, die den Zentrifugalterm in der Riccati-Gleichung des Kepler-Problems neutralisiert. Da ein zweimaliges Ableiten von  $\ln(x)$  die gewünschte Potenz  $1/x^2$  erzeugt, versuchen wir es mit  $x^{2l}$ . Mit dem Ansatz

$$R(x) = \exp(-x) \cdot x^{2l} \cdot L^2(x) \Rightarrow s(x) = \ln R(x) = -x + l \cdot \ln x^2 + \ln L^2$$

gehen wir in die Riccati-Gleichung ein und erhalten nach einer längeren Rechnung:

$$\frac{1}{nr} \left[ \frac{xL'' + (2l+2-x)L' - (l+1)L}{L} \right] + \frac{1}{2n^2} + \frac{l(l+1)}{2r^2} = -\frac{1}{r} + \frac{l(l+1)}{2r^2} - E_n.$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt jetzt

$$xL'' + (2l + 2 - x)L' + (n - l - 1)L = 0.$$

Dies ist die Differentialgleichung für Laguerre-Polynome vom Typ  $p = n - l - 1$  und  $k = 2l + 1$ . Damit haben wir eine vollständige Lösung des Radialproblems erhalten:

$$R_{nl} = \exp(-x) \cdot x^{2l} \cdot \left[ L_{n-l-1}^{2l+1}(x) \right]^2 = \exp\left(-\frac{2r}{n}\right) \cdot \left(\frac{2r}{n}\right)^{2l} \cdot \left[ L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{n}\right) \right]^2.$$

Die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte  $R_{nl}$  besteht im Wesentlichen aus drei Anteilen: einem Grundzustand zur Kompensation des Coulomb-Potentials, einem Anteil zur Kompensation der Zentrifugalbarriere und einem Anteil für die Quantenleiter. Die Energiedichten bleiben bei Änderung der Drehimpulsquantenzahl  $l$  unverändert. Eine Änderung in  $l$  bewirkt also lediglich eine Umverteilung der Wahrscheinlichkeitsdichte bei gleichbleibender Energie  $E_n$ .

Die räumliche Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P(r, \vartheta, \varphi)$  in Kugelkoordinaten wird aus dem üblichen Separationsansatz gewonnen:

$$P_{nlm}(r, \vartheta, \varphi) = R_{nl}(r) \cdot Y_{lm}^2(\vartheta, \varphi).$$

Die Funktionen  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  sind die Kugelfunktionen mit der Drehimpulsquantenzahl  $l$  und der Magnetquantenzahl  $m$ . Die radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeit erhält man durch Integration über die Raumwinkel (z. B. Schwabl 1990):

$$P_{nl}(r) = r^2 \cdot R_{nl}(r).$$

Abbildung 4.2 zeigt die ersten drei Eigenzustände des Wasserstoffatoms für  $l = 0$ : die Wahrscheinlichkeitsdichte, die Entropiedichte, die Entropieproduktionsdichte sowie die Entropiediffusionsdichte. Abbildung 4.3 zeigt einige Zustände mit  $l > 0$ . Da das Minimum des effektiven Potentials  $V_{\text{eff}}$  für  $l = 1$  oberhalb von  $E_1$  liegt, gibt es für  $l = 1$  nur Eigenzustände für  $n > 1$ .

*Fazit:* Auch beim Kepler-Problem tritt eine Kompensation des äußeren Feldes durch das Quantenpotential auf. Im Unterschied zum harmonischen Oszillator sind allerdings die Rollen von Entropieproduktion und Entropiediffusion hier gerade vertauscht: Das *Oszillatorenpotential* wird im Grundzustand durch die *Entropieproduktion* kompensiert, während das *Coulomb-Potential* durch die *Entropiediffusion* neutralisiert wird. Die Nullpunktsenergie ist durch das jeweils andere statistische Potential bestimmt. Dieser Unterschied findet seine Begründung in einfachen Vorzeichenüberlegungen: Da die Entropieproduktion nicht negativ werden kann, kann sie folglich nur positive Potentiale kompensieren; umgekehrt darf die Entropiekrümmung aus Stabilitätsgründen nicht positiv sein, so dass sie ihrerseits auch nur negative Potentiale neutralisieren kann. Auf diese Weise zeigt sich eine interessante Arbeitsaufteilung der beiden thermodynamischen Potentiale. Komplexere Probleme erfordern entsprechend komplexere Formen des Zusammenwirkens.

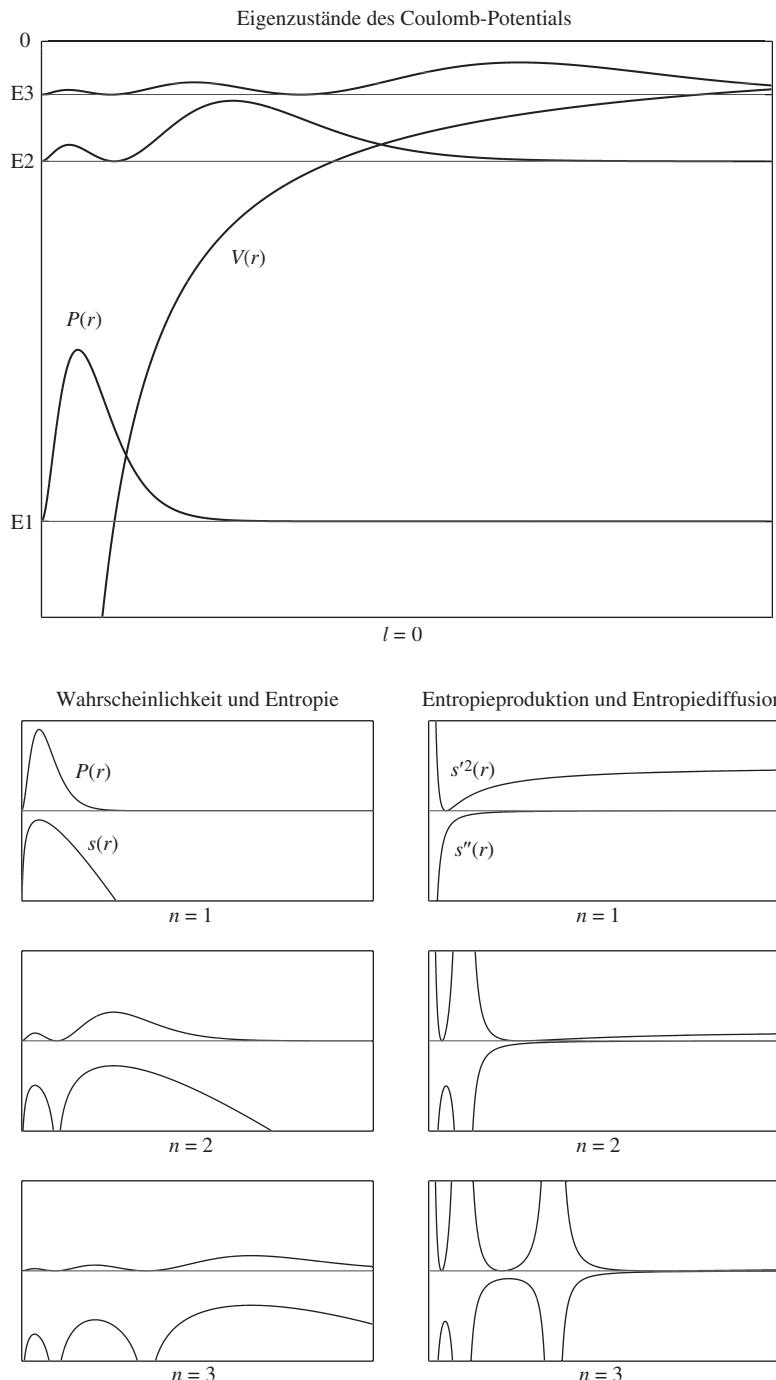
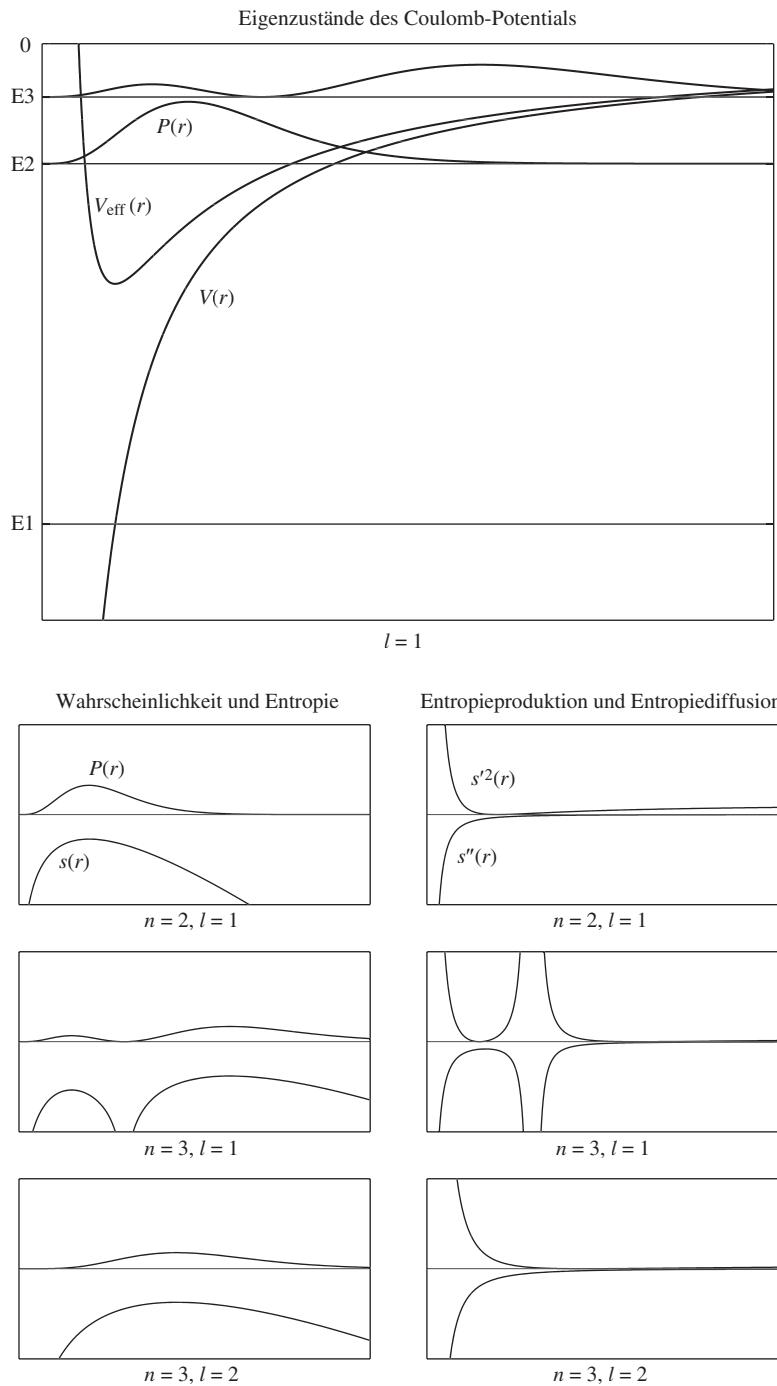


Abb. 4.2 Eigenzustände des Coulomb-Potentials ( $l = 0$ )



**Abb. 4.3** Eigenzustände des Coulomb-Potentials ( $l > 0$ )

Wie beim harmonischen Oszillatator bleibt die Kompensation des äußeren Potential durch den Grundzustand auch im Anregungsspektrum des Kepler-Problems erhalten. Die Vorgehensweise zur Ermittlung der stationären Lösungen besteht in einer sukzessiven Kompensation der äußeren Potentialterme durch geeignete statistische Potentiale. Um diese Idee verallgemeinern zu können, müsste lediglich nachgewiesen werden, dass sich der Grundzustand  $P_0$  stets aus allen Lösungen ausfaktorisieren lässt. Es genügt dann zu zeigen, dass dieser Grundzustand das Potential kompensiert und durch die erste Stufe einer Quantenleiter ersetzt. Ein schrittweises Vorgehen ist bei komplexeren Problemen von Vorteil. Die Quantisierung der Energie ergibt sich durch ein Eigenwertproblem, das auf die entsprechenden Polynome führt.

## 4.4 Superposition und Bifurkation

Wir nehmen nun an, dass die Übergangszustände in Quantensystemen durch Superpositionen von Eigenzuständen dargestellt werden. Wenn  $\psi_i$  und  $\psi_j$  Eigenzustände der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung zu den Energien  $E_i$  und  $E_j$  sind, so ist die Superposition

$$\psi_i(x) \cdot \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_i t\right) + \psi_j(x) \cdot \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_j t\right)$$

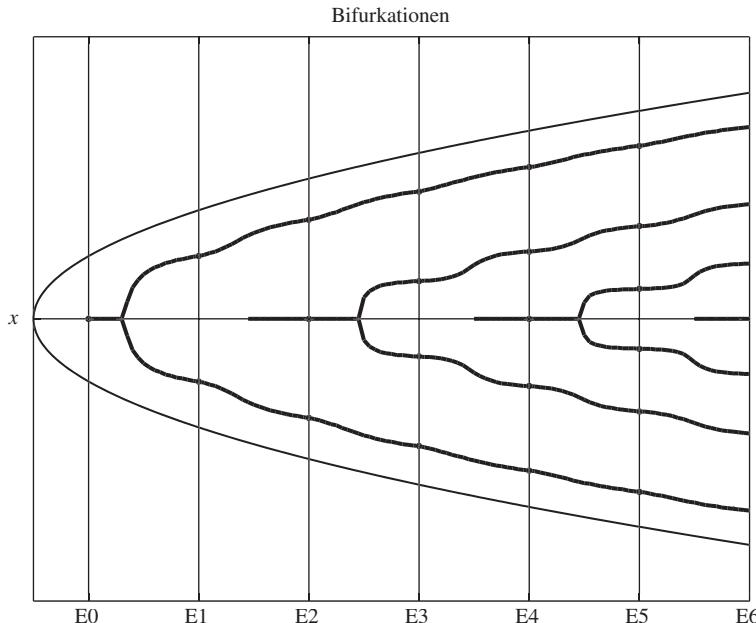


Abb. 4.4 Bifurkationen im Oszillatopotential

von zeitabhängigen Lösungen ebenfalls wieder eine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung, der allerdings keine scharfe Energie zugeordnet ist (z.B. Messiah 1976). Die Wahrscheinlichkeitsdichte  $P(x, t)$  oszilliert zwischen den Extremwerten  $(|\psi_i| - |\psi_j|)^2$  und  $(|\psi_i| + |\psi_j|)^2$  mit der Frequenz

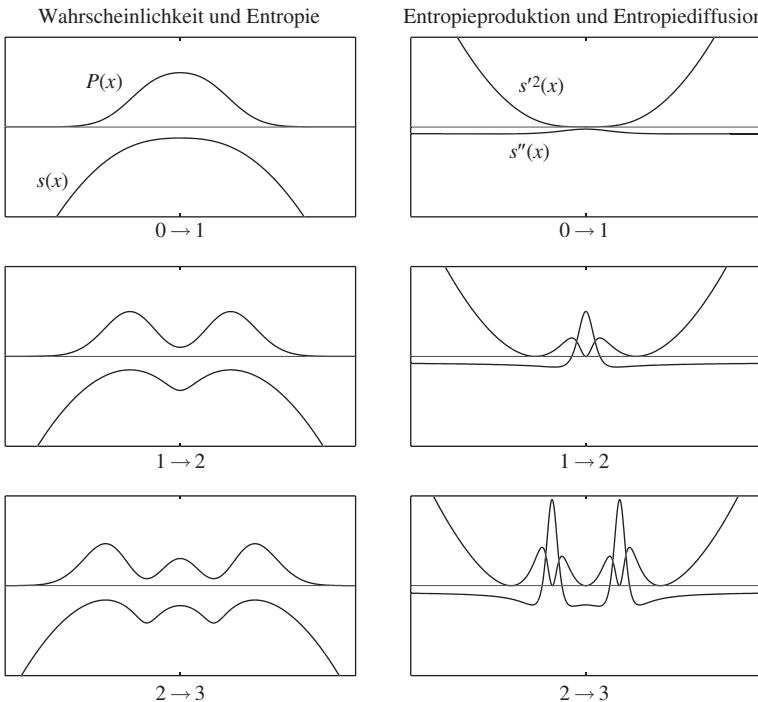
$$\omega = \frac{|E_i - E_j|}{\hbar}.$$

Unter der vereinfachenden Annahme, dass der oszillierende Interferenzterm im zeitlichen Mittel verschwindet, können wir mit  $\varepsilon \in [0, 1]$  einen stetigen Übergang vom Eigenzustand  $i$  in den Eigenzustand  $j$  in folgender Weise modellieren:

$$P = (1 - \varepsilon) \cdot P_i + \varepsilon \cdot P_j$$

$$E = (1 - \varepsilon) \cdot E_i + \varepsilon \cdot E_j.$$

In Abb. 4.4 sind für das Oszillatorpotential die Maxima der zeitlich gemittelten Wahrscheinlichkeitsdichte  $P$  gegen die gemittelte Energie  $E$  aufgetragen. Das Verzweigungsdiagramm zeigt, wie mit zunehmender Energie  $E$  zwischen zwei Energieeigenwerten bei  $x = 0$  neue Maxima entstehen, die sich beim nächsten Übergang in jeweils zwei Maxima aufspalten. In Abb. 4.5 sind einige Übergangszustände für  $\varepsilon = \frac{1}{4}$  dargestellt. Die Eigenzustände sind dadurch ausgezeichnet, dass die Minima



**Abb. 4.5** Mischzustände im Oszillatorpotential

der Wahrscheinlichkeitsverteilung auch deren Nullstellen sind. An diesen Nullstellen wird die Entropiedichte wegen  $\ln(0) = -\infty$  singulär. Folglich gibt es keine Bereiche, in denen die Entropieverteilung eine positive Krümmung besitzt. Die Eigenzustände sind im ganzen Raum thermodynamisch stabil. Beim Übergang zwischen zwei Eigenzuständen heben jedoch die Minima der Wahrscheinlichkeitsdichte von der Nulllinie ab. Erst im nächsten Eigenzustand sind die Minima von  $P$  wieder auch Nullstellen von  $P$ . In den Superpositionszuständen besitzt die Entropiedichte lokale Minima mit einer positiven Krümmung. In diesen Bereichen herrscht thermodynamische Instabilität.

Alle Übergangszustände zwischen den Eigenzuständen sind also thermodynamisch instabil. Eine Ausnahme bildet der Übergang vom Grundzustand  $E_0$  in den ersten angeregten Zustand  $E_1$ . Bis zur ersten Bifurkation gibt es kein Minimum,

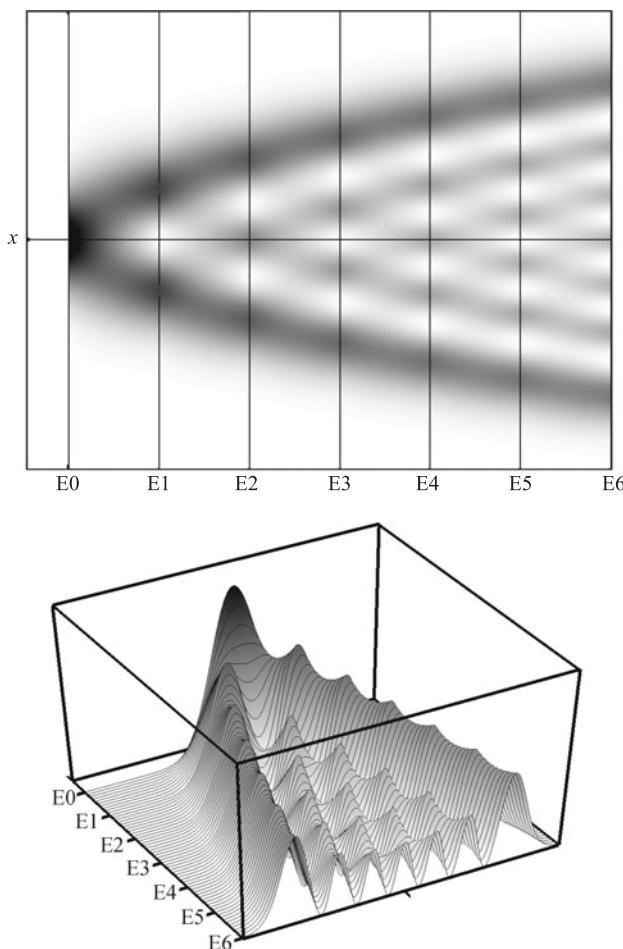


Abb. 4.6 Wahrscheinlichkeitsdichte im Oszillatorenpotential

das eine Instabilität erzeugen könnte. In diesem Energiebereich sind die Mischzustände aber weniger stabil als der Grundzustand. Abbildung 4.6 veranschaulicht den Zusammenhang  $P(x, E)$  für den harmonischen Oszillatoren.

## 4.5 Dekohärenz als Entropimaximierung

Um die thermodynamische Stabilität der stationären Zustände weiter zu untersuchen, betrachten wir nun die mittlere Entropie eines Zustands mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P(x)$ :

$$\text{mittlere Entropie : } S = \int_{-\infty}^{\infty} P \cdot \ln P dx .$$

Was passiert mit der mittleren Entropie, wenn wir einen Eigenzustand  $P_i$  verlassen, indem wir einen anderen Eigenzustand  $P_j$  überlagern? Für kleine  $\varepsilon$  folgt in linearer Näherung:

$$P = (1 - \varepsilon) \cdot P_i + \varepsilon \cdot P_j \Rightarrow S \approx (1 - \varepsilon) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} P_i \cdot \ln P_i dx + \varepsilon \cdot \int_{-\infty}^{\infty} P_j \cdot \ln P_j dx .$$

Wegen  $P_j > 0$  und  $\ln P_i < 0$  ist das letzte Integral negativ. Beim Verlassen eines Eigenzustandes nimmt die mittlere Entropie also ab. Abbildung 4.7 verdeutlicht den Zusammenhang  $S(E)$ .

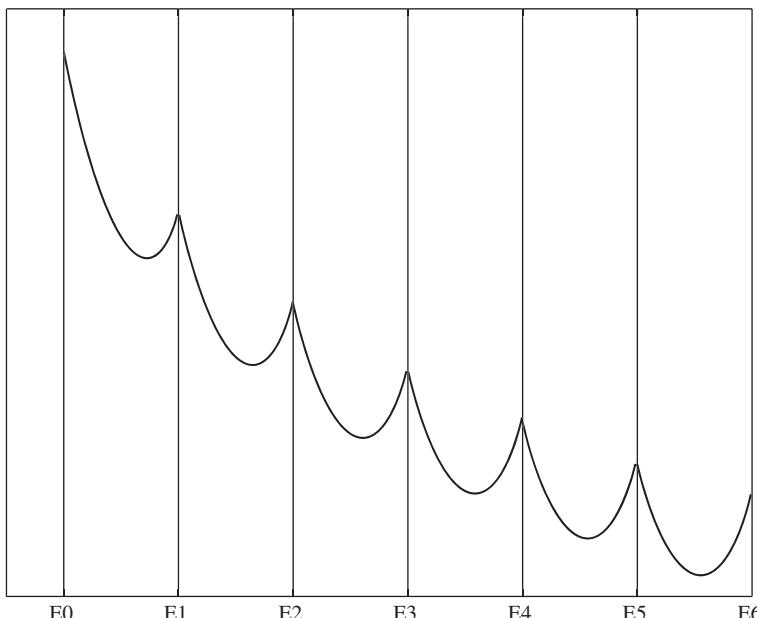


Abb. 4.7 Mittlere Entropie im Oszillatorenpotential

*Fazit:* Die Eigenzustände sind die thermodynamisch stabilsten Zustände eines Quantensystems. Sie sind durch lokale Maxima der mittleren Entropie gekennzeichnet. Ein Rauschen dürfte genügen, um das System in einen Eigenzustand relaxieren zu lassen. Damit ist die Dekohärenz quantenmechanischer Zustände thermodynamisch begründet.

# Kapitel 5

## Klassische Analogien

*Es ist schon ein Erfolg, wenn man die Natur dazu zwingen kann, einem die Zunge herauszustrecken.*

*Albert Einstein*

Um die Quantenphänomene zu verstehen, wurden vor allem zwei klassische Analogien betrachtet: *Wellenbild* und *Teilchenbild*. Die optische Analogie einer „Materiewelle“ betont den Wellencharakter des Quantenobjekts; die hydrodynamische Analogie einer „Wahrscheinlichkeitsflüssigkeit“ dagegen den Teilchencharakter. Gemäß der Born'schen Deutung wird die Intensität der Welle im Teilchenbild als „Intensität der Materie“ interpretiert.

Der *Welle-Teilchen-Dualismus* „triggerte“ Schrödinger zur Wellenmechanik. Der „klassische“ Zugang zur Schrödinger-Gleichung erfolgt über die optische Analogie und de Broglies Materiewellen für freie Teilchen mit Hilfe des Korrespondenzprinzips und Verallgemeinerung auf äußere Potentiale per Postulat.

Nach einer kurzen Rekapitulation des Welle-Teilchen-Dualismus werfen wir einige Schlaglichter auf die optische Analogie und ihre Erfolge: die Gewinnung von Quantisierungsbedingungen und eine erste Herleitung der Schrödinger-Gleichung mit Hilfe des Korrespondenzprinzips und gewisser Korrespondenzregeln.

Die formale Analogie der beiden Variationsprinzipien für den geometrischen Lichtweg und für die klassische Teilchenbahn lenkt das Augenmerk auf die Wirkungsintegrale und die Theorie der adiabatischen Invarianten (Bessenrodt 1987): „Die *Adiabatenhypothese* beherrscht die *stationären Zustände*. Das *Korrespondenzprinzip* beherrscht die *Übergänge* zwischen den stationären Zuständen.“

Die hydrodynamischen Analogie kann unter thermodynamischen Gesichtspunkten weiter ausgebaut werden: Das Wirkungsquantum ist ein Maß für die innere Reibung in der Wahrscheinlichkeitsflüssigkeit.

## 5.1 Der Welle-Teilchen-Dualismus

Grundlegende Überlegungen zur Quantentheorie wurden durch den experimentellen Befund der Welle-Teilchen-Dualität ausgelöst (Einstein 1909a,b). Strahlung kann auch Teilcheneigenschaften aufweisen und umgekehrt Materie auch typische Welleneigenschaften: Elektronen verhalten sich z. B. in Doppelspaltpartikulären wie Wellen, Photonen beim Photoeffekt wie Teilchen.

Die Existenz der Welle-Teilchen-Dualität ist mit den klassischen Theorien unvereinbar: Die klassische Lehre, nach der sich ein Teilchen in Raum und Zeit stetig bewegt, versagt in diesem Punkt. Diese Unvereinbarkeit bezieht sich jedoch nur auf die klassische *Mechanik* und auf die klassische *Elektrodynamik*. Von *Thermodynamik* ist in diesem Zusammenhang kaum die Rede. Es ist aber eine *statistische* Deutung der Wellenfunktion als Wahrscheinlichkeitsamplitude, die den Welle-Teilchen-Dualismus überbrückt, die *Born'sche Wahrscheinlichkeitsinterpretation*: Die Intensität der Welle an einem Ort gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, das ihr zugeordnete Teilchen dort anzutreffen (Born 1926).

Der Übergang von einer Welle mit der Frequenz  $\omega$  und dem Wellenvektor  $k$  zum korrespondierenden Teilchen mit der Energie  $E$  und dem Impuls  $p$  erfolgt über die Einstein-de-Broglie-Relation:

$$\text{Einstein/de Broglie : } \left( \begin{array}{c} E \\ p \end{array} \right) = \hbar \left( \begin{array}{c} \omega \\ k \end{array} \right).$$

Über diese Gleichung sind die beiden Hauptursachen für den Zusammenbruch der klassischen Theorie miteinander verknüpft: der *Atomismus der Wirkung* und die *Welle-Teilchen-Dualität*. Im klassischen Grenzfall verschwindet dieser Zusammenhang zwischen Wellen- und Teilchenaspekt mit dem Wirkungsquantum. Breitet sich eine Welle mit Lichtgeschwindigkeit  $c$  aus, so gilt  $c = \omega/k$ . Hat das zugeordnete Teilchen den Impuls  $p = mc$ , erhält man die relativistischen Beziehungen für Photonen:

$$\left( \begin{array}{c} E \\ p \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} mc^2 \\ mc \end{array} \right) \Rightarrow E = p \cdot c.$$

Ist  $m_0$  die Ruhemasse des Teilchens, so gilt allgemeiner:

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2.$$

## 5.2 Das Korrespondenzprinzip

Das *Korrespondenzprinzip* besagt, dass die Quantentheorie im klassischen Grenzfall asymptotisch in die klassische Theorie übergehen muss:

$$\text{Korrespondenzprinzip : } \text{Quantentheorie} \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \text{Klassik}.$$

In der optischen Analogie müssen die Materiewellen gemäß dem Korrespondenzprinzip in der geometrisch-optischen Näherung klassisches Verhalten zeigen. So wie die *Wellenoptik* in die *Strahlenoptik* übergeht, muss die *Wellenmechanik* in die *klassische Mechanik* übergehen. Weil die Geschwindigkeit eines Teilchens proportional zum Gradienten der Wirkung  $S$  ist, sind die Teilchenbahnen orthogonal zu den Flächen gleicher Phase  $S = \text{const.}$

$$\nabla S = p = \hbar k .$$

In der Sprache der Optik sind dies die Wellenflächen, während die Teilchenbahnen den Strahlen entsprechen. Der Wellenvektor  $k$  steht (im Falle eines isotropen Mediums) ebenfalls senkrecht auf den Wellenflächen. Die klassische Näherung entspricht im Wellenbild der Näherung der geometrischen Optik.

Das Korrespondenzprinzip war eine wichtige Hilfe bei der Aufstellung der Schrödinger-Gleichung (Schrödinger 1926). Aus dem Korrespondenzprinzip und der optischen Analogie schließt man auf eine formale Analogie zwischen der zu erstellenden Schrödinger-Gleichung und der Energiegleichung der klassischen Mechanik; mit Hilfe der sogenannten *Korrespondenzregeln* werden die klassischen Variablen durch Differentialoperatoren ersetzt:

$$\text{Korrespondenzregeln : } E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad p \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} .$$

Durch diese Ersetzungen wird aus der klassischen Hamilton-Funktion  $H(p, x)$  der quantenmechanische Hamilton-Operator:

$$\text{Hamilton-Operator : } \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V .$$

Die Schrödinger-Gleichung erhält man mit den Korrespondenzregeln als Operatorübersetzung des klassischen Energiesatzes:

$$\text{Energiegleichung : } E = \frac{p^2}{2m} + V \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi .$$

Dass eine solche quantentheoretische Übersetzung der klassischen Energiegleichung auch außerhalb der „geometrisch-optischen Näherung“ gilt, wird schlicht postuliert. Hieraus ergibt sich der Bedarf nach weiteren Begründungen für die Gültigkeit der Korrespondenzregeln.

Wird dem Impuls  $p$  über die de-Broglie-Relation eine Ortsfrequenz  $k$  und der Energie  $E$  über die Einstein-Relation eine Zeitfrequenz  $\omega$  zugeordnet, ergibt sich die Korrespondenzvorschrift in der optischen Analogie aus der Tatsache, dass die Fourier-Transformation aus dem Frequenzraum auf entsprechende Ableitungen auf der Raumzeit führt:

$$\text{Korrespondenzregeln : } \omega \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} \quad k \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial x} .$$

Die imaginäre Einheit  $i$  sichert zunächst nur die Hermitezität der Differentialoperatoren.

In der hydrodynamischen Analogie erscheint die Korrespondenzregel, wenn man von der quantenmechanischen Hamilton-Jacobi-Gleichung zu einer ruhenden Flüssigkeit übergeht. Für stationäre Zustände gilt:

$$V + U = E \Rightarrow V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{A''}{A} = E \Rightarrow \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V \right) A = EA.$$

Mit der Definition des Hamilton-Operators ergibt sich die stationäre Schrödinger-Gleichung für die Wahrscheinlichkeitsamplitude  $A$ . Der fehlende Phasenfaktor ist für die stationären Zustände unwesentlich:

$$\hat{H} A = EA.$$

Ein Vergleich der Lagrange-Funktion, ausgedrückt durch  $H$  und  $p$ , mit der formalen totalen Zeitableitung von  $S(x, t)$  liefert wie üblich:

$$\frac{dS}{dt} = L = p\dot{x} - H \wedge \frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x}\dot{x} \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial t} = -H \wedge \frac{\partial S}{\partial x} = p.$$

Mit diesen Beziehungen erhält man mit Blick auf die quantenmechanische Hamilton-Jacobi-Gleichung die Ersetzungsregeln aus folgender Viererdarstellung:

$$\begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_x \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} -E \\ p \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} -\omega \\ k \end{pmatrix} \rightarrow -i\hbar \begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_x \end{pmatrix}$$

### 5.3 Das Wirkungsprinzip

Die totale Zeitableitung der Wirkung  $S(x, t)$  längs einer Bahn ist durch die Lagrange-Funktion  $L$  gegeben. Die Gesetze der Mechanik leiten sich aus dem *Prinzip der kleinsten Wirkung* ab:

$$\text{Wirkungsintegral : } S(x, t) = \int L(x, \dot{x}, t) dt \Leftrightarrow \frac{dS}{dt} = L$$

$$\text{Wirkungsprinzip : } \delta S(x, t) = \delta \int L(x, \dot{x}, t) dt = 0.$$

Die Lagrange-Funktion hängt über eine Legendre-Transformation mit der Hamilton-Funktion  $H$  zusammen. Die Wirkung  $S$  kann somit auch durch  $H$  und  $p$  ausgedrückt werden:

$$\text{Hamilton-Funktion : } H(p, x, t) = p\dot{x} - L(x, \dot{x}, t)$$

$$\text{Wirkungsintegral : } S = \int (pdx - Hdt).$$

Verschwindet in stationären Zuständen die Energiedissipation, enthält die Hamilton-Funktion die Zeit nicht mehr explizit. In diesem Fall bleibt die Energie erhalten und  $H$  kann durch die Konstante  $E$  ersetzt werden. Mit Hilfe der verkürzten Wirk-

kung  $I$  ergibt sich ein einfacher Ausdruck für die stationäre Wirkung:

$$\text{stationäre Wirkung : } S(x, t) = I(x) - Et$$

$$\text{verkürzte Wirkung : } I(x) = \int p dx.$$

Durch die de-Broglie-Beziehung  $p = \hbar k$  für Materiewellen offenbart sich eine formale Analogie der beiden Variationsprinzipien für den geometrischen Lichtweg und für die klassische Teilchenbahn bei konstanter Energie  $E = p \cdot \dot{x} - L$ , also des Fermat'schen und des Hamilton'schen Prinzips für das verkürzte Wirkungsintegral  $I$ :

$$\text{Fermat'sches Prinzip : } \delta \int k \cdot dx = 0$$

$$\text{Hamilton'sches Prinzip : } \delta \int p \cdot dx = 0.$$

Wird nun im Wellenbild das Atom als Hohlraumresonator aufgefasst, so können die stationären Zustände als stehende Wellen angenommen werden. Damit eine stehende Welle entstehen kann, muss die Phase für einen Umlauf ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$  sein. Daraus ergibt sich die *Bohr-Sommerfeld'sche Quantisierungsbedingung* für die verkürzte Wirkung  $I$ :

$$\text{Bohr-Sommerfeld : } \oint k \cdot dx = 2\pi \cdot n \Leftrightarrow \oint p \cdot dx = 2\pi \cdot n\hbar.$$

## 5.4 Die Adiabatenhypothese

Neben dem Korrespondenzprinzip war die Theorie der adiabatischen Invarianten eine wichtige Hilfe bei den Versuchen, die Quantisierung atomarer Größen zu erklären. Adiabatische Invarianten bleiben näherungsweise konstant bei quasistatischen, d. h. hinreichend langsamem Veränderungen der Systemparameter. Für endliche Bewegungen ist die verkürzte Wirkung  $I$  eine adiabatische Invariante (Landau und Lifschitz 1977). Bei periodischen Bewegungen gibt das Wirkungsintegral  $I$  den von der Trajektorie eingeschlossenen Flächeninhalt im Phasenraum an.

Ein tieferes Verständnis der Sommerfeld'schen Quantenregeln wurde durch die *Ehrenfest'sche Adiabatenhypothese* ermöglicht: Die Adiabatenhypothese besagt, dass quantenmechanisch mögliche Zustände bei adiabatischen Parameteränderungen wieder in erlaubte Quantenzustände übergehen. Damit können die Quantenbedingungen des harmonischen Oszillators auf jeden eindimensionalen Schwinger übertragen werden, der daraus durch adiabatische Transformation gewonnen wird.

Rayleigh hatte die adiabatische Invarianz von  $E/\omega$  für das ebene Pendel mit veränderlicher Pendellänge bzw. Eigenfrequenz gezeigt. Nach Einstein ist diese Invariante gerade das Wirkungsquantum und es folgt die Einstein-Relation  $E = \hbar\omega$ .

Einstein (1917) betrachtet die Impulse  $p$  als Funktion der Lagekoordinaten  $x$ . Besitzt das Vektorfeld  $p(x)$  ein Potential, so hat das Linienintegral

$$\oint p(x) dx$$

für alle geschlossenen Kurven im Konfigurationsraum der  $x$ , die stetig ineinander überführt werden können, denselben Wert. Dieser Wert ist Null, wenn alle geschlos-

senen Kurven stetig in einen Punkt zusammengezogen werden können und der Konfigurationsraum somit einfach zusammenhängend ist. Gilt dies nicht für *alle* geschlossenen Kurven, so ist der Konfigurationsraum mehrfach zusammenhängend und das Linienintegral von Null verschieden. Es wird aber dann abzählbar viele geschlossene Linien geben, auf die sich alle geschlossenen Kurven durch stetige Änderungen reduzieren lassen. Die Anzahl der Zusammenhangskomponenten im Konfigurationsraum ist durch den Knotensatz der Sturm-Liouville-Theorie gegeben: Der  $n$ -te angeregte Zustand besitzt genau  $n$  Knoten.

## 5.5 Die Wahrscheinlichkeitsflüssigkeit

*The first processes in the effectual studies  
of the sciences, must be ones  
of simplification and reduction of the results  
of previous investigations to a form  
in which the mind can grasp them.*

*James Clerk Maxwell*

Neben der optischen liefert auch die hydrodynamische Analogie wichtige Anschauungen über die Quantenphänomene. In der hydrodynamischen Analogie beschreibt das Quadrat der Wellenfunktion im klassischen Grenzfall eine strömende Flüssigkeit von klassischen Teilchen der Masse  $m$ , die ohne gegenseitige Wechselwirkung dem Potential  $V$  unterworfen sind. Mit  $mv = \nabla S$  ergibt sich aus der *klassischen* Hamilton-Jacobi-Gleichung durch Gradientenbildung die Newton'sche Bewegungsgleichung für die klassische Flüssigkeit (Messiah 1976):

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{mv^2}{2} + V = 0 \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = m \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = -\nabla V.$$

Messiah bleibt jedoch hier stehen und warnt sogar in einer Fußnote: „Die Analogie zwischen dieser ‚Wahrscheinlichkeitsflüssigkeit‘ und der klassischen Flüssigkeit darf natürlich nicht zu weit getrieben werden.“ Wir wollen diese Analogie hier aber trotzdem noch etwas weiter treiben und die Gradientenbildung auch für die *quantenmechanische* Hamilton-Jacobi-Gleichung durchführen, um dann weiter zu fragen, welche Wechselwirkungen das Quantenpotential in der klassischen Wahrscheinlichkeitsflüssigkeit hervorruft:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{mv^2}{2} + V + U = 0 \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = -\nabla [V + U].$$

Das Quantenpotential  $U$  erzeugt offenbar Wechselwirkungen innerhalb der klassischen Wahrscheinlichkeitsflüssigkeit und damit statistische Abhängigkeiten im sonst klassischen Ensemble. Diese Wechselwirkungen können durch Entropieproduktion und Entropiediffusion oder auch durch das Superpotential ausgedrückt werden. Über die stationären Lösungen wissen wir bereits, dass sie durch eine Kompen-

sation charakterisiert sind:

$$\text{stationäre Zustände: } V + U = E \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = 0.$$

In der hydrodynamischen Analogie werden die Quanteneffekte durch Korrelationen in einer sonst statistisch unabhängigen Wahrscheinlichkeitsflüssigkeit beschrieben. Im Gleichgewicht zeigt sich eine ruhende Flüssigkeit. Durch *innere* Wechselwirkungen in der Wahrscheinlichkeitsflüssigkeit werden die *äußeren* Wechselwirkungen gerade kompensiert. Die Strömung verhält sich dadurch, als ob sie wechselwirkungsfrei wäre.

Um die Wechselwirkungen in der Wahrscheinlichkeitsflüssigkeit thermodynamisch zu deuten, können wir das Quantenpotential durch eine thermodynamische Kraft  $X(x) = \nabla s(x)$  ausdrücken:

$$\text{Quantenpotential: } U = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{\Delta s}{2k} + \frac{(\nabla s)^2}{4k^2} \right] = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{\nabla \cdot X}{2k} + \frac{X^2}{4k^2} \right].$$

Damit kann die Bewegungsgleichung der Wahrscheinlichkeitsflüssigkeit in die folgende Form gebracht werden:

$$m \frac{dv}{dt} = -\nabla(V + U) = -\nabla V + \frac{\hbar^2}{4m} \left[ \frac{\Delta X}{k} + \frac{X \cdot \nabla X}{k^2} \right].$$

Des Weiteren nehmen wir eine lineare Fluss-Kraft-Beziehung an:

$$X = R\dot{x} = Rv.$$

Mit den folgenden Festlegungen für den kinetischen Koeffizienten  $R$  und den Reibungskoeffizienten  $\eta$

$$R = \frac{2m}{\hbar}k \wedge \eta = \frac{\hbar}{2}$$

erhält man daraus:

$$m \frac{dv}{dt} = m \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = -\nabla V + \eta \Delta v + m(v \cdot \nabla v).$$

Der Konvektionsterm hebt sich weg und es bleibt

$$m \frac{dv}{dt} = -\nabla V + \eta \Delta v.$$

Dieses Ergebnis kann mit der Navier-Stokes-Gleichung verglichen werden. Die Navier-Stokes-Gleichung beschreibt die Kraftdichte, die auf ein Flüssigkeitselement wirkt, als Summe zweier Anteile aus *Druck*  $\varphi$  und *Reibung*  $\eta$ :

$$\text{Navier-Stokes-Gleichung: } \rho \frac{dv}{dt} = \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = -\nabla \varphi + \eta \Delta v.$$

Die hierin auftretende Massendichte  $\rho$  genügt einer Kontinuitätsgleichung. Besonders wichtig im Hinblick auf Turbulenzerscheinungen ist das Verhältnis von *Konvektion* und innerer *Reibung*. Eine verschwindende Reibung kennzeichnet eine ideale oder *Euler-Fliessigkeit*. Je nachdem, welche Terme dominieren bzw. vernachlässigbar sind, unterscheidet man folgende Spezialfälle einer Strömung:

<i>ideal</i>	<i>stationär</i>	<i>laminar</i>	<i>turbulent</i>
$\eta = 0$	$\partial_t v = 0$	$\rho v \cdot \nabla v \ll \eta \Delta v$	$\rho v \cdot \nabla v \gg \eta \Delta v$

Der Vergleich mit der Wahrscheinlichkeitsflüssigkeit zeigt, dass wir es mit einer laminaren, d. h. konvektionsfreien Strömung zu tun haben, deren innere Reibung durch das Wirkungsquantum bestimmt ist. Das früher betrachtete Wechselspiel zwischen *Entropieproduktion* und *Entropiediffusion* ist hier offenbar übertragen auf ein Wechselspiel zwischen *Konvektion* und *Reibung*. Die Entropiediffusion wird im hydrodynamischen Bild zu einem Reibungsterm, der für Stabilität sorgt.

# Kapitel 6

## Die Unschärferelation

*Objectivity is a subject's delusion  
that observing can be done without him.*  
Heinz von Foerster

Ein wichtiges Ergebnis der Schrödinger-Theorie ist die Heisenberg'sche Unschärferelation. Im Folgenden wird die Frage untersucht, inwieweit die betrachteten klassischen Analogien und unsere thermodynamische Deutung ein anschauliches Verständnis dieser Unschärfen ermöglichen. Unschärferelationen bestehen zwischen komplementären Variablen, deren zugeordnete Operatoren nicht vertauschen. Es ist nicht möglich, zwei Messgrößen eines Quantenobjekts, deren Produkt die Dimension einer Wirkung hat, gleichzeitig und exakt zu bestimmen. Je genauer wir beispielsweise den Ort eines Quantenobjektes festlegen, desto ungewisser können wir seinen Impuls und damit seine weitere Bahn voraussagen. Diese charakteristischen Unbestimmtheiten dürfen nicht mit den überall auftretenden Messfehlern verwechselt werden.

Im *Wellenbild* werden Unschärferelationen auf den *Ähnlichkeitssatz* der Fourier-Transformation zurückgeführt. Die Unschärfe ist im Wellenbild eine rein klassische Eigenschaft, die etwa die stets endliche Übertragungsbandbreite eines Wechselwirkungskanals oder das stets endliche Auflösungsvermögen optischer Messgeräte beschreibt. Jedes System ist ein Tiefpass.

Im *Teilchenbild* führt eine Brown'sche Bewegung mit Korrelationen zwischen den beiden Marginalverteilungen zu einer Orts-Impuls-Uncertainty. Hierzu wird die thermische Energie  $k T$  in den stationären Lösungen durch die Nullpunktsenergie  $E_0$  ersetzt. In dieser Heuristik bedingen sich Unschärfe und Nullpunktsenergie gegenseitig.

In der thermodynamischen Deutung wird die Ort-Impuls-Uncertainty aus dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik abgeleitet. Zumindest für die Dauer einer Messung ist das Quantensystem ein *offenes System*, das Entropie bzw. Information mit seiner Umwelt austauscht. Jede Messung ist mit einer Entropieproduktion verbunden, die deren Informationsgewinn im Sinne des zweiten Hauptsatzes kompensiert und so die Entropiebilanz zumindest ausgleicht. Der Messprozess setzt der Subjekt-Objekt-Spaltung eine prinzipielle Begrenzung.

## 6.1 Optische Analogie: Ähnlichkeitssatz

Die Erklärung der Unschärferelation im Wellenbild geht von der Tatsache aus, dass die Wellenfunktionen in der Ortsdarstellung und in der Impulsdarstellung Fourier-Transformierte sind. Der Ähnlichkeitssatz der Fourier-Transformation verbietet eine gleichzeitige scharfe Lokalisierung im Ortsraum und im Impulsraum. Die wichtigsten Unschärfen können als „Vierer-Unschärfe“ zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned} \text{Ort-Impuls-Unschärfe : } \quad \Delta x \cdot \Delta p &\geq \frac{1}{2}\hbar \\ \text{Energie-Zeit-Unschärfe : } \quad \Delta t \cdot \Delta E &\geq \frac{1}{2}\hbar. \end{aligned}$$

Diese Relationen beschreiben Streuungen vieler für sich genommen jeweils scharfer Messergebnisse. Über Einstein/de Broglie ins Wellenbild überspielt lauten sie:

$$\begin{aligned} \text{Ort-Impuls-Unschärfe : } \quad \Delta x \cdot \Delta k &\geq \frac{1}{2} \\ \text{Energie-Zeit-Unschärfe : } \quad \Delta t \cdot \Delta \omega &\geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Die Unschärfe zwischen Zeit und Frequenz trägt in der Signalverarbeitung den unspektakulären Namen „Zeitgesetz der Nachrichtentechnik“ („Lucky“ Lüke 1990): Je kürzer das Signal im Zeitbereich ist, desto breiter ist das Fourier-Spektrum dieses Signals im Frequenzbereich. Es handelt sich hierbei um eine Eigenschaft eines Nachrichtenübertragungskanals, dessen Produkt aus Übertragungsbandbreite und der für die Übertragung einer Nachrichtenmenge aufzuwendenden Zeit eine Konstante ist. Es gibt keinen physikalischen Allpass, kein vollkommen verzerrungsfreies System. Die Welt ist ein Tiefpass und das All ist kein Allpass. (Ein *idealer* Tiefpass ist allerdings nicht kausal, es sei denn es gibt hinreichende Zeitverzögerungen.) Um eine wirklich vollständige Beschreibung *aller* Frequenzanteile eines Vorgangs in *endlicher* Zeit zu erhalten, bräuchte man demnach eine unendliche Bandbreite des Übertragungskanals, der die Informationen über diesen Vorgang vermittelt. Die „prinzipielle Eliminierbarkeit des Unwissens“, die der klassischen Statistik unterstellt wird, besteht also im Grunde in einer gedanklichen Heraufsetzung dieser Übertragungsbandbreite ins Unendliche.

Der Ähnlichkeitssatz gilt als mathematischer Satz nicht nur für die Zeit  $t$  und die Frequenz  $\omega$ , sondern auch für den Ort  $x$  und die Ortsfrequenz  $k$ . Das klassische Analogon bei räumlichen Variablen ist das stets begrenzte *Auflösungsvermögen* optischer Geräte: Ein unendliches Auflösungsvermögen erfordert eine unendlich große Linse; und die benötigt ein unendlich großes Universum, was es – wenn überhaupt – erst in unendlich ferner Zukunft geben kann.

*Fazit:* Die Unschärferelationen beruhen im Wellenbild auf dem Ähnlichkeitssatz der Fourier-Transformation. Für raumzeitliche Wellenerscheinungen sind Unschärferelationen also nichts außergewöhnliches, sondern vollkommen klassische Eigenschaften.

Das Problem der klassischen Anschauung tritt erst beim Übergang zum Teilchenbild auf. Um die Unschärferelation auch im Teilchenbild einer klassischen Anschauung näher zu bringen, wird nun die Brown'sche Bewegung genauer untersucht, durch die schon auf klassische Weise die Messgenauigkeit eingeschränkt wird (Barnes und Silvermann 1934; Bessenrodt 1987).

## 6.2 Hydrodynamische Analogie: Brown'sche Bewegung

Wir betrachten die Verallgemeinerung der Brown'schen Bewegung auf den ganzen Phasenraum. Die Brown'sche Bewegung eines harmonisch gebundenen Teilchens kann durch eine *Langevin-Gleichung* vom Typ

$$\frac{dv}{dt} = -\beta v - \omega^2 x + K(t)$$

mit der Frequenz  $\omega$  und einem Reibungsparameter  $\beta$  beschrieben werden. Die Kraft ist hierin zerlegt in einen systematischen und einen schnell fluktuierenden Anteil  $K(t)$ . Eine äquivalente Beschreibung ist die durch eine generalisierte *Fokker-Planck-Gleichung* für die Wahrscheinlichkeitsdichte  $\rho(x, v, t)$ :

$$\frac{d}{dt}\rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} - \omega^2 x \frac{\partial \rho}{\partial v} = \beta \frac{\partial}{\partial v}(v\rho) + q \frac{\partial^2}{\partial v^2}\rho.$$

Diese Fokker-Planck-Gleichung kann als Verallgemeinerung der Liouville-Gleichung auf Brown'sche Bewegung aufgefasst werden. Auf der linken Seite stehen die Liouville'schen Konvektionsterme, rechts stehen anstelle der Null die Terme der Brown'schen Bewegung: Drift und Diffusion im Geschwindigkeitsraum. Da wir die Brown'sche Bewegung auf einer schnellen Zeitskala annehmen, betrachten wir nur die stationären Verteilungen:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = -v \frac{\partial}{\partial x}\rho + \frac{\partial}{\partial v}[(\beta v + \omega^2 x)\rho] + q \frac{\partial^2}{\partial v^2}\rho = 0.$$

Des Weiteren machen wir den üblichen Separationsansatz

$$\rho(x, v) = P(x) \cdot Q(v).$$

Die stationären Lösungen der Fokker-Planck-Gleichung lauten (Chandrasekhar 1943):

$$P(x) \sim \exp\left(-\frac{m\omega^2 x^2}{2kT}\right) = \exp\left(-\frac{E_{\text{pot}}}{kT}\right)$$

$$Q(v) \sim \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) = \exp\left(-\frac{E_{\text{kin}}}{kT}\right).$$

Weil die Temperatur  $T$  nicht beliebig klein und die Eigenfrequenz  $\omega$  nicht beliebig groß gemacht werden kann, gibt es bereits bei diesem klassischen Modell eine gewisse Unschärfe:

$$\Delta x \cdot \Delta p = \Delta x \cdot m \Delta v = \sqrt{\frac{kT}{m\omega^2}} \cdot m \sqrt{\frac{kT}{m}} = \frac{kT}{\omega}.$$

Nun ist zu beachten, dass die thermische Energie  $kT$  auf künstlichem Weg in diese Lösungen hineingekommen ist. Hierzu Chandrasekhar: „The physical circumstances of the problem require that we demand of  $Q(v, t; v_o)$  that it tends to a Maxwellian distribution for the temperature  $T$  of the surrounding field, independently of  $v_o$  as  $t \rightarrow \infty$ .“ Aus dieser Forderung folgt nämlich für den Diffusionskoeffizienten

$$q = \frac{\beta}{m} kT.$$

Unter den hier betrachteten quantenmechanischen Umständen nehmen wir an, dass die Brown'sche Bewegung durch Vakuumfluktuationen hervorgerufen wird. Mit dem gleichen Recht wie Chandrasekhar fordern wir hier, dass die stationäre Verteilung den quantenmechanischen Grundzustand wiedergibt. Um dies zu erreichen, müssen wir offenbar in den stationären Lösungen lediglich die thermische Energie  $kT$  durch die Grundzustandsenergie  $E_0$  ersetzen:

$$kT \rightarrow \frac{1}{2}\hbar\omega = E_0.$$

Mit dieser Ersetzung, die quasi einem submikroskopischen Gleichverteilungssatz für Vakuumfluktuationen gleichkommt, folgt für den quantenmechanischen Fall:

$$P(x) \sim \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right) = \exp\left(-\frac{E_{\text{pot}}}{E_0}\right)$$

$$Q(v) \sim \exp\left(-\frac{m}{\hbar\omega}v^2\right) = \exp\left(-\frac{E_{\text{kin}}}{E_0}\right).$$

Unter Verwendung von  $\Delta p = m\Delta v$  ergeben sich daraus Orts- und Impulsunschärfe zu

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \quad \Delta p = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}.$$

Eine stärkere Lokalisierung des Brown'schen Teilchens durch eine Erhöhung der Federkonstanten wird mit einer Verbreiterung der Geschwindigkeitsverteilung bezahlt; die Eigenfrequenz  $\omega$  steht einmal im Nenner und einmal im Zähler der stationären Lösung:

$$\rho(x, v) = P(x) \cdot Q(v) \sim \exp\left(-\frac{E}{E_0}\right) = \exp\left[-\left(\frac{m\omega x^2}{\hbar} + \frac{mv^2}{\hbar\omega}\right)\right].$$

Im *Produkt* aus Orts- und Impulsunschärfe hebt sich die Frequenz hingegen heraus. Damit ergibt sich die Heisenberg'sche Unschärferelation aus den Eigenschaften der Brown'schen Bewegung und der Existenz einer Nullpunktsenergie  $E_0$ :

$$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{1}{2}\hbar.$$

Diese Gleichung gilt bei bestem experimentellem Wissen und bildet so eine untere Schranke für die Messgenauigkeit der komplementären Variablen  $x$  und  $p$ . Man kann sich davon überzeugen, dass  $\rho(x, v)$  eine Lösung der generalisierten Fokker-Planck-Gleichung ist, und zwar mit dem Diffusionskoeffizienten

$$q = \frac{\beta\hbar\omega}{2m} = \frac{\beta}{m}E_0.$$

Der Reibungskoeffizient  $\beta$  kürzt sich im stationären Fall heraus; die Reibung wirkt offenbar nur bis zur Einstellung des Gleichgewichts. Auch hier zeigt sich die Dissipationsfreiheit des stationären Zustands, denn  $\beta$  gibt im Wesentlichen die mittlere Entropieproduktion an, die im Gleichgewicht im Einklang mit dem 2. Hauptsatz verschwinden muss.

*Fazit:* Die Heisenberg'sche Unschärferelation ist aus den Eigenschaften der Brown'schen Bewegung herleitbar. Eine Ortsmessung wird hierfür als Einschluss in ein Oszillatorpotential bei fester Energie  $E_0$  aufgefasst. Die Ort-Impuls-Uncertainty folgt dann aus der stationären Lösung einer verallgemeinerten Fokker-Planck-Gleichung für ein harmonisch gebundenes Brown'sches Teilchen unter dem Einfluss von Vakuumfluktuationen:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x, p, t) = -\frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial x}\rho + \frac{\partial}{\partial p}[(\beta p + m\omega^2 x)\rho] + \frac{1}{2}\hbar\omega\beta m\frac{\partial^2}{\partial p^2}\rho.$$

Die Brown'sche Bewegung relaxiert nach Annahme so schnell, dass praktische Messungen nur die Gleichgewichtslösung „sehen“, an der die Reziprozität von Orts- und Impulsunschärfe über den Term  $m\omega$  explizit sichtbar wird:

$$\rho(x, p) = P(x) \cdot Q(p) \sim \exp\left(-\frac{H(x, p)}{E_0}\right) = \exp\left[-\frac{1}{\hbar}\left(m\omega x^2 + \frac{p^2}{m\omega}\right)\right].$$

Es gibt also Korrelationen zwischen den Marginalverteilungen, die sich über das Wirkungsquantum bzw. die Nullpunktsenergie  $E_0$  in einer Unschärferelation niederschlagen.

## 6.3 Thermodynamische Analogie: Entropieaustausch

Um nun die hydrodynamische Analogie weiter thermodynamisch auszudeuten, gehen wir von der Wahrscheinlichkeit  $\rho(x, p)$  zur Entropie  $s(x, p)$  über. Die statio-

näre Entropiedichte über dem Phasenraum lautet für ein harmonisch gebundenes Brown'sches Teilchen:

$$s(x, p) \sim \ln W(x, p) \sim -\frac{H}{E_0} = -\frac{1}{\hbar} \left( m\omega x^2 + \frac{p^2}{m\omega} \right).$$

In dieser Darstellung lässt sich die Unschärferelation mit Hilfe von Krümmungen ausdrücken. Für die beiden *Hauptkrümmungen* der Entropiefläche  $s(x, p)$  ergibt sich ein unmittelbarer Zusammenhang zu den Varianzen der entsprechenden Marginalverteilungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} &= -\frac{2m\omega}{\hbar} = -\frac{1}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial^2 s}{\partial p^2} &= -\frac{2}{m\omega\hbar} = -\frac{1}{\Delta p^2}. \end{aligned}$$

Thermodynamische Stabilität ist wegen der negativen Vorzeichen stets gegeben. Die Varianzen der Marginalverteilungen können als Hauptkrümmungsradien der statio-nären Entropiefläche  $s(x, p)$  gedeutet werden. Die Unschärferelation wird auf diese Weise zu einer Aussage über die maximale *Gauß'sche Krümmung* dieser Fläche:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial p^2} = \frac{4}{\hbar^2} = \frac{1}{\Delta x^2 \cdot \Delta p^2} \Rightarrow \Delta x \cdot \Delta p = \frac{1}{2} \hbar.$$

Eine stärkere Lokalisierung im Ortsraum mit der entsprechend höheren Krümmung der Entropieverteilung hat eine kompensierende Delokalisierung im Impulsraum zur Folge und umgekehrt. Eine stärkere Krümmung in der einen Richtung wird durch eine schwächere in der anderen ausgeglichen und umgekehrt, also durch einen Austausch von Entropie zwischen Orts- und Impulsraum.

Die *mittlere Krümmung* der Entropiefläche besitzt eine obere Schranke, wobei der Maximalfall für  $m\omega = 1$  eintritt:

$$\text{mittlere Krümmung: } \frac{1}{2} \zeta(x, p) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial p^2} \right) = -\frac{1}{\hbar} \left( m\omega + \frac{1}{m\omega} \right) \leq -\frac{2}{\hbar}.$$

Der mittlere *Krümmungsradius* der Entropiefläche ist seinem Betrag nach mindestens von der Ordnung  $\hbar$ :

$$\text{Krümmungsradius: } \left| \frac{1}{\frac{1}{2} \zeta} \right| \geq \frac{\hbar}{2}.$$

*Fazit:* Die Vorstellung einer allgegenwärtigen Brown'schen Bewegung in der Mikrowelt in Form von Vakuumfluktuationen liefert eine plausible Erklärung für die Unschärferelation in der hydrodynamischen Analogie: Der Ort-Impuls-Umschärfe entspricht eine maximale Gauß'sche Krümmung der Entropiefläche. Die mittlere Krümmung ist betragsmäßig stets größer als  $2/\hbar$ , wodurch die thermodynamische

Stabilität des Systems sichergestellt wird:

$$\begin{aligned} \text{Gauß'sche Krümmung: } \quad & \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial p^2} \leq \frac{4}{\hbar^2} \\ \text{mittlere Krümmung: } \quad & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial p^2} \right) \leq -\frac{2}{\hbar}. \end{aligned}$$

Der Betrag der Krümmung der Entropiefläche ist demnach nach oben *und* unten beschränkt: nach oben durch die Unschärferelation, die eine maximale Gauß'sche Krümmung festlegt, während die thermodynamische Stabilität eine negative mittlere Mindestkrümmung verlangt und damit den Betrag der mittleren Krümmung nach unten begrenzt. Das Wirkungsquantum ist ein Maß für quantenphysikalische Schwankungen und damit gleichzeitig auch ein Maß für die Lokalisierbarkeit eines Quantenobjekts im Phasenraum.

## 6.4 Zweiter Hauptsatz und Messprozess

In einer thermodynamischen Sichtweise kann die Unschärferelation als Folge des zweiten Hauptsatzes gedeutet werden: Bei einer Messung wird Information gewonnen und damit Negentropie erzeugt. Damit der zweite Hauptsatz seine Gültigkeit behält, muss die Entropie an anderer Stelle zwangsläufig zunehmen, z. B. in der jeweils anderen, „komplementären“ Marginalverteilung. Bezeichnen wir die marginalen Entropiedichten im Gleichgewicht mit  $s_1(x)$  und  $s_2(p)$ , so gilt bis auf Konstanten

$$s(x, p) = s_1(x) + s_2(p) = -\frac{m\omega x^2}{\hbar} - \frac{p^2}{m\omega\hbar} = -\frac{x^2}{2\Delta x^2} - \frac{p^2}{2\Delta p^2}$$

Der zweite Hauptsatz verlangt im günstigsten Fall eine konstante Gesamtentropie:

$$\dot{s}(x, p) = \dot{s}_1(x) + \dot{s}_2(p) = 0 \Rightarrow \dot{s}_2(p) = -\dot{s}_1(x).$$

Ein Informationsgewinn im Ortsraum zieht einen Informationsverlust im Impulsraum nach sich und umgekehrt. Eine Halbierung der Ortsunschärfe  $\Delta x$  etwa als quasistatische Verengung des Potentials bedeutet wegen

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \quad \text{und} \quad \Delta p = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}$$

eine Vervierfachung der Eigenfrequenz  $\omega$ , was wiederum eine Verdopplung der Impulsunschärfe  $\Delta p$  zur Folge hat. Ein messender Eingriff im Ortsraum, der ein gewisses Maß an Information erzeugt, führt also im Geschwindigkeitsraum zu einer entsprechenden Entropiezunahme und umgekehrt. Diese Entropie wird quasi als Nichtwissen in das System exportiert. Die Vorstellung, dass jede Messung prinzipiell mit einer mittleren Entropieerzeugung verbunden ist, geht auf Szilard zurück (Szilard 1929; Bessenrodt 1987).

*Fazit:* In einer thermodynamischen Deutung der Unschärferelation findet die Kompen-sation des Informationsgewinns, die dem zweiten Hauptsatz Geltung verschafft, im jeweils komplementären Teil des Phasenraums statt. Damit ist die Existenz einer Ort-Impuls-Unschärfe auf den zweiten Hauptsatz zurückgeführt.

## 6.5 Unschärfe und Nullpunktsenergie

Die Unschärferelation kann unter der Annahme einer durch Vakuumfluktuationen getriebenen Brown'schen Bewegung gedeutet werden. Hierzu wurde die Grundzustandsenergie  $E_0$  anstelle der thermischen Energie  $kT$  in die Fokker-Planck-Gleichung eines harmonisch gebundenen Brown'schen Teilchens eingesetzt. Mit diesen Voraussetzungen impliziert die Existenz einer endlichen Nullpunktsenergie eine Unschärfe. Doch auch umgekehrt lässt sich bekanntlich schließen: von der Unschärfe auf die Nullpunktsenergie. Betrachten wir für diese heuristische Ableitung die Gesamtenergie eines klassischen harmonischen Oszillators

$$E(p, x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

mit dem klassischen Energieminimum  $E(0, 0)$  bei  $x_0 = p_0 = 0$ . Ein solcher Zustand absoluter Ruhe steht im Widerspruch zur Unschärferelation. Bei vorgegebener Ortsunschärfe  $x_0$  ergibt sich die minimale Impulsunschärfe  $p_0$  zu

$$p_0 = \frac{\hbar}{2x_0}.$$

Einsetzen in die Energiegleichung liefert

$$E(x_0) = \frac{\hbar^2}{8mx_0^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x_0^2.$$

Diese Gleichung beschreibt eine Konkurrenz zwischen kinetischer und potentieller Energie als Funktion der Ortsunschärfe. Wie Abb. 6.1 zeigt, ergibt sich eine Art „Zentrifugalbarriere“. Das klassische Energieminimum bei  $x_0 = 0$  ist zu einem endlichen Wert verschoben. Die Minimierung von  $E(x_0)$  liefert die richtigen Unschärfen zurück:

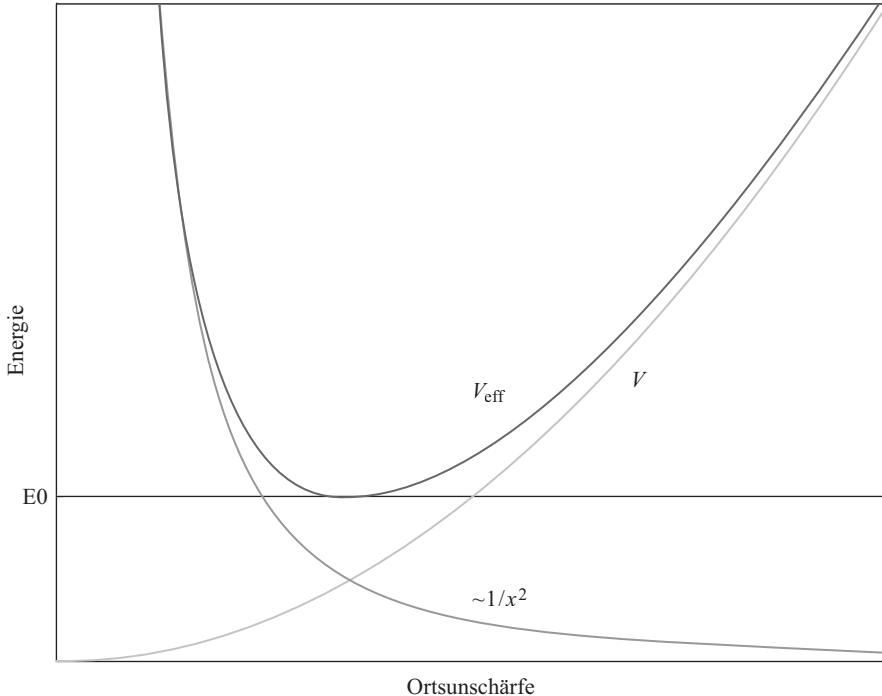
$$E(x_0) \stackrel{!}{=} \text{Min.} \Rightarrow \frac{d}{dx_0} E = 0 \Rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \Rightarrow p_0 = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}.$$

Damit kommt wieder die korrekte Nullpunktsenergie als minimaler Energiewert  $E(x_0)$  heraus:

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega.$$

Für den klassischen harmonischen Oszillator ist der Quotient  $E/\omega$  eine adiabatische Invariante, so dass sich die Energie bei langsamer Änderung proportional zur Frequenz ändert. Wird eine Ortsmessung wieder als stärkere Lokalisierung in einem

## Nullpunktsenergie



**Abb. 6.1** Unschärfe und Nullpunktsenergie

Oszillatorpotential aufgefasst, so folgt eine Erhöhung der Energie gemäß

$$E = I \cdot \omega \Rightarrow \Delta E = I \cdot \Delta \omega .$$

Zieht man weiterhin in Betracht, dass zur Messung dieser Energie mindestens eine Schwingung betrachtet werden muss, so folgt mit der Beobachtungszeit  $\Delta t \approx \omega^{-1}$  wieder eine Energie-Zeit-Uncertainty der Form

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{1}{2} \hbar .$$

*Fazit:* Unschärfe und Nullpunktsenergie bedingen sich gegenseitig.

## 6.6 Strukturelle Stabilität und Nullpunktsenergie

Für eine weitere klassische heuristische Begründung der Nullpunktsenergie betrachten wird noch einmal die klassische Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 .$$

Eine grundsätzliche Ursache dafür, dass der klassische Oszillator kein quantenmechanisches Verhalten zeigen kann, ist dessen *strukturelle Instabilität* im Sinne der Theorie dynamischer Systeme: Schon die kleinste Störung der Differentialgleichung, etwa durch einen kleinen Reibungsterm, verändert das *qualitative* Systemverhalten grundlegend. Im Allgemeinen sind aber strukturell instabile Zustände in der Natur nicht beobachtbar, weil Störungen und Schwankungen allgegenwärtig sind. Aus diesem Blickwinkel gesehen sind die Quantisierungsbedingungen von Bohr und Sommerfeld nichts anderes als eine künstliche strukturelle Stabilisierung eines eigentlich strukturell instabilen Systems.

Nehmen wir als Beispiel ein Wasserstoffmolekül: Von einem naiv-anschaulichen Standpunkt aus könnte man meinen, dass die Information über den Ort des einen Atoms eine gewisse Zeit  $\tau$  braucht, um zum jeweils anderen Atom zu gelangen. Diese Zeitverzögerung hängt von der Lichtgeschwindigkeit  $c$  ab. Die klassische Oszillatorgleichung beruht auf der Annahme einer *instantanen* Ausbreitung der Wirkung, also auf der nichtrelativistischen Näherung  $c \rightarrow \infty$ . Tatsächlich käme die Kraft  $F(t) = -m\omega^2x(t - \tau)$  aber ein bisschen zu spät, also *actio = reactio*, aber retardiert. Damit hätte man eine Delay-Differentialgleichung der Form

$$\ddot{x}(t) + \omega^2x(t - \tau) = 0.$$

Diese Gleichung ist zwar *strukturell* stabil, *dynamisch* jedoch instabil, wie der erste Term einer Taylor-Entwicklung für konstantes  $\tau$  zeigt (vgl. El'sgol'ts und Norkin 1973):

$$\ddot{x}(t) + \omega^2x(t) - \tau\omega^2\dot{x}(t) = 0.$$

Aufgrund des „negativen Reibungsterms“ ist das System instabil, die Zustandskurve spiralt sich nach außen. Als stabilisierendes Element könnte man eine klassische Strahlungsdämpfung annehmen (vgl. Jackson 1981).

Die Kraft auf das eine Atom resultiert aus dem Ort des jeweils anderen Atoms. Aufgrund der quantenmechanischen Natur des Wasserstoffoszillators können wir aber nicht erwarten, dass dieses Potential selbst scharf ist, denn es wird durch ein Objekt erzeugt, das einer Unschärferelation unterliegt. Wir müssen deshalb damit rechnen, dass das Potential selbst fluktuiert.

*Fazit:* Die Instabilität der Ruhelage aufgrund einer endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wirkung kann als klassische Erklärung für die Notwendigkeit einer Nullpunktsunruhe angesehen werden.

# Kapitel 7

## Quantenlogik

*Die Grenze zwischen dem Gewussten und Nichtgewussten ist also selbst nichts „Objektives“, sondern ich kann sie nach meiner Willkür legen, wohin ich will, nur zum Verschwinden bringen kann ich sie nicht.*

*Carl Friedrich von Weizsäcker*

Eine wichtige Voraussetzung der klassischen Physik ist eine – zumindest gedanklich durchführbare – klare Trennung zwischen Beobachter und Beobachtetem, die *Subjekt-Objekt-Spaltung*: Erkenntnis gewinnt das Subjekt nur dadurch, dass es sich vom Erkannten lösen kann. Diese Trennung der Erfahrung in einen Subjektanteil und einen Objektanteil vollzieht sich bereits in der Sprache, mit deren Hilfe der Meinende das Gemeinte durch Begriffe erfasst.

Ein „vollständiges Wissen“ bedeutet ein getreues Bild der Gegenstände „an sich“. Doch der Mikrokosmos zeigt sich nicht vollständig. Die Unschärferelation setzt der Subjekt-Objekt-Spaltung eine Grenze: Jede Messung ist ein Eingriff. Die Unschärferelationen beschreiben Einschränkungen in den gleichzeitig messbaren Eigenschaften. Diese neue Erkenntnissituation in der Quantenphysik fand ihren Ausdruck in Bohrs *Komplementaritätsprinzip*: Die Ergebnisse von Beobachtungen, die unter verschiedenen experimentellen Bedingungen gemacht werden, können nicht in ein einheitliches Bild zusammengefasst werden. Sie müssen stattdessen als *komplementär* angesehen werden. Das erfordert eine Unterscheidung zwischen zueinander *kompatiblen* und *inkompatiblen* Aussagen.

Im Folgenden wird der Frage nach den formal-logischen Konsequenzen der Quantenmechanik nachgegangen. Die Wahl eines Logikkalküls ist eine willkürliche Entscheidung. Es stellt sich allerdings heraus, dass eine dreiwertige Logik besser zur Observablenalgebra und zur Struktur des quantenmechanischen Zustandsraums passt als die klassische zweiwertige Logik. Mit der Beibehaltung einer zweiwertigen Logik müssen gewisse Aussagen für sinnlos erklärt werden, bei einer dreiwertigen *Quantenlogik* hingegen nur als beschränkt verfügbar. Damit wird der klassische Boole'schen Aussagenverband abgeschwächt zu einem orthomodularen Verband, in dem es keine allgemeine Distributivität mehr gibt.

## 7.1 Klassische Logik

Aussagen über Eigenschaften eines klassischen Systems können als Teilmengen des Zustandsraums dargestellt werden. Die Teilmengen des Zustandsraums bilden mit den Operationen Vereinigung, Schnitt und Komplement eine *Boole'sche Algebra*. Der Logikkalkül der klassischen Physik ist die klassische Logik, d. h. eine zweiwertige Aussagenlogik. Ein *allgemeiner Verband* ist charakterisiert durch eine *reflexive Halbordnung* (Existenz einer Ordnungsrelation), *Beschränktheit* (Existenz eines Supremums bzw. Infimums) und *Vollständigkeit* (Existenz eines kleinsten bzw. größten Elements). Das Maximum bzw. Minimum bilden *neutrale Elemente* bezüglich Schnitt resp. Vereinigung. In einem *komplementären Verband* gelten zusätzlich die *Komplementgesetze* für Schnitt und Vereinigung (Existenz inverser Elemente). In einem *distributiven Verband* gelten weiterhin Distributivgesetze für Schnitt und Vereinigung, in denen die Strukturverträglichkeit zwischen „und“ und „oder“ zum Ausdruck kommt. Ein *Boole'scher Verband* ist ein komplementärer und distributiver Verband. Die wichtigsten Realisierungen dieser abstrakten Struktur sind die Aussagenalgebra, die Schaltalgebra, die Mengenalgebra und die Algebra der Unterräume eines Vektorraums:

Verband	Aussagen	Teilmengen	Unterräume
<i>Ordnungsrelation</i>	Implikation	Inklusion	Inklusion
<i>Supremum</i>	Konjunktion	Vereinigung	lineare Hülle
<i>Infimum</i>	Disjunktion	Schnitt	Schnitt
<i>Maximum</i>	Tautologie	Grundmenge	Vektorraum
<i>Minimum</i>	Kontradiktion	leere Menge	Nullvektor
<i>Komplement</i>	Negation	Komplement	Komplement
<i>Distributivität</i>	Distributivgesetze	Distributivgesetze	Distributivgesetze

Die *Aussagen der klassischen Physik* sind unbegrenzt objektivierbar (vgl. Wittgenstein 1921). Es wird angenommen, dass eine Aussage wahr oder falsch ist, unabhängig davon, ob jemand diese Behauptung nachgeprüft hat oder nicht. Die *Aussagen der Quantenphysik* hingegen können auch nicht-objektivierbar sein. Das bedeutet, dass wir über das Vorliegen einer komplementären Eigenschaft nicht nur keine Kenntnis haben, sondern dass diese Eigenschaften dem betrachteten System nicht notwendigerweise zukommen oder nicht. Zwischen komplementären Variablen bestehen *Unschärferelationen*: Ein Gewinn an Information über den Impuls führt zu einem Verlust an Information über den Ort und umgekehrt.

## 7.2 Doppelspaltexperimente

Die klassische Logik kann in der Quantenphysik zu Widersprüchen führen, wie am Beispiel eines Doppelspaltexperiments mit Teilchen deutlich wird. Für einen Teil-

chenstrahl mit homogenem Impuls werden folgende Aussagen betrachtet (Rüttimann 1977):

- $A$  = Teilchen gehen durch den Schlitz 1.
- $B$  = Teilchen gehen durch den Schlitz 2.
- $C$  = Die Verteilung der Teilchen auf dem Schirm ist die arithmetische Summe der Verteilungen, die sich ergeben, wenn jeweils nur ein Schlitz offen ist.

Im Rahmen der klassischen Mechanik bestünde folgende Beziehung zwischen den Aussagen:

$$A \vee B \Rightarrow C .$$

Experimente zeigen indessen, dass  $C$  falsch ist. Nach dem Gesetz der implikativen Kontraposition kommt als indirekter Schluss:

$$[(A \vee B \Rightarrow C) \wedge \neg C] \Rightarrow \neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A \wedge \neg B .$$

Der letzte Satz folgt mit Anwendung des Distributivgesetzes und besagt, dass die Teilchen, die auf dem Schirm auftreffen, weder durch den einen noch durch den anderen Schlitz hindurchgegangen sind. Durch die Anwendung der Gesetze der klassischen Logik ist damit eine unklare, widersprüchliche Situation entstanden.

Die Diskussion kann noch weiter präzisiert werden: Wenn die klassische Aussage für das individuelle Teilchen nicht in einem logischen „oder“ zwischen  $A$  und  $B$  besteht, sondern in einem „entweder-oder“, dann geht das einzelne Teilchen entweder durch den ersten oder durch den zweiten Schlitz. Die Negation des exklusiven Oder ist aber die Äquivalenz von  $A$  und  $B$ . Der experimentelle Befund  $\neg C$  lässt somit noch zusätzlich ein „sowohl-als-auch“ zu. Das bedeutet, das Teilchen geht entweder durch keinen der Schlitzte oder durch beide Schlitzte gleichzeitig. Die Unklarheit bleibt: Denn auch ein Teilchen, was sich teilt, um gleichzeitig durch zwei Schlitzte zu fliegen, widerspricht der klassischen Vorstellung von einem Teilchen. Die Teilchen verhalten sich am Doppelspalt wie eine Welle. Wie in der Wellenoptik ist das Quadrieren einer Amplitudenfunktion dafür verantwortlich, dass das Schwärzungsbild beim Doppelspalt von der Summe der Schwärzungsbilder der Einzelspalte abweicht. Es besteht also Bedarf nach einer Untersuchung möglicher alternativer Logikkalküle für die Quantenphysik.

## 7.3 Komplementaritätslogik

Die Schwierigkeiten mit der klassischen Logik treten anscheinend durch die Anwendung des Distributivgesetzes auf. Um dem Komplementaritätsgedanken gerecht zu werden, wurde als Verallgemeinerung der klassischen Logik eine dreiwertige Logik für quantenphysikalische Aussagen vorgeschlagen (von Weizsäcker 1942; Reichenbach 1949; Mittelstaedt 1963). Neben den klassischen Wahrheitswerten „wahr“

und „falsch“ wird noch ein dritter zugelassen, der als „unbestimmt“ bezeichnet werden kann. Im Sinne dieser Komplementaritätslogik ist es ungewiss, durch welchen Schlitz die Teilchen fliegen. Der Ausdruck „unbestimmt“ ist vom Ausdruck „unbekannt“ zu unterscheiden. Letzterer bezieht sich auf einen Sachverhalt, der an sich entschieden ist, wobei wir das Resultat aber nicht kennen; ersterer macht dagegen keine Aussage über das Vorliegen oder Nichtvorliegen einer Eigenschaft.

Um die zweiwertige Logik im Quantenbereich widerspruchsfrei durchhalten zu können, müssen gewisse Aussagen für sinnlos erklärt werden, die in einem komplementären Verhältnis zum bisherigen Wissen über das gerade betrachtete Quantensystem stehen (*Interpretation mit Sinnes einschränkung*). In der dreiwertigen Komplementaritätslogik hingegen werden diese Aussagen nicht im Sinn, sondern in ihrer Aussagbarkeit oder Verfügbarkeit eingeschränkt (*Interpretation ohne Sinnes einschränkung*). Der „klassische Grenzfall“ der Quantenphysik besteht auf der logischen Ebene darin, dass die nur beschränkt verfügbaren Aussagen unbeschränkt verfügbar und objektivierbar werden.

Ein komplementärer Aussagenverband enthält mit einer Aussage  $A$  auch deren Negation. Die Komplementaritätslogik unterscheidet zwei Arten der Negation einer Aussage: Die Negation des objektiven Satzes und die Negation des Wissens, die wir *aktive* bzw. *passive* Negation nennen können. Die Negation des Wissens um die Wahrheit einer Aussage ist zu unterscheiden vom Wissen um die Falschheit dieser Aussage. Bei der aktiven Negation wird der Verneinungsoperator quasi in die Realität hineingezogen, bei der passiven Negation hingegen nicht:

$$\text{passive Negation : } \text{Ich weiß nicht, ob } A \text{ gilt.} \Leftrightarrow \neg \text{Wissen } (A)$$

$$\text{aktive Negation : } \text{Ich weiß, dass } A \text{ nicht gilt.} \Leftrightarrow \text{Wissen } (\neg A).$$

Der Logikkalkül der unbeschränkt verfügbaren Aussagen hat die Struktur eines *Boole'schen Verbandes*. Für unbeschränkt verfügbare Aussagen  $A$  und  $B$  besteht die Möglichkeit des direkten Schlusses in der Form

$$[(A \vee \neg B) \wedge B] \Rightarrow A.$$

Aussagen mit dieser Eigenschaft heißen *kompatibel*. Die Kompatibilität zweier Aussagen ist somit das verbandstheoretische Analogon zur unbeschränkten Verfügbarkeit.

Der Logikkalkül der beschränkt verfügbaren Aussagen hat die Struktur eines *orthomodularen Verbandes*. Im Unterschied zum Boole'schen Verband ist das Distributivgesetz nicht mehr allgemein gültig. Mit dem Verzicht auf die Distributivität entsteht zunächst ein orthokomplementärer Verband. Durch Hinzufügen eines eingeschränkten direkten Schlusses der Form

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow [(A \vee \neg B) \wedge B] = A$$

wird ein orthokomplementärer Verband orthomodular (Rüttimann 1977). Distributivität impliziert Orthomodularität, jeder Boole'scher Verband ist auch ein orthomodularer Verband, aber nicht umgekehrt:

Verbandsstruktur	Eigenschaft
komplementärer Verband	Komplementgesetz
orthokomplementärer Verband	Kontrapositionsgesetz
orthomodularer Verband	Orthomodularitätsgesetz
Boole'scher Verband	Distributivgesetz

Orthomodularität ist also die schwächere Struktur, die in der „klassischen Näherung“ in die Distributivität übergeht; der „klassische Grenzfall“ eines orthomodularen Aussagenverbandes ist ein Boole'scher Verband.

Ein Kriterium für die eventuelle Teildistributivität eines orthomodularen Verbandes wird durch die Kompatibilitätseigenschaften der Aussagen gegeben. Die kompatiblen Aussagen eines orthomodularen Aussagenverbandes bilden einen distributiven, d. h. Boole'schen Teilverband. Ein orthomodularer Verband ist genau dann Boole'sch, wenn alle Elemente paarweise kompatibel sind. Das Fehlen eines Distributivgesetzes entspricht umgekehrt der Tatsache, dass die Quantenmechanik inkompatible Eigenschaften beschreibt.

Die dreiwertige Quantenlogik ist ein Versuch, eine Struktur, in der sich Probleme ergeben, so weit abzuschwächen, bis die Probleme gerade verschwinden. Im Falle der Quantenphysik genügt hierfür die Abschwächung der Distributivität zur Orthomodularität.

## 7.4 Zustandsräume und Projektoren

Der Boole'sche Verband der Aussagen über klassische Systeme ist isomorph zum Verband der Teilmengen des Phasenraums. Der orthomodulare Verband der Aussagen über Quantensysteme ist isomorph zum Verband der linearen Unterräume des Hilbertraums, auf dem die Wellenfunktion lebt. Dem maximalen Wissen über ein klassisches System entspricht ein Zustandspunkt im Phasenraum. Dem maximalen Wissen über ein Quantensystem entspricht ein Zustandsvektor im Hilbertraum. Der Zustandsvektor repräsentiert das maximal *verfügbare* Wissen, welches nur im klassischen Grenzfall auch ein *vollständiges* Wissen ist. Die quantenmechanische *Beschreibung* ist vollständig in dem Sinne, dass ihr nichts hinzugefügt werden kann, was zu weiterem Wissen führt, ohne auf Teile des bereits gewonnenen Wissens verzichten zu müssen. Die maximale Information über ein System ist durch eine genaue Messung eines vollständigen Satzes kompatibler Variabler gegeben (Messiah 1976): „Die Beschreibung von physikalischen Eigenschaften mikroskopischer Objekte in klassischer Sprache verlangt den Gebrauch von Paaren komplementärer Variabler. Jede Variable eines Paares kann nur auf Kosten der Genauigkeit bei der Bestimmung der zweiten Variablen schärfer bestimmt werden.“

Statt der linearen Unterräume können auch die entsprechenden *Projektoren* betrachtet werden, die jedem Unterraum in eindeutiger Weise zugeordnet werden kön-

nen. Zwei Aussagen sind genau dann kompatibel, wenn die entsprechenden Projektoren kommutieren; die Kompatibilität von Aussagen entspricht der Vertauschbarkeit der zugehörigen Projektoren. Inkompatible, d. h. komplementäre Eigenschaften  $A$  und  $B$  werden dargestellt durch nichtvertauschende Observablen  $\hat{A}$  und  $\hat{B}$  mit

$$[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0 \Leftrightarrow \hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}.$$

Für zwei nicht-vertauschende Observablen gibt es keinen gemeinsamen Eigenvektor, denn die Eigenwertgleichungen für diese Observablen können nicht simultan erfüllt sein. Daher können zwei nicht-kommutierende Observablen nicht gleichzeitig einen exakten Wert haben. Es gibt Potentialitäten in der Natur, die prinzipiell nicht gleichzeitig aktualisierbar sind. Das maximal verfügbare Wissen über ein Quantensystem ist in geeigneten Sätzen von kommutierenden Observablen enthalten. In der Klassik sind alle Aussagen objektivierbar, unbeschränkt verfügbar und kompatibel, während es in der Quantenphysik auch Aussagen gibt, die nicht-objektivierbar, beschränkt verfügbar und inkompatibel, d. h. komplementär sind.

Bohr betont immer wieder die Existenz inkompatibler Aussagen, hält aber gleichzeitig nur kompatibel für sinnvoll, d. h. die Aussagen der Boole'schen Teilverbände. Er erfand zwar das Komplementaritätsprinzip, weigerte sich jedoch, diesem Prinzip durch eine entsprechende algebraische Struktur für inkompatible Aussagen Rechnung zu tragen. Obschon eine dreiwertige Komplementaritätslogik mit der Kopenhagener Deutung durchaus vereinbar ist, hat sich Bohr gegen diese Möglichkeit ausgesprochen (Bohr 1948): „Incidentally, it would seem that the recourse to three-valued logic, sometimes proposed as means for dealing with the paradoxical features of quantum theory, is not suited to give a clearer account of the situation, since all well-defined experimental evidence, even if it cannot be analysed in terms of classical physics, must be expressed in ordinary language making use of common logic.“ Bohrs Haltung lässt sich widerspruchsfrei durchhalten, allerdings nur auf Kosten einer Sinneseinschränkung. Die Entscheidung für einen Logikkalkül der Quantenphysik ist also nicht zwingend, sondern willkürlich. Es zeigt sich aber, dass eine dreiwertige Quantenlogik besser zur Observablenalgebra der Quantenphysik passt als die klassische Logik:

System	klassisch	quantenmechanisch
Aussagen	objektivierbar	nicht objektivierbar
Verfügbarkeit	unbeschränkt	beschränkt
Zustandsraum	Phasenraum	Hilbertraum
Zustände	Teilmengen	Unterräume
Verbandsstruktur	distributiv	orthomodular
Logikkalkül	zweiwertig	dreiwertig
Observablen	kompatibel	inkompatibel
Observablenalgebra	kommutativ	nicht kommutativ

Dreiwertige Logikkalküle werden auch zur Beschreibung der Selbstreferenz in lebenden Organismen mit Nervensystem verwendet (Spencer-Brown 1969; Howe und von Foerster 1975; Varela 1975, 1979; Varela und Goguen 1978; Kauffman und Varela 1980; Kauffman 1990). Der dritte Wahrheitswert heißt hier allerdings nicht „unbestimmt“, sondern „autonom“ oder „paradox“. Der Übergang zu einer dreiwertigen Logik entspricht dem Übergang von den reellen zu komplexen Zahlen bei der Lösung von Gleichungen vom Typ  $x^2 = -1$ . Lösungen dieser Gleichung sind weder positive noch negative, sondern imaginäre Zahlen. Entsprechend ist der dritte Wahrheitswert ein imaginärer Boole’scher Wert. „Dieser Satz ist falsch“ hat diesen paradoxen, oszillierenden, imaginären Wahrheitswert.

# Kapitel 8

## Quantenphilosophie

*Erst die Theorie entscheidet darüber,  
was man beobachten kann.*

*Albert Einstein*

Der *Formalismus* der Quantenmechanik ist von einer in sich geschlossenen Harmonie und Schönheit, seine Vorhersagen experimentell hervorragend bestätigt. Seine naturphilosophische *Deutung* ist jedoch nach wie vor umstritten. Die *Kopenhagener Deutung* war lange Zeit die Standardinterpretation der Quantenmechanik (vgl. Schrödinger 1935; Bohr 1948; Heisenberg 1956, 1973; Zeh 1970; Messiah 1976; Baumann und Sexl 1984; Landau und Lifschitz 1988; Audretsch und Mainzer 1990; Schwabl 1990; Omnès 1994, 1995; Tegmark und Wheeler 2001; Bertlmann und Zeilinger 2002; Zeilinger 2003; Rebhan 2008). Charakteristisch für die Kopenhagener Deutung sind die Unbestimmtheitsrelationen, die Komplementarität der Beschreibungen und der „Kollaps der Wellenfunktion“ bei einer Messung, der Erwin Schrödinger zur Formulierung seines Katzenparadoxons veranlasste.

In jüngster Zeit wird die Kopenhagener Deutung mehr und mehr von der *Theorie der Dekohärenz* abgelöst. Unter Kohärenz versteht die Fähigkeit, Interferenz zu erzeugen. Mit Dekohärenz bezeichnet man alle Prozesse, die diese Interferenzfähigkeit beeinträchtigen. Eine Messung etwa zur Lokalisierung von Elektronen oder Atomen stellt eine Störung der Welle dar und bewirkt damit das Verschwinden der Interferenz. Jede Wechselwirkung mit der Umwelt, z. B. die allgegenwärtige Wärmestrahlung, zerstört die quantenmechanische Interferenzfähigkeit. Die Dekohärenz erklärt, warum sich makroskopische Systeme klassisch verhalten und wie sich das Katzenparadoxon damit in Luft auflöst.

Im Folgenden wird die Debatte um die Deutung der Quantenmechanik von einem thermodynamischen Standpunkt aus noch einmal aufgegriffen. Es wird nicht überraschen, dass Einsteins Ensemble-Interpretation der Quantenmechanik am besten zu einer thermodynamischen Deutung passt.

## 8.1 Schrödingers Katze

*Wenn ich jemanden von Schrödingers Katze sprechen höre, greife ich nach meinem Gewehr.  
Stephen Hawking*

Wichtige Aspekte der kontroversen Debatte um die Deutung der Quantentheorie verdeutlicht das unscharfe Leben von *Schrödingers Katze* (Audretsch und Mainzer 1990). Diese „Burleske“ wurde von Schrödinger selbst zur Diskussion gestellt (Schrödinger 1935):

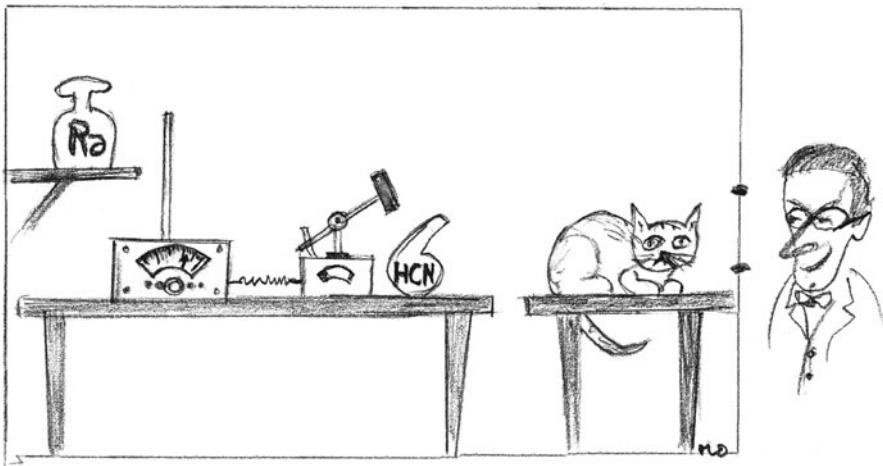
„Man kann auch ganz burleske Fälle konstruieren. Eine Katze wird in eine Stahlkammer gesperrt, zusammen mit folgender Höllenmaschine (die man gegen den direkten Zugriff der Katze sichern muss): in einem Geigerschen Zählrohr befindet sich eine winzige Menge radioaktiver Substanz, so wenig, dass im Laufe einer Stunde vielleicht eines von den Atomen zerfällt, ebenso wahrscheinlich aber auch keines; geschieht es, so spricht das Zählrohr an und betätigt über ein Relais ein Hämmerchen, das ein Körbchen mit Blausäure zertrümmert. Hat man dieses ganze System eine Stunde lang sich selbst überlassen, so wird man sich sagen, dass die Katze noch lebt, wenn inzwischen kein Atom zerfallen ist. Der erste Atomzerfall würde sie vergiftet haben. Die  $\psi$ -Funktion des ganzen Systems würde das so zum Ausdruck bringen, dass in ihr die lebende und die tote Katze zu gleichen Teilen gemischt oder verschmiert sind.“

Das Typische an diesen Fällen ist, dass eine ursprünglich auf den Atombereich beschränkte Unbestimmtheit sich in grobsinnliche Unbestimmtheit umsetzt, die sich dann durch direkte Beobachtung entscheiden lässt. Das hindert uns, ein in so naiver Weise ‚verwaschenes Modell‘ als Abbild der Wirklichkeit gelten zu lassen.“

Abbildung 8.1 veranschaulicht die Situation. Mit diesem Gedankenexperiment stellte Schrödinger die Frage, ob und inwieweit die Unbestimmtheit quantenmechanischer Messgrößen vom mikroskopischen Bereich in die makroskopische Alltagswelt übertragen werden kann. Die radioaktive Substanz befindet sich nach einer Stunde in einer Superposition aus „zerfallen“ und „nicht zerfallen“. Da das Leben der Katze von dem Zustand der radioaktiven Substanz abhängt, befindet sich diese ebenfalls in einem Überlagerungszustand aus „Katze lebt“ und „Katze tot“:

$$|\psi_{\text{Katze}}\rangle = \frac{1}{2} (|\psi_{\text{lebendig}}\rangle + |\psi_{\text{tot}}\rangle).$$

Für die Katze ist eine solche Verschmierung von Leben und Tod jedoch undenkbar und so entsteht ein Paradoxon, das Katzenparadoxon: Nach der klassischen Physik ist die Katze entweder tot oder lebendig. Die Quantenmechanik sagt dagegen einen Zustand voraus, in dem die Katze tot und lebendig zugleich ist. Erst wenn jemand die Kammer öffnet und nachsieht, geht die Katze durch einen „Kollaps der Wellenfunktion“ in einen der Zustände „tot“ oder „lebendig“ über. Schrödinger wollte mit seinem Gedankenexperiment darauf hinweisen, wie absurd eine solche Vorstellung ist.



**Abb. 8.1** Schrödingers Katze (gezeichnet von Monika Olah nach Vorlage von Abb. 4 aus Mittelstaedt (1990))

Das Katzenparadoxon ist eine Veranschaulichung des Superpositionsprinzips. In der Dynamik der Schrödinger-Gleichung bleibt ein Überlagerungszustand ein Überlagerungszustand und ein Eigenzustand bleibt ein Eigenzustand. Es gibt ohne Wechselwirkung mit der Umwelt keine Übergänge zwischen reinen und gemischten Zuständen. Der Übergang in einen Eigenzustand wurde dem Einfluss der Messung zugeschrieben. Wenn wir aber annehmen, dass allgegenwärtige Schwankungen Quantensysteme schnell genug in einen thermodynamisch stabileren Eigenzustand relaxieren lassen und die typischen Dekohärenz-Zeiten klein genug sind, dann macht sich die Superposition nicht makroskopisch bemerkbar. Ein „Kollaps der Wellenfunktion“ fände nur in unserer Kenntnis des aktuellen Zustandes statt. Katzenexperimente würden obsolet und Schrödingers Katze wäre gerettet – von Einsteins trojanischem Pferd, der Schwankungstheorie. Tierschützer könnten aufatmen.

## 8.2 Komplementarität

*Voraussagen sind schwierig  
– besonders für die Zukunft.*  
Niels Bohr

Die Kopenhagener Deutung der Quantenmechanik beruht auf drei wesentlichen Annahmen:

1. *Die Anschauung ist klassisch:* Bei jeder Naturbeschreibung benutzt man eine klassische Terminologie, wie wenig ein Vorgang auch mit der klassischen Physik zu tun haben mag.

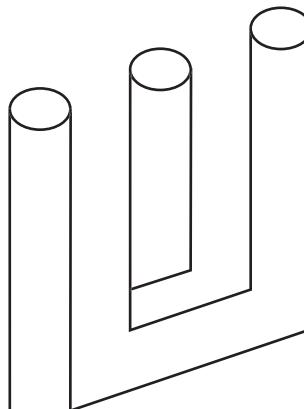
2. *Grenze für Subjekt-Objekt-Spaltung*: Im mikroskopischen Bereich ist eine klare Trennung zwischen dem beobachteten Objekt und dem beobachtenden Subjekt nicht mehr möglich.
3. *Contraria sunt Complementae*: Die Beschreibungen mit klassischen Begriffen liefern kein einheitliches Bild, sondern verhalten sich *komplementär* zueinander.

Der Bruch der Kopenhagener Schule mit der klassischen Physik kann an zwei Begriffen festgemacht werden: Die Quantenmechanik bricht mit dem klassischen Grundsatz, dass ein physikalisches System *beobachtungsfrei* und *wahrscheinlichkeitsfrei* beschrieben wird (Audretsch und Mainzer 1990). Eine klassische Beschreibung ist damit zugleich auch *objektiviert* und *determiniert*. Die Einbeziehung des Beobachters führt bei Bohr auf einen *Indeterminismus* bei der Messung und eine *Komplementarität* des Messbaren.

Die Quantenmechanik erlaubt keine einheitliche objektivierte Beschreibung, sondern nur eine Beschreibung in zueinander komplementären Begriffen. Objekteigenschaften sind genau dann objektivierbar, wenn sie durch klassische Observablen beschrieben werden, die mit allen übrigen Observablen vertauschen, d. h. miteinander kompatibel sind. Die Inkompatibilität von Eigenschaften resultiert aus der Nichtvertauschbarkeit der entsprechenden Operatoren.

Die Messgenauigkeiten bei gleichzeitigen Messungen komplementärer Observablen werden durch Unschärferelationen beschränkt. Ort und Impuls, aber auch Welle und Teilchen sind Beispiele für komplementäre Aspekte. Ob sich das Quantenobjekt als Welle oder Teilchen zeigt hängt ausschließlich davon ab, in welche experimentelle Situation es gebracht wird. Die Erkenntnis wird von der Absicht des Erkennens, von der Fragestellung des Forschers mitbeeinflusst.

Als Metapher für das Komplementaritätsprinzip kann ein sogenanntes „Weder-Noch-Objekt“ wie in Abb. 8.2 dienen. Bei diesem Weder-Noch-Objekt handelt es sich weder um drei Röhren noch um ein U-Eisen. Trotzdem scheint es aus drei Röhren zu bestehen, wenn man nur den oberen Teil betrachtet, und aus einem U-Eisen,



**Abb. 8.2** Weder-Noch-Objekt

wenn man nur den unteren Teil ansieht. Bei speziellen „Messungen“ weist es also jeweils die Eigenschaft bekannter Objekte auf. Versucht man aber, diese beiden Eigenschaften gemeinsam an dem Objekt zu entdecken, werden sie unbestimmt. Genaugenommen besitzt es diese Eigenschaften gar nicht.

Nach Messiah (1976) „scheint der Zusammenbruch der klassischen Theorie seine alleinige Ursache im Atomismus der Wirkung zu haben.“ Max Planck, der Erfinder des Wirkungsquantums, ist stets dafür eingetreten, den Anschluss der Quantentheorie an die klassische Dynamik so eng als möglich zu gestalten. Das Wirkungsquantum erwies sich jedoch gegenüber allen Versuchen, es in den Rahmen der klassischen Theorie einzupassen, als sperrig und widerspenstig. Einstein 1924 in einem Brief an Born (1971): „Meine Versuche, den Quanten greifbare Gestalt zu geben, sind allerdings immer wieder gescheitert, aber die Hoffnung gebe ich nicht auf.“ Er wolle dann doch „lieber Schuster oder gar Angestellter in einer Spielbank sein als Physiker“.

Aus thermodynamischer Sicht kann die Wirkungsquantelung als Aussage über zulässige und stabile Entropieverteilungen gedeutet werden, die aus dem Wechselspiel von *Entropieproduktion* und *Entropiediffusion* entstehen.

## 8.3 Akausalität

*Ich verzichte aber sehr ungern  
auf die vollständige Kausalität.  
Albert Einstein*

Für die Kopenhagener Schule besteht ein Quantenphänomen aus einem quantentheoretisch zu beschreibenden Objekt und einer klassisch zu beschreibenden Versuchsanordnung. Wollen wir etwas über den Zustand des Systems aussagen, müssen wir es einem Messprozess unterwerfen. Im Unterschied zur klassischen Physik verändern Messungen im Allgemeinen den Zustand der Quantenobjekte. Vor der Messung kann das Quantensystem über seine Zustände verschmiert sein, es befindet sich dann in einem Überlagerungszustand und alle möglichen Werte für die Messgröße sind simultan im System enthalten. Die Messung liefert jeweils einen speziellen Messwert und das System geht durch die Messung in den zugehörigen Eigenzustand über. „Es wird heute allgemein angenommen“, dass die Wellenfunktion den Zustand des *isolierten* Quantensystems vollständig beschreibt. Während des Messvorgangs ist das Quantensystem jedoch kein isoliertes System mehr, so dass die Messapparatur mit ihren Variablen ebenfalls in die Beschreibung mit einbezogen werden muss. Messiah (1976): „Erst wenn die Messung abgeschlossen ist, ist es wieder möglich, das System durch eine Wellenfunktion zu beschreiben, die sich nur auf seine dynamischen Variablen bezieht. Diese unterscheidet sich sicher von der Wellenfunktion unmittelbar vor der Messung, falls letztere nicht gerade Eigenfunktion der der Messgröße zugeordneten Observablen ist. Die durch den Messvorgang bewirkte (*nichtkausale*) Änderung der Wellenfunktion nennt man *Reduktion des Wellenpaketes (Zustandsreduktion)*. Kausalität gibt es in voller Strenge

nur bei isolierten Systemen.“ Der Einfluss der Messapparatur erscheint in dieser Deutung als unkontrollierbare Störung, die den kausalen Zusammenhang zwischen dem Zustand des Systems vor und nach der Messung zerstört und so der zu jeder Erkenntnis notwendigen Unterscheidung zwischen Subjekt und Objekt eine Grenze setzt. Durch die Unkontrollierbarkeit der Wechselwirkung verschmelzen Objekt und Messapparat zu einer neuen unauflösbar Einheit. Der Zusammenhang zwischen der Wellenfunktion, die den Zustand des Quantensystems beschreibt, und den messbaren Objekteigenschaften ist statistischer Natur.

Der Preis für die Kopenhagener Deutung ist also ein teilweiser *Verzicht auf Kausalität* und eine *Dualität der Zeitentwicklung*: stetig und deterministisch für das Reich des Potentiellen, unstetig und acausal dagegen für die beobachteten Aktualisierungen. Um alle quantenmechanischen Effekte vollständig beschreiben zu können, bedarf es zweier Formen der dynamischen Entwicklung eines Quantenzustands: Die zeitliche Entwicklung zwischen den Messungen wird durch die Schrödinger-Gleichung beschrieben, während die Messung durch den Kollaps der Wellenfunktion charakterisiert ist. Unbefriedigend daran ist, dass der Messprozess selbst nicht weiter analysierbar ist; er verläuft nicht mehr deterministisch, sondern indeterministisch oder acausal. Das erkenntnistheoretische Problem ist in der Tat delikat: Die Vollständigkeit der Beschreibung bricht ausgerechnet dann zusammen, wenn die einzige observablen Messwerte gewonnen werden sollen; denn vollkommen isolierte Systeme sind nicht beobachtbar.

Die Kopenhagener Deutung interpretiert die Wellenfunktion als Voraussage der Ergebnisse möglicher Messungen. Aus dieser Sicht löst sich das Katzenparadoxon in trivialer Weise: Die Wellenfunktion wird nicht als Eigenschaft des Objekts (*ontisch*) aufgefasst, sondern als Wissenskatalog, der das Wissen eines wissenden Subjekts enthält (*epistemisch*). Der plötzliche „Kollaps der Wellenfunktion“ beruht einfach auf einer Unstetigkeit in der Kenntnisnahme eines Sachverhalts und ist damit unvermeidlich. Wirft man zwei Würfel hintereinander, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, insgesamt 12 Augen zu werfen, gleich  $1/36$ . Liest man das Ergebnis des ersten Würfels ab, so ändert sich diese Wahrscheinlichkeit auf den Wert 0 oder  $1/6$ . Die gewonnene Information wird dahingehend genutzt, dass die Einschätzung der Wahrscheinlichkeit des darauffolgenden Ereignisses abgeändert wird. Diese Form der acausalen Reduktion („epistemischer Schnitt“) ist in jeder Statistik üblich. Die Würfel sind gefallen, aber erst das Aufheben des Würfelbechers führt zu einem Erkenntnisgewinn. Unsere Zurkenntnisnahme ist acausal, denn sie ist *willkürlich* (Rebhan 2008).

Die Annahme einer wirklichen *Akausalität* physikalischer Prozesse führt in eine gewisse Form des Obskurantismus. Denn in einem acausalen Vorgang gibt es Wirkungen ohne Ursache; eine Wirkung ohne Ursache ist aber definitionsgemäß ein *Wunder*. Wunder sind ihrerseits nicht Gegenstand physikalischer Untersuchungen. Ergo kann „Akausalität“ kein physikalischer Begriff sein; Physik ist keine Mystik. Dagegen kann der Kausalitätsbegriff in einem thermodynamischen Rahmen durchaus in eine *statistische Kausalität* abgeschwächt werden (Bessenrodt 1987).

Obwohl die Kopenhagener Deutung zur Standardinterpretation der Quantenmechanik wurde, blieb sie nicht unwidersprochen.

## 8.4 Vollständigkeit

*Raffiniert ist der Herrgott,  
aber boshaf ist er nicht.*

*Albert Einstein*

Zur Kopenhagener Schule gehörten Niels Bohr, Werner Heisenberg, Wolfgang Pauli, Max Born und John von Neumann. Zu den Gegnern der Kopenhagener Schule zählten Albert Einstein, Erwin Schrödinger, Louis de Broglie, John Bell und David Bohm. Ein wesentlicher Diskussionspunkt in der Debatte um die Quantenmechanik betraf ihre Vollständigkeit, also die Frage, ob die Quantentheorie eine vollständige Beschreibung der objektiven Wirklichkeit liefert, oder ob es eine bestimmte Anzahl „verborgener Parameter“ gäbe, deren Werte wegen der Unvollkommenheit unserer Beobachtungsmittel für die Beschreibung des *individuellen* Quantensystems nicht verfügbar sind (Bohr 1935; Einstein, Podolsky und Rosen 1935). Bohm etwa versuchte mehrfach, durch eigene Ansätze das Kopenhagener Interpretationsmonopol zu brechen (de Broglie 1926, 1927, 1928, 1964; Bohm 1951, 1952; Bohm und Vigier 1954; Mermin 1990; Valentini 1991, 1992; Vink 1993; Bohm und Hiley 1993; Holland 1993, 1998; Cushing 1994; Goldstein 1996; Dürr 2001; Dürr, Goldstein und Zanghi 1992, 2004; Myrvold 2003; Passon 2004, 2006; Teufel und Tumulka 2005; Bacciagaluppi und Valentini 2007). Auf der anderen Seite erbrachte von Neumann verschiedene Unmöglichkeitsbeweise für eine ontische Objektbeschreibung mittels verborgener Parameter (von Neumann 1932; Kochen und Specker 1967). Darüber hinaus stehen Bohms frühe Theorien mit verborgenen Parametern im Widerspruch zu experimentellen Befunden (Baumann und Sexl 1984; Schwabl 1990; Audretsch und Mainzer 1990). Andererseits fand John Bell Lücken in den Unmöglichkeitsbeweisen und deren Annahmen (Bell 1966, 1987). Bis in die heutige Zeit gibt es vielfältige Versuche, die Quantenmechanik aus einer statistischen Mechanik abzuleiten (Fürth 1933; Fényes 1952; Weizel 1953; Wax 1954; Wesley 1961; Comisar 1965; Nelson 1966; Favella 1967; De La Peña-Auerbach 1967; De La Peña-Auerbach und Cetto 1969; De La Peña-Auerbach, Velasco und Cetto 1970; Ballentine 1970; Ghirardi, Omoro, Rimini und Weber 1978; Davidson 1979; Grabert, Hänggi und Talkner 1979; Ghirardi, Rimini und Weber 1986; Grabert, Schramm und Ingold 1988; Roncadelli 1991; Dittrich et al. 1998; Bacciagaluppi 1999; Hänggi und Ingold 2005; Davidson 2007).

Der Beitrag der vorliegenden Arbeit besteht in einer Ableitung der Schrödinger-Gleichung aus einer thermodynamischen Lagrange-Funktion ohne weitere „verborgene“ Parameter. Unvollständig an der Beschreibung durch die Schrödinger-Gleichung ist aus dieser Sicht das Fehlen einer dissipativen Dynamik, die das System aus Mischzuständen in die Eigenzustände hinein relaxieren lässt und Übergänge zwischen Eigenzuständen thermodynamisch erklärt.

## 8.5 Quantensprünge

*Wenn es bei dieser verdammten Quantenspringerei  
bleiben soll, so bedauere ich, mich mit der  
Quantentheorie überhaupt beschäftigt zu haben.*

*Erwin Schrödinger*

Auch Schrödinger war mit der Kopenhagener Deutung nicht zufrieden: Er lehnte Bohrs Vorstellung von den Quantensprüngen ab. Nach Bohrs Theorie springt das Elektron spontan von einer Bahn auf eine andere. Für Schrödinger sollte das Elektron aber vielmehr als stehende Welle um den Atomkern interpretiert werden und die Emission von Lichtquanten durch eine Mischung verschiedener Schwingungszustände zu erklären sein. Damit wollte Schrödinger zu einem kausalen, deterministischen Modell der atomaren Vorgänge gelangen (Schrödinger 1951). Bohr hingegen vertrat die Ansicht, dass das unstetige, akausale Verhalten ein wesentlicher Grundzug der Quantentheorie sei, und dass prinzipiell keine Möglichkeit zu einer anschaulichen raumzeitlichen Beschreibung der Vorgänge im Atom bestehe.

„Natura non facit saltus.“ Die Natur macht keine Sprünge. Diese Aussage von Leibnitz kennzeichnet die Auffassung der klassischen Physik, dass alle Vorgänge stetig verlaufen – bezogen auf eine gewisse Zeitskala. Schrödinger hat an dieser Stelle Recht behalten: „Quantensprünge“, d. h. Übergänge zwischen den Eigenzuständen, werden durch Mischzustände repräsentiert. Die Störungstheorie modelliert solche Übergänge durch zeitabhängige Störoperatoren, die die Zeitumkehrinvarianz der Schrödinger-Gleichung brechen. Die Mischzustände sind thermodynamisch weniger stabil als die Eigenzustände. Bei Übergängen von Mischzuständen in Eigenzustände nimmt die mittlere Entropie zu.

## 8.6 Dekohärenz

*Der Physiker aber muss in seiner Wissenschaft voraussetzen,  
dass er eine Welt studiert, die er nicht selbst gemacht hat und  
die ohne ihn auch, im Wesentlichen genau so, vorhanden wäre.*

*Werner Heisenberg*

In letzter Zeit wird die Kopenhagener Deutung mit ihrem *Kollaps* der Wellenfunktion mehr und mehr von der Theorie der *Dekohärenz* verdrängt (Lindblad 1976; Gorini, Kossakowski und Sudarshan 1976; Walls und Milburn 1985; Weis 1993; Zeh 1993; Zurek 1991, 2001, 2002; Zurek und Paz 1994; Omnès 1994, 1995; Bub 1997; Braun, Braun und Haake 1999, 2000; Nielsen und Chuang 2000; Audretsch 2002; Breuer und Petruccione 2002; Buchleitner und Hornberger 2002; Giulini et al. 2003; Zeilinger 2003; Camejo 2006). Die Wellenfunktion kollabiert nicht erst plötzlich durch eine Messung, sondern kontinuierlich durch Wechselwirkungen des Quantensystems mit der Umgebung.

Kohärenz bezeichnet die Fähigkeit von Wellen zur Interferenz, Dekohärenz den Verlust dieser Interferenzfähigkeit. Die Dekohärenz beschreibt den Übergang eines kohärenten Überlagerungszustandes in einen „messbaren“ Eigenzustand hinein.

Die Dekohärenz-Zeit  $t_D$  ist die Zeit, die das System zum Relaxieren in einen Eigenzustand benötigt. Sie ist umgekehrt proportional zur Temperatur  $T$  und zur Masse  $m$  des Systems:

$$\text{Dekohärenz-Zeit : } t_D \sim \frac{1}{T \cdot m}.$$

Die Dekohärenz-Zeit ist also umso länger, je niedriger die Temperatur und je kleiner die Masse des Systems ist. Für makroskopische Systeme bei normalen Temperaturen bedeutet dies, dass der Verlust der Kohärenz sehr schnell stattfindet im Vergleich zu anderen beteiligten Zeitskalen. Eine quantenmechanische Kohärenz kann folglich im Alltag nicht beobachtet werden. In mikroskopischen Systemen mit sehr viel geringeren Massen hingegen kann die längere Dekohärenz-Zeit zu Quanteneffekten führen. Um Quanteneffekte sichtbar zu machen, untersucht man also sinnvollerweise sehr kleine, sehr leichte und sehr langsame, d. h. kalte Objekte.

Für die Dekohärenz kohärenter Mischzustände konnte eine thermodynamische Erklärung gefunden werden: Die Eigenzustände eines Quantensystems besitzen eine größere mittlere Entropie und sind damit thermodynamisch stabiler als die Superpositionszustände. Die Übergänge in die Eigenzustände sind in einem statistischen Sinne kausale Prozesse. Insbesondere ist der „Kollaps der Wellenfunktion“ bei der Messung ein kausaler und kein acausaler Vorgang.

## 8.7 Nichtlokalität

*Die Theorie an und für sich ist nichts nütze,  
als insofern sie uns an den Zusammenhang  
der Erscheinungen glauben macht.*

*Johann Wolfgang von Goethe*

Das Superpositionsprinzip liefert korrelierte, „verschränkte“ Gesamtzustände von Systemen, selbst wenn deren Teilsysteme schon längst räumlich getrennt und ohne Wechselwirkung sind. Diese fundamentale *Nichtlokalität* der Quantentheorie kommt beispielhaft in den sogenannten EPR-Experimenten zum Ausdruck, die von Einstein, Podolsky und Rosen vorgeschlagen wurden (Einstein, Podolsky und Rosen 1935; Bohm 1951; Bohm und Aharonov 1957; Bell 1964). In der einfachsten Variante werden zwei Teilchen mit Spin  $\frac{1}{2}$  in einem Überlagerungszustand präpariert, in dem für beide Teilchen die Spinzustände  $\uparrow$  und  $\downarrow$  gleichwahrscheinlich sind:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle).$$

Die beiden Teilchen werden von einer Quelle emittiert und bewegen sich voneinander weg. Auch wenn die Teilchen so weit voneinander entfernt sind, dass sie nicht mehr wechselwirken können, findet man folgende Korrelation bei Messungen der Spinzustände der Einzelteilchen: Misst man bei Teilchen 1 Spin  $\uparrow$ , so ergibt sich bei Teilchen 2 Spin  $\downarrow$  und umgekehrt. Die Messung am Teilchen 1 beeinflusst das Ergebnis der Messung an Teilchen 2, obwohl keine Beeinflussung zwischen den beiden Teilchen stattgefunden haben kann.

Derartige „spukhafte Fernwirkungen“ (Born 1971; Bell 1987) sind mit dem lokalen Realismus der klassischen Physik unvereinbar. Die uneingeschränkte Gültigkeit des Superpositionsprinzips suggeriert einen universellen *Holismus*: Alles hängt mit allem zusammen. Eine *lokale* Interpretation der Quantenmechanik muss hingegen davon ausgehen, dass die Spinzustände schon vor den Messungen festgelegen haben und nicht erst durch die Messung mit einem abrupten Kollaps der Wellenfunktion entstanden sind. Einstein, Podolsky und Rosen schlossen daraus, dass es eine vollständigere Theorie mit verborgenen Parametern geben müsse. Die verborgenen Parameter tragen die Information über die Spinzustände.

Die Einführung verborgener Parameter ist aber nun nicht mehr die einzige Alternative zu einem letztlich mystischen Holismus. Die Dekohärenz lässt den präparierten Superpositionszustand rasch genug in geeignete Eigenzustände relaxieren. In diesem Falle würden sich die Spins einstellen, solange die beiden Teilchen noch wechselwirken. Das Ergebnis steht längst fest, wir haben nur noch keine Kenntnis davon genommen.

Ursprünglich waren die EPR-Experimente reine Gedankenexperimente. Mit der heutigen Experimentiertechnik können diese Experimente tatsächlich durchgeführt



**Abb. 8.3** Der nichtklassische Skiläufer (gezeichnet von Monika Olah nach Vorlage von Abb. 4 aus Audretsch (1990))

werden und führen zu spannenden Ergebnissen (Greenberger, Horne und Zeilinger 1989; Greenberger, Horne, Shimony und Zeilinger 1990; Mermin 1990; Bouwmeester, Pan, Daniell, Weinfurter und Zeilinger 1999).

Kohärenz und Dekohärenz können bei Doppelspaltexperimenten mit Elektronen beobachtet werden: Ohne Wechselwirkungen befinden sich die Elektronen in einem Superpositionszustand, in dem sich die Beiträge der beiden Wege überlagern und hinter dem Doppelspalt ein Interferenzmuster erzeugen. Das Elektron fliegt quasi durch beide Spalte gleichzeitig hindurch. Wie das geht, zeigt der nicht-klassische Skiläufer in Abb. 8.3. Je mehr das Elektron jedoch auf seinem Weg Wechselwirkungen mit der Umgebung erfährt, desto mehr verschwindet das Interferenzmuster hinter dem Doppelspalt. Das gilt auch für die Wechselwirkung mit einem Messinstrument, das feststellt, durch welchen Spalt das Elektron hindurchfliegt: Immer wenn die experimentelle Anordnung die Entscheidung ermöglicht, durch welchen Spalt ein Elektron tritt, verschwindet das Interferenzmuster. Und immer, wenn eine solche Entscheidung nicht möglich ist, zeigt sich das Interferenzmuster.

*Fazit:* Der Nichtlokalität der Quantentheorie wird durch die Dekohärenz eine Grenze gesetzt.

## 8.8 Absoluter Zufall?

*Die Quantenmechanik ist sehr achtunggebietend.  
Aber eine innere Stimme sagt mir, dass das noch nicht  
der wahre Jakob ist. Die Theorie liefert viel, aber  
dem Geheimnis des Alten bringt sie uns kaum näher.  
Jedenfalls bin ich überzeugt, dass der Alte nicht würfelt.*  
Albert Einstein

Im Unterschied zur klassischen statistischen Mechanik sind inkompatible Eigenschaften von Quantensystemen prinzipiell unbestimmt und nicht mit besseren experimentellen Kenntnissen beliebig genau bestimmbar. Während die klassische Statistik nur ein Hilfsmittel gegen das prinzipiell eliminierbare Unwissen ist, gibt es im Quantenbereich eine „echte Statistik“, einen „absoluten Zufall“, der nicht durch besseres Wissen eliminierbar ist (Audretsch und Mainzer 1990). Mit dieser fundamentalen Art der Statistik konnte sich Einstein nicht abfinden (Born 1971): „Ich glaube noch an die Möglichkeit eines Modells der Wirklichkeit, d. h. einer Theorie, die die Dinge selbst und nicht nur die Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens darstellt.“ Aus klassischer Sicht kann die Quantentheorie nicht das einzelne Quantensystem beschreiben, sondern nur ein Ensemble von Quantensystemen (Einstein 1984; Ballentine 1970; Baumann und Sexl 1984; Home und Whitaker 1992).

Hinter der klassischen Vorstellung steht der *Laplace'sche Dämon*, dem es möglich ist, unter Kenntnis sämtlicher Naturgesetze und aller Anfangsbedingungen jeden vergangenen und jeden zukünftigen Zustand der Welt zu berechnen. Die Anzahl der simultan zu lösenden Bewegungsgleichungen ist allerdings so groß, dass

der Dämon für diese Berechnung mindestens genau so lange benötigen würde wie das Universum braucht, um den berechneten Zustand einzunehmen. Zudem müssten die Anfangsbedingungen für jedes Atom beliebig genau messbar sein, damit auch die chaotischen Anteile der Systemdynamik mit ihren Bifurkationen vorhergesagt werden können. Die Erforschung des deterministischen Chaos zeigt, dass eine längerfristige Vorhersage selbst bei rein deterministischen Systemen aufgrund einer extrem empfindlichen Abhängigkeit der Dynamik von den Anfangsbedingungen praktisch unmöglich sein kann.

Die klassische Idee des uneingeschränkten Determinismus in Verbindung mit einer prinzipiellen Vorhersagbarkeit lässt sich also kaum durchhalten. Doch auch die Vorstellung vom „absoluten Zufall“ und die Annahme einer spezifisch quantenmechanischen „echten Statistik“ kann ebenso kritisch hinterfragt werden. Was würde passieren, wenn jemand hinginge und eine vielleicht chaotische, aber deterministische submikroskopische Dynamik konstruieren würde, die im eingeschwungenen Zustand exakt die gleichen beobachtbaren Wahrscheinlichkeitsverteilungen hervorbringt wie die Schrödinger-Gleichung (z. B. Cohen 1992)? Dann läge der Unschärferelation ein deterministischer Prozess zugrunde, der die Impulsverteilung im Ensemble-Mittel aufweitet, wenn die Ortsverteilung zusammengedrückt wird und umgekehrt. Woher wollen wir wissen, ob eine solche Konstruktion unmöglich ist?

Die klassische Statistik unterstellt im Grunde, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung letztlich in allen Richtungen bis zum Deltapeak zusammengedrückt und mithin die Krümmung der Entropiedichte prinzipiell beliebig groß gemacht werden kann. Nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik ist aber jeder Informationsgewinn innerhalb eines isolierten Systems stets mit einem Informationsverlust an einer anderen Stelle des Systems verbunden. Die „echte“ Statistik ist eine etwas unklare Umschreibung dieser Zusammenhänge zwischen den Streuungen der Marginalverteilungen für Ort und Impuls. Die Begriffe „absoluter Zufall“ oder „Akausalität“ sind ungeeignet, um diese Zusammenhänge zu charakterisieren. Es handelt sich eher um einen *relativen*, d. h. bedingten Zufall; und die Zusammenhänge sind in einem statistischen Sinne kausal. Die Unschärferelation macht die Statistik irreduzibel.

Mit dem „echten Zufall“ widerspricht die Quantenmechanik dem *Prinzip des hinreichenden Grundes*: Nichts geschieht ohne eine Ursache (Leibniz). Aus der Wahrscheinlichkeitstheorie bleibt das *Prinzip des unzureichenden Grundes*: Wenn kein Ereignis ausgezeichnet erscheint, dann sind die Ereignisse als gleichwahrscheinlich anzunehmen (Laplace). Als Verallgemeinerung kann das *Prinzip der maximalen Unvoreingenommenheit* gegenüber fehlender Information formuliert werden. In der Quantenmechanik gibt es prinzipiell fehlende Information.

Aus einer konstruktivistischen Sicht spiegeln die Begriffe „Zufall“ und „Notwendigkeit“ nicht die Eigenschaften der Natur wider, sondern unsere eigenen Fähigkeiten und Unfähigkeiten: *Notwendigkeit* entsteht aus der Fähigkeit, unfehlbare *Deduktionen* zu machen. *Zufall* ergibt sich aus der Unfähigkeit, unfehlbare *Induktionen* vorzunehmen (von Foerster 1981, 1985).

## 8.9 Ensemble-Interpretation

*Ist nun das so skizzierte Credo der Naturwissenschaft endgültig? Ich denke: Ein Lächeln ist besser angezeigt als der Versuch einer Antwort.*

*Albert Einstein*

Die *Kopenhagener Deutung* tut sich schwer bei der Beantwortung der Frage, was der Wellenfunktion für eine Bedeutung zukommen soll. Wenn das Quadrat der Wellenfunktion eine Wahrscheinlichkeit angibt, ist die Wellenfunktion dann eine Wahrscheinlichkeitswelle? Kann eine Wahrscheinlichkeit eine Welle sein? Eine extreme, epistemische Deutung sieht die Wellenfunktion nicht als eine Eigenschaft des Quantensystems selbst, sondern als etwas, das unser Wissen über das System zum Ausdruck bringt. So schreibt Heisenberg in einem Brief an Renninger (Renninger 1960): „Der Akt der Registrierung andererseits, der zur Zustandsreduktion führt, ist ja nicht ein physikalischer, sondern sozusagen mathematischer Vorgang. Mit der unstetigen Änderung unserer Kenntnis ändert sich natürlich auch die mathematische Darstellung unserer Kenntnis unstetig.“ Die Wellenfunktion enthält die Information über das System, die uns im Prinzip zugänglich ist. Um diese Information als solche deutlicher hervortreten zu lassen, haben wir die Schrödinger-Gleichung von der Wellenfunktion über die Wahrscheinlichkeit auf die Entropie transformiert.

Die Kopenhagener Deutung offenbart eine recht subjektive, idealistische, teilweise indeterministische Einstellung zur Quantenmechanik. Im Gegensatz dazu bietet die *de-Broglie-Bohm-Theorie* eine klassische, realistische, kausale und sogar deterministische Theorie an. In ihren modernen Formen macht die Bohm'schen Mechanik dieselben experimentellen Voraussagen wie die herkömmliche Quantenmechanik, so dass das Experiment nicht entscheiden kann, welche Theorie richtiger ist als die andere. Die Entscheidung zugunsten einer der beiden Theorien ist damit eine metaphysische Entscheidung. Die Bohm'sche Theorie wird hier nicht aus physikalischen, sondern aus ästhetischen Gründen abgelehnt, weil sie die Symmetrie zwischen Orts- und Impulsdarstellung zerstört. Wie die Wellenfunktion als „Führungsfeld“ Kräfte auf das Quantenteilchen ausüben kann, bleibt etwas mysteriös. Ein interessanter Aspekt der de-Broglie-Bohm-Theorie ist allerdings die Rückführung der Quanteneffekte auf das Quantenpotential. Die aus dem Quantenpotential resultierenden Kräfte können als statistische Kräfte gedeutet werden.

Unsere thermodynamische Deutung der Quantenmechanik ist der Versuch einer kritischen Synthese zwischen der *epistemischen* Kopenhagener Deutung und der *ontologischen* Bohm'schen Interpretation. Einerseits wird die Wahrscheinlichkeitsinterpretation mit Hilfe des Entropiebegriffs weiter ausgebaut, andererseits wird die realistische Deutung des Quantenpotentials auf eine neue, thermodynamische Grundlage gestellt.

Aus Sicht der statistischen Thermodynamik ist die naheliegendste Deutung die *Ensemble-Interpretation*, die von Einstein vorgeschlagen wurde (Einstein 1984; Ballentine 1970; Baumann und Sexl 1984; Home und Whitaker 1992): „Die  $\psi$ -Funktion beschreibt überhaupt nicht einen Zustand, der einem einzelnen System

zukommen könnte; sie bezieht sich vielmehr auf so viele Systeme, eine ‚System-Gesamtheit‘ im Sinne der statistischen Mechanik. Wenn die  $\psi$ -Funktion abgesehen von besonderen Fällen nur statistische Aussagen über messbare Größen liefert, so liegt dies also nicht nur daran, dass der Vorgang der Messung unbekannte, nur statistisch erfassbare Elemente einführt, sondern eben daran, dass die  $\psi$ -Funktion überhaupt nicht den Zustand eines Einzelsystems beschreibt. Die Schrödinger-Gleichung bestimmt die zeitlichen Änderungen, welche die System-Gesamtheit erfährt. [...] Dass die Quantenmechanik in so einfacher Weise Aussagen über (scheinbar) diskontinuierliche Übergänge von einem Gesamtzustand in einen andern abzuleiten gestattet, ohne wirklich eine Darstellung des eigentlichen Prozesses zu geben, hängt damit zusammen, dass die Theorie in Wahrheit nicht mit dem Einzelsystem, sondern mit einer System-Gesamtheit operiert.“

Will man wieder zurück zu einer klassischen Situation, in der die Statistik nur wieder nichts weiter ist als ein kluges Management des prinzipiell eliminierbaren Unwissens, so kann man sich die Rolle der Statistik in der Thermodynamik als Beispiel nehmen. Man braucht eine subatomare Mikrodynamik aus vielen Elementen, über die man für eine mesoskopische oder makroskopische Beschreibung mitteln kann. Dass eine solche Mikrodynamik deterministisch sein soll, ist vielleicht wünschenswert, aber keine notwendige Voraussetzung für eine physikalische Theorie. Um Statistik treiben zu können, müssen auf der jeweiligen Mikroebene nicht zwangsläufig deterministische Gesetze gelten (Bessenrodt 1987). Es fragt sich, ob eine solche Mikrodynamik etwa aus Vakuumfluktuationen existiert (vgl. Valentini 1991, 1992; Zurek 2001, 2002). Auf eine gewisse Art sind mit der Hinzunahme von Quarks und anderen Kleintieren aus dem subatomaren Zoo bereits „verborgene“ Parameter und Eigenschaften in die Atomphysik eingeführt worden.

# Kapitel 9

## Zusammenfassung

*Morgen werden wir gelernt haben, die gesamte Physik in der Sprache der Information zu verstehen und auszudrücken.*

*John Wheeler*

Die vorliegende Arbeit entstand aus dem Bedürfnis nach anschaulichen Vorstellungen von der Quantenwelt. Viele Physiker brauchen keine Anschauung. Ihnen genügt ein funktionierender Formalismus mit abstrakten mathematischen Begriffen. Als Quellen der Anschaulichkeit bieten sich an die *Mechanik* mit ihrem *Teilchenbild* (hydrodynamische Analogie) oder die *Elektrodynamik* mit ihrem *Wellenbild* (optische Analogie) – oder auch die *Thermodynamik* mit ihren eigenen Begriffen der *Entropie* und *Information*. Die Entropie ist der Schlüssel zu einem anschaulichen Verständnis der Quantenwelt.

Messiah (1976): „Die konkreten Bilder, die uns unsere tägliche Erfahrung eingibt, entstammen einer Welt, in der  $c$  unendlich groß und  $\hbar$  gleich Null zu sein scheinen. Sie können nicht ohne weiteres auf einen Bereich übertragen werden, in dem die eine oder andere dieser Näherungen nicht mehr gültig ist.“ Die Endlichkeit der *Lichtgeschwindigkeit* erzwingt eine Revision des Gleichzeitigkeitsbegriffs; die Endlichkeit des *Wirkungsquantums* erzwingt eine Revision des Begriffs der gleichzeitigen Messung. Die Beobachtung ist *relativ* zum Standpunkt des Beobachters, die Unsicherheit bei der Beobachtung ist *absolut*. Ein Maß für die (beseitigte) Unsicherheit ist die *Entropie*.

Eine thermodynamische Umdeutung der Schrödinger-Gleichung ermöglicht einen klassischen Zugang zur Quantenmechanik. Der Schlüssel zu diesem Eingang ist Einsteins „trojanisches Pferd“, die Schwankungstheorie. Mit dem klassischen Entropiebegriff gelingt eine Transformation der Schrödinger-Gleichung auf thermodynamische Variablen. Die wesentlichen Ergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Quantenobjekte werden als *thermodynamische* Systeme aufgefasst. *Welle* und *Teilchen* sind zwei Erscheinungsformen eines thermodynamischen Prozesses.
- Die thermodynamische Beschreibung der Quantenvorgänge ist *stetig* und *kausal*.

- Die thermodynamische Umdeutung der Schrödinger-Gleichung erfolgt in zwei Schritten:

Borns Deutung:  $Wahrscheinlichkeit = Quadrat\ der\ Wellenfunktion$

Boltzmanns Prinzip:  $Entropie = Logarithmus\ der\ Wahrscheinlichkeit$

- Quanteneffekte entstehen durch das Zusammenspiel von zwei statistischen Potentialen:

$$Quantenpotential = Entropieproduktion + Entropiediffusion$$

- Die Schrödinger-Gleichung eines Teilchens in einem äußeren Potential kann auf dem Weg über die Hamilton-Jacobi-Gleichung aus einer *thermodynamischen* Lagrange-Funktion mit statistischen Potentialen hergeleitet werden.
- Auf der Beschreibungsebene der feldtheoretischen Lagrange-Dichten zeigt sich der Unterschied zur Klassik als Zusatzterm in Form einer *Entropieproduktionsdichte*, die im klassischen Grenzfall mit dem Wirkungsquantum verschwindet.
- Die *Quantenthermodynamik* bekommt eine neue Blickrichtung: Die Quantenmechanik wird aus einer statistischen Thermodynamik abgeleitet und nicht – wie sonst üblich – umgekehrt die Thermodynamik aus der Quantenmechanik.
- Die Forderung nach thermodynamischer Stabilität erzwingt die *Quantisierung* der Energie gebundener Zustände sowie eine endliche *Nullpunktsenergie*.
- In stationären Zuständen kompensiert das Quantenobjekt äußere Kräfte durch statistische, innere Kräfte. Die Kompensation ist in gebundenen Zuständen nur für gewisse diskrete Energieeigenwerte möglich. Durch die Neutralisierung der äußeren Kräfte wird das Quantenobjekt zu einem freien Teilchen, welches in gebundenen Zuständen einer Energiequantisierung unterliegt. Die Einhaltung gewisser Quantenregeln ist gleichsam der Preis für die Freiheit.
- Stationäre Lösungen der Schrödinger-Gleichung können durch schrittweise Kompensation der äußeren Kräfte durch thermodynamische Kräfte gefunden werden.
- Quantensysteme sind *dissipative* Systeme, die erst in stationären Zuständen *konservativ* werden. In den Eigenzuständen verschwindet die Energiedissipation.
- Die *Dekohärenz* quantenmechanischer Überlagerungszustände kann thermodynamisch begründet werden: Eigenzustände sind thermodynamisch stabiler als Überlagerungszustände.
- *Quantensprünge* sind stetige Übergänge des Quantensystems von einem Eigenzustand über einen instabilen Mischzustand in einen anderen Eigenzustand auf einer schnellen Zeitskala.
- Die Dissipationsfreiheit der stationären Zustände liefert eine Begründung dafür, dass in den Eigenzuständen keine Strahlungsdämpfung stattfindet. Eine Abstrahlung erfolgt nur in Superpositionszuständen, die die Übergänge zwischen den Eigenzuständen beschreiben.
- Die Schrödinger-Gleichung beschreibt nur die stationären Zustände und deren Überlagerungen, nicht aber die dissipativen Prozesse in die Eigenzustände hinein: Mit der Annahme einer schnellen dissipativen Dynamik löst sich das *Paradox der Zeitumkehrinvarianz* im Bereich der Schrödinger-Theorie.

- *Zeitumkehrinvarianz* ist eine Gleichgewichtseigenschaft und Folge einer *Zeitskalentrennung*. Der Erfolg der Zeitumkehrinvarianz als Supergesetz beruht auf der Annahme einer schnellen Relaxation der dissipativen Anteile der Dynamik. Die Einschränkung auf das Gleichgewicht lässt ein Modell mit höherer Symmetrie entstehen. Die Frage ist also nicht, wie Irreversibilität in eine reversible Welt eingeführt werden kann, sondern umgekehrt, wie Reversibilität in einer irreversiblen Welt entstehen kann.
- Die *Heisenberg'sche Unschärferelation* kann auf klassische Begriffe zurückgeführt werden: im Wellenbild auf den Ähnlichkeitssatz der Fourier-Transformation, im Teilchenbild auf eine Brown'sche Bewegung mit Korrelationen zwischen den beiden Marginalverteilungen, und im thermodynamischen Bild auf dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik.
- Eine dreiwertige Quantenlogik ist besser an die Struktur quantenmechanischer Zustandsräume angepasst als die klassische zweiwertige Logik. Der Übergang zu einer dreiwertigen Logik entspricht dem Übergang vom Schwarzweißfernsehen zum Farbfernsehen.
- Die thermodynamische Deutung der Quantenmechanik beinhaltet eine Synthese zwischen der *epistemischen* Kopenhagener Deutung und der *ontologischen* Bohm'schen Interpretation: Die Wahrscheinlichkeitsinterpretation wird mit dem Entropiebegriff weiter ausgebaut und das Quantenpotential als Summe thermodynamischer Potentiale gedeutet.

Mit diesen Ergebnissen sind keineswegs alle Fragen geklärt. Denn die Betrachtung war eingeschränkt auf eine nichtrelativistische Beschreibung von spinfreien Teilchen in äußeren Feldern. Es bleiben viele Fragen offen im Hinblick auf eine Weiterentwicklung der thermodynamischen Modellvorstellung:

- Wie sieht eine Verallgemeinerung auf *Mehrteilchensysteme* aus?
- Wie kann der *Tunneleffekt* thermodynamisch beschrieben werden?
- Wie kann der *Spin* in einer thermodynamischen Sichtweise berücksichtigt werden?
- Wie kann das *Pauli-Prinzip* thermodynamisch erklärt werden?
- Wie transformieren sich die *Pauli-Gleichung*, die *Dirac-Gleichung* und die *Klein-Gordon-Gleichung* auf thermodynamische Variablen?

Louis de Broglie: „Die Wissenschaftsgeschichte zeigt uns die Wissenschaft in konstantem Fortschritt, indem sie die erworbenen Kenntnisse und deren Interpretation ständig überarbeitet und überprüft, sie führt uns vor Augen, wie die Vergangenheit trotz ihrer Unzulänglichkeiten die Gegenwart vorbereitet. Aber wir sollten niemals vergessen, dass unsere Wissenschaft auch nur ein provisorisches Stadium des wissenschaftlichen Fortschritts ist, das seinerseits voller Schwächen und Fehler ist und dessen Rolle von daher gesehen vor allem darin besteht, die Zukunft vorzubereiten. Es ist ein großer und leicht zu begehender Fehler, zu glauben, dass die aktuellen wissenschaftlichen Konzepte definitiv seien.“

# Literaturverzeichnis

- Audretsch J.: Eine andere Wirklichkeit: Zur Strukturierung der Quantenmechanik und ihrer Interpretation. In: Audretsch J. & Mainzer J. (Hrsg.): Wieviele Leben hat Schrödingers Katze? BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim 1990
- Audretsch J.: Verschränkte Welt. Faszination der Quanten. Wiley-VCH, Weinheim 2002
- Audretsch J. & Mainzer K. (Hrsg.): Wieviele Leben hat Schrödingers Katze? BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim 1990
- Bacciagaluppi G. (1999) Nelsonian mechanics revisited. *Found. Phys.* 12(1), 1–16
- Bacciagaluppi G. & Valentini A.: Quantum Theory at the Crossroads: Reconsidering the 1927 Solvay Conference. Cambridge University Press, Cambridge 2007
- Ballentine L.E. (1970) The Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. *Rev. Mod. Phys.* 42, 358–381
- Barnes R.B. & Silverman S. (1934) Brownian motion as a natural limit to all measuring processes. *Rev. Mod. Phys.* 6, 162–192
- Baumann K. & Sexl R.U.: Die Deutungen der Quantentheorie. Vieweg, Braunschweig 1984
- Bell J.S. (1964) On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. *Physics* 1, 195–200
- Bell J.S. (1966) On the problem of hidden variables in quantum theory. *Rev. Mod. Phys.* 38, 447–452
- Bell J.S.: Speakable and unspeakable in quantum mechanics. Cambridge University Press, Cambridge 1987
- Benaim M. (1993) The „Off Line Learning Approximation“ in Continuous Time Neural Networks: An Adiabatic Theorem. *Neural Networks* 6, 655–665
- Bertlmann R.A. & Zeilinger A. (Hrsg.) Quantum [Un]speakables – From Bell to Quantum Information. Springer-Verlag, Berlin 2002
- Bessenrodt R. (1977) Brown'sche Bewegung – 100 Jahre Theorie der wichtigsten Brücke zwischen Mikro- und Makrophysik. *Physikalische Blätter* 33, 7
- Bessenrodt R.: Statistische Mechanik des Nichtgleichgewichts. Vorlesung im Sommersemester 1983 (mit zahlreichen Ergänzungen), Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf 1983
- Bessenrodt R. (1986) „Gott würfelt nicht“ – Einstein als Statistiker. Weihnachtsvorlesung, Institut für Theoretische Physik I, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf (enthalten in Bessenrodt 1987)
- Bessenrodt R.: Zur Geschichte grundlegender Ideen der Statistischen Physik. Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf 1987
- Bessenrodt R.: Zeitumkehrinvarianz und ihre Brechung – Zur Anisotropie der physikalischen Zeit. Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf 1990
- Bessenrodt R.: Supersymmetrie in der Quantenmechanik. Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf 1999

- Bialek W., Nemenman I. & Tishby N. (2001): Complexity through nonextensivity. *Physica* 302 A(1–4), 89–99
- Bishop C.M. (1995) Training with Noise is Equivalent to Tikhonov Regularization. *Neural Computation* 7, 108–116
- Bohm D.J.: *Quantum Theory*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs N.J. 1951
- Bohm D.J. (1952) A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of „Hidden“ Variables I & II. *Phys. Rev.* 85, 166–179 & 180–193
- Bohm D. & Vigier J.P. (1954) Model of the causal Interpretation of Quantum Theory in Terms of a fluid with irregular fluctuations. *Phys. Rev.* 96, 208–216
- Bohm D.J. & Aharonov Y. (1957) Discussion of the Experimental Proof of the Paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky. *Phys. Rev.* 108, 1070–1076
- Bohm D. & Hiley B.J.: *The undivided universe: an ontological interpretation of quantum theory*. Routledge, London 1993
- Bohr N. (1935) Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.* 48, 696–702
- Bohr N. (1948) On the Notions of Causality and Complementary. *Dialectica* 2, 312–319
- Born M. (1926) Quantenmechanik der Stoßvorgänge. *Z. Phys.* 38, 803–827
- Born M.: *The Born-Einstein Letters*. Macmillan, London 1971
- Bouwmeester D., Pan J.-W., Daniell M., Weinfurter H. & Zeilinger A. (1999) Observation of Three-Photon Greenberger-Horne-Zeilinger Entanglement. *Phys. Rev. Lett.* 82, 1345–1349
- Braun D., Braun P.A. & Haake F. (1999) Semiclassics for a Dissipative Quantum Map. *Physica D* 131, 265–292
- Braun D., Braun P.A. & Haake F. (2000) Long-lived quantum coherence between macroscopically distinct states in superradiance. *Opt. Comm.* 179, 411–414
- Breuer H.P. & Petruccione F.: *The Theory of Open Quantum Systems*. Oxford University Press, Oxford, 2002
- Bub J.: *Interpreting the Quantum World*. Cambridge University Press, Cambridge 1997
- Buchleitner A. & Hornberger K.: *Coherent Evolution in Noisy Environments*. Lecture Notes in Physics, Band 611, Springer-Verlag, Berlin 2002
- Camejo S.A.: *Skurrile Quantenwelt*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2006
- Callen H.B. & Welton T.A. (1951) Irreversibility and Generalized Noise. *Phys. Rev.* 83, 34–40
- Chandrasekhar S. (1943) Stochastic Problems in Physics and Astronomy. *Rev. Mod. Phys.* 15, 1–89
- Cohen M.A. (1992) The Construction of Arbitrary Stable Dynamics in Nonlinear Neural Networks. *Neural Networks* 5, 83–103
- Comisar G.G. (1965) Brownian-motion model of nonrelativistic quantum mechanics. *Phys. Rev. B* 138, 1332–1337
- Crutchfield J.P. & Feldman D.P. (2003): Regularities unseen, randomness observed: Levels of entropy convergence. *Chaos* 13(1), 25–54
- Cushing J.T.: *Quantum mechanics: Historical Contingency and the Copenhagen Hegemony*. The University of Chicago Press, Chicago 1994
- Daunicht W.J. (1991) DEFANet – A Deterministic Neural Network Concept for Function Approximation. *Neural Networks* 4, 839–845
- Daunicht W.J. (1996) Neural Networks for the Control of Posture and Locomotion. In: *Neuroprosthetics – from Basic Research to Clinical Application*. Pedotti A., Ferrarin M., Quintern J. & Riener R. (Hrsg.), Springer-Verlag, Berlin 1996
- Davidson M.P. (1979) A Generalization of the Fényes-Nelson Stochastic Model of Quantum Mechanics. *Lett. Math. Phys.* 3, 271–277
- Davidson M.P. (2007) Stochastic Models of Quantum Mechanics – A Perspective. *AIP Conf. Proc.* 889, 106–119
- De Broglie L. (1926) Sur la possibilité de relier les phénomènes d'interférences et de diffraction à la théorie des quanta de lumière, *Comptes Rendus Acad. Sci.* 183, 447–448

- De Broglie L. (1927a) La structure atomique de la matière et du rayonnement et la mécanique ondulatoire. *Comptes Rendus Acad. Sci.* 184, 273–274
- De Broglie L. (1927b) Sur le rôle des ondes continues en mécanique ondulatoire, *Comptes Rendus Acad. Sci.* 185, 380–382
- De Broglie L. (1927c) La Mécanique ondulatoire et la structure atomique de la matière et du rayonnement. *Journal de Physique* 8(5), 225–241
- De Broglie L. (1928) La nouvelle dynamique des quanta. In: E' lecrons et Photons: Rapports et Discussions du Cinquième Conseil de Physique, 105–132, Gauthier-Villare et Cie., Paris 1928
- De Broglie L.: The Current Interpretation of Wave Mechanics – A Critical Study. Elsevier Publishing Company, Amsterdam 1964
- De Groot D., Neelakanta P.S., Sudhakar R. & Aalo V. (1993) Stochastic aspects of neural dynamics: Fokker-Planck approach. *Biol. Cybern.* 69, 155–164
- De Groot S.R. & Mazur P.: Non-Equilibrium Thermodynamics. North-Holland, Amsterdam 1963
- De La Peña-Auerbach L. (1967) A simple derivation of the Schrödinger equation from the theory of Markoff processes. *Phys. Lett. A* 24, 603–604
- De La Peña-Auerbach L. & Cetto A.M. (1969) Lagrangian form of stochastic equations and quantum theory. *Phys. Lett. A* 29, 562–563
- De La Peña-Auerbach L., Velasco R.M. & Cetto A.M. (1970) Some Comments on Stochastic Quantum Mechanics. *Revista Mexicana de Fisica* 19, 193–205
- De Witt C.C., Siciliano B. & Bastin G. (Hrsg.): Theory of Robot Control. Springer-Verlag, London 1996
- Dittrich T., Hänggi P., Ingold G.L., Kramer B., Schön G. & Zwerger W.: Quantum Transport and Dissipation. Wiley-VCH, Weinheim 1998
- Dürr D.: Bohmsche Mechanik als Grundlage der Quantenmechanik. Springer-Verlag, Berlin 2001
- Dürr D., Goldstein S. & Zanghi N. (1992) Quantum equilibrium and the Origin of Absolute Uncertainty. *Journal of Statistical Physics* 67, 843–907
- Dürr D., Goldstein S. & Zanghi N. (2004) Quantum equilibrium and the role of operators as observables in quantum theory. *Journal of Statistical Physics* 116, 959–1055
- El'sgol'ts L.E. & Norkin S.B.: Introduction to the theory an application of differential equations with deviating arguments. Academic Press, New York & London 1973
- Eigen M. & Schuster P. (1978) The Hypercycle. A Principle of Natural Self-Organization. Part B: The Abstract Hypercycle. *Naturwissenschaften* 65, 7–41
- Einstein A. (1904) Zur allgemeinen molekularen Theorie der Wärme. *Ann. Phys.* 14, 354–362
- Einstein A. (1905) Die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Ann. Phys.* 17, 549–560
- Einstein A. (1909a) Zum gegenwärtigen Stand des Strahlungsproblems. *Phys. Z.* 10, 185–193
- Einstein A. (1909b) Über die Entwicklung unserer Anschauungen über das Wesen und die Konstitution der Strahlung. *Phys. Z.* 10, 817–825
- Einstein A. (1910) Theorie der Opaleszenz von homogenen Flüssigkeiten und Flüssigkeitsgemischen in der Nähe des kritischen Zustandes. *Ann. Phys.* 33, 1275–1298
- Einstein A. (1917) Zum Quantensatz von Sommerfeld und Epstein. *Verh. dgn. der DPG* 19, 82–92
- Einstein A., Podolsky B. & Rosen N. (1935) Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Phys. Rev.* 47, 777–780
- Einstein A.: Aus meinen späten Jahren. Ullstein, Frankfurt a.M. 1984
- Favella L.F. (1967) Brownian motions and quantum mechanics. *Ann. Inst. Henri Poincaré A* 7, 77–94
- Feldman D. & Crutchfield J. (1998): Measures of statistical complexity: Why? *Phys. Lett. A*, 238:244–252
- Feldman D. & Crutchfield J. (2003) Structural information in two-dimensional patterns: Entropy convergence and excess entropy. *Phys. Rev. E*, 67, 51–104
- Fényes I. (1952) Eine wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung und Interpretation der Quantenmechanik. *Z. Phys.* 132, 81–106
- Fisher R.A. (1925) Theory of statistical estimation. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 22, 700–725

- Foerster H. von: Observing Systems. Intersystems Publications, Salinas 1981
- Foerster H. von: Sicht und Einsicht. Versuche zu einer operativen Erkenntnistheorie. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden 1985
- Fox R.F. (1979) Irreversible processes at nonequilibrium steady states. Proc. Nati. Acad. Sci. USA, Vol. 76, No. 5, 2114–2117
- Fox R.F. (1980) The „excess entropy“ around nonequilibrium steady states,  $(\delta^2 S)_{SS}$ , is not a Liapunov function. Proc. Nati. Acad. Sci. USA, Vol. 77, No. 7, 3763–3766
- Fürth R. (1933) Über einige Beziehungen zwischen klassischer Statistik und Quantenmechanik. Z. Phys. 81, 143–162
- Gemmer J., Michel M. & Mahler G.: Quantum Thermodynamics: Emergence of Thermodynamic Behavior Within Composite Quantum Systems. Lecture Notes in Physics 784, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2009
- Ghirardi G.C., Omoro C., Rimini A. & Weber T. (1978) Stochastic interpretation of quantum mechanics – Critical review. Riv. Nuovo Cimento 1, 1–34
- Ghirardi G.C., Rimini A. & Weber T. (1986) Unified Dynamics for Microscopic and Macroscopic Systems. Phys. Rev. 34(2), 470–91
- Ghirardi G.C. & Deotto E. (1998) Bohmian mechanics revisited. Found. Phys. 28, 1–30
- Giulini D.J.W., Kupsch J., Stamatescu I.O., Joos E., Zeh H.D. & Kiefer C.: Decoherence and the appearance of a classical world in quantum theory. Springer-Verlag, Berlin 2003
- Glansdorff P. & Prigogine I.: Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations. Wiley/Interscience, London 1971
- Goldstein H.: Klassische Mechanik. AULA-Verlag, Wiesbaden 1987
- Goldstein S. (1996) Bohmian mechanics and the quantum revolution. Synthese 107, 145–165
- Gorini V., Kossakowski A. & Sudarshan E.C.G. (1976) Completely positive dynamical semigroups of N-level systems. J. Math. Phys. 17, 821–825
- Grabert H., Hänggi P. & Talkner P. (1979) Is quantum mechanics equivalent to a classical stochastic process? Phys. Rev. A 19, 2440–2445
- Grabert H., Schramm P. & Ingold G.L. (1988) Quantum Brownian motion: The functional integral approach. Phys. Rep. 168, 115–207
- Grassberger P. (1986) Toward a quantitative theory of self-generated complexity. Int. J. Theo. Phys. 25(9), 907–938
- Greenberger D.M., Horne M.A. & Zeilinger A. (1989) Going beyond Bell's Theorem. In: Bell's Theorem, Quantum Theory, and Conceptions of the Universe, 69–72. Kafatos M. (Hrsg.), Kluwer, Dordrecht 1989
- Greenberger D.M., Horne M.A., Shimony A. & Zeilinger A. (1990) Bell's theorem without inequalities. Am. J. Phys. 58, 1131–1143
- Gümbel S.: Nichtgleichgewichtsthermodynamik und statistische Mechanik dissipativer diskreter Systeme. Dissertation, Berlin 2004
- Hänggi P. & Ingold G.L. (2005) Fundamental aspects of quantum Brownian motion. Chaos 15, 026105–026115
- Haken H.: Synergetik. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1981
- Hasegawa A. & Kodama Y.: Solitons in Optical Communications. Clarendon Press, Oxford 1995
- Haykin S.: Adaptive Filter Theory. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1991
- Heisenberg W. (1956) Die Entwicklung der Deutung der Quantenmechanik. Physikalische Blätter 12, 289–304
- Heisenberg W.: Der Teil und das Ganze. dtv, München 1973
- Holland P.R.: The Quantum Theory of Motion: An Account of the de Broglie-Bohm Causal Interpretation of Quantum Mechanics. Cambridge University Press, Cambridge 1993
- Holland P.R. (1998) New trajectory interpretation of quantum mechanics. Found. Phys. 28, 881–911
- Hollerbach J.M. (1980) A Recursive Lagrangian Formulation of Manipulator Dynamics and a Comparative Study of Dynamics Formulation Complexity. IEEE Trans. Syst. Man Cyb. 10, 730–736

- Holst E. von & Mittelstaedt H. (1950) Das Reafferenzprinzip. *Naturwissenschaften* 37, 464–476
- Home D. & Whitaker M.A.B. (1992) Ensemble Interpretations of Quantum Mechanics. A Modern Perspective. *Physics Reports* 210, 223–317
- Howe R.H. & Foerster H. von (1975) Introductory comments to Francisco Varela's calculus for self-reference. *Int. J. General Systems* 2, 1–3
- Isidori A.: *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, Berlin 1985
- Jackson J.D.: *Klassische Elektrodynamik*. Walter de Gruyter, Berlin 1981
- Jetschke G.: *Mathematik der Selbstorganisation*. Verlag Harri Deutsch, Berlin 1989
- Kamke E.: *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen*. Geest & Portig, Leipzig 1967
- Kato A., Kaufmann M., Muschik W. & Schierrmeister D. (2000) Different Dynamics and Entropy Rate in Quantum-Thermodynamics. *J. Non-Equilib. Thermodyn.* 25, 63–68
- Kauffman L.H. & Varela F.J. (1980) Form Dynamics. *Journal of Social and Biological Structures* 3, 171–206
- Kauffman L.H. (1990) Schrodinger's cat and the cheshire cat: Quantum mechanics and Laws of Form. *Journal of the Western Chapter of the Alternative Natural Philosophy Association* 2(2), 9–33
- Kaufmann M.: *Quantum Thermodynamics of discrete Systems*. Wissenschaft und Technik Verlag, Berlin 1995
- Kaufmann M., Muschik W. & Schierrmeister D.: On positivity of rate of entropy in quantum-thermodynamics. In: J.S. Shiner (Hrsg.): *Entropy and Entropy Generation*. Kluwer, Dordrecht 1996, 1–9
- Kochen S. & Specker E.P. (1967): The Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics. *Journal of Mathematics and Mechanics* 17, 59–87
- Kubo R. (1966) The fluctuation-dissipation theorem. *Rep. Progr. Phys.* 29, 255–284
- Kullback S.: *Information theory and statistics*. Wiley, New York 1959
- Landau L.D. & Lifschitz E.M.: *Theoretische Physik kurzgefaßt*, Band I: Mechanik, Elektrodynamik. Carl Hanser Verlag, München 1977
- Landau L.D. & Lifschitz E.M.: *Lehrbuch der theoretischen Physik*. Band III: Quantenmechanik. Akademie-Verlag, Berlin 1988
- Lesch H. & Quot-Team: *Quantenmechanik für die Westentasche*. Pieper Verlag, München 2007
- Lindblad G. (1976) On the generators of quantum dynamical semigroups. *Comm. Math. Phys.* 48, 119–130
- Ljung L.: *System Identification*. Prentice-Hall, New Jersey 1987
- Lüke H.D.: *Signalübertragung*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1990
- Madelung E. (1926) Eine anschauliche Deutung der Gleichung von Schrödinger. *Naturwissenschaften* 14, 1004–1004
- Madelung E. (1927) Quantentheorie in hydrodynamischer Form. *Z. Phys.* 40, 322–326
- Melcher H.: *Albert Einstein wider Vorurteile und Denkgewohnheiten*. verlag das europäische buch, Berlin 1984
- Mermin N.D. (1990a) What's wrong with these elements of reality? *Physics Today* 43, 9–11
- Mermin N.D. (1990b) Quantum mysteries revisited. *Am. J. Phys.* 58, 731–734
- Mermin N.D. (1990c) Simple Unified Form for the Major No-Hidden Variables Theorems. *Phys. Rev. Lett.* 65, 3373–76
- Messiah A.: *Quantenmechanik*. Walter de Gruyter, Berlin 1976
- Mittelstaedt P.: *Philosophische Probleme der modernen Physik*. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim 1963
- Mittelstaedt P.: Objektivität und Realität in der Quantenphysik. In: Audretsch J. & Mainzer J. (Hrsg.): *Wieviele Leben hat Schrödingers Katze?* BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim 1990
- Munn W.D. & Penrose R. (1955) A note on inverse semigroups. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 51, 396–399

- Muschik W. & Kaufmann M.: Quantum-Thermodynamics: Bridging quantum mechanics and thermodynamics. In: E. Ebeling & W. Muschik (Hrsg.): Statistical Physics and Thermodynamics of Nonlinear Nonequilibrium Systems. World Scientific, Singapore 1992, 229–241
- Muschik W. & Kaufmann M. (1994) Quantum-Thermodynamical Description of Discrete Non-Equilibrium Systems. *J. Non-Equilib. Thermodyn.* 19, 76–94
- Myrvold W.C. (2003) On some early objections to Bohm's theory. *Phil. Sci.* 17(1), 7–24
- Nelson E. (1966) Derivation of the Schrödinger Equation from Newtonian Mechanics. *Phys. Rev.* 150, 1079–1085
- Neumann J. von: Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. Springer-Verlag, Berlin 1932
- Nicolis G. & Prigogine I.: Self-Organization in Nonequilibrium Systems. Wiley/Interscience, New York 1977
- Nicolis G. & Prigogine I.: Die Erforschung des Komplexen. Piper, München 1987
- Nielsen M.A. & Chuang I.L.: Quantum computation and quantum information. Cambridge University Press, Cambridge 2000
- Olah N.: Das Reafferenzprinzip als Kompensationsstrategie in der Kybernetik. VDI Verlag, Düsseldorf 2001
- Olah N.: Gerechtigkeit ist wettbewerbsfähig! Neutrales Geld als innovative Finanzdienstleitung. In: Chancengleichheit, Sozialpartnerschaft, Gerechtigkeit – Werte mit Zukunft? Büchergilde Gutenberg, Frankfurt am Main 2001
- Olah N. (2001) Neutrale Liquidität als Finanzinnovation. *Zeitschrift für Sozialökonomie* 129, 25–32
- Olah N., Huth Th. & Löhr D. (2010) Geldpolitik mit optimaler Zinsstruktur. *Zeitschrift für Sozialökonomie* 164/165, 13–22
- Omnès R.: The Interpretation of Quantum Mechanics. Princeton Series in Physics, Princeton 1994
- Omnès R. (1995) A new interpretation of quantum mechanics and its consequences in epistemology. *Found. Phys.* 25(4), 605–629
- Onsager L. (1931) Reciprocal relations in irreversible processes II. *Phys. Rev.* 38, 2265–2279
- Onsager L. & Machlup S. (1953) Fluctuations and irreversible processes II. *Phys. Rev.* 91, 1505–1512
- Parwani R. (2005) Why is Schrödinger's equation linear? *Braz. J. Phys.* 35, 494–496
- Passon O.: Bohmsche Mechanik. Eine elementare Einführung in die deterministische Interpretation der Quantenmechanik. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt a. M. 2004
- Passon O. (2006) What you always wanted to know about Bohmian mechanics but were afraid to ask. *Physics and Philosophy* 3, 1–25
- Paul R.P. (1972) Modeling, trajectory calculation and servoing of a computer controlled arm. Stanford Artificial Intelligence Memo Nr. 177
- Paul R.P.: Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control. MIT Press, Boston 1981
- Penrose R. (1955) A generalized inverse for matrices. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 51, 406–413
- Prigogine I.: Vom Sein zum Werden. Zeit und Komplexität in den Naturwissenschaften. Piper, München 1979
- Rebhan E.: Theoretische Physik: Quantenmechanik. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 2008
- Reginatto M. (1998) Derivation of the equation of nonrelativistic quantum mechanics using the principle of minimum Fisher information. *Phys. Rev. A* 58, 1775–1778
- Reichenbach H.: Philosophische Grundlagen der Quantenmechanik. Birkhäuser, Basel 1949
- Reichl L.E.: A Modern Course in Statistical Physics. Edward Arnold, London 1991
- Reif F.: Statistische Physik und Theorie der Wärme. Walter de Gruyter, Berlin New York 1987
- Renninger M. (1960) Messung ohne Störung des Meßobjekts. *Z. Phys.* 158, 417–421
- Roman P.: Advanced Quantum Theory. Addison-Wesley, Reading (Mass.) 1965
- Roncadelli M. (1991) Langevin Formulation of Quantum Dynamics. *Europhys. Lett.* 16, 609–615
- Rüttimann G.: Logikkalküle der Quantenphysik. Duncker & Humblot, Berlin 1977
- Sahal D. (1979) A Unified Theory of Self-Organization. *Journal of Cybernetics* 9, 127–142

- Schrödinger E. (1926) Quantisierung als Eigenwertproblem 1–4. *Ann. d. Phys.* 79, 361, *Ann. d. Phys.* 79, 489, *Ann. d. Phys.* 80, 437, *Ann. d. Phys.* 81, 109
- Schrödinger E. (1935) Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik. *Naturwiss.* 23, 807–812, 823–828, 844–849
- Schrödinger E.: *What is Life?* Cambridge Univ. Press, New York 1947
- Schrödinger E. (1951) Are there Quantum Jumps? *Brit. J. Philos. Sci.* 3, 109–123, 233–242
- Schwabl F.: *Quantenmechanik*. Springer-Verlag, Berlin 1990
- Smoluchowski M. von: *Abhandlungen über die Brownsche Bewegung und verwandte Erscheinungen*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1923
- Spatschek K.H.: *Theoretische Plasmaphysik. Eine Einführung*. Teubner, Stuttgart 1990
- Spencer-Brown G.: *Laws of Form*. George Allen and Unwin, London 1969
- Szilard L. (1929) Über die Entropieverminderung in einem thermodynamischen System bei Eingreifen intelligenter Wesen. *Zs. Phys.* 53, 840–856
- Tegmark M. & Wheeler J.A. (2001) 100 Jahre Quantentheorie. *Spektrum der Wissenschaft* 4, 68–76
- Teufel S. & Tumulka R. (2005) Simple Proof for Global Existence of Bohmian Trajectories. *Commun. Math. Phys.* 258, 349–365
- Uhlenbeck G.E. & Ornstein L.S. (1930) On the theory on brownian motion. *Phys. Rev.* 36, 823–841
- Valentini A. (1991a) Signal-locality, Uncertainty, and the Subquantum H-theorem. Part I. *Phys. Lett.* 156, 5–11
- Valentini A. (1991b) Signal-locality, Uncertainty, and the Subquantum H-theorem. Part II. *Phys. Lett.* 158, 1–8
- Valentini A.: On the Pilot-Wave Theory of Classical, Quantum and Subquantum Physics. PhD Thesis, International School for Advanced Studies 6, Trieste 1992
- Varela F.J. (1975) A calculus for selfreference. *Int. J. General Systems* 2, 5–24
- Varela F.J. (1979) The extended calculus of indications interpreted as a three-valued logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 20(1), 141–146
- Varela F.J. & Goguen J.A. (1978) The arithmetic of closure. *Journal of Cybernetics* 8, 48–64
- Varjú D. (1990) A Note on the Reafference Principle. *Biol. Cybern.* 63, 315–323
- Vink J.C. (1993) Quantum Mechanics in Terms of Discrete Beables. *Phys. Rev.* 483, 1808–1818
- Walls D.F. & Milburn G.J. (1985) Effect of dissipation on quantum coherence. *Phys. Rev. A* 31, 2403–2408
- Waters R.C. (1979) Mechanical Arm Control. MIT Artificial Intelligence Memo Nr. 549
- Wax N. (Hrsg.): *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes*. Dover Publications, New York 1954
- Weis U.: *Quantum dissipative systems*. World Scientific, Singapore 1993
- Weizel W. (1953) Ableitung der Quantentheorie aus einem klassischen, kausal determinierten Modell. *Z. Phys.* 134, 264–285, 135, 270–273
- Weizsäcker C.F. von (1942) Die moderne Atomlehre und die Philosophie. *Die Chemie* 55, 99–104
- Wesley J.P. (1961) Classical Interpretation of Quantum Mechanics. *Phys. Rev.* 122, 1932–1941
- Widrow B. & Stearns S.D.: *Adaptive signal processing*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1985
- Witten E. (1981) Dynamical Breaking of Supersymmetry. *Nucl. Phys. B* 188, 513–555
- Wittgenstein L. (1921) *Tractatus logico-philosophicus*. Suhrkamp, Frankfurt am Main 1963
- Xing X.S. (1998) On the fundamental equation of nonequilibrium statistical physics. *Int. J. Mod. Phys. B* 12(20), 2005–2029
- Xing X.S. (2001) New progress in the principle of nonequilibrium statistical physics. *Chinese Science Bulletin* 46(6), 448–454
- Zeh H.D. (1970) On the interpretation of measurement in quantum theory. *Found. Phys.* 1, 69–76
- Zeh H.D. (1993) There are no Quantum Jumps, nor are there Particles! *Phys. Lett. A* 172, 189–192
- Zeilinger A.: *Einstiens Schleier. Die neue Welt der Quantenphysik*. C.H. Beck Verlag, München 2003

- Zurek W.H. (1991) Decoherence and the Transition from Quantum to Classical. *Physics Today* 44, 36–44
- Zurek W.H. (2001) Sub-Planck structure in phase space and its relevance for quantum decoherence. *Nature* 412, 712–717
- Zurek W.H. (2002) Decoherence and the Transition from Quantum to Classical – Revisited. *Los Alamos Science* 27, 2–25
- Zurek W.H. & Paz J.P. (1994) Decoherence, chaos, and the second law. *Phys. Rev. Lett.* 72, 2508–2511

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Brown'sche Bewegung im Oszillatorenpotential . . . . .	19
4.1	Eigenzustände des Oszillatorenpotentials . . . . .	37
4.2	Eigenzustände des Coulomb-Potentials ( $l = 0$ ) . . . . .	41
4.3	Eigenzustände des Coulomb-Potentials ( $l > 0$ ) . . . . .	42
4.4	Bifurkationen im Oszillatorenpotential . . . . .	43
4.5	Mischzustände im Oszillatorenpotential . . . . .	44
4.6	Wahrscheinlichkeitsdichte im Oszillatorenpotential . . . . .	45
4.7	Mittlere Entropie im Oszillatorenpotential . . . . .	46
6.1	Unschärfe und Nullpunktsenergie . . . . .	65
8.1	Schrödingers Katze . . . . .	77
8.2	Weder-Noch-Objekt . . . . .	78
8.3	Der nichtklassische Skiläufer . . . . .	84

# Stichwortverzeichnis

## A

Adiabatenhypothese 49, 53  
Akausalität 79, 80, 86

## B

Bifurkation 43, 45  
Boltzmann-Beziehung 2, 13, 24  
Boltzmann-Konstante 13, 24, 34  
Born'sche Deutung 24  
Brown'sche Bewegung 5, 13, 19, 57, 59–61, 91, 93

## D

de-Broglie-Bohm-Theorie 7, 29, 87  
de-Broglie-Relation 50, 51  
Dekohärenz 2, 7, 33, 46, 47, 75, 77, 82–85, 90  
Dirac-Gleichung 91  
Dissipationsfunktion 15, 16  
Doppelspalt 50, 68, 69, 85

## E

Energiedissipation 2, 13, 15, 23, 29, 52, 90  
Ensemble 54, 75, 85–87, 97  
Entropie 2, 7, 8, 13, 14, 17–22, 24, 30, 33, 46, 47, 57, 61–63, 82, 83, 87, 89, 90  
Entropie-Operator 8  
Entropiedichte 13–15, 17, 23, 24, 26, 29, 30, 34, 40, 45, 62, 86  
Entropiediffusion 2, 3, 8, 17, 23, 25–27, 30, 33, 36, 40, 54, 56, 79, 90  
Entropiediffusionsdichte 18, 40  
Entropieexport 13, 20, 22  
Entropieproduktion 2, 8, 15–18, 23, 25–27, 30, 31, 33–36, 40, 54, 56, 57, 61, 79, 90  
Entropieproduktionsdichte 14–16, 18, 32, 40, 90

epistemische Deutung 6, 87

epistemischer Schnitt 80  
EPR-Experimente 84  
Euler-Lagrange-Gleichung 32  
Exzessentropie 17, 18  
Exzessentropiedichte 17  
Exzessentropieproduktion 17, 18

## F

Führungsgleichung 28  
Fermat'sches Prinzip 53  
Fisher-Information 31  
Fluktuationen 14, 17  
Fluktuations-Dissipations-Theorem 17  
Fokker-Planck-Gleichung 19, 59, 61, 64

## G

Gauß'sche Krümmung 62, 63

## H

Hamilton'sches Prinzip 53  
Hamilton-Funktion 25, 27, 29, 51, 52  
Hamilton-Jacobi-Gleichung 23–26, 28, 31, 32, 52, 54, 90  
Hamilton-Operator 11  
Hermite-Polynome 36  
Hilbertraum 71, 72  
hydrodynamische Analogie 3, 49, 54, 61, 89

## I

Instabilität 8, 45, 46, 66  
Interferenz 75, 83  
Irreversibilität 8–11, 13, 14, 91

## K

kanonische Gleichungen 27  
klassischer Grenzfall 29, 31, 35

- Klein-Gordon-Gleichung 91  
 Kohärenz 75, 82, 83, 85  
 Kollaps der Wellenfunktion 80  
 Komplementarität 6, 7, 75, 77, 78  
 Komplementaritätslogik 69, 70, 72  
 Kontinuitätsgleichung 24, 26, 31, 56  
 Kopenhagener Deutung 6, 72, 75, 77, 80, 82, 87  
 Kopenhagener Schule 3, 78, 79, 81  
 Korrespondenzprinzip 49–51, 53  
 Korrespondenzregeln 49, 51
- L**  
 Lagrange-Dichte 30–32  
 Lagrange-Funktion 2, 15, 16, 23, 25–27, 32, 52, 81, 90  
 Laguerre-Polynome 39, 40  
 Langevin-Gleichung 59  
 Liouville-Gleichung 8, 59  
 Ljapunov-Funktion 15, 17, 18
- M**  
 Marginalverteilung 57, 61–63, 86, 91  
 Materiewelle 1, 49  
 Messung 6, 57, 63, 65, 67, 71, 75, 77–80, 82–84, 88, 98
- N**  
 Navier-Stokes-Gleichung 55  
 Negentropie 22, 63  
 Nichtlokalität 6, 83, 85  
 Nullpunktsenergie 2, 3, 33–35, 38, 40, 57, 61, 64, 65, 90
- O**  
 optische Analogie 3, 49, 89  
 Oszillatorpotential 40, 44, 61
- P**  
 Pauli-Gleichung 91  
 Pauli-Prinzip 91
- Q**  
 Quantenlogik 67, 71, 72, 91  
 Quantenpotential 7, 23–29, 38, 40, 54, 55, 87, 90, 91  
 Quantensprünge 2, 6, 82, 90  
 Quantenthermodynamik 2, 8, 90  
 Quantisierung 2, 3, 33, 35, 43, 53, 90, 99  
 Quantisierungsbedingungen 9, 49, 66
- R**  
 realistische Deutung 6, 87  
 Regressions-Schwankungs-Hypothese 17
- Reibungskoeffizient 17, 61  
 Reversibilität 8–11, 91  
 Riccati-Gleichung 23, 26–30, 33–36, 38, 39
- S**  
 Schrödinger-Gleichung 2, 3, 7, 9–11, 23–26, 28–32, 43, 44, 49, 51, 52, 77, 80–82, 86–90  
 Schrödingers Katze 76, 77, 93, 97  
 Schwankungstheorie 5, 77, 89  
 Selbstorganisation 13, 18, 20, 22, 97  
 statistische Deutung 1–5, 23, 50  
 statistische Kräfte 7, 9, 13, 23, 30, 33, 87  
 Strahlungsdämpfung 30, 66, 90  
 Subjekt-Objekt-Spaltung 57, 67, 78  
 Superposition 43, 76, 77  
 Superpotential 23, 26, 27, 33, 54
- T**  
 Teilchenbild 1, 4, 49, 57, 59, 89, 91  
 thermodynamische Kraft 14, 15, 19, 55, 90  
 thermodynamische Stabilität 17, 33–35, 46, 62, 63  
 trojanisches Pferd 5, 77, 89  
 Tunneleffekt 91
- U**  
 Unschärferelation 3, 57–59, 61–64, 66, 67, 76, 86, 91
- V**  
 Vakuumfluktuationen 9, 60–62, 64, 88
- W**  
 Wahrscheinlichkeitsflüssigkeit 3, 49, 54–56  
 Welle-Teilchen-Dualismus 1, 3, 6, 49, 50  
 Wellenbild 1, 49, 51, 53, 57, 58, 89, 91  
 Wellenfunktion 1–3, 5–7, 23, 24, 26, 28, 30, 50, 54, 71, 75–77, 79, 80, 82–84, 87, 90  
 Wirkungsintegral 31, 52, 53  
 Wirkungsprinzip 52  
 Wirkungsquantum 24, 26, 32, 49, 50, 53, 56, 61, 63, 79, 90
- Z**  
 Zeitskalentrennung 10, 11, 14, 91  
 Zeitumkehrinvarianz 3, 8, 10, 11, 16, 82, 90, 91, 93  
 Zeitverschiebungsinvarianz 10  
 Zinseszinsformel 22  
 Zustandsreduktion 79, 87  
 zweiter Hauptsatz 3, 8–10, 14, 16, 20, 57, 61, 63, 64, 86, 91